# 第六次作业

洪艺中 12335025

2024 年 4 月 17 日

## 0.1 148 页习题 7

**题目 1.** 设 $(M^m, g)$ 为连通的 Einstein 流形, $m \geqslant 3$.

(i) 若 $m = 3$, 则 $(M^m, g)$ 为常曲率 Riemann 流形;

(ii) 若 $(M^m, g)$ 的数量曲率 $\rho \neq 0$, 则 $(M^m, g)$ 上不存在平行向量场.

**解答.**

(i) $m \geqslant 3$, 所以 $M$ 的 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric} = \frac{\rho}{m} g,$$

其中 $\rho$ 是数量曲率. 那么取局部单位正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 即有 $\mathrm{Ric}_{ii} = \dfrac{\rho}{m}$.

在这组基下, 可得

$$\mathrm{Ric}_{11} = \mathrm{R}_{1212} + \mathrm{R}_{1313}$$
$$\mathrm{Ric}_{22} = \mathrm{R}_{1212} + \mathrm{R}_{2323}$$
$$\mathrm{Ric}_{33} = \mathrm{R}_{1313} + \mathrm{R}_{2323}$$

给定 $\mathrm{Ric}_{ii}$, 这是关于 $\mathrm{R}_{1212}, \mathrm{R}_{1313}, \mathrm{R}_{2323}$ 的线性方程组, 可以解出

$$\mathrm{R}_{1212} = \mathrm{R}_{1313} = \mathrm{R}_{2323} = \frac{\rho}{2m}.$$

又因为 $e_i$ 都是单位向量, 所以 $\mathrm{R}_{ijij}$ 等于截面曲率 $K(e_i, e_j)$. 利用 $e_i$ 的任意性, $M$ 的截面曲率为常数 $\dfrac{\rho}{2m}$. 即, $M$ 是常曲率流形.

(ii) 若 $(M^m, g)$ 的数量曲率 $\rho \neq 0$, 则 $\mathrm{Ric} \neq 0$. 用反证法, 假如存在平行向量场 $X$, $\nabla X = 0$. 则任取 $Y \in \mathscr{X}(M)$, $\mathrm{R}(X, Y, X, Y) = 0$. 则 $\mathrm{Ric}(X, X) = 0$. 但是又有 $\mathrm{Ric}(X, X) = \dfrac{\rho}{m} g(X, X)$, 所以 $|X| \equiv 0$. 这说明 $M$ 上不存在平行向量场.

## 0.2 149 页习题 10

**题目 2.** 从球面 $S^2(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^3|\sum_i(x^i)^2=a^2\right\}$ 去掉点 $(0,0,\pm a)$ 得到 Riemann 流形 $M$, 在 $M$ 与直线 $L$ 的直积空间 $M\times L$ 中引入 Riemann 度量

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2+\left(\mathrm{d}t-\frac{tx^3(x^1\,\mathrm{d}x^2-x^2\,\mathrm{d}x^1)^2}{a((x^1)^2+(x^2)^2)}\right)^2,$$

在 $M$ 上取球坐标 $(\theta,\phi)$, 则 Riemann 度量成为

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)+(\mathrm{d}t-K\cos\theta\,\mathrm{d}\phi)^2,\quad K=\text{const.},$$

(i) 证明: 对应于球面绕原点的任何旋转, 在 $M\times L$ 中有局部等距映射;

(ii) 证明: 关于对偶空间的基向量 $\omega^1=a\,\mathrm{d}\theta$, $\omega^2=a\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$, $\omega^3=\mathrm{d}t-K\cos\theta\,\mathrm{d}\phi$, Riemann 联络 1-形式为

$$\omega_1^2=-\omega_2^1=\frac{K}{2a^2}(\mathrm{d}t-K\cos\theta\,\mathrm{d}\phi),$$

$$\omega_1^3=-\omega_3^1=\frac{K}{2a}\sin\theta\,\mathrm{d}\phi,\quad \omega_2^3=-\omega_3^2=-\frac{K}{2a}\,\mathrm{d}\theta;$$

(iii) 什么条件下, $M\times L$ 是常曲率 Riemann 流形?

**解答.**

(i) 对某个球面绕原点的旋转 $\varphi$, 存在两个不动点 $N$, $S$. 若以 $N$, $S$ 为北极、南极点取球坐标 $(\theta,\phi)$, 其中 $\theta$ 表示点与球心连线和直线 $NS$ 的夹角, $\phi$ 表示点投影在赤道面后, 与“子午线”的夹角. 则如果 $N=(0,0,a)$, $S=(0,0,-a)$, 球面上的点可以表示为 $(a\sin\theta\cos\phi,a\sin\theta\sin\phi,a\cos\theta)$, 其上的 Riemann 度量可以表示为 $\mathrm{d}s^2=a^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$. 此时 $M\times L$ 的度量形式与题目中相同.

在这一坐标下, $\varphi$ 可以简单地表示为 $(\theta,\phi)\mapsto(\theta,\phi+\phi_0)$. 故定义 $\bar{\varphi}\colon M\times L\mapsto M\times L$, $(\theta,\phi,t)\mapsto(\varphi(\theta,\phi),y)=(\theta,\phi+\phi_0,t)$, 则可验证 $\bar{\varphi}$ 是局部等距映射:

因为 $(\bar{\varphi}_*)_{(\theta,\phi,t)}(k_1\partial_\theta+k_2\partial_\phi+k_3\partial_t)=(k_1\partial_\theta+k_2\partial_\phi+k_3\partial_t)|_{(\theta,\phi+\phi_0,t)}$, 由于 $\theta$ 不变, 所以代入 Riemann 度量结果一致, 所以 $(\bar{\varphi})_*(\mathrm{d}s^2)=\mathrm{d}s^2$, 是等距映射.

(ii) 利用结构方程.

$$\begin{aligned}0=\ \mathrm{d}\omega^1=&\quad -\omega_1^1\wedge\omega^1-\omega_2^1\wedge\omega^2-\omega_3^1\wedge\omega^3;\\ a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi=\ \mathrm{d}\omega^2=&\quad -\omega_1^2\wedge\omega^1-\omega_2^2\wedge\omega^2-\omega_3^2\wedge\omega^3;\\ K\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi=\ \mathrm{d}\omega^3=&\quad -\omega_1^3\wedge\omega^1-\omega_2^3\wedge\omega^2-\omega_3^3\wedge\omega^3;\\ \omega_j^i+\omega_i^j=\ \mathrm{d}g_{ij}=&\quad 0,\end{aligned}$$

由此

$$\omega_i^i=0,$$

$$-\omega_2^1=\omega_1^2.$$

记 $j>i$ 时, $\omega_i^j=\mathrm{A}^{ji}\omega^1+\mathrm{B}^{ji}\omega^2+\mathrm{C}^{ji}\omega^3$, 那么

(a) 首先观察 $\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\theta$ 的系数, 用第二, 第三个方程可得

$$\mathrm{A}^{21}=0,$$

$$\mathrm{A}^{31}=0.$$

(b) 再观察 $\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}t$ 的系数, 由第一, 第二个方程可得

$$\mathrm{C}^{31}=0,$$
$$\mathrm{C}^{32}=0.$$

(c) 观察 $\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\phi$ 的系数, 由第一, 第二个方程可得

$$\mathrm{B}^{21}a^2\sin^2\theta-\mathrm{C}^{21}aK\sin\theta\cos\theta+\mathrm{B}^{31}aK\sin\theta\cos\theta=0,$$
$$\mathrm{B}^{32}=0.$$

再利用 $\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}t$ 的系数, 由第一个方程可得

$$\mathrm{C}^{21}a\sin\theta-\mathrm{B}^{31}a\sin\theta=0.$$

所以 $\mathrm{C}^{21}=\mathrm{B}^{31}$, 进而 $\mathrm{B}^{21}=0$.

(d) 此时已有 $\omega_1^2=\mathrm{C}^{21}\omega^3$, $\omega_1^3=\mathrm{B}^{31}\omega^2=\mathrm{C}^{21}\omega^2$, $\omega_2^3=\mathrm{A}^{32}\omega^1$.
用 $\mathrm{d}\omega\wedge\mathrm{d}\phi$ 的系数列方程, 由第三个方程可得

$$\mathrm{C}^{21}a^2\sin\theta-\mathrm{A}^{32}a^2\sin\theta=K\sin\theta.$$

再用 $\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}t$ 的系数列方程, 由第二个方程可得

$$\mathrm{C}^{21}a+\mathrm{A}^{32}a=0$$

所以

$$-\mathrm{A}^{32}=\mathrm{B}^{31}=\mathrm{C}^{21}=\frac{K}{2a^2}.$$

综上, 有联络 1-形式为

$$\omega_1^2=-\omega_2^1=\frac{K}{2a^2}\omega^3=\frac{K}{2a^2}(\mathrm{d}t-K\cos\theta\,\mathrm{d}\phi);$$
$$\omega_1^3=-\omega_3^1=\frac{K}{2a^2}\omega^2=\frac{K}{2a}\sin\theta\,\mathrm{d}\phi;\quad \omega_2^3=-\omega_3^2=-\frac{K}{2a^2}\omega^1=-\frac{K}{2a}\,\mathrm{d}\theta.$$

(iii) 用结构方程, 计算截面曲率如下

$$\mathrm{R}_{1212}=\Omega_2^1(e_1,e_2)=\mathrm{d}\omega_2^1(e_1,e_2)-\omega_3^1\wedge\omega_2^3(e_1,e_2),$$
$$\mathrm{R}_{1313}=\Omega_3^1(e_1,e_3)=\mathrm{d}\omega_3^1(e_1,e_3)-\omega_2^1\wedge\omega_3^2(e_1,e_3),$$
$$\mathrm{R}_{2323}=\Omega_3^2(e_2,e_3)=\mathrm{d}\omega_3^2(e_2,e_3)-\omega_1^2\wedge\omega_3^1(e_2,e_3).$$

计算得

$$\mathrm{R}_{1212}=-\frac{K^2}{4a^4},$$
$$\mathrm{R}_{1313}=\frac{K^2}{4a^4},$$
$$\mathrm{R}_{2323}=\frac{K^2}{4a^4}.$$

因此 $K=0$ 时是常曲率 Riemann 流形.

## 0.3 问题 1.2

**题目 3.** 设 $(M^m, g)$ 是 $m$ 维 Riemann 流形. 若 $T$ 是对称 $(0,2)$ 型张量, 定义 $C(T) := T \owedge g$. 其中 $\owedge$ 为 *Kulkarni-Nomizu* 积: 对任意两个对称 $(0,2)$ 型张量 $T_1, T_2$,

$$T_1 \owedge T_2(X,Y,Z,W) := T_1(X,Z)T_2(Y,W) - T_1(X,W)T_2(Y,Z) + T_2(X,Z)T_1(Y,W) - T_2(X,W)T_1(Y,Z).$$

对曲率型张量 $S$, 定义其 Ricci 缩并为

$$c(S)(X,Y) := \sum_{i=1}^{m} S(X, e_i, Y, e_i),$$

其中 $\{e_i\}$ 为幺正标架.

(i) 证明对任意对称 $(0,2)$ 型张量 $T$, $c(C(T)) = (m-2)T + (\mathrm{tr}_g T)g$.

(ii) 证明 $c(W) = 0$, 其中 $W$ 是 Weyl 张量.

**解答.**

(i) 计算得

$$\begin{aligned} c(C(T))(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} (T \owedge g)(X, e_i, Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} T(X,Y)g(e_i,e_i) - T(X,e_i)g(e_i,Y) + g(X,Y)T(e_i,e_i) - g(X,e_i)T(e_i,Y) \\ &= mT(X,Y) - T(X,Y) + \mathrm{tr}_g T g(X,Y) - T(X,Y) \\ &= (m-2)T(X,Y) + \mathrm{tr}_g T g(X,Y). \end{aligned}$$

(ii) $W = \mathrm{Rm} - A \owedge g$, 其中,

$$A = \frac{1}{m-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{scal}}{2(m-1)} g\right).$$

用 (i) 的结论,

$$c(W) = c(\mathrm{Rm}) - c(C(A)) = \mathrm{Ric} - \mathrm{Ric} + \frac{\mathrm{scal}}{2(m-1)} g + \frac{1}{m-2}\left(\mathrm{scal} - \frac{m\mathrm{scal}}{2(m-1)}\right) = 0.$$

## 0.4 问题 1.3

**题目 4.** 假设 $(M, g)$ 是 3 维 Riemann 流形.

(i) 证明 $M$ 是 Ricci 平坦的当且仅当 $M$ 是平坦的.

(ii) 证明 Weyl 张量 $W = 0$.

**解答.** 对于 (i), 如果 $M$ 平坦显然 Ricci 平坦. 而反过来, (i) 和 (ii) 都是说 $\dim M = 3$ 时, 如果一个曲率型张量的迹为 0, 则其本身为 0. 而这和 0.1 中的证明类似, 即曲率型张量由截面上的值唯一确定, 而三维的情况下, Ricci 缩并和截面值恰好都是三个, 且其形成的方程组有唯一解, 所以迹为 0 可以推出本身为 0.

## 0.5 问题 1.4

**题目 5.** 设 $(M^m, g)$ 是 $m$ 维 Riemann 流形, $m \geqslant 3$. 证明 $M$ 是常曲率流形当且仅当 $M$ 是 Einstein 流形且 $W = 0$.

**解答.**

"⇒" 如果 $M$ 是常曲率流形, 那么其显然是 Einstein 流形. 并且 Schouten 张量

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{m-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{scal}}{2(m-1)} g\right) \\ &= \frac{1}{m-2}\left((m-1)Kg - \frac{m(m-1)K}{2(m-1)} g\right) \\ &= \frac{K}{2} g, \end{aligned}$$

其中 $K$ 是截面曲率. 所以 $W = \mathrm{Rm} - \frac{K}{2} g \owedge g = 0$, 这是因为 $K = \frac{2\mathrm{Rm}}{g \owedge g}$.

"⇐" 如果 $M$ 是 Einstein 流形, 那么

$$\mathrm{Ric} = \frac{\mathrm{scal}}{m} g.$$

于是 Schouten 张量为

$$A = \frac{1}{m-2}\left(\frac{\mathrm{scal}}{m} g - \frac{\mathrm{scal}}{2(m-1)} g\right) = \frac{\mathrm{scal}}{2m(m-1)} g.$$

因此 $W = \mathrm{Rm} - \frac{\mathrm{scal}}{2m(m-1)} g \owedge g$. 如果 $W = 0$, 则截面曲率为

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= \frac{\mathrm{Rm}(e_1, e_2, e_1, e_2)}{g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g(e_1, e_2)g(e_2, e_1)} \\ &= \frac{\mathrm{scal}}{2m(m-1)} \frac{2g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - 2g(e_1, e_2)g(e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g(e_1, e_2)g(e_2, e_1)} \\ &= \frac{\mathrm{scal}}{m(m-1)}. \end{aligned}$$

因此 $M$ 是常曲率流形, 截面曲率是 $\frac{\mathrm{scal}}{m(m-1)}$.

## 0.6 问题 1.5

**题目 6.** 设 $(M^m, g)$ 是 $m$ 维闭 Riemann 流形 (即紧致、连通、无边界), 我们称 $u \in C^\infty(M)$ 是 $M$ 上的次调和函数, 如果

$$\Delta u(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in M.$$

闭流形上的次调和函数是否一定是常数? 若是, 请说明理由; 若不是, 请举出例子.

**解答.**

$$\int_M u\Delta u = -\int_M |\nabla u|^2 \leqslant 0,$$

因此 $u$ 必须有负值, 或者 $u = 0$. 假设 $u$ 不是常数, 那么由于 $u$ 光滑, $u$ 有最小值 $u_0$. 则 $w = u - u_0 \geqslant 0$ 且 $\Delta w \geqslant 0$. 因此 $w = 0$, 即 $u$ 是常数. 所以闭流形上的次调和函数一定是常数.