第三次作业

洪艺中 12335025

2024 年 3 月 23 日

0.1 132 页习题 4

题目 1. 设 M 为光滑流形, ∇ 为对称仿射联络. 设 $\{e_i\}$ 是局部基向量场, $\{\omega^i\}$ 和 $\{\omega_j^i\}$ 分别是对偶基和联络 1–形式, 证明:

$$\nabla_X \omega^i = -\omega_j^i(X)\omega^j, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M).$$

解答. 取向量场 $Y \in \mathscr{X}(M)$, 设 $Y = Y^i e_i$.

$$\begin{aligned}(\nabla_X \omega^i)(Y) =& X(\omega^i(Y)) - \omega^i(\nabla_X Y)\\ =& X(Y^i) - \omega^i(X(Y^j)e_j + Y^j\omega_j^k(X)e_k)\\ =& X(Y^i) - X(Y^i) - Y^j\omega_j^i(X)\\ =& -\omega_j^i(X)\omega^j(Y).\end{aligned}$$

因此 $\nabla_X\omega^i = -\omega_j^i(X)\omega^j$.

0.2 132 页习题 5

题目 2. 设 (M^n, g) 为 Riemann 流形, $\omega = \omega_{i_1\cdots i_m}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m}$ 为 m–形式, 其中

$$\begin{aligned}\omega_{i_1\cdots i_m} =& \sqrt{G}\varepsilon_{i_1\cdots i_m},\\ \varepsilon_{i_1\cdots i_m} =& \begin{cases}0 & (i_1,\cdots,i_m)\text{中有相同时},\\ 1 & (i_1,\cdots,i_m)\text{为偶置换},\\ -1 & (i_1,\cdots,i_m)\text{为奇置换}.\end{cases}\end{aligned}$$

证明: $\omega_{i_1\cdots i_m,k} = 0$, 即 ω 是平行的.

解答. 如果按照题目, $\omega \equiv 0$, 所以此题应该是说明体积元关于 Riemann 联络是平行的.

由于体积 $\mathrm{vol} = \sqrt{G}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\mathrm{d}x^m$ 是张量, 其协变导数也是张量. 任取 $\{v_1,\cdots,v_n\} \subset \mathscr{X}(M)$, $v_i = V_i^j e_j$, 则

$$\nabla_{e_k}\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m) = \sum_{\sigma\in S^m}\prod_{i=1}^m V_i^{\sigma(i)}\nabla_{e_k}\mathrm{vol}(e_{\sigma 1},\cdots,e_{\sigma m}).$$

因此可以仅考虑 $\{v_i\}$ 都是基向量场 (即 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$) 的情况.

此时

$$\nabla_{e_k}\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m) = e_k(\mathrm{vol}(v_1,\cdots,v_m)) - \sum_{i=1}^{m}\mathrm{vol}(v_1\cdots,\nabla_{e_k}e_i,\cdots,v_m).$$