

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias económicas  
**Tópicos de econometría 2**  
Taller parcial 1

Jhan Jhailer Andrade  
Dino F. Córdoba  
Luis F. Olivero

20 de abril de 2020

1. En los modelos SARIMA, se tiene un polinomio asociado a las diferencias estacionales definido como  $(1 - L)^D$  donde  $L$  es el operador rezago,  $s$  es la frecuencia de la serie de tiempo y  $D$  el orden de diferencia estacional (Ver diapositiva 14 de efectos calendario.pdf en la semana 3). En el caso de esta pregunta, use la descomposición de  $(1 - L^{12}) = (1 - L)(1 + L + L^2 + L^3 + \dots + L^{11})$  y muestre lo siguiente:

$$12(\bar{z}_t - \bar{z}_{t-1}) = (1 - L^{12})z_t$$

**Respuesta.**

Para empezar expresamos los promedios móviles  $\bar{z}_t$  y  $\bar{z}_{t-1}^-$  como:

$$\bar{z}_t = \frac{1}{12}(z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots + z_{t-10} + z_{t-11})$$

$$\bar{z}_{t-1}^- = \frac{1}{12}(z_{t-1} + z_{t-2} + z_{t-3} + \dots + z_{t-11} + z_{t-12})$$

Una vez hecho esto, simplificaremos la expresión  $12(\bar{z}_t - z_{t-1}^-)$  de la forma:

$$12(\bar{z}_t - z_{t-1}^-) = 12\left(\frac{1}{12}(z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots + z_{t-11}) - \frac{1}{12}(z_{t-1} + z_{t-2} + z_{t-3} + \dots + z_{t-12})\right)$$

$$12(\bar{z}_t - z_{t-1}^-) = (z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots + z_{t-10} + z_{t-11}) - (z_{t-1} + z_{t-2} + z_{t-3} + \dots + z_{t-11} + z_{t-12})$$

$$12(\bar{z}_t - z_{t-1}^-) = z_t - z_{t-12}$$

Ahora expresaremos  $(1 - L^{12})z_t$  de la siguiente manera:

$$(1 - L^{12})z_t = (1 - L)(1 + L + L^2 + L^3 + \dots + L^{10} + L^{11})z_t$$

$$(1 - L^{12})z_t = (1 - L)(1 + L + L^2 + L^3 + \dots + L^{10} + L^{11})(z_t - z_{t-1})$$

$$(1 - L^{12})z_t = (1 + L + L^2 + L^3 + \dots + L^{10} + L^{11})z_t - (1 + L + L^2 + L^3 + \dots + L^{10} + L^{11})z_{t-1}$$

$$(1 - L^{12})z_t = ((z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots + z_{t-10} + z_{t-11}) - (z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots + z_{t-10} + z_{t-11}) - (z_{t-1} + z_{t-2} + z_{t-3} + \dots + z_{t-11} + z_{t-12}))$$

$$(1 - L^{12})z_t = z_t - z_{t-1} = 12(\bar{z}_t - z_{t-1}^-)$$

De este modo se demostró que  $12(\bar{z}_t - \bar{z}_{t-1}) = (1 - L^{12})z_t$  son iguales. Así pues, diferencia estacional de orden 12 en un modelo SARIMA  $(p, d, q)(P, 1, Q)_s$  es igual a 12 veces la diferencia entre el promedio móvil de orden 12 de  $z_t$  y  $z_{t-1}$ . En consecuencia, se evidencia que hay una relación entre un algoritmo de optimización como el modelo SARIMA y uno de los métodos de suavización y desestacionalización tradicionales (en teoría no óptimo) como los promedios móviles.

**2. En clase se mostró que el modelo  $y_t = \delta + y_{t-1} + \epsilon_t$  tenía la siguiente media y varianza:**

$$E(y_t) = y_0 + t\delta \tag{1}$$

$$Var(y_t) = t\sigma^2 \tag{2}$$

Muestre que:

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, y_{t-\tau}) &= (t - \tau)\sigma^2 \\ \rho_\tau = \text{corr}(y_t, y_{t-\tau}) &= \sqrt{\frac{t - \tau}{t}} \end{aligned}$$

¿Qué sucede con  $\rho_\tau$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  Explique su respuesta.

Primero se tiene que encontrar el modelo autorregresivo como un modelo de media móvil MA infinito de la siguiente manera:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + \epsilon_t$$

Se rezaga un periodo, teniendo en cuenta que  $\delta$  es una constante:

$$y_{t-1} = \delta + y_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

Para lo cual se puede remplazar  $y_{t-1}$  en la ecuación  $y_t$

$$y_t = \delta + [\delta + y_{t-2} + \epsilon_{t-1}] + \epsilon_t$$

DE ESTA MANERA SE HACE T VECES HASTA QUE SE OBTIENE:

$$y_t = t\delta + y_0 + \sum_{i=1}^t \epsilon_i$$

Ahora, la ecuación para  $y_{t-\tau}$  es el rezago de  $y_t$ , así:

$$y_{t-\tau} = \delta + y_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau}$$

Ahora la forma de este proceso como un MA infinito se representaría como:

$$y_{t-\tau} = t\delta + y_0 + \epsilon_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau-1} + \epsilon_{t-\tau-2} + \dots + \epsilon_1$$

Entonces conociendo la forma funcional del proceso  $y_{t-\tau}$ , se pueden encontrar media y varianza de la siguiente

manera:

$$E(y_{t-\tau}) = E(t\delta + y_0 + \epsilon_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau-1} + \epsilon_{t-\tau-2} + \dots + \epsilon_1)$$

$$E(y_{t-\tau}) = E(t\delta) + E(y_0) + E(\epsilon_{t-\tau}) + E(\epsilon_{t-\tau-1}) + E(\epsilon_{t-\tau-2}) + \dots + E(\epsilon_1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}_{t-\tau}) = \mathbf{t}\delta + \mathbf{y}_0$$

Y varianza:

$$Var(y_{t-\tau}) = Var(t\delta + y_0 + \epsilon_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau-1} + \epsilon_{t-\tau-2} + \dots + \epsilon_1)$$

Teniendo en cuenta que  $\epsilon \sim iid(0, \sigma^2)$ , se sabe que  $cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-\tau}) = 0$

así como las covarianzas del ruido blanco y las constantes son iguales a cero . Entonces

las covarianzas en esta demostración simplemente se omiten.

$$Var(y_{t-\tau}) = Var(t\delta) + Var(y_0) + Var(\epsilon_{t-\tau}) + Var(\epsilon_{t-\tau-1}) + Var(\epsilon_{t-\tau-2}) + \dots + Var(\epsilon_1)$$

$$Var(y_{t-\tau}) = (t - \tau)\sigma^2 \quad (3)$$

Como ya se ha demostrado en clase cuál es la media y la varianza de este modelo, se puede usar la siguiente formula de covarianza para encontrar el valor para el modelo:

$$cov(y_t, y_{t-\tau}) = E(y_t - \mu)(y_{t-\tau} - \mu)$$

Teniendo en cuenta que  $\mu$  es la media del proceso, la cual es la misma para cualquier momento del tiempo,

se rempazan los valores para conocer la covarianza.

$$\begin{aligned}
cov(y_t, y_{t-\tau}) &= E[(y_t - \mu)(y_{t-\tau} - \mu)] \\
cov(y_t, y_{t-\tau}) &= E[(t\delta + y_0 + \sum_{i=1}^t \epsilon_i - y_0 - t\delta)(t\delta + y_0 + \epsilon_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau-1} + \epsilon_{t-\tau-2} + \dots + \epsilon_1 - y_0 - t\delta)] \\
&= E[(\epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \dots + \epsilon_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau-1} + \dots + \epsilon_1)(\epsilon_{t-\tau} + \epsilon_{t-\tau-1} + \epsilon_{t-\tau-2} + \dots + \epsilon_1)] \\
&= E[(\epsilon_{t-\tau})^2 + (\epsilon_{t-\tau-1})^2 + (\epsilon_{t-\tau-2})^2 + \dots + (\epsilon_1)^2] \\
&\text{Como } E(\epsilon_t^2) = \sigma^2, \forall t. \text{ Esto ya que } \epsilon \sim RB(0, \sigma^2) \\
&= E(\epsilon_{t-\tau})^2 + E(\epsilon_{t-\tau-1})^2 + E(\epsilon_{t-\tau-2})^2 + \dots + E(\epsilon_1)^2 \\
&= (t - \tau)\sigma^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Ahora que se conoce cuál es la covarianza de la caminata aleatoria se puede encontrar la función de autocorrelación usando la siguiente fórmula:

$$\rho_\tau = \frac{Cov(y_t, y_{t-\tau})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-\tau})}}$$

Cado que conocemos lo valores de la varianza y la covarianza, se rempazan los valores que se han obtenido y los que ya se conocen en la formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\rho_\tau &= \frac{Cov(y_t, y_{t-\tau})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-\tau})}} \\
\rho_\tau &= \frac{(4)}{\sqrt{(2)(3)}} \\
&= \frac{(t - \tau)\sigma^2}{\sqrt{(t\sigma^2)((t - \tau)\sigma^2)}} \\
&= \frac{(t - \tau)\sigma^2}{\sqrt{t(t - \tau)\sigma^2}} \\
&= \frac{t - \tau}{\sqrt{t(t - \tau)}} \\
\rho_\tau &= \sqrt{\frac{t - \tau}{t}}
\end{aligned}$$

Para lo cual, para valores pequeños de  $\tau$  y muy grandes de  $t$  el valor de la correlación va a ser aproximadamente la unidad. Sin embargo, a medida que  $\tau$  se incrementa se tiene un numero más pequeño en el numerador que en el denominador, por lo que se esperaría que  $\rho_\tau$  tenga una tendencia de caer.

### 3. Supongan que tienen un modelo AR(p) de la siguiente forma:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

#### 3.1. Bajo que condición el modelo AR(p) anterior sería estacionario:

La estacionaridad es una condición atribuida a la series de tiempo que se puede dividir bajo dos criterios estadísticos, ya que una serie de tiempo  $y_t$  determinada se puede considerar como estacionaria en sentido estrico o estacionaria débil. Como lo señala Peña(2010) la estacionaridad estricta es una condición bastante fuerte en el ambiente de la series de tiempo. Si bien un proceso estacionario en sentido estrico, es a su vez estacionario en sentido débil, consideraremos la necesidad de establecer las condiciones bajo las cuales el proceso AR(p) es estacionario únicamente en el sentido débil.

Como lo señala Lutkepohl(2005) la condición de “estabilidad ”de un proceso implica que el mismo sea estacionario, con unos errores distribuidos como Ruido Blanco. De esta manera utilizando el operador rezago podemos expresar dicho proceso AR(p) como:

$$\phi_p(L)(y_t) = \epsilon_t$$

De modo que:

$$\phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$$

Para que el proceso sea estacionario se debe cumplir entonces que para todo  $z \in \mathbb{C}$ , en tanto  $\phi_p(z) = 0, z_1, z_2, \dots, z_p, |z_i| > 1$ . Esto nos indica que la raíces del polinomio están por fuera del círculo unitario, garantizando estabilidad en el proceso, y por ende que este sea estacionario. Notemos que si  $z_j = a_j \pm ib_j$ ,

el valor absoluto de  $z_j$  es igual a  $\sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ , por lo que se puede afirmar que para que el proceso AR(p) sea estacionario débilmente en covarianza es suficiente que las raíces del polinomio autorregresivo esten fuera del círculo unitario.

### 3.2. ¿Para cuál o cuáles valores de los parámetros $\phi_1$ , el modelo AR(p) tendría al menos una raíz unitaria? Explique su respuesta.

Para resolver esta pregunta iniciaremos expresando el proceso AR(p) de la siguiente manera:

$$y_t = (\phi_1 - 1)y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Se procede a agregar y sustraer  $\phi_t y_{t-p+1}$ , por lo cual el modelo queda

$$y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + (\phi_2 + \phi_3)y_{t-2} + \phi_3(y_{t-3} - y_{t-2}) + \dots + \phi_{p-2}y_{t-p+2} + (\phi_{p-1} + \phi_p) - \phi_p(y_{t-p+1} - t_{t-p}) + \epsilon_t$$

Posterior se suma y se resta  $(\phi_{p-1} + \phi_p)y_{t-p+2}$ , de modo que:

$$y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + (\phi_2 + \phi_3)y_{t-2} + \phi_3(y_{t-3} - y_{t-2}) + \dots - (\phi_{t-1} + \phi_t)(y_{t-p+2} - y_{t-p+1}) - \phi_p(y_{t-p+1} - t_{t-p}) + \epsilon_t$$

Notemos entonces que iterando este proceso podemos llegar a:

$$y_t - t_{t-1} = (1 - \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p)y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \beta_j \Delta y_{t-j+1} + \epsilon_t$$

Por lo anterior, podemos concluir que si:

$$1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p = 0$$

En este caso se puede concluir que la serie tiene al menos una raíz unitaria. Otra forma de ver el problema es que si:

$$\sum_{j=1}^p \phi_j = 1$$

La serie tiene al menos una raíz unitaria.

**3.3. Si el modelo es un AR(3) con  $\phi_1 = 0,4$ ,  $\phi_2 = 0,4$  y  $\phi_3 = 0,2$ . ¿Este proceso tiene raíz unitaria?**

Aplicando la formula anteriormente explicada podemos ver que:

$$0,4 + 0,4 + 0,2 = 1$$

Por esta razon, dado que la agregacion de los  $\phi_i$  es igual a 1 podemos concluir que este proceso autorregresivo de orden (p) tiene al menos una raiz unitaria y no es integrado de orden 0.

**3.4. Si el modelo es un AR(3) con  $\phi_1 = -0,4$ ,  $\phi_2 = -0,4$  y  $\phi_3 = -0,2$ . ¿Este proceso tiene raíz unitaria?**

Para evaluar si esta AR(3) tiene raiz unitaria procedemos a agregar los parámetros  $\phi$ :

$$-0,4 + (-0,4) + (-0,2) = -1$$

Notemos entonces que el resultado no es igual a 1, es igual a  $-1$ . Por este motivo podemos concluir que la serie no tiene al menos una raiz unitaria.

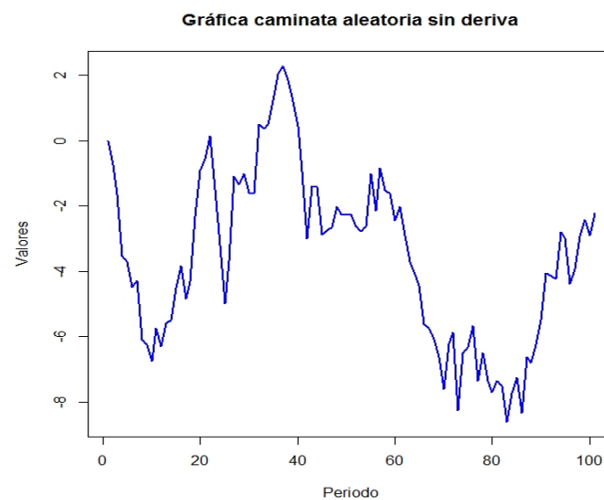


4. En este ejercicio se simulan datos que provienen del proceso generador de datos (PGD) del modelo 1 :  $\Delta y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \epsilon_t$

donde  $y_0 = 0$  y  $\epsilon_t$  es un proceso iid extraído de una  $N(0, 1)$ .

4.1. Simule una serie del tamaño  $T = 100$  del modelo 1 con parámetros  $(\alpha, \rho) = (0, 0)$ . Luego, estime  $\rho$  y  $\alpha$  mediante MCO utilizando la especificación del modelo 1.

En este ejercicio se simuló una serie  $y_t$  cuyo proceso generador de datos es una caminata aleatoria sin deriva  $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$ , para la cual condición inicial  $y_0$  es igual a cero y las innovaciones son independientes e idénticamente distribuidas normal estándar. La serie de 100 observaciones se simuló utilizando el comando `arima.sim` y se obtuvo la siguiente gráfica:



Una vez simulada la serie, se estimó mediante MCO el modelo  $\Delta y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \epsilon_t$  y se hallaron los valores de los respectivos coeficientes, los cuales son presentados en la siguiente tabla:

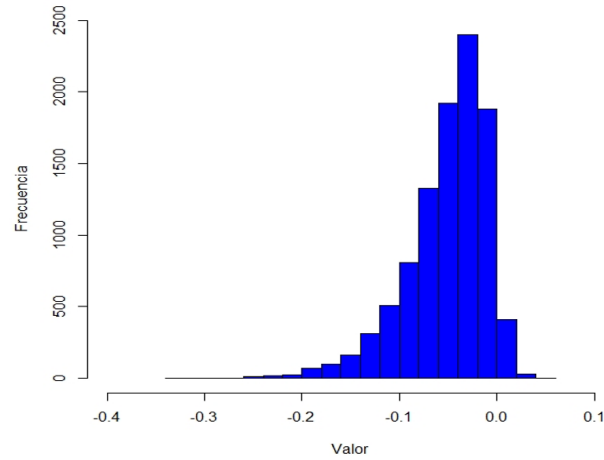
Modelo #1	
Dependent variable:	
dyt ( $\Delta y_t$ )	
yt_1	-0.079** (0.037)
Constant	-0.305* (0.165)
Observations	100
R2	0.044
Adjusted R2	0.034
Residual Std. Error	0.983 (df = 98)
F Statistic	4.515** (df = 1; 98)
Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

**4.2. Repita 10.000 veces el punto (a). Haga un histograma de los resultados de la estimación de  $\rho$  y del valor  $t$  de  $\rho$  (t-value )obtenido para las 10.000 repeticiones. Determine los cuantiles de cola izquierda 1 % y 5 %. Compare los resultados con la tabla 4.2 del libro de Enders.**

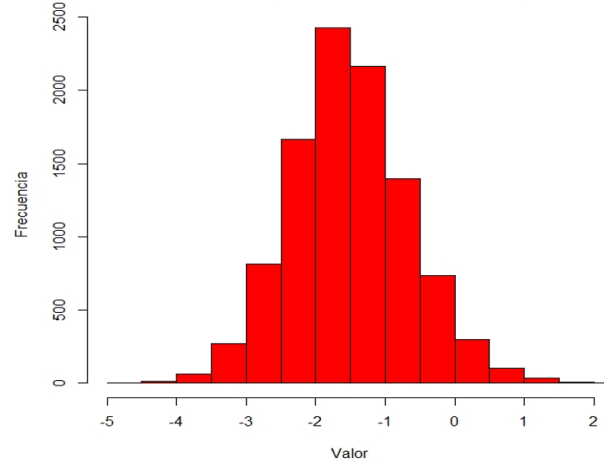
En este ejercicio se simularon 10000 series  $y_t$  cuyo proceso generador de datos es una caminata aleatoria sin deriva  $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$ , para la cual condición inicial  $y_0$  es igual a cero y las innovaciones son independientes y están idénticamente distribuidas normal estándar. Cada una de las series tiene 100 observaciones y la simulación en su conjunto se llevó a cabo utilizando los comandos *ts*, *replicate* y *arima.sim*. . Posteriormente, para cada una de las 10000 series obtenidas se estimó mediante el paquete *dynlm* el modelo  $\Delta y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \epsilon_t$  y se calcularon los respectivos valores para  $\rho$  y sus estadísticos  $t$ .

A continuación se presentan dos histogramas obtenidos a partir de los resultados de la simulación. El primero corresponde al de los coeficientes autorregresivos estimados en cada una de las regresiones y el segundo al de sus respectivos t-valores, permitiendo éstos últimos construir el estadístico Dickey-Fuller para una prueba sin tendencia determinística lineal.

**Rho estimado prueba Dickey-Fuller + Drift con N=10000 y n = 100**



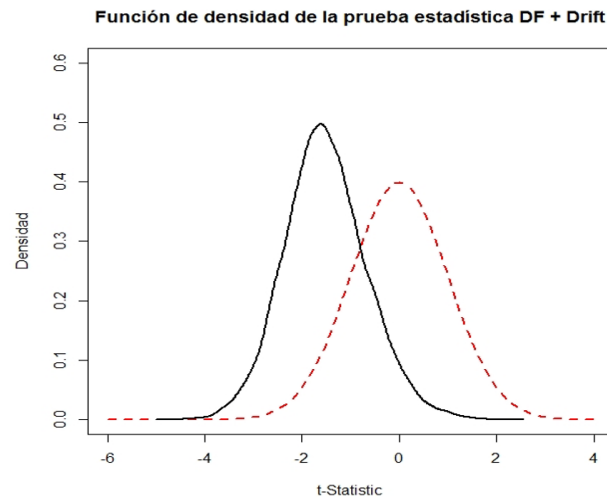
**Estadístico Dickey-Fuller + Drift con N=10000 y n = 100**



En el histograma del coeficiente autorregresivo rho se evidencia que la mayoría de valores estimados son muy cercanos a cero, lo cual significa que la serie tiene una raíz unitaria acorde a la especificación del modelo. Es decir, por medio de la simulación se puede saber que la prueba Dickey-Fuller en la mayor parte de los casos se aproxima, con cierto grado de incertidumbre, al verdadero PGD que en el escenario de las simulaciones sí puede ser conocido por el investigador.

Por otra parte, el histograma del estadístico D-F evidencia que la mayor parte de coeficientes autorregresivos calculados se encuentra más o menos a 2 desviaciones estándar de cero, el cual es el verdadero valor del coeficiente autorregresivo determinado por el PGD. Así pues, se pueden determinar los valores críticos de la prueba Dickey-Fuller a partir de los cuales se rechazaría la hipótesis nula de raíz unitaria, lo cual no

aplica en este caso porque se simuló un proceso de caminata aleatoria.



Asimismo, a continuación se presenta la función de densidad del estadístico Dickey – Fuller y se compara con la función de densidad de una distribución normal. En esta gráfica se puede apreciar que el estadístico de la prueba Dickey – Fuller no se distribuye normal y que su función de densidad es apropiada para hacer una prueba de cola izquierda. En primer lugar, la distribución del estadístico D-F tiene una curtosis mucho mayor que la distribución normal, concentrando muchos más valores en torno a la media. En segundo lugar, la distribución del estadístico D-F no tiene media cero en la medida en que la mayor parte de la función está definida en los números negativos.

Por último, se presentan los valores críticos de la distribución al 1 % y 5 % de significancia y se comparan con los valores originales de la distribución a los mismos niveles de significancia para una muestra de 100 observaciones. En la simulación el valor crítico al 5 % de significancia es -2,846 y al 1 % de significancia es -3,426, mientras que los valores críticos presentados en el libro de Enders son -2,89 al 5 % de significancia y -3,51 al 1 % de significancia. Aquí se puede evidenciar que los valores son muy cercanos en tanto el tamaño de cada una de las muestras simuladas es igual a 100, mientras la pequeña diferencia entre los valores calculados en este ejercicio y los valores originales de la distribución se pueden deber quizás al número de veces en que se realizó la simulación. En consecuencia, un mayor número de repeticiones garantizaría que haya convergencia hacia los valores presentados en el libro de Enders.

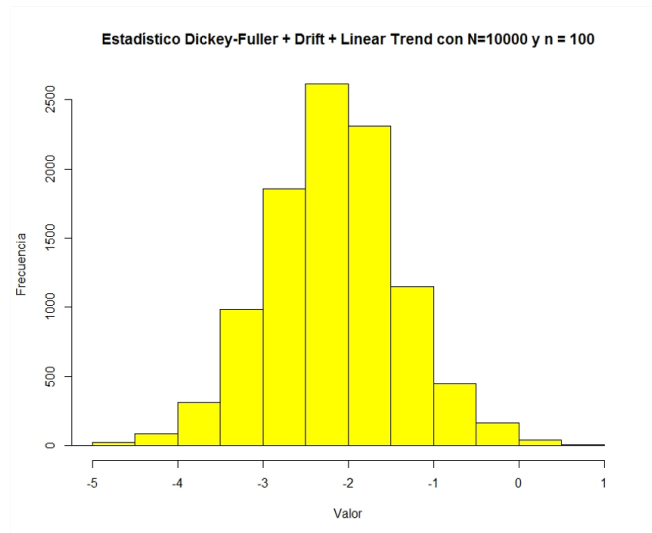
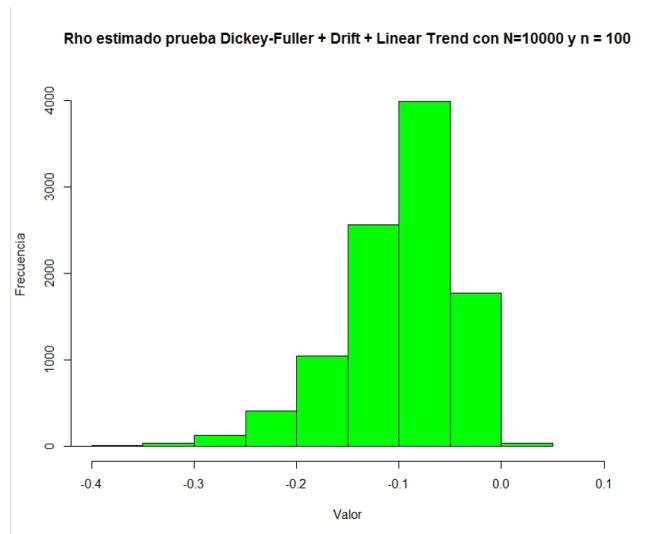
Nivel de significancia	Valores simulados	Valores originales D-F
5 %	-2,846	-2,89
1 %	-3,426	-3,51

**4.3. Repita 4.2 pero con el PGD a simular teniendo  $\alpha = 0,5$  y  $\rho = 0$  ( $\Delta y_t = 0,5 + \epsilon_t$ ) y estime por MCO la ecuación  $\Delta y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \beta_t + \epsilon_t$ . Haga el histograma y encuentre los cuantiles similar al paso anterior.**

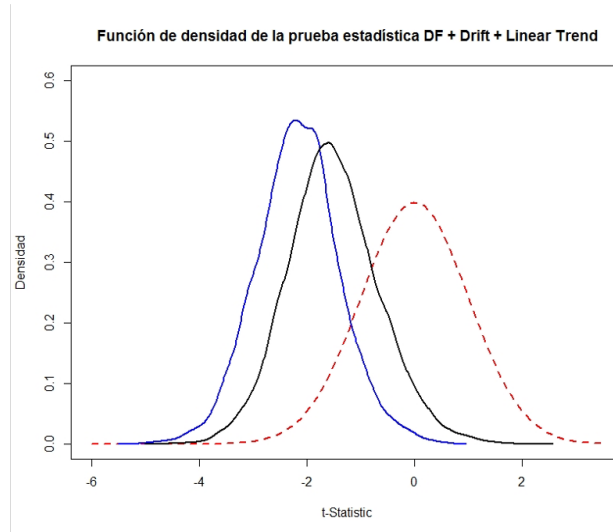
En este ejercicio se simularon 10000 series  $y_t$  cuyo proceso generador de datos es una caminata aleatoria con deriva  $y_t = 0,5 + y_{t-1}\epsilon_t$ , para la cual condición inicial  $y_0$  es igual a cero y las innovaciones son independientes y están idénticamente distribuidas normal estándar. Cada una de las series tiene 100 observaciones y la simulación en su conjunto se llevó a cabo utilizando los comandos *ts*, *replicate* y *arima.sim*. Posteriormente, para cada una de las 10000 series obtenidas se estimó mediante el paquete *dynlm* el modelo  $\Delta y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \beta_t + \epsilon_t$  y se calcularon los respectivos valores para  $\rho$  y sus estadísticos t.

Posteriormente se grafican dos histogramas obtenidos a partir de los resultados de la simulación. El primero corresponde al de los coeficientes autorregresivos estimados en cada una de las regresiones y el segundo al de sus respectivos t-valores, permitiendo éstos últimos construir el estadístico Dickey-Fuller para una prueba con deriva y tendencia determinística lineal.

Al igual que en la anterior pregunta, en el histograma del coeficiente autorregresivo rho se evidencia que gran parte de los coeficiente estimados son muy cercanos a cero, lo cual significa que la serie tiene raíz unitaria y que la mayoría de los resultados corresponde con el PGD estipulado en las simulaciones. Por otra parte, el histograma correspondiente al estadístico t calculado para cada uno de los coeficientes autorregresivos se encuentra a menos de 3 desviaciones de cero, el cual es el verdadero valor del coeficiente autorregresivo según el PGD. Acorde con el comportamiento presentado de los estadísticos se pueden establecer los valores críticos a partir de los cuales se rechazaría la hipótesis nula de raíz unitaria, lo cual no aplica en este caso porque se simuló un proceso de caminata aleatoria con deriva.



La función de densidad del estadístico Dickey-Fuller para una prueba con deriva y tendencia determinística lineal evidentemente no se distribuye como una normal, en tanto la primera de ellas tiene una curtosis mucho mayor y no tiene una media igual a cero. La función de densidad del estadístico Dickey-Fuller con deriva y tendencia lineal corresponde a la gráfica azul, mientras la función de densidad del estadístico Dickey-Fuller con deriva pero sin tendencia corresponde a la línea negra. A partir de esta comparación, se puede apreciar que al incluir un componente determinístico a la prueba la zona de rechazo de la hipótesis nula se desplaza hacia la izquierda, pues los valores críticos para el mismo número de simulaciones y mismo tamaño de muestras son ahora más negativos para cada nivel de significancia. En consecuencia, aceptar la hipótesis alternativa va a requerir un valor del coeficiente rho mucho más alejado de cero cuando a la prueba Dickey-Fuller se le añade un término determinístico adicional.



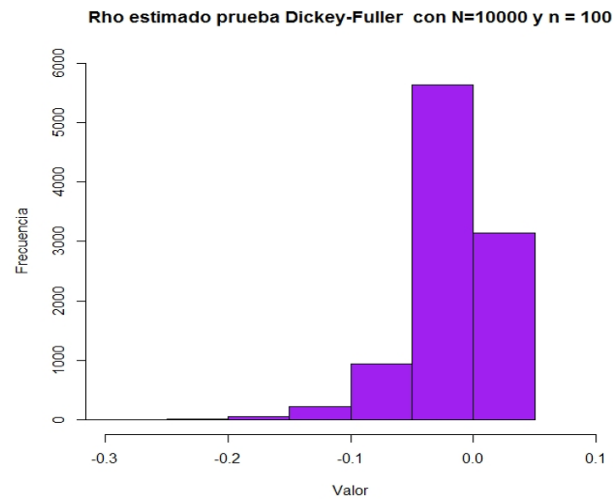
Finalmente, al comparar los valores críticos obtenidos en la simulación con los valores críticos originales del test D-F presentados en el libro de Enders, es posible evaluar que son muy cercanos –mucho más que en el anterior ejercicio- y que la pequeña diferencia que hay entre ambos puede deberse al número de veces en el que se llevó a cabo la simulación.

Nivel de significancia	Valores simulados	Valores originales D-F
5 %	-3,443	-3,45
1 %	-4,038	-4,04

**4.4. (Tome las 10.000 repeticiones hechas en 4.3 y calcule  $\rho$  y el valor t de  $\rho$  pero utilizando por MCO el siguiente modelo (mal especificado):  $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$ . Determine los cuantiles. Compare los resultados en 4.3 y 4.2 . Explique la relación que puede presentarse en los resultados obtenidos referente a los peligros de especificación errónea en la ecuación de testeo de Dickey-Fuller.**

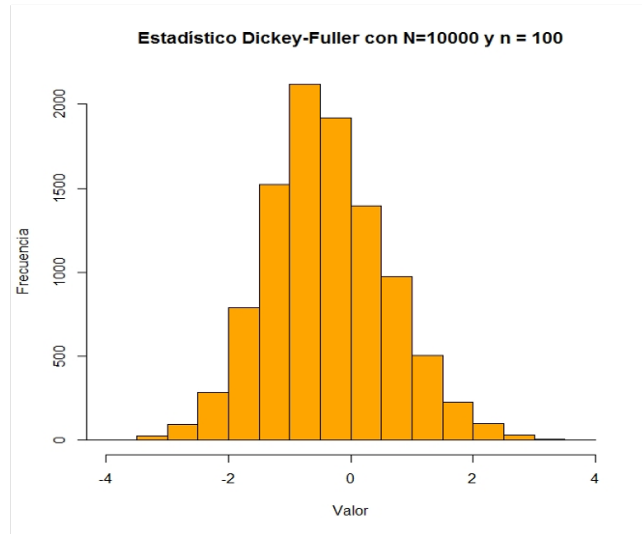
En este ejercicio se parte de las 10000 series  $y_t$  simuladas en el literal 4.3, cuyo proceso generador de datos es una caminata aleatoria con deriva  $y_t = 0,5 + y_{t-1} + \epsilon_t$ , con una condición inicial  $y_0$  igual a cero y con unas innovaciones independientes e idénticamente distribuidas normal estándar. Cada una de las series tiene 100 observaciones y la simulación en su conjunto se llevó a cabo utilizando los comandos *ts*, *replicate* y *arima.sim*. No obstante, en este caso, se estimó el modelo  $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$  correspondiente a un test

Dickey-Fuller para una caminata aleatoria sin deriva, pese a que en el PGD el intercepto toma un valor de 0,5. Por consiguiente, solo en este caso en donde el PGD es conocido se puede afirmar que el modelo está mal especificado, mientras que en situaciones de la vida real en donde el PGD es desconocido hay que hacer un testeo secuencial de las pruebas D-F para descartar especificación errónea, aunque con cierto grado de incertidumbre.



Al igual que en el ejercicio 4.3 se calcularon los histogramas correspondientes a el coeficiente autorregresivo y el estadístico t para cada una de las muestras de la simulación. En el primer histograma se evidencia que al igual que en (c), la mayor parte de los coeficientes autorregresivos son cercanos al valor de cero determinado en el PGD, lo cual indica que para gran parte de las series se acierta en indicar que tienen raíz unitaria. Sin embargo, en el histograma correspondiente al estadístico de prueba D-F respecto al obtenido en (c) se evidencia un cambio importante en cuanto a que en esta simulación hay muchas más observaciones que toman valores positivos, muchos más datos se agrupan a menos de dos desviaciones estándar del valor cero y la gráfica está mucho más centrada y es más simétrica en torno a cero.





Al contrastar los resultados entre 4.3 y 4.4 se evidencian los problemas asociados con una mala especificación de la prueba Dickey-Fuller. Como ya se mencionó, la simulación se llevó a cabo con base en un PGD que suponía una caminata aleatoria con deriva, mientras que para cada una de las series de la simulación se asumió como hipótesis alternativa del test Dickey-Fuller una caminata aleatoria pura, es decir, sin intercepto. En consecuencia, como la distribución del estadístico Dickey-Fuller es sensible a la inclusión o exclusión de términos determinísticos en la prueba, esta es la razón por la cual los resultados entre 4.3 y 4.4 divergen de forma importante pese a que el PGD es idéntico.

La anterior situación hace que el test Dickey-Fuller pierda potencia debido a que disminuirá la probabilidad del test de rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria cuando deba rechazarla. Es decir, como el verdadero PGD tiene intercepto pero se realiza una prueba que no incluye dicho términos determinístico, habrá una probabilidad mucho mayor de que el test concluya que la serie sea estacionaria cuando en realidad no lo es.

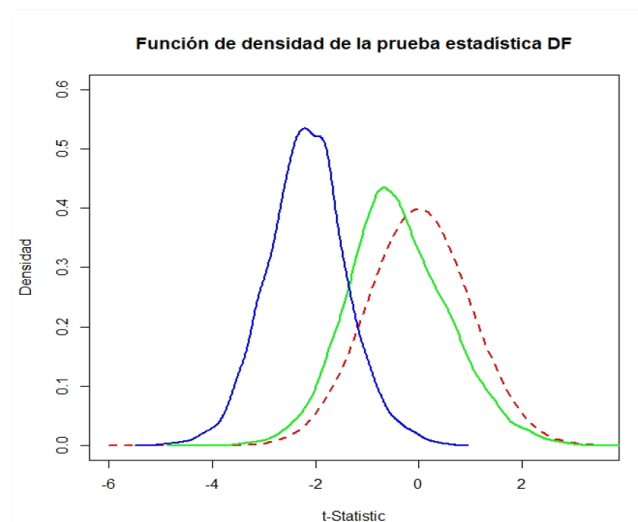
Esto se ve ejemplificado, en la tabla que resume los valores críticos al 5% y al 1% de significancia obtenidos en 4.3 y 4.4. En la prueba que está mal especificada los valores críticos se hacen menos negativos (están más cercanos a cero) respecto a los calculados modelo 4.4, por lo cual, una serie que tiene raíz unitaria de acuerdo al test Dickey-Fuller que incluye intercepto será estacionaria según el test Dickey-Fuller que asume una caminata aleatoria pura.

Por ejemplo, si suponemos una serie cualquiera cuyo estadístico Dickey-Fuller para una prueba con intercepto es -3, en este caso bajo la especificación en 4.3 consistente con el PGD no se rechazará la hipótesis

nula de raíz unitaria. Mientras que, al obtenerse dicho valor de -3 en el estadístico Dickey-Fuller para una prueba sin intercepto, según la especificación del modelo 4.4, esta serie va a ser estacionaria. En consecuencia, al especificar mal el test Dickey-Fuller se incrementa la probabilidad de cometer un falso rechazo de la hipótesis nula de raíz unitaria.

Nivel de significancia	Valores simulados en 4.3	Valores simulados en 4.4
5 %	-3,443	-1,921
1 %	-4,038	-2,579

Finalmente, esto se puede evidenciar al comparar la función de densidad del estadístico Dickey-Fuller bajo la especificación en (d) que corresponde a la gráfica verde, respecto a la función de densidad del estadístico Dickey-Fuller bajo la especificación en (c) que corresponde a la gráfica azul. A manera de contraste, también se presenta la función de densidad de una distribución normal correspondiente a la gráfica roja punteada.

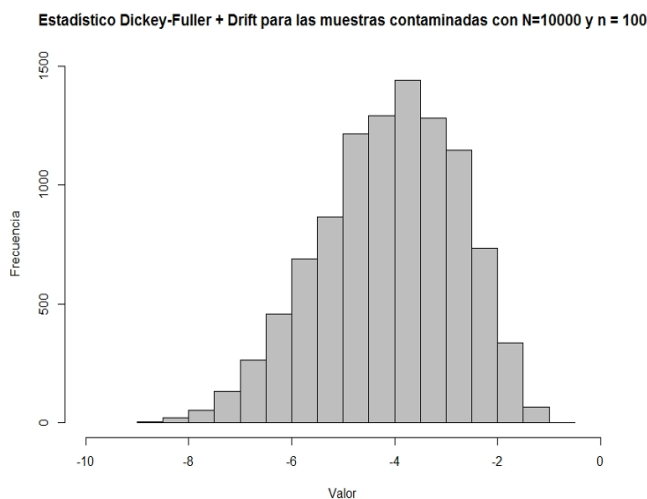


**4.5. Contamine la serie de 10.000 repeticiones en 4.2 con un dato atípico (outlier) de tamaño 20 para el momento de tiempo ( $t = 50$ ). ¿Cuántas veces el test de DF es ahora rechazado (cuantil 5 %)? Explique con sus palabras las diferencias en los resultados obtenidos aquí frente a los de 4.2 .**

En este ejercicio se parte de las 10000 series  $y_t$  simuladas en el literal 4.2, cuyo proceso generador de datos es una caminata aleatoria  $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$  con una condición inicial  $y_0$  igual a cero y con unas innovaciones

independientes e idénticamente distribuidas normal estándar. Cada una de las series tiene 100 observaciones y la simulación en su conjunto se llevó a cabo utilizando los comandos *ts*, *replicate* y *arima.sim*. No obstante, en este caso, a cada una de las 10000 series estimadas se le incluyó un punto de quiebre o valor atípico igual a 20 en el momento  $t = 50$ . Una vez hecho esto, se estimó mediante el paquete *dynlm* un modelo  $\Delta y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \epsilon_t$  y se calculó el correspondiente estadístico t para cada una de las series.

Con objeto de comparar los resultados respecto a los obtenidos en 4.2 se presenta un histograma para el estadístico Dickey-Fuller más intercepto. A diferencia del histograma obtenido en (b) los estadísticos no toman valores positivos y son muy negativos, es decir, se encuentran a muchas más desviaciones estándar a la izquierda del histograma. Es decir, en 4.2 muy pocos valores de la simulación estaban a más de -4 desviaciones estándar respecto al valor de cero, mientras que en este ejercicio una parte bastante importante se encuentra a más de -4 desviaciones estándar del valor cero.



Esta situación es un claro ejemplo de que la prueba Dickey-Fuller es inapropiada en la presencia de algún punto de quiebre o dato atípico que pueda interpretarse como un cambio estructural, así solo haya sucedido en el momento  $t = 50$ . Es decir, en este caso el outlier tiende a sesgar el diagnóstico del test D-F hacia no rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria, es decir que, al aplicar esta prueba y no tomar en cuenta el punto de ruptura se incrementa la probabilidad de concluir que la serie tiene raíz unitaria cuando puede que sea estacionaria en nivel o en torno a una tendencia. Si bien en este caso, como se conoce el PGD y hay total certidumbre de que la serie tiene una caminata aleatoria, no se contradecirían mucho los resultados

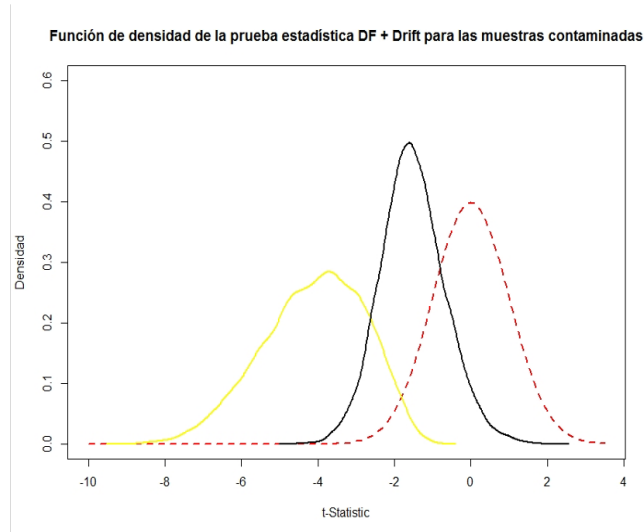
obtenidos en 4.2, en situaciones de la vida real donde el PGD es desconocido esto incrementaría bastante la incertidumbre sobre los resultados de la prueba y en muchos casos llevaría a diagnósticos erróneos.

Lo anterior se puede apreciar de mejor manera al comparar los valores críticos obtenidos en 4.2 respecto a los obtenidos en 4.5. Como se evidencia en la siguiente tabla, los valores críticos obtenidos para las series contaminadas son mucho más negativos, incrementándose en valor absoluto en más de un 100 %. Por consiguiente, se incrementa la probabilidad de que las series que sean estacionarias bajo la especificación 4.2 terminen no siéndolo en la especificación 4.5 por la presencia del valor atípico, en tanto éste no sea modelado.

Nivel de significancia	Valores simulados en 4.2	Valores simulados en 4.5
5 %	-2,846	-6,455
1 %	-3,426	-7,386

En este ejemplo particular, entre el cuantil 0.05 del literal 4.2 y el cuantil 0.05 del literal 4.5 hay 7629 observaciones, es decir, todas estas observaciones se encuentran a la izquierda de la zona de rechazo de la hipótesis nula del estadístico D-F para las series no contenidas. Con base en este, es evidente como la función de densidad para la simulación con las series contaminadas representada por la línea amarilla está bastante a la izquierda de función de densidad para la simulación con las series no contaminadas por el valor atípico representada por la línea negra.

Finalmente, al observar que las dos funciones de densidad tienen características totalmente diferentes, se evidencia cómo se puede llegar a conclusiones erróneas en un test de raíz unitaria D-F cuando hay rupturas estructurales en los datos, siendo mucho más probable afirmar que una serie tiene raíz unitaria cuando en realidad puede ser estacionaria. Así pues, en este caso sería adecuado aplicar la prueba de raíz unitaria de Perron o la prueba de Lutkepohl Lanne en tanto el punto de ruptura es conocido.



5. El profesor le asignará una economía a analizar a cada grupo.
- Cada grupo debe realizar los siguientes procedimientos y con sus respectivas justificaciones/explicaciones. El país asignado fue Brasil.

A modo de introducción se presentan la gráfica sobre el comportamiento trimestral del PIB de la República Federal de Brasil entre Enero de 1996 y Diciembre de 2019.

## 5.1. PIB real

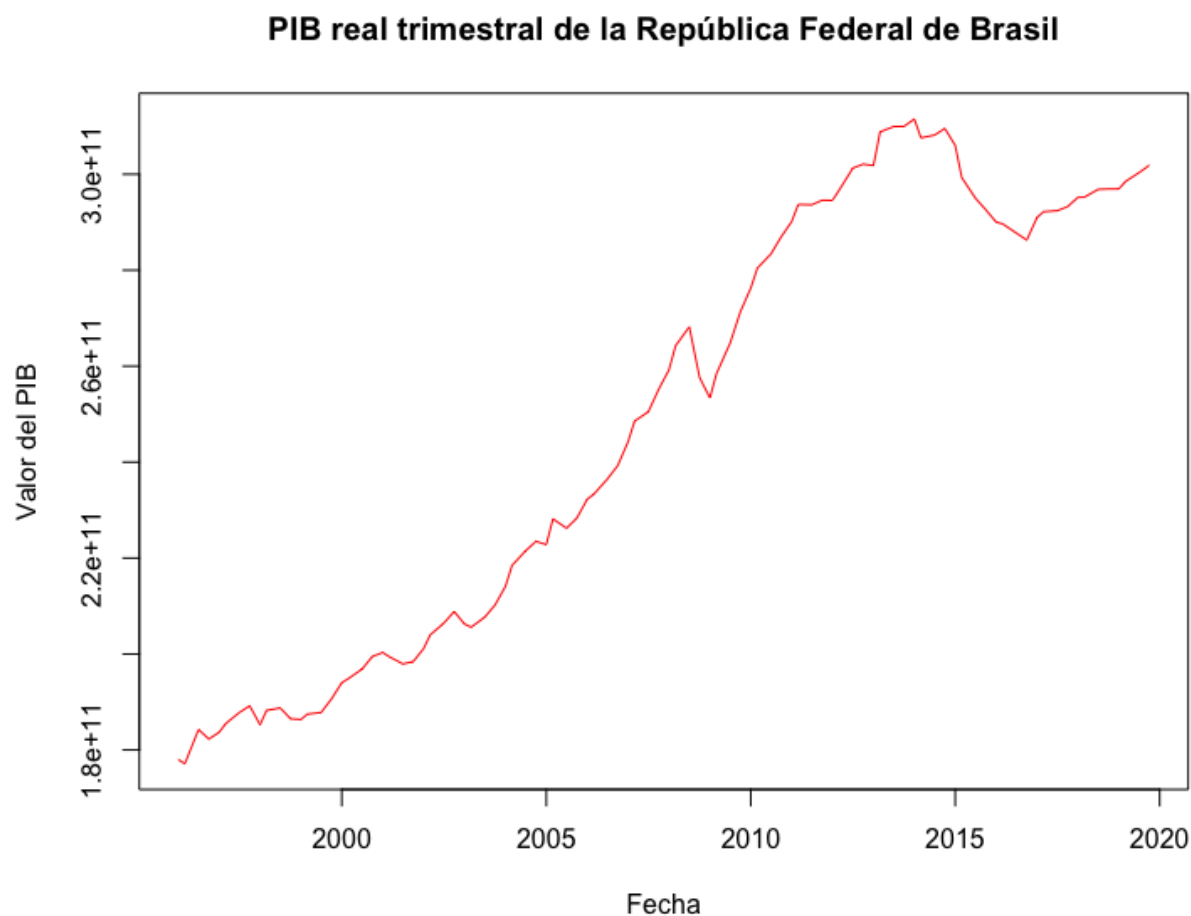


Figura 1: PIB real trimestral

### 5.1.1. Realice la prueba ADF. Determine el modelo adecuado para estimar el test, justifique su respuesta.

A continuación se presentarán los resultados de la prueba Dicky-Fuller aumentada (en adelante ADF) para la serie trimestral desestacionalizada del Producto Interno Bruto de la República Federativa de Brasil desde Enero de 1996.

En principio, se presenta la necesidad de determinar el orden del modelo bajo el cual nos disponemos a testear la prueba ADF. Para seleccionar dicho orden se utiliza el criterio de información *AIC* dentro del argumento *selectlags* del código de la prueba ADF del programa estadístico RStudio en todos los casos en

los que se aplica la misma. En este sentido, se presentan los resultados de la prueba para la serie del PIB bajo las 3 distintas ecuaciones posibles a testear: modelo con tendencia y deriva , modelo con deriva y el modelo sin componente determinístico .

Para el caso de la prueba más general, con deriva y tendencia, la prueba arrojó los siguientes resultados:

	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)	Prueba conjunta (phi2)	Raiz Unitaria y Tendencia (phi3)
Valor est. de prueba	-0,97	3,364	0,8938

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)	Prueba conjunta (phi2)	Raiz Unitaria y Tendencia(phi3)
5 %	-3,43	4,88	6,49
1 %	-3,99	6,50	8,73

En primer momento, es necesario determinar cual es la hipótesis nula de la prueba de la prueba individual de raiz unitaria (tau3), la cual nos indica que  $H_0 : \pi = 0$ . En este sentido, y como la prueba es de cola izquierda logramos determinar que como  $-3,4 < -0,97$  no se rechaza dicha hipótesis nula de raiz unitaria a un nivel de significancia del 5 %. Posteriormente, es entonces necesario observar los resultados de la prueba conjunta de raiz unitaria y tendencia (phi3), la cual tiene la siguiente hipótesis nula  $H_0 : \pi = \lambda = 0$ . Es importante señalar, que esta prueba conjunta es de cola derecha por lo tanto, ya que  $6,49 > 0,8938$  no se rechaza dicha hipótesis nula al mismo nivel de significancia pasado y concluimos que la prueba no tiene tendencia. Para finalizar el análisis de la prueba más general, señalamos que dada la hipótesis nula del testeo conjunto de intercepto, tendencia y raiz unitaria (phi2)  $H_0 : \pi = \lambda = \mu$  los valores de los estadísticos de prueba contrastados ( $4,88 > 3 - 364$ ) nos permiten no rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5 %, como en efecto se esperaba.

Dado lo anteriormente descrito es necesario entonces pasar a analizar los resultados de la prueba de raiz unitaria y tendencia. La prueba que testea la raiz unitaria de la serie y la deriva del modelo únicamente nos

presenta los siguientes resultados:

	Prueba de Raiz Unitaria (tau2)	Raiz Unitaria y Sig. Intercepto (phi1)
Valor del estadístico de prueba	-1,666	4,8638

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau2)	Raiz Unitaria y Sig. Intercepto(phi1)
5 %	-2,89	4,71
1 %	-3,51	6,70

Inicialmente es relevante considerar los resultados de la prueba cuando se testea únicamente si la serie tiene raiz unitaria (tau2). Al igual que en la prueba más general la hipótesis nula de (tau2) es  $H_0 : \pi = 0$  y es de cola izquierda. En consecuencia, según los valores de prueba  $-2,89 < -1,666$  no rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5 %, siendo consistentes los resultados de esta prueba con los pasados. Posterior a esto, la prueba conjunta busca testear si el modelo contiene o no intercepto. En este caso, la hipótesis nula de (phi1) es  $H_0 = \mu = \pi = 0$ . En este test que es de cola derecha, podemos concluir que no se rechaza la hipótesis nula en un nivel del 1 % de significancia ya que  $6,70 > 4,86338$ . Sin embargo, a un nivel de confianza del 5 % rechazo dicha hipótesis de acuerdo con los valores arrojados por la prueba:  $4,71 < 4,8638$ . Esta situación presentada nos permite evidenciar que la prueba tiene intercepto a este nivel de significancia.

Teniendo en cuenta que al 1 % la deriva no es significativa, por lo cual es adecuado presentar los resultados de la prueba individual sin componentes determinísticos. Los siguientes son los resultados corresponde a dicha prueba:

	Prueba de Raiz Unitaria (tau1)
Valor del estadístico de prueba	2,584



Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)
5 %	-1,95
1 %	-2,6

La hipótesis nula de esta prueba es  $H_0 : \pi = 0$ , es decir que la serie tiene al menos una raíz unitaria. Dado que esta prueba es de cola izquierda, podemos concluir que como  $-2,6 < 2,584$  no se rechaza  $H_0$  a un nivel de significancia del 1 %. Estos resultados son consistentes de forma general con lo apreciado en las pruebas anteriores, y sirven como insumo para concluir con mayor certeza que la serie tiene al menos una raíz unitaria y por lo cual no es integrada de orden cero.

### 5.1.2. Realice la prueba ERS y la KPSS.

A diferencia de las hipótesis nulas de la prueba ADF, el test KPSS intercambia dicha hipótesis en tanto esta indica que la serie es estacionaria. Esta prueba es un complemento típico a los resultados de la ADF, y la cual se basa en una separación del proceso en una agregación de una caminata aleatoria y un  $e_t$  estacionario por definición. Para construir la hipótesis nula se observa que si la varianza de la caminata aleatoria es igual a cero entonces el proceso es estacionario. Por lo anterior definimos la  $H_0 : \sigma_v^2 = 0$ , en donde  $\sigma_v^2$  es la varianza del proceso de caminata aleatoria.

Teniendo lo previamente mencionado, es importante resaltar que para el caso de la prueba KPSS esta se puede aplicar con dos tipos de partes determinísticas, pero siguiendo la línea de los resultados de la prueba ADF solo se aplica la prueba con tendencia.

Resultados de la prueba KPSS con constante "mu":

	Prueba de Raiz Unitaria
Valor del estadístico de prueba	2,3982

Nivel de significancia	Valor crítico prueba de Raiz Unitaria
5 %	0,463
1 %	0,739

Teniendo en cuenta la  $H_0$  y que el test es de cola derecha, el resultado de la prueba con constante únicamente nos permite rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5 % ( $0,463 < 2,3982$ ), determinando que la serie trimestral del PIB de Brasil para entre Enero de 1996 y Diciembre de 2019 no es integrada de orden cero.

La prueba de Eliot, Rothenberg y Stock por sus siglas ERS, es una prueba que propone como centro del análisis un punto óptimo invariante, es decir que no varía ante ruidos o perturbaciones que afecten los parámetros. Esta prueba tiene la particularidad de que aplica un procedimiento en dos etapas, en la cual aplica inicialmente una regresión a la serie con componentes determinísticos y posteriormente aplica la prueba extrayendo los componentes determinísticos, es decir 'detrended'. Se aplica la prueba ERS con intercepto, de acuerdo a los argumentos presentados en la KPSS, como modificación a la tipo ADF (DF-GLS), en la cual se obtuvieron los siguientes resultados:

	Prueba de Raiz Unitaria
Valor del estadístico de prueba	0,7588

Nivel de significancia	Valor crítico prueba de Raiz Unitaria
5 %	-1,943
1 %	-2,59

Los valores estadísticos de prueba nos permiten no rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5 %. Notemos que  $-1,943 < 0,7588$ . Por todo lo anterior, podemos afirmar que la prueba ERS, al igual que la KPSS y la ADF nos indican que la serie tiene al menos una raíz unitaria, por lo que los datos del PIB

real desestacionalizado de Brasil no son integrados de orden 0.

**5.1.3. En un cuadro resuma, el rechazo u aceptación de la hipótesis nula de cada una de las pruebas.**

Prueba		1 %		5 %		Cola de prueba
		No rechazo	Rechazo	No rechazo	Rechazo	
Dickey-Fuller con tendencia y deriva	Con tendencia y deriva	X		X		Izquierda
	Solo con deriva	X		X		Derecha
	Sin componentes determinísticos	X		x		Derecha
Dickey-Fuller con deriva	Solo con deriva	X			X	Izquierda
	Sin componentes determinísticos	X		X		Derecha
Dickey-Fuller sin componentes		X		X		Izquierda
KPSS con Mu			X		X	Derecha
ERS con deriva		X		X		Izquierda

**5.1.4. De lo anterior, que puede concluir sobre el orden de integración de la serie.**

Habiendo analizado las pruebas tanto conjuntas como individuales aplicadas a la serie trimestral en niveles del PIB de Brasil entre 1996 y 2019 se puede determinar que la serie evidentemente no tiene al menos una raíz unitaria, es decir no es integrada de orden 0.

Para determinar el orden de integración de la serie procedemos a aplicar sobre la serie en nivel la primera diferencia, de modo que  $\Delta X_t = x_t - x_{t-1}$ . Posterior a este proceso, es necesario testear la serie de nuevo. Para esto utilizaremos, en consistencia con los resultados de la ADF aplicada a la serie del PIB desestacionalizada original, la prueba en primera instancia con tendencia únicamente

Gráficamente así se logra observar la primer diferencia de la serie :

### PIB real trimestral de la República Federal de Brasil primera diferencia

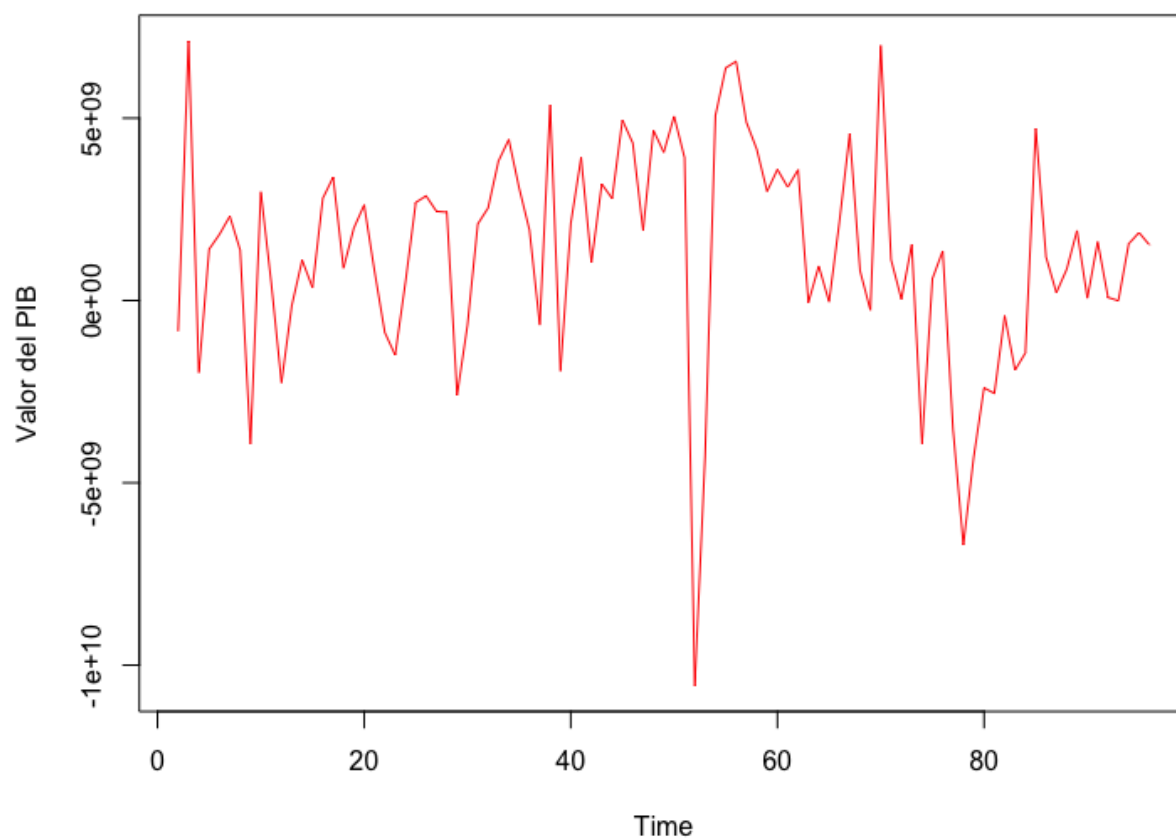


Figura 2: PIB real trimestral primera diferencia

A simple vista, podemos evidenciar que hay una alta probabilidad de que la serie en nivel tenga raíz unitaria. Sin embargo, para confirmar dicha hipótesis se presentan los resultados de la prueba DFA.

Iniciaremos presentando todos los valores arrojados al testear conjuntamente la deriva y la raíz unitaria.

	Prueba de Raiz Unitaria (tau2)	Prueba conjunta (phi1)
Valor est. de prueba	-5,7433	16,5083

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau2)	Prueba conjunta(phi1)
5 %	-2,89	4,71
1 %	-3,51	6,70

Iniciaremos analizando los resultados de esta prueba ADF cuando solo se testea la raiz unitaria (tau2). En este sentido, no sobra señalar de nuevo que la hipótesis nula nos indica que la serie tiene al menos una raiz unitaria. Dado que la prueba es de cola izquierda, notemos que como  $-2,89 > -5,7433$  se rechaza la hipótesis nula de raiz unitaria a un nivel de significancia del 5 %. A su vez, para determinar la significancia de la deriva es necesario analizar los resultados de la prueba conjunta (phi1). En este sentido, al observar que  $4,71 < 16,5053$  podemos afirmar que se rechaza  $H_0$  y esta deriva es significativa. Cabe recalcar que esto es considerado como un comportamiento atípico en tanto como es la serie con su primer diferencia la pendiente de la tendencia lineal debería ser cero y no debería presentarse deriva.

Dada la prueba sobre la serie trimestral del PIB de Brasil en nivel y con su primer diferencia podemos afirmar que esta tiene al menos una raiz unitaria cuando se toma su valor neto, pero es estacionaria en su primer diferencia. Por esto, concluimos que la serie trimestral del PIB de la República Federal de Brasil entre Enero de 1996 y Diciembre de 2019 es integrada de orden 1 (I(1)).

#### **5.1.5. Realice la prueba de raíz unitaria con cambio estructural Zivot y Andrews vista en clase. Interprete los resultados para cada serie.**

Inicialmente, es importante resaltar que la prueba de Zivot y Andres es una prueba de cambio estructural desconocido o endógeno, por lo que bajo el amplio desconocimiento del comportamiento conjunto del PIB en Brasil, no se puede determinar exógenamente si hay un momento  $t$  en la serie que registre un cambio estructural. Es por esto que aplicar otro tipo de pruebas como la de Lutkepohl & Lanne y la prueba Perron no es eficiente. La prueba de ZA al ser una prueba ADF secuencial que utiliza una variable dummy diferente para cada fecha dentro de la muestra y con ella busca el posible cambio estructural es más eficiente en este contexto, y opera evaluando secuencialmente los momentos de la serie y selecciona aquel que registre un  $t$

estadístico de la prueba ADF mínimo.

En este sentido, es importante señalar que esta prueba se puede testar para una serie con intercepto, tendencia y ambos componentes determinísticos. Dado los resultados obtenidos en la prueba ADF aplicaremos la prueba con tendencia únicamente y con ambos componentes determinísticos.

Utilizando el código de RStudio *ur.za* se arrojaron los siguientes resultados.

	Prueba ZA con intercepto
Valor del estadístico de prueba	-3,9165
Momento de potencial cambio estructural	$t = 76$

Nivel de significancia	Valor crítico con intercepto
5 %	-4,8
1 %	-5,34

Gráficamente se puede observar el test de la siguiente manera.

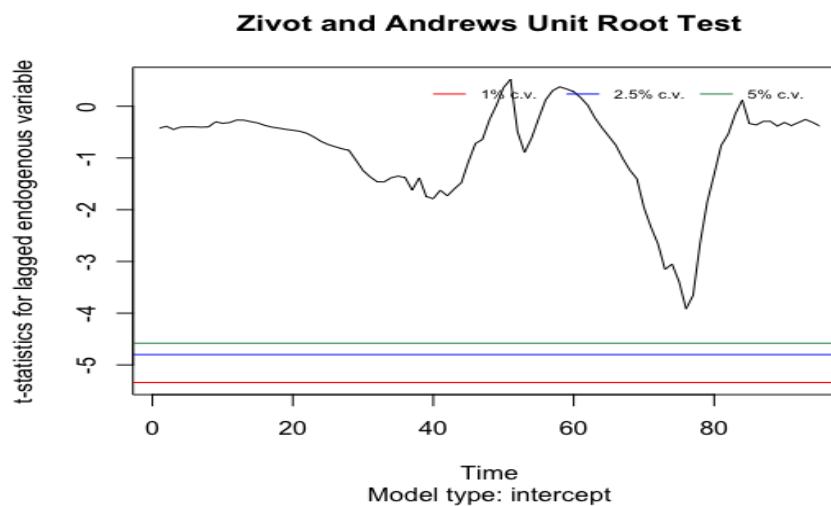


Figura 3: ZA nivel de Significancia

Atendiendo a los resultados presentados anteriormente podemos notar que la prueba en materia de raíz unitaria es consistente con las anteriores ya que no rechazamos la hipótesis nula de raíz unitaria al 5 %, en tanto  $-4,8 < -3,0165$  de modo que la serie del PIB en nivel tiene al menos una raíz unitaria y de acuerdo a la prueba presenta un potencial cambio estructural en el momento 76 que corresponde a octubre de 2014.

Adicional a lo anterior, presentamos a continuación los resultados de la prueba con ambos componentes determinísticos:

	Prueba ZA conjunta
Valor del estadístico de prueba	-3,6869
Momento de potencial cambio estructural	$t = 53$

Nivel de significancia	Valor crítico con intercepto
5 %	-5,08
1 %	-5,57

Gráficamente se puede observar el test de la siguiente manera.

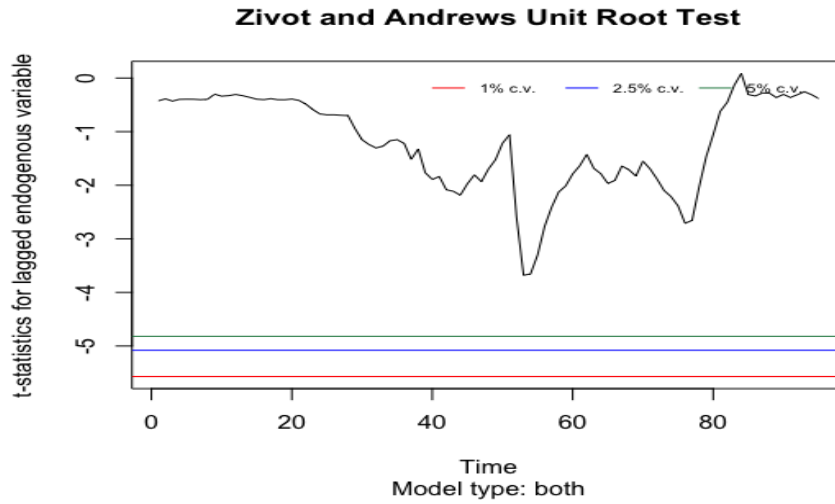


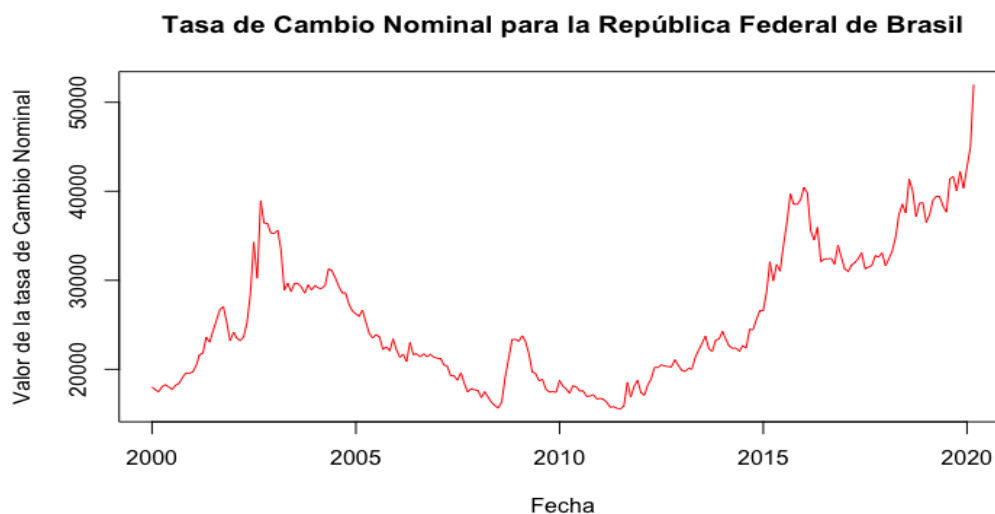
Figura 4: ZA nivel de Significancia

Por otra parte, los resultados para la prueba que supone un cambio de nivel y un cambio en la pendiente de la tendencia deben interpretarse con cuidado. En primer lugar, la prueba detecta como punto de cambio estructural más probable. En primer lugar, la prueba detecta como punto de cambio estructural más probable  $t = 53$ . Con base en esto, se concluye que la serie tiene raíz unitaria con cambio estructural en dicho momento ya que  $-5,08 < -3,6869$ . Analizando la gráfica se puede evidenciar que anterior a dicho momento no se presentó un nivel mínimo del estadístico denotando de forma intuitiva que pudo haberse presentado efectivamente un cambio estructural.

## 5.2. Tasa de cambio

Para la tasa de cambio se van a realizar algunas pruebas para comprobar el mejor modelo para analizar estos datos. Para lo cual se va a tomar la tasa de cambio de Brasil (De reales a 1 dolar estadounidense) desde enero del año 2000 hasta marzo del 2020. En la siguiente imagen se puede mostrar gráficamente el comportamiento de esta variable:





**5.2.1. Realice la prueba ADF. Determine el modelo adecuado para estimar el test, justifique su respuesta.**

Para conocer si la serie tiene raíz unitaria, así como si es necesario añadir un componente de tendencia y/o un intercepto se puede usar la prueba Dickey-Fuller aumentada. A continuación se muestran los resultados de la prueba aplicados en el programa RStudio:

	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)	Prueba conjunta (phi2)	Raiz Unitaria y Tendencia (phi3)
Valor est. de prueba	-0,2367	1,5251	1,0483

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)	Prueba conjunta (phi2)	Raiz Unitaria y Tendencia(phi3)
5 %	-3,43	4,74	6,69
1 %	-3,99	6,22	8,43

En primer lugar, se propone una prueba ADF con dos componentes determinísticos: deriva y tendencia lineal. Al analizar el estadística tau3 calculado, se evidencia que la serie tiene al menos una raíz unitaria debido a que no se rechaza la hipótesis nula sea al 1 %, 5 % y 10 % de significancia, debido a que  $-0,2367 > -3,43$ .

Posteriormente, analizaremos el estadístico  $\phi_3$  calculado que corresponde a una prueba de significancia conjunta en donde la hipótesis nula establece que la tendencia y el coeficiente autorregresivo son simultáneamente iguales a cero. En este caso, se evidencia que no solo la serie tiene al menos una raíz unitaria como ya se mencionó, sino que no tiene tendencia lineal, debido a que  $1,0483 < 6,69$  y no se rechaza la hipótesis nula.

En concordancia con lo anterior, procederemos a analizar una prueba ADF únicamente con intercepto pues se evidenció que la serie no tiene tendencia determinística lineal.

	Prueba de Raíz Unitaria ( $\tau_2$ )	Raíz Unitaria y Sig. Intercepto ( $\phi_1$ )
Valor del estadístico de prueba	0,4454	1,3339

Nivel de significancia	Prueba de Raíz Unitaria ( $\tau_2$ )	Raíz Unitaria y Sig. Intercepto( $\phi_1$ )
5 %	-2,88	4,63
1 %	-3,46	6,53

El estadístico  $\tau_2$  estimado establece que la serie tiene al menos una raíz unitaria al no rechazarse la hipótesis nula, debido a que  $0,4454 > -2,88$ . Asimismo, se evidencia que la serie no tiene intercepto al analizar el estadístico  $\phi_1$  estimado, al rechazarse la hipótesis nula que la serie tiene raíz unitaria y no tiene intercepto, ya que  $1,3339 < 4,63$ .

Finalmente, en tanto para la serie no son significativos ni el intercepto ni la tendencia lineal, se hará la prueba ADF para una caminata aleatoria pura sin componentes determinísticos, que tiene los siguientes resultados.

	Prueba de Raíz Unitaria ( $\tau_1$ )
Valor del estadístico de prueba	1,6367

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)
5 %	-1,95
1 %	-2,58

En este caso, al analizar el estadístico tau1 calculado se evidencia que la serie sigue una caminata aleatoria, debido a que no se rechaza la hipótesis nula puesto que  $1,63 > -1,95$ . En consecuencia, la serie en nivel no es  $I(0)$ .

### 5.2.2. Realice la prueba ERS y la KPSS.

Ahora se van a realizar las pruebas complementarias Eliot, Rothenberg y Stock y KPSS. A continuación se presentan los resultados para la prueba KPSS con único el intercepto componente determinístico.

	Prueba de Raiz Unitaria
Valor del estadístico de prueba	1,6941

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)
5 %	0,463
1 %	0,739

Teniendo en cuenta la descripción general de la KPSS realizada en este mismo proceso con la serie del PIB desestacionalizado y trimestral de Brasil, los resultados de esta prueba nos permiten rechazar la hipótesis nula de que la serie es  $I(0)$  a un nivel de significancia del 95 %, ya que  $0,463 < 1,6941$ . Este resultado es consistente con lo observado en las pruebas ADF.

A continuación, se aplica la prueba ERS con intercepto únicamente, como modificación a la tipo ADF (DF-GLS), en la cual se obtuvieron los siguientes resultados:

	Prueba de Raiz Unitaria
Valor del estadístico de prueba	0,6327

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)
5 %	-1,94
1 %	-2,57

Dado que la prueba es de cola izquierda  $-1,94 < 0,6327$  no se rechaza la hipótesis nula de que la serie no tiene al menos una raíz unitaria. Bajo las conclusiones de las anteriores pruebas se puede evidenciar que la serie de la tasa de cambio nominal de Brasil no es integrada de orden 0.

**5.2.3. En un cuadro resuma, el rechazo u aceptación de la hipótesis nula de cada una de las pruebas.**

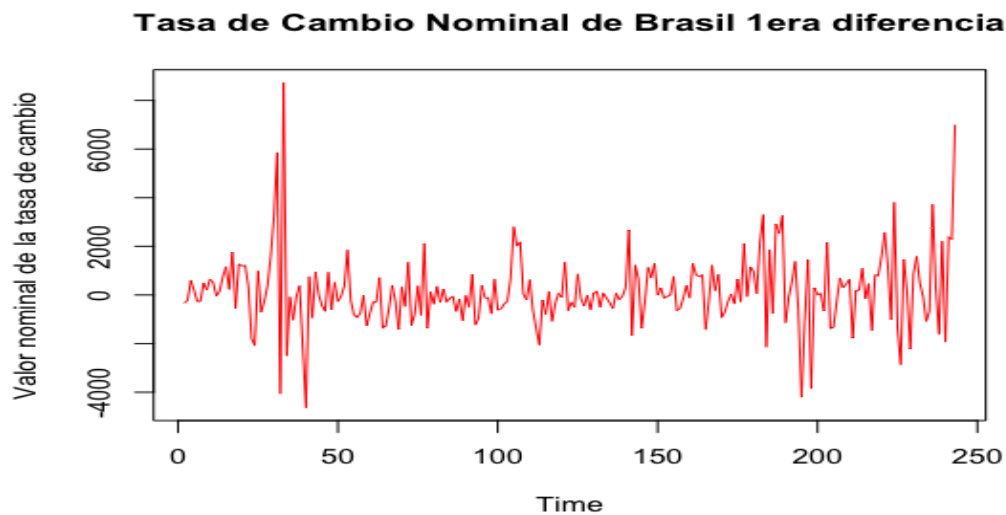
Prueba		1 %		5 %		Cola de prueba
		No rechazo	Rechazo	No rechazo	Rechazo	
Dickey-Fuller con tendencia y deriva	Con tendencia y deriva	X		X		Izquierda
	Solo con deriva	X		X		Derecha
	Sin componentes determinísticos	X		X		Derecha
Dickey-Fuller con deriva	Solo con deriva	X		X		Izquierda
	Sin componentes determinísticos	X		X		Derecha
Dickey-Fuller sin componentes		X		X		Izquierda
KPSS con Mu			X		X	Derecha
ERS con deriva		X		X		Izquierda

**5.2.4. De lo anterior, que puede concluir sobre el orden de integración de la serie.**

Al aplicar las diferentes pruebas de raíz unitaria sobre la serie en nivel, llegamos a la conclusión de que la serie tiene al menos una raíz unitaria. No obstante, es posible que la serie pueda tener otra raíz unitaria, es decir, que la serie en nivel sea  $I(2)$  lo cual de por sí ya es extraño en economía. Para determinar si la serie en nivel es  $I(1)$  o no, aplicaremos la prueba ADF a la primera diferencia de la serie en nivel, con objeto

de verificar si es estacionaria o no. Si no se rechaza la hipótesis nula, concluiremos que la serie en nivel es  $I(2)$ , mientras que si se rechaza la hipótesis nula diremos la serie en nivel es  $I(1)$ , es decir, que su primera diferencia es estacionaria.

La serie en su primera diferencia se ve de la siguiente manera:



La gráfica de la primera diferencia de la serie parece indicar que ésta es estacionaria y que por consiguiente la tasa de cambio nominal para Brasil es  $I(1)$ . En tanto la serie en nivel no tiene intercepto ni tendencia determinística, se espera que su primera diferencia tampoco incluya ningún componente determinístico. No obstante, si bien se debería aplicar una prueba ADF sin tendencia ni deriva, se hará también con intercepto para comparar los resultados. A continuación se presentan los valores de prueba del test ADF para la serie con su primera diferencia con intercepto como componente determinístico

	Prueba de Raiz Unitaria (tau2)	Raiz Unitaria y Sig. Intercepto (phi1)
Valor del estadístico de prueba	-8,963	40,2421

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau2)	Raiz Unitaria y Sig. Intercepto(phi1)
5 %	-2,88	4,63
1 %	-3,46	6,53

La prueba ADF con intercepto evidencia que la primera diferencia de la tasa de cambio es estacionaria, en tanto para el tau2 se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria debido a que  $-8,963 < -2,88$  a un nivel de confianza del 95 %. Paradójicamente, el intercepto también es significativo (el cual en éste caso representa la pendiente de la tendencia determinística para la serie en nivel, el cual debería ser igual a cero en teoría) al rechazarse la hipótesis nula para la prueba conjunta, debido a que  $40,24 > 4,63$ . Este resultado, debe tomarse con cautela porque al ser una prueba de significancia conjunta, la hipótesis alternativa indica que al menos uno de los dos coeficientes es diferente de cero (el término autorregresivo y/o el intercepto).

Finalmente, también se estima la prueba sin ningún componente determinístico, con los siguientes resultados:

	Prueba de Raiz Unitaria (tau1)
Valor del estadístico de prueba	-8,8431

Nivel de significancia	Prueba de Raiz Unitaria (tau3)
5 %	-1,95
1 %	-2,58

Nótese que se llega a la misma conclusión: la tasa de cambio en nivel es  $I(1)$  ya que su primera diferencia es estacionaria, lo cual se comprueba al rechazarse la hipótesis nula para (tau1) debido a que  $-8,8431 < -1,95$  al 95 % de confianza. De igual manera, al 99 % de confianza se llegaría a la misma conclusión sobre el orden de integración de la serie.

**5.2.5. Realice la prueba de raíz unitaria con cambio estructural Zivot y Andrews vista en clase. Interprete los resultados para cada serie.**

Como ya se mencionó anteriormente, la prueba Zivot Andrews es una generalización de la prueba Perron que mediante un procedimiento iterativo identifica el punto más probable en donde pudo ocurrir un cambio estructural. Tomando como base los resultados de la prueba ADF del primer apartado y apoyándonos en la gráfica del tipo de cambio, se hará la prueba ZA suponiendo un cambio de nivel en la serie a partir de determinado momento del tiempo. Posteriormente, a manera de comparación, se hará nuevamente la prueba suponiendo no solo un cambio de nivel sino también un cambio en la pendiente de la tendencia, pese a que los resultados de la ADF concluyeron que no había tendencia lineal.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba con intercept únicamente:

	Prueba ZA con intercepto
Valor del estadístico de prueba	-2,1533
Momento de potencial cambio estructural	$t = 58$

Nivel de significancia	Valor crítico con intercepto
5 %	-4,8
1 %	-5,34

Gráficamente se puede observar el test de la siguiente manera.

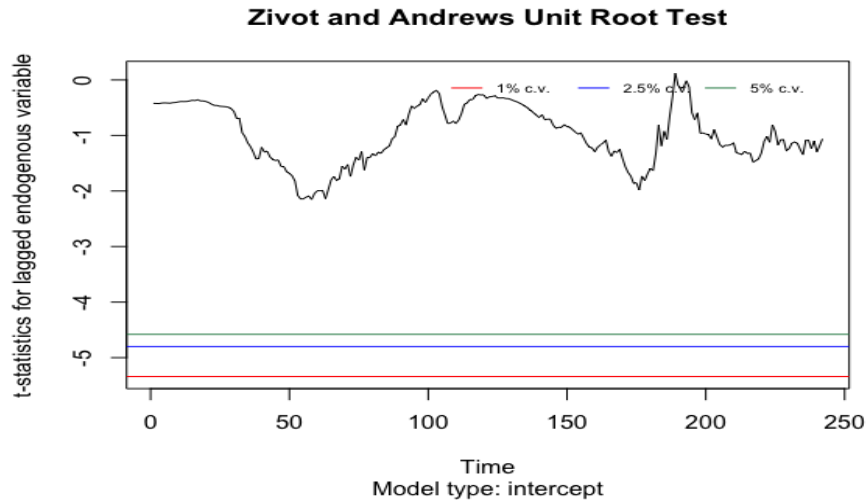


Figura 5: ZA nivel de Significancia

De acuerdo con la primera prueba, hubo un cambio de nivel en la serie significativo en el momento  $t = 58$  que corresponde al mes de octubre del año 2004. En consecuencia, a partir de los resultados de la prueba puede concluirse que la tasa de cambio nominal para el periodo de estudio tiene raíz unitaria con un cambio de nivel más probable en el mes de octubre de 2004. Esto se debe a que no se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria con cambio estructural en tanto  $-2,1533 > -4,8$ .

	Prueba ZA con intercepto
Valor del estadístico de prueba	$-2,9756$
Momento de potencial cambio estructural	$t = 111$

Nivel de significancia	Valor crítico con intercepto
5 %	$-5,08$
1 %	$-5,57$

Gráficamente se puede observar el test de la siguiente manera.



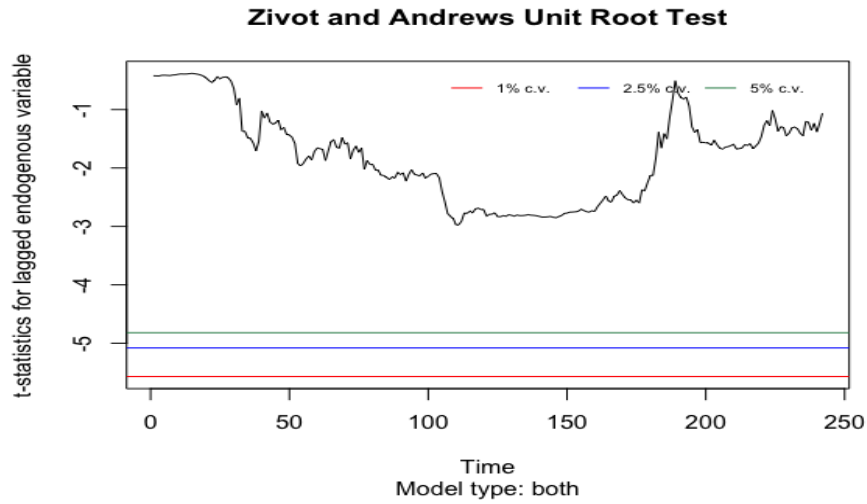


Figura 6: ZA nivel de Significancia

Como se mencionó antes los resultados para la prueba que supone un cambio de nivel y un cambio en la pendiente de la tendencia deben interpretarse con cuidado. La prueba detecta como punto de cambio estructural más probable  $t = 111$ , es decir, el mes de marzo de 2009. Con base en esto, se concluye que la serie tiene raíz unitaria con cambio estructural en marzo de 2009, en tanto  $-2,9756 > -5,08$ . Sin embargo, si se analiza detalladamente la gráfica se detalla que si bien cuando  $t=111$  la prueba detecta el valor mínimo para el estadístico, éste punto no difiere mucho de otros valores de la serie más a menos hasta el periodo  $t = 150$ , indicando posiblemente que en marzo de 2009 pudo no ocurrir un cambio estructural significativo. La diferencia de éstos resultados respecto a los obtenidos en el literal anterior, puede deberse a la inclusión de un cambio en la pendiente de la tendencia, pese a que de acuerdo a la ADF la serie no tiene tendencia lineal.

**6. PEI profesor le asignará una economía a analizar a cada grupo.**

**Cada grupo debe realizar los siguientes procedimientos y con sus respectivas justificaciones/explicaciones.**

**6.1. Para la tasa de desempleo y el PIB real original realice la prueba de raíz unitaria HEGY. Interprete los resultados.**

**6.1.1. Tasa de Desempleo**

Inicialmente, es pertinente ilustrar el comportamiento original de la serie mensual de desempleo entre 2002 y febrero de 2016 en Brasil.

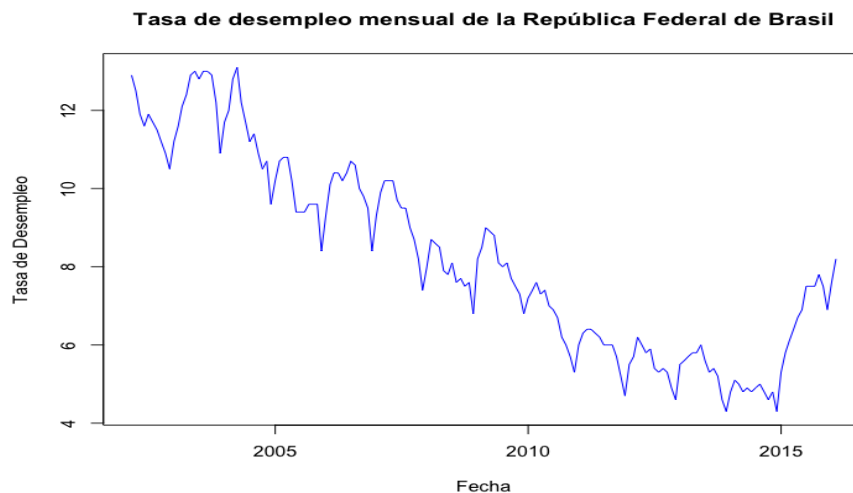


Figura 7: Tasa de desempleo en Brasil

Inicialmente se realizará un testeo de la serie sobre la ADF para determinar que componentes determinísticos debería incluir la serie al momento de aplicar la prueba HEGY. Los resultados de la prueba más general (tendencia e intercepto) nos permiten concluir que la serie no tiene tendencia lineal pero si tiene al menos una raíz unitaria. Al aplicar la prueba con deriva únicamente, notamos que esta no es significativa, sin embargo el resultado sobre la raíz unitaria únicamente es consistente con la prueba general. La última prueba nos permite concluir que la serie presenta un comportamiento de caminata aleatoria sin deriva que tiene al menos una raíz unitaria. Sin embargo, ya que para que la prueba HEGY se pueda realizar es nece-

sario incorporar un componente determinístico se decidió añadir la deriva. A continuación se presentan los resultados obtenidos:

Parámetros	Estadístico	p-value	significancia
$t_1$	-1,426	0,4879	
$t_2$	-3,8623	0	***
$F_3 : 4$	10,7624	0	***
$F_5 : 6$	7,6405	$6e - 04$	***
$F_7 : 8$	17,1205	0	***
$F_9 : 10$	12,2504	0	***
$F_{11} : 12$	15,2946	0	***
$F_2 : 12$	76,42	0	***
$F_1 : 12$	72,8218	0	***
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1			

A partir de estos resultados podemos evidenciar que en primer momento que el p-value del coeficiente estimado  $t_1$  nos indica que no se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria no estacional en la serie. A su vez los p-value de los parámetros siguientes nos indican que a un nivel de confianza del 95 % no se evidencia presencia de raíz unitaria para los periodos bimensuales, de cuatro meses, trimestrales, anuales y bianuales, rechazando la hipótesis nula de raíz unitaria para cada nivel de frecuencia.

Por último, podemos afirmar que no hay raíz estacional de ninguna frecuencia ya que a un nivel de significancia del 95 % se rechaza la hipótesis nula que nos indica raíces unitarias para todas las frecuencias de forma simultanea. En adición a lo anterior, se puede concluir al mismo nivel de significancia que no hay raíz unitaria no estacional y estacional para todas las frecuencias ya que se rechaza la hipótesis nula de que hay al menos una raíz unitaria de caracter no estacional y estacional.

## 6.2. Índice de Actividad Económica del Banco Central de Brasil

La serie para la cual se realizará la prueba HEGY corresponde al Índice de Actividad Económica del Banco Central de Brasil para el periodo de enero de 2003 a febrero de 2020. Se tuvo que utilizar ésta serie, en la medida en que no fue posible conseguir una serie para el PIB de Brasil a precios constantes con frecuencia trimestral y sin desestacionalizar. De manera que se utilizó éste indicador pues se espera que guarde correlación con el comportamiento del producto.

Esta variable presenta el siguiente comportamiento:

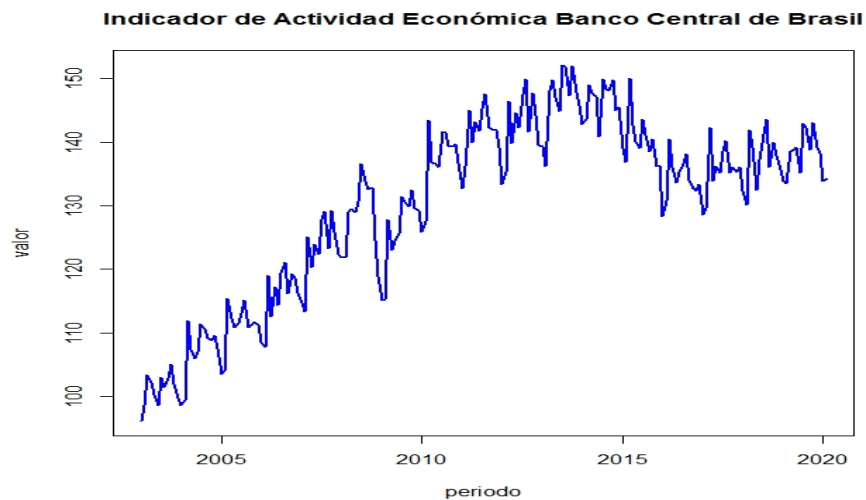


Figura 8: Índice de Actividad Económica de Brasil

En primer lugar, se estimará una prueba Dickey-Fuller Aumentada para determinar qué términos determinísticos debería incluir la serie en la prueba HEGY. Al hacer la prueba con intercepto y tendencia, se evidencia que la serie no tiene una tendencia determinística lineal, pese a que tiene al menos una raíz unitaria. Posteriormente, se aplica la prueba únicamente con intercepto y se evidencia que éste no es significativo pese a que la serie nuevamente tiene al menos una raíz unitaria. Finalmente, se aplica la serie para una caminata aleatoria pura para la cual se evidencia que hay al menos una raíz unitaria.

En segundo lugar, se aplica la prueba HEGY con intercepto debido a que en los argumentos debe incluirse

al menos un términos determinístico. A continuación se presentan los resultados:

Parámetros	Estadístico	p-value	significancia
$t_1$	-4,0865	$4e - 04$	***
$t_2$	3,8628	0	***
$F_3 : 4$	14,7006	0	***
$F_5 : 6$	11,9733	0	***
$F_7 : 8$	2,9708	0,0601	.
$F_9 : 10$	11,7142	0	***
$F_{11} : 12$	5,3783	0,0058	**
$F_2 : 12$	17,9472	0	***
$F_1 : 12$	22,5568	0	***
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1			

Dado los resultados observamos que el p-value del coeficiente estimado  $t_1$  indica que la serie no tiene raíz unitaria no estacional, en tanto se rechaza la hipótesis nula a más del 95 % de confianza. A su vez, los p-values de los coeficientes  $t_2$ ,  $F_3 : 4$ ,  $F_5 : 6$ ,  $F_7 : 8$  y  $F_{11} : 12$  indican que hay la suficiente evidencia estadística para afirmar que no hay presencia de una raíz unitaria bimensual, para periodo de cuatro meses, trimestral, bianual y anual, respectivamente. Esto se debe a que se rechaza la hipótesis nula que sugiere la presencia de raíces para las frecuencias respectivas.

En adición a lo anterior, el p-value del coeficiente  $F_2 : 12$  indica que no hay raíz unitaria estacional de ninguna frecuencia (al menos una no tiene raíz unitaria). Esto se debe a que se rechaza la hipótesis nula a más del 95 % de confianza, la cual sugiere raíces unitarias para todas las frecuencias simultáneamente. Por último se puede concluir que el p-value del coeficiente  $F_1 : 12$  indica que no hay raíz unitaria no estacional y estacional para todas las frecuencias, en tanto se rechaza la hipótesis nula a más del 95 % de confianza, la cual sugiere que hay al menos una raíz unitaria de carácter no estacional y estacional.

## 7. Referencias

Lütkepohl, H., Krätzig, M., and Phillips, P. C. (2004). Applied time series econometrics. Cambridge university press.

Enders, W. (2004). Applied Econometric Times Series. Wiley. Cap, 4.

Peña, D. (2010). Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Madrid-España.