第十一次作业

洪艺中 12335025

2024 年 5 月 26 日

0.1 192 页习题 4

题目 1. 在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上, 举例说明: 测地线对其上任意两点为相对最短这一结论未必成立.

解答. 只需要找一条长度超过半周长的大弧即可. 例如先从北极沿 0° 经线 (经过格林尼治天文台方向) 往南极走, 到达南极之后沿 180° 经线走一定距离 (但不走出南极大陆), 那么这条测地线就不是极短的.

0.2 192 页习题 7

题目 2. 试证定理 (4. 2. 8) 的两个推论.

解答.

推论 1 若 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 不是共轭的, 则 γ 的 Jacobi 场由其在端点的值完全确定: 如果有两个端点处相同的 Jacobi 场, 那么两者作差, 得到一个端点为 0 的 Jacobi 场. 由定理 (4. 2. 8) 这个 Jacobi 场为 0. 所以原来的两个 Jacobi 场相等.

推论 2 指标形式具有非平凡零化空间当且仅当 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 沿 γ 是共轭的: 如果共轭, 存在非平凡的端点为 0 的 Jacobi 场. 则因为 Jacobi 场是零化子, 所以零化空间非平凡; 如果零化空间非平凡, 那么利用零化子是 Jacobi 场, 所以存在非平凡的端点为 0 的 Jacobi 场, 因此两点共轭.

0.3 192 页习题 9

题目 3. 设 $T_\gamma(\Omega)$ 表示沿测地线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{M}$ 为分段光滑, 在 γ 端点消失, 且使 $\langle V, T\rangle = 0$ 的向量场 V 构成的向量空间. 试证: 在 $T_\gamma(\Omega)$ 上指标形式的零化度 ν 满足 $0 \leqslant \nu \leqslant m-1$, 这里 $m = \dim \mathcal{M}$; 并且以 m 维球面 $\mathbb{S}^m$ 上的对径点为例说明 ν 可以取道最大值 $m-1$.

解答. 因为零化向量场是和测地线垂直的 Jacobi 场, 因此初值 $\nabla_T J(0)$ 可行空间最多是 $\dim \mathcal{M} - 1 = m-1$ 维的. 因此 $0 \leqslant \nu \leqslant m-1$.

在 $\mathbb{S}^m$ 上, 取 p, q 是对径点, 以及 $\gamma(t) = \exp_p tu$, $\gamma(\pi) = q$. 则在 $T_p\mathcal{M}$ 中, 有 $m-1$ 个单位向量 $e_1, \cdots, e_{m-1}$ 与 u 正交, 则初值为 $J_i(0) = 0$, $\nabla_T J_i(0) = e_i$ 的 $m-1$ 个 Jacobi 场张成了 $m-1$ 维的零化空间.

0.4 问题 1.2

题目 4. 假设 $\gamma\colon [0,\ell] \to \mathcal{M}$ 是测地线, $p = \gamma(0)$, $v = \dot\gamma(0)$. 给定 $w \in T_p\mathcal{M}$, $w \neq 0$, 考虑向量场

$$J(t) = (\mathrm{d}\exp_p)_{tv} tw,$$

证明该向量场满足:

$$|J(t)|^2 = |w|^2 t^2 - \frac{1}{3}\mathrm{K}(\Pi_p)(|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2)t^4 + o(t^4),$$

其中 Π_p 是 $T_p\mathcal{M}$ 中由 v 和 w 张成的 2 维截面, $\mathrm{K}(\Pi_p)$ 表示截面曲率.

解答. 为方便记 $f(t) = \langle J(t), J(t)\rangle$,

$$\begin{aligned}
f(0) &= \langle J(t), J(t)\rangle = 0;\\
f'(0) &= 2\langle \nabla_T J(0), J(0)\rangle = 0;\\
f''(0) &= 2\langle \nabla_T J(0), \nabla_T J(0)\rangle + 2\langle \nabla_T\nabla_T J(0), J(0)\rangle\\
&= 2|w|^2;\\
f'''(0) &= 6\langle \nabla_T\nabla_T J(0), \nabla_T J(0)\rangle + 2\langle \nabla_T\nabla_T\nabla_T J(0), J(0)\rangle\\
&= 4\langle \mathrm{Rm}(T, J(0))T, \nabla_T J(0)\rangle = 0;\\
f''''(0) &= 8\nabla_T(\mathrm{R}(\nabla_T J, T, T, J))(0) + 6\langle \nabla_T\nabla_T J(0), \nabla_T\nabla_T J(0)\rangle\\
&= -8\mathrm{R}(T, \nabla_T J(0), T, \nabla_T J(0)) + 6|\mathrm{Rm}(T, J(0))T|^2\\
&= -8\mathrm{K}(\Pi_p)(|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2).
\end{aligned}$$

所以用 Taylor 公式得到

$$|J(t)|^2 = |w|^2 t^2 - \frac{1}{3}\mathrm{K}(\Pi_p)(|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2)t^4 + o(t^4).$$