Bonos

José Ignacio López
Departamento de Economía

2021
Macroeconomía Financiera
ECON 4666

Universidad de los Andes

Definiciones bono cero cupón

- Un bono cero cupón es un bono que no paga intereses ante del vencimiento y se redime en su totalidad cuando madura

- Sea $P_t^{(n)}$ el precio de un bono en el períodо t con una madurez n.

- Sea $p_t^{(n)} = ln\left(P_t^{(n)}\right)$ el logaritmo natural del precio

- Si $P_t^{(n)}$=0.92 entonces $p_t^{(n)} = -0{,}08$, lo que significa que el precio actual tiene un descuento de 8 % frente al precio facial

- En los mercados usualmente los bonos están denominados en unidades de 100, o 1000, en la literatura la convención es asumir un precio unitario $P_t^{(0)} = 1$

Bonos con cupón

- Los bonos de larga madurez usualmente pagan cupones semestrales
- Cualquier bono con cupones se puede descomponer en bonos cero cupón

Tasas de descuento (*yield*)

- La tasa de descuento (yield) es la tasa constante (conocida) que justifica el precio de un bono en cualquier momento del tiempo.

- El yield es la tasa de retorno de un bono que se mantiene hasta el vencimiento

- La tasa de descuento de un bono cero cupón se define como:

$$P_t^{(n)} = \frac{1}{\left[Y_t^{(n)}\right]^n}$$

- En logaritmos, la tasa de descuento es:

$$y_t^{(n)} = -\frac{1}{n} p_t^{(n)}$$

- Si el precio de un bono con madurez de 5 años es -0.2 (20 % de descuento), la tasa es descuento es 0.04 (4 %)

Factor de retornos de un bono por un período

- Al comprar un bono de madurez N y venderlo el siguiente período tenemos el siguiente retorno:

$$RP_{t+1}^{(n)} = \frac{P_{t+1}^{(n-1)}}{P_t^{(n)}}$$

- En logaritmos:

$$rp_{t+1}^{(n)} = p_{t+1}^{(n-1)} - p_t^{(n)}$$

Tasas Forward

- Una tasa forward (futura) es una tasa que se pacta en el período t de un bono en un período futuro
- Las tasas futura se puede construir usando bonos de cero cupón. Ejemplo:
  - comprar un bono de madurez n y vender una fracción a de un bono $n+1$
  - supongamos que la operación es tal que $a = \frac{P_t^{(n)}}{P_t^{(n+1)}}$ de tal forma que el costo de la operación hoy es cero:

$$P_t^{(n)} - aP_t^{(n+1)} = 0$$

  - El flujo de caja en el periodo $n+1$ es: $-\frac{P_t^{(n)}}{P_t^{(n+1)}}$
  - Esto es equivalente a pedir un préstamo en n y pagarlo en $n+1$ (a una tasa igual a a)

Tasas Forward (II)

- La tasa futura es por lo tanto:

$$F_t^{N\to N+1} = \frac{P_t^{(n)}}{P_t^{(n+1)}}$$

- En logaritmos:

$$f_t^{N\to N+1} = p_t^{(n)} - p_t^{(n+1)}$$

- En notación de la fecha inicial:

$$f_t^{N} = p_t^{(n)} - p_t^{(n+1)}$$

Precios de bonos y tasas futuras

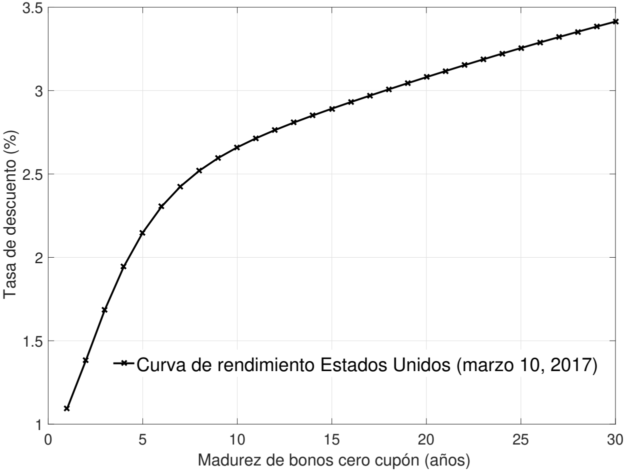
- El precio de un bono siempre se puede descomponer en una secuencia de tasas futuras:

$$p_t^{(n)} = \left[p_t^{(n)} - p_t^{(n-1)}\right] + \left[p_t^{(n-1)} - p_t^{(n-2)}\right] + \ldots + \left[p_t^{(2)} - p_t^{(1)}\right] + p_t^{(1)}$$

$$p_t^{(n)} = -f_t^{(n-1)} - f_t^{(n-2)} + \ldots + -f_t^{(1)} - y_t^{(1)}$$

La curva de rendimientos

- La curva de rendimientos es la relación entre diferentes madurez de bonos (cero cupón) y sus rendimientos.
- [video curva]



La hipótesis de expectativas (I)

- La teoría de hipótesis de expectativas dice que:
  - El rendimiento de un bono de madurez N es el promedio de los rendimientos esperados de corto plazo en el futuro
  - La tasa futura (forward) es igual a la tasa esperada del mercado spot en el futuro
  - El retorno esperado de tenencia de bonos es igual para cualquier madurez
- Esa teoría supone que hay competencia en el mercado de bonos, no arbitraje y la prima de riesgo es cero

La hipótesis de expectativas (II)

- Una inversión al largo plazo se puede hace comprando un bono de largo plazo (digamos N=5), o invirtiendo cada período en tasas de corto plazo
  - Inversión largo plazo: $-p_t^{(n)}$
  - Inversión corto plazo: $E_t\left[y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + y_{t+n-1}^{(1)}\right]$
  - Si los dos dan igual: $-p_t^{(n)} = E_t\left[y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + y_{t+n-1}^{(1)}\right]$
  - Dividimos por N:
    $\frac{-p_t^{(n)}}{N} = y_t^{(n)} = \frac{1}{N} E_t\left[y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + y_{t+n-1}^{(1)}\right]$

La hipótesis de expectativas (III)

- El rendimiento de un bono de madurez N es el promedio de los rendimientos esperados de corto plazo en el futuro:

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} E_t \left[y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + \ldots + y_{t+n-1}^{(1)} \right]$$

- La tasa futura (forward) es igual a la tasa esperada del mercado spot en el futuro

$$f_t^{(n)} = E_t \left[y_{t+n}^{(1)} \right]$$

- El retorno esperado de tenencia de bonos es igual para cualquier madurez

$$E_t \left[rp_{t+1}^{n} \right] = y_t^{(1)}$$

- Estas tres definiciones son equivalentes

Interpretando la hipótesis de expectativas

- Si el rendimiento de un bono de madurez N es mayor que el rendimiento de un bono de menor plazo, digamos, de un período, lo que la hipótesis de expectativas nos dice que es la tasa futuras de corto plazo van a subir

- En ese caso expectativas de aumentos futuros en las tasas deberían generar una curva de rendimiento con pendiente positiva

- Y, obviamente, expectativa de menores tasas, una pendiente negativa es el promedio de los rendimientos esperados de corto plazo en el futuro:

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{N} E_t \left[y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+3}^{(1)} + \ldots + y_{t+n-1}^{(1)} \right]$$

La hipótesis de expectativas y la prima de riesgo

- La hipótesis de expectativas ignora las primas de riesgo (PR) de tenencia de bonos:

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{N} E_t \left[y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+2}^{(1)} + y_{t+n-1}^{(1)} \right] + PR$$

- ¿Un bono de largo plazo debería tener una prima de riesgo positiva o negativa?
  - Riesgo de tasas
  - Riesgo inflación
- La curva de rendimientos real debería tener pendiente negativa

Riesgo de tasas y riesgo de inflación

- Si queremos invertir en un horizonte largo de plazo es riesgoso invertir en corto plazo y hacer una refinanciación (roll over) de la inversión periodo a periodo, si las tasas de interés futuras fluctúan
- Si hay riesgo de inflación, la inversión en un bono de largo plazo es riesgosa, por tanto en ese caso es menos riesgoso tener bonos de corto plazo cuyos precios irán recogiendo la inflación.
- Las tasas de interés reales deberían tener una curva de pendiente negativa (sin considerar choques de liquidación de la inversión)
- De forma más general de que depende el riesgo de los bonos?

La hipótesis de expectativas en los datos

- La hipótesis de expectativas se puede contrastar con los datos en diferentes formas.

- Una predicción importante es que una curva de pendiente positiva debería pronosticar, en promedio, un aumento de las tasas de interés de corto plazo

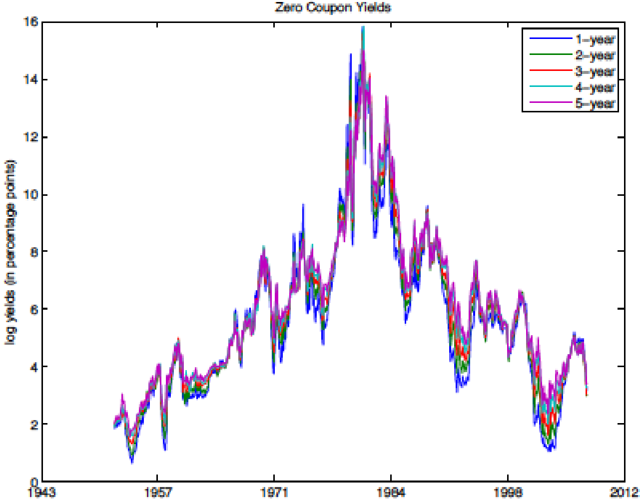
- Otra predicción central de la hipótesis de expectativas es que los excesos de retorno, es decir el retorno de tener un bono de madurez n por un año en exceso de la tasa de descuento de un bono de un año, debería ser impredecible:

$$rpx_{t+1}^{(n)} = rp_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)}$$

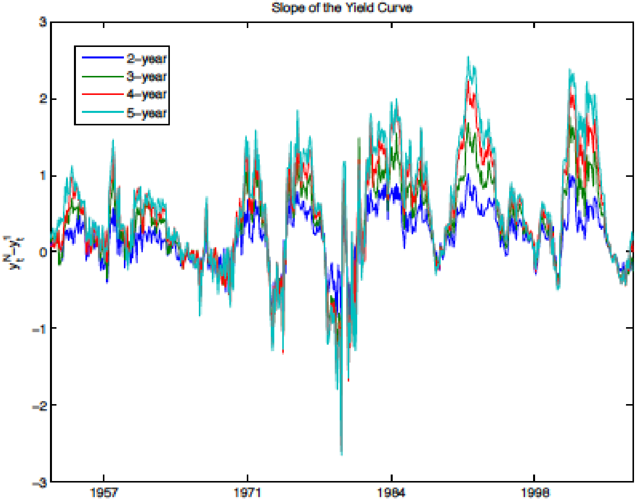
La curva de rendimiento en Estados Unidos

- Datos para los Estados Unidos
  - Federal Reserve H.15 release /U.S. Treasury
    - Constant Maturity Treasury (CMT)
    - No cero cupón
  - Gurkaynak, Sack, Wright (JME, 2007)
    - Smoothed zero-coupon Treasury yields
    - Actualizado diariamente en:
    - https://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2006/200628/200628abs.html
  - Fama-Bliss (AER, 1987)
    - Unsmoothed zero-coupon Treasury yields
    - Fuente: CRSP. Yields 1-5 años

La curva de rendimiento en Estados Unidos (Fama-Bliss)



La curva de rendimiento en Estados Unidos (II)



Retornos, tasa de descuento y diferencia forward-spot

- La diferencia entre la tasa futura de un año y la tasa de descuento de un año se puede escribir como:

$$f_t^{(1)} - y_t^{(1)} = p_t^{(1)} - p_t^{(2)} + p_t^{(1)}$$

$$f_t^{(1)} - y_t^{(1)} = p_{t+1}^{(1)} + p_t^{(1)} - p_t^{(2)} + p_t^{(1)} - p_{t+1}^{(1)}$$

$$f_t^{(1)} - y_t^{(1)} = \left[p_{t+1}^{(1)} - p_t^{(2)}\right] + p_t^{(1)} + \left[p_t^{(1)} - p_{t+1}^{(1)}\right]$$

$$f_t^{(1)} - y_t^{(1)} = \left(r_{t+1}^{(2)} - y_t^{(1)}\right) + \left(y_{t+1}^{(1)} - y_t^{(1)}\right)$$

- De acuerdo a la hipótesis de expectativas:

$$r_{t+1}^{(2)} = y_t^{(1)}$$

Regresiones de Fama-Bliss (I)

Table: **Retornos bonos diferentes madurez**

$$rp_{t+1}^{(n)} = a + b\left(f_t^{(n)} - y_t^{(1)}\right) + \varepsilon_{t+1}$$

n	b	$\sigma(b)$	R^2
2 years	0.83	0.27	0.11
3 years	1.14	0.35	0.13
4 years	1.38	0.43	0.15
5 years	1.05	0.49	0.07

Fuente: Fama-Bliss. (Cochrane). En esta regresión el coeficiente debería ser cero. Por el contrario, el forward-spot spread pronostica uno a uno retornos de bonos.

Regresiones de Fama-Bliss (II)

Table: **Retornos bonos diferentes madurez**

$$y_{t+n-1}^{(1)} - y_t^{(1)} = a + b\left(f_t^{(n)} - y_t^{(1)}\right) + \varepsilon_{t+1}$$

n	b	$\sigma(b)$	R^2
2 years	0.17	0.27	0.01
3 years	0.53	0.33	0.05
4 years	0.84	0.26	0.14
5 years	0.92	0.17	0.17

Fuente: Fama-Bliss. (Cochrane). En esta regresión el coeficiente debería ser uno.

Modelos Factoriales

- Un primer modelos de tasas de descuento consistente en representar las tasas a diferentes plazos en función de factores estadísticos derivados de las mismas tasas:

$$\begin{bmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \\ y_t^{(3)} \\ y_t^{(4)} \\ y_t^{(5)} \end{bmatrix} = y_t = Ax_t + \varepsilon_t$$

- Donde A es una matriz de coeficientes (loadings) y x_t es un vector de factores

- Podemos hacer una descomposición factorial usando las tasas para encontrar los factores y los coeficientes que maximizan el poder explicativo de las tasas observadas

Descomposición de eigenvalores y eigenvectores

- Tomemos la matriz con las tasas de interés a diferentes plazos para un período de tiempo:

$$y_{k\times 5} = \begin{bmatrix} y_{t-k}^{(1)} & y_{t-k}^{(2)} & y_{t-k}^{(3)} & y_{t-k}^{(4)} & y_{t-k}^{(5)} \\ . & .. & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{t-2}^{(1)} & y_{t-2}^{(2)} & y_{t-2}^{(3)} & y_{t-2}^{(4)} & y_{t-2}^{(5)} \\ y_{t-1}^{(1)} & y_{t-1}^{(2)} & y_{t-1}^{(3)} & y_{t-1}^{(4)} & y_{t-1}^{(5)} \\ y_{t}^{(1)} & y_{t}^{(2)} & y_{t}^{(3)} & y_{t}^{(4)} & y_{t}^{(5)} \end{bmatrix}$$

- Sea sigma la matriz de covarianza de las tasas de descuento:

$$\sum = cov(y)$$

Modelo Factorial para Estados Unidos

- Podemos descomponer sigma como la multiplicación de la matriz Q y la matriz Λ donde Q son eigenvectores y Λ es una matriz diagonal con los eigenvalores

$$\sum = Q\Lambda Q' = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow & q_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & q_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & q_3 & \rightarrow \\ \leftarrow & q_4 & \rightarrow \\ \leftarrow & q_5 & \rightarrow \end{bmatrix}$$

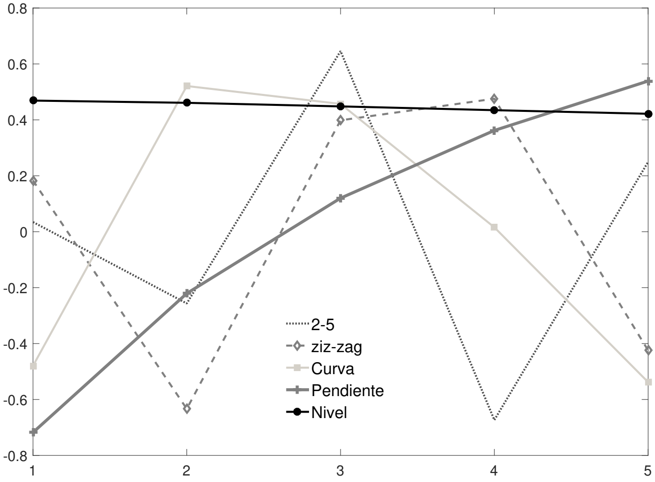
- $QQ' = Q'Q = I$
- Podemos construir factores $x_t = yQ$, tal que $cov\left(x_t' x_t\right) = Q' \sum Q = \Lambda$. Los factores son ortogonales.
- Podemos construir $y = x_t Q' = yQQ'$

Matrices de resultados

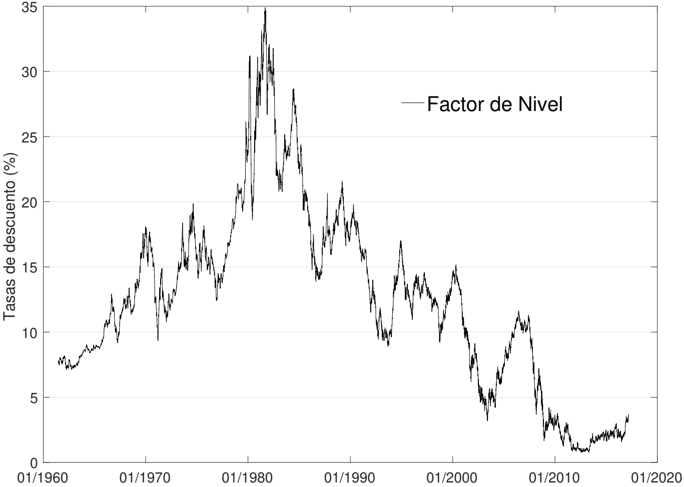
$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}0346 & 0{,}1829 & -0{,}4797 & -0{,}7179 & 0{,}4689 \\ -0{,}2566 & -0{,}6336 & 0{,}5210 & -0{,}2208 & 0{,}4610 \\ 0{,}6459 & 0{,}3985 & 0{,}4570 & 0{,}1200 & 0{,}4482 \\ -0{,}6734 & 0{,}4756 & 0{,}0157 & 0{,}3621 & 0{,}4346 \\ 0{,}2496 & -0{,}4244 & -0{,}5379 & 0{,}5388 & 0{,}4217 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0{,}0016 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0157 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5896 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}9722 \end{bmatrix}$$

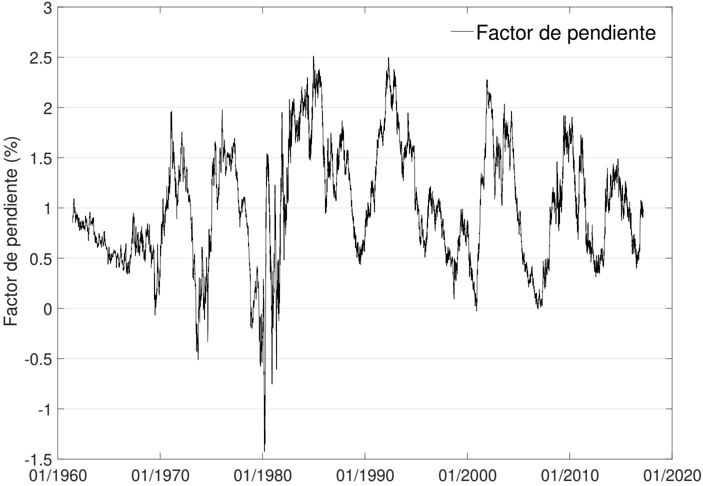
Coeficientes (loadings)



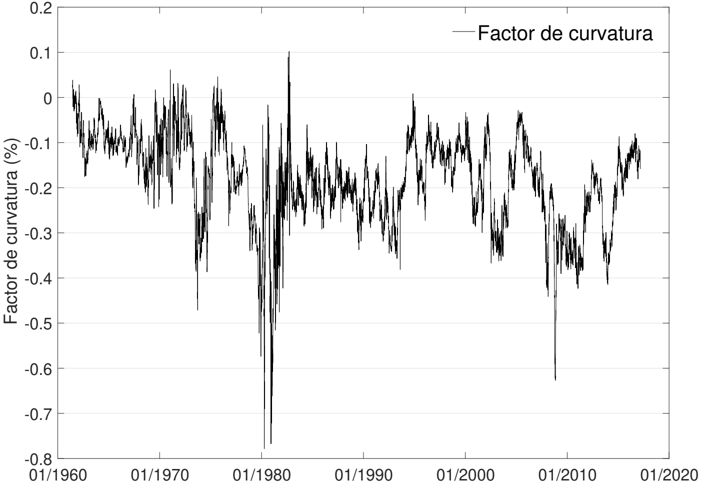
Factor de nivel



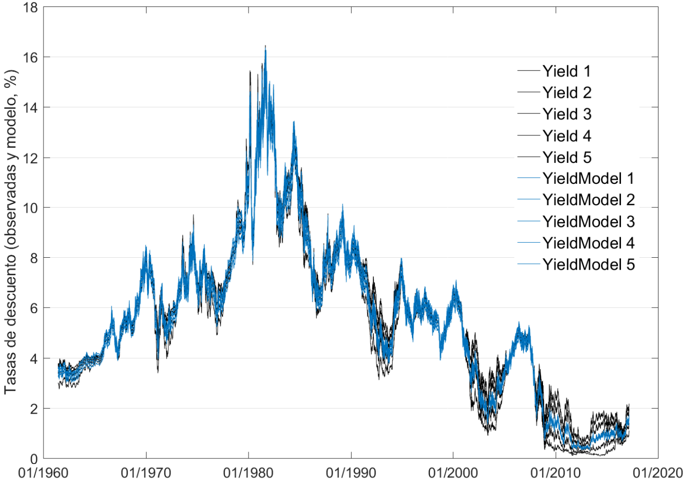
Factor de pendiente



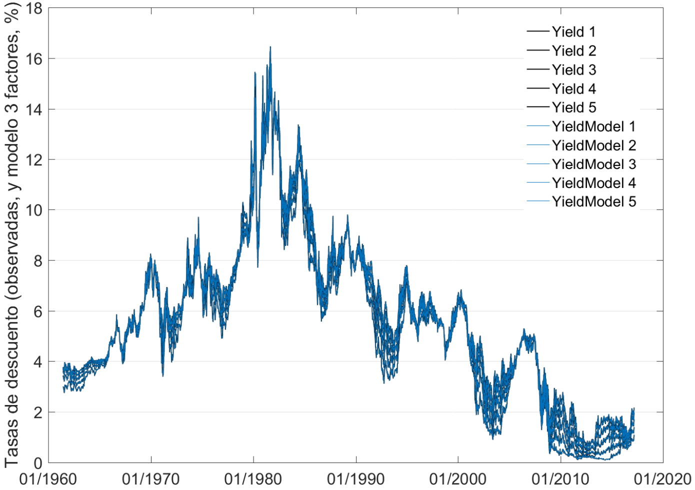
Factor de curvatura



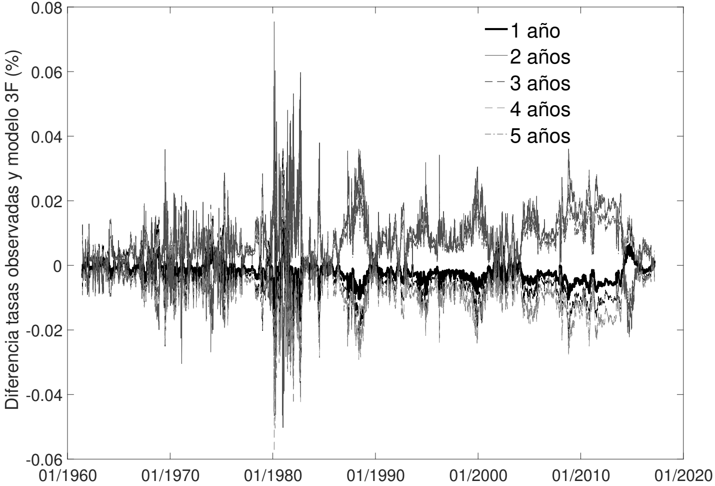
Tasas de descuento observadas y modelo (1 factor)



Tasas de descuento observadas y modelo (3 factores)



Tasas de descuento observadas y modelo (3 factores)



Pronóstico excesos de retorno Cochrane-Piazessi (2005)

- Cochrane-Piazessi (2005) estiman los excesos de retorno en función de combinaciones lineales de tasas forward:

$$rxp_{t+1}^{(n)} = rp_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)} = \alpha + \beta \left(\sum_{i=0}^{5} f_t^{(i)} \right) + \varepsilon_{t+1}$$

- Alternativamente se puede generar un «factor de riesgo» estimado en 2 etapas: primero se proyectan las tasas forward en el retorno promedio: $\overline{rxp_{t+1}^{(n)}} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{5} rxp_{t+1}^{(n)}$

$$\overline{rxp_{t+1}^{(n)}} = \alpha + \gamma \left(\sum_{i=0}^{5} f_t^{(i)} \right) + \overline{\varepsilon_{t+1}} = \gamma\acute{}\text{f\_t} + \overline{\varepsilon_{t+1}}$$

- En la segunda etapa se proyecta el factor estimado en los retornos de cada bono:

$$rxp_{t+1}^{(n)} = rp_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)} = b(\gamma\acute{}\text{f\_t}) + \varepsilon_{t+1}$$

- Relativo a Fama-Bliss el poder de pronostico mejora hasta R^2 cercanos a 0.4

Cochrane-Piazessi (2005)

Table: **Excesos de retorno bonos diferentes madurez**

$$rxp_{t+1}^{(n)} = b(\gamma\acute{}\text{f\_t}) + \varepsilon_{t+1}$$

n	α	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	R^2
2 years	-1.62	-0.98	0.59	1.21	0.28	-0.88	0.32
3 years	-2.67	-1.78	0.53	3.07	0.38	-1.85	0.34
4 years	-3.79	-2.57	0.86	3.60	1.28	-2.72	0.37
5 years	-4.88	-3.30	1.24	4.10	1.25	-2.83	0.34

Fuente: Cochrane-Piazessi(2005).

Cochrane-Piazessi (2005) (II)

Table: **Excesos de retorno bonos diferentes madurez**

$$\overline{rxp^{(n)}_{t+1}} = \alpha + \gamma_1 f^{(1)}_t + \gamma_2 f^{(2)}_t + \gamma_3 f^{(3)}_t + \gamma_4 f^{(4)}_t + \gamma_5 f^{(5)}_t + \bar{\varepsilon}_{t+1}$$

α	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	R^2
-3.24	-2.13	0.80	3.00	0.80	-2.07	0.35

Fuente: Cochrane-Piazessi(2005).

Cochrane-Piazessi (2005)(III)

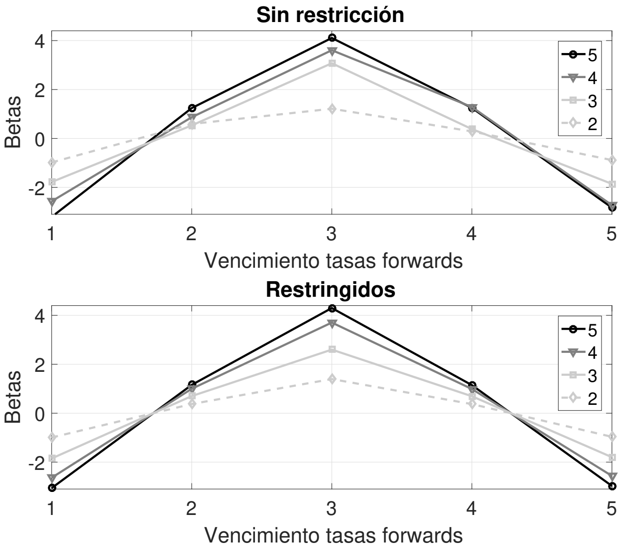
Table: **Excesos de retorno bonos diferentes madurez**

$$rxp_{t+1}^{(n)} = b(\gamma\'\text{f\_t}) + \varepsilon_{t+1}$$

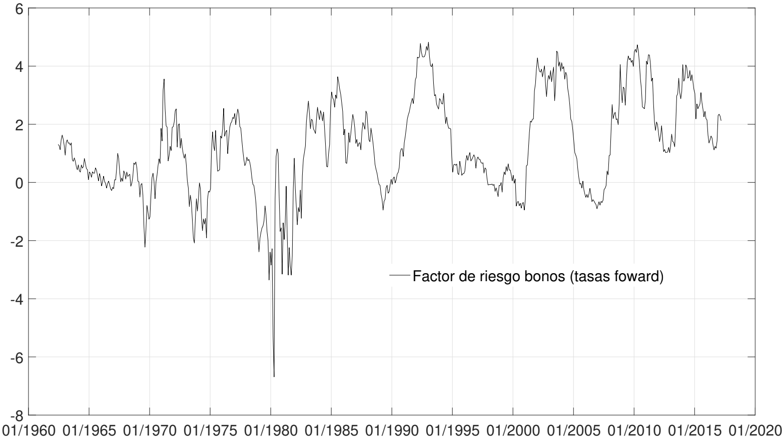
n	b	R^2
2 years	0.46	0.31
3 years	0.86	0.33
4 years	1.23	0.37
5 years	1.43	0.34

Fuente: Cálculos propios basado en Cochrane-Piazessi(2005). Datos fin de mes curva cero cupón de Estados Unidos junio-1961 hasta marzo 2017

Coeficientes regressiones



Factor Cochrane-Piazessi



Cochrane-Piazessi (2005) (II)

Table: **Excesos promedio de retornos**

$$\overline{rxp_{t+1}^{(n)}} = \alpha + \gamma_1 f_t^{(1)} + \gamma_2 f_t^{(2)} + \gamma_3 f_t^{(3)} + \gamma_4 f_t^{(4)} + \gamma_5 f_t^{(5)} + \bar{\varepsilon}_{t+1}$$

α	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	R^2
-0.41	-1.04	-0.01	-2.66	5.17	-1.56	0.36

Fuente: Cálculos propios basado en Cochrane-Piazessi(2005). Datos fin de mes curva cero cupón de Estados Unidos junio-1961 hasta marzo 2017

Factores y excesos de retorno

Table: **Excesos promedio de retornos con base en factores (nivel, pendiente, curva)**

$$\overline{rxp_{t+1}^{(n)}} = \alpha + \lambda_1 l_t + \lambda_2 s_t + \lambda_3 c_t + \bar{\varepsilon}_{t+1}$$

α	λ_1	λ_2	λ_3	R^2
-2.83	0.11	2.77	5.87	0.26

Fuente: Cochrane-Piazessi(2005).

Exceso de retorno 1964-2017

Table: **Excesos de retorno bonos diferentes madurez**

$$rxp_{t+1}^{(n)} = b(\gamma' \text{f\_t}) + \varepsilon_{t+1}$$

n	α	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	R^2
2 years	-0.81	-1.09	2.81	-3.91	2.62	-0.29	0.13
3 years	-1.44	-2.16	5.66	-8.71	6.55	-1.11	0.15
4 years	-2.10	-3.18	8.60	-14.36	11.35	-2.30	0.17
5 years	-2.83	-4.17	11.50	-19.92	16.15	-3.21	0.19

Fuente: Cálculos propios. Datos fin de mes curva cero cupón de Estados Unidos junio-1961 hasta marzo 2017

Excesos retorno promedio 1964-2017

Table: **Excesos de retorno bonos diferentes madurez**

$$\overline{rxp_{t+1}^{(n)}} = \alpha + \gamma_1 f_t^{(1)} + \gamma_2 f_t^{(2)} + \gamma_3 f_t^{(3)} + \gamma_4 f_t^{(4)} + \gamma_5 f_t^{(5)} + \bar{\varepsilon}_{t+1}$$

α	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	R^2
-1.43	-2.12	5.71	-9.38	7.37	-1.38	0.17

Fuente: Cálculos propios. Datos fin de mes curva cero cupón de Estados Unidos junio-1961 hasta marzo 2017

Cochrane-Piazessi (2005)(III)

Table: **Excesos de retorno bonos diferentes madurez**

$$rxp_{t+1}^{(n)} = b(\gamma\acute{}\text{f\_t}) + \varepsilon_{t+1}$$

n	b	R^2
2 years	0.28	0.10
3 years	0.52	0.11
4 years	0.74	0.11
5 years	0.93	0.12

Fuente: Cálculos propios. Datos fin de mes curva cero cupón de Estados Unidos junio-1961 hasta marzo 2017

Factores y excesos de retorno 1964-2017

Table: **Excesos promedio de retornos con base en factores (nivel, pendiente, curva)**

$$\overline{rxp^{(n)}_{t+1}} = \alpha + \lambda_1 l_t + \lambda_2 s_t + \lambda_3 c_t + \bar{\varepsilon}_{t+1}$$

α	λ_1	λ_2	λ_3	R^2
-0.16	0.25	1.84	0.91	0.15

Fuente: Cálculos propios. Datos fin de mes curva cero cupón de Estados Unidos junio-1961 hasta marzo 2017