第一次作业

洪艺中 12335025

2024 年 3 月 14 日

0.1 119 页习题 7

题目 1. 设 M 为 C^{k+1} 流形, ∇ 为其上仿射联络. X, Y 为 M 的 C^k 向量场, $X_p \neq 0$. 以 $C(s)$ 表示过 p 点的向量场 X 的积分曲线, $C(0)=p$. 以 $C_t^{-1}Y_{C(t)}$ 表示 $Y_{C(t)}$ 沿曲线 C 平行移动到 p 点所得的向量, 证明:

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_t^{-1}Y_{C(t)} - Y_p).$$

解答. 取 p 点处的一组正交标架 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 且 $e_1(t) = \dot{C}(t)$. 将 $e_i, i \geqslant 2$ 沿 $C(t)$ 平行移动得到 $C(t)$ 上一组标架场 $\{e_1(t), \cdots, e_n(t)\}$. 在这组基下, $Y(C(t)) = Y^i(t)e_i(t)$. 记 $Z_t(s) = C_s^{-1}Y_{C(t)}$ 为 $Y_{C(t)}$ 沿 C 平行移动得到的向量场, 则 $Z_t(s) = Z_t^i(s)$ 关于 $\dot{C}(s) = e_1(s)$ 的协变导数是 0. 即

$$\nabla_{e_1}Z_t = e_1(Z_t^i(s))e_i + Z_t^i(s)\nabla_{e_1}e_i = e_1(Z_t^i(s))e_i = 0$$

所以 $Z_t^i(s)$ 都是常数, $Z_t^i(s) = Z_t^i(t) = Y^i(t)$. 因此不等式右边

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_t^{-1}Y_{C(t)} - Y_p) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Z_t(0) - Y_p)\\
=&\lim_{t\to 0}\frac{\left(Y^i(t) - Y^i(0)\right)e_i(t)}{t}\\
=&\dot{Y}^i(0)e_i(0),
\end{aligned}$$

而不等式左边 $(\nabla_X Y)_p = e_1(Y^i)e_i = \dot{Y}^i(0)e_i(0)$. 因此两者相等.

0.2 119 页习题 9

题目 2. 设 $\{e_i\}, 1 \leqslant i \leqslant m$ 为 C^k 流形 M^n 上的局部基向量场. $\{\omega^i\}$ 为其对偶基向量场, $\{\omega_j^i\}$ 为仿射联络 1–形式.

(i) 证明: 测地线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega^k}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\omega^i}{\mathrm{d}t}\frac{\omega_i^k}{\mathrm{d}t} = 0$$

(ii) 关于 $\mathbb{R}^2$ 上直角坐标 x^1, x^2 的自然标架, 设联络 1–形式为

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = \mathrm{d}x^2, \quad \omega_1^2 = \mathrm{d}x^1.$$

求挠率、曲率, 并求测地线微分方程.

解答.

(i) 设某曲线 $\gamma(t)$ 的切向量为 $X(t)$. 则测地线方程说明

$$\begin{aligned}0=\nabla_X X &= X(\omega^i(X))e_i+\omega^i(X)\nabla_X e_i\\ &= X(\omega^k(X))e_k+\omega^i(X)\omega_i^k e_k.\end{aligned}$$

所以如果将 X 写作 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega^k(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}))+\omega^i(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\omega_i^k(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})=0.$$

(ii) 代入给出的联络 1–形式, 可得

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_1=e_2,\quad \nabla_{e_1}e_2=0,\\ \nabla_{e_2}e_1=0,\quad \nabla_{e_2}e_2=e_1.\end{aligned}$$

挠率: $T(e_1,e_2)=0$, 故挠率张量 $T=0$. 曲率: 截面曲率 $\mathrm{R}_{1212}=\langle \mathrm{R}e_1e_2e_2,e_1\rangle=g_{12}=0$. 测地线方程: 设 $\gamma(t)\colon(0,1)\to M$ 为一条曲线, $\gamma(t)=(u^1(t),u^2(t))$, 则若 $\gamma(t)$ 是测地线, 其将满足方程:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\right)^2=0,\\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\right)^2=0.\end{aligned}$$

0.3 131 页习题 1

题目 3. 证明由

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle=X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle$$

定义的放射联络 $\nabla_X Y$ 是一个黎曼联络.

解答. 需要验证

1. 这样定义的 $\nabla_X Y$ 关于 X 是函数线性的, 而关于 Y 是导数;
2. 联络是无挠的;
3. 联络和度量是相容的.

接下来逐项验证:

1. 首先考虑

$$2\langle\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}Y,Z\rangle$$