1 子流形的基本公式

1.1 等距浸入和嵌入

定义 1.1.1 (等距浸入)**.** *若映射 $F\colon (M^n, g) \hookrightarrow (N^{n+p}, \bar{g})$ 是浸入, 且 M 上的度量恰为由 F 将 N 上度量拉回得到的, 即 $g = F^*\bar{g}$, 则称 F 是*等距浸入*.*

定义 1.1.2 (嵌入)**.** *若映射 $F\colon (M^n, g) \hookrightarrow (N^{n+p}, \bar{g})$ 是浸入, 且还满足*

1. *F 是单射;*
2. *$F\colon M \to F(M)$ 是同胚;*

*则称 F 是*嵌入*.*

若 $F\colon M \to N$ 同时是等距浸入和嵌入, 则称其是**等距嵌入**, 同时可将 N 的子集 $F(M)$ 和 M 等同, $F(M)$ 上的度量即为包含映射 $\iota\colon F(M) \to N$ 诱导的度量.

以下除特殊声明外, M^n 是 N^{n+p} 的嵌入子流形.

1.2 法空间・法丛

定义 1.2.1. *设 $x \in M \subset N$, 则 $T_xM \subset T_xN$, 其正交补记作 N_xM. $NM = \cup_{x\in M} N_xM$ 为 M 的*法丛*, N_xM 为 M 在 x 点处的*法空间*. 由定义 $T_xN = T_xM \oplus N_xM$.*

1.3 第二基本形式・平均曲率向量

设 $\overline{\nabla}$ 是 N 上和 $\bar{g}$ 相容的黎曼联络, 取 M 上向量场 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. 可以将 X, Y 延拓到 N 上, 得到 N 上的切向量场 $\bar{X}, \bar{Y}$. 则

$$\overline{\nabla}_X Y := \overline{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\big|_M, \tag{1}$$

同时这个限制和 X 以及 Y 的延拓方式无关. $\overline{\nabla}_X Y$ 是 T_xN 中的向量, 对其按切向和法向分解:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{2}$$

其中 $\nabla_X Y \in T_xM$ 是切向部分, 且 ∇ 是 M 上和 g 相容的黎曼联络. 而 $h\colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to N(M)$ 是一个对称双线性张量场. 公式 2 称为 **Gauss 公式**. 对于 h 有如下定义:

定义 1.3.1. *h 为子流形 M 上的*第二基本形式*. 借助它可以定义法向量场*

$$\overrightarrow{H} := \frac{1}{n} \mathrm{tr}_g h, \tag{3}$$

*即 h 迹的平均, 为子流形 M 的*平均曲率向量*.*

1.4 Weingarten 公式・形状算子

假设如上, 但考虑光滑法向量场 $\xi \in N(M)$ 及其延拓 $\bar{\xi} \in \mathscr{X}(N)$. 类似有:

$$\overline{\nabla}_X \xi := \overline{\nabla}_{\bar{X}} \xi\big|_M,$$

这个延拓也与 X 以及 ξ 的延拓方式无关. $\overline{\nabla}_X\xi$ 是 T_xN 中的向量, 对其按切向和法向分解:

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \widetilde{\nabla}_X\xi, \tag{4}$$

其中 $A_\xi\colon \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ 是线性变换, 称为**形状算子**或 **Weingarten 变换**. $\widetilde{\nabla}\colon \mathscr{X}(M)\times N(M) \to N(M)$ 是**法丛的联络**.

1.5 第二基本形式和形状算子的关系

取切向量场 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, 法向量场 $\xi \in N(M)$. 则可以得到如下等式:

$$0 = X\langle Y,\xi\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi, +\rangle\langle Y, \overline{\nabla}_X\xi\rangle = \langle h(X,Y),\xi\rangle + \langle Y, -A_\xi X\rangle.$$

因此得到等式:

$$\langle h(X,Y),\xi\rangle = \langle Y, A_\xi X\rangle. \tag{5}$$

2 子流形基本方程

2.1 子流形基本方程・序

下面推导子流形上的基本方程.

依然设 X, Y 是 M 上光滑向量场, $\bar{X}, \bar{Y}$ 是其在 N 上的光滑延拓. 则在 M 上, Lie 括号 $[\bar{X},\bar{Y}]\big|_M = [X,Y]$ 是和延拓方式无关的. 因此结合 1 式, 接下来在 M 上可将 X, Y 和 $\bar{X}, \bar{Y}$ 等同.

设 $\overline{\mathrm{R}}$ 为 N 上的曲率张量, R 为 M 上的曲率张量. 再取子流形上的向量场 Z,

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z \\
&= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + h(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + h(X,Z)) - \big(\nabla_{[X,Y]}Z + h([X,Y],Z)\big) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) - A_{h(Y,Z)}X + \widetilde{\nabla}_X h(Y,Z) \\
&- \nabla_Y\nabla_X Z - h(Y,\nabla_X Z) + A_{h(X,Z)}Y - \widetilde{\nabla}_Y h(X,Z) \\
&- \nabla_{[X,Y]}Z - h([X,Y],Z) \\
&= \mathrm{R}(X,Y)Z + \big(A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X\big) \\
&+ \Big(h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z) + \widetilde{\nabla}_X h(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y h(X,Z)\Big).
\end{aligned}$$

最后一个等号中, 按上下两行分成两部分, 上一部分为切向, 而下一部分为法向. 可以用切/法向量与之内积得到以下公式:

2.2 子流形基本方程・Gauss 方程

取切向量场 $W \in \mathscr{X}(M)$, 内积得到

$$\begin{aligned}
&\langle\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z, W\rangle \\
&= \langle \mathrm{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle A_{h(X,Z)}Y, W\rangle - \langle A_{h(Y,Z)}X, W\rangle \\
&= \langle \mathrm{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle h(W,Y), h(X,Z)\rangle - \langle h(W,X), h(Y,Z)\rangle.
\end{aligned}$$

我们把最后这个结果, 也就是如下方程

$$\langle\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z,W\rangle = \langle\mathrm{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(W,Y),h(X,Z)\rangle - \langle h(W,X),h(Y,Z)\rangle \tag{6}$$

称为子流形的 **Gauss 方程**.

2.3 子流形基本方程・Codazzi 方程

对于 $\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z$ 的法方向, 直接考虑法向部分, 而非内积.

在这里首先计算 (定义) h 的协变微分 ∇h:

$$\nabla h(X,Y;Z) = \widetilde{\nabla}_Z h(X,Y) - h(\nabla_Z X,Y) - h(X,\nabla_Z Y).$$

将这个结果代入切向分量, 得到:

$$\begin{aligned}
&(\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z)^\perp \\
&= h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z) + \widetilde{\nabla}_X h(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y h(X,Z) \\
&= \nabla h(Y,Z;X) - \nabla h(X,Z;Y),
\end{aligned}$$

即有 **Codazzi 方程**:

$$(\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z)^\perp = \nabla h(Y,Z;X) - \nabla h(X,Z;Y). \tag{7}$$

2.4 子流形基本方程・Ricci 方程

最后我们计算法联络的曲率张量 $\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)\xi := \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi$.

取法向量场 $\eta \in N(M)$, 内积得到:

$$\begin{aligned}
&\langle\overline{\mathrm{R}}(X,Y)\xi,\eta\rangle \\
&= \langle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi,\eta\rangle \\
&= \langle h(X,-A_\xi Y) + \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi - h(Y,-A_\xi X) - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi + \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi,\eta\rangle \\
&= \langle\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)\xi + h(Y,A_\xi X) - h(X,A_\xi Y),\eta\rangle,
\end{aligned}$$

即有 **Ricci 方程**:

$$(\overline{\mathrm{R}}(X,Y)\xi)^\perp = \widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)\xi + h(Y,A_\xi X) - h(X,A_\xi Y). \tag{8}$$

Ricci 方程也有一种与法向量场 $\eta \in N(M)$ 内积的形式, 利用 $\langle h(X,Y),\xi\rangle = \langle Y,A_\xi X\rangle$, 可知

$$\langle h(Y,A_\xi X),\eta\rangle = \langle A_\eta A_\xi X,Y\rangle$$

与

$$\langle h(X,A_\xi Y),\eta\rangle = \langle A_\eta X,A_\xi Y\rangle = \langle h(A_\eta X,Y),\xi\rangle = \langle A_\xi A_\eta X,Y\rangle,$$

利用记号 $[A_\eta,A_\xi](X) = A_\eta A_\xi X - A_\xi A_\eta X$, Ricci 方程为:

$$\langle\overline{\mathrm{R}}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle[A_\eta,A_\xi](X),Y\rangle.$$

2.5 子流形基本方程・总结

$$\langle\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z,W\rangle = \langle \mathrm{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(W,Y),h(X,Z)\rangle - \langle h(W,X),h(Y,Z)\rangle. \tag{Gauss 方程}$$
$$(\overline{\mathrm{R}}(X,Y)Z)^{\perp} = \nabla h(Y,Z;X) - \nabla h(X,Z;Y). \tag{Codazzi 方程}$$
$$\langle\overline{\mathrm{R}}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle[A_\eta,A_\xi](X),Y\rangle. \tag{Ricci 方程}$$

3 活动标架法

3.1 活动标架法・序

这一部分, 我们用活动标架法计算局部坐标下的基本方程.

取 N 上单位正交的标架场 $\{e_1,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{n+p}\}$, 且满足前 n 个向量场限制在 M 上恰是 M 上的单位正交标架向量场. 以下将使用爱因斯坦求和约定, 并对一些指标作如下约定: $1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant n+p$, $1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n$, $n+1\leqslant \alpha,\beta,\cdots\leqslant n+p$. 再记 $\{\omega^A\}$ 是 $\{e_A\}$ 的对偶向量场. 特别地, ω^α 限制在 M 上都消失.

首先回顾黎曼流形上的结构方程:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^A &= -\omega^A_C\wedge\omega^C, \quad \omega^A_B=\omega^B_A,\\
\mathrm{d}\omega^A_B &= -\omega^A_C\wedge\omega^C_B + \overline{\Omega}^A_B,\\
\overline{\Omega}^A_B &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{R}}^A_{BCD}\omega^C\wedge\omega^D.
\end{aligned}$$

由于 ω^α 限制在 M 上是 0, 结合结构方程, 有:

$$0=\mathrm{d}\omega^\alpha = -\omega^\alpha_i\wedge\omega^i,$$

由 Cartan 引理, ω^α_i 可由 ω^i 线性表出. 设

$$\omega^\alpha_i = h^\alpha_{ij}\omega^j. \tag{9}$$

且由 Cartan 引理的结论, 系数 h^α_{ij} 关于 i,j 对称.

利用 N 上的结构方程, 我们可以得到 M 上的结构方程:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^i &= -\omega^i_j\wedge\omega^j, \quad \omega^i_j=\omega^j_i,\\
\mathrm{d}\omega^i_j &= -\omega^i_k\wedge\omega^k_j + \Omega^i_j,\\
\Omega^i_j &= \frac{1}{2}\mathrm{R}^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l.
\end{aligned}$$

3.2 活动标架法・Gauss 方程

对比 M 和 N 上的结构方程, 得到在 M 上:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^A_B &= -\omega^A_C\wedge\omega^C_B + \overline{\Omega}^A_B,\\
\mathrm{d}\omega^i_j &= -\omega^i_k\wedge\omega^k_j + \Omega^i_j.
\end{aligned}$$

由上式,

$$\mathrm{d}\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_\alpha^i \wedge \omega_k^\alpha + \overline{\Omega}_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i,$$

进而得

$$\Omega_j^i - \overline{\Omega}_j^i = \omega_\alpha^i \wedge \omega_k^\alpha.$$

再代入联络 1-形式的线性表示 9 式以及曲率张量的具体表示, 得到 **Gauss 方程**:

$$\mathrm{R}_{jkl}^i - \overline{\mathrm{R}}_{jkl}^i = h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha. \tag{10}$$

3.3 活动标架法 · Codazzi 方程

利用结构方程, 得到

$$\mathrm{d}\omega_i^\alpha = -\omega_k^\alpha \wedge \omega_i^k - \omega_\beta^\alpha \wedge \omega_i^\beta + \overline{\Omega}_i^\alpha,$$

同时, 由联络 1-形式的线性表示 9 式, 直接计算 $\mathrm{d}\omega_i^\alpha$ 得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_i^\alpha &= \mathrm{d}h_{ij}^\alpha \omega^j + h_{ij}^\alpha \,\mathrm{d}\omega^j \\ &= \mathrm{d}h_{ij}^\alpha \omega^j - h_{ij}^\alpha \omega_A^j \wedge \omega^A.\end{aligned}$$