1 第二节

1.1 2.5.1

题目 1. 证明: 欧氏空间的联络是唯一满足对任意常向量场 X 都有 $\nabla X = 0$ 的仿射联络.

解答. 回顾定义, 仿射联络满足

$$\nabla_{\alpha v+\beta w} X = \alpha\nabla_v X + \beta\nabla_w X$$
$$\nabla_X \alpha v + w = X(\alpha)v + \alpha\nabla_X v + \nabla_X w.$$

"$\Rightarrow$": 欧氏空间上的联络同时还是黎曼联络, 联络系数 $\Gamma^i_{jk} = 0$. 所以对常向量场 $X = X^i e_i$, 其中 X^i 都是常数, 以及对任意 $Y \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\nabla X(Y) = \nabla_Y X = Y(X^i)e_i = 0.$$

"$\Leftarrow$": 取欧氏空间的某联络 ∇, 若其对任何常向量场 $X = X^i e_i$, $\nabla X = 0$, 则任取 $Y \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$,

$$0 = (\nabla X)Y = \nabla_Y X = Y(X^i)e_i + X^j\nabla_Y e_j = X^j\nabla_Y e_j,$$

即, 对任何 j, $\nabla_Y e_j = 0$. 所以联络系数 $\Gamma^i_{jk} = \omega^i(\nabla_{e_j} e_k) = 0$. 所以, 这个联络就是欧氏空间的默认联络.

1.2 2.5.2

题目 2. 证明: 对 C^1 向量场, 反对称性 $[X,Y] = -[Y,X]$ 不一定成立; Jacobi 恒等式对 C^2 向量场成立.

解答. 不太理解第一部分. 如果这里 $[X,Y]$ 指 Lie 括号, 那么即使对 C^1 向量场, 这也是成立的. 因此此题搁置.

1.3 2.5.3

题目 3. 证明挠率张量 $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ 是 $(2,1)$ 型张量.

解答.

$$\begin{aligned} T(fX_1 + X_2, Y) =& \nabla_{fX_1+X_2} Y - \nabla_Y fX_1 + X_2 - [fX_1 + X_2, Y] \\ =& f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y - Y(f)X_1 - f\nabla_Y X_1 - \nabla_Y X_2 + Y(f)X_1 - f[X_1, Y] - [X_2, Y] \\ =& fT(X_1, Y) + T(X_2, Y). \end{aligned}$$

1.4 2.5.4

题目 4. 若 $c\colon I \to M$ 在 t_0 速度非零, 则存在 X 满足对所有 t_0 附近的 t, $X|_{c(t)} = \dot{c}(t)$.

解答. 利用秩定理, 取坐标使 $c(t) = (t, 0, \cdots, 0)$. 则定义 $X = (1, 0, \cdots, 0)$ 即可.

1.5 2.5.5

题目 5. 计算 $\mathrm{div}(fX)$, $\Delta(fh)$, $\mathrm{Hess}(fg)$.

解答. 1. $\mathrm{div}(fX)$. 根据定义, $\mathrm{div}(fX) = L_{fX}\mathrm{vol}$, 所以

$$(\mathrm{div}(fX)\mathrm{vol})(v_1, \cdots, v_n) = L_{fX}(\mathrm{vol}(v_1, \cdots, v_n)) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(v_1, \cdots, L_{fX}v_i, \cdots, v_n).$$