第零章　0

0.1　0-1

1. 甜甜圈 T 可由矩形粘合得到, 因此不妨用 $(-1,-1)-(1,1)$ 确定的矩形 S. 并且设粘合映射为 $q: S \to T$.

目标是构造去掉一个点的甜甜圈到两个并起来的圆的形变收缩, 可以先将去点矩形缩成边框, 再用粘合映射把边框变成两个圆. 对前者构造同伦 $f_t: S \times [0,1] \to S$, 则 $q \circ f$ 就是形变收缩对应的同伦.

不妨再设去掉的点即为原点 $(0,0)$, 则 f_t 可为原点为中心的径向投影形成的同伦: 首先设 $g: S \to \partial S$ 是原点出发的径向投影函数, $g(x)$ 即 $(0,0)$ 出发指向 x 的射线与 ∂S 的交点. 则 $f_t(x) = tg(x) + (1-t)x$.

2. 可取

$$f_t(\bar{x}) := t\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} + (1-t)\bar{x}.$$

3.

(a) 只需将同伦等价函数以及到恒等的同伦都拼接起来.

(b) 显然.

(c) $f: X \to Y$ 是同伦等价, e 是其同伦等价逆, $g: X \to Y$ 与之同伦, 则有同伦 h_t, $h_0 = f$, $h_1 = g$. 则 $fe \simeq \mathbb{1}_Y$, $ef \simeq \mathbb{1}_X$. 而 $h_t e: Y \times I \to Y$ 是连续的, 同时 $h_0 e = fe$, $h_1 e = ge$, 所以 $h_t e$ 是 fe, ge 间的同伦. 由 (b) 的结论同伦是等价关系, 所以 $ge \simeq idY$. 同理 $eg \simeq \mathbb{1}_X$, 因此 g 也是同伦等价.

4. 目标是找 $\iota: A \hookrightarrow X$ 作为同伦等价的逆. 弱形变收缩条件说明存在同伦 $f_t: X \times I \to X$, $f_0 = \mathbb{1}_X$; $f_1(A) \subset A$; 对任何 t, $f_t(A) \subset A$. 可以借助 f_t 说明 f_1 恰是嵌入映射 ι 的同伦等价逆.

(a) 说明 $\iota\circ f_1 : X\to A\subset X$ 同伦于 $\mathbb{1}_X$. 因为 $f_1(X)\subset A$ 以及 $\iota|_A=\mathbb{1}_A$, 所以 $\iota\circ f_1=f_1$. 因此弱形变收缩的条件保证这个同伦成立.

(b) 说明 $f_1\circ\iota : A\to A$ 同伦于 $\mathbb{1}_A$. 看起来直接复合 ι 到 f_t 上就可以了. 但要注意 $\mathbb{1}_A$ 定义域和值域都在 A 上, 所以同伦变化必须在 A 内完成. 幸好条件中 $\forall t, f_t(A)\subset A$ 保证了这一点.

0.1.1

记包含映射 $\iota : V\hookrightarrow U$. 要证明 ι 零同伦, 即需要找到其在 V 上到常映射 $V\to x$ 的同伦 $g_t : V\times I\to U$, $g_0=\iota$, $g_1=v\in V\mapsto x$.

X 能形变收缩到点 x, 说明有从 $\mathbb{1}_X$ 到常映射 $y\in X\mapsto x$ 的同伦 f_t 且 $f_t(x)\equiv x$. 自然想到, 将 f_t 限制在 $V\times I$ 上, 若结果是同伦, 问题也就迎刃而解. 因此可以尝试找到一个合适的 V.

要让 f_t 限制在 $V\times I$ 上是同伦, 就需要满足 $f_t(V)\subset U$. 因此 V 需要落在 U 在所有时刻的原像里, 即集合 $\cap_t f_t^{-1}(U)$ 里. 因此只需要证明 x 在 $\cap_t f_t^{-1}(U)$ 中有一个开邻域. 换句话说, 找到的 $V\times I$ 要包含在 $f^{-1}(U)$ 内.

因为 f 是连续函数, 因此 f_t 也都是连续的, 故 $f^{-1}(U)$ 是开集. $X\times I$ 取乘积拓扑, 因此 X 中的开集和 I 中开区间的笛卡尔积构成的集族

$$\{W\times J : W\subset X\text{open}, J=(a,b)\cap I, a<b\}$$

是 $X\times I$ 的一组拓扑基. 因此任意时刻 t 处, $(x,t)\in f^{-1}(U)$ 有基开邻域 $V_t\times I_t$, 这里 $V_t\subset U\subset X$ 是 X 中的开集, I_t 是 I 中的开区间.

借此得到了一组 $\{V_t\times I_t\subset U\subset X\times I : t\in I\}$, 每个 $V_t\times I_t$ 覆盖 (x,t) 附近的一部分. 故 I_t 构成 I 的开覆盖. 因为 $I=[0,1]$ 是紧集, 根据有限覆盖性质, 存在有限的子覆盖 $\{I_{t_1},\cdots,I_{t_n}\}$. 那么我们只需取 $V:=\cap_{i=1}^n V_{t_i}$, V 就是开集 (开集的有限交) 且满足 $V\times I\subset U$.

0.1.2

(a) 取 $f_t(x,y):=(x,ty)$. f_t 是连续函数, 且 $f_0(x,y)=(x,0)$ 是 X 到线段 $[0,1]\times 0$ 的收缩函数, $f_1=\mathbb{1}_X$. 此外, 对线段 $[0,1]\times 0$ 中的点 $(x,0)$, $f_t(x,0)\equiv(x,0)$, 所以 $f|_{[0,1]\times 0}=\mathbb{1}$. 故 f_t 是 X 到 $[0,1]\times 0$ 的形变收缩.

由上结论, X 显然是可以进一步缩到一个点的, 同时因为 f_t 在线段上始终不变, 很容易让拓展的同伦始终在那个点上保持不变. 即 X 可以形变收缩到线段 $[0,1]\times 0$ 上任意一点.

至于 X 不能形变收缩到其他单点, 直观的原因可以如下理解: 形变收缩的过程中, 任何一个点都是沿着一条连续的路径移动到终点的. 由于 X 上端的齿仅存在于横坐标有理数处, 这就意味着如果要缩到 $y\neq 0$ 的任意点 $\mathbf{p}$ 处, 距离 $\mathbf{p}$ 再近的点也不能直接移动过去, 而是要沿着自己所在的齿下移, 在 $[0,1]\times 0$ 上移动到 $\mathbf{p}$ 对应的横坐标处, 再沿着齿上移. 因此 $\mathbf{p}$ 附近的点都要先跑到离 $\mathbf{p}$ 很远的地方再跑回来, 而形变收缩的连续性要求它们不能都离 $\mathbf{p}$ 太远.

有了以上的思路, X 不能形变收缩到其他单点可以如下证明: 设 X 通过同伦 g_t 形变收缩到点 $\mathbf{p}=(p_1,p_2), p_2\neq 0$. 取一列 $[0,1]$ 间收敛到 p_1 的有理数 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}, r_t\neq p_1$. 则 (r_i,p_2) 收敛到 (p_1,p_2).

接下来证明, 任意 (r_i,p_2) 在形变收缩的过程中, 总是要走到 $(r_i,0)$ 点的:

> 首先, $g_t(r_i,p_2)$ 可以看作 t 为参数的一条连续的曲线, 不妨记之为 $\gamma(t)=(\gamma_x(t),\gamma_y(t))$. 于是 $\gamma_y(t)$ 也是连续函数. 由于 $\gamma_x(0)=r_i$, $\gamma_x(1)=p_1$, 根据介值定理, 取无理数 $s_1\in[r_i,(r_i+p_2)/2)$, 一定存在 t_1, 其处 $\gamma_x(t_1)=s_1$.
> 类似如上过程, 可以逐个找到 s_i 和 t_i, $r_i<s_i<(r_i+s_{i-1})/2$, $t_i<t_{i-1}$, 且 $\gamma_x(t_i)=s_i$. 因为 t_i 是单调下降且有界的数列, 故其必有极限 $\bar{t}$. 则根据连续性,
> $$r_i=\lim_{i\to\infty}\gamma_x(t_i)=\gamma_x(\bar{t})$$
> 也就是说 $\gamma(\bar{t})=(r_i,0)$, 这就证明了需要的结论.

有了以上的结论, 可知对任意 i, 点 (r_i,p_2) 会在某个时刻 t_i 到达 $(r_i,0)$. 即 $g_{t_i}(r_i,p_2)=(r_i,0)$. 取 $\{t_i\}$ 的一个收敛子列 $\{t_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 记其极限为 t. 则 (r_{i_k},p_2,t_{i_k}) 收敛到 (p_1,p_2,t). 那么根据 g 的连续性,

$$g_t(p_1,p_2)=\lim_{k\to\infty}g_{t_{i_k}}(r_{i_k},p_2)=\lim_{k\to\infty}(r_{i_k},0)=(p_1,0)$$

但因为 g_t 在 (p_1, p_2) 上应不变, 即 $g_t(p_1, p_2) = (p_1, p_2)$, 矛盾. 故 X 不能形变收缩到 $\mathbf{p}$ 点, 证讫.