1 子流形的基本公式

1.1 等距浸入和嵌入

定义 1 (等距浸入)**.** *若映射 $F\colon (M^n, g) \hookrightarrow (N^{n+p}, \bar{g})$ 是浸入, 且 M 上的度量恰为由 F 将 N 上度量拉回得到的, 即 $g = F^*\bar{g}$, 则称 F 是*等距浸入.

定义 2 (嵌入)**.** *若映射 $F\colon (M^n, g) \hookrightarrow (N^{n+p}, \bar{g})$ 是浸入, 且还满足*

1. *F 是单射;*

2. *$F\colon M \to F(M)$ 是同胚;*

*则称 F 是*嵌入.

若 $F\colon M \to N$ 同时是等距浸入和嵌入, 则称其是**等距嵌入**, 同时可将 N 的子集 $F(M)$ 和 M 等同, $F(M)$ 上的度量即为包含映射 $\iota\colon F(M) \to N$ 诱导的度量.

以下除特殊声明外, M^n 是 N^{n+p} 的嵌入子流形.

1.2 法空间・法丛

定义 3. *设 $x \in M \subset N$, 则 $T_xM \subset T_xN$, 其正交补记作 N_xM. $NM = \cup_{x\in M} N_xM$ 为 M 的*法丛*, N_xM 为 M 在 x 点处的*法空间*. 由定义 $T_xN = T_xM \oplus N_xM$.*

1.3 第二基本形式・平均曲率向量

设 $\bar{\nabla}$ 是 N 上和 $\bar{g}$ 相容的黎曼联络, 取 M 上向量场 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. 可以将 X, Y 延拓到 N 上, 得到 N 上的切向量场 $\bar{X}, \bar{Y}$. 则

$$\bar{\nabla}_X Y := \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\big|_M \tag{1}$$

同时这个限制和 X 以及 Y 的延拓方式无关. $\bar{\nabla}_X Y$ 是 T_xN 中的向量, 对其按切向和法向分解:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2}$$

其中 $\nabla_X Y \in T_x M$ 是切向部分, 且 ∇ 是 M 上和 g 相容的黎曼联络. 而 h: $\mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to N(M)$ 是一个对称双线性张量场. 公式 2 称为 **Gauss 公式**. 对于 h 有如下定义:

定义 4. *h 为子流形 M 上的***第二基本形式***. 借助它可以定义法向量场*

$$\overrightarrow{H} := \frac{1}{n}\mathrm{tr}_g h, \tag{3}$$

*即 h 迹的平均, 为子流形 M 的***平均曲率向量**.

1.4 子流形基本方程

下面推导子流形上的基本方程.

依然设 X, Y 是 M 上光滑向量场, $\bar{X}, \bar{Y}$ 是其在 N 上的光滑延拓. 则在 M 上, Lie 括号 $[\bar{X}, \bar{Y}]\big|_M = [X, Y]$ 是和延拓方式无关的. 因此结合 1 式, 接下来在 M 上可将 X, Y 和 $\bar{X}, \bar{Y}$ 等同.

设 $\bar{\mathrm{Rm}}$ 为 N 上的曲率张量, Rm 为 M 上的曲率张量. 再取子流形上的向量场 Z,

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{Rm}}(X,Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \qquad (4)\\ &= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z) \qquad (5)\end{aligned}$$