第十次作业

洪艺中 12335025

2024 年 5 月 20 日

0.1 179 页习题 7

题目 1. 设 $(\mathcal{M}, g)$ 和 $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{g})$ 均为 Riemann 流形, 证明:

(i) 若 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathcal{M}}$ 为等距同胚, 则 φ 将 $(\mathcal{M}, g)$ 的测地线映为 $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{g})$ 的测地线;

(ii) 若 $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 均为等距变换, $(\mathcal{M}, g)$ 完备且连通, 且存在一点 p 使得 $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ 和 $(\varphi_{1*})_p = (\varphi_{2*})_p$, 则 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

解答.

(i) 取 $\mathcal{M}$ 上测地线 $\gamma(t)$ 附近的一组光滑变分 $\alpha\colon [0,T] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$, $(t,s) \mapsto \alpha(t,s)$, $\alpha(t,0) = \gamma(t)$, $\gamma(s)$ 的长度是最小值. 因为 φ 是等距, 所以 $\varphi \circ \alpha$ 保持所有曲线 $\alpha_s(t)$ 的长度, 因此 $\varphi \circ \alpha(t,0) = \varphi \circ \gamma(t)$ 也是这个变分的最小值. 因此根据 α 的任意性和第一变分公式, $\varphi \circ \gamma$ 也是测地线.

(ii) 因为 $(\mathcal{M}, g)$ 完备且连通, 根据 Hopf-Rinow 定理, 其在 p 点测地完备. 因为 φ_1, φ_2 都是等距同胚, 所以其将测地线映为测地线. 因此 $\varphi_i(\exp_p v) = \exp_{\varphi_i(p)}((\varphi_{i*})_p v)$. 利用条件, 任取 $v \in T_p\mathcal{M}$, 有 $\varphi_1(\exp_p v) = \varphi_2(\exp_p v)$. 故 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

0.2 179 页习题 8

题目 2. 设 $(\mathcal{M}, g)$ 为完备 Riemann 流形, $\gamma\colon [0, +\infty) \to \mathcal{M}$, $s \mapsto \gamma(s)$ 为测地线, 其中 s 为弧长参数. 如果 $s = \rho(\gamma(0), \gamma(s))$, 其中 ρ 是距离函数, 则称 γ 为从 $\gamma(0)$ 点出发的**射线**. 设 p 为非紧致完备 Riemann 流形 $(\mathcal{M}, g)$ 上任意一点, 证明: M 上存在从 p 出发的一条射线.

解答. 因为 $\mathcal{M}$ 非紧, 所以 $\mathcal{M}$ 直径不能有限. 因 $\mathcal{M}$ 测地完备, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $v_n \in T_p\mathcal{M}$, $|v_n| = 1$, 且 $t \in [0, n]$ 时, $\exp_p tv_n$ 都是极小测地线. 因为 $T_p\mathcal{M}$ 中的单位球面 $S_p\mathcal{M}$ 是紧集, 所以 $\{v_n\}$ 有收敛的子列 (不妨仍记作 $\{v_n\}$) 收敛到 v. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 由完备性, $m \geqslant n$ 时都有 $\lim_{m\to\infty} \exp_p nv_m = \exp_p nv$. 所以 $\exp_p tv$ 可以定义在 $t \in [0, +\infty)$. 即存在射线.

0.3 192 页习题 1

题目 3. 证明: 由 (4. 2. 2) 式定义的诱导联络 $\widetilde{\nabla}$ 满足 (4. 2. 3) 和 (4. 2. 4) 式.

解答. 因为 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的嵌入子流形, 所以其也是正则子流形, 即存在 $\mathcal{M}$ 上 p 附近的坐标图 $(\mathcal{U},\psi;x^i)$ 使得 $x^{n+1}=\cdots=x^m=0$. 那么沿 $f\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 的向量场可以用这组坐标对应的基向量表示. 同时, $\mathcal{N}$ 上的向量场 $X\in T_p\mathcal{N}$ 形为 $X=\sum_{k=1}^n a^k\partial_{x^k}$, 所以其可以自然地延拓成为 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量场 $\bar{X}=f_*X$ (取 $\partial_{x^{n+1}}$ 到 ∂_{x^m} 上的系数为 0). 根据定义, 此时

$$\widetilde{\nabla}_X W=\nabla_{\bar{X}}W,$$

故 (4. 2. 3) 和 (4. 2. 4) 式由 $\mathcal{M}$ 上联络的性质立得.

0.4 192 页习题 5

题目 4. 设 $\gamma\colon[a,b]\to\mathcal{M}$, $s\mapsto\gamma(s)$ 是 Riemann 流形 $(\mathcal{M},g)$ 的正规测地线. X, Y 为沿 γ 的 Jacobi 场. 证明:

(i) 若 $X=f(s)\gamma'(s)$, 则 $f(s)=as+b$, a, b 为常数;

(ii) 若在 γ 的两个不同点处 X 与 γ' 正交, 则 $\langle X,\gamma'\rangle=0$;

(iii) $\langle X,\nabla_{\gamma'}Y\rangle-\langle\nabla_{\gamma'}X,Y\rangle=\text{const.}$.

解答.

(i) 因为 $\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s)=0$, 所以 Jacobi 方程变为

$$f''(s)\gamma'(s)=\mathrm{R}(\gamma',f(s)\gamma')\gamma'=0,$$

所以 $f(s)=as+b$.

(ii) $\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}\langle X,\gamma'\rangle=\langle\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}X,\gamma'\rangle=0$, 记 $h(s):=\langle X(s),\gamma'(s)\rangle$, 那么有两点 $h(s_0)=h(s_1)=0$ 且 $h''(s)=0$. 所以 $h(s)\equiv 0$.

(iii) 对这个式子求导,

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\gamma'}(\langle X,\nabla_{\gamma'}Y\rangle-\langle\nabla_{\gamma'}X,Y\rangle)\\
=&\langle\nabla_{\gamma'}X,\nabla_{\gamma'}Y\rangle+\langle X,\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y\rangle-\langle\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}X,Y\rangle-\langle X,\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y\rangle\\
=&0.
\end{aligned}$$

0.5 192 页习题 6

题目 5. 设 $\gamma\colon [0,l]\to(\mathcal{M},g)$ 为正规测地线, 证明: 若 N 为沿 γ 平行的单位向量场, 使 $\langle N(t_0),\gamma'(t_0)\rangle=0$, $V=f(t)N$ 为 γ 的端点保持固定的变分向量场, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}s^2}(0)=-\int_0^l f(f''+f\mathrm{R}(\gamma',N,\gamma',N))\,\mathrm{d}t.$$

解答. 代入第二变分公式, 得到

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}s^2}(0)&=\int_0^l\big[\langle\nabla_{\gamma'}V,\nabla_{\gamma'}V\rangle-\mathrm{R}(V,\gamma',V,\gamma')\big]\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^l\big[\gamma'(\langle V,\nabla_{\gamma'}V\rangle)-\langle V,\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}V\rangle-\mathrm{R}(V,\gamma',V,\gamma')\big]\,\mathrm{d}t\\
&=-\int_0^l\big[ff''+f^2\mathrm{R}(N,\gamma',N,\gamma')\big]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$