

# 第五次作业

洪艺中 12335025

2024 年 4 月 5 日

## 0.1 148 页习题 4

题目 1. 证明:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & \frac{1}{6} [K(X + Z, Y + W) - K(Y + Z, X + W) - \\ & K(X, Y + W) - K(Z, Y + W) - K(X + Z, Y) - K(X + Z, W) + \\ & K(Y, X + W) + K(Z, X + W) + K(Y + Z, W) + K(X, W) + \\ & K(Y + Z, W) + K(Z, Y) - K(Y, W) - K(Z, X)], \end{aligned}$$

其中,  $K(X, Y) := R(X, Y, X, Y)$ .

解答. 将  $K(X + Z, Y + W)$  展开,

$$\begin{aligned} & K(X + Z, Y + W) \\ = & R(X + Z, Y + W, X + Z, Y + W) \\ = & R(X, Y, X, Y) + R(X, Y, X, W) + R(X, Y, Z, Y) + R(X, Y, Z, W) \\ & + R(X, W, X, Y) + R(X, W, X, W) + R(X, W, Z, Y) + R(X, W, Z, W) \\ & + R(Z, Y, X, Y) + R(Z, Y, X, W) + R(Z, Y, Z, Y) + R(Z, Y, Z, W) \\ & + R(Z, W, X, Y) + R(Z, W, X, W) + R(Z, W, Z, Y) + R(Z, W, Z, W) \\ = & K(X, Y) + K(X, W) + K(Z, Y) + K(Z, W) + 2R(X, Y, Z, W) + 2R(X, W, Z, Y) \\ & + 2R(X, Y, X, W) + 2R(X, Y, Z, Y) + 2R(X, W, Z, W) + 2R(Z, Y, Z, W), \end{aligned}$$

利用

$$2R(X, Y, X, W) = K(X, Y + W) - K(X, Y) - K(X, W),$$

得

$$\begin{aligned} & K(X + Z, Y + W) \\ = & K(X, Y) + K(X, W) + K(Z, Y) + K(Z, W) \\ & + K(X, Y + W) - K(X, Y) - K(X, W) + K(X + Z, Y) - K(X, Y) - K(Z, Y) \\ & + K(X + Z, W) - K(X, W) - K(Z, W) + K(Z, Y + W) - K(Z, Y) - K(Z, W) \\ & + 2R(X, Y, Z, W) + 2R(X, W, Z, Y) \\ = & K(X, Y + W) + K(X + Z, Y) + K(X + Z, W) + K(Z, Y + W) \\ & - K(X, Y) - K(X, W) - K(Z, Y) - K(Z, W) + 2R(X, Y, Z, W) + 2R(X, W, Z, Y) \end{aligned}$$

借助此式

$$\begin{aligned} & K(X+W, Z+Y) \\ &= K(X, Z+Y) + K(X+W, Z) + K(X+W, Y) + K(W, Z+Y) \\ & - K(X, Z) - K(X, Y) - K(W, Z) - K(W, Y) + 2R(X, Z, W, Y) + 2R(X, Y, W, Z), \end{aligned}$$

做差, 得

$$\begin{aligned} & K(X+Z, Y+W) - K(X+W, Z+Y) \\ &= K(X, Y+W) + K(X+Z, Y) + K(X+Z, W) + K(Z, Y+W) \\ & - K(X, Z+Y) + K(X+W, Z) + K(X+W, Y) + K(W, Z+Y) \\ & - K(X, W) - K(Z, Y) + K(X, Z) + K(W, Y) \\ & + 4R(X, Y, Z, W) + 2R(X, W, Z, Y) - 2R(X, Z, W, Y), \end{aligned}$$

利用第一 Bianchi 恒等式,

$$R(X, W, Z, Y) - R(X, Z, W, Y) = -R(X, W, Y, Z) - R(X, Z, W, Y) = R(X, Y, Z, W).$$

所以

$$4R(X, Y, Z, W) + 2R(X, W, Z, Y) - 2R(X, Z, W, Y) = 6R(X, Y, Z, W),$$

代入整理, 得

$$\begin{aligned} & R(X, Y, Z, W) \\ &= \frac{1}{6} [K(X+Z, Y+W) - K(X+W, Z+Y) \\ & - K(X, Y+W) - K(X+Z, Y) - K(X+Z, W) - K(Z, Y+W) \\ & + K(X, Z+Y) + K(X+W, Z) + K(X+W, Y) + K(W, Z+Y) \\ & + K(X, W) + K(Z, Y) - K(X, Z) - K(W, Y)], \end{aligned}$$

得证.

## 0.2 148 页习题 5

**题目 2.** 设 Riemann 流形  $(M^m, g)$  的 Riemann 曲率张量  $R$  满足下式

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{m-1} \{ \text{Ric}Y, Zg(X, W) - \text{Ric}(Y, W)g(X, Z) \},$$

且  $m \geq 3$ , 则  $(M^m, g)$  为常曲率流形.

**解答.** 考虑  $p$  点互相正交的单位向量  $X, Y \in T_p M$  确定的截面  $\pi_{X, Y}$  的截面曲率

$$K(\pi_{X, Y}) = R(X, Y, X, Y) = -\frac{1}{m-1} \text{Ric}(Y, Y),$$

同时还有

$$K(\pi_{X, Y}) = R(Y, X, Y, X) = -\frac{1}{m-1} \text{Ric}(X, X),$$

所以  $\text{Ric}(X, X) = \text{Ric}(Y, Y)$ . 任取截面上的另一个单位向量  $Z \in \pi_{X,Y}$  并取与其正交的  $W \in \pi_{X,Y}$ , 由于截面曲率和取的向量无关, 所以  $K(\pi_{X,Y}) = -\frac{1}{m-1}\text{Ric}(Z, Z) = -\frac{1}{m-1}\text{Ric}(W, W)$ . 因此在  $T_p M$  上, 只要两个单位向量  $X, Y$  是共面的, 那么  $\text{Ric}(X, X) = \text{Ric}(Y, Y)$ . 而两个向量必然共面, 所以  $M$  在  $p$  为 Ricci 迷向的, 进而  $p$  还为迷向点, 所以  $M$  为迷向流形. 由 Schur 定理, 不低于三维的迷向流形是常曲率流形. 因此  $(M^m, g)$  为常曲率流形.

### 0.3 148 页习题 6

**题目 3.** 设  $(M^3, g)$  是三维 Riemann 流形. 在任一点  $p \in M^3$ , 取坐标系  $\{x^i\}$  使得在  $p$  点有  $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = 0, i \neq j$ . 证明: 对互不相同的  $i, j, k$ , 在  $p$  点成立

$$\text{Ric}_{ij} = \frac{1}{g_{kk}}R_{ikjk}, \text{Ric}_{ii} = \frac{1}{g_{jj}}R_{ijij} + \frac{1}{g_{kk}}R_{ikjk}, R_{ijij} - g_{ii}\text{Ric}_{jj} - g_{jj}\text{Ric}_{ii} + \frac{1}{2}\rho g_{ii}g_{jj} = 0.$$

其中  $\rho$  是  $M^3$  的数量曲率, 即  $\rho = g^{ij}\text{Ric}_{ij}$ .

**解答.**  $g^{ij} = 0, i \neq j$ , 所以  $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$ .

对第一式,

$$\text{Ric}_{ij} = \sum_{s,t} g^{st}R_{isjt} = \sum_l g^{ll}R_{iljl} = \frac{1}{g_{kk}}R_{ikjk}.$$

最后一个等号去掉求和, 是因为  $R_{iljl}$  只有在  $l \neq i$  且  $l \neq j$  时才非零, 而  $M$  是三维的, 所以  $l$  只能取  $k$ .

对于  $\text{Ric}_{ii}$  同样有  $\text{Ric}_{ii} = \sum_l g^{ll}R_{ilil} = \frac{1}{jj}R_{ijij} + \frac{1}{kk}R_{ikik}$ .

最后一个式子, 左边为

$$\begin{aligned} & R_{ijij} - g_{ii}\text{Ric}_{jj} - g_{jj}\text{Ric}_{ii} + \frac{1}{2}\rho g_{ii}g_{jj} \\ &= R_{ijij} - g_{ii}\text{Ric}_{jj} - g_{jj}\text{Ric}_{ii} + \frac{1}{2}g_{ii}g_{jj} \sum_l \frac{\text{Ric}_{ll}}{g_{ll}} \\ &= R_{ijij} - g_{ii}\text{Ric}_{jj} - g_{jj}\text{Ric}_{ii} + \frac{1}{2}g_{jj}\text{Ric}_{ii} + \frac{1}{2}g_{ii}\text{Ric}_{jj} + \frac{1}{2}g_{ii}g_{jj} \frac{\text{Ric}_{kk}}{g_{kk}} \\ &= R_{ijij} - \frac{1}{2}g_{ii}\text{Ric}_{jj} - \frac{1}{2}g_{jj}\text{Ric}_{ii} + \frac{1}{2}g_{ii}g_{jj} \frac{\text{Ric}_{kk}}{g_{kk}} \\ &= R_{ijij} - \frac{1}{2} \frac{g_{ii}}{g_{ii}} R_{ijij} - \frac{1}{2} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} R_{jkjk} - \frac{1}{2} \frac{g_{jj}}{g_{jj}} R_{ijij} - \frac{1}{2} \frac{g_{jj}}{g_{kk}} R_{ikik} + \frac{1}{2} \frac{g_{ii}g_{jj}}{g_{ii}g_{kk}} R_{ikik} + \frac{1}{2} \frac{g_{ii}g_{jj}}{g_{jj}g_{kk}} R_{jkjk} \\ &= 0 \end{aligned}$$

### 0.4 148 页习题 8

**题目 4.** 设  $M \subset \mathbb{R}^3$  为浸入曲面, 且具有由  $\mathbb{R}^3$  的欧氏度量诱导的 Riemann 度量, 证明  $M$  的截面曲率即为 Gauss 曲率.

**解答.**

## 0.5 148 页习题 9

**题目 5.** 计算球面  $S^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i (x^i)^2 = r^2\}$  的截面曲率, Ricci 曲率与数量曲率.  $S^m(r)$  上的 Riemann 度量是由  $\mathbb{R}^{m+1}$  的欧氏度量所诱导的.

**解答.** 在某点  $p$  处, 两个切向量张成的截面是一个切平面  $\pi_p$ .  $\pi_p$  上的截面曲率即是二维曲面  $\exp_p(\pi_p)$  的 Gauss 曲率, 而  $\exp_p(\pi_p)$  是半径为  $r$  的球面. 所以  $K(\pi_p) = \frac{1}{r^2}$ .

故截面曲率是  $\frac{1}{r^2}$ , Ricci 曲率是  $\frac{m-1}{r^2}$ , 数量曲率是  $\frac{m(m-1)}{r^2}$ .