

第零章 基本概念

0.1 同伦

0. 在无特殊声明的情况下, 本文中提到的映射都是连续的.

1. **形变收缩** (deformation retraction) 描述从一个空间 X 到其子空间 $A \subset X$ 的一系列连续变化. 数学上其是一族由“时间”参数 $t \in I := [0, 1]$ 确定的映射 $f_t : X \rightarrow A, t \in I$, 且满足 $f_0 = \mathbb{1}_X, f_1(X) = A$ 以及 $f_t|_A = \mathbb{1}_A$. 此外, 这族函数诱导的 $X \times I \rightarrow X$ 的函数 $(x, t) \mapsto f_t(x)$ 应该关于 x 和 t 都连续.

2. 空间间的映射 $f : X \rightarrow Y$ 诱导对应的**映射柱面** (mapping cylinder). 借助映射 f 将柱面 $X \times I$ 的底部 (指 $X \times \{1\}$) 和 Y 中 $f(X)$ 的对应部分黏起来, 就得到了映射柱面 M_f . 映射柱面也可以看成是 $X \times I \sqcup Y$ 关于 $x \sim y : y = f(x)$ 的商空间.

3. 形变收缩是一种特殊的**同伦** (homotopy). 因此同伦就是任意的一族关于 $t \in I$ 的函数 f_t , 且这族函数诱导的 $X \times I \rightarrow X$ 的函数 $(x, t) \mapsto f_t(x)$ 连续. 如果存在一个同伦 f_t 使 $f_0 = f, f_1 = g$, 那就可以说 f 和 g 是**同伦等价的** (homotopic). $\bigcirc - \bigcirc$

引入同伦的概念后, 形变收缩可以看成是 X 上的恒等映射 $\mathbb{1}_X$ 与某个 X 到 A 的**收缩映射** (retraction) r 之间的同伦. 很明显, 收缩映射 r 要满足 f_1 满足的条件, 即 $r(X) = A$ 和 $r|_A = \mathbb{1}_A$. 这个条件也可以用 $r : X \rightarrow A, r^2 = r$ 描述. 收缩映射类似于投影映射.

收缩映射的条件来自前面形变收缩的定义, 但是并非所有收缩映射都是形变收缩的终点映射. 例如, 对一个不连通的空间, 所有点映到某个点的映射是收缩映射, 但是其不和原空间的恒等映射同伦.

4. 形变收缩是满足 $f_t|_A = \mathbb{1}_A$ 的同伦. 对一般情况, 如果一个同伦在子集 A 上的限制始终是恒等映射, 那么可以叫它**相对 A 的同伦** (homotopy

relative to A), 同时也可以称 f_0 和 f_1 是**相对 A 同伦**的. 一般简记为 $\text{rel}A$.

5. 对 $f: X \rightarrow Y$, 如果能找到一个对应的 $g: Y \rightarrow X$ 让 $fg \simeq \mathbb{1}_Y$ 并且让 $gf \simeq \mathbb{1}_X$, 那么 f 是一个**同伦等价** (homotopy equivalence), 同时两个空间也可以称为**同伦等价的** (homotopy equivalent), 或者说它们有**相同的同伦型** (have the same homotopy type), 记作 $X \simeq Y$.

和单点有相同同伦型的空间也叫可缩的 (contractible). 按照定义, 可缩空间 X 上的恒等映射 $\mathbb{1}_X$ 和其上的常映射 (单点到 X 自然是常映射, 再复合上恒等映射得到一个 X 上的常映射) 同伦, 这种性质有个额外的名字叫做**零同伦** (nullhomotopic).

0.2 胞腔复形

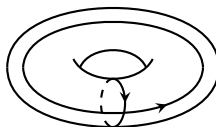


图 1: 亏格 1 的甜甜圈

6. **n 维胞腔** (n -cell) 是同胚于 n 维开圆盘 $D^n - \partial D^n$ 的流形. 从这里也能看出 D^n 指闭的 n 维圆盘 (即, 到圆心距离不超过 1 的点集). 此外, S^n 指 $n+1$ 维欧氏空间 \mathbb{R}^{n+1} 中的 n 维球面.

7. **胞腔复形** (cell complex, CW complex) 的归纳构造:

- (1) 择定一个离散点集 X^0 . 其中的点也就是 0 维胞腔. X^0 也叫做 **0 维骨架** (0-skeleton).
- (2) 确定了 $n-1$ 维骨架 X^{n-1} 之后, 将每个 n 维胞腔 e_α^n 按照对应的粘贴映射 φ_α 粘到 $n-1$ 维骨架 X^{n-1} 上去, 得到 n 维骨架 X^n . 每个粘贴映射确定了胞腔对应的闭圆盘边界到 $n-1$ 维骨架上某个圆的对应关系 $x \sim \varphi_\alpha(x)$, 因此 X^n 就是 $X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha$ 在这些对应关系下的商空间, 可以认为 $X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha e_\alpha^n$.
- (3) 胞腔复形的递归构造可以是有限步, 也可以是无限步. 如果是无限的, 那么最终得到的复形是 $X = \cup_n X^n$, 其上的拓扑是弱拓扑: X 中的子

集是开集当且仅当其与所有 X^n 的交都是开集; 如果是有限的, 说明存在 n , $X = X^n$, 这个 n 也就被称为胞腔复形的维数.

8. [例] n 维实射影空间 (real projective n-space) \mathbb{RP}^n 是 \mathbb{R}^{n+1} 中所有通过原点的直线之空间. 如果用每根直线在 n 维单位球 S^n 上的交点代指这条直线, 我们就可以把 \mathbb{RP}^n 看成是单位球 S^n 的对踵点粘合得到的流形, $S^n/(v \sim -v)$. 也可以去掉下半球, 将其视作将闭半球 D^n 边界 ∂D^n 的相对点粘合得到的流形. 因为粘合 ∂D^n 的相对点得到恰是 \mathbb{RP}^{n-1} , 因此 \mathbb{RP}^n 可以看成是将一个 n 维胞腔 e^n 粘到 \mathbb{RP}^{n-1} 上得到的. 于是乎 \mathbb{RP}^n 作为胞腔复形的结构为 $e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$.

n 维复射影空间 (complex projective n-space) \mathbb{CP}^n 是 \mathbb{C}^{n+1} 中所有通过原点的复直线之空间. 类似实射影空间的定义, 这里复直线即为 \mathbb{C}^{n+1} 的一个 1 维子空间, 由一个向量 $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ 张成. 一维的复空间可以对应两维的实空间, 因此 \mathbb{CP}^n 也可以看成是 \mathbb{C}^{n+1} 中的单位球 S^{2n+1} 按照复空间的规则粘合得到的流形. 由于是复空间, 两个点等同对应有复数 λ 来让 $v \sim \lambda v$.

实数的情况中, 我们把球最终约化到了上半球, 也就是先把下半球粘到了上半部分. 从坐标的角度, 就是先处理最后一位坐标中非零的点. 那么在复数的情况中, 对最后一位坐标非零的点 v , 我们总可以找到合适的复数 λ 来让 λv 的最后一位坐标变成正整数. 此时, 这个点可以写成 $(w, \sqrt{1-|w|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. 这些点从 S^{2n+1} 的角度看, 最后一位坐标 0, 倒数第一位坐标为正. 因此这部分正好对应 S^{2n} 的上半部分, 等同于一个 $2n$ 维的圆盘 D_+^{2n} . 其边界点集 $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 对应倒数第一位坐标也都是 0 的, 也就是一个 S^{2n-1} . 而按上述规则粘合 S^{2n-1} , 得到的就是 \mathbb{CP}^{n-1} 了. 所以 \mathbb{CP}^n 可以视为 e^{2n} 粘到 \mathbb{CP}^{n-1} 得到的. 于是乎 \mathbb{CP}^n 作为胞腔复形的结构为 $e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$.

9. 把刻画胞腔 e_α^n 粘贴到复形 X 的映射 (e_α^n 对应的闭圆盘 D^n 之边界 S^{n-1} 到骨架的映射) 延拓到整个闭圆盘上, 也就得到了特征映射 (characteristic map) $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$. 这个映射刻画了 e_α^n 在 X 中对应哪部分.

10. 胞腔复形 X 的部分胞腔之并形成的闭子空间 A 是 X 的子复形 (subcomplex). A 本身也是一个胞腔复形, 因为 A 根据定义是闭的, 那么每个胞腔对应的特征映射的像也完全包含在 A 中. (X, A) 也叫做一个 CW 对.

- $k \leq n$, 实射影空间 $\mathbb{RP}^k \subset \mathbb{RP}^n$, 前者是后者的子复形;