Álgebra Superior I

2021-1

Tema: Conjuntos

Octubre 2020

Ejemplo (1): Demostrar que en un conjunto de cardinalidad n hay exactamente

$$\frac{n!}{(n-m)!\ m!}$$

subconjuntos de cardinalidad m.

Para verlo, partiremos de la definición misma de conjunto y de la siguiente idea:
Una lista de m elementos distintos representa exactamente a un subconjunto, mientas que hay distintas maneras maneras de escribir en forma lista los elementos de un conjunto con m elementos

Resumen: Encontraremos todas las posibles listas de m elementos distintas en un conjunto de n elementos y luego, veremos cuantas listas representan al mismo subconjunto de m elementos.

Veamos un ejemplo para $1, 2, 3$. Para elegir un elemento arbitrario hay 3 opciones, después, para elegir el segundo elemento sólo hay 2 opciones, pues ya elegimos uno. Entonces hay $3 \cdot 2$ maneras de elegir dos elementos distintos de manera ordenada.

Escribamos todos las posibles elecciones de dos elementos distintos que contamos con el método anterior:

$$\begin{array}{ll} \text{primero 1 y luego 2,} & \text{primero 2 y luego 3,} \\ \text{primero 1 y luego 3,} & \text{primero 2 y luego 1,} \\ \text{primero 3 y luego 1,} & \text{primero 3 y luego 2.} \end{array}$$

Pero... ¡muchas de estas elecciones representan el mismo conjunto! En este caso es sencillo ver que hay exactamente dos listas que representan el mismo conjunto.

En total, hay 6 listas de dos elementos distintos y exactamente dos listas que representan el mismo conjunto. La conclusión es que hay $\frac{6}{2}$ subconjuntos distintos de dos elementos. Pero,

$$\begin{aligned} \frac{6}{2} &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3!}{2!} \\ &= \frac{3!}{(3-2)!2!}. \end{aligned}$$

Paso 1: Piensa en un subconjunto de m elementos. Ya sabemos que todos los elementos de tal subconjunto deben ser distintos.

Entonces la primer pregunta que nos deberíamos hacer es *¿cuántas maneras hay de hacer una lista de m elementos distintos de un conjunto de n elementos?*

Como ya vimos, primero hay n posibles elecciones para el primer elementos de la lista. Para el segundo elemento ya sólo hay $n-1$ opciones, para el tercer elemento nos quedan $n-3$ opciones. Así, cuando tengamos que elegir el $m-$ésimo de la lista tendremos $n-(m-1)$ opciones para hacerlo.

Así, en total podemos construir

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ \cdots \ \cdot (n-(m-1))$$

listas distintas de m elementos distintos.

Paso 2: La siguiente pregunta es ¿cuantas listas distintas puedo construir con m elementos distintos de un subconjuntos de cardinalidad m?

Fijemos un subconjunto de cardinalidad m, digamos U. Ya sabemos como proceder, de hecho, podemos usar el método para construir listas que usamos en el Paso 1, sólo que esta vez, los elementos de las listas los tomaremos de U.

Para elegir al primer elemento de la lista, hay m posibilidades. Luego, para el segundo, hay $m-1$ posibilidades, pues ya fijamos a uno. Para el tercer lugar de la lista solamente podemos elegir $m-2$ elementos. De esta manera, para el $(m-1)$-ésimo lugar de la lista sólo nos quedan dos opciones para elegir. Finalmente el elemento en la posición (m)-ésima está determinado.

En total, hay

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1$$

listas distintas de m elementos distintos del subconjunto U.

Esto nos dice que podemos escribir a los elementos de de un conjunto de m elementos en forma de lista [sin repetir elementos] de

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1$$

maneras distintas.

Conclusión: Ya sabemos hay

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ \cdots \ \cdot (n-(m-1))$$

listas distintas de m elementos distintos y que hay

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1$$

listas distintas de m elementos que representan al mismo subconjunto conjunto.

De esta manera, deducimos que podemos encontrar exactamente

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ \cdots \ \cdot (n-(m-1))}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1}$$

subconjuntos distintos de m elementos en un conjunto de cardinalidad m.

Ahora, notemos que

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ \cdots \ \cdot (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

y que

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1 = m!.$$

Con estas dos identidades deducimos que

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ \cdots \ \cdot (n-(m-1))}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}.$$

Esto es lo que queríamos.

Ejemplo (2): Demostrar que en un conjunto de cardinalidad n hay exactamente 2^n subconjuntos distintos.

Una idea es usar lo que tenemos en el Ejercicio 1 y la fórmula del Teorema del binomio [que estudiaremos más adelante en el curso].

El Teorema del bonomio dice que, para cualesquiera nos números a, b se tiene que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\ k!} a^{n-k} b^k.$$

Así, una manera de contar a todos los subconjuntos de un conjunto de cardinalidad n es contar todos los de cardinalidad 1, los de cardinalidad 2, los de cardinalidad 3 y así, para después sumarlos.

Hay que tener en cuenta que, hay sólo un subconjunto con cardinalidad cero, a saber, el vacío y sólo un subconjunto de cardinalidad n, a saber, el total mismo.

Sea C_k el número de subconjuntos de cardinalidad k. Entonces, el número de subconjuntos distintos es

$$1 + C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} + 1.$$

Esto es, pues $C_0 = 1$ y $C_n = 1$. Sin embargo, por el Ejercicio (1) tenemos que

$$C_k = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}.$$

Esto nos dice que

$$1 + C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\ k!} + 1.$$

Finalement, por Teorema del binomio vemos que

$$(1+1)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\ k!} + 1.$$

Esto demuestra que

$$1 + C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} + 1 = 2^n.$$

Que es lo que queríamos.