第五次作业

洪艺中 12335025

2024 年 4 月 6 日

0.1 148 页习题 4

题目 1. 证明:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}(X,Y,Z,W) =&\frac{1}{6}[\mathrm{K}(X+Z,Y+W)-\mathrm{K}(Y+Z,X+W)-\\
&\mathrm{K}(X,Y+W)-\mathrm{K}(Z,Y+W)-\mathrm{K}(X+Z,Y)-\mathrm{K}(X+Z,W)+\\
&\mathrm{K}(Y,X+W)+\mathrm{K}(Z,X+W)+\mathrm{K}(Y+Z,W)+\mathrm{K}(X,W)+\\
&\mathrm{K}(Y+Z,W)+\mathrm{K}(Z,Y)-\mathrm{K}(Y,W)-\mathrm{K}(Z,X)],
\end{aligned}
$$

其中, $\mathrm{K}(X,Y) := \mathrm{R}(X,Y,X,Y)$.

解答. 将 $\mathrm{K}(X+Z,Y+W)$ 展开,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}(X+Z,Y+W)\\
=&\mathrm{R}(X+Z,Y+W,X+Z,Y+W)\\
=&\mathrm{R}(X,Y,X,Y)+\mathrm{R}(X,Y,X,W)+\mathrm{R}(X,Y,Z,Y)+\mathrm{R}(X,Y,Z,W)\\
&+\mathrm{R}(X,W,X,Y)+\mathrm{R}(X,W,X,W)+\mathrm{R}(X,W,Z,Y)+\mathrm{R}(X,W,Z,W)\\
&+\mathrm{R}(Z,Y,X,Y)+\mathrm{R}(Z,Y,X,W)+\mathrm{R}(Z,Y,Z,Y)+\mathrm{R}(Z,Y,Z,W)\\
&+\mathrm{R}(Z,W,X,Y)+\mathrm{R}(Z,W,X,W)+\mathrm{R}(Z,W,Z,Y)+\mathrm{R}(Z,W,Z,W)\\
=&\mathrm{K}(X,Y)+\mathrm{K}(X,W)+\mathrm{K}(Z,Y)+\mathrm{K}(Z,W)+2\mathrm{R}(X,Y,Z,W)+2\mathrm{R}(X,W,Z,Y)\\
&+2\mathrm{R}(X,Y,X,W)+2\mathrm{R}(X,Y,Z,Y)+2\mathrm{R}(X,W,Z,W)+2\mathrm{R}(Z,Y,Z,W),
\end{aligned}
$$

利用

$$2\mathrm{R}(X,Y,X,W)=\mathrm{K}(X,Y+W)-\mathrm{K}(X,Y)-\mathrm{K}(X,W),$$

得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}(X+Z,Y+W)\\
=&\mathrm{K}(X,Y)+\mathrm{K}(X,W)+\mathrm{K}(Z,Y)+\mathrm{K}(Z,W)\\
&+\mathrm{K}(X,Y+W)-\mathrm{K}(X,Y)-\mathrm{K}(X,W)+\mathrm{K}(X+Z,Y)-\mathrm{K}(X,Y)-\mathrm{K}(Z,Y)\\
&+\mathrm{K}(X+Z,W)-\mathrm{K}(X,W)-\mathrm{K}(Z,W)+\mathrm{K}(Z,Y+W)-\mathrm{K}(Z,Y)-\mathrm{K}(Z,W)\\
&+2\mathrm{R}(X,Y,Z,W)+2\mathrm{R}(X,W,Z,Y)\\
=&\mathrm{K}(X,Y+W)+\mathrm{K}(X+Z,Y)+\mathrm{K}(X+Z,W)+\mathrm{K}(Z,Y+W)\\
&-\mathrm{K}(X,Y)-\mathrm{K}(X,W)-\mathrm{K}(Z,Y)-\mathrm{K}(Z,W)+2\mathrm{R}(X,Y,Z,W)+2\mathrm{R}(X,W,Z,Y)
\end{aligned}
$$

借助此式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}(X+W,Z+Y)\\
=&\mathrm{K}(X,Z+Y)+\mathrm{K}(X+W,Z)+\mathrm{K}(X+W,Y)+\mathrm{K}(W,Z+Y)\\
-&\mathrm{K}(X,Z)-\mathrm{K}(X,Y)-\mathrm{K}(W,Z)-\mathrm{K}(W,Y)+2\mathrm{R}(X,Z,W,Y)+2\mathrm{R}(X,Y,W,Z),
\end{aligned}
$$

作差, 得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}(X+Z,Y+W)-\mathrm{K}(X+W,Z+Y)\\
=&\mathrm{K}(X,Y+W)+\mathrm{K}(X+Z,Y)+\mathrm{K}(X+Z,W)+\mathrm{K}(Z,Y+W)\\
-&\mathrm{K}(X,Z+Y)+\mathrm{K}(X+W,Z)+\mathrm{K}(X+W,Y)+\mathrm{K}(W,Z+Y)\\
-&\mathrm{K}(X,W)-\mathrm{K}(Z,Y)+\mathrm{K}(X,Z)+\mathrm{K}(W,Y)\\
+&4\mathrm{R}(X,Y,Z,W)+2\mathrm{R}(X,W,Z,Y)-2\mathrm{R}(X,Z,W,Y).
\end{aligned}
$$

利用第一 Bianchi 恒等式,

$$
\mathrm{R}(X,W,Z,Y)-\mathrm{R}(X,Z,W,Y)=-\mathrm{R}(X,W,Y,Z)-\mathrm{R}(X,Z,W,Y)=\mathrm{R}(X,Y,Z,W).
$$

所以

$$
4\mathrm{R}(X,Y,Z,W)+2\mathrm{R}(X,W,Z,Y)-2\mathrm{R}(X,Z,W,Y)=6\mathrm{R}(X,Y,Z,W).
$$

代入整理, 得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}(X,Y,Z,W)\\
=&\frac{1}{6}[\mathrm{K}(X+Z,Y+W)-\mathrm{K}(X+W,Z+Y)\\
-&\mathrm{K}(X,Y+W)-\mathrm{K}(X+Z,Y)-\mathrm{K}(X+Z,W)-\mathrm{K}(Z,Y+W)\\
+&\mathrm{K}(X,Z+Y)+\mathrm{K}(X+W,Z)+\mathrm{K}(X+W,Y)+\mathrm{K}(W,Z+Y)\\
+&\mathrm{K}(X,W)+\mathrm{K}(Z,Y)-\mathrm{K}(X,Z)-\mathrm{K}(W,Y)],
\end{aligned}
$$

得证.

0.2 148 页习题 5

题目 2. 设 Riemann 流形 (M^m,g) 的 Riemann 曲率张量 R 满足下式

$$
\mathrm{R}(X,Y,Z,W)=\frac{1}{m-1}\left\{\mathrm{Ric}Y,Zg(X,W)-\mathrm{Ric}(Y,W)g(X,Z)\right\},
$$

且 $m\geqslant 3$, 则 (M^m,g) 为常曲率流形.

解答. 考虑 p 点互相正交的单位向量 $X,Y\in T_pM$ 确定的截面 $\pi_{X,Y}$ 的截面曲率

$$
K(\pi_{X,Y})=\mathrm{R}(X,Y,X,Y)=-\frac{1}{m-1}\mathrm{Ric}(Y,Y),
$$

同时还有

$$
K(\pi_{X,Y})=\mathrm{R}(Y,X,Y,X)=-\frac{1}{m-1}\mathrm{Ric}(X,X),
$$

所以 $\mathrm{Ric}(X,X)=\mathrm{Ric}(Y,Y)$. 任取截面上的另一个单位向量 $Z\in\pi_{X,Y}$ 并取与其正交的 $W\in\pi_{X,Y}$, 由于截面曲率和取的向量无关, 所以 $K(\pi_{X,Y})=-\frac{1}{m-1}\mathrm{Ric}(Z,Z)=-\frac{1}{m-1}\mathrm{Ric}(W,W)$. 因此在 T_pM 上, 只要两个单位向量 X,Y 是共面的, 那么 $\mathrm{Ric}(X,X)=\mathrm{Ric}(Y,Y)$. 而两个向量必然共面, 所以 M 在 p 为 Ricci 迷向的, 进而 p 还为迷向点, 所以 M 为迷向流形. 由 Schur 定理, 不低于三维的迷向流形是常曲率流形. 因此 (M^m,g) 为常曲率流形.

0.3 148 页习题 6

题目 3. 设 (M^3,g) 是三维 Riemann 流形. 在任一点 $p\in M^3$, 取坐标系 $\{x^i\}$ 使得在 p 点有 $g_{ij}=\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=0, i\neq j$. 证明: 对互不相同的 i,j,k, 在 p 点成立

$$\mathrm{Ric}_{ij}=\frac{1}{g_{kk}}\mathrm{R}_{ikjk},\mathrm{Ric}_{ii}=\frac{1}{g_{jj}}\mathrm{R}_{ijij}+\frac{1}{g_{kk}}\mathrm{R}_{ikjk},\mathrm{R}_{ijij}-g_{ii}\mathrm{Ric}_{jj}-g_{jj}\mathrm{Ric}_{ii}+\frac{1}{2}\rho g_{ii}g_{jj}=0.$$

其中 ρ 是 M^3 的数量曲率, 即 $\rho=g^{ij}\mathrm{Ric}_{ij}$.

解答. $g^{ij}=0, i\neq j$, 所以 $g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}$.

对第一式,

$$\mathrm{Ric}_{ij}=\sum_{s,t}g^{st}\mathrm{R}_{isjt}=\sum_l g^{ll}\mathrm{R}_{iljl}=\frac{1}{g_{kk}}\mathrm{R}_{ikjk}.$$

最后一个等号去掉求和, 是因为 R_{iljl} 只有在 $l\neq i$ 且 $l\neq j$ 时才非零, 而 M 是三维的, 所以 l 只能取 k.

对于 Ric_{ii} 同样有 $\mathrm{Ric}_{ii}=\sum_l g^{ll}\mathrm{R}_{ilil}=\frac{1}{jj}\mathrm{R}_{ijij}+\frac{1}{k}\mathrm{R}_{ikik}$.

最后一个式子, 左边为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}_{ijij}-g_{ii}\mathrm{Ric}_{jj}-g_{jj}\mathrm{Ric}_{ii}+\frac{1}{2}\rho g_{ii}g_{jj}\\
=&\mathrm{R}_{ijij}-g_{ii}\mathrm{Ric}_{jj}-g_{jj}\mathrm{Ric}_{ii}+\frac{1}{2}g_{ii}g_{jj}\sum_l\frac{\mathrm{Ric}_{ll}}{g_{ll}}\\
=&\mathrm{R}_{ijij}-g_{ii}\mathrm{Ric}_{jj}-g_{jj}\mathrm{Ric}_{ii}+\frac{1}{2}g_{jj}\mathrm{Ric}_{ii}+\frac{1}{2}g_{ii}\mathrm{Ric}_{jj}+\frac{1}{2}g_{ii}g_{jj}\frac{\mathrm{Ric}_{kk}}{g_{kk}}\\
=&\mathrm{R}_{ijij}-\frac{1}{2}g_{ii}\mathrm{Ric}_{jj}-\frac{1}{2}g_{jj}\mathrm{Ric}_{ii}+\frac{1}{2}g_{ii}g_{jj}\frac{\mathrm{Ric}_{kk}}{g_{kk}}\\
=&\mathrm{R}_{ijij}-\frac{1}{2}\frac{g_{ii}}{g_{ii}}\mathrm{R}_{ijij}-\frac{1}{2}\frac{g_{ii}}{g_{kk}}\mathrm{R}_{jkjk}-\frac{1}{2}\frac{g_{jj}}{g_{jj}}\mathrm{R}_{ijij}-\frac{1}{2}\frac{g_{jj}}{g_{kk}}\mathrm{R}_{ikik}+\frac{1}{2}\frac{g_{ii}g_{jj}}{g_{ii}g_{kk}}\mathrm{R}_{ikik}+\frac{1}{2}\frac{g_{ii}g_{jj}}{g_{jj}g_{kk}}\mathrm{R}_{jkjk}\\
=&0
\end{aligned}$$

0.4 148 页习题 8

题目 4. 设 $M\subset\mathbb{R}^3$ 为浸入曲面, 且具有由 $\mathbb{R}^3$ 的欧氏度量诱导的 Riemann 度量, 证明 M 的截面曲率即为 Gauss 曲率.

解答. 设 $M=\mathbf{r}(u,v)$, u, v 是正则参数. 第一基本形式

$$\mathrm{d}s^2=E(\mathrm{d}u)^2+2F(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v)+G(\mathrm{d}v)^2,$$

其中 $E=|\mathbf{r}_u|^2$, $F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle$, $G=|\mathbf{r}_v|^2$.

记单位法向为 ν, 第二基本形式

$$-\mathrm{d}\nu\cdot\mathrm{d}s=L(\mathrm{d}u)^2+2M(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v)+N(\mathrm{d}v)^2,$$

其中 $L=\langle\mathbf{r}_{uu},\nu\rangle$, $M=\langle\mathbf{r}_{uv},\nu\rangle=\langle\mathbf{r}_{vu},\nu\rangle$, $N=\langle\mathbf{r}_{vv},\nu\rangle$.

则 Gauss 曲率为

$$\kappa=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

接下来计算截面曲率. 记 $\mathbb{R}^3$ 上的欧氏度量为 $\overline{g}$, Riemann 联络为 $\overline{\nabla}$. M 上的联络为 ∇, 并记 $M\to\mathbb{R}^3$ 的浸入映射为 ι. 任取 M 上的切向量场 X,Y, 则 $g(X,Y)=\overline{g}(\iota_*X,\iota_*Y)$. 故在 $\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\nu$ 这组标架下,

$$\overline{g}=\begin{pmatrix}E&F&\\F&G&\\&&1\end{pmatrix}$$

由于 g 继承自 $\overline{g}$, 所以可以验证 $\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+h(X,Y)\nu$, 其中 h 是对称双线性映射.

则截面曲率为

$$K(\pi_{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v})=\frac{\mathrm{R}(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle-\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle^2}=\frac{\mathrm{R}(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{EG-F^2}.$$

借助 $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]=0$

$$\mathrm{R}(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)=\langle\mathrm{R}(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle=\langle\nabla_{\mathbf{r}_u}\nabla_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v-\nabla_{\mathbf{r}_v}\nabla_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle.$$

接下来我们要利用 $\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+h(X,Y)\nu$, 把上式转移到 $\mathbb{R}^3$ 上去. 这也是因为在 $\overline{\nabla}$ 下, $\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}(X)=X_u$, $\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}(X)=X_v$, 便于计算. 并且由于 g 是 $\overline{g}$ 的限制, 所以用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 统一表示两个内积.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)\\
=&\langle\nabla_{\mathbf{r}_u}\nabla_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v-\nabla_{\mathbf{r}_v}\nabla_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle\\
=&\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\nabla_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v-\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\nabla_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle\\
=&\mathbf{r}_u\left(\langle\nabla_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle\right)-\langle\nabla_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_u\rangle-\mathbf{r}_v\left(\langle\nabla_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle\right)+\langle\nabla_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_u\rangle\\
=&\mathbf{r}_u\left(\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle\right)-\mathbf{r}_v\left(\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_u\rangle\right)+\langle\nabla_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_u\rangle-\langle\nabla_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_u\rangle\\
=&\langle\mathbf{r}_{vvu},\mathbf{r}_u\rangle+\langle\mathbf{r}_{vv},\mathbf{r}_{uu}\rangle-\langle\mathbf{r}_{uvv},\mathbf{r}_u\rangle-\langle\mathbf{r}_{uv},\mathbf{r}_{uv}\rangle\\
&+\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_u\rangle-\langle\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\nu\rangle\nu,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_u\rangle-\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_u\rangle+\langle\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\nu\rangle\nu,\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_u\rangle\\
=&\langle\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_v,\nu\rangle\nu,\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_u,\nu\rangle\nu\rangle-\langle\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_u}\mathbf{r}_v,\nu\rangle\nu,\langle\overline{\nabla}_{\mathbf{r}_v}\mathbf{r}_u,\nu\rangle\nu\rangle\\
=&\langle\mathbf{r}_{vv},\nu\rangle\langle\mathbf{r}_{uu},\nu\rangle-\langle\mathbf{r}_{uv},\nu\rangle\langle\mathbf{r}_{vu},\nu\rangle\\
=&LN-M^2.
\end{aligned}$$

即截面曲率 $K(\pi_{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v})=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\kappa$ 等于 Gauss 曲率.

0.5 148 页习题 9

题目 5. 计算球面 $S^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | \sum_i (x^i)^2 = r^2\}$ 的截面曲率, Ricci 曲率与数量曲率. $S^m(r)$ 上的 Riemann 度量是由 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的欧氏度量所诱导的.

解答. 在某点 p 处, 两个切向量张成的截面是一个切平面 π_p. π_p 上的截面曲率即是二维曲面 $\exp_p(\pi_p)$ 的 Gauss 曲率, 而 $\exp_p(\pi_p)$ 是半径为 r 的球面. 所以 $K(\pi_p) = \dfrac{1}{r^2}$.

故截面曲率是 $\dfrac{1}{r^2}$, Ricci 曲率是 $\dfrac{m-1}{r^2}$, 数量曲率是 $\dfrac{m(m-1)}{r^2}$.