第二次作业

洪艺中 12335025

2024 年 3 月 15 日

0.1　119 页习题 7

题目 1.　设 M 为 C^{k+1} 流形, ∇ 为其上仿射联络. X, Y 为 M 的 C^k 向量场, $X_p \neq 0$. 以 $C(s)$ 表示过 p 点的向量场 X 的积分曲线, $C(0) = p$. 以 $C_t^{-1} Y_{C(t)}$ 表示 $Y_{C(t)}$ 沿曲线 C 平行移动到 p 点所得的向量, 证明:

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(C_t^{-1} Y_{C(t)} - Y_p).$$

解答.　取 p 点处的一组正交标架 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 且 $e_1(t) = \dot{C}(t)$. 将 $e_i, i \geqslant 2$ 沿 $C(t)$ 平行移动得到 $C(t)$ 上一组标架场 $\{e_1(t), \cdots, e_n(t)\}$. 在这组基下, $Y(C(t)) = Y^i(t) e_i(t)$. 记 $Z_t(s) = C_s^{-1} Y_{C(t)}$ 为 $Y_{C(t)}$ 沿 C 平行移动得到的向量场, 则 $Z_t(s) = Z_t^i(s)$ 关于 $\dot{C}(s) = e_1(s)$ 的协变导数是 0. 即

$$\nabla_{e_1} Z_t = e_1(Z_t^i(s)) e_i + Z_t^i(s) \nabla_{e_1} e_i = e_1(Z_t^i(s)) e_i = 0,$$

所以 $Z_t^i(s)$ 都是常数, $Z_t^i(s) = Z_t^i(t) = Y^i(t)$. 因此不等式右边

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(C_t^{-1} Y_{C(t)} - Y_p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Z_t(0) - Y_p) \\
=&\lim_{t \to 0} \frac{\left(Y^i(t) - Y^i(0)\right) e_i(t)}{t} \\
=&\dot{Y}^i(0) e_i(0),
\end{aligned}$$

而不等式左边 $(\nabla_X Y)_p = e_1(Y^i) e_i = \dot{Y}^i(0) e_i(0)$. 因此两者相等.

0.2　119 页习题 9

题目 2.　设 $\{e_i\}, 1 \leqslant i \leqslant m$ 为 C^k 流形 M^n 上的局部基向量场. $\{\omega^i\}$ 为其对偶基向量场, $\{\omega_j^i\}$ 为仿射联络 1–形式.

(i) 证明: 测地线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega^k}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\omega^i}{\mathrm{d}t}\frac{\omega_i^k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

(ii) 关于 $\mathbb{R}^2$ 上直角坐标 x^1, x^2 的自然标架, 设联络 1–形式为

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = \mathrm{d}x^2, \quad \omega_1^2 = \mathrm{d}x^1.$$

求挠率、曲率, 并求测地线微分方程.

解答.

(i) 设某曲线 $\gamma(t)$ 的切向量为 $X(t)$. 则测地线方程说明

$$\begin{aligned}0 = \nabla_X X &= X(\omega^i(X))e_i + \omega^i(X)\nabla_X e_i \\ &= X(\omega^k(X))e_k + \omega^i(X)\omega_i^k e_k.\end{aligned}$$

所以如果将 X 写作 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega^k(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})) + \omega^i(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\omega_i^k(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega^k}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\omega^i}{\mathrm{d}t}\frac{\omega_i^k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

(ii) 代入给出的联络 1–形式, 可得

$$\nabla_{e_1}e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_1}e_2 = 0,$$
$$\nabla_{e_2}e_1 = 0, \quad \nabla_{e_2}e_2 = e_1.$$

挠率: $T(e_1, e_2) = 0$, 故挠率张量 $T = 0$.

曲率: 截面曲率 $\mathrm{R}_{1212} = \langle \mathrm{R}e_1e_2e_2, e_1\rangle = g_{12} = 0$.

测地线方程: 设 $\gamma(t)\colon (0,1) \to M$ 为一条曲线, $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t))$, 则若 $\gamma(t)$ 是测地线, 其将满足方程:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= 0.\end{aligned}$$

0.3 131 页习题 1

题目 3. 证明由

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle[X, Y], Z\rangle - \langle[Y, Z], X\rangle + \langle[Z, X], Y\rangle \tag{$*$}$$

定义的仿射联络 $\nabla_X Y$ 是一个 Riemann 联络.

解答. 需要验证

1. 这样定义的 $\nabla_X Y$ 关于 X 是函数线性的, 而关于 Y 是导数;
2. 联络是无挠的;
3. 联络和 Riemann 度量是相容的.

接下来逐项验证:

1. 首先考虑

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_{fX_1+X_2}Y,Z\rangle =& fX_1\langle Y,Z\rangle+X_2\langle Y,Z\rangle\\&+Y(f)\langle Z,X_1\rangle+fY\langle Z,X_1\rangle+Y\langle Z,X_2\rangle\\&-Z(f)\langle X_1,Y\rangle-fZ\langle X_1,Y\rangle+Z\langle X_2,Y\rangle\\&+f\langle[X_1,Y],Z\rangle-Y(f)\langle X_1,Z\rangle+\langle[X_2,Y],Z\rangle\\&-f\langle[Y,Z],X_1\rangle-\langle[Y,Z],X_2\rangle\\&+f\langle[Z,X_1],Y\rangle+Z(f)\langle X_1,Y\rangle+\langle[Z,X_2],Y\rangle\\&=2\langle f\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

因此 ∇_XY 关于 X 是函数线性的. 再考虑 Y 位置:

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_XfY_1+Y_2,Z\rangle =& X(f)\langle Y_1,Z\rangle+fX\langle Y_1,Z\rangle+X\langle Y_2,Z\rangle\\&+fY_1\langle Z,X\rangle+Y_2\langle Z,X\rangle\\&-Z(f)\langle X,Y_1\rangle-fZ\langle X,Y_1\rangle-Z\langle X,Y_2\rangle\\&+f\langle[X,Y_1],Z\rangle+X(f)\langle Y_1,Z\rangle+\langle[X,Y_2],Z\rangle\\&-f\langle[Y_1,Z],X\rangle+Z(f)\langle Y_1,X\rangle-\langle[Y_2,Z],X\rangle\\&+f\langle[Z,X],Y_1\rangle+\langle[Z,X],Y_2\rangle\\&=2\langle f\nabla_XY_1+X(f)Y_1+\nabla_XY_2,Z\rangle\end{aligned}$$

因此 ∇_XY 关于 Y 是导数. 即 ∇ 确实是一个联络.

2. 无挠:

$$\begin{aligned}2\langle T(X,Y),Z\rangle =&2\langle\nabla_XY,Z\rangle-2\langle\nabla_YX,Z\rangle-2\langle[X,Y],Z\rangle\\=&X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle\\&-(Y\langle X,Z\rangle+X\langle Z,Y\rangle-Z\langle Y,X\rangle+\langle[Y,X],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Z,Y],X\rangle)\\&-2\langle[X,Y],Z\rangle\\=&2\langle[X,Y],Z\rangle-2\langle[X,Y],Z\rangle=0.\end{aligned}$$

3. 与 Riemann 度量相容:

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_XY,Z\rangle+2\langle Y,\nabla_XZ\rangle =&X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle\\&+X\langle Z,Y\rangle+Z\langle Y,X\rangle-Y\langle X,Z\rangle+\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Z,Y],X\rangle+\langle[Y,X],Z\rangle\\=&2X\langle Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

综上, $(*)$ 式定义的仿射联络的确是 Riemann 联络.

0.4 131 页习题 2

题目 4. 设 (M,g) 是 Riemann 流形. 在自然标架下, $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ 为 Christoffel 记号. $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}, Y=Y^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ 为任意向量场. 证明, 由

$$\nabla_XY=\nabla_{X^i\frac{\partial}{\partial x^i}}Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}:=\left(X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}+X^iY^j\left\{ {i \atop jk} \right\}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

定义的 ∇ 是 Riemann 联络.

解答. 根据书 120 页 (3.2.2) 式, Christoffel 记号通过 (3.2.1) 式和 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\dfrac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 得到, 所以 Christoffel 记号定义的联络满足 (3.2.1) 式, 也就是上一习题中的 $(*)$ 式. 则利用上一习题的结论