第七次作业

洪艺中 12335025

2024 年 4 月 20 日

0.1 149 页问题 15

题目 1. 设 $\mathbb{S}^m = \left\{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_i (x^i)^2 = r^2, r > 0\right\}$. 作球极投影

$$\phi\colon \mathbb{S}^m(r) \setminus \{(0, \cdots, 0, r)\} \to \mathbb{R}^m.$$

证明: ϕ 为共形映射, 即对于 Riemann 流形 $(\mathbb{S}^m(r), \tilde{g}$ 和 $(\mathbb{R}^m, g)$, 有 $\tilde{g} = \phi^* g$, 这里 $\tilde{g}$ 是 $\mathbb{S}^m(r) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 的诱导度量, g 为 $\mathbb{R}^m$ 上的欧氏度量.

解答. 设 ϕ 将 $\mathbb{S}^m$ 投影到 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的 $x^{n+1} = 0$ 平面, 也就是 $\mathbb{R}^m$. 设 $\mathbb{R}^m$ 的坐标是 $(y_1, \cdots, y_m)$, 那么 ϕ 可以表达为

$$\phi(y_1, \cdots, y_n) = \left(\frac{2r^2 y_1}{|y|^2 + r^2}, \cdots, \frac{2r^2 y_m}{|y|^2 + r^2}, r\frac{|y|^2 - r^2}{|y|^2 + r^2}\right),$$

计算切映射,

$$\phi^* = \frac{2r^2}{|y|^2 + r^2}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \end{bmatrix} - \frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}\begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & \cdots & y_1 y_m & -r y_1 \\ y_2 y_1 & y_2^2 & \cdots & y_2 y_m & -r y_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ y_m y_1 & y_m y_2 & \cdots & y_m^2 & -r y_m \end{bmatrix}.$$

容易发现, 若 $i \neq j$, 那么 $\langle \partial_{y_i}, \partial_{y_j} \rangle_{\tilde{g}} = 0$, 这是因为内积为

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_{y_i}, \partial_{y_j} \rangle_{\tilde{g}} \\
=& -\frac{2r^2}{|y|^2 + r^2} \cdot \frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}(y_i y_j + y_j y_i) + \left(\frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}\right)^2 \sum_{k=1}^m (y_k y_i \cdot y_k y_j) + r^2 y_i y_j \\
=& \frac{2r^2}{|y|^2 + r^2} \cdot \frac{4r^2}{(|y|^2 + r^2)^2}(-2y_i y_j + 2y_i y_j) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

因此 $\tilde{g}$ 是对角的.

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_{y_i}, \partial_{y_i} \rangle_{\tilde{g}} \\
&= \left(\frac{2r^2}{|y|^2+r^2} \right)^2 - \frac{2r^2}{|y|^2+r^2} \cdot \frac{4r^2}{(|y|^2+r^2)^2} 2y_i^2 + \left(\frac{4r^2}{(|y|^2+r^2)^2} \right)^2 (\sum_{k=1}^{m} \left((y_k)^2 (y_i)^2 \right) - r^2 (y_i)^2) \\
&= \frac{2r^2}{|y|^2+r^2} \cdot \frac{4r^2}{(|y|^2+r^2)^2} \left(\frac{1}{2}(|y|^2+r^2) - 2(y^i)^2 + 2(y^i)^2 \right) \\
&= \frac{4r^4}{(|y|^2+r^2)^2}.
\end{aligned}
$$

即 $\tilde{g} = \dfrac{4r^4}{(|y|^2+r^2)^2} g$, 所以 $\tilde{g}$ 是共形变换.

0.2 问题 1.2

题目 2. 在 $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上配上度量 $g = (1+\frac{m}{2\rho})^4 \delta$, 其中 $m > 0$ 为一给定常数, $\rho(x) = \sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2}$ 为点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 到原点的欧氏距离, δ 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的标准欧氏度量.

1. 计算 (M, g) 的数量曲率;
2. 令 $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2 = r^2\}$, $r > 0$. 计算 S_r 在 Riemann 流形 (M, g) 中的面积 $|S_r|$. 并指出 r 取何值时, $|S_r|$ 最小, 最小值为何?
3. 计算 $\frac{1}{16} \int_{S_r} (\partial_j g_{ii} - \partial_i g_{ij}) n^j \, \mathrm{d}x$, 其中 n^j 是 S_r 内法向量的第 j 个分量.

解答.

1. 利用共形变换的公式, $\phi = (1+\dfrac{m}{2\rho})^2$,
$$
\partial_i(\log \phi) = \frac{2}{1+\dfrac{m}{2\rho}} \frac{m x_i}{2\rho^3} = \frac{m x_i}{(\rho^2 + \dfrac{m}{2})\rho}.
$$

0.3 问题 1.3

题目 3. 给定 m 维 Riemann 流形 (M, g).

1. 假设 T 是 M 上对称的 $(0,2)$ 型张量, $\widetilde{\nabla}$ 是共形度量 $\tilde{g} = \phi^2 g$ (这里 ϕ 是 M 上的光滑正函数) 的 Levi-Civita 联络. 证明: 任取 $X, Y, Z \in \mathscr{X}(m)$,
$$
\widetilde{\nabla}_Z T(X,Y) - \widetilde{\nabla}_Y T(X,Z) - \nabla_Z T(X,Y) + \nabla_Y T(X,Z) = T \owedge g(V, X, Y, Z),
$$
其中 $V = \nabla \log \phi$, $\owedge$ 为 Kulkarni-Nomizu 乘积.
2. 假设 $m \geqslant 3$, 证明: 任取 $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$,
$$
\tilde{C}(X,Y,Z) = C(X,Y,Z) + W(V, X, Y, Z),
$$
其中 $\tilde{C}$ 和 C 分别是度量 $\tilde{g} = \phi^2 g$ 和 g 确定的 Cotton 张量, W 是 Weyl 张量, $V = \nabla \log \phi$.