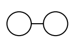
第零章　基本概念

0.1　同伦

0. 在无特殊声明的情况下, 本文中提到的映射都是连续的.

1. **形变收缩** (deformation retraction) 描述从一个空间 X 到其子空间 $A \subset X$ 的一系列连续变化. 数学上其是一族由 “时间” 参数 $t \in I := [0,1]$ 确定的映射 $f_t : X \to A, t \in I$, 且满足 $f_0 = \mathbb{1}_X$, $f_1(X) = A$ 以及 $f_t|_A = \mathbb{1}_A$. 此外, 这族函数诱导的 $X \times I \to X$ 的函数 $(x,t) \mapsto f_t(x)$ 应该关于 x 和 t 都连续.

2. 空间间的映射 $f : X \to Y$ 诱导对应的**映射柱面** (mapping cylinder). 借助映射 f 将柱面 $X \times I$ 的底部 (指 $X \times \{1\}$) 和 Y 中 $f(X)$ 的对应部分黏起来, 就得到了映射柱面 M_f. 映射柱面也可以看成是 $X \times I \sqcup Y$ 关于 $x \sim y : y = f(x)$ 的商空间.

3. 形变收缩是一种特殊的**同伦** (homotopy). 因此同伦就是任意的一族关于 $t \in I$ 的函数 f_t, 且这族函数诱导的 $X \times I \to X$ 的函数 $(x,t) \mapsto f_t(x)$ 连续. 如果存在一个同伦 f_t 使 $f_0 = f$, $f_1 = g$, 那就可以说 f 和 g 是**同伦等价的** (homotopic). 

引入同伦的概念后, 形变收缩可以看成是 X 上的恒等映射 $\mathbb{1}_X$ 与某个 X 到 A 的**收缩映射** (retraction) r 之间的同伦. 很明显, 收缩映射 r 要满足 f_1 满足的条件, 即 $r(X) = A$ 和 $r|_A = \mathbb{1}_A$. 这个条件也可以用 $r : X \to A$, $r^2 = r$ 描述. 收缩映射类似于投影映射.

收缩映射的条件来自前面形变收缩的定义, 但是并非所有收缩映射都是形变收缩的终点映射. 例如, 对一个不连通的空间, 所有点映到某个点的映射是收缩映射, 但是其不和原空间的恒等映射同伦.

4. 形变收缩是满足 $f_t|_A = \mathbb{1}_A$ 的同伦. 对一般情况, 如果一个同伦在子集 A 上的限制始终是恒等映射, 那么可以叫它**相对 A 的同伦** (homotopy

relative to A), 同时也可以称 f_0 和 f_1 是**相对 A 同伦**的. 一般简记为 rel$A$.

5. 对 $f: X \to Y$, 如果能找到一个对应的 $g: Y \to X$ 让 $fg \simeq \mathbb{1}_Y$ 并且让 $gf \simeq \mathbb{1}_X$, 那么 f 是一个**同伦等价** (homotopy equivalence), 同时两个空间也可以称为**同伦等价**的 (homotopy equivalent), 或者说它们有**相同的同伦型** (have the same homotopy type), 记作 $X \simeq Y$.

和单点有相同同伦型的空间也叫可缩的 (contractible). 按照定义, 可缩空间 X 上的恒等映射 $\mathbb{1}_X$ 和其上的常映射 (单点到 X 自然是常映射, 再复合上恒等映射得到一个 X 上的常映射) 同伦, 这种性质有个额外的名字叫做**零同伦** (nullhomotopic).

0.2 胞腔复形

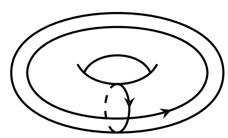


图 1: 亏格 1 的甜甜圈

6. **n 维胞腔** (n-cell) 是同胚于 n 维**开**圆盘 $D^n - \partial D^n$ 的流形. 从这里也能看出 D^n 指闭的 n 维圆盘 (即, 到圆心距离不超过 1 的点集). 此外, S^n 指 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维球面.

7. **胞腔复形** (cell complex, CW complex) 的归纳构造:

(1) 择定一个离散点集 X^0. 其中的点也就是 0 维胞腔. X^0 也叫做 **0 维骨架** (0-selecton).

(2) 确定了 $n-1$ 维骨架 X^{n-1} 之后, 将每个 n 维胞腔 e^n_α 按照对应的粘贴映射 φ_α 粘到 $n-1$ 维骨架 X^{n-1} 上去, 得到 n 维骨架 X^n. 每个粘贴映射确定了胞腔对应的闭圆盘边界到 $n-1$ 维骨架上某个圆的对应关系 $x \sim \varphi_\alpha(x)$, 因此 X^n 就是 $X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha$ 在这些对应关系下的商空间, 可以认为 $X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha e^n_\alpha$.

(3) 胞腔复形的递归构造可以是有限步, 也可以是无限步. 如果是无限的, 那么最终得到的复形是 $X = \cup_n X^n$, 其上的拓扑是弱拓扑: X 中的子

集是开集当且仅当其与所有 X^n 的交都是开集; 如果是有限的, 说明存在 n, $X = X^n$, 这个 n 也就被称为胞腔复形的维数.

8. [**例**]n **维实射影空间** (real projective n-space) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有通过原点的直线之空间. 如果用每根直线在 n 维单位球 S^n 上的交点代指这条直线, 我们就可以把 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 看成是单位球 S^n 的对踵点粘合得到的流形, $S^n/(v \sim -v)$. 也可以去掉下半球, 将其视作将闭半球 D^n 边界 ∂D^n 的相对点粘合得到的流形. 因为粘合 ∂D^n 的相对点得到恰是 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, 因此 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 可以看成是将一个 n 维胞腔 e^n 粘到 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ 上得到的. 于是乎 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 作为胞腔复形的结构为 $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$.

n **维复射影空间** (complex projective n-space) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中所有通过原点的复直线之空间. 类似实射影空间的定义, 这里复直线即为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个 1 维子空间, 由一个向量 $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ 张成. 一维的复空间可以对应两维的实空间, 因此 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 也可以看成是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的单位球 S^{2n+1} 按照复空间的规则粘合得到的流形. 由于是复空间, 两个点等同对应有复数 λ 来让 $v \sim \lambda v$.

实数的情况中, 我们把球最终约化到了上半球, 也就是先把下半球粘到了上半部分. 从坐标的角度, 就是先处理最后一位坐标中非零的点. 那么在复数的情况中, 对最后一位坐标非零的点 v, 我们总可以找到合适的复数 λ 来让 λv 的最后一位坐标变成正整数. 此时, 这个点可以写成 $(w, \sqrt{1-|w|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. 这些点从 S^{2n+1} 的角度看, 最后一位坐标 0, 倒数第一位坐标为正. 因此这部分正好对应 S^{2n} 的上半部分, 等同于一个 $2n$ 维的圆盘 D^{2n}_+. 其边界点集 $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 对应倒数第一位坐标也都是 0 的, 也就是一个 S^{2n-1}. 而按上述规则粘合 S^{2n-1}, 得到的就是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 了. 所以 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 可以视为 e^{2n} 粘到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 得到的. 于是乎 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 作为胞腔复形的结构为 $e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$.

9. 把刻画胞腔 e^n_α 粘贴到复形 X 的映射 (e^n_α 对应的闭圆盘 D^n 之边界 S^{n-1} 到骨架的映射) 延拓到整个闭圆盘上, 也就得到了**特征映射** (characteristic map) $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$. 这个映射刻画了 e^n_α 在 X 中对应哪部分.

10. 胞腔复形 X 的部分胞腔之并形成的闭子空间 A 是 X 的**子复形** (subcomplex). A 本身也是一个胞腔复形, 因为 A 根据定义是闭的, 那么每个胞腔对应的特征映射的像也完全包含在 A 中. (X, A) 也叫做一个 **CW 对**.

- $k \leq n$, 实射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^k \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, 前者是后者的子复形;

- $S^k \subset S^n$, 能否构成 CW 对呢? 这要看 S^n 上的胞腔复形结构.

  1. S^n 上一般的胞腔结构只有两个胞腔, e^n 以及边界粘向的点. 在这种结构里, 并无 S^k 的影子, 也因此不形成 CW 对;
  2. 如果类似构造实射影空间的过程, 视 S^n 为上下半球 e^n 粘到赤道 S^{n-1} 上. 此时 S^k 就是 S^n 的子复形.

11. 虽然大多的例子中, 单个胞腔的闭包都是子复形. 但其实单个胞腔的闭包**未必**是子复形. 例如将一个 2-胞腔只粘到 S^1 的部分圆弧上, 则这个 2-胞腔的闭包就不是子复形. 因为闭包中 2-胞腔的 "缝合线"(也就是边界对应闭包中的部分) 并不是原复形中的完整胞腔.

0.3 空间变换

本节总结一些可以实施于胞腔复形的操作.

12. **积** (product). 即简单的笛卡尔积. 但积复形上的胞腔结构可能比积拓扑要细一些, 即会出现一些不在积拓扑中的开集, 但 Hatcher 表示这种情况甚少引起问题.

13. **商** (quotient). 对一个 CW 对 (X, A), 可以将 A 商去, 得到 X/A. X/A 的胞腔包括 $X - A$ 中的胞腔以及 A 对应的那个 0-胞腔. 原本在 $X - A$ 中的胞腔到商复形的粘贴映射则是原来的粘贴映射与商映射的复合.

14. **悬垂** (suspension)[1]. 字面意思是将复形悬挂于两个固定点之间. 数学上的描述为, 复形 X 的悬垂是将 $X \times I$ 中的 $X \times \{0\}$ 和 $X \times \{1\}$ 分别 "缩" 成一个点得到的商空间, 记作 SX. 右图是 S^n(中间的圆) 对应的 SS^n, 即从 n 维圆的每个点向上下两个 (极) 点连结线段, 得到两个空心锥扣合而成的复形. 图中可以看出 $SS^n = S^{n+1}$, 这也是因为上下两个锥都等同于 e^n, 而 S^{n+1} 可以看作两个 e^{n+1} 粘到 S^n 得到的.

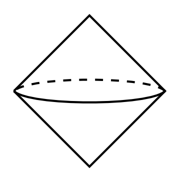


图 2: 圆盘之悬垂

悬垂是上下两个锥并起来, 那自然也可以只长出一个锥, 也就是:

15. **锥** (cone). 复形作底, 向上长出一个锥体. 也就是 $CX := X \times I/(X \times \{0\})$.

[1]翻译参考日文懸垂(けんすい)

16. **连结** (join). 连结的概念可以从锥开始推广. 锥可以看作是从复形 X 的每个点向一个特定的点连线段, 所有线段之并形成的复形. 而连结操作就是推广 "特定的点" 为一般的空间. 即如给定两个胞腔复形 X 和 Y, 在它们的所有点对间连线, 其并形成的新复形称为 X 和 Y 的连结 $X * Y$. 或者用商空间的方法描述, 就是 $X \times Y \times I$ 的商, 等价关系是 $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0$ 及 $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. 例如锥可以看作 $X * \cdot$, 和点的连结; 两条线段的连结可以形成一个四面体 (如图 **??**)

图 3: 两条线段的连结

第一章 基本群

1.1 道路, 同伦, 基本群

1.2 圆的基本群

1.2.1 复叠空间

研究圆的基本群时, 需要处理绕了超过一圈的曲线. 在第三个维度将这些 "重叠" 的圈分开不失为一种直观的选择. 故引出覆叠空间的概念.

对空间 X, 其覆叠空间 (covering space) 是指一个空间 $\tilde{X}$ 以及配套的映射 $p : \tilde{X} \to X$, 满足

> 任何 X 中点 $x \in X$ 都有邻域 $U \subset X$ 使 $p^{-1}(U)$ 是由若干不交开集并成, 且这些开集分别通过 p 映到 U 的投影都是同胚.

此时称 U **受均匀覆盖** (be evenly covered).

如 X 是二维的圆圈, 其覆叠空间 $\tilde{X}$ 可为三维空间中一条无限的弹簧螺线. 对 X 上的一个环 ω, 根据其绕的圈数, 可以在 $\tilde{X}$ 中找到对应的一条螺线 $\tilde{\omega}$, $\omega = p \circ \tilde{\omega}$. 于是 $\tilde{\omega}$ 叫 ω 的**提升** (lift).

定理 1.2.1. *$\pi_1(S^1)$ 是无限循环群, 由基点于 $(0,1)$ 的环 $\omega(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ 之同伦类生成.*

定理 1.2.2 (Brouwer 不动点定理)**.** *任何 $D^2 \to D^2$ 的连续映射 h 都有不动点 x, $x = h(x)$.*

定理 1.2.3. *任何连续映射 $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ 都有一对取值相同的对踵点, 即 x, $-x$ 满足 $f(x) = f(-x)$.*

性质 1.2.1. *$\pi_1(X \times Y)$ 同构于 $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

1.3　Van Kampen 定理

定理 1.3.1. X 是道路连通的开集，且可有一族道路连通的开集 A_α 覆盖，且这些开集都包含基点 $x_0 \in X$. 若任意两个开集之交 $A_\alpha \cap A_\beta$ 道路连通，则同态 $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ 是满射. 若在此之上任意三个开集之交 $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ 仍道路连通，则 Φ 的核 N 是正规子群，由所有形如 $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}^{-1}(\omega)$ 的元素生成，其中 ω 是 $\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ 中的元素. 且 $\pi_1(X) \approx *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$.

第二章　同调

2.1　奇异同调・约化同调群

性质 2.1.1 (P109 2.6). *若 X 可分解为若干连通分量 X_α, 则其 n 阶同调群 $H_n(X)$ 同构于分量同调群之直和 $\bigoplus_\alpha H_n X_\alpha$.*

性质 2.1.2 (P109 2.7). *若 X 非空且道路连通, 则 $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$. 对一般的空间, 0 阶同调群是若干 $\mathbb{Z}$ 的直和, 其数量为连通分支个数.*

性质 2.1.3 (P110 2.8). *若 X 是一点, 则 $n > 0$ 时 $H_n(X) = 0$, $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

借此可以引入**相对同调群**的概念, 相对同调群记作 $\tilde{H}_n(X)$, 来自链复形:

$$\cdots \to C_2(X) \to C_1(X) \to C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

这里 $\epsilon(\Sigma_i n_i \sigma_i) = \Sigma_i n_i$, 是在证明 prop::2.7 时使用的映射. 约化同调和同调的关系是, $n = 0$ 时 $H_0(X) \approx \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$, $n > 0$ 时 $H_0(X) \approx \tilde{H}_0(X)$.

2.2　同伦等价

定理 2.2.1 (P111 2.10). 同伦的映射 $f, g \colon X \to Y$ 诱导相同的同调群同态 $f_* = g_*$.