第九次作业

洪艺中 12335025

2024 年 5 月 15 日

0.1 174 页习题 4

题目 1. 设 (M,g) 为 Riemann 流形. (U,φ,x^i) 是以 q 为原点的法坐标图.

$$X_0=\xi^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_q,\quad Y_0=\eta^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_q$$

均为单位向量. $C\colon[0,r)\to C(s)$ 为在 $q=C(0)$ 点以 X_0 为切向量的测地线, $Y(s)$ 是将 Y_0 沿 C 平行移动而得的切向量. 证明:

(i) 在法坐标系的原点

$$\frac{\partial\Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}=-\frac{1}{3}(\mathrm{R}_{ijl}^k+\mathrm{R}_{jil}^k),$$

(ii) 设 $Y(s)=\zeta^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_{C(s)}$, 则

$$\zeta^i(s)=\eta^i+\frac{1}{6}(\mathrm{R}_{jkl}^i)_q\xi^j\eta^k\xi^l s^2+o(s^3),$$

(iii) 若 $\langle X_0,Y_0\rangle=0$, 且令 $||Y(s)||_q^2=g_{ij}(q)\xi^i(s)\xi^j(s)$, 则

$$||Y(s)||_q=1+\frac{s^2}{6}\mathrm{R}(X_0,Y_0,X_0,Y_0)+o(s^3).$$

解答. 记 $e_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

(i) 记 M 的维数为 n. 任取 $\mathbf{u}=(u^1,\cdots,u^n)\in T_qM$, 因为 $\exp_q(t\mathbf{u})=(tu^1,\cdots,tu^n)$ 是测地线, 所以由测地线方程,

$$\Gamma_{ij}^k(\exp_q(t\mathbf{u}))u^iu^j=0.$$

因此在这一点, Riemann 曲率张量为

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{jkl}^i(q)&=g^{im}\langle\mathrm{Rm}(e_k,e_l)e_j,e_m\rangle\\&=\frac{\partial\Gamma_{jl}^i}{\partial x^k}+\Gamma_{ks}^i\Gamma_{jl}^s-\frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}-\Gamma_{ls}^i\Gamma_{jk}^s\\&=\frac{\partial\Gamma_{jl}^i}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

由 u 的任意性, $\Gamma^k_{ij}(q)=0$. 对测地线方程关于 t 微分, 得到

$$\mathbf{u}(\Gamma^k_{ij})u^iu^j=\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}u^iu^ju^l=0.$$

取 $\mathbf{u}=u^ie_i$, 那么

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ii}}{\partial x^i}u^iu^iu^i=0,$$

取 $\mathbf{u}=e_i+e_j$ 和 $\mathbf{u}=e_i-e_j$, 那么

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ii}}{\partial x^j}+2\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^i}+2\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^j}+\frac{\partial\Gamma^k_{jj}}{\partial x^i}=0,$$

$$-\frac{\partial\Gamma^k_{ii}}{\partial x^j}-2\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^i}+2\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^j}+\frac{\partial\Gamma^k_{jj}}{\partial x^i}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial\Gamma^k_{ii}}{\partial x^j}+2\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^i}\\&=3\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^i}+\mathrm{R}^k_{iji}\\&=3\frac{\partial\Gamma^k_{ii}}{\partial x^j}+2\mathrm{R}^k_{iij}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^i}=-\frac{1}{3}\mathrm{R}^k_{iji}=-\frac{1}{3}(\mathrm{R}^k_{iji}+\mathrm{R}^{jii}),$$

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ii}}{\partial x^j}=-\frac{2}{3}\mathrm{R}^k_{iij}.$$

取 $\mathbf{u}=u^ie_i+u^je_j+u^ke_k$, 由上面的计算, 如果求和中 i,j,k 只选到一个或两个下标, 那么这部分求和项为 0. 所以

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}+\frac{\partial\Gamma^k_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial\Gamma^k_{il}}{\partial x^j}\\&=3\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}+\big(\frac{\partial\Gamma^k_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}\big)+\big(\frac{\partial\Gamma^k_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}\big)\\&=3\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}+\mathrm{R}^k_{jil}+\mathrm{R}^k_{ijl}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}=-\frac{1}{3}(\mathrm{R}^k_{jil}+\mathrm{R}^k_{ijl}).$$

(ii) $Y(s)$ 满足平行移动方程

$$\frac{\partial\zeta^i(s)}{\partial s}+\Gamma^i_{jk}\zeta^j(s)\xi^k(s)=0,$$

所以在 q 点

$$\frac{\partial\zeta^i(s)}{\partial s}=-\Gamma^i_{jk}\eta^j\xi^k=0,$$

并且利用 $\Gamma^i_{jk}(q)=0$, 在 q 点二阶导数为

$$\frac{\partial^2\zeta^i(s)}{\partial s^2}=-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial s}(q)\eta^j\xi^k.$$

利用 (i) 的结论,

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial s}(q)=-\frac{1}{3}(\mathrm{R}^k_{jil}+\mathrm{R}^k_{ijl})\xi^l,$$

所以

$$\begin{aligned}\zeta^i(s) &= \eta^i + \frac{\partial \zeta^i(s)}{\partial s}s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta^i(s)}{\partial s^2}s^2 + O(s^3)\\ &= \eta^i + \frac{1}{6}(\mathrm{R}^i_{jkl} + \mathrm{R}^i_{kjl})\eta^j\xi^k\xi^l s^2 + O(s^3).\end{aligned}$$

因为 R^i_{jkl} 交换 kl 会变号, 所以 $\mathrm{R}^i_{jkl}\eta^j\xi^k\xi^l = 0$. 因此

$$\zeta^i(s) = \eta^i + \frac{1}{6}\mathrm{R}^i_{kjl}\xi^j\eta^k\xi^l s^2 + O(s^3).$$

(iii) $\langle X_0, Y_0\rangle = 0$, 则 $\sum_i \eta^i\xi^i = 0$. 所以

$$\begin{aligned}||Y(s)||_q^2 &= g_{ij}(q)\xi^i(s)\xi^j(s)\\ &= |\eta^i|^2 + \sum_i \frac{1}{6}\mathrm{R}_{ijkl}\eta^i\xi^j\eta^k\xi^l s^2 + O(s^3)\\ &= 1 + \frac{1}{6}R(X_0, Y_0, X_0, Y_0)s^2 + O(s^3).\end{aligned}$$

0.2 179 页习题 9

题目 2. 设 m 维 Riemann 流形 (M, g) 在测地极坐标系 $(r, \theta^1, \cdots, \theta^{m-1})$ 下具有度量形式

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (f(r))^2 h_{ij}(\theta)\,\mathrm{d}\theta^i\theta^j,$$

其中 $m-1$ 维度量 $\mathrm{d}\sigma^2 = h_{ij}(\theta)\,\mathrm{d}\theta^i\theta^j$ 具有常数截面曲率 1. 求证 $\mathrm{d}s^2$ 具有常数截面曲率 c 的充要条件是

$$f(r) = \begin{cases}\sin\left(\sqrt{cr^2}\right)/\sqrt{c} & c > 0,\\ r & c = 0,\\ \sinh\left(\sqrt{-cr^2}\right)/\sqrt{-c} & c < 0.\end{cases}$$

解答. 第一步要计算 Christoffel 记号.,

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right).$$

1. 若三个指标都是 r:

$$\Gamma^r_{rr} = 0.$$

2. 若两个指标是 r, 一个是 θ^i:

$$\Gamma^r_{ri} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial\theta^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial r} - \frac{\partial g_{ri}}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\Gamma^i_{rr} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial r} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial\theta^j}\right) = 0.$$

3. 若一个指标是 r, 其余两个是 θ^i, θ^j:

$$\Gamma^r_{ij} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial\theta^j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial\theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial r}\right) = -f(r)f'(r)h_{ij}(\theta),$$

$$\Gamma^i_{rj} = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial\theta^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rj}}{\partial\theta^k}\right) = \frac{f'(r)}{f(r)}\delta^i_j.$$

4. 若所有指标都不为 r: 设 $\bar{\Gamma}$ 表示 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的 Christoffel 记号,

$$\Gamma_{jk}^{i}=\bar{\Gamma}_{jk}^{i}.$$

那么 Riemann 曲率张量

$$\mathrm{R}_{\beta\delta\eta}^{\alpha}=\frac{\partial\Gamma_{\beta\eta}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}+\Gamma_{\delta\xi}^{\alpha}\Gamma_{\beta\eta}^{\xi}-\frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}}-\Gamma_{\eta\xi}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\xi},$$

所以,

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{riri}&=g_{rr}\mathrm{R}_{iri}^{r}=\mathrm{R}_{iri}^{r}\\
&=\frac{\partial\Gamma_{ii}^{r}}{\partial r}+\Gamma_{r\xi}^{r}\Gamma_{ii}^{\xi}-\frac{\partial\Gamma_{ir}^{r}}{\partial\theta^{i}}-\Gamma_{i\xi}^{r}\Gamma_{ir}^{\xi}\\
&=-(f(r))^{2}h_{ii}(\theta)-f(r)f''(r)h_{ii}(\theta)-\sum_{j}\left(-f(r)f'h_{ij}(\theta)\cdot\frac{f'(r)}{f(r)}\delta_{j}^{i}\right)\\
&=-f(r)f''(r)h_{ii}(\theta).\\
\mathrm{R}_{ijij}&=g_{ik}\mathrm{R}_{jij}^{k}\\
&=g_{ik}\left(\frac{\partial\Gamma_{jj}^{k}}{\partial\theta^{i}}+\Gamma_{i\xi}^{k}\Gamma_{jj}^{\xi}-\frac{\partial\Gamma_{ji}^{k}}{\partial\theta^{j}}-\Gamma_{j\xi}^{k}\Gamma_{ji}^{\xi}\right)\\
&=g_{ik}\left(\frac{\partial\Gamma_{jj}^{k}}{\partial\theta^{i}}+\Gamma_{il}^{k}\Gamma_{jj}^{l}-\frac{\partial\Gamma_{ji}^{k}}{\partial\theta^{j}}-\Gamma_{jl}^{k}\Gamma_{ji}^{l}\right)+g_{ik}\left(\Gamma_{ir}^{k}\Gamma_{jj}^{r}-\Gamma_{jr}^{k}\Gamma_{ji}^{r}\right)
\end{aligned}$$

设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的曲率张量为 $\bar{R}$, 则有

$$\bar{\mathrm{R}}_{jij}^{i}=\frac{\partial\Gamma_{jj}^{i}}{\partial\theta^{i}}+\Gamma_{ik}^{i}\Gamma_{jj}^{k}-\frac{\partial\Gamma_{ji}^{i}}{\partial\theta^{j}}-\Gamma_{jk}^{i}\Gamma_{ji}^{k}$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{ijij}&=(f(r))^{2}\bar{\mathrm{R}}_{ijij}+g_{ik}\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\delta_{i}^{k}\cdot-f(r)f'(r)h_{jj}(\theta)-\frac{f'(r)}{f(r)}\delta_{j}^{k}\cdot-f(r)f'(r)h_{ij}(\theta)\right)\\
&=(f(r))^{2}\bar{\mathrm{R}}_{ijij}-(f(r))^{2}f'(r)^{2}\big(h_{ii}(\theta)h_{jj}(\theta)-h_{ij}(\theta)^{2}\big).
\end{aligned}$$

因此截面曲率为

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\partial r,\partial\theta^{i})&=\frac{\mathrm{R}_{riri}}{g_{rr}g_{ii}-g_{ri}^{2}}=-\frac{f''(r)}{f(r)},\\
\mathrm{K}(\partial\theta^{i},\partial\theta^{j})&=\frac{\mathrm{R}_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}-gij^{2}}=\frac{1}{(f(r))^{2}}-\frac{(f(r))^{2}(f'(r))^{2}\big(h_{ii}(\theta)h_{jj}(\theta)-h_{ij}(\theta)^{2}\big)}{f(r)^{4}\big(h_{ii}(\theta)h_{jj}(\theta)-h_{ij}(\theta)^{2}\big)}\\
&=\frac{1}{(f(r))^{2}}-\frac{(f'(r))^{2}}{(f(r))^{2}}.
\end{aligned}\tag{1}$$

因此如果是常截面曲率流形, 那么

$$-\frac{f''(r)}{f(r)}=\frac{1}{(f(r))^{2}}-\frac{(f'(r))^{2}}{(f(r))^{2}}=c.$$

即

$$f''(r)=-cf(r),\qquad 1-(f'(r))^{2}=c(f(r))^{2}.$$

所以

1. 如果 $c>0$, 那么 $f(r)=A\sin(\sqrt{c}r)+B\cos(\sqrt{c}r)$, 利用第二个方程,

$$1=c(f(r))^2+(f'(r))^2=cB^2+cA^2,$$

此外, 计算 $|\partial B(r)|$ 的面积为

$$A(r)=\int_{\partial B(r)}(f(r))^{2(m-1)}\det(h_{ij}(\theta))\,\mathrm{d}\theta,$$

当 $r\to 0$ 时, $A(r)$ 应当趋向于 0. 所以 $\lim_{r\to 0}f(r)=0$. 所以 $A=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$, $B=0$. 即

$$f(r)=\sin\bigl(r\sqrt{c}\bigr)/\sqrt{c}.$$

2. 如果 $c=0$, 那么 $f(r)=Ax+B$. 结合上面所说, 有

$$1=c(Ax+B)^2+A^2,\qquad \lim_{r\to 0}f(r)=0,$$

所以 $A=1$, $B=0$. 即

$$f(r)=r.$$

3. 如果 $c<0$, 那么 $f(r)=Ae^{r\sqrt{-c}}+Be^{-r\sqrt{-c}}$. 所以有

$$1=c(f(r))^2+(f'(r))^2=4cAB,\qquad \lim_{r\to 0}f(r)=A+B=0.$$

所以

$$f(r)=e^{r\sqrt{-c}}/(2\sqrt{-c})+e^{-r\sqrt{-c}}/(2\sqrt{-c})=\sinh\bigl(r\sqrt{-c}\bigr)/\sqrt{-c}.$$

综上, 如果 M 是常截面曲率流形, 且截面曲率为 c, 则

$$f(r)=\begin{cases}\sin\bigl(r\sqrt{c}\bigr)/\sqrt{c} & c>0,\\ r & c=0,\\ \sinh\bigl(r\sqrt{-c}\bigr)/\sqrt{-c} & c<0.\end{cases}$$

反过来, 如果 f 表现如上, 那么根据 (1) 式, 可以计算截面曲率为 c. 因此题目得证.

0.3 问题 1.2

题目 3. 假设 $(\mathcal{M},g)$ 是 m 维 Riemann 流形, $p\in\mathcal{M}$ 是流形上任意一点. 在 p 的法坐标 $(\mathcal{U}_p,x_i)$ 中证明:

(i) $g_{ij}(x)=\delta_{ij}-\frac{1}{3}\mathrm{R}_{ikjl}(0)x_kx_l+O(|x|^3)$;

(ii) $\det(g_{ij})=1-\frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{kl}(0)x_kx_l+O(|x|^3)$.

解答.

1. 核心是计算 g_{ij} 沿由 p 出发到 x 的测地线的导数. 设 $x=(x^1,\cdots,x^n)$, 同时其也 p 到 x 指数映射的切向量. 设 $\gamma(t)=\exp_p(tx)$, 那么 $x=\gamma(1)$. 所以一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{ij}(\gamma(t))=x^k\partial_k\bigl(g_{ij}(\gamma(t))\bigr).$$

而 $\partial_k(g_{ij}) = \langle \nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j\rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j\rangle = g_{jl}\Gamma^l_{ik} + g_{il}\Gamma^l_{jk}$. 因为在法坐标的原点, Christoffel 记号为 0, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{ij}(\gamma(t)) = 0.$$

二阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g_{ij}(\gamma(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x^k\big(g_{jl}\Gamma^l_{ik} + g_{il}\Gamma^l_{jk}\big)\right]\\ &= x^k\left(g_{jl}\frac{\mathrm{d}\Gamma^l_{ik}}{\mathrm{d}t} + g_{il}\frac{\mathrm{d}\Gamma^l_{jk}}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= x^k\left(g_{jl}x^m\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^m} + g_{il}x^m\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^m}\right).\end{aligned}$$

在 0 点, 利用第 0.1 节的 ((i)), 遂有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g_{ij}(0) &= x^k\left(x^m g_{jl}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^m}(0) + x^m g_{il}\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^m}(0)\right)\\ &= -\frac{1}{3}x^kx^m g_{jl}(0)(\mathrm{R}^l_{ikm}(0) + \mathrm{R}^l_{kim}(0)) - \frac{1}{3}x^kx^m g_{il}(0)(\mathrm{R}^l_{jkm}(0) + \mathrm{R}^l_{kjm}(0))\\ &= -\frac{1}{3}x^kx^m(\mathrm{R}_{jikm}(0) + \mathrm{R}_{jkim}(0) + \mathrm{R}_{ijkm}(0) + \mathrm{R}_{ikjm}(0))\\ &= -\frac{2}{3}x^kx^l\mathrm{R}_{ijkl}(0),\end{aligned}$$

代入 Taylor 展式, 得到

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{R}_{ijkl}(0)x^kx^l + O(|x|^3).$$

2. 依然要计算导数. 记 $G = (g_{ij})_{n\times n}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(g_{ij})(\gamma(t)) = \det G\,\mathrm{tr}\,G^{-1}G' = \det(g_{ij})(\gamma(t))(g^{ki}g'_{ik})(\gamma(t)),$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(g_{ij})(0) = 0$. 继续计算, 二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\det(g_{ij})(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j,k}\big[g^{jk}(g^{ki}g'_{ij})\big](\gamma(t)),$$

因为 $0 = (g^{ij}g_{jk})' = (g^{ij})'g_{jk} + g^{ij}(g_{jk})'$, 在 0 点处, $0 = (g^{ij})'g_{jk}$. 所以 $(g^{ij})'(0) = 0$. 因此上式中求导只会求在 g' 上. 于是利用 (1) 的结果,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\det(g_{ij})(0) = -\frac{2}{3}\sum_{j,k}\big[g^{jk}(g^{ki}x^kx^l\mathrm{R}_{ijkl}(0))\big] = -\frac{2}{3}x^kx^l\mathrm{Ric}_{kl}(0),$$

代入 Taylor 展式, 得到

$$\det(g_{ij})(x) = 1 - \frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{kl}(0)x^kx^l + O(|x|^3).$$

0.4 问题 1.3

题目 4. 假设 $(\mathcal{M}, g)$ 是 m 维 Riemann 流形. 假设 $r > 0$ 足够小使得 $\exp_p\colon D_r(0) \to B_r(p)$ 是微分同胚, 其中 $D_r(0) = v \in T_p\mathcal{M} : |v| < \varepsilon$, $B_r(p) = \exp_p D_r(0)$. 记 $S_r(p) = \partial B_r(p)$. 证明:

1. $\operatorname{vol}(B_r(p)) = \omega_m r^m \left(1 - \dfrac{\operatorname{scal}(p)}{6(m+2)} r^2 + O(r^3)\right)$, 其中 ω_m 是 $\mathbb{R}^m$ 的单位球的欧氏体积;
2. $\operatorname{area}(S_r(p)) = m\omega_m r^{m-1} - \dfrac{1}{6}\operatorname{scal}(p)\omega_m r^{m+1} + O(r^{m+2})$.

解答.

1. $\operatorname{vol}(B_r(p))$ 相当于在欧氏空间 $\bar{B}_r$ 上对 $\mathcal{M}$ 的体积元 dvol 积分. 而 $\mathrm{dvol} = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}m_{\mathbb{R}^m}$. 设

$$\sqrt{\det(g_{ij})}(x) = 1 + a_k x^k + b_{kl} x^k x^l + O(|x|^3),$$

那么平方可得

$$a_k = 0, \qquad 2b_{kl} = -\frac{1}{3}\operatorname{Ric}_{kl}(p),$$

所以

$$\sqrt{\det(g_{ij})}(x) = 1 - \frac{1}{6}\operatorname{Ric}_{kl}(p) x^k x^l + O(|x|^3).$$

因此积分得

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(B_r(p)) &= \int_{\bar{B}_r} 1 - \frac{1}{6}\operatorname{Ric}_{kl}(p) x^k x^l + O(|x|^3)\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{vol}(\bar{B}_r) - \frac{1}{6}\int_{\bar{B}_r} \operatorname{Ric}_{kl}(p) x^k x^l\,\mathrm{d}x + \operatorname{vol}(\bar{B}_r) O(r^3)\end{aligned}$$

考虑 p 点附近的测地极坐标 $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{m-1})$. 则

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \quad\vdots \\ x_{m-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} \\ x_m = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1} \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant m-2$ 时, $\theta_i \in [0, \pi]$; 而 $\theta_{m-1} \in [0, 2\pi]$. 观察对 θ_{m-1} 的积分, 有以下结论:

引理. *若 $k \neq l$, 则*

$$\int_{\bar{B}_r} x^k x^l\,\mathrm{d}x = 0.$$

引理的证明. 由于 $k \neq l$, 所以 θ_{m-1} 的项只可能有三种情况: $\cos\theta_{m-1}, \sin\theta_{m-1}, \sin\theta_{m-1}\cos\theta_{m-1} = \sin(2\theta_{m-1})/2$. 而这三者在 $[0, 2\pi]$ 上的积分都是 0. 因此引理成立. □

有此结论, 则

$$\int_{\bar{B}_r} \operatorname{Ric}_{kl}(p) x^k x^l\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{B}_r} \sum_k \operatorname{Ric}_{kk}(p)(x^k)^2\,\mathrm{d}x.$$

由对称性, 不同 k 的 $\int_{\bar{B}_r}(x^k)^2\,\mathrm{d}x$ 都相等, 并且其均等于

$$\frac{1}{m}\int_{\bar{B}_r}\sum_{k=1}^{m}(x^k)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m}\int_{\bar{B}_r}|x|^2\,\mathrm{d}x=\omega_m\frac{r^{m+2}}{m+2},$$

故

$$\int_{\bar{B}_r}\mathrm{Ric}_{kl}(p)x^kx^l\,\mathrm{d}x=m\omega_m\frac{\mathrm{scal}(p)}{m+2}r^{m+2}.$$

因此

$$\mathrm{vol}(B_r(p))=\omega_mr^m-\frac{1}{6}m\omega_m\frac{\mathrm{scal}(p)}{m+2}r^{m+2}+\omega_mr^mO(r^3)=\omega_mr^m(1-\frac{\mathrm{scal}(p)}{6(m+2)}r^2+O(r^3)).$$

2. 计算 $\mathrm{area}(S_r(p))$, 只需要对 $\mathrm{vol}(B_r(p))$ 关于 r 求导即可.

0.5 问题 1.4

题目 5. 假设 $(\mathcal{M},g)$ 是 m 维 Riemann 流形, $p\in M,\Pi_p\subset T_p\mathcal{M}$ 是 2 维截面. 令 $C_r^0=\{v\in\Pi_p:|v|=r\}$, $C_r=\exp_pC_r^0$. 用 L_r 记曲线 C_r 的长度. 证明:

$$\mathrm{K}(\Pi_p)=\frac{3}{\pi}\lim_{r\to0}\frac{2\pi r-L_r}{r^3},$$

其中 $\mathrm{K}(\Pi_p)$ 表示 p 点处关于 Π_p 的截面曲率.

解答. 对 $\exp_p\Pi_p$ 应用问题 1.3 的结论. 这是一个 2 维的子流形, 其截面曲率就是 $K(\Pi_p)$. 因此

$$L_r=\mathrm{area}(C_r)=2\pi r-\frac{2K(\Pi_p)}{6}\pi r^3+O(r^4).$$

故

$$\lim_{r\to0}\frac{2\pi r-L_r}{r^3}=\lim_{r\to0}\frac{\frac{2K(\Pi_p)}{6}\pi r^3+O(r^4)}{r^3}=\frac{\pi}{3}K(\Pi_p),$$

问题得证.

0.6 问题 1.5

题目 6. 假设 $(\mathcal{M},g)$ 是 m 维 Riemann 流形, $\gamma_k\colon[0,1]\to\mathcal{M}$, $k=1,2$ 是两条正规测地线 (速度为 1 的测地线), 且满足 $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p$. 用 $\theta\in(0,\pi)$ 记 $v=\dot\gamma_1(0)$ 与 $w=\dot\gamma_2(0)$ 的夹角, $\Pi_p=\mathrm{span}\{v,w\}$ 是 $T_p\mathcal{M}$ 的 2 维截面. 证明:

$$d(\gamma_1(t),\gamma_2(t))=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\big[1-\frac{1}{6}\mathrm{K}(\Pi_p)\cos^2(\theta/2)t^2+O(t^3)\big]t.$$

解答. 为计算距离, 设 $A(t)$ 为 $\gamma_2(t)=tw$ 关于 $\gamma_1(t)=tv$ 指数映射的切向量, 即 $\exp_{tv}A(t)=tw$. 考虑 $\sigma(t,s):=\exp_{tv}sA(t)$. $T:=\sigma_*\partial_s$ 是 tv 到 tw 测地线 $a_t\colon s\mapsto\sigma(t,s)$ 的切向量场, 且测地线 a_t 的长度为

$$L(a_t)=|T(t,0)|=d(\gamma_1(t),\gamma_2(t)),$$

而 $J := \sigma_* \partial_t$ 是 Jacobi 场, 满足

$$\ddot{J} = \mathrm{Rm}(T, J)T,$$

借此, 计算 $L^2 := (L(a_t))^2 = |T(t,0)|^2$ 在 p 点关于 t 的导数:

- 1 阶:

$$\frac{\mathrm{d}L^2}{\mathrm{d}t}(p) = \nabla_J \langle T, T\rangle(p) = 2\langle \nabla_J T, T\rangle(0,0) = 0.$$

- 2 阶: 因为 $J(t,0) = v$, $J(t,1) = w$, p 处 $\ddot{J} = 0$, 所以 $J(0,s) = v + s(w - v)$. 即 $\nabla_J T(0,s) = \nabla_T J(0,s) = w - v$. 利用此结果, 以及 $T(0,s) = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2L^2}{\mathrm{d}t^2}(0,0) &= 2\langle \nabla_J \nabla_J T, T\rangle(p) + 2\langle \nabla_J T, \nabla_J T\rangle(0,0) \\ &= 2|w - v|^2 = 4(1 - \cos\theta).\end{aligned}$$

- 3 阶: 利用 $T(0,s) = 0$, 以及 $2\langle \nabla_J \nabla_J T, \nabla_J T\rangle(0,s) = J(\langle \nabla_J T, \nabla_J T\rangle)(0,s) = J(2|v - w|^2) = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^3L^2}{\mathrm{d}t^3}(0,0) = 2\langle \nabla_J \nabla_J \nabla_J T, T\rangle(0,0) + 2\langle \nabla_J \nabla_J T, \nabla_J T\rangle(0,0) + 4\langle \nabla_J \nabla_J T, \nabla_J T\rangle(0,0) = 0$$

- 4 阶: 作为铺垫, 首先计算

$$\begin{aligned}\nabla_J \nabla_J T &= \nabla_J \nabla_T J \\ &= \mathrm{Rm}(J, T)J - \nabla_T \nabla_J J,\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\nabla_J \nabla_J \nabla_J T(0,0) \\ =& \nabla_J(\mathrm{Rm}(J,T)J) - \nabla_J \nabla_T \nabla_J J \\ =& (\nabla_J \mathrm{Rm})(J,T)J + \mathrm{Rm}(\nabla_J J, T)J + \mathrm{Rm}(J, \nabla_J T)J + \mathrm{Rm}(J,T)\nabla_J J - \nabla_J \nabla_T \nabla_J J \\ =& \mathrm{Rm}(J, \nabla_J T)J(0,0) - \nabla_J \nabla_T \nabla_J J(0,0),\end{aligned}$$

其中, 最后一个等式用到了 $T(0,s) = 0$, 所以只要张量中有单独出现的 T, 就必须为 0. 此外, 借助这一点, 可以继续计算得到 $\nabla_T \nabla_J J(0,s) = \nabla_J \nabla_T J(0,s) = \nabla_J(w - v) = 0$; $\nabla_J J(0,0) = 0$, $\nabla_J J(0,1) = 0$. 其关于 s 的导数 $\nabla_T \nabla_J J(0,s)$ 为 0, 所以 $\nabla_J J(0,s) = 0$. 利用以上结果,

$$\begin{aligned}&\langle \nabla_J \nabla_T \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0) \\ =& J\langle \nabla_T \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0) - \langle \nabla_T \nabla_J J, \nabla_J \nabla_J T\rangle(0,0) \\ =& JT\langle \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0) - J\langle \nabla_T \nabla_J T, \nabla_J J\rangle(0,0) \\ =& TJ\langle \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0) - \langle \nabla_J \nabla_T \nabla_J T, \nabla_J J\rangle(0,0) - \langle \nabla_T \nabla_J T, \nabla_J \nabla_J J\rangle(0,0) \\ =& TJ\langle \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0).\end{aligned}$$

所以可以计算 4 阶导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^4L^2}{\mathrm{d}t^4}(0,0) &= 8\langle \nabla_J \nabla_J \nabla_J T, \nabla_J T\rangle(0,0) \\ &= 8\langle \mathrm{Rm}(J, \nabla_J T)J, \nabla_J T\rangle(0,0) - TJ\langle \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0) \\ &= -8\mathrm{Rm}(w - v, v, w - v, v) - TJ\langle \nabla_J J, \nabla_J T\rangle(0,0).\end{aligned}$$

因为上式中, 将 $(0,0)$ 替换为 $(0,s)$ 也是成立的 $(L=|T(0,s)|)$, 因此 $TJ\langle\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,s)$ 是和 s 无关的常数. 而

$$J\langle\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,t)=\langle\nabla_J\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,t)+\langle\nabla_J J,\nabla_J\nabla_J T\rangle(0,t),$$

所以 $J\langle\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,0)=J\langle\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,1)=0$. 记 $\alpha(s):=J\langle\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,s)$, 所以 $\alpha'(s)=\text{const.}$, $\alpha(0)=\alpha(1)=0$, 所以 $\alpha(s)\equiv 0$. 因此 $TJ\langle\nabla_J J,\nabla_J T\rangle(0,s)\equiv 0$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}^4L^2}{\mathrm{d}t^4}(0,0)=-8\mathrm{Rm}(w-v,v,w-v,v)=-8\mathrm{K}(\Pi_p)(1-\cos^2\theta).$$

所以, 用 Taylor 展式

$$L^2=2(1-\cos\theta)t^2-\frac{8}{4!}\mathrm{K}(\Pi_p)(1-\cos^2\theta)t^4+O(t^5),$$

因此用待定系数法可以算出

$$L=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\big[t-\frac{1}{6}\mathrm{K}(\Pi_p)\cos^2(\theta/2)t^3+O(t^4)\big].$$