第一次作业

2024 年 3 月 12 日

0.1 118 页习题 2

题目 1. 设 Γ^i_{jk} 为 M 的仿射联络系数, 则 $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 也为 M 的仿射联络系数的充分必要条件是, 存在 $(1,2)$ 型张量场 T 使得

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_j.$$

解答. 假设 $\nabla, \bar{\nabla}$ 分别是 Γ^i_{jk} 和 $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 分别确定的仿射联络, 那么:

$$\nabla_X Y = X(Y^j)e_j + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} e_k, \quad \overline{\nabla}_X Y = X(Y^j)e_j + X^i Y^j \bar{\Gamma}^k_{ij} e_k.$$

两式作差, 得到

$$\nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y = X^i Y^j \Gamma^k_{ij} e_k - X^i Y^j \bar{\Gamma}^k_{ij} e_k.$$

而 $T(X,Y) := \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y$ 是 $(1,2)$ 型张量. 这是因为由仿射联络的定义:

$$\begin{aligned} T(f_1 X, f_2 Y) &= f_1 \nabla_X f Y - f_1 \overline{\nabla}_X f Y \\ &= f_1 X(f_2) Y + f_1 f_2 \nabla_X Y - f_1 X(f_2) Y - f_1 f_2 \overline{\nabla}_X Y \\ &= f_1 f_2 T(X,Y). \end{aligned}$$

即 T 是函数线性的, 遂是张量. 所以, $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 也为 M 的仿射联络系数 $\Rightarrow$ 存在 $(1,2)$ 型张量场 T 使得

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}.$$

反过来如果存在这样的 T, 那么可以定义:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + T(X,Y),$$

由上面的推导可知 $\bar{\nabla}$ 是仿射联络, 且其联络系数即是 $\bar{\Gamma}$. 得证.

0.2 118 页习题 3

题目 2. 设 (M_1, Γ) 和 $(M_2, \bar{\Gamma})$ 分别为 m_1 和 m_2 维仿射联络空间, $(U_1, \phi_1; x^i)$ 和 $(U_2, \phi_2; y^\alpha)$ 分别为 M_1 和 M_2 的坐标图, 在积流形 $M = M_1 \times M_2$ 的坐标图 $(U_1 \times U_2, \phi_1 \times \phi_2; (x^i, y^\alpha))$ 上定义

$$L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \quad L^{m_2+a}_{m_2+b, m_2+c} = \bar{\Gamma}^a_{bc}, \quad \text{其余的 } L^\lambda_{\mu\nu} = 0$$

$$(1 \leqslant i,j,k \leqslant m_1; 1 \leqslant a,b,c \leqslant m_2; q \leqslant \lambda, \mu, \nu \leqslant m_1 + m_2).$$

则 (M, L) 也是仿射联络空间.

解答. 由于只有 L 的三个指标都同时对应 M_1 或 M_2 上时才非零, 所以可以发现 L 定义的联络 1–形式 $({}^M\omega)$ 满足

$$({}^M\omega)^i_{jk} = ({}^{M_1}\omega)^i_{jk}, ({}^M\omega)^{m_2+a}_{m_2+b,m_2+c} = ({}^{M_2}\omega)^a_{bc}, \text{其余的 } ({}^M\omega)^\lambda_{\mu\nu} = 0.$$

因此利用书上定义 3.1.2, 因为 $({}^{M_1}\omega)$ 和 $({}^{M_2}\omega)$ 分别满足联络形式的变换方程, 所以 $({}^M\omega)$ 也满足, 即 (M, L) 也是仿射联络空间.

0.3 119 页习题 4

题目 3. 由 (3.1.17) 证明 (3.1.32).
(3.1.17): $\bar{\omega}^i_j = (a^l_j \omega^k_l + \mathrm{d}a^k_j) b^i_k$.
(3.1.32): $\bar{\Gamma}^i_{jk} = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\left(\dfrac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} + \Gamma^l_{pq}\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\right)$.

解答. 这里 $a^j_i = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$. 再利用

$$\Gamma^i_{jk} = \omega^i_j(e_k),$$

代入得

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^i_{jk} &= \bar{\omega}^i_j(\bar{e}_k) \\
&= (a^p_j \omega^l_p (a^q_k e_q) + (\mathrm{d}a^l_j)(a^q_k e_q)) b^i_l \\
&= \left(\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^l_{pq} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^s}\left(\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right)\bar{\omega}^s(\bar{e}_k)\right)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\left(\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} + \Gamma^l_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\right).
\end{aligned}$$

0.4 119 页习题 8

题目 4. 设 M 为 C^k 流形, ∇ 为 M 的仿射联络, $\alpha(s,t)\colon (a,b)\times(c,d) \to M$ 为 C^k 映射. 记 $\dfrac{\partial \alpha}{\partial s} = \alpha_*\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \alpha_*\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$. 证明 ∇ 为对称联络的充要条件是对任意的 α 成立

$$\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}}\frac{\partial \alpha}{\partial s}.$$

解答. 对称即 $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$.

"$\Rightarrow$": 如果对称, $T(\dfrac{\partial \alpha}{\partial s}, \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}) = 0$, 因此只需证明 $\left[\dfrac{\partial \alpha}{\partial s}, \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}\right] = 0$. 而

$$\left[\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right] = \alpha_*\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0.$$

因此成立.

"$\Leftarrow$": 同样利用 $\left[\dfrac{\partial \alpha}{\partial s}, \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}\right] = 0$, 可知 $T(X,Y) = 0$, 即对称. 得证.