

第一次作业

洪艺中 12335025

2024 年 3 月 14 日

0.1 119 页习题 7

题目 1. 设 M 为 C^{k+1} 流形, ∇ 为其上仿射联络. X, Y 为 M 的 C^k 向量场, $X_p \neq 0$. 以 $C(s)$ 表示过 p 点的向量场 X 的积分曲线, $C(0) = p$. 以 $C_t^{-1}Y_{C(t)}$ 表示 $Y_{C(t)}$ 沿曲线 C 平行移动到 p 点所得的向量, 证明:

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (C_t^{-1}Y_{C(t)} - Y_p).$$

解答. 取 p 点处的一组正交标架 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 且 $e_1(t) = \dot{C}(t)$. 将 $e_i, i \geq 2$ 沿 $C(t)$ 平行移动得到 $C(t)$ 上一组标架场 $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$. 在这组基下, $Y(C(t)) = Y^i(t)e_i(t)$. 记 $Z_t(s) = C_s^{-1}Y_{C(t)}$ 为 $Y_{C(t)}$ 沿 C 平行移动得到的向量场, 则 $Z_t(s) = Z_t^i(s)e_i(s)$ 关于 $\dot{C}(s) = e_1(s)$ 的协变导数是 0. 即

$$\nabla_{e_1} Z_t = e_1(Z_t^i(s))e_i + Z_t^i(s)\nabla_{e_1} e_i = e_1(Z_t^i(s))e_i = 0$$

所以 $Z_t^i(s)$ 都是常数, $Z_t^i(s) = Z_t^i(t) = Y^i(t)$. 因此不等式右边

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (C_t^{-1}Y_{C(t)} - Y_p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Z_t(0) - Y_p) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y^i(t) - Y^i(0))e_i(t)}{t} \\ &= \dot{Y}^i(0)e_i(0), \end{aligned}$$

而不等式左边 $(\nabla_X Y)_p = e_1(Y^i)e_i = \dot{Y}^i(0)e_i(0)$. 因此两者相等.

0.2 119 页习题 9

题目 2. 设 $\{e_i\}, 1 \leq i \leq m$ 为 C^k 流形 M^n 上的局部基向量场. $\{\omega^i\}$ 为其对偶基向量场, $\{\omega_j^i\}$ 为仿射联络 1-形式.

(i) 证明: 测地线的微分方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega^k}{dt} \right)$$

(ii) 关于 \mathbb{R}^2 上直角坐标 x^1, x^2 的自然标架, 设联络 1-形式为

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = dx^2, \quad \omega_1^2 = dx^1.$$

求挠率、曲率, 并求测地线微分方程.

解答.

(i) 设某曲线 $\gamma(t)$ 的切向量为 $X(t)$. 则测地线方程说明

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X X = X(\omega^i(X))e_i + \omega^i(X)\nabla_X e_i \\ &= X(\omega^k(X))e_k + \omega^i(X)\omega_i^k e_k. \end{aligned}$$

所以如果将 X 写作 $\frac{d}{dt}$, 则测地线方程为

$$\frac{d}{dt}(\omega^k(\frac{d}{dt})) + \omega^i(\frac{d}{dt})\omega_i^k(\frac{d}{dt}).$$

(ii) 挠率