在线阅读！！机器学习数学精华：高等数学

原创 机器学习初学者 机器学习初学者 2019-11-01 19:31

收录于合集
#机器学习的数学基础（在线阅读） 5个

机器学习，需要一定的数学基础，需要掌握的数学基础知识特别多，如果从头到尾开始学，估计大部分人来不及，我建议先学习最基础的数学知识，基础知识可以分为**高等数学、线性代数、概率论与数理统计**三部分，我整理了相关数学基础资料：

源文件下载：

https://github.com/fengdu78/Data-Science-Notes/tree/master/0.math

内容简介

一、斯坦福大学CS229数学基础

这是斯坦福大学 CS 229 机器学习课程的基础材料，是斯坦福各大人工智能课程的数学基础，对人工智能课程做了优化，强烈推荐！！

我们对原始教程进行了翻译，翻译版本做成了在线阅读版本。

（点击查看：1.**线性代数**，2.**概率论**）

二、国内大学的数学基础教材精华

这个是我考研考博时候整理的中文教材的资料，分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分，我把和机器学习相关的数学知识进行了整理，进行公布。

本文是高等数学部分，建议收藏慢慢看。

高等数学

1.导数定义：

导数和微分的概念

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ （1）

或者：

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ （2）

2.左右导数导数的几何意义和物理意义

函数$f(x)$在x_0处的左、右导数分别定义为：

左导数：$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},(x=x_0+\Delta x)$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3.函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数$f(x)$在x_0处可微$\Leftrightarrow f(x)$在x_0处可导

Th2: 若函数在点x_0处可导，则$y=f(x)$在点x_0处连续，反之则不成立。即函数连续不一定可导。

Th3: $f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

4.平面曲线的切线和法线

切线方程 : $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0$

5.四则运算法则

设函数$u=u(x)$ ， $v=v(x)$]在点x可导则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ $d(u\pm v)=du\pm dv$

(2)$(uv)'=uv'+vu'$ $d(uv)=udv+vdu$

(3) $(\frac{u}{v})'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0)$ $d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

6.基本导数与微分表

(1) $y=c$（常数） $y'=0$ $dy=0$

(2) $y=x^\alpha$(α为实数) $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ $dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$

(3) $y=a^x$ $y'=a^x\ln a$ $dy=a^x\ln adx$ 特例: $(e^x)'=e^x$ $d(e^x)=e^xdx$

(4) $y=\log_a x$ $y'=\frac{1}{x\ln a}$

$dy=\frac{1}{x\ln a}dx$ 特例:$y=\ln x$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

(5) $y=\sin x$

$y'=\cos x$ $d(\sin x)=\cos xdx$

(6) $y=\cos x$

$y'=-\sin x$ $d(\cos x)=-\sin xdx$

(7) $y=\tan x$

$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ $d(\tan x)=\sec^2 xdx$

(8) $y=\cot x$ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$ $d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

(9) $y=\sec x$ $y'=\sec x\tan x$

$d(\sec x)=\sec x\tan xdx$ (10) $y=\csc x$ $y'=-\csc x\cot x$

$d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$ (11) $y=\arcsin x$

$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (12) $y=\arccos x$

$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $y=\arctan x$

$y'=\frac{1}{1+x^2}$ $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

(14) $y=\operatorname{arc}\cot x$

$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

$d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$ (15) $y=shx$

$y'=chx$ $d(shx)=chxdx$

(16) $y=chx$

$y'=shx$ $d(chx)=shxdx$

7.复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则: 设$y=f(x)$在点x的某邻域内单调连续，在点x处可导且$f'(x)\neq 0$，则其反函数在点x所对应的y处可导，并且有$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则:若$\mu=\varphi(x)$在点x可导,而$y=f(\mu)$在对应点$\mu(\mu=\varphi(x))$可导,则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x可导,且$y'=f'(\mu)\cdot\varphi'(x)$

(3) 隐函数导数$\frac{dy}{dx}$的求法一般有三种方法：

1)方程两边对x求导，要记住y是x的函数，则y的函数是x的复合函数.例如$\frac{1}{y}$，y^2，lny，e^y等均是x的复合函数. 对x求导应按复合函数连锁法则做.

2)公式法.由$F(x,y)=0$知 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$,其中，$F'_x(x,y)$， $F'_y(x,y)$分别表示$F(x,y)$对x和y的偏导数

3)利用微分形式不变性

8.常用高阶导数公式

（1）$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\quad(a>0)\qquad(e^x)^{(n)}=e^x$

（2）$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

（3）$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

（4）$(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

（5）$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}$

（6）莱布尼兹公式：若$u(x)\,,v(x)$均n阶可导，则 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}c_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$，其中$u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$

9.微分中值定理，泰勒公式

Th1:(费马定理)

若函数$f(x)$满足条件：

(1)函数$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x)\leq f(x_0)$或$f(x)\geq f(x_0)$,

(2) $f(x)$在x_0处可导,则有 $f'(x_0)=0$

Th2:(罗尔定理)

设函数$f(x)$满足条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续；

(2)在(a,b)内可导；

(3)$f(a)=f(b)$；

则在(a,b)内一存在个ξ，使 $f'(\xi)=0$

Th3: (拉格朗日中值定理)

设函数$f(x)$满足条件：

(1)在$[a,b]$上连续；

(2)在(a,b)内可导；

则在(a,b)内一存在个ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Th4: (柯西中值定理)

设函数$f(x)$，$g(x)$满足条件：(1) 在$[a,b]$上连续；

(2) 在(a,b)内可导且$f'(x)$，$g'(x)$均存在，且$g'(x)\neq 0$

则在(a,b)内存在一个ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

10.洛必达法则

法则 Ⅰ ($\frac{0}{0}$型)

设函数$f(x),g(x)$

满足条件：

$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,\lim_{x\to x_0} g(x)=0$;

$f(x),g(x)$在x_0的邻域内可导，(在x_0处可除外)且$g'(x)\neq 0$;

$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)。

则: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。 法则$I'$ ($\frac{0}{0}$型)

设函数$f(x),g(x)$

满足条件：

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\lim_{x\to\infty}g(x)=0$;

存在一个$X>0$,当$|x|>X$时,$f(x),g(x)$可导,且$g'(x)\neq 0$;$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)。

则: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$型)

设函数$f(x),g(x)$满足条件： $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$;

$f(x),g(x)$在x_0 的邻域内可导(在x_0处可除外)且$g'(x)\neq 0$;$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)。

则

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

同理法则II'($\frac{\infty}{\infty}$型)仿法则I'可写出。

11.泰勒公式

设函数$f(x)$在点x_0处的某邻域内具有$n+1$阶导数，则对该邻域内异于x_0的任意点x，在x_0与x之间至少存在 一个ξ，使得：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$

$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为$f(x)$在点$x_0$处的$n$阶泰勒余项。

令$x_0=0$，则n阶泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$…… (1)

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$在 0 与$x$之间.(1)式称为**麦克劳林公式**

常用五种函数在$x_0=0$处的泰勒公式

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$

或 $=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$

或 $=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$

或 $=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$

或 $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

(5) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$
$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$

或 $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

12.函数单调性的判断

Th1:

设函数$f(x)$在(a,b)区间内可导，如果对$\forall x\in(a,b)$，都有$f'(x)>0$（或$f'(x)<0$），则函数$f(x)$在(a,b)内是单调增加的（或单调减少）

Th2:

（取极值的必要条件）设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取极值，则$f'(x_0)=0$。

Th3:

（取极值的第一充分条件）设函数$f(x)$在x_0的某一邻域内可微，且$f'(x_0)=0$（或$f(x)$在x_0处连续，但$f'(x_0)$不存在。）

(1)若当x经过x_0时，$f'(x)$由"+"变"-"，则$f(x_0)$为极大值；

(2)若当x经过x_0时，$f'(x)$由"-"变"+"，则$f(x_0)$为极小值；

(3)若$f'(x)$经过$x=x_0$的两侧不变号，则$f(x_0)$不是极值。

Th4:

(取极值的第二充分条件)设$f(x)$在点x_0处有$f''(x)\neq 0$，且$f'(x_0)=0$，则 当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值； 当$f''(x_0)>0$时，$f(x_0)$为极小值。 注：如果$f''(x_0)<0$，此方法失效。

13.渐近线的求法

(1)水平渐近线 若$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$，或$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$，则

$y=b$称为函数$y=f(x)$的水平渐近线。

(2)铅直渐近线 若$\lim_{x\to x_0^-}, f(x)=\infty$，或$\lim_{x\to x_0^+}, f(x)=\infty$，则

$x=x_0$称为$y=f(x)$的铅直渐近线。

(3)斜渐近线 若 $a=\lim$ $f(x)$ b ，则 $y=ax+b$称为$y=f(x)$的斜渐近线。

14.函数凹凸性的判断

Th1: (凹凸性的判别定理）若在 I 上$f''(x)<0$（或$f''(x)>0$），则$f(x)$在 I 上是凸的（或凹的）。

Th2: (拐点的判别定理 1)若在x_0处$f''(x)=0$，（或$f''(x)$不存在），当x变动经过x_0时，$f''(x)$变号，则$(x_0,f(x_0))$为拐点。

Th3: (拐点的判别定理 2)设$f(x)$在x_0点的某邻域内有三阶导数，且$f''(x)=0$，$f'''(x)\neq0$，则$(x_0,f(x_0))$为拐点。

15.弧微分

$$dS=\sqrt{1+{y'}^2}dx$$

16.曲率

曲线$y=f(x)$在点(x,y)处的曲率$k=\frac{|y''|}{(1+{y'}^2)^{\frac{3}{2}}}$。对于参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，

$k=\frac{|\varphi'(t)\psi''(}{}$。

17.曲率半径

曲线在点M处的曲率$k(k \neq 0)$与曲线在点M处的曲率半径ρ有如下关系：$\rho = \frac{1}{k}$。

END

关于本站

“机器学习初学者”公众号由是黄海广博士创建，黄博个人知乎粉丝23000+，github排名全球前110名（32000+）。本公众号致力于人工智能方向的科普性文章，为初学者提供学习路线和基础资料。原创作品有：吴恩达机器学习个人笔记、吴恩达深度学习笔记等。

往期精彩回顾

- 那些年做的学术公益-你不是一个人在战斗
- 适合初学者入门人工智能的路线及资料下载
- 吴恩达机器学习课程笔记及资源（github标星12000+，提供百度云镜像）
- 吴恩达深度学习笔记及视频等资源（github标星8500+，提供百度云镜像）
- 《统计学习方法》的python代码实现（github标星7200+）

备注：加入本站微信群或者qq群，请回复“**加群**”

加入知识星球（4300+用户，ID：92416895），请回复“**知识星球**”

收录于合集 #机器学习的数学基础（在线阅读） 5

上一篇

首发：吴恩达的 CS229的数学基础（概率论），有人把它做成了在线翻译版本！

下一篇

在线阅读！！机器学习数学精华：线性代数