Ecuaciones Diferenciales Parciales I

Tarea 1

Ejercicio 1. En busca de un Ansatz suponemos que $u:(0,\infty)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tiene la regularidad e integrabilidad suficientes.

Aplicamos la transformada de Fourier, usamos su linealidad y que $(\widehat{u_x})(\xi)=i\xi\,\hat{u}(\xi)$. Así, obtenemos la

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,\xi)+c(t)i\xi\hat{u}(t,\xi)=0 & \text{para } (t,\xi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R} \\ \hat{u}(0,\xi)=\hat{f}(\xi) & \text{para } \xi\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Esto nos da una ecuación ordinaria para cada $\xi\in\mathbb{R}$. Resolviendo vía el método de factor integrante obtenemos

$$\hat{u}(t,\xi)=\hat{f}(\xi)e^{-i\xi g(t)}, \quad \text{con } g(t):=\int_0^t c(\tau)\,d\tau$$

Ahora aplicamos la transformada de Fourier inversa:

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)e^{-i\xi g(t)}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi(x-g(t))}\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

$$=(\check{\hat{f}})(x-g(t))=f(x-g(t)).$$

Verificamos directamente que este Ansatz es una solución de facto.

$$u(0,x) = f\left(x - \int_0^0 c(\tau)\,d\tau\right) = f(x)$$

Además

$$u_t(t,x) = f'(x - g(t)) \cdot (-g'(t))$$
$$= -f'(x - g(t))\, c(t)$$
$$u_x(t,x) = f(x - g(t))$$

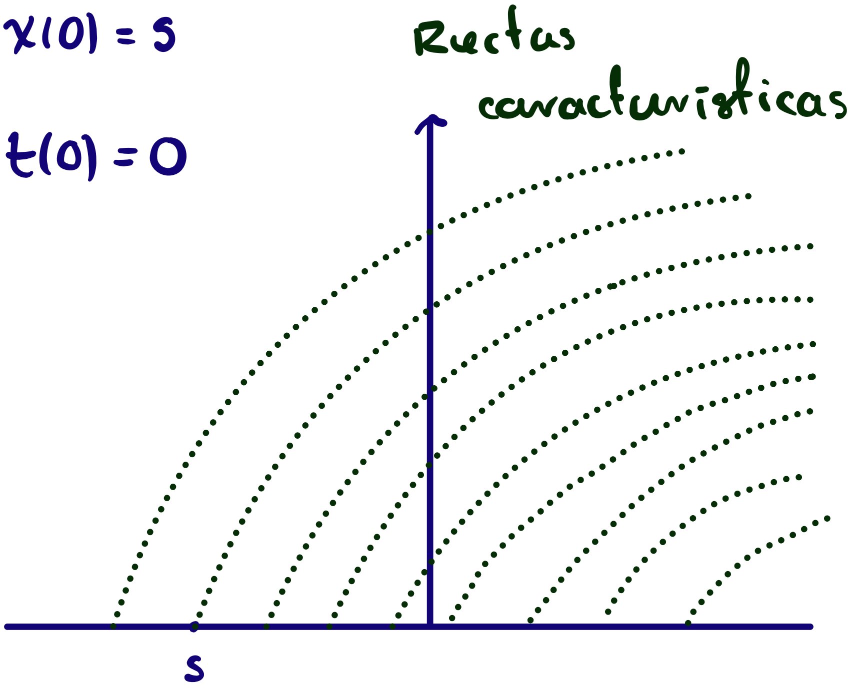
$$\therefore \quad u_t(t,x) + c(t)\,u_x(t,x) = 0.$$

Ejercicio 2:

(a) $\left[\, u_t + x u_x = 0 \text{ en } \Omega, \quad u(0,x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \,\right]$

El sistema característico asociado es

$$\begin{cases} x'(\tau) = x(\tau), & x(0) = s \\ t'(\tau) = 1, & t(0) = 0 \end{cases}$$



$$\therefore \quad x(\tau) = s \cdot e^{\tau}$$

$$y \quad t = \tau$$

$\therefore\ u(t(\tau), x(\tau)) = u(0,s) = f(s)$
$= f(x \cdot e^{-t})$

$\therefore\ u(t,x) = f(xe^{-t})$

$$\boxed{u_t + x^2 u_x = 0 \text{ en } \Omega,\quad u(0,x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}}$$

el sistema característico asociado es

$$\begin{cases} x'(\tau) = x^2(\tau), & x(0) = s \\ t'(\tau) = 1, & t(0) = 0 \end{cases}$$

las soluciones son $t(\tau) = \tau$ y
$x(\tau) = \dfrac{s}{1-\tau s} = \dfrac{s}{1-ts}$.

Así, $\dfrac{1}{s} - t = \dfrac{1}{x}$ y entonces $s = \dfrac{x}{1+xt}$

$\therefore\ u(t,x) = u(0,s) = f(s)$
$= f\left(\dfrac{x}{1+xt}\right)$.

$$\boxed{u_t + u_x = 0 \text{ en } \Omega^+,\quad \begin{array}{ll} u(0,x) = f(x) & x \geq 0 \\ u(t,0) = g(t) & t \geq 0 \end{array}}$$

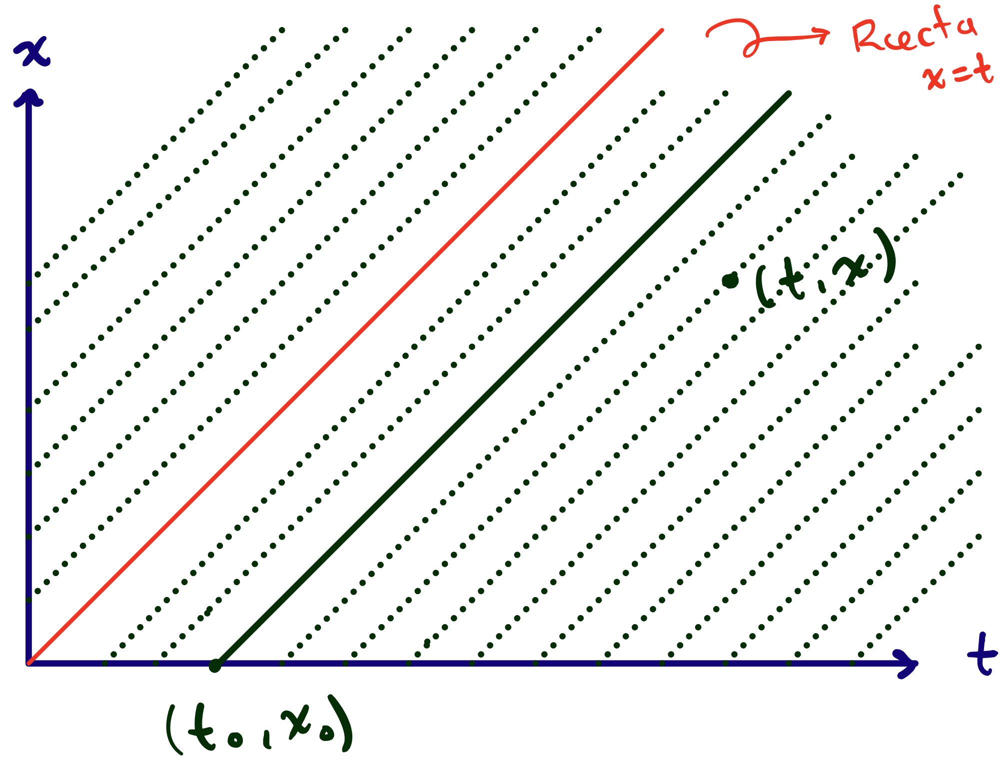
Fijemos un $(t_0, x_0) \in \{(0,s) : s \geq 0\} \cup \{(s,0) : s \geq 0\}$.
Entonces, el sistema característico

$$\begin{cases} x'(\tau) = 1 & x(0) = x_0 \\ t'(\tau) = 1 & t(0) = t_0 \end{cases}$$

La soluciones son

$$x = x_0 + \tau \quad , \quad t = \tau + t_0$$

Así, $x - t = x_0 - t_0$ es la recta característica que pasa por (t_0, x_0)



$$\therefore \quad u(t,x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si} \quad t < x, \\ g(t_0) & \text{si} \quad t > x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x-t) & \text{si} \quad t < x, \\ g(t-x) & \text{si} \quad t > x. \end{cases}$$

(b) u podría ser no continua ni diferenciable sobre la recta $x=t$

Para que sea continua debe ocurrir que $g(0)=f(0)$.

pues $\lim_{t \to x^+} u(t,x) = g(0)$ y

$\lim_{t \to x^-} u(t,x) = f(0)$

Teniendo en cuenta que

$$u_x(t,x) = \begin{cases} f'(x-t) & \text{si } t<x \\ -g'(t-x) & \text{si } t>x \end{cases}$$

y $$u_t(t,x) = \begin{cases} -f'(x-t) & \text{si } t<x \\ g'(t-x) & \text{si } t>x \end{cases}$$

Vemos que basta que

$f'(0) = -g'(0)$ para que u_x y u_t sean continuas.