第四次作业

洪艺中 12335025

2024 年 3 月 30 日

0.1　133 页习题 11

题目 1.　设 (M_1, g_1), (M_2, g_2) 均为 Riemann 流形. $\nabla^{(1)}$, $\nabla^{(2)}$ 分别为它们的 Riemann 联络. $F\colon M_1 \to M_2$ 为等距微分同胚, 即 $g_1 = F^* g_2$. 证明 $F_*(\nabla^{(1)}_X Y) = \nabla^{(2)}_{F_*X} F_*Y$, $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M_1)$.

解答.　因为 F 是微分同胚, 所以 M_1 和 M_2 是同维数流形. 因此 F_p^* 是切空间 T_pM 到 $T_{F(p)}M$ 的同构. 故要证明 $F_*(\nabla^{(1)}_X Y) = \nabla^{(2)}_{F_*X} F_*Y$, $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M_1)$, 只需要证明任取 $Z \in \mathscr{X}(M_1)$,

$$g_1((\nabla^{(1)}_X Y), Z) = g_2(F_*(\nabla^{(1)}_X Y), F_*Z) = g_2(\nabla^{(2)}_{F_*X} F_*Y, \forall X, Y \in \mathscr{X}(M_1), F_*Z). \tag{$*$}$$

而利用 Riemann 联络的唯一性构造, 联络 ∇ 和度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle,$$

要证明 $(*)$ 式, 只需要证明: 任取 $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M_1)$,

$$X(g_1(Y, Z)) = (F_*X)(g_2(F_*Y, F_*Z))$$

和

$$g_1([X, Y], Z) = g_2([F_*X, F_*Y], F_*Z).$$

利用 $g_1 = F^*g_2$ 和 Lie 括号与切映射交换, 计算可得:

$$(F_*X)(g_2(F_*Y, F_*Z)) = X\left(g_2(F_*Y, F_*Z) \circ F\right) = X((F^*g_2)(Y, Z)) = X(g_1(Y, Z)),$$

以及

$$g_2([F_*X, F_*Y], F_*Z) = g_2(F_*[X, Y], F_*Z) = (F^*g_2)([X, Y], Z) = g_1([X, Y], Z).$$

所以题目得证.

0.2　113 页习题 12

题目 2.　设 (M^m, g) 为连通 Riemann 流形, ∇ 为 Riemann 联络, A 为二阶对称张量且 $\nabla A = 0$. 定义线性映射 $A^*\colon T_pM \to T_pM, \forall p \in M$ 如下: 对任意的 $X, Y \in T_p(M)$

$$\langle A^*(X), Y\rangle_p := A(X, Y)(p),$$

设 ρ_i 为 A^* 的特征值, $\tilde{e}_i$ 为其相应的单位特征向量, 证明:

1. 所有特征值在 M 上均为常数;
2. 若 $\rho_h \neq \rho_k$, 则 $\langle e_h, e_k\rangle = 0$. 设 $\{\tilde{e}_i\}$ 为 $A^\star$ 的特征向量标架, 使得 $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j\rangle = \delta_{ij}$, 则 $\rho_h \neq \rho_k$ 时, 有
$$\langle \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle = 0, \quad h, i, k = 1, \cdots, m;$$
3. 设 ρ_i 为 r 重根, 对应特征向量为 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_r$, 则 $\tilde{e}_{r+1}, \cdots, \tilde{e}_m$ 生成的分布 $\mathscr{D}$ 是完全可积的.

解答.

1. 取 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, 则根据 $\nabla A = 0$,
$$X(A(\tilde{e}_i, Y)) = A(\nabla_X \tilde{e}_i, Y) + A(\tilde{e}_i, \nabla_X Y)$$
利用 g 也关于联络平行,
$$X(A(\tilde{e}_i, Y)) = X(\rho_i\langle \tilde{e}_i, Y\rangle) = X(\rho_i)\langle \tilde{e}_i, Y\rangle + \rho_i\langle \nabla_X\tilde{e}_i, Y\rangle + \rho_i\langle \tilde{e}_i, \nabla_X Y\rangle.$$
所以
$$A(\nabla_X \tilde{e}_i, Y) = X(\rho_i)\langle \tilde{e}_i, Y\rangle + \rho_i\langle \nabla_X\tilde{e}_i, Y\rangle,$$
因为 $\tilde{e}_i$ 是单位向量, 所以 $\langle \nabla_X\tilde{e}_i, \tilde{e}_i\rangle = 0$, 因此在上式代入 $Y = \tilde{e}_i$, 得到
$$\begin{aligned} A(\nabla_X \tilde{e}_i, \tilde{e}_i) =& X(\rho_i)\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_i\rangle + \rho_i\langle \nabla_X\tilde{e}_i, \tilde{e}_i\rangle \\ =& X(\rho_i), \end{aligned}$$
而左边又有 $X(\rho_i) = X(A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)) = 2A(\nabla_X\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)$, 于是
$$\frac{1}{2}X(\rho_i) = A(\nabla_X\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = X(\rho_i).$$
所以 $X(\rho_i) \equiv 0$. 由 X 任意性, ρ_i 在 M 上均为常数.
2. 正交性: $\rho_h\langle \tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle = A(\tilde{e}_h, \tilde{e}_k) = \rho_k\langle \tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle$, 因为 $\rho_h \neq \rho_k$, 所以 $\langle \tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle = 0$.
$\langle \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle = 0$ 利用内积为 0 和 $\nabla A = 0$, 不妨设 $\rho_h \neq 0$:
$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle =& -\langle \tilde{e}_h, \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_k\rangle \\ =& -\frac{1}{\rho_h}A(\tilde{e}_h, \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_k) \\ =& -\frac{1}{\rho_h}\tilde{e}_i(A(\tilde{e}_h, \tilde{e}_k)) + \frac{1}{\rho_h}A(\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k) \\ =& \frac{1}{\rho_h}A(\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k) \\ =& \frac{\rho_k}{\rho_h}\langle \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle, \end{aligned}$$
由于系数不为 1, 所以 $\langle \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle = 0$.
3. 我们依然取 $\{\tilde{e}_i\}$ 为单位正交的, 因为这不影响分布的生成. 利用分布 Frobenius 定理, 分布完全可积当且仅当其对合, 即 $s, t > r$ 时 $[\tilde{e}_s, \tilde{e}_t]$ 可由 $\tilde{e}_{r+1}, \cdots, \tilde{e}_m$ 表示.

设 $[\tilde{e}_s, \tilde{e}_t] = a^p \tilde{e}_p$. 则与 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_r$ 内积得

$$\langle [\tilde{e}_s, \tilde{e}_t], \tilde{e}_i \rangle = \sum_{p=1}^{r} a^p \delta_{ip} = a^i.$$

而根据第二问的结论

$$\langle [\tilde{e}_s, \tilde{e}_t], \tilde{e}_i \rangle = \langle \nabla_{\tilde{e}_s} \tilde{e}_t, \tilde{e}_i \rangle - \langle \nabla_{\tilde{e}_t} \tilde{e}_s, \tilde{e}_i \rangle = 0.$$

所以 $a^i = 0$, 即分布是对合的. 因此 $\mathscr{D}$ 是完全可积的.