第三次作业

洪艺中 12335025

2024 年 3 月 24 日

0.1 132 页习题 4

题目 1. 设 M 为光滑流形, ∇ 为对称仿射联络. 设 $\{e_i\}$ 是局部基向量场, $\{\omega^i\}$ 和 $\{\omega^i_j\}$ 分别是对偶基和联络 1–形式, 证明:

$$\nabla_X \omega^i = -\omega^i_j(X)\omega^j, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M).$$

解答. 取向量场 $Y \in \mathscr{X}(M)$, 设 $Y = Y^i e_i$.

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \omega^i)(Y) =& X(\omega^i(Y)) - \omega^i(\nabla_X Y) \\
=& X(Y^i) - \omega^i(X(Y^j)e_j + Y^j \omega^k_j(X) e_k) \\
=& X(Y^i) - X(Y^i) - Y^j \omega^i_j(X) \\
=& -\omega^i_j(X)\omega^j(Y).
\end{aligned}$$

因此 $\nabla_X \omega^i = -\omega^i_j(X)\omega^j$.

0.2 132 页习题 5

题目 2. 设 (M^n, g) 为 Riemann 流形, $\omega = \omega_{i_1\cdots i_m} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_m}$ 为 m–形式, 其中

$$\begin{aligned}
\omega_{i_1\cdots i_m} =& \sqrt{G}\varepsilon_{i_1\cdots i_m}, \\
\varepsilon_{i_1\cdots i_m} =& \begin{cases} 0 & (i_1, \cdots, i_m)\text{中有相同时}, \\ 1 & (i_1, \cdots, i_m)\text{为偶置换}, \\ -1 & (i_1, \cdots, i_m)\text{为奇置换}. \end{cases}
\end{aligned}$$

证明: $\omega_{i_1\cdots i_m,k} = 0$, 即 ω 是平行的.

解答. 按照题目, ω 是体积元的常数倍数, 所以此题等价于是说明体积元关于 Riemann 联络是平行的.

由于体积 $\mathrm{vol} = \sqrt{G}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \mathrm{d}x^m$ 是张量, 其协变导数也是张量. 任取 $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset \mathscr{X}(M)$,

$v_i = \alpha_i^j e_j$, 则

$$\begin{aligned}\nabla_{e_k}\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m) =& e_k(\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m)) - \sum_{i=1}^m \mathrm{vol}(v_1,\cdots,\nabla_{e_k}v_i,\cdots,v_m)\\ =& e_k(\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m)) - \sum_{i=1}^m \mathrm{vol}(v_1,\cdots,e_k(\alpha_i^l)e_l + \alpha_i^j\omega_j^l(e_k)e_l,\cdots,v_m).\end{aligned}$$

记矩阵 $A=(\alpha_i^j)$, 以及记其伴随阵为 $A^\star = (A_i^j)$, 满足 $\sum_i \alpha_l^i A_j^i = \delta_{jl}\det A$, $\sum_i \alpha_i^j A_i^l = \delta_{jl}\det A$. 则利用这些记号, 以及

$$e_k(\det A) = \sum_{i,l=1}^m e_k(\alpha_i^l)A_i^l,$$

和

$$\begin{aligned}e_k(\sqrt{G}) =& \frac{e_k(G)}{2\sqrt{G}}\\ =& \sqrt{G}\sum_{i,j=1}^m \frac{1}{2}(\langle\nabla_{e_k}e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle)g^{ij}\\ =& \sqrt{G}\sum_{i,j,l=1}^m \omega_i^l(e_k)g_{jl}g^{ij}\\ =& \sqrt{G}\sum_{i=1}^m \omega_i^i(e_k).\end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\nabla_{e_k}\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m) =& e_k(\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m)) - \sum_{i=1}^m \mathrm{vol}\left(v_1,\cdots,\left(e_k(\alpha_i^l) + \alpha_i^j\omega_j^l(e_k)\right)e_l,\cdots,v_m\right)\\ =& e_k(\sqrt{G}\det A) - \sqrt{G}\sum_{i,l=1}^m \left(e_k(\alpha_i^l) + \alpha_i^j\omega_j^l(e_k)\right)\cdot A_i^l\\ =& e_k(\sqrt{G}\det A) - \sqrt{G}\sum_{i,l=1}^m e_k(\alpha_i^l)A_i^l - \sqrt{G}\sum_{l=1}^m \omega_j^l(e_k)\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^j\cdot A_i^l\right)\\ =& e_k(\sqrt{G}\det A) - \sqrt{G}e_k(\det A) - \sqrt{G}\sum_{j,l=1}^m \omega_j^l(e_k)\delta_{jl}\det A\\ =& e_k(\sqrt{G}\det A) - \sqrt{G}e_k(\det A) - \sqrt{G}\sum_{j=1}^m \omega_j^j(e_k)\det A\\ =& e_k(\sqrt{G}\det A) - \sqrt{G}e_k(\det A) - e_k(\sqrt{G})\det A\\ =& 0.\end{aligned}$$

所以 $\nabla_{e_k}\mathrm{vol} = 0$, 即体积元关于 Riemann 联络是平行的. 得证.

0.3 132 页习题 8

题目 3. 设 (M^m, g) 为连通的 Riemann 流形, $X_{(1)},\cdots,X_{(r)}$ $(r\leqslant m)$ 均为平行向量场. 证明:

(1) 如果这组向量在 M 的某一点线性无关, 则其在 M 的各点均线性无关;

(2) 如果 $r=m$ 且这组向量在某一点线性无关, 则 (M,g) 的曲率张量为零张量.

解答.

(1) $X_{(i)}$ 均是平行向量场, 说明任取向量场 v,

$$\nabla_v X_{(i)} \equiv 0.$$

那么, 反设 $\{X_{(i)}\}$ 在某点 p 处线性相关, 即存在一组不全为零的系数 c^i,

$$c^i X_{(i)}(p) = 0,$$

则任取 $v \in \mathscr{X}(M)$,

$$\nabla_v c^i X_{(i)} = 0.$$

因此在局部基表示下, $c^i X_{(i)}$ 是常向量, 而它在 p 点是零向量, 所以 $c^i X_{(i)}$ 在 M 上均为 0. 这说明 $\{X_{(i)}\}$ 在所有点线性相关. 这与条件矛盾. 结论得证.

(2) 由 (1) 知这组向量在 M 上都线性无关, 所以 $X_{(i)}$ 形成了 M 上的一组标架. 则任取向量场 $v, w \in \mathscr{X}(M)$, 对所有 $X_{(i)}$ 都有 $\mathrm{R}(v,w)X_{(i)} = 0$. 这相当于是说曲率张量关于某一个参数恒为 0, 所以曲率张量为 0.

0.4 132 页习题 10

题目 4. 设 ∇ 为流形 M 上的对称仿射联络, $\varphi \in \mathscr{C}(T^r_s(M))$, $\psi \in \mathscr{C}(T^p_q(M))$, 则对于任意向量场 X,

$$\nabla_X(\varphi \otimes \psi) = \nabla_X \varphi \otimes \psi + \varphi \otimes \nabla_X \psi,$$

特别, 若 $\theta \in A^s(M)$, $\omega \in A^r(M)$, 则有

$$\nabla_X(\theta \wedge \omega) = \nabla_X \theta \wedge \omega + \theta \wedge \nabla_X \omega.$$

解答. 取向量场 u_i, v_j, $1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant q$. 1–形式 ω^k, θ^l, $1 \leqslant k \leqslant r, 1 \leqslant l \leqslant p$. 为了缩减篇幅, 记 $\mathbf{U}$ 为参数组 $u_1, \cdots, u_s$, 类似地采用符号 $\mathbf{V}, \Omega, \Theta$,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X(\varphi \otimes \psi))(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V}, \Theta) \\
=&X(\varphi(\mathbf{U}, \Omega)\psi(\mathbf{V}, \Theta)) - \sum_i \varphi(u_1, \cdots, \nabla_X u_i, \cdots, u_s, \Omega)\psi(\mathbf{V}, \Theta) - \sum_k \varphi(\mathbf{U}, \omega^1, \cdots, \nabla_X \omega^k, \cdots, \omega^r)\psi(\mathbf{V}, \Theta) \\
-&\sum_j \varphi(\mathbf{U}, \Omega)\psi(1, \cdots, \nabla_X v_j, \cdots, v_q, \Theta) - \sum_l \varphi(\mathbf{U}, \Omega)\psi(\mathbf{V}, \theta^1, \cdots, \nabla_X \theta^l, \cdots, \theta^p) \\
=&(\nabla_X \varphi)(\mathbf{U}, \Omega)\psi(\mathbf{V}, \Theta) + \varphi(\mathbf{U}, \Omega)(\nabla_X \psi)(\mathbf{V}, \Theta) \\
=&(\nabla_X \varphi \otimes \psi + \varphi \otimes \nabla_X \psi)(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V}, \Theta).
\end{aligned}$$

即

$$\nabla_X(\varphi \otimes \psi) = \nabla_X \varphi \otimes \psi + \varphi \otimes \nabla_X \psi.$$

对于外积的情况, 由于 $\wedge$ 相当于是对张量 (关于置换) 做反对称化, 而对反对称化中求和的每项都是张量积 (只不过参数的顺序改变了). 所以由上面的结论, 在每一项上 ∇_X 都满足导数的运算法则, 所以求和后也满足, 即有

$$\nabla_X(\theta \wedge \omega) = \nabla_X \theta \wedge \omega + \theta \wedge \nabla_X \omega.$$