第八次作业

洪艺中 12335025

2024 年 4 月 26 日

0.1 问题 1: 177 页习题 1

题目 1. 设 (M,g) 是 Riemann 流形, $C\colon (a,b)\to M$, $r\mapsto C(t)$ 为光滑曲线, 则参数变换 $t=t(s)$ 后, C 为测地线的充要条件是: 曲线 C 在局部坐标下的方程 $x^i=x^i(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=f(t)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t},$$

其中 f 是 C 上的函数, t 为任意参数.

解答. 如果变换后是测地线, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0.$$

而

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}=t'(s)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}=(t'(s))^2\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+t''(s)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}.$$

所以代入

$$(t'(s))^2\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+t''(s)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}+(t'(s))^2\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=-\frac{t''(s)}{(t'(s))^2}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}.$$

0.2 问题 2

题目 2. 给定 (M,g) 上的两个点 p 和 q. 令 $\Omega_{p,q}=\{\text{光滑曲线}\sigma\colon[a,b]\to M:\sigma(a)=p,\sigma(b)=q,\dot\sigma\neq 0\}$. 记 $|\dot\sigma|^2(t)=\langle\dot\sigma(t),\dot\sigma(t)\rangle_{g|_{\sigma(t)}}$. 曲线的能量泛函定义为

$$E(\sigma):=\int_a^b|\dot\sigma|^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. 证明: 如果曲线 $\gamma\in\Omega_{p,q}$ 使得 $E(\gamma)=\inf\{E(\sigma):\sigma\in\Omega_{p,q}\}$. 则 γ 是测地线;
2. 证明: 曲线 σ 的长度 $L(\sigma)=\int_a^b|\dot\sigma|\,\mathrm{d}t$ 与其能量 $E(\sigma)$ 之间满足关系:

   $$L(\sigma)\leqslant(b-a)^{\frac12}\left[E(\sigma)\right]^{\frac12},$$

   且等号成立当且仅当 $|\dot\sigma|=$ 常数;

3. 不像课堂上那样去计算弧长泛函 $L(\sigma)$ 的一阶变分, 而是利用 (1) 和 (2) 的结论, 证明: 如果 $L(\gamma) = \inf\{L(\sigma)\colon \sigma \in \Omega_{p,q}\}$, 则 γ 是测地线.

解答.

1. 考虑 γ 上固定端点的变分 $\alpha(t,s)\colon M \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, $\alpha(\cdot,0)=\gamma(t)$, $\alpha(a,\cdot)=p$, $\alpha(b,\cdot)=q$. 那么
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(\alpha_s(t))|_{s=0} = 0.$$
记 $V = \alpha_*(\dfrac{\partial}{\partial s})$, $T = \alpha_*(\dfrac{\partial}{\partial t})$. 因为 $[\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial s}] = 0$, 所以 $[T,V]=0$. 因此有
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(\alpha_s(t))\Big|_{s=0} &= \int_a^b V\langle T,T\rangle|_{s=0}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b 2\langle \nabla_V T, T\rangle|_{s=0}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_a^b \langle \nabla_T V, T\rangle|_{s=0}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_a^b T\langle V,T\rangle|_{s=0} - \langle V, \nabla_T T\rangle|_{s=0}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\langle V,T\rangle|_a^b - 2\int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle|_{s=0}\,\mathrm{d}t\\
&= -2\int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle|_{s=0}\,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$
由 V 的任意性, $\nabla_T T|_{s=0} = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. 即 γ 是测地线.

2. 用 Hölder 不等式, 在 $C^\infty([a,b])$ 上,
$$\||\dot\sigma(t)|\|_1 \leqslant \|1\|_2 \||\dot\sigma(t)|^2\|_2 = (b-a)^{\frac12}\Big(\int_a^b \langle \dot\sigma(t), \dot\sigma(t)\rangle_{g|_{\sigma(t)}}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12} = (b-a)^{\frac12}\big[E(\sigma)\big]^{\frac12},$$
取等时, $|\dot\sigma(t)|$ 是 1 的常数倍. 得证.

3. 注意到若 $L(\gamma) = \inf\{L(\sigma)\colon \sigma\in\Omega_{p,q}\}$, 则对任意同起讫点的 σ
$$L(\gamma) \leqslant L(\sigma) \leqslant (b-a)^{\frac12}\big[E(\sigma)\big]^{\frac12}.$$
此外, 我们可以取 $\gamma(t)$ 为匀速测地线, $|\dot\gamma| = L(\gamma)$, 这时 $b-a=1$. 此时由 (2), $L(\gamma) = E(\gamma)^{\frac12}$. 所以对任意 $\sigma \in \Omega_{p,q}$,
$$E(\gamma) \leqslant E(\sigma).$$
由 (1), γ 是测地线.

0.3 问题 3

题目 3. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 的上半平面 $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}$. 并赋予 $\mathbb{H}^n$ 如下 Riemann 度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{x_n^2}(\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_{n-1}^2 + \mathrm{d}x_n^2).$$

1. 证明 $(\mathbb{H}^n, \mathrm{d}s^2)$ 的截面曲率是常数 -1;
2. 证明 $\ell_1 = \{(0,t) \in \mathbb{R}^n \colon t > 0\}$ 与 $\ell_2 = \{(0, \cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^n \colon t \in (0,\pi)\}$ 均为 $(\mathbb{H}^n, \mathrm{d}s^2)$ 的测地线 (作为集合, 未考虑参数化).

解答.

1. 取 $\varphi = \log(\frac{1}{x_n}) = -\log x_n$. $V := \nabla\varphi = -\frac{1}{x_n}\partial_n$.

   $\psi(X,Y) := \nabla_X\omega(Y) - \omega(X)\omega(Y) + \frac{1}{2}\omega(V)g_0(X,Y) = \frac{1}{x_n^2}\omega^n\omega^n - \frac{1}{x_n^2}\omega^n\omega^n + \frac{1}{2x_n^2}g_0(X,Y) = \frac{1}{2x_n^2}g_0(X,Y),$

   所以

   $$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) = \mathrm{Rm}_0(X,Y,Z,W) - \psi \owedge g_0(X,Y,Z,W) = -\frac{1}{2x_n^2}g_0 \owedge g_0.$$

   所以, 截面曲率为

   $$K(e_i,e_j) = \frac{\mathrm{Rm}(e_i,e_j,e_i,e_j)}{g(e_i,e_i)g(e_j,e_j) - g(e_i,e_j)^2} = \frac{-\frac{1}{2x_n^2}g_0 \owedge g_0}{\frac{1}{2x_n^2}g_0 \owedge g_0} = -1.$$

2. 首先计算联络导数

   $$\nabla_{e_n}e_n = 2g_0(e_n,V)e_n - g_0(e_n,e_n)V = -\frac{1}{x_n}e_n,$$

   当 $i \neq n$ 时,

   $$\nabla_{e_i}e_n = \nabla_{e_n}e_i = g_0(e_n,V)e_i = -\frac{1}{x_n}e_i,$$

   以及 $i \neq n$ 时,

   $$\nabla_{e_i}e_i = -g_0(e_i,e_i)V = \frac{1}{x_n}e_n.$$

   其他联络导数为 0.

   对 ℓ_1, 取参数 $\ell_1(t) = (0, f(t))$, 则 $\dot{\ell}_1(t) = (0, f'(t))$, $(\ell_1)_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = f'(t)e_n$

   $$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\ell}_1(t)}\dot{\ell}_1(t) &= f'(t)e_n(f'(t))e_n + (f')^2(t)\nabla_{e_n}e_n \\ &= f'(t)\left(\frac{f''(t)}{f'(t)} - \frac{f'(t)}{f(t)}\right)e_n,\end{aligned}$$

   所以取参数 $f(t) = e^t$, 则 ℓ_1 成为测地线.

   对 ℓ_2, $\dot{\ell}(t) = (0, -\sin t, \cos t)$. 这里 $x_{n-1} = \cos t$, $x_n = \sin t$, 因为协变导数和延拓是无关的, 所以计

算 $\nabla_{\dot\ell_2(t)}\dot\ell_2(t)$ 时, 可以考虑延拓的向量场 $-x_ne_{n-1}+x_{n-1}e_n$,

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\ell_2(t)}\dot\ell_2(t) &= -x_n\nabla_{e_{n-1}}(-x_ne_{n-1}+x_{n-1}e_n)+x_{n-1}\nabla_{e_n}(-x_ne_{n-1}+x_{n-1}e_n)\\ &= -x_n(-\frac{x_n}{x_n}e_n+e_n-\frac{x_{n-1}}{x_n}e_{n-1})+x_{n-1}\left(-e_{n-1}+\frac{x_n}{x_n}e_{n-1}-\frac{x_{n-1}}{x_n}e_n\right)\\ &= \cos te_{n-1}-\frac{\cos^2 t}{\sin t}e_n\\ &= -\cot t(-\sin te_{n-1}+\cos te_n).\end{aligned}$$

所以由问题 1, ℓ_2 是测地线.

0.4 问题 4

题目 4. 设 (M,g) 是一个闭 Riemann 流形 (即连通, 紧致, 没有边界). 假设存在光滑函数 $f\in C^\infty(M)$ 以及常数 $\lambda<0$ 使得

$$\mathrm{Ric}+\nabla^2 f=\lambda g.$$

请按如下步骤证明 M 是 Einstein 流形.

1. 利用 Ricci 恒等式证明: $\nabla_i\mathrm{Ric}_{jk}-\nabla_j\mathrm{Ric}_{ik}=\mathrm{R}^l_{kij}f^l$;
2. 利用第二 Bianchi 恒等式证明: $\nabla_i\mathrm{scal}=2\mathrm{Ric}_{ij}g^{jk}\nabla_k f$;
3. 证明 f 满足这样的方程: $\Delta f-|\nabla f|^2+2\lambda f=$ 常数;
4. 证明 $f=$ 常数, 从而 $\mathrm{Ric}=\lambda g$.

解答.

1. 直接计算得到

$$\begin{aligned}\nabla_i\mathrm{Ric}_{jk}-\nabla_j\mathrm{Ric}_{ik} &= \nabla_i(\lambda g-\nabla^2 f)_{jk}-\nabla_j(\lambda g-\nabla^2 f)_{ik}\\ &= f_{,ikj}-f_{,jki}\\ &= f_{,l}\mathrm{R}^l_{kij}.\end{aligned}$$

2. 直接计算得到

$$\begin{aligned}\nabla_i\mathrm{scal} &= \mathrm{tr}_{jk}\,\nabla_i\mathrm{Ric}_{jk}\\ &= \mathrm{tr}_{lm}\,\mathrm{tr}_{jk}\,\mathrm{R}_{jlkm,i}\\ &= \mathrm{tr}_{lm}\,\mathrm{tr}_{jk}(-\mathrm{R}_{jlmi,k}-\mathrm{R}_{jlik,m})\\ &= \mathrm{tr}_{jk}\,\mathrm{Ric}_{ji,k}+\mathrm{tr}_{lm}\,\mathrm{Ric}_{li,m}\\ &= 2g^{jk}\mathrm{Ric}_{ji,k}\end{aligned}$$

所以对 1 中的式子关于 j, k 取迹, 得

$$g^{jk}\nabla_i\mathrm{Ric}_{jk}-g^{jk}\nabla_j\mathrm{Ric}_{ik}=g^{jk}\mathrm{R}^l_{kij}\nabla_l f,$$

即

$$\nabla_i\mathrm{scal}-\frac{1}{2}\nabla_i\mathrm{scal}=\frac{1}{2}\nabla_i\mathrm{scal}=\mathrm{Ric}^j_i\nabla_l f=\mathrm{Ric}_{ij}g^{jk}\nabla_k f.$$

得证.

3. 直接计算得到

$$\begin{aligned}\nabla_i|\nabla^2 f| &= 2\langle\nabla_i\nabla f, \nabla f\rangle \\ &= 2g^{jk}f_{,ij}f_{,k} \\ &= 2g^{jk}(\lambda g_{ij} - \mathrm{Ric}_{ij})f_{,k} \\ &= 2\lambda\delta_i^k f_{,k} - 2g^{jk}\mathrm{Ric}_{ij}f_{,k} \\ &= 2\lambda f_{,i} - \nabla_i \mathrm{scal}.\end{aligned}$$

所以 $\nabla_i(|\nabla^2 f| - \lambda f + \frac{1}{2}\mathrm{scal}) = 0$. 即存在常数 C,

$$|\nabla^2 f| - 2\lambda f + \mathrm{scal} = C'.$$

此外, 直接对 $\mathrm{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g$ 取迹, 得到

$$\mathrm{scal} + \Delta f = \lambda n.$$

上两式作差, 得

$$\Delta f - |\nabla f|^2 + 2\lambda f = C' - \lambda n = C.$$

得证.

4. 考虑 f 的最大值点 p 和最小值点 q.

5. 在最大值点处, $\Delta f \leqslant 0$, $\nabla f = 0$, 所以 $f(p) = \dfrac{1}{2\lambda}(C - \Delta f) \leqslant \dfrac{1}{2\lambda}C$.

   在最小值点处, $\Delta f \geqslant 0$, $\nabla f = 0$, 所以 $f(q) = \dfrac{1}{2\lambda}(C - \Delta f) \geqslant \dfrac{1}{2\lambda}C$.

   所以 $f(q) \geqslant f(p)$, 即 f 是常数. 所以

$$\mathrm{Ric} = \lambda g.$$