Topic 1：外生增長和新聞 shock

背景：2000年互联网泡沫後，美国經濟衰退.

$g_x \equiv \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$，$g_Y \downarrow$，$g_C \downarrow$，$g_I \downarrow$，unemployment $\uparrow$.

In 2001，$g_Y \uparrow$，$g_C \rightarrow$，$g_I \uparrow$，unemployment $\uparrow$.

如果技術波動是經濟波動的主要原因，为什么泡沫破灭会產生这么大的波動？⇒預期未實現導致預期調整，新聞冲击產生.

Aguiar and Gopinath (2007, AER)：shock to trend growth.

Croce (2014, JME)：long-run productivity risk.

⇒增長率冲击是經濟波動的最重要原因。引入模型很重要.

$$\max_{C_t, L_t, K_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + V_0 (1-L_t) \right]$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t = A_t \theta_t K_{t-1}^{1-\alpha} L_t^{\alpha}$$

$$K_t = (1-\delta) K_{t-1} + I_t.$$

A_t和θ_t分别表示TFP的長期成分和短期成分.
（帶趋勢） （无趋勢）

$$g_t = \frac{A_t}{A_{t-1}}, \quad \ln g_t = (1-\rho_a)\ln \bar{g} + \rho_a \ln g_{t-1} + \varepsilon_{1,t}^g + \varepsilon_{2,t-3}^g$$

$\varepsilon_{1,t}^g \sim iid\ N(0,1)$ 表示 surprise schock（未預期到的增長率冲击）

$\varepsilon_{2,t}^g \sim iid\ N(0,1)$ 表示 news shock（对未来預期增長率的冲击）.

$\varepsilon_{2,t}^g$ 对 g_t 无影響，对 $E_t(g_{t+3})$ 的預期有直接影響.

$$\ln\theta_t = (1-\rho_\theta)\ln\bar{\theta} + \rho_\theta \ln\theta_{t-1} + \varepsilon^{\theta}_{1,t} + \varepsilon^{\theta}_{2,t-4}.$$

$\varepsilon^{\theta}_{2,t}$ 对 θ_t 无影响，对 $E_t(\theta_{t+4})$ 有影響.
甚至可以加 $\varepsilon^{\theta}_{2,t-1}$，$\varepsilon^{\theta}_{2,t-2}$ 的 News shock.
虽然 $\varepsilon^{\theta}_{2,t-4}$ 以 iid，但 $\varepsilon^{\theta}_{1,t}$ 和 $\varepsilon^{\theta}_{2,t-4}$ 可能有相関.（christiano 2015）

分散経済等価模型

$$\left.\begin{aligned} &\max_{C_t,L_t,K_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t) \\ &\text{s.t. } C_t + I_t \leq W_t L_t + r_t K_{t-1} \\ &\qquad K_t = (1-\delta)K_{t-1} + I_t. \end{aligned}\right)$$

FOC：
労働供給，欧拉方程

$$\left.\begin{aligned} &\max\ Y_t - W_t L_t - r_t K_{t-1} \\ &\text{s.t. } Y_t = A_t \theta_t L_t^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha} \end{aligned}\right)$$

FOC：
労働需要，資本需要.

$$Y_t = C_t + I_t \quad)$$ 出清条件.

解中央計划問題：

$$\begin{cases} \lambda_t = C_t^{-\gamma} \\ -V_0 + \lambda_t(\alpha A_t \theta_t K_{t-1}^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1}) = 0 \\ -\lambda_t + \beta\lambda_{t+1}\left[\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}(1-\alpha) + 1 - \delta\right] = 0 \end{cases}$$

整理

$$\begin{cases} V_0 = \alpha C_t^{-\gamma}\frac{Y_t}{L_t} & ① \\ C_t^{-\gamma} = \beta C_{t+1}^{-\gamma}\left[\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}(1-\alpha)+1-\delta\right] & ② \end{cases}$$

(可以加二次調整投資成本，Q_t变動，抵押約束变動)

(投資調整成本本質上是引入最終品向投資品轉化的損失).

$$+\begin{cases} K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t & ③ \\ C_t + I_t = Y_t & ④ \end{cases} \qquad Y_t = A_t\theta_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} \quad ⑤$$

該系統并不稳定，因为 $\frac{A_t}{A_{t-1}} = g_t$，有增長趋勢，如何处理？

$\frac{A_t}{A_{t-1}} = g_t$ ⑥ $\qquad \ln g_t = (1-\rho_a)\ln g + \rho_a \ln g_{t-1} + \varepsilon_{1,t}^{g} + \varepsilon_{2,t-2}^{g}$ ⑦

$\ln\theta_t = (1-\rho_\theta)\ln\theta + \rho_\theta \ln\theta_{t-1} + \varepsilon_{1,t}^{\theta} + \varepsilon_{2,t-4}^{\theta}$ ⑧

无趋勢变量：L_t, A_t 平衡增長路径下，C_t, I_t, Y_t 的增速相同 (see ④)

K_t 和 I_t 的增速也相同 (see ③) $\qquad Y_t$ 和 θ_t 的趋勢相同 (see ⑤)

如何判断增長趋勢的關係？以⑤为例

$$Y_0 e^{g_Y t} = A_0 e^{gt} \theta_0 L_0^{\alpha} (K_0 e^{g_K t})^{1-\alpha}$$

Note that $Y_0 = A_0 \theta_0 L_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow e^{g_Y t} = e^{g \cdot t + g_K \cdot t(1-\alpha)} \quad (\text{we know } g_Y = g_K)$$

$$\Rightarrow \underline{g_Y = \tfrac{1}{\alpha} g}$$ （在第6頁補充 Y_t 与 $A_t^{\frac{1}{\alpha}}$ 同增長率的証明）

所以 Y_t, K_t, C_t, I_t 与 $A_t^{\frac{1}{\alpha}}$ 的增長趋勢相同.

注意 ① 中，$C_t^{\sigma} Y_t$ 不能消去增長路徑，除非 $\sigma=1$.

下面为所有变量去除趋勢：

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{A_t^{\frac{1}{\alpha}}},\quad \tilde{C}_t = \frac{C_t}{A_t^{\frac{1}{\alpha}}},\quad \tilde{I}_t = \frac{I_t}{A_t^{\frac{1}{\alpha}}},\quad \underbrace{\tilde{K}_t = \frac{K_t}{A_{t-1}^{\frac{1}{\alpha}}}}_{t期初的存量}$$

動態系統去趋勢後

$$V_0 = \alpha \tilde{C}_t^{\nu-1} \frac{\tilde{Y}_t}{L_t} \quad ①'$$

$$g_{t+1}^{\frac{1}{\alpha}} \tilde{C}_t^{\nu-1} = \tilde{C}_{t+1}^{\nu-1} \beta \left[\frac{\tilde{Y}_{t+1}}{\tilde{K}_{t+1}} g_{t+1}^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha) + 1 - \delta \right] \quad ②'$$

$$\tilde{K}_{t+1} = (1-\delta) \frac{K_t}{A_t^{\frac{1}{\alpha}}} A_{t-1}^{\frac{1}{\alpha}} + \tilde{I}_t \Rightarrow \tilde{K}_{t+1} = (1-\delta) \frac{\tilde{K}_t}{g_t^{\frac{1}{\alpha}}} + \tilde{I}_t \quad ③'$$

$$\frac{Y_t}{A_t^{\frac{1}{\alpha}}} = A_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \theta_t L_t^{\alpha} \left(\frac{K_t}{A_{t-1}^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{1-\alpha} A_{t-1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \Rightarrow \tilde{Y}_t = \theta_t L_t^{\alpha} \tilde{K}_t^{1-\alpha} g_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad ④'$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{C}_t = \tilde{Y}_t \quad ⑤'$$ ＋ 外生過程 ⑦，⑧.

我们去掉了A，因此去掉了 $g_t = \frac{A_t}{A_{t-1}}$ 的方程，因此方程有7個

穩態：設 $\underset{(1)}{\underline{\theta=1}}$，$\underset{(2)}{\underline{L=\frac{1}{3}}}$ (calibrate V_0) $\boxed{}$

$\underset{(3)}{\underline{g=1.0041}}$

② $\beta\left[\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}g^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)+1-\delta\right]=g^{\frac{1}{\alpha}}$

$\Rightarrow \underline{\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}=\left(\frac{1}{\beta}g^{\frac{1}{\alpha}}+\delta-1\right)\frac{1}{1-\alpha}g^{-\frac{1}{\alpha}}}$.

④′ $\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}=\left(\frac{L}{\tilde{K}}\right)^{\alpha}g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Rightarrow \underline{\tilde{K}=\left(\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}g^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}L}$ (4)

③′ $\tilde{K}=(1-\delta)g^{-\frac{1}{\alpha}}\tilde{K}+\tilde{I} \Rightarrow \underline{\tilde{I}=\left[1-(1-\delta)g^{-\frac{1}{\alpha}}\right]\tilde{K}}$ (5)

$\Rightarrow \underline{\tilde{Y}=\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}\times\tilde{K}}$ (6)

$\underline{\tilde{C}=\tilde{Y}-\tilde{I}}$ (7)

$\underline{V_0=\alpha\tilde{C}^{-1}\frac{\tilde{Y}}{L}}$

Simulation 的逻辑

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon^{\theta}_{1,t}$	0	0	0	0	-1	0	0	0
$\varepsilon^{\theta}_{2,t-4}$	1	0	0	0	0	0	0	0

在第1期，news shock 使理性予期主体予测 θ_t 会在第5期上升1，

在第5期，surprise shock 抵消了 $\varepsilon^{\theta}_{2,t-4}$ 的效果，即 θ_t 在第5期没有上昇。

补充証明，为什么 Y_t 与 A_t^{x} 同增長率？

待定系数法，假設 Y_t 与 A_t^{x} 同增長率。

则 K_t 与 A_{t-1}^{x} 同增長率（K_t 为前定变量所以 $t-1$）

那么，根据生産函数，

$$\frac{Y_t}{A_t^{x}} \cdot A_t^{x} = A_t \theta_t \left(\frac{K_t}{A_{t-1}^{x}}\right)^{1-\alpha} A_{t-1}^{x(1-\alpha)} L_t^{\alpha}.$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_t = A_t^{1-x} A_{t-1}^{x(1-\alpha)} \theta_t \tilde{K}_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}$$

此時，方程中仅 A_t^{1-x} 和 $A_{t-1}^{x(1-\alpha)}$ 带有趋勢，而其它变量不存在趋勢。

那么，$1-x = -x(1-\alpha) \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}$.

因此 Y_t 与 A_t^{x} 同趋勢。∎

補充証明2：为什么Y_t, C_t, I_t 有同增長率？

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$\begin{cases} Y_0 \exp(g_Y \times t) = C_0 \exp(g_C \times t) + I_0 \exp(g_I \times t) \\ Y_0 = C_0 + I_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\exp(g_C \times t)}{\exp(g_Y \times t)} = \frac{\exp(g_I \times t)}{\exp(g_Y \times t)} = \frac{\exp(g_Y \times t)}{\exp(g_Y \times t)} = 1$$

$$\Rightarrow g_C = g_I = g_Y$$

Discussion

① Romer (1986, 1990) 内生增長

Comin and Gertler (2006) AER：周期+内生增長.

經済危机→内生增長率的影響 (一支 literature).

② News 可能存在多期
News 和 Surprise 可能大小不同
} 在接下來的 topic 内討論.