1 子流形的基本公式

1.1 等距浸入和嵌入

定义 1.1.1 (等距浸入). *若映射 $F\colon (M^n, g) \hookrightarrow (N^{n+p}, \bar{g})$ 是浸入, 且 M 上的度量恰为由 F 将 N 上度量拉回得到的, 即 $g = F^*\bar{g}$, 则称 F 是***等距浸入***.*

定义 1.1.2 (嵌入). *若映射 $F\colon (M^n, g) \hookrightarrow (N^{n+p}, \bar{g})$ 是浸入, 且还满足*

1. *F 是单射;*

2. *$F\colon M \to F(M)$ 是同胚;*

*则称 F 是***嵌入***.*

若 $F\colon M \to N$ 同时是等距浸入和嵌入, 则称其是**等距嵌入**, 同时可将 N 的子集 $F(M)$ 和 M 等同, $F(M)$ 上的度量即为包含映射 $\iota\colon F(M) \to N$ 诱导的度量.

以下除特殊声明外, M^n 是 N^{n+p} 的嵌入子流形.

1.2 法空间・法丛

定义 1.2.1. *设 $x \in M \subset N$, 则 $T_xM \subset T_xN$, 其正交补记作 N_xM. $NM = \cup_{x\in M} N_xM$ 为 M 的***法丛***, N_xM 为 M 在 x 点处的***法空间***. 由定义 $T_xN = T_xM \oplus N_xM$.*

1.3 第二基本形式・平均曲率向量

设 $\overline{\nabla}$ 是 N 上和 $\bar{g}$ 相容的黎曼联络, 取 M 上向量场 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. 可以将 X, Y 延拓到 N 上, 得到 N 上的切向量场 $\bar{X}, \bar{Y}$. 则

$$\overline{\nabla}_X Y := \overline{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\big|_M, \tag{1}$$

同时这个限制和 X 以及 Y 的延拓方式无关. $\overline{\nabla}_X Y$ 是 T_xN 中的向量, 对其按切向和法向分解:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{2}$$

其中 $\nabla_X Y \in T_xM$ 是切向部分, 且 ∇ 是 M 上和 g 相容的黎曼联络. 而 $h\colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to N(M)$ 是一个对称双线性张量场. 公式 2 称为 **Gauss 公式**. 对于 h 有如下定义:

定义 1.3.1. h 为子流形 M 上的**第二基本形式**. 借助它可以定义法向量场

$$\overrightarrow{H} := \frac{1}{n}\mathrm{tr}_g h, \tag{3}$$

即 h 迹的平均, 为子流形 M 的**平均曲率向量**.

1.4 Weingarten 公式・形状算子

假设如上, 但考虑光滑法向量场 $\xi \in N(M)$ 及其延拓 $\bar{\xi} \in \mathscr{X}(N)$. 类似有:

$$\overline{\nabla}_X \xi := \overline{\nabla}_{\bar{X}} \xi\big|_M ,$$

这个延拓也与 X 以及 ξ 的延拓方式无关. $\overline{\nabla}_X \xi$ 是 $T_x N$ 中的向量, 对其按切向和法向分解:

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \widetilde{\nabla}_X \xi, \tag{4}$$

其中 $A_\xi \colon \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ 是线性变换, 称为**形状算子**或 **Weingarten 变换**. $\widetilde{\nabla} \colon \mathscr{X}(M) \times N(M) \to N(M)$ 是**法丛的联络**.

1.5 第二基本形式和形状算子的关系

取切向量场 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, 法向量场 $\xi \in N(M)$. 则可以得到如下等式:

$$0 = X\langle Y, \xi \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi, +\rangle \langle Y, \overline{\nabla}_X \xi \rangle = \langle h(X,Y), \xi \rangle + \langle Y, -A_\xi X \rangle.$$

因此得到等式:

$$\langle h(X,Y), \xi \rangle = \langle Y, A_\xi X \rangle \tag{5}$$

1.6 子流形基本方程

下面推导子流形上的基本方程.

依然设 X, Y 是 M 上光滑向量场, $\bar{X}, \bar{Y}$ 是其在 N 上的光滑延拓. 则在 M 上, Lie 括号 $[\bar{X}, \bar{Y}]\big|_M = [X, Y]$ 是和延拓方式无关的. 因此结合 1 式, 接下来在 M 上可将 X, Y 和 $\bar{X}, \bar{Y}$ 等同.

设 $\overline{\mathrm{Rm}}$ 为 N 上的曲率张量, Rm 为 M 上的曲率张量. 再取子流形上的向量场 Z,

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{Rm}}(X,Y)Z\\
&=\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z-\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\\
&=\overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z+h(Y,Z))-\overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z+h(X,Z))-\big(\nabla_{[X,Y]}Z+h([X,Y],Z)\big)\\
&=\nabla_X\nabla_Y Z+h(X,\nabla_Y Z)-A_{h(Y,Z)}X+\widetilde{\nabla}_X h(Y,Z)\\
&-\nabla_Y\nabla_X Z-h(Y,\nabla_X Z)+A_{h(X,Z)}Y-\widetilde{\nabla}_Y h(X,Z)\\
&-\nabla_{[X,Y]}Z-h([X,Y],Z)\\
&=\mathrm{Rm}(X,Y)Z+\big(A_{h(X,Z)}Y-A_{h(Y,Z)}X\big)\\
&+\Big(h(X,\nabla_Y Z)-h(Y,\nabla_X Z)-h([X,Y],Z)+\widetilde{\nabla}_X h(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_Y h(X,Z)\Big).
\end{aligned}
$$

最后一个等号中, 除 M 上曲率张量项外的项按括号分成两部分, 前一部分为切向, 而后一部分为法向.