UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Formulación variacional para un sistema subcrítico de ecuaciones elípticas débilmente acopladas en un dominio exterior

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
LUIS EDWIN AGUILAR ANZURES

DOCTORA MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2023

Luis Edwin Aguilar Anzures

Formulación variacional para un sistema subcrítico de ecuaciones elípticas débilmente acopladas en un dominio exterior

UNAM
Agosto 2023

Agradecimientos

Si bien se acostumbra que el trabajo final sea un mero formalismo, prefiero tomarlo como la consecuencia de un proceso de aprendizaje y atención. En mi caso, tuve que aprender a ponerme especial atención a mi mismo mientras llevaba a cabo el quehacer matemático que el programa exigió. Esto requirió tiempo para detenerme y pensar, además de personas en las cuales pude verme reflejado, quienes generosamente y sin reservas, compartieron su tiempo y cariño conmigo. Para empezar, agradezco enormemente el privilegio de haber sido dueño de mi tiempo estos dos años, sin el cual creo que difícilmente hubiera tenido la oportunidad de conocer otros caminos, ni dedicarle tiempo a escribir sobre las matemáticas que verdaderamente me apasionan y ni mucho menos, pensar en mi de alguna manera. Pero en mayor medida agradezco el privilegio de haber pasado este par de años a lado de personas maravillosas que me mostraron varias razones por las cuales esta vida merece la pena ser vivida. Por esto decido dedicarles algunas palabras a aquellos que le otorgaron el misterio de la amistad a mis días. Gracias por compartir sus historias conmigo.

Quiero agradecer las siguientes personas:

A Daniel Gordillo por todas las charlas sobre historia, por recibirme en tu casa siempre con los brazos abiertos, tanto en CDMX como en Xalapa, y por las vueltas que le dimos al mundo a través de su musica: me mostraste lo que significa ser una persona verdaderamente culta.

A Javier por la caminatas que tuvimos hablando de matemáticas, cuentos cortos y chistes *bobos*. Siempre fue un placer escucharte contar con emoción lo último que aprendiste de álgebra y compartir un café en el CEPE.

A Carolina por todos los caminos de tristeza que recorrimos juntos como ratas por la cuidad, por los poemas de Pizarnik y por las horas sabor a tabaco que caminamos por la facultad.

A Sergio por dejarme ser testigo de tu mundo y de tu pasión por hacerte experto en teorías postestructuralistas (fracesas) y comunicarlas (articuladamente).

A Luis y Rebeca por haber estado siempre al pendiente de mi, por los regaños que tanto me ayudaron a ponerme en perspectiva, por las tardes de juegos de mesa y por los muros que escalé a su lado (nunca imaginé poder subir tan alto ni que el verdadero problema era *saber caer*).

A María Atondo por acompañarme a través de *la vida sin hogar* con tu inquebrantable espíritu norteño: "*Con unas de harina, unos puercos y una panela vas y vienes al cielo*".

A Diego y Cristian por todas las comidas, risas, partidos de fútbol en islas y por su increíble obstinación por siempre hallar una solución *mejor* a los problemas de geometría diferencial.

A Jonathan, Gener y Cristian Edimar por todas las noches que nos desvelamos hablando de lo que es importante en la vida, de las matemáticas que nos apasionan y por enseñarme lo maravilloso que es el poder contar nuestra propia historia y escuchar, con el corazón libre, la historia del otro.

A Kenneth Anzures por enseñarme en lo que consiste ser un buen hermano, por los continuos desafíos de comedia y por recordarme constantemente que no andamos *tan* solos por el mundo.

A Norma Angélica por tu inesperado regreso lleno de días donde fuimos valientes, felices, tiernos y plenos. Gracias por todo el cariño, la atención y la magia que trajiste a mi vida durante la redacción de este trabajo.

"*Por mi raza hablará el espíritu*"

EDWIN AGUILAR ANZURES

1. Introducción

Consideremos el sistema de ecuaciones elípticas

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \kappa_i u_i = \mu_i |u_i|^{p-2} u_i + \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} \beta_{ij} |u_j|^{\alpha_{ij}} |u_i|^{\beta_{ij}-2} u_i & \text{en } \Omega, \\ u_i \in H_0^1(\Omega), \qquad i, j = 1, \ldots, M \end{cases} \tag{1.1}$$

donde Ω es un dominio exterior en $\mathbb{R}^N$ (es decir, $\mathbb{R} \setminus \Omega$ es acotado e incluso posiblemente vacío), $N \geq 3$, $\mu_i > 0$, $\kappa_i > 0$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} < 0$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} > 1$, $\alpha_{ij} = \beta_{ji}$ y $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = p \in (2, 2^*)$, donde $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Estamos interesados en soluciones del problema (1.1) donde todas sus componentes son no triviales, es decir, ninguna de ellas es la función idénticamente cero en Ω. A tales soluciones les llamaremos completamente no triviales. En la misma línea, llamaremos soluciones positivas a aquellas cuyas componentes sean todas funciones positivas.

Mostraremos que las soluciones completamente no triviales de (1.1) corresponden a puntos críticos de un funcional $\Psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un subconjunto $\mathcal{U}$ del toro $\mathcal{T} := S_1 \times \cdots \times S_M$, donde S_i es la esfera unitaria en $H_0^1(\Omega)$ respecto a una norma adecuada, equivalente a la norma usual. Después veremos que se dan las condiciones para aplicar la técnica del flujo gradiente para obtener la existencia y multiplicidad de puntos críticos del funcional.

El objetivo de la tesina es exponer la formulación variacional del problema (1.1) usada en [1] para hallar soluciones completamente no triviales cuando el dominio tiene ciertas simetrías. Durante todo este trabajo supondremos que Ω es un dominio G-invariante, es decir, es invariante bajo la acción de un subgrupo cerrado del grupo $O(N)$ de isometrías lineales de $\mathbb{R}^N$. Estudiaremos las soluciones G-invariantes, a saber, aquellas cuyas componentes sean todas G-invariantes.

Sea $Gx := \{gx \ : \ g \in G\}$ la G-órbita de $x \in \mathbb{R}^N$. De manera concreta, demostraremos el siguiente teorema, el cual es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 1.1. *Si $\dim(Gx) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y Ω es un dominio exterior G-invariante en $\mathbb{R}^N$, entonces el sistema (1.1) tiene una sucesión no acotada de soluciones G-invariantes completamente no triviales. Una de ellas es positiva y tiene la energía mínima de entre todas las soluciones G-invariantes completamente no triviales.*

El problema (1.1) se ha estudiado extensivamente en dominios acotados y en todo $\mathbb{R}^3$ en [3]. El Teorema 1.1 nos provee de un resultado de existencia para dominios exteriores.

1.1. Análisis de una función en M variables

Con el objetivo de simplificar el análisis variacional discutido en la Sección 2 introducimos los siguientes resultados para una función en M variables. Tal función aparece cuando estudiamos el comportamiento del funcional de energía asociado al sistema (1.1) en cierto espacio de Hilbert.

Sea $J : (0,\infty)^M \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$J(s) := \sum_{i=1}^{M} a_i s_i^2 - \sum_{i=1}^{M} b_i s_i^p + \sum_{i\neq j}^{M} d_{ij} s_j^{\alpha_{ij}} s_i^{\beta_{ij}},$$

donde $s = (s_1, \ldots, s_M)$, $a_i, b_i > 0$, $d_{ij} \geq 0$, $d_{ij} = d_{ji}$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} > 1$, $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = p > 2$ y $\alpha_{ji} = \beta_{ij}$.

De esta manera,

$$\partial_i J(s) = 2a_i s_i - pb_i s_i^{p-1} + 2\sum_{i\neq j} d_{ij}\beta_{ij} s_j^{\alpha_{ij}} s_i^{\beta_{ij}-1}. \tag{1.2}$$

Los siguientes lemas nos permiten entender la naturaleza de los puntos críticos de la función J, cuya importancia quedará manifiesta en la Sección 2.

Lema 1.2. *Si $pb_i > 2\sum_{j\neq i} d_{ij}\beta_{ij}$ para cada $i = 1, \ldots, M$, entonces existen $0 < r < R < \infty$ tales que*

$$\max_{s\in(0,\infty)^M} J(s) = \max_{s\in[r,R]^M} J(s). \tag{1.3}$$

En particular, J alcanza su máximo en $(0,\infty)^M$.

Demostración. Fijemos $R > r > 0$ tales que, para cada $i = 1, \ldots, M$,

$$2a_i t - \left(pb_i - 2\sum_{j\neq i} d_{ij}\beta_{ij}\right) t^{p-1} < 0 \quad \text{si } t \in [R,\infty)$$

y

$$2a_i t - pb_y t^{p-1} > 0 \quad \text{si } t \in (0, r].$$

Sea $s = (s_1, \ldots, s_M) \in (0,\infty)^M$. Si $s_i \geq R$ y $s_i = \max\{s_1, \ldots, s_M\}$, tenemos que

$$\partial_i J(s) \leq 2a_i s_i - 2a_i t - \left(pb_i - 2\sum_{j\neq i} d_{ij}\beta_{ij}\right) s_i^{p-1} < 0, \tag{1.4}$$

en tanto que, si $s_i < r$, entonces

$$\partial_i J(s) \geq 2a_i s_i - pb_i s_i^{p-1} > 0. \tag{1.5}$$

Por lo tanto (1.3) se cumple.

□

Lema 1.3. *Si J tiene un punto crítico en $(0,\infty)^M$, entonces es único y es un máximo global de J en $(0,\infty)^M$.*

Demostración. Supongamos primero que $(1,\ldots,1)$ es un punto crítico de J. Entonces, de (1.2) tenemos

$$0 < 2a_i = pb_i - 2\sum_{j\neq i} d_{ij}\beta_{ij} \quad \text{para cada } i = 1,\ldots,M. \tag{1.6}$$

Si $s = (s_1,\ldots,s_M)$ es un punto crítico de J en $(0,\infty)^M$, entonces, para cada $i = 1,\ldots,M$, (1.6) y (1.2) implican que

$$2a_i(s_i - s_i^{p-1}) = 2\sum_{j\neq i} d_{ij}\beta_{ij}(s_i^{p-1} - s_j^{\alpha_{ij}} s_i^{\beta_{ij}-1}). \tag{1.7}$$

En busca de una contradicción supongamos que $s \neq (1,\ldots,1)$. Consideremos dos casos. Empezamos suponiendo que $s_i > 1$ para algún i. Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que $s_i \geq s_j$ para todo j. Entonces, el lado izquierdo de (1.7) es negativo, mientras que el lado derecho es no negativo. Esto es una contradicción. Ahora supongamos que $s_i < 1$ para algún i. De nuevo, podemos suponer también, sin pérdida de generalidad que $s_i \leq s_j$ para todo j. En este caso el lado izquierdo de (1.7) es positivo mientras que el lazo izquierdo no lo es, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que si $(1,\ldots,1)$ es punto crítico de J en $(0,\infty)^M$, entonces es único. Además, las desigualdades (1.6) nos permiten aplicar el Lema 1.2, el cual asegura que $(1,\ldots,1)$ es un máximo global.

Finalmente, si $s^0 = (s_1^0,\ldots,s_M^0)$ es un punto crítico de J en $(0,\infty)^M$, entonces $(1,\ldots,1)$ es un punto crítico de

$$\overline{J}(s) := \sum_{i=1}^M \overline{a}_i s_i^2 - \sum_{i=1}^M \overline{b}_i s_i^p + \sum_{j\neq i}^M \overline{d}_{ij} s_j^{\alpha_{ij}} s_i^{\beta_{ij}},$$

donde, $\overline{a}_i := a_i s_i^0$, $\overline{b}_i := b_i(s_i^0)^{p-1}$ y $\overline{d}_{ij} := d_{ij}(s_j^0)^{\alpha_{ij}}(s_i^0)^{\beta_{ij}-1}$ y la conclusión se sigue del caso especial analizado arriba. □

Tenemos el siguiente criterio de continuidad respecto a los parámetros dados y los puntos críticos.

Lema 1.4. *Supongamos que J tiene un punto crítico s^0 en $(0,\infty)^M$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un δ tal que si $\widetilde{d}_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq 0$ y*

$$\sum_{i=1}^M \left(|\widetilde{a}_i - a_i| + \left|\widetilde{b}_i - b_i\right|\right) + \sum_{i\neq j} \left|\widetilde{d}_{ij} - d_{ij}\right| < \delta, \tag{1.8}$$

entonces la función

$$\widetilde{J}(s) := \sum_{i=1}^M \widetilde{a}_i s_i^2 - \sum_{i=1}^M \widetilde{b}_i s_i^p + \sum_{i\neq j}^M \widetilde{d}_{ij} s_j^{\alpha_{ij}} s_i^{\beta_{ij}}$$

tiene un único punto crítico $\widetilde{s}^0$ en $(0,\infty)^M$, el cual es un máximo global que satisface $|s^0 - \widetilde{s}^0| < \epsilon$.

Demostración. Como en la prueba del Lema 1.3 suponemos sin pérdida de generalidad que $s^0 = (1, \dots, 1)$. En cuyo caso (1.6) se satisface. Entonces, elegimos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño de tal forma que (1.8) asegure que $\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i > 0$ y $p\widetilde{b}_i - 2\sum_{j\neq i} \widetilde{d}_{ij}\beta_{ij} > 0$. Por lo tanto, el Lema 1.2 implica que $\widetilde{J}$ tiene un máximo global $\widetilde{s}^0$ en $(0,\infty)^M$ y el Lema 1.3 nos dice que $\widetilde{s}^0$ es el único punto crítico de $\widetilde{J}$ en $(0,\infty)^M$.

Ahora bien, tomando $\delta, r > 0$ mas pequeños y $R > r$ más grande si es necesario, tendríamos que $\widetilde{J}$ satisface las mismas desigualdades y por lo tanto, $\widetilde{s}^0 \in (r, R)^M$. Ya que $(1, \dots, 1)$ es un máximo estricto, se tiene que $|\widetilde{s}^0 - (1, \dots, 1)| < \varepsilon$, posiblemente después de elegir un δ aún más pequeño. □

2. Formulación variacional

En esta sección exponemos la formulación variacional *abstracta* del problema (1.1) desarrollada en [1] de manera general. No obstante, nuestro objetivo es aplicarla para de demostrar el Teorema 1.1. Para ello, debemos hallar una formulación variacional adecuada para el espacio de soluciones con simetrías. Sea $\mathcal{H} := H_0^1(\Omega)^M$

Sean G un subgrupo cerrado de $O(N)$ y $Gx := \{gx \ : \ g \in G\}$ la G-órbita de $x \in \mathbb{R}^N$. Recordemos que Ω es un dominio exterior G-invariante.

Definición 2.1. *Una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es G-invariante si es constante en Gx para cada $x \in \Omega$. Una M-tupla de funciones $(v_1, \dots, v_M)$ es G-invariante si cada una de sus componentes es G-invariante.*

Como es usual, denotamos por $H_0^1(\Omega)^G := \{v \in H_0^1(\Omega) \ : \ v \text{ es } G\text{-invariante}\}$ al espacio de puntos fijos bajo la acción por isometrías de G en $H_0^1(\Omega)$. Así es espacio de M-tuplas G-invariantes es $\mathcal{H}^G = (H_0^1(\Omega)^G)^M$.

Proposición 2.2. *Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es un dominio exterior G-invariante, entonces* $\dim(H_0^1(\Omega)^G) = \infty$.

Demostración. Como Ω es un dominio exterior podemos escoger una sucesión de funciones radiales $\varphi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, y por lo tanto G-invariantes, tales que $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset \Omega$ y $\operatorname{supp}(\varphi_k) \cap \operatorname{supp}(\varphi_j) = \emptyset$ si $k \neq j$. De esta manera $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_i = 0$ siempre que $j \neq k$ para cada $i = 1 \dots, M$. Esto demuestra que (φ_k) es un conjunto ortogonal en $H_0^1(\Omega)^G$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ y por lo tanto, linealmente independiente.

□

Para $v, w \in H_0^1(\Omega)$ define

$$\langle v, w \rangle_i := \int_\Omega (\nabla w \cdot \nabla w + \kappa_i w v) \qquad \text{y} \qquad \|v\|_i = \left(\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \kappa_i v^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La hipótesis de que el operador $\kappa_i > 0$ para cada $i = 1, \dots M$ garantiza que la fórmula para $\|\cdot\|_i$ define una norma en $H_0^1(\Omega)^G$ equivalente la usual de $H^1(\Omega)$.

Sean $\mathcal{H} := (H_0^1(\Omega)^G)^M$ con la norma

$$\|(u_1, \ldots, u_M)\| := \left(\sum_{i=1}^{M} \|u_i\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y el funcional $\mathcal{J} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definido como

$$\mathcal{J}(u_1, \ldots, u_M) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \|u_i\|_i^2 - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{M}\int_\Omega \mu_i\, |u_i|^p - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M}\int_\Omega \lambda_{ij}|u_j|^{\alpha_{ij}}|u_i|^{\beta_{ij}}.$$

Proposición 2.3. *El funcional $\mathcal{J}$ es clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Es una consecuencia de que la función $F_i : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_i(u) := \frac{1}{2}\langle u_i, u_i\rangle_i$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ con

$$\partial_j F_i(u_1, \ldots, u_M)v = \delta_i^j \langle u_i, v\rangle_i \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)^G.$$

este hecho se sigue que de cada sumando $H_0^1(\Omega)^G$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle_i$.

Por otra lado, como $p \in (2, 2^*)$ sabemos que la función $A : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$A(w) := \int_\Omega |w|^p$$

es clase $\mathcal{C}^2$ con derivada

$$A'(w)v := p\int_\Omega |w|^{p-2}\, wv \quad \text{para todo } v \in L^p(\Omega).$$

La demostración de esto puede ser consultada [6, Proposition 1.12]. Como consecuencia la función $A_i : L^p(\Omega)^M \to \mathbb{R}$ dada por

$$A_i(u_1, \ldots, u_M) := \frac{1}{p}\int_\Omega |u_i|^p\,,$$

es clase $\mathcal{C}^1$ y su i-ésima derivada parcial está dada por

$$\partial_i A_i(u_1, \ldots, u_M)v = \int_\Omega |u_i|^{p-2}\, u_i v, \qquad \forall v \in L^p(\Omega)$$

Finalmente, usando que $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = p$ y un argumento análogo al usado en [6, Proposition 1.12] para demostrar que $A : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ es clase $\mathcal{C}^1$ demuestra que la función $B_{ij} : L^p(\Omega)^M \to \mathbb{R}$

$$B_{ij}(u_1, \ldots, u_M) := \int_\Omega \lambda_{ij} u_j^{\alpha_{ij}} u_i^{\beta_{ij}}.$$

es clase $\mathcal{C}^1$ con derivadas parciales i-ésima y j-ésima

$$\partial_i B_{ij}(u)v = \int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij}u_j^{\alpha_{ij}}u_i^{\beta_{ij}-2}u_i v \quad \text{y} \quad \partial_j B_{ij}(u)v = \int_\Omega \lambda_{ij}\alpha_{ij}u_j^{\alpha_{ij}-2}u_i^{\beta_{ij}}u_j v \qquad \text{si} \quad i \neq j.$$

Mientras que en [6, Proposition 1.12] se usa fuertemente que $p \in (2, 2^*)$ en este caso la hipótesis de que $\alpha_{ij} > 1$ y $\beta_{ij} > 1$ es crucial para que las integrales $\partial_i B_{ij}(u)v$ y $\partial_j B_{ij}(u)v$ existan. Por ejemplo, para calcular la de i-ésima derivada parcial siguiendo la idea de [6, Proposition 1.12], donde se calcula la derivada de Gateaux, se usa la siguiente estimación

$$\frac{\left|u_j^{\alpha_{ij}}(u_i+tv)^{\beta_{ij}} - u_j^{\alpha_{ij}}u_i^{\beta_{ij}}\right|}{|t|} \leq \beta_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left(|u_i|+|v|\right)^{\beta_{ij}-1}|v|, \qquad \text{para } v \in L^p(\Omega) \text{ y } t \in (0,1),$$

la cual se obtiene aplicando el teorema del valor medio a la función $t \mapsto |s+t|^{\beta_{ij}}$ y usando que su derivada $t \mapsto |t|^{\beta_{ij}-1}$ es no decreciente (lo que es consecuencia de que $\beta_{ij} > 1$). Luego, ya que $\beta_{ij} > 1$ y que $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = p$ entonces, $\beta_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left(|u_i|+|v|\right)^{\beta_{ij}-1}|v| \in L^1(\Omega)$. Por tanto, el teorema de convergencia dominada implicaría la existencia de la derivada de Gateaux

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\lambda_{ij}u_j^{\alpha_{ij}}(u_i+tv)^{\beta_{ij}} - \lambda_{ij}u_j^{\alpha_{ij}}u_i^{\beta_{ij}}}{t} = \int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij}u_j^{\alpha_{ij}}u_i^{\beta_{ij}-2}u_i v.$$

Entonces que la función $B : L^p(\Omega)^M \to \mathbb{R}$

$$B(u_1,\ldots,u_M) := \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M} B_{ij}(u_1,\ldots,u_M)$$

es clase $\mathcal{C}^1$ con i-ésima derivada parcial

$$\partial_i B(u_1,\ldots,u_M)v = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left|u_i\right|^{\beta_{ij}-2}u_i v + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\int_\Omega \lambda_{ji}\alpha_{ji}\left|u_i\right|^{\alpha_{ji}-2}u_i v\left|u_j\right|^{\beta_{ji}}.$$

Finalmente, como consecuencia del teorema del encaje de Sobolev y el hecho de que $\mathcal{J}(u_1,\ldots,u_M) = \sum_{i=1}(F_i(u_1,\ldots,u_M) + A_i(u_1,\ldots,u_M)) + B(u_1,\ldots,u_M)$ tenemos que $\mathcal{J}$ es clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{H}$. □

Observación 2.4. *Como $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ y $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$, tenemos*

$$\begin{aligned}
\partial_i\mathcal{J}(u_1,\ldots,u_M)v =& \langle u_i, v\rangle_i - \int_\Omega \mu_i\left|u_i\right|^{p-2}u_i v - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left|u_i\right|^{\beta_{ij}-2}u_i v\\
&- \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\int_\Omega \lambda_{ji}\alpha_{ji}\left|u_i\right|^{\alpha_{ji}-2}u_i v\left|u_j\right|^{\beta_{ji}}\\
=& \langle u_i, v\rangle_i - \int_\Omega \mu_i\left|u_i\right|^{p-2}u_i v - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left|u_i\right|^{\beta_{ij}-2}u_i v.
\end{aligned}$$

Ya que esto vale para cada $i = 1, \ldots, M$ y cada $v \in H_0^1(\Omega)$, obtenemos la siguiente formulación débil.

Definición 2.5. *Una* ***solución (débil)*** *de* (1.1) *es un punto crítico de* $\mathcal{J}$ *en* $H_0^1(\Omega)^M$.

Sin embargo, nuestro propósito es estudiar ciertas soluciones simétricas del sistema (1.1). El siguiente resultado juega un papel muy importante en el estudio del problema variacional con simetrías, pues nos dice que basta que una función sea un punto crítico de la restricción del funcional de energía al espacio de puntos fijos, para que ésta sea una solución débil del sistema (1.1).

Teorema 2.6 (**Principio de criticalidad simétrica**, Palais, 1979)**.** *Si H es un espacio de Hilbert equipado con una acción de un grupo G y $J : H \to \mathbb{R}$ es un funcional $G-$invariante de clase $\mathcal{C}^1$, entonces*

(a) $\nabla J : H \to H$ es $G-$equivariante, es decir,

$$\nabla J(gu) = g\nabla J(u) \qquad \forall u \in H, \ \forall g \in G.$$

(b) Si $u \in H^G$ es un punto crítico de la restricción $J|_{H^G} : H^G \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces, u es un punto crítico de J.

Demostración. Puede hallarse en [6, Theorem 1.28]. □

Puesto que el dominio Ω es G-invariante, que el funcional $\mathcal{J}$ es G-invariante para esta acción. Además es de clase C^1, por lo tanto, como consecuencia del principio de criticalidad simétrica (Teorema 2.6), tenemos que si u es un punto crítico de la restricción

$$\mathcal{J}|_{\mathcal{H}^G} : \mathcal{H}^G \to \mathbb{R},$$

entonces u es un punto crítico de $\mathcal{J} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Esto demuestra que las soluciones G-invariantes del sistema (1.1) son exactamente los puntos críticos de $\mathcal{J}|_{\mathcal{H}^G}$. Podemos resumir este hecho en el siguiente resultado.

Corolario 2.7. *Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es un dominio G- invariante, las soluciones G-invariantes del sistema* (1.1) *son precisamente los puntos críticos de la restricción del funcional $\mathcal{J} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ al espacio $\mathcal{H}^G$.*

Las soluciones completamente no triviales pertenecen al conjunto

$$\mathcal{N} := \{(u_1, \ldots, u_M) \in \mathcal{H}^G \ : \ u_i \neq 0, \ \partial_i \mathcal{J}(u_1, \ldots, u_M)u_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots, M\}.$$

Notemos que, si $u = (u_1, \ldots, u_M) \in \mathcal{N}$, entonces

$$\|u_i\|_i^2 = \int_\Omega \mu_i |u_i|^p + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij} |u_j|^{\alpha_{ij}} |u_i|^{\beta_{ij}} \quad \forall i = 1, \ldots, M.$$

Por lo tanto, tenemos

$$J(u) = \frac{p-2}{2p} \sum_{i=1}^{M} \|u_i\|_i^2 \quad \text{para } u = (u_1, \dots, u_M) \in \mathcal{N}. \tag{2.1}$$

Dados $u = (u_1, \dots, u_M) \in \mathcal{H}^G$ y $(s_1, \dots, s_M) \in (0, \infty)^M$ definimos

$$su := (s_1 u_1, \dots, s_M u_M)$$

y definimos $J_u : (0, \infty)^M \to \mathbb{R}$ como

$$J_u(s) := \mathcal{J}(su) = \sum_{i=1}^{M} a_{u,i}^2 s_i^2 - \sum_{i=1}^{M} b_{u,i} s_i^p + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} d_{u,ij} s_j^{\alpha_{ij}} s_i^{\beta_{ij}},$$

$$a_{u,i} := \frac{1}{2} \|u_i\|_i^2, \quad b_{u,i} := \frac{1}{p} \int_\Omega \mu_i |u_i|^p, \quad d_{u,ij} := -\frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_{ij} |u_j|^{\alpha_{ij}} |u_i|^{\beta_{ij}}.$$

Si $u_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, M$ podemos ver que s es un punto crítico de J_u si y sólo si $su \in \mathcal{N}$, pues

$$s_i \partial_i J_u(s) = \partial_i J(su)[s_i u_i], \quad i = 1, \dots, M$$

Definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{U}} : &= \{u \in \mathcal{H}^G \ : \ su \in \mathcal{N} \text{ para algún } s \in (0, \infty)^M\} \\ &= \{u \in (H_0^1(\Omega)^G \setminus \{0\})^M \ : \ J_u \text{ tiene un punto crítico en } (0, \infty)^M\}. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.3 si $u \in (H_0^1(\Omega)^G \setminus \{0\})^M$ y J_u tiene un punto crítico en $(0, \infty)^M$, entonces este punto crítico es único y es un máximo global de J_u, el cual denotaremos por $s_u = (s_{u,1}, \dots, s_{u,M})$ y definimos el mapeo $\widetilde{\mathbf{m}} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{N}$ como

$$\widetilde{\mathbf{m}}(u) = s_u u.$$

De esta manera,

$$\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{m}}(u)) = \max_{s \in (0,\infty)^M} \mathcal{J}(su).$$

Sean $S_i := \{v \in H_0^1(\Omega)^G \ : \ \|v\|_i = 1\}$, $\mathcal{T} = S_1 \times \cdots \times S_M$, $\mathcal{U} := \widetilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{T}$. Sea $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ la restricción de $\widetilde{\mathbf{m}}$ a $\mathcal{U}$. Además, escribimos como $\partial \mathcal{U}$ a la frontera de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{T}$.

Proposición 2.8. *(a) Si $u = (u_1, \dots, u_M) \in \mathcal{T}$ es tal que u_i y u_j tienen soportes ajenos para cualesquiera $i \neq j$, entonces $u \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{T}$.*

(b) Si $-\lambda_{ij} \geq \max\{\frac{\mu_i}{\beta_{ij}}, \frac{\mu_j}{\beta_{ji}}\}$ para algún $i \neq j$, entonces $\mathcal{U} \neq \mathcal{T}$.

(c) El mapeo $\widetilde{\mathbf{m}} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{N}$ es continuo y $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ es un homeomorfismo.

(d) Existe una constante $d_0 > 0$ tal que $\min_{i=1,\dots,M} \|u_i\|_i \geq d_0$ siempre que $(u_1, \dots, u_M) \in \mathcal{N}$. Por lo tanto $\mathcal{N}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H}$.

(e) *Si* (u_n) *es una sucesión en* $\mathcal{U}$ *tal que* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \partial\mathcal{U}$, *entonces* $\|\mathbf{m}(u_n)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Demostración. (a) : Sea $u = (u_1, \ldots, u_M) \in \mathcal{T}$ tal que u_i y u_j tiene soportes ajenos si $i \neq j$. Entonces, $d_{u,ij} = 0$ si $i \neq j$. Sea $s_i := \left(\mu_i \int_\Omega |u_i|^p\right)^{-1/(p-2)}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\partial_i\mathcal{J}(su)s_iu_i &= s_i^2 \|u_i\|_i^2 - s_i^p \int_\Omega \mu_i |u_i|^p - \sum_{j\neq i} \int_\Omega \lambda_{ij}\beta_{ij} |s_ju_j|^{\alpha_{ij}} |s_iu_i|^{\beta_{ij}} \\ &= s_i^2 \|u_i\|_i^2 - s_i^p \int_\Omega \mu_i |u_i|^p + \sum_{j\neq i} d_{u,ij} |s_j|^{\alpha_{ij}} |s_i|^{\beta_{ij}} \\ &= s_i^2 - s_i^p s_i^{2-p} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $(s_1u_1, \ldots, s_Mu_M) \in \mathcal{N}$ y en consecuencia $u \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Así, $u \in \mathcal{U}$, pues tomamos $u \in \mathcal{T}$. Además, cómo $a_{u,i}$, $b_{u,i}$ y $d_{u,ij}$ son funciones continuas de u, el Lema 1.4 asegura que $\mathcal{U}$ es abierto.

(b) : Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i = 1$ y que $j = 2$. Sean $v, v_3, \ldots, v_M \in H$ funciones no triviales. Supongamos que existen $t_1, t_2 > 0$ tales que $(t_1v, t_2v, v_3, \ldots, v_M) \in \mathcal{N}$. Entonces, como $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = p$ y $\lambda_{ij} < 0$ para todo i, j, de las identidades para $\partial_1\mathcal{J}(t_1v, t_2v, v_3, \ldots, v_M)t_1v$ y $\partial_2\mathcal{J}(t_1v, t_2v, v_3, \ldots, v_M)t_2v$ halladas en la Observación 2.4, tenemos

$$\begin{aligned}0 < t_1^2 \|v\|^2 &\leq \mu_1 t_1^p \int_\Omega |v|^p + \lambda_{12}\beta_{12} t_2^{\alpha_{12}} t_1^{\beta_{12}} \int_\Omega |v|^p \\ &= t_1^{\beta_{12}} \int_\Omega |v|^p \left(\mu_1 t_1^{\alpha_{12}} + \lambda_{12}\beta_{12} t_2^{\alpha_{12}}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}0 < t_2^2 \|v\|^2 &\leq \mu_2 t_2^p \int_\Omega |v|^p + \lambda_{21}\beta_{21} t_1^{\alpha_{21}} t_2^{\beta_{21}} \int_\Omega |v|^p \\ &= t_2^{\beta_{21}} \int_\Omega |v|^p \left(\mu_2 t_2^{\alpha_{21}} + \lambda_{21}\beta_{21} t_1^{\alpha_{21}}\right).\end{aligned}$$

Como $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ y el lado derecho de las estimaciones de arriba tiene que ser positivo, obtenemos

$$\frac{t_1^{\alpha_{12}}}{t_2^{\alpha_{12}}} > -\lambda_{12}\frac{\beta_{12}}{\mu_1} \quad \text{y} \quad \frac{t_2^{\alpha_{21}}}{t_1^{\alpha_{21}}} > -\lambda_{12}\frac{\beta_{21}}{\mu_2},$$

lo cual es imposible si $-\lambda_{12} \geq \max\{\frac{\mu_1}{\beta_{12}}, \frac{\mu_2}{\beta_{21}}\}$. Por lo tanto, si la desigualdad $-\lambda_{ij} \geq \max\{\frac{\mu_i}{\beta_{ij}}, \frac{\mu_j}{\beta_{ji}}\}$ para $i = 1$ y $j = 2$ se satisface, entonces

$$\left(\frac{v}{\|v\|_1}, \frac{v}{\|v\|_2}, \frac{v_3}{\|v_3\|_3}, \ldots, \frac{v_M}{\|v_M\|_M}\right) \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Esto demuestra que, si $-\lambda_{ij} \geq \max\{\frac{\mu_i}{\beta_{ij}}, \frac{\mu_j}{\beta_{ji}}\}$ para algún $i \neq j$, entonces $\mathcal{U} \neq \mathcal{T}$.

(c) : Si (u_n) es una sucesión en $\widetilde{\mathcal{U}}$ tal que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \partial\mathcal{U}$, entonces para cada $i, j = 1, \dots, M$ ocurre que $a_{u_n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_{u,i}$, $b_{u_n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_{u,i}$ y $d_{u_n,ij} \xrightarrow[n\to\infty]{} d_{u,ij}$. El Lema 1.4 garantiza además que $s_{u_n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} s_{u,i}$. Por lo tanto el mapeo $\widetilde{\mathbf{m}} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{N}$ es continuo. Además, la inversa de $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ dada por

$$\mathbf{m}^{-1}(u_1, \dots, u_M) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|_1}, \dots, \frac{u_M}{\|u_1\|_M} \right)$$

es continua.

Por lo tanto $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ es un homemomorfismo.

(d) : Si $(u_1, \dots, u_M) \in \mathcal{N}$, entonces

$$\|u_i\|_i^2 \leq \mu_i \int_\Omega |u_i|^p \quad \text{para } i = 1, \dots, M,$$

pues $\lambda_{ij} < 0$ para cada $i, j = 1, \dots, M$.

Ahora, aplicando la desigualdad de Sobolev y obtenemos

$$\|u_i\|_i^2 \leq \mu_i C^p \|u_i\|_i^p,$$

donde C es la constante positiva, asociada a la desigualdad de Sobolev, que sólo depende de p y N. Ahora, tomando $d_0 := \min_{1\leq i\leq N}\{C^{-2}/\mu_i^{2/p}\}$ obtenemos la estimación deseada.

(e) : Sea (u_n) una sucesión en $\mathcal{U}$ tal que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \partial\mathcal{U}$. Si la sucesión $s_{u_n}u_n$ estuviese acotada, entonces, pasando a una subsucesión tenemos que $s_{u_n,i}u_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} s_{u_i}u_i$. Ya que $\mathcal{N}$ es cerrado ocurre que $(s_1u_1, \dots, s_Mu_M) \in \mathcal{N}$. Por lo tanto $u \in \mathcal{U}$. Lo cual es imposible, pues $u \in \partial\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{T}$. □

El argumento usado en la prueba de la parte (b) de la Proposición 2.8 nos permite atisbar en la naturaleza de ciertas soluciones completamente no triviales, más precisamente: la existencia de tales soluciones depende directamente de los parámetros dados, como veremos a continuación.

Definición 2.9. *Una solución completamente no trivial u de (1.1) será llamada sincronizada si $u_i = t_i v$ y $u_j = t_j v$ para $i \neq j$ y $t_i, t_j \in \mathbb{R}$.*

Corolario 2.10. *Existe un $\Lambda_0 < 0$ tal que $\lambda_{ij} < \Lambda_0$ para todo i, j, entonces el sistema (1.1) no tiene soluciones sincronizadas completamente no triviales.*

Demostración. Basta con tomar Λ_0 tal que $-\Lambda_0 \geq \max\{\frac{\mu_i}{\beta_{ij}}, \frac{\mu_j}{\beta_{ji}}\}$ para todo $i \neq j$. De esta manera, si tuviera una solución u sincronizada completamente no trivial, entonces (2.2) se satisface y por lo tanto u no puede ser solución de (1.1). □

El toro $\mathcal{T}$ es una subvariedad de Hilbert suave en $\mathcal{H}^G$. El espacio tangente a $\mathcal{T}$ en un punto $u = (u_1, \dots, u_M) \in \mathcal{T}$ está dadp por

$$T_u(\mathcal{T}) = \{(v_1, \dots, v_M) \in \mathcal{H}^G \ : \ \langle u_i, v_i \rangle_i = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M\}.$$

Sea $\widetilde{\Psi} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{\Psi}(u) := \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{m}}(u))$ y sea Ψ la restricción de $\widetilde{\Psi}$ a $\mathcal{U}$. De esta manera

$$\Psi(u) = \frac{p-2}{2p}\sum_{i=1}^{M}\|s_{u,i}u_i\|_i^2 = \frac{p-2}{p}\sum_{i=1}^{M}s_{u,i}^2 \quad \text{para cada } u \in \mathcal{U} \tag{2.3}$$

Si $u \in \mathcal{U}$ y la derivada $\Psi'(u)$ de Ψ en u existe, entonces

$$\|\Psi'(u)\|_* := \sup_{\substack{v\in T_u(\mathcal{T}),\\ v\neq 0}} \frac{\Psi'(u)v}{\|v\|},$$

i.e., $\|\cdot\|_*$ es la norma en el espacio cotangente $T_u^*(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ en u.

Definición 2.11. *Una sucesión (u_n) en $\mathcal{U}$ es llamada una sucesión de Palais-Smale para para Ψ en c si $\Psi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ y $\|\Psi'(u_n)\|_* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y se dice que Ψ satisface la condición $(PS)_c$ si cada sucesión de Palais-Smale para para Ψ en c tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 2.12. *(i) $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ y*

$$\Psi'(u)v = \mathcal{J}'(\mathbf{m}(u))[s_u v] \quad \text{para todo } u \in \mathcal{U} \text{ y } v \in T_u(\mathcal{T}). \tag{2.4}$$

(ii) Si (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para para Ψ en c, entonces $(\mathbf{m}(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para para $\mathcal{J}$ en c . Recíprocamente, si (u_n) es de Palais-Smale para para $\mathcal{J}$ en c y $u_n \in \mathcal{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\mathbf{m}^{-1}(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para para Ψ en c.

(iii) u es un punto crítico para Ψ si y sólo si $\mathbf{m}(u)$ es es un punto crítico completamente no trivial para $\mathcal{J}$.

(iv) Si (u_n) es una sucesión en $\mathcal{U}$ tal que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \partial\mathcal{U}$, entonces $\Psi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$,

(v) El funcional Ψ es par, es decir $\Psi(u) = \Psi(-u)$ para cada $u \in \mathcal{U}$.

Demostración. Adaptamos los argumentos usados en [5, Proposition 9] y [5, Corollary 10].

(i) : Sea $u \in \widetilde{\mathcal{U}}$ y $v \in \mathcal{H}^G$. Ya que s_u es el máximo de de J_u, usando el teorema de valor medio obtenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(u+tv) - \widetilde{\Psi}(u) &= \mathcal{J}(s_{u+tv}(u+tv)) - \mathcal{J}(s_u u)\\ &\leq \mathcal{J}(s_{t+tv}(u+tv)) - \mathcal{J}(s_{u+tv}u) = \mathcal{J}'(s_{u+tv}(u+\tau_1 tv))[ts_u v].\end{aligned}$$

para $|t|$ lo suficientemente pequeño y algún $\tau_1 \in (0,1)$. Similarmente

$$\widetilde{\Psi}(u+tv) - \widetilde{\Psi}(u) \geq \mathcal{J}(s_u(u+tv)) - \mathcal{J}(s_u u) = \mathcal{J}'(s_u(u+\tau_2 tv))[ts_u v]$$

para algún $\tau_2 \in (0,1)$.

Ahora bien, por la continuidad de s_u y estas dos desigualdades obtenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{\Psi}(u+tv) - \widetilde{\Psi}(u)}{t} = \mathcal{J}'(s_u u)[s_u v] = \mathcal{J}'(\widetilde{\mathbf{m}}(u))[s_u v].$$

Puesto que el lado derecho de la identidad anterior es una función lineal en v y continua en v y u se sigue que $\widetilde{\Psi}$ es clase C^1. Finalmente, si $u \in \mathcal{U}$ y $v \in T_u(\mathcal{T})$, entonces $\widetilde{\mathbf{m}}(u) = \mathbf{m}(u)$, lo que demuestra lo que se quería.

(ii) : Notemos que

$$\mathcal{H}^G = T_u(\mathcal{T}) \oplus (\mathbb{R}u_1, \dots, \mathbb{R}u_M)$$

para cada $u \in \mathcal{U}$. Ya que $\mathbf{m}(u) \in \mathcal{N}$, tenemos

$$s_{u,i}\partial_i\mathcal{J}(\mathbf{m}(u))u_i = \partial_i\mathcal{J}(\mathbf{m}(u))\mathbf{m}(u)_i = 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{J}'(\mathbf{m}(u))w = 0 \quad \text{para } w \in (\mathbb{R}u_1, \dots, \mathbb{R}u_M).$$

Entonces, de (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} C_0(\min_i\{s_{u,i}\}) \left\|\mathcal{J}'(\mathbf{m}(u))\right\|_{(\mathcal{H}^G)^{-1}} \leq \left\|\Psi'(u)\right\|_* &= \sup_{\substack{v \in T_u(\mathcal{T}),\\ v \neq 0}} \frac{|\mathcal{J}'(\mathbf{m}(u))[s_u v]|}{\|v\|} \\ &\leq (\max_i\{s_{u,i}\}) \left\|\mathcal{J}'(\mathbf{m}(u))\right\|_{(\mathcal{H}^G)^{-1}}. \end{aligned}$$

Si $(\Psi(u_n))$ converge, entonces de (2.3) deducimos que (s_{u_n}) es acotada en $\mathbb{R}^M$. Más aún, por 2.8(d), esta sucesión está acotada más allá de cero. Por lo tanto $(\mathbf{m}(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para $\mathcal{J}$ en c si y sólo si (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ en c, como se quería.

(iii) : Como $\mathcal{J}'(\mathbf{m}(u))w = 0$ si $w \in (\mathbb{R}u_1, \dots, \mathbb{R}u_M)$, se sigue de (2.4) que $\Psi'(u) = 0$ si y sólo si $\mathcal{J}'(\mathbf{m}(u)) = 0$. Así, como $\mathbf{m}(u) \in \mathcal{N}$, por lo que $\mathbf{m}(u)$ es un punto critico de $\mathcal{J}$ completamente no trivial siempre que $\Psi'(u) = 0$.

(iv) : Sea (u_n) es una sucesión en $\mathcal{U}$ tal que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \partial\mathcal{U}$. Entonces, Como $\mathbf{m}(u_n) \in \mathcal{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la identidad (2.1) nos dice que

$$J(\mathbf{m}(u_n)) = \frac{p-2}{2p}\sum_{i=1}^{M} \|\mathbf{m}(u_n)_i\|_i^2.$$

Por otro lado, 2.8(e) asegura que $\|\mathbf{m}(u_n)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Esto demuestra que

$$\Psi(u_n) = J(\mathbf{m}(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

como se quería.

(v) : Como $-u \in \mathcal{U}$ si y sólo si $u \in \mathcal{U}$, tenemos que $s_{-u} = s_u$. Así, como $\mathcal{J}$ es par, ocurre que

$$\Psi(-u) = \mathcal{J}(s_{-u}(-u)) = \mathcal{J}(s_u(-u)) = \mathcal{J}(s_u u) = \Psi(u).$$

□

Definición 2.13. *Sea Z un subconjunto simétrico de $\mathcal{T}$, es decir, tal que $-u \in Z$ siempre que $u \in Z$. Si $Z \neq 0$ género de Z es el entero $k \geq 1$ más pequeño tal que existe un mapeo impar y continuo $Z \to \mathbb{S}^{k-1}$, donde $\mathbb{S}^{k-1}$ es la esfera unitaria en en $\mathbb{R}^k$. A tal entero lo denotamos como* $\operatorname{genus}(Z)$. *Si tal número no existe, definimos* $\operatorname{genus}(Z) := \infty$. *Además,* $\operatorname{genus}(\emptyset) := 0$.

Como es usual, introducimos la siguiente notación

$$\Psi^{\leq a} := \{u \in \mathcal{U} \;:\; \Psi(u) \leq a\} \quad \text{y} \quad K_c := \{u \in \mathcal{U} \;:\; \Psi(u) = a, \|\Psi'(u)\|_* = 0\}.$$

Del Teorema 2.12 obtenemos el siguiente resultado, que nos garantiza la existencia de puntos críticos bajo ciertas condciones en el funcional.

Teorema 2.14. (a) *Si $\inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J}$ es alcanzado por $\mathcal{J}$ en algún $u = (u_1, \ldots, u_M) \in \mathcal{N}$, entonces u y $|u| := (|u_1|, \ldots, |u_M|)$ son soluciones completamente no triviales del sistema (1.1).*

(b) *Si $\Psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ satisface la condición $(PS)_c$ para cada $c \leq a$, entonces el sistema (1.1) tiene, o bien una infinidad de soluciones completamente no triviales con la misma norma, o bien tiene al menos* $\operatorname{genus}(\Psi^{\leq a})$ *soluciones completamente no triviales con normas distintas dos a dos.*

(c) *Si $\Psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ satisface la condición $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y* $\operatorname{genus}(\mathcal{U}) = \infty$*, entonces el sistema (1.1) tiene una sucesión no acotada de soluciones completamente no triviales.*

Demostración. El Teorema 2.12(iii) asegura que u es un punto crítico de Ψ si y sólo si $\mathbf{m}(u)$ es un punto crítico completamente no trivial de $\mathcal{J}$. Además notemos que (2.1) es equivalente a

$$\Psi(u) = \frac{p-2}{2p} \|\mathbf{m}(u)\|^2 .$$

(a) : Si $\inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J} = \mathcal{J}(u)$ con $u \in \mathcal{N}$, entonces $\mathbf{m}^{-1}(u) \in \mathcal{U}$ y $\inf_{\mathcal{U}} \Psi = \Psi(\mathbf{m}^{-1}(u))$. Así, u es punto crítico completamente no trivial de $\mathcal{J}$. Además, como $|u| \in \mathcal{N}$ y $\mathcal{J}(|u|) = \mathcal{J}(u)$, lo mismo ocurre para $|u|$. Esto demuestra lo que se quería.

(b) : El Teorema 2.12(iv) asegura que $\mathcal{U}$ es positivamente invariante bajo el flujo pseudo gradiente negativo de Ψ. De manera que el lema de deformación usual se satisface para Ψ, vea por ejemplo [4, Section II.3] o [6, Section 5.3].

Sea

$$c_j := \inf\{c \in \mathbb{R} \;:\; \operatorname{genus}(\Psi^{\leq c}) \geq j\}.$$

Un argumento estándar, como el usado en la prueba de [2, Theorem 9.12], demuestra que bajo, nuestras hipótesis, c_j es un punto crítico de Ψ para cada $j = 1, \ldots, \operatorname{genus}(\Psi^{\leq a})$. Más aún, si algunos de estos valores coinciden, digamos $c := c_j = \cdots = c_{j+k}$, entonces $\operatorname{genus}(K_c) \geq k+1 \geq 2$. En cuyo caso K_c es un conjunto infinito. Vea por ejemplo [4, Lemma II.5.6], o bien [2, Proposition 9.30].

(c) : Bajo estás hipótesis se tiene que c_j es un valor crítico para cada $j \in \mathbb{N}$. Además un argumento bien conocido (ver [2, Proposition 9.33]) demuestra que $c_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$. □

3. Resultados de existencia

En esta sección aplicamos los resultados desarrollados para estudiar la existencia de soluciones simétricas del problema (1.1). Primero veremos que el problema (1.1) no puede ser resuelto minimizando el funcional de energía en todo el espacio $H_0^1(\Omega)^M$. No obstante, cuando introducimos simetrías obtenemos una infinidad de puntos críticos y, más aún, uno de ellos es positivo y tiene la energía mínima (entre el conjunto de las soluciones con tales simetrías). Un resultado de compacidad por simetrías será clave en la demostración del Teorema 1.1.

Definamos

$$S_{p,i} := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\|w\|_i^2}{|w|_{p,i}^2}$$

Proposición 3.1. *Tenemos que*

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} \mathcal{J}(u) = \frac{p-2}{2p} \sum_{i=1}^{M} S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}} \tag{3.1}$$

y este ínfimo no se alcanza por $\mathcal{J}$ en $\mathcal{N}$.

Demostración. Primero demostraremos (3.1). Consideramos a $H_0^1(\Omega)$ como un subespacio de $H^1(\Omega)$, vía su extensión trivial. Ahora, dado $u = (u_1, \ldots, u_M) \in \mathcal{N}$, ocurre que $\|u_i\|_i^2 \leq |u_i|_{p,i}^p$ para cada $i = 1, \ldots, M$, pues $\lambda_{ij} < 0$ para cada $i \neq j$. Así,

$$S_{p,i} \leq \frac{\|w\|_i^2}{|w|_{p,i}^2} \leq (\|u_i\|_i^2)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Como $u \in \mathcal{N}$, podemos aplicar (2.1) y obtenemos que

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{p-2}{2p} \sum_{i=1}^{M} S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}}$$

Para probar la desigualdad opuesta fijamos $B_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \ : \ |y - x| < R\}$. Sea $w_{i,R}$ la solución de energía mínima al problema

$$-\Delta w + \kappa_i w = \mu_i |w|^{p-2} w, \quad w \in H_0^1(B_R(x)),$$

La cual existe pues $p \in (2, 2^*)$. Estas soluciones satisfacen que

$$\lim_{R \to \infty} \|w_{i,R}\|_i^2 = S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}}.$$

Ahora, para cada $i = 1, \ldots, M$ fijamos $\xi_{i,R} \in \Omega$ tal que $B_R(\xi_{i,R}) \subset \Omega$ y $B_R(\xi_{i,R}) \cap B_R(\xi_{j,R}) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Entonces definimos $u_{i,R}(x) := w_{i,R}(x - \xi_{j,R})$ y $u_R := (u_{1,R}, \ldots, u_{M,R})$. Esto asegura que $u_R \in \mathcal{N}$ y además,

$$\lim_{R \to \infty} \mathcal{J}(u_R) = \frac{p-2}{2p} \sum_{i=1}^{M} S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}}.$$

Esto demuestra (3.1).

Ahora veamos que el mínimo no se alcanza. En busca de una contradicción suponemos que $u = (u_1, \ldots, u_M) \in \mathcal{N}$ y que $\mathcal{J}(u) = \dfrac{p-2}{2p} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}}$. Podemos suponer que $u_i \geq 0$ para cada $i = 1, \ldots, M$. Fijamos un $i = 1 \ldots, M$ y consideramos dos casos. Si $\int_\Omega u_j^{\alpha_{ij}} u_i^{\beta_{ij}} \neq 0$ para alguna pareja $i \neq j$, entonces $\|u_i\|_i^2 < |u_i|_{p,i}^p$ y, por lo tanto, $S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}} < \|u_i\|_i^2$. Esto implica que $\mathcal{J}(u) > \frac{p-2}{2p} \sum_{i=1}^{M} S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}}$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, si $\int_\Omega u_j^{\alpha_{ij}} u_i^{\beta_{ij}} = 0$ para todo $i \neq j$, entonces $\|u_i\|_i^2 = |u_i|_{p,i}^p = S_{p,i}^{\frac{p}{p-2}}$. Esto nos dice que u_i es una solución no trivial al problema

$$-\Delta w + \kappa_i w = \mu_i |w|^{p-2} w, \quad w \in H_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Sin embargo, el hecho de que $\int_\Omega u_j^{\alpha_{ij}} u_i^{\beta_{ij}} = 0$ también implica que $u_j^{\alpha_{ij}} u_i^{\beta_{ij}} = 0$ casi en todo punto de Ω. Ya que $u_j \neq 0$ para todo j, debería ocurrir que $u_i = 0$ en un conjunto de medida positiva de $\mathbb{R}^N$. Eso contradice el principio del máximo. Esto termina la demostración de que $\mathcal{J}$ no alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$.

□

Sin embargo, cuando nos restringimos a un espacio adecuado, a un subespacio de $H_0^1(\Omega)$ de funciones con ciertas simetrías entonces recuperamos la compacidad del encaje en $L^p(\Omega)$. Esto nos permite hallar múltiples soluciones al sistema (1.1) y más aún, minimizar el funcional $\mathcal{J}$ en este espacio.

Sean G un subgrupo cerrado de $O(N)$ y $Gx := \{gx \ : \ g \in G\}$ la G-órbita de $x \in \mathbb{R}^N$. Además, sea $\mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ |x| = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$. Recordemos que Ω es un dominio exterior G-invariante.

Lema 3.2. *Si* $\dim(Gx) > 0$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, *entonces, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $d_k > 0$ *tal que, para cada* $y \in \mathbb{S}^{N-1}$ *hay* $g_1, \ldots, g_k \in G$ *que satisfacen*

$$\min_{i \neq j} |g_i y - g_j y| \geq d_k.$$

Demostración. En busca de una contradicción suponemos que hay un $k \in \mathcal{N}$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in \mathbb{S}^{N-1}$ tal que

$$\min_{i \neq j} |g_i y_n - g_j y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{para cualesquiera } k \text{ elementos } g_1, \ldots, g_k \in G.$$

Entonces, pasando a una subsucesión, tenemos que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ en $\mathbb{S}^{N-1}$. Como $\dim(Gy) > 0$ existen $\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_k \in G$ tales que $\widetilde{g}_i y \neq \widetilde{g}_j y$ si $i \neq j$. Fijemos $i_0 \neq j_0$ tales que para una subsucesión de (y_n),

$$|\widetilde{g}_{i_0} y_n - \widetilde{g}_{j_0} y_n| = \min_{i \neq j} |\widetilde{g}_i y_n - \widetilde{g}_j y_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$0 < \min_{i \neq j} |\widetilde{g}_i y - \widetilde{g}_j y| \leq |\widetilde{g}_{i_0} y - \widetilde{g}_{j_0} y| = \lim_{n \to \infty} |\widetilde{g}_i y_n - \widetilde{g}_j y_n| = 0,$$

lo cual es una contradiccón. □

Lema 3.3. *Supongamos que* $\dim(Gx) > 0$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *y que* Ω *es un dominio exterior* G*-invariante. Entonces, el encaje* $H_0^1(\Omega)^G \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *es compacto para cada* $p \in (2, 2^*)$.

Demostración. Sea (u_n) una sucesión acotada de en $H_0^1(\Omega)^G$. Entonces, una subsucesión cumple que $u_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^G$. Sea $v_n := u_n - u$. Una subsucesión de (v_n) satisface que $v_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} 0$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^G$, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ y $v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ casi en todo punto $x \in \Omega$.

Nuestro objetivo es demostrar

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_N} \int_{B_1(x)} v_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.2}$$

Para esto, fijamos $C > 0$ tal que $\|v_n\|^2 \le C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\|\cdot\|$ es la norma estándar en $H_0^1(\Omega)$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $C < \varepsilon k$, tomamos $d_k > 0$ como en el Lema 3.2 y fijamos $R_k > \frac{2}{d_k}$. Consideramos dos casos. Supongamos que $|x| \ge R_k$. Entonces, por el Lema 3.2 existen $g_1, \dots, g_k \in G$ tales que

$$|g_i x - g_j x| \ge |x|\, d_k \quad \text{para cualesquiera } i \ne j.$$

Como $|x| \ge R_k$, se tiene que $|g_i x - g_j x| > 2$. Por lo tanto $B_1(g_i x) \cap B_1(g_j x) = \emptyset$ si $i \ne j$ y, dado que, v_n es G-invariante, obtenemos

$$k \int_{B_1(x)} v_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_1(g_i x)} v_n^2 \le \int_\Omega v_n^2 \le \|v_n\|^2 \le C \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia

$$\int_{B_1(x)} v_n^2 < \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y todo } |x| \ge R_k. \tag{3.3}$$

Supongamos ahora que $|x| \le R_k$. Entonces, como $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ fuertemente en $L^2(B_{R_k+1}(0))$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\int_{B_1(x)} v_n^2 \le \int_{B_{R_k+1}(0)} v_n^2 < \varepsilon \quad \text{para todo } n \ge n_0 \text{ y todo } |x| \le R_k. \tag{3.4}$$

De las desigualdades (3.3) y (3.4) se obtiene (3.2). Ahora bien, aplicando el lema de nulidad de Lions [6, Lemma 1.21], concluimos que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ fuertemente en $L^p(\Omega)$ para cualquier $p \in (2, 2^*)$. $\square$

Los siguientes lemas nos permitirán aplicar la teoría abstracta desarrollada en la Sección 2.

Lema 3.4. *Supongamos que* $\dim(Gx) > 0$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *y que* Ω *es un dominio exterior* G*-invariante. Entonces, el funcional* $\mathcal{J}$ *satisface la condición de* $(PS)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea (u_n) una sucesión en $\mathcal{H}^G$ tal que $\mathcal{J}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ y $\mathcal{J}'(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $(\mathcal{H}^G)'$. Veremos que tiene una subsucesión convergente.

Se tiene la estimación

$$\frac{p-2}{p}\left\|u_n\right\|^2 = \mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}'(u_n)u_n \leq c_1 + c_2\left\|u_n\right\|.$$

Así, la sucesión (u_n) es acotada. Entonces, pasando a una subsucesión tenemos que $u_n \to u$ débilmente en $\mathcal{H}^G$ y, debido al Lema 3.3, $u_n \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)^M$. Así, tomando el límite en las fórmula para $\partial_i\mathcal{J}(u_n)u_i$ hallada en la Observación 2.4 y que $\mathcal{J}'(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $(\mathcal{H}^G)'$ obtenemos que

$$0 = \left\|u_i\right\|_i^2 - \int_\Omega \mu_i\left|u_i\right|^p - \sum_{j\neq i}\int_\Omega \lambda_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left|u_i\right|^{\beta_{ij}} \quad \text{para } i = 1\dots, M.$$

Similarmente, tomando el límite superior ahora para $\mathcal{J}'(u_n)u_n$ y usando que $u_n \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)^M$ obtenemos

$$0 = \limsup_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|^2 - \sum_{i=1}^M\int_\Omega \mu_i\left|u_i\right|^p - \sum_{j\neq i}\int_\Omega \lambda_{ij}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}}\left|u_i\right|^{\beta_{ij}}.$$

Así, $\limsup_{n\to\infty}\|u_n\| = \|u\|$. Sin embargo, como $u_n \to u$ débilmente en $\mathcal{H}^G$ se tiene que $\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|$. Esto demuestra el límite existe y que

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|.$$

Esto implica que, $u_n \to u$ fuertemente en $\mathcal{H}^G$, lo que concluye la demostración.

$\square$

Lema 3.5. *Sea $\mathcal{U}^G := \mathcal{U}\cap\mathcal{H}^G$. Entonces,* $\operatorname{genus}(\mathcal{U}^G) = \infty$.

Demostración. Dado $k \geq 1$, para cada $j = 1,\dots,k$, $i = 1,\dots,M$, escogemos $u_{j,i} \in H_0^1(\Omega)^G$ tales que $\left\|u_{j,i}\right\|_i = 1$ y $\sup(u_{j,i})\cap\sup(u_{j',i'}) = \emptyset$ siempre que $(i,j)\neq(i',j')$.

Sea $\{e_j \ : \ 1\leq j\leq k\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^k$ y Q el conjunto

$$Q := \left\{\sum_{j=1}^k r_j\hat{e}_j \ : \ \hat{e}_j \in \{e_j, e_j\}, \ r_j \in [0,1], \ \sum_{j=1}^k r_j = 1\right\}.$$

El conjunto Q es homeomorfo a $\mathbb{S}^{k-1}$ vía un homemorfismo impar.

Ahora, para cada $i = 1,\dots,M$ definimos $\sigma_i : Q \to H_0^1(\Omega)^G$ como $\sigma_i(e_j) := u_{j,i}$, $\sigma_i(-e_j) := -u_{j,i}$ y

$$\sigma_i\left(\sum_{j=1}^k r_j\hat{e}_j\right) := \frac{\sum_{j=1}^k r_j\sigma_i(\hat{e}_j)}{\left\|\sum_{j=1}^k r_j\sigma_i(\hat{e}_j)\right\|_i}.$$

Ahora bien, como $u_{j,i}$ y $u_{j',i'}$ tiene soportes ajenos si $(j,i) \neq (j',i')$, los mapeos $\sigma_1 \ldots, \sigma_M$ están bien definidos y, para cada $x \in Q$, $\text{supp}(\sigma_i(x)) \cap \text{supp}(\sigma_{i'}(x)) = \emptyset$ siempre que $i \neq i'$. Luego, la Proposición 2.8 asegura que el mapeo $\sigma : Q \to \mathcal{U}^G$ dado por $\sigma(x) := (\sigma_1(x) \ldots, \sigma_M(x))$ esta bien definido. Además, es impar y continuo, pues cada una de sus coordenadas lo es. La conclusión es que

$$\text{genus}(\mathcal{U}^G) \geq \text{genus}(Q) = k.$$

Ya que $k \geq 1$ fue arbitrario, el resultado se sigue.

□

Finalmente, nos encontramos en condiciones de demostrar el resultado principal del trabajo.

Demostración del Teorema 1.1. El Teorema 2.12(ii) y el Lema 3.4 implican que Ψ satisface la condición $(PS)_c$ para cada $c \in \mathbb{R}$. Así, el Lema 3.5 y el Teorema 2.14 nos dan la conclusión del Teorema 1.1, como se quería. □

Bibliografía

[1] Clapp, M., & Szulkin, A. (2019). A simple variational approach to weakly coupled competitive elliptic systems. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 26, 1-21.

[2] Rabinowitz, P.H.: Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. American Mathematical Society, Providence, RI, (1986)

[3] Soave, N.: On existence and phase separation of solitary waves for nonlinear Schrödinger systems modelling simultaneous cooperation and competition. Calc. Var. Partial Differ. Equ. 53(3–4), 689–718 (2015)

[4] Struwe, M.: Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Second edition. Ergebnisse der Mathe- matik und ihrer Grenzgebiete, 34. Springer, Berlin, (1996)

[5] Szulkin, A., Weth, T.: The method of Nehari manifold, in Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, Boston: International Press, 2010, pp. 597–632.

[6] Willem, Michel: Minimax theorems, Progress in Nonlineal Differantial Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.