# 第七次作业

洪艺中 12335025

2024 年 4 月 22 日

### 0.1 149 页问题 15

**题目 1.** 设 $\mathbb{S}^m = \left\{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_i (x^i)^2 = r^2, r > 0\right\}$. 作球极投影

$$\phi \colon \mathbb{S}^m(r) \setminus \{(0, \cdots, 0, r)\} \to \mathbb{R}^m.$$

证明: $\phi$ 为共形映射, 即对于 Riemann 流形 $(\mathbb{S}^m(r), \tilde{g}$ 和 $(\mathbb{R}^m, g)$, 有 $\tilde{g} = \phi^* g$, 这里 $\tilde{g}$ 是 $\mathbb{S}^m(r) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 的诱导度量, $g$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的欧氏度量.

**解答.** 设 $\phi$ 将 $\mathbb{S}^m$ 投影到 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的 $x^{n+1} = 0$ 平面, 也就是 $\mathbb{R}^m$. 设 $\mathbb{R}^m$ 的坐标是 $(y_1, \cdots, y_m)$, 那么 $\phi$ 可以表达为

$$\phi(y_1, \cdots, y_n) = \left(\frac{2r^2 y_1}{|y|^2 + r^2}, \cdots, \frac{2r^2 y_m}{|y|^2 + r^2}, r\frac{|y|^2 - r^2}{|y|^2 + r^2}\right),$$

计算切映射,

$$\phi^* = \frac{2r^2}{|y|^2 + r^2} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \end{bmatrix} - \frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2} \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & \cdots & y_1 y_m & -r y_1 \\ y_2 y_1 & y_2^2 & \cdots & y_2 y_m & -r y_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ y_m y_1 & y_m y_2 & \cdots & y_m^2 & -r y_m \end{bmatrix}.$$

容易发现, 若 $i \neq j$, 那么 $\langle \partial_{y_i}, \partial_{y_j} \rangle_{\tilde{g}} = 0$, 这是因为内积为

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_{y_i}, \partial_{y_j} \rangle_{\tilde{g}} \\
=&\ -\frac{2r^2}{|y|^2 + r^2} \cdot \frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}(y_i y_j + y_j y_i) + \left(\frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}\right)^2 \sum_{k=1}^m (y_k y_i \cdot y_k y_j) + r^2 y_i y_j \\
=&\ \frac{2r^2}{|y|^2 + r^2} \cdot \frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}(-2y_i y_j + 2y_i y_j) \\
=&\ 0.
\end{aligned}$$

因此 $\tilde{g}$ 是对角的.

$$\begin{aligned}
&\langle\partial_{y_i},\partial_{y_i}\rangle_{\tilde{g}}\\
&=\left(\frac{2r^2}{|y|^2+r^2}\right)^2-\frac{2r^2}{|y|^2+r^2}\cdot\frac{4r^2}{(|y|^2+r^2)^2}2y_i^2+\left(\frac{4r^2}{(|y|^2+r^2)^2}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{m}\left((y_k)^2(y_i)^2\right)-r^2(y_i)^2\right)\\
&=\frac{2r^2}{|y|^2+r^2}\cdot\frac{4r^2}{(|y|^2+r^2)^2}\left(\frac{1}{2}(|y|^2+r^2)-2(y^i)^2+2(y^i)^2\right)\\
&=\frac{4r^4}{(|y|^2+r^2)^2}.
\end{aligned}$$

即 $\tilde{g}=\dfrac{4r^4}{(|y|^2+r^2)^2}g$, 所以 $\tilde{g}$ 是共形变换.

## 0.2 问题 1.2

**题目 2.** 在 $M=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 上配上度量 $g=\left(1+\dfrac{m}{2\rho}\right)^4\delta$, 其中 $m>0$ 为一给定常数, $\rho(x)=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2}$ 为点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 到原点的欧氏距离, $\delta$ 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的标准欧氏度量.

1. 计算 $(M,g)$ 的数量曲率;
2. 令 $S_r=\{x\in\mathbb{R}^3:(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=r^2\}$, $r>0$. 计算 $S_r$ 在 Riemann 流形 $(M,g)$ 中的面积 $|S_r|$. 并指出 $r$ 取何值时, $|S_r|$ 最小, 最小值为何?
3. 计算 $\frac{1}{16}\int_{S_r}(\partial_j g_{ii}-\partial_i g_{ij})n^j\,\mathrm{d}x$, 其中 $n^j$ 是 $S_r$ 内法向量的第 $j$ 个分量.

**解答.**

1. 利用共形变换的公式, $\phi=\left(1+\dfrac{m}{2\rho}\right)^2$,

$$\partial_i(\log\phi)=\frac{2}{1+\dfrac{m}{2\rho}}\cdot-\frac{mx_i}{2\rho^3}=-\frac{mx_i}{\rho^2(\rho+\dfrac{m}{2})},$$

所以

$$V=\nabla\log\phi=-\frac{m}{\rho^2(\rho+\dfrac{m}{2})}\mathbf{x},\quad \omega=-\frac{m}{\rho^2(\rho+\dfrac{m}{2})}\,\mathrm{d}(\frac{\rho^2}{2}).$$

其中 $\mathbf{x}$ 是位置向量, $\omega(X)=\langle X,V\rangle_g$.

故

$$\psi(X,Y)=(\nabla_X\omega)(Y)-\omega(X)\omega(Y)+\frac{1}{2}\omega(V)\langle X,Y\rangle_g,$$

其迹为

$$\operatorname{tr}\psi=\Delta\log\phi-\langle V,V\rangle_g^2+\langle V,V\rangle_g^2=-\frac{-3\rho-\frac{5m}{2}}{\rho^2(\rho+\dfrac{m}{2})^2}.$$

所以

$$\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 \mathrm{scal}_g = \mathrm{scal}_\delta - 2(3-1)\operatorname{tr}\psi,$$

$$\mathrm{scal}_g = \frac{(12\rho+10m)\rho^2}{(\rho+\frac{m}{2})^6}.$$

2. 设 $\mathbb{R}^m$ 上的极坐标为 $(r,\theta_i)$, 对应的度量为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+k_{ij}\,\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}\theta_j$. 那么在 $S_r$ 上, 取 $\theta_i$ 构成的坐标, 那么

$$(\mathrm{d}s^2)_{S_r} = (1+\frac{m}{2r})^4 k_{ij}\,\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}\theta_j.$$

所以

$$\mathrm{vol}(S_r)_g = (1+\frac{m}{2r})^4 \mathrm{vol}(S_r)_\delta = 4\pi r^2(1+\frac{m}{2r})^4 \geqslant 4\pi m^2.$$

其中, $r=\dfrac{m}{2}$ 时取等, 也就是取得最小值 $4\pi m^2$.

3. 设 $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 处外法向量 $\mathbf{n}=n^j\partial_j$, 因为 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{x}$ 平行, 所以可以设 $n^j=kx^j$. 则

$$\sum_{j=1}^3 (n^j)^2\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 = k^2|\mathbf{x}|^2\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 = 1,$$

所以

$$k = -\frac{1}{\rho\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2}.$$

对题目中的式子, $j=i$ 时, $\partial_j g_{ii}=\partial_i g_{ij}$), 其余情况下, $g_{ij}=0$, 所以

$$(\partial_j g_{ii}-\partial_i g_{ij})n^j = \sum_{j\neq i}\partial_j g_{ii} n^j.$$

因此

$$(\partial_j g_{ii}-\partial_i g_{ij})n^j = 2\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)\frac{m}{\rho^4}(\rho^2-(x^i)^2).$$

在 $S_r$ 上, $\rho=r$, 代入积分得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16}\int_{S_r}(\partial_j g_{ii}-\partial_i g_{ij})n^j\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{16}\frac{2m}{r^4}\left(1+\frac{m}{2r}\right)\int_{S_r}(r^2-(x^i)^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\frac{2m}{r^4}\left(1+\frac{m}{2r}\right)^5\int_{-r}^{r}\int_{\{(x^j,x^k):(x^j)^2+(x^k)^2=r^2-(x^i)^2\}}(r^2-(x^i)^2)\,\mathrm{d}x^j\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^i \\
&= \frac{1}{16}\frac{2m}{r^4}\left(1+\frac{m}{2r}\right)^5\int_{-r}^{r}2\pi\sqrt{r^2-(x^i)^2}(r^2-(x^i)^2)\,\mathrm{d}x^i \\
&= \frac{\pi^2}{32}\frac{2m}{r^4}\left(1+\frac{m}{2r}\right)^5
\end{aligned}$$

## 0.3 问题 1.3

**题目 3.** 给定 $m$ 维 Riemann 流形 $(M,g)$.

1. 假设 $T$ 是 $M$ 上对称的 $(0,2)$ 型张量, $\widetilde{\nabla}$ 是共形度量 $\tilde{g}=\phi^2 g$ (这里 $\phi$ 是 $M$ 上的光滑正函数) 的 Levi-Civita 联络. 证明: 任取 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(m)$,
$$\widetilde{\nabla}_Z T(X,Y)-\widetilde{\nabla}_Y T(X,Z)-\nabla_Z T(X,Y)+\nabla_Y T(X,Z)=T\owedge g(V,X,Y,Z),$$
其中 $V=\nabla\log\phi$, $\owedge$ 为 Kulkarni-Nomizu 乘积.

2. 假设 $m\geqslant 3$, 证明: 任取 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$,
$$\tilde{C}(X,Y,Z)=C(X,Y,Z)+W(V,X,Z,Y),$$
其中 $\tilde{C}$ 和 $C$ 分别是度量 $\tilde{g}=\phi^2 g$ 和 $g$ 确定的 Cotton 张量, $W$ 是 Weyl 张量, $V=\nabla\log\phi$.

**解答.**

1. 利用
$$\widetilde{\nabla}_X Y-\nabla_Y X=\omega(X)Y+\omega(Y)X-g(X,Y)V,$$
其中 $\omega(v)=g(v,V),\forall v\in\mathscr{X}(M)$. 得到
$$\begin{aligned}&\widetilde{\nabla}_Z T(X,Y)-\nabla_Z T(X,Y)\\
=&-T(\widetilde{\nabla}_Z X-\nabla_Z X,Y)-T(X,\widetilde{\nabla}_Z Y-\nabla_Z Y)\\
=&-\omega(Z)T(X,Y)-\omega(X)T(Z,Y)+g(X,Z)T(V,Y)-\omega(Z)T(X,Y)-\omega(Y)T(X,Z)+g(Z,Y)T(X,V).\end{aligned}$$
所以
$$\begin{aligned}&\widetilde{\nabla}_Z T(X,Y)-\widetilde{\nabla}_Y T(X,Z)-\nabla_Z T(X,Y)+\nabla_Y T(X,Z)\\
=&\,\omega(Y)T(X,Z)+\omega(X)T(Y,Z)-g(X,Y)T(V,Z)+\omega(Y)T(X,Z)+\omega(Z)T(X,Y)-g(Y,Z)T(X,V)\\
&-\omega(Z)T(X,Y)-\omega(X)T(Y,Z)+g(X,Z)T(V,Y)-\omega(Z)T(X,Y)-\omega(Y)T(X,Z)+g(Y,Z)T(X,V)\\
=&\,\omega(Y)T(X,Z)-g(X,Y)T(V,Z)-\omega(Z)T(X,Y)+g(X,Z)T(V,Y)\\
=&\,T\owedge g(V,X,Y,Z).\end{aligned}$$

2. 记 $A$ 为 Schouten 张量, 则
$$W=\mathrm{Rm}-A\owedge g,\quad C(X,Y,Z)=\nabla_Z A(X,Y)-\nabla_Y A(X,Z),$$
以及
$$\tilde{A}(X,Y)=A(X,Y)-\psi(X,Y),\quad \psi(X,Y)=\nabla^2\log\phi(X,Y)-\omega(X)\omega(Y)+\frac{1}{2}\omega(V)g(X,Y),$$
利用 1,
$$\tilde{C}(X,Y,Z)-C(X,Y,Z)=A\owedge g(V,X,Y,Z)-\widetilde{\nabla}_Z\psi(X,Y)+\widetilde{\nabla}_Y\psi(X,Z).\tag{$*$}$$
我没发现有什么特别好的计算方法, 只能展开了...

首先

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_Z\psi(X,Y)\\
&= Z(\psi(X,Y)) - \psi(\widetilde{\nabla}_Z X, Y) - \psi(X, \widetilde{\nabla}_Z Y)\\
&= Z\big(g(\nabla_Y V, X) - g(X,V)g(Y,V) + \frac{1}{2}g(V,V)g(X,Y)\big)\\
&- g(\nabla_Y V, \nabla_Z X) + g(\nabla_Z X, V)g(Y,V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(\nabla_Z X, Y)\\
&- g(Z,V)g(\nabla_Y V, X) + g(X,V)g(Y,V)g(Z,V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(X,Y)g(Z,V)\\
&- g(X,V)g(\nabla_Y V, Z) + g(X,V)g(Y,V)g(Z,V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(X,V)g(Y,Z)\\
&+ g(X,Z)g(\nabla_Y V, V) - g(V,V)g(X,Z)g(Y,V) + \frac{1}{2}g(V,V)g(X,Z)g(Y,V)\\
&- g(\nabla_{\nabla_Z Y} V, X) + g(X,V)g(\nabla_Z Y, V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(X,\nabla_Z Y)\\
&- g(Z,V)g(\nabla_Y V, X) + g(X,V)g(Y,V)g(Z,V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(X,Y)g(Z,V)\\
&- g(Y,V)g(\nabla_Z V, X) + g(X,V)g(Y,V)g(Z,V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(X,Z)g(Y,V)\\
&+ g(Y,Z)g(\nabla_X V, V) - g(V,V)g(X,V)g(Y,Z) + \frac{1}{2}g(V,V)g(X,V)g(Y,Z),
\end{aligned}
$$

由于接下来要计算的是 $-\widetilde{\nabla}_Z\psi(X,Y)+\widetilde{\nabla}_Y\psi(X,Z)$, 因此如果上面的某项关于 $Y$ 和 $Z$ 是对称的, 那么在作差中就会消去. **注意到**, 这样的项有红、蓝、"青 + 粉" 三种. 所以在接下来的求和中, 可以忽略这些项.

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_Z\psi(X,Y)\\
&= g(\nabla_Z\nabla_Y V, X) + g(\nabla_Y V, \nabla_Z X) - g(\nabla_Z X, V)g(Y,V)\\
&- g(X, \nabla_Z V)g(Y,V) - g(X,V)g(\nabla_Z Y, V) - g(X,V)g(Y,\nabla_Z V)\\
&+ g(\nabla_Z V, V)g(X,Y) + \frac{1}{2}g(V,V)g(\nabla_Z X, Y) + \frac{1}{2}g(V,V)g(X,\nabla_Z Y)\\
&- g(\nabla_Y V, \nabla_Z X) + g(\nabla_Z X, V)g(Y,V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(\nabla_Z X, Y)\\
&- g(\nabla_{\nabla_Z Y} V, X) + g(X,V)g(\nabla_Z Y, V) - \frac{1}{2}g(V,V)g(X,\nabla_Z Y)\\
&+ g(X,Z)g(\nabla_Y V, V) + g(Y,Z)g(\nabla_X V, V) - 2g(Z,V)g(\nabla_Y V, X)\\
&- g(X,V)g(\nabla_Y V, Z) - g(Y,V)g(\nabla_Z V, X)\\
&= g(\nabla_Z\nabla_Y V, X) - 2g(Y,V)g(X,\nabla_Z V) - 2g(X,V)g(Y,\nabla_Z V)\\
&+ g(\nabla_Z V, V)g(X,Y) - g(\nabla_{\nabla_Z Y} V, X) + g(X,Z)g(\nabla_Y V, V)\\
&+ g(Y,Z)g(\nabla_X V, V) - 2g(Z,V)g(\nabla_Y V, X)\\
&= g(\nabla_Z\nabla_Y V, X) - g(\nabla_{\nabla_Z Y} V, X)\\
&+ \big[g(Y,Z)g(\nabla_X V, V)\big] + \big[g(\nabla_Z V, V)g(X,Y) + g(X,Z)g(\nabla_Y V, V)\big]\\
&- 2\big[g(Z,V)g(\nabla_Y V, X) + g(Y,V)g(\nabla_Z V, X)\big] - 2\big[g(X,V)g(Y,\nabla_Z V)\big],
\end{aligned}
$$

最后两行用中括号括起的部分关于 $Y$, $Z$ 是对称的. 所以终于得到

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{\nabla}_Z\psi(X,Y) + \widetilde{\nabla}_Y\psi(X,Z) &= g(\nabla_Y\nabla_Z V, X) - g(\nabla_{\nabla_Y Z} V, X) - g(\nabla_Z\nabla_Y V, X) + g(\nabla_{\nabla_Z Y} V, X)\\
&= \mathrm{Rm}(X,V,Y,Z) = -\mathrm{Rm}(V,X,Y,Z).
\end{aligned}
$$

代入 $(*)$ 式, 得到

$$\tilde{C}(X,Y,Z)-C(X,Y,Z)=A \owedge g(V,X,Y,Z)-\mathrm{Rm}(V,X,Y,Z)=-W(V,X,Y,Z)=W(V,X,Z,Y).$$

得证.

## 0.4 问题 1.4

**题目 4.** 考虑如下 Riemann 流形 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}s^2)$,

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{1+x^2+y^2}.$$

1. 证明: 在无穷远处 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}s^2)$ 渐进于半径为 1 的圆柱面, 即: $r\to\infty$ 时, $\gamma_r(t)=(r\cos t, r\sin t)$ 关于 $\mathrm{d}s^2$ 的弧长趋向于 $2\pi$.
2. 证明: $\mathrm{Ric}+\nabla^2 f=0$, 其中 $f=-\log(1+x^2+y^2)$.

**解答.**

1. 切向量长度为
$$|\dot{\gamma_r}(t)|^2=\frac{r^2}{1+x^2+y^2}=\frac{r^2}{1+r^2},$$
所以
$$L(\gamma_r)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}}\,\mathrm{d}t=2\pi\sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}},$$
所以 $r\to\infty$ 时弧长趋向于 $2\pi$.

2. 利用共形变换的公式, 有
$$\mathrm{Ric}=-\Delta(\frac{1}{2}f)g.$$
显然有 $f_{,xx}=f_{,yy}$, 所以只要 $f_{,xy}=0$, 就有 $\nabla^2 f=\frac{1}{2}\Delta f g$, 即 $\mathrm{Ric}+\nabla^2 f=0$. 而
$$\nabla^2 f(\partial_x,\partial_y)=\partial_y\partial_x f-\nabla_{\partial_y}\partial_x f.$$
以及
$$\nabla_{\partial_y}\partial_x=\partial_x(\frac{f}{2})\partial_y+\partial_y(\frac{f}{2})\partial_x=-\frac{x\partial_y+y\partial_x}{1+x^2+y^2}.$$
得到
$$\nabla^2 f(\partial_x,\partial_y)=\partial_y(\frac{-2x}{1+x^2+y^2})+\frac{x\frac{-2y}{1+x^2+y^2}+y\frac{-2x}{1+x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}=\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}=0.$$
因此 $\mathrm{Ric}+\nabla^2 f=0$.