ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES



**Mawency Vergel Ortega Olga Lucy Rincón Leal**

**Eduardo Ibargüen Mondragón **







Mawency Vergel Ortega Olga Lucy Rincón Leal

Eduardo Ibargüen Mondragón



ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES

© Mawency Vergel Ortega [mawency@ufps.edu.co](mailto:mawency@ufps.edu.co)

Olga Lucy Rincón Leal [olgarincon@ufps.edu.co](mailto:olgarincon@ufps.edu.co)

Eduardo Ibargüen Mondragón [edbargun@udenar.edu.co](mailto:edbargun@udenar.edu.co)

© Editorial Universidad de Nariño

ISBN: 978-628-7509-35-1 (impreso)

ISBN: 978-628-7509-36-8 (digital)

Primera edición

Impresión:

Graficolor Pasto SAS

Calle 18 No. 29-67 Tel. 7310652

[graficolorpasto@hotmail.com](mailto:graficolorpasto@hotmail.com)

Febrero de 2022

San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin autorización escrita de los autores o de la Editorial Universidad de Nariño.

# ´Indice general

###### Pr´ologo 11

###### Generalidades de las ecuaciones diferenciales 13

* 1. Momentos hist´oricos 13
  2. Una sencilla ecuacio´n diferencial 20
  3. Definici´on y clasificaci´on de las ecuaciones diferenciales 21
  4. Ecuaciones diferenciales segu´n su linealidad 23
  5. Soluci´on de una ecuacio´n diferencial 24
     1. Soluci´on de ecuaciones diferenciales por anti-derivada 27
     2. Soluci´on particular de una ecuaci´on diferencial 28
  6. Estrategia de soluci´on 29
  7. Ejercicios 30

###### Ecuaciones diferenciales de primer orden 32

* 1. Teoremas 32
  2. M´etodos de soluci´on para ecuaciones de variables separables de primer orden 35
     1. Soluci´on de ecuaci´on diferencial utilizando software Mathematica 38
  3. M´etodos de sustituci´on 38
     1. Ecuaci´on diferencial homog´enea 38

*dy*

* + 1. Ecuaciones de la forma

= *f* (*Ax* + *By* + *C*) 44

*dx*

* 1. Ecuaci´on diferencial exacta 47
     1. Soluci´on de una ecuaci´on diferencial exacta 49
     2. Otra forma de resolver las ecuaciones diferenciales exactas 50
     3. Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas 52
     4. Ecuaciones diferenciales de la forma *yf*(*x, y*)*dx* + *xg*(*x, y*)*dy* = 0 57
     5. Factor integrante por inspeccio´n 58
  2. Ecuaci´on diferencial lineal 59
     1. M´etodo de variaci´on de par´ametros 59
     2. M´etodo de factor integrante para resolver ecuaciones diferenciales lineales 64
  3. Ecuaci´on diferencial de Bernoulli 65
  4. Ecuaci´on de Ricatti 68
  5. M´etodo de las Isoclinas 69
     1. Puntos ordinarios y singulares 71
     2. Ecuaci´on diferencial Aut´onoma 72
  6. Ecuaci´on de Clairaut 75
  7. Ejercicios 78
     1. Ecuaciones de Variables Separables 78

*dy*

* + 1. Ecuaci´on de la forma

= *f* (*Ax* + *By* + *C*) 78

*dx*

7

* + 1. [Ecuaciones diferenciales exactas 78](#_TOC_250029)
    2. Ecuaciones reducibles a diferenciales exactas 79
    3. [Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 79](#_TOC_250028)

1. [Aplicaciones para ecuaciones diferenciales de primer orden 80](#_TOC_250027)
   1. [Crecimiento y decrecimiento 80](#_TOC_250026)
      1. [Ecuaci´on de Malthus 80](#_TOC_250025)
      2. [Crecimiento Log´ıstico 83](#_TOC_250024)
      3. [Vida media 86](#_TOC_250023)
      4. M´etodo del carbono C-14 87
   2. [Ley de enfriamiento de Newton 90](#_TOC_250022)
   3. [Mezclas 93](#_TOC_250021)
   4. Aplicaciones a la mec´anica 94
      1. [Soluciones qu´ımicas 101](#_TOC_250020)
      2. [Modelamiento matem´atico de procesos industriales 104](#_TOC_250019)
      3. [Grados de libertad 108](#_TOC_250018)
      4. [Circuitos el´ectricos 109](#_TOC_250017)
      5. [Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en los modelos econ´omicos 112](#_TOC_250016)
      6. [Aplicaciones a volu´menes 114](#_TOC_250015)
      7. [Trayectorias ortogonales 116](#_TOC_250014)
   5. Curvas determinadas de propiedades geom´etricas 117
   6. [T´ecnica de cuantificaci´on 117](#_TOC_250013)
   7. [Ejercicios 119](#_TOC_250012)
      1. [Crecimiento y Decaimiento 119](#_TOC_250011)
      2. [Fechado con carbono 120](#_TOC_250010)
      3. [Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton 120](#_TOC_250009)
      4. Mezclas 120
      5. [Ejercicios Generales 120](#_TOC_250008)
2. [Ecuaciones diferenciales de orden superior 122](#_TOC_250007)
   1. [Ecuaci´on diferencial lineal de orden n 122](#_TOC_250006)
      1. [El Wronskiano 123](#_TOC_250005)
   2. [Ecuaciones diferenciales de segundo orden 127](#_TOC_250004)

[d2y](#_TOC_250003)

* + 1. [Ecuaciones del tipo = *f* (*x*) 127](#_TOC_250002)

[dx2](#_TOC_250001)

* + 1. [Ecuaciones del tipo d2y = f (x, dy ) 128](#_TOC_250000)

*dx*2 *dx*

* + 1. Otro tipo de ecuaciones 130
    2. EDL con coeficientes lineales 132
  1. Ejercicios 137
     1. Mixtos 137

*d*2*y dy*

4.3.2. Ecuaciones del tipo *dx*2 = *f*

*x,*

*dx*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138

*d*2*y*

*d*2*y*

4.3.3. Ecuaciones del tipo *dx*2 − *f* (*y*) = 0 y *dx*2 = *f*

*y,*

*dx*

. . . . . . . . . . . . . . . 138

*dy*

###### Aplicaciones para ecuaciones diferenciales de orden superior 140

* 1. Segunda ley de Newton y la ley de la gravitaci´on universal 140
  2. Movimiento arm´onico simple 141
     1. Fuerza de atracci´on 147
  3. Vibraciones forzadas 150
  4. El fen´omeno de resonancia 152

*´Indice general* 9

* 1. Circuitos el´ectricos 154
  2. Flexi´on de vigas 155
  3. Condiciones de frontera 158
  4. El cable suspendido 159
  5. Romance de la derivada y el arco tangente 161
  6. Ejercicios 162
     1. Movimiento armo´nico simple 162
     2. Ejercicios Mixtos 163

###### Series de Potencias 164

* 1. Ecuaci´on de Legendre 168
  2. Ecuaciones lineales con puntos singulares regulares 170
  3. Ecuaci´on de Bessel 177
  4. Ejercicios 182
     1. Soluciones de ecuaciones cl´asicas 182
     2. Mixtos 182

###### La transformada de Laplace 183

* 1. Definiciones 183
  2. Propiedades y Teoremas 186
  3. Aplicaciones de la transformada a las Ecuaciones diferenciales 189
  4. Soluci´on de sistemas lineales usando la transformaci´on de Laplace 192
  5. Ejercicios 194
     1. Transformada de Laplace 194
     2. Transformada inversa de Laplace 195
     3. Problemas de valores iniciales 195
     4. Sistemas lineales 196

**Bibliograf´ıa** 198

**197**

# Pr´ologo

En la actualidad, debido a la velocidad con la cual avanzan la ciencia y la tecnolog´ıa, se le dificulta a la sociedad adaptarse y acostumbrarse a los diferentes cambios que aparecen en el d´ıa a d´ıa. Uno de los factores que influyen de manera directa en esos resultados, es que las personas tienen como predilecci´on el uso de rutinas que les impiden acceder a nuevos conocimientos y dar un paso hacia el cambio, es claro que se sienten a gusto dado que cuestionar procesos o buscar alternativas les genera ansiedad e incomo- didad. Sin embargo, confrontar al cerebro genera nuevas neuronas para responder a esos cambios y eso proporciona salud f´ısica y mental. La matem´atica, parece ya estigmatizada como uno de los ‘cocos’ para el aprendizaje, es un campo de investigaci´on que el comu´n de las personas evita estudiar, y si lo hacen, se quedan en la descripci´on o reemplazo de f´ormulas b´asicas.

Se observa c´omo evaden los procesos que incluyen demostraciones, interpretaciones y soluciones de pro- blemas; como tambi´en la bu´squeda de nuevos modelos sin tener en cuenta los ya descritos en textos. No obstante, cuando la persona se enfrenta a estos retos, se motiva y alcanza logros que le generan motivaci´on y una mejor percepci´on de s´ı mismos. Por lo general, los procesos din´amicos que se involucran en el curso de ecuaciones diferenciales, permiten que un gran porcentaje de los estudiantes alcancen cierto tipo de resultados que fortalecen su formaci´on integral.

Tres siglos despu´es de su invenci´on, las ecuaciones diferenciales siguen siendo una fuente inagotable de soluciones a problemas en el ´area de la matem´atica pura y aplicada, posibilitan la formulaci´on y an´alisis de modelados matem´aticos. A trav´es de par´ametros, variables, relaciones, cambios o variaci´on de variables, diferenciales ordinarias, diferenciales parciales, series de potencias, series de Fourier, ecuaciones integrales, teoremas de existencia, justificaci´on rigurosa de procesos anal´ıticos y/o cuantitativos, las ecuaciones dife- renciales describen la din´amica aproximada de fen´omenos en diferentes campos tales como: la ingenier´ıa, medicina, econom´ıa, ciencias naturales, entre otros.

S´ın embargo, en el ´ambito escolar au´n es frecuente encontrar estudiantes y profesionales de a´reas afines, que cuestionan la utilidad y el uso de las ecuaciones diferenciales en la vida pr´actica. En este sentido, tanto los profesores como los matem´aticos, tienden a dar respuesta a esta inquietud por medio de apli- caciones de las ecuaciones, olvid´andose que esta no es la respuesta a la pregunta ¿para qu´e sirven las ecuaciones diferenciales?, lo cual deja el siguiente interrogante en el ambiente o en la mente del estudiante

¿para qu´e estudio ecuaciones diferenciales, si realmente no es pr´actico o no puedo utilizarlo? Ante este cuestionamiento, S´aenz, (2013) en su mon´ologo “Las matem´aticas son para siempre”, manifiesta que los profesores y matema´ticos se dividen en dos grandes grupos: aquellos que van al ataque y aquellos que est´an a la defensiva.

De esa manera, si su profesor de matem´aticas da una respuesta como: “esa pregunta no tiene sentido, la matem´atica tiene una l´ogica que se construye y no hace falta mirar las posibles aplicaciones, es como preguntarse y ¿para qu´e sirve la poes´ıa?, ¿para qu´e el amor?, pero que pregunta...joven”..., este profesor est´a al ataque, y aqu´el que est´a a la defensiva, responder´a: “aunque no te des cuenta, la matem´atica est´a detr´as de todo, y nombra los puentes y las computadoras, las tarjetas de cr´edito y el baloto, si no sabes matem´aticas el puente se te cae, estas sera´n las respuestas; tambi´en se encuentran aquellos los llamados pedagogos, quienes mencionan, “en el transcurso de la vida, vas haciendo una cajita de herramientas para avanzar a temas m´as altos, y te van a servir para que te vaya bien en ex´amenes de posgrado”. Y aunque todos tengan raz´on, quienes descubren la belleza de las matem´aticas encuentran su verdad, encuentran

11

que sirve en el disen˜o y construcci´on de edificios modernos, de puentes, es verdad que est´an en las compu- tadoras, en los algoritmos y en diferentes campos, pero tambi´en es verdad que aunque lo permean todo, hay que ir m´as all´a de lo palpable.

Es de esta verdad, que la ciencia tiene sentido porque nos hace entender el mundo y nos ayuda a sortear los hechos que ocurren en ´el. Hay ciencias que se pueden tocar como la ontol´ogica y otras no, como la matem´atica, pero, todo lo que hace ser ciencia a la ciencia, es el rigor de la matem´atica, adem´as, la ciencia funciona por la intuici´on y creatividad, y la matem´atica doma la intuici´on y la creatividad; y ese rigor inspirado en la intuici´on y la creatividad lo tienen las matem´aticas porque son “para siempre”, y los teoremas son para siempre, “los teoremas son verdades eternas”. Los matem´aticos se dedican a forjar teoremas, pero para hacer teoremas no hace falta una conjetura, hace falta una demostraci´on, de all´ı, un modelo basado en ecuaciones diferenciales requiere no quedarse en conjeturas que expliquen cambios, requiere de teoremas que generen teor´ıas para que as´ı el modelo le permita predecir eventos futuros o d´e explicaciones a fen´omenos validados de manera cient´ıfica.

Las ecuaciones diferenciales son consideradas el tema m´as significativo de estudio de la matem´atica, al confluir en ella, todas las tem´aticas vistas por los estudiantes desde su formaci´on b´asica hasta los cursos previos a las ecuaciones diferenciales; as´ı mismo, se consideran importantes por la transversalidad con otras ciencias y cursos presentes en el curr´ıculo en su formaci´on profesional, adem´as, porque est´an pre- sentes en las cuestiones m´as profundas que suscitan ideas y teor´ıas que conforman el an´alisis avanzado; as´ı por ejemplo, en el control de procesos, un ingeniero desea que las cosas no cambien, no obstante, para

´el estar en capacidad de disen˜ar el controlador apropiado, debe investigar c´omo var´ıa el comportamiento de un proceso qu´ımico ante los cambios de los disturbios externos y de las variables manipuladas, de esta manera, siempre el proceso obedece a ecuaciones diferenciales que implican cambios. Es dif´ıcil apreciar del todo los capullos de las plantas en floraci´on, sin un conocimiento razonable de las ra´ıces, tallos y hojas que los nutren y soportan, el mismo principio es v´alido en matem´aticas, en particular, en un curso de ecuaciones diferenciales.

El presente texto *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, es el resultado de la investigaci´on “Influencia de temas y pr´acticas pedag´ogicas en estudiantes de ecuaciones diferenciales de las Universidades Francisco de Paula Santander y de Narin˜o”, en el cual se determinan qu´e temas y pr´acticas tienen mejor percepci´on por parte de los estudiantes, y cu´ales les generan mayor motivaci´on”; incluye entonces, adem´as de ´estos, temas b´asicos y modelos matem´aticos generados por estudiantes y profesores.

*Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, tiene como objetivo extender los conocimientos de c´alculo dife- rencial, integral y vectorial a la descripci´on de procesos m´oviles mediante ecuaciones diferenciales, dar a conocer herramientas matem´aticas para resolver ecuaciones diferenciales, aumentar la capacidad de plantearlas y analizarlas, as´ı como dar a conocer los teoremas que soportan m´etodos de soluci´on y plan- teamientos de ecuaciones que den lugar a modelos matem´aticos aplicados en otras ciencias. Se espera que el lector logre un equilibrio entre metodolog´ıa, aplicaciones y fundamentos te´oricos, y cree en su mente y en la pr´actica, modelos matem´aticos de situaciones de la vida real.

**Cap´ıtulo 1**

# Generalidades de las ecuaciones diferenciales

## Momentos histo´ricos

Genios con una fuerte intuici´on, apasionados, rebeldes e inadaptados brillantes, son caracter´ısticas de los cient´ıficos con una visi´on diferente de la matem´atica, la f´ısica, la astronom´ıa, se atrevieron a enfrentar desaf´ıos, con ego muy fuerte que los llevaba a decir puedo resolver esto, puedo descifrar el mundo y poner de manifiesto la belleza y singularidad del universo. El campo de las ecuaciones diferenciales, se constituye en el coraz´on del an´alisis en matem´aticas, originado hace m´as de 300 an˜os por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en el siglo XVII; sin embargo, realmente el campo de las ecuaciones diferenciales inicia con Galileo Galilei.

Galileo era de car´acter engre´ıdo con amigos muy ´ıntimos y muchos enemigos, ten´ıa una mente privi- legiada, seguro de s´ı mismo, le dio un vuelco al mundo; a sus 25 an˜os fue profesor de matem´aticas, pero insolente se mostraba frente a sus compan˜eros, quienes segu´n ´el, pensaban en teor´ıas cient´ıficas absurdas, manifestaba que siempre miraban en el lugar equivocado, la intuici´on le dice que los cuerpos se mueven no por deseo sino por leyes matem´aticas que describen el movimiento; comienza entonces estudiando experimentos desde dejar caer pesos, observaciones imperfectas llev´o a muchos a no ver las leyes, Galileo en cambio alter´o la aceleraci´on de la gravedad a trav´es de un plano inclinado, introduce el concepto de aceleraci´on, supuso un avance clave al entender el movimiento en esos t´erminos.

Al ser el primero en realizar experimentos se le llam´o el padre de la f´ısica moderna, y fue ´el quien indujo a Newton a buscar c´omo resolver estos enigmas; en 1609 Galileo busc´o c´omo fabricar lentes y construye el telescopio, impresiona y se siente fascinado al utilizar el instrumento noche tras noche, hasta descubrir otras lunas y generar teor´ıas hasta contradecir la Biblia lo cual no quiso hacer; en 1615 acude a Roma para exponer su caso pero ello fue su error, tent´o la suerte y nueve an˜os m´as tarde le permiten escribir un libro en el cual demuestra que es posible utilizar las matem´aticas para analizar el movimiento. De manera extran˜a, el an˜o en que fallece Galileo en 1642, a 1500 Km de distancia nace Isaac Newton (1642-1727), solitario, incapaz de conversar, obsesionado y consumido por su trabajo, criado por su abuela, no super´o el olvido de su madre, muy susceptible a la cr´ıtica, construy´o desde nin˜o aparatos como molinos de viento; en Cambridge obsesionado con el pecado era reservado, puritano, creen falleci´o virgen, ve´ıa el mundo de manera geom´etrica, gr´afica. En la facultad se dedic´o solo al estudio de la matem´atica, crea matem´aticas nuevas para analizar el movimiento inventando el C´alculo, fascinado por la puesta del sol, elipses, espirales, trayectorias, guarda no obstante sus descubrimientos para s´ı mismo; a los 24 an˜os, revoluciona la f´ısica desvelando el misterio del movimiento de los planetas, al observar una manzana y se pregunt´o: ¿Si una manzana cae de igual manera cae la luna? Y se la imagin´o cayendo sobre la tierra, estudiando la gravedad para mover planetas y astros, demostr´o que las leyes que rigen los suelos son los mismos de los de la tierra, la ca´ıda libre la resuelve suponiendo la existencia de una relaci´on

13

entre la aceleraci´on a cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actu´a sobre el cuerpo. Una vez conocidas las condiciones iniciales, pero al tratar de develarlo, la matematica con problemas sin soluci´on le impidi´o seguir avanzando, porque la ecuaci´on diferencial no ten´ıa soluci´on en cuadraturas y solo aproximaba. Sigue investigando entonces en matem´atica, sistemas din´amicos y astronom´ıa, en 1672 es admitido en la Asociaci´on inglesa de cient´ıficos destacados, permitiendo que publiquen un art´ıculo; a sus 42 an˜os busca c´omo describir la trayectoria de los planetas alrededor del sol, guiado por una fuerte intuici´on continu´a su tarea, dos an˜os despu´es incomunicado, sin dormir, solo escribe y revoluciona con su obra “Los principios”, devela c´omo la masa interactu´a con la inercia, la masa y la aceleraci´on, define la gravedad como fuerza a distancia y consiguiendo avances establece las leyes que determinan el movimiento. Pero ten´ıa una personalidad fr´agil o mandaba o se enfadaba, su susceptibilidad a la cr´ıtica fue cuestio- nada. Al observar los Principia escritos en 18 meses, completa la bu´squeda de Galileo y aunque Newton trabaj´o relativamente poco con ecuaciones diferenciales en s´ı, su desarrollo del c´alculo y la dilucidaci´on de los principios b´asicos de la mec´anica constituyeron la base para sus aplicaciones en el siglo XVIII, m´as

notablemente por Euler. Newton clasific´o las ecuaciones diferenciales de primer orden en las formas

*dy*

= *f* (*x*)

*dx*

*dy*

= *f* (*y*)

*dx*

*dy*

= *f* (*x, y*)*.*

*dx*

Para la u´ltima ecuaci´on desarroll´o un m´etodo de soluci´on mediante series infinitas cuando *f* (*x, y*) es un polinomio en *x* y *y*. La activa investigaci´on de Newton en la matem´atica ces´o a principios de 1690, excepto por la soluci´on de “problemas desafiantes” ocasionales y la revisi´on y publicaci´on de resultados obtenidos mucho tiempo antes.

El t´ermino aequatio differentialis, por primera vez fue utilizado en 1676, pero es en una memoria de seis p´aginas de Leibniz, en el Acta Eruditorium de 1684, que aparece el c´alculo con una definici´on de la diferencial y donde dio reglas sencillas para su c´alculo en sumas, productos, cocientes, potencias y ra´ıces. Leibniz incluy´o tambi´en pequen˜as aplicaciones a problemas de tangentes y puntos cr´ıticos; este matem´atico y fil´osofo naci´o en Leipzig y concluy´o su doctorado en filosof´ıa a los 20 an˜os de edad en la Universidad de Altdorf, lleg´o a los resultados fundamentales del c´alculo de manera independiente; Leibniz estaba muy consciente de la conveniencia de una buena notaci´on matem´atica y la notaci´on actual para la derivada (*dy/dx*) y el s´ımbolo de la integral se deben a ´el. Descubri´o el m´etodo de separaci´on de variables en 1691, la reducci´on de ecuaciones homog´eneas a ecuaciones separables en el mismo an˜o, y el procedimiento para resolver ecuaciones lineales de primer orden en 1694.

Es importante destacar que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) surgen pr´acticamente con la aparici´on del C´alculo. En la c´elebre pol´emica Newton-Leibniz se tiene un gran hito cuando Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama:

6 *a cc ae* 13*e ff* 7*i el* 9*n* 4*o* 4*q rr* 4*s* 9*t* 12 *v x*.

El cual en lat´ın quiere decir “Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et veceversa”, o bien: “Dada una ecuaci´on con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa”. Este fue, como sen˜ala Arnold (1994), el descubrimiento fundamental de Newton, que consider´o necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matem´atico contempor´aneo significa: “Es u´til resolver ecuaciones diferenciales”. Curiosamente, Ince afirma que la fecha de aparici´on de estas es el 11 de Noviembre de 1675,

cuando Leibniz escribio´ la ecuaci´on *ydy* = *y*2 . La primera clasificaci´on de las EDO de primer orden (en

2

lenguaje de la ´epoca ecuaciones fluxiales) fue propuesta por Newton. El primer tipo estaba compuesto

de aquellas ecuaciones en las cuales dos fluxiones *x*j, *y*j, *y* un fluente *x* o *y* est´an relacionados, como por ejemplo *x*′ = *f* (*x*) ´o *x*′ = *f* (*y*), o bien *dy* = *f* (*x*), *dy* = *f* (*y*); el segundo tipo abarcaba aquellas ecuaciones

*y*′ *y*′

*dx dx*

que involucran dos fluxiones y dos fluentes *x*′ = *f* (*x*)2, y finalmente, el tercer tipo abarcaba a ecuaciones

*y*′

que involucran m´as de dos fluxiones, las cuales en la actualidad conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la Teor´ıa de Fluxiones, Newton resuelve dos problemas principales, formulados tanto en t´erminos mec´anicos como en t´erminos matem´aticos:

* + 1. Determinaci´on de la velocidad del movimiento en un momento de tiempo dado. De otro modo: determinaci´on de la relaci´on entre las fluxiones dada la relaci´on entre los fluentes.
    2. Dada la velocidad del movimiento, determinaci´on del espacio recorrido en un tiempo dado. En t´erminos matem´aticos: determinaci´on de la relaci´on entre los fluentes dada la relaci´on entre fluxiones.

El primer problema, llamado problema directo, representa el problema de la diferenciacin´ impl´ıcita de funciones, en el caso general, y obtenci´on de la ecuaci´on diferencial que expresa las leyes del fen´omeno. El segundo, el problema inverso, es el problema de la integraci´on de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma m´as general. En particular, en este problema se trata de la bu´squeda de las funciones primitivas. Los enfoques de Newton para la soluci´on de un problema tan general y los procedimientos de su resoluci´on se construyeron paulatinamente. Ante todo, la simple inversi´on de los resultados de la bu´squeda de fluxiones le proporcion´o una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo, advirti´o la necesidad de agregar, en esta inversi´on, una constante aditiva. Despu´es result´o que la operac´on de

inversi´on, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas como *Mx*j + *Ny*j = 0, obtenidas en el c´alculo de las fluxiones, no siempre era posible y no se obten´ıa la funci´on original. Newton advirti´o esto, en

el caso en que *M* = *M* (*x, y*) y *N* = *N* (*x, y*) fueran funciones racionales enteras. Cuando la inversi´on inmediata del m´etodo directo no conduc´ıa al ´exito, Newton acudi´o al desarrollo de funciones en series de potencias como medio universal de la teor´ıa de las fluxiones. Resolvi´o ecuaciones dadas, por ejemplo,

respecto a *y*′ o (poniendo *x* = 1) respecto a *y*, desarroll´o la funci´on del miembro derecho en series de

′*x*

potencias, integrando a continuaci´on la serie t´ermino a t´ermino. Este m´etodo lo comunic´o mediante otro anagrama, el cual dice lo siguiente: “El primer m´etodo consiste en la extracci´on de una cantidad fluente de la ecuaci´on que contiene su fluxi´on; el segundo en cambio consiste en la sustituci´on de una serie en lugar de una cantidad inc´ognita cualquiera, de la cual pueden deducirse las otras, y en comparaci´on de los t´erminos hom´ologos de la ecuaci´on resultante para obtener los t´erminos de la serie supuesta”. Los hermanos Bernoulli, contribuyeron tambi´en al desarrollo de m´etodos para resolver ecuaciones diferenciales y a la expansi´on de su gama de aplicaciones; Jackob (1654-1705), te´ologo, profesor en Basilea y, Johann (1667-1748) Bernoulli, m´edico, profesor en Groningen. Johann fue quien instruy´o a L’H’opital, qui´en a su vez, prepar´o a Huygens. El mismo Johann, entre 1691-1692, prepar´o dos libros, uno de c´alculo integral publicado en 1742, y otro de c´alculo diferencial, casi doscientos an˜os despu´es. Los matem´aticos de la

´epoca buscaban resolver ecuaciones de primer orden en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, reduc´ıan el problema a la bu´squeda de funciones primitivas, tendiendo a separar variables. Los Bernoulli introducen el t´ermino “integrar una ecuaci´on diferencial” y “separaci´on de variables”; el uso de factores integrantes fue utilizado tambi´en por Cauchy, Leibniz y despu´es por Johann Bernoulli, quien

utiliza sustituciones de la forma *y* = *ux* para resolver ecuaciones diferenciales homog´eneas; partiendo de all´ı Leibniz en 1693 continu´a su obra. Jackob resolvi´o la ecuaci´on diferencial *y*j = [*a*3*/*(*b*2*y* − *a*3)]1*/*2

en 1690 y es en 1694, que Johann pudo resolver la ecuaci´on *dy* = *y* , determina adem´as el factor *xx*

*dx*

*ax*

para la ecuaci´on lineal. Jackob tambi´en hace aportes a la mec´anica, geometr´ıa, astronom´ıa, probabilidad, c´alculo de variaciones y problemas de la braquist´ocrona y Johann en 1697 plantea otras sustituciones como *v* = *y*1−*n* para resolver la ecuaci´on:

*dy* + *aP* (*x*)*y* = *bQ*(*x*)*yn. dx*

El teorema de Bernoulli fue propuesto por Jackob, en 1695, pero resuelto de modo independiente por Leibniz y su hermano Johann; ´este resuelve tambi´en problemas de cadena colgante (catenaria) trayec- torias ortogonales en 1698, mec´anica, el problema taut´ocrono; propuso y resolvi´o el problema de la ba- quistr´ocona (tambi´en resuelto por su hermano Jackob). En 1692 Johann encontr´o la multiplicaci´on por

factor integrante para ecuaciones como *axdy* − *ydx* = 0. Daniel Bernoulli (1700-1782), hijo de Johann, emigr´o en su juventud a San Petersburgo. Utiliza el factor integrante para resolver ecuaciones de la for- ma *P* (*x, y*)*dx* + *Q*(*x, y*)*dy* = 0. Se interesaba principalmente en las ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones. Por ejemplo, es su nombre el que se asocia con el principio de Bernoulli en mec´anica

de fluidos *∂*2*u* = *c*2 *∂*2*u* . Tambi´en fue el primero en encontrar las funciones que, un siglo m´as tarde, se

*∂t*2

*∂t*2

conocer´ıan como las funciones de Bessel. Otros matematicos destacados en este siglo (fines del XVII y comienzos del XVIII) son el ingl´es Brook Taylor (1685-1731) quien hace aportes al an´alisis matem´atico; el m´etodo de series de Taylor, soluciones singulares, vibraciones de resortes, movimiento de proyectiles, ´opti- ca. Por su parte, Hoene Wronski, matem´atico polaco, (1778-1853) estudia las determinantes, e introduce el wronskiano. Y Jacobi Riccati (1676-1754), matem´atico italiano que consider´o ecuaciones de la forma *f* (*y, y*j*, y*jj) = 0 o la ecuaci´on no lineal que lleva su nombre, soluciones a trav´es de series de potencias, como

*xy*j = *y*2, descubre el m´etodo Hamilton-Jacobi, que permite integrar un sistema de ecuaciones cano´nicas

de Hamilton por medio de una integral completa de una ecuaci´on en derivadas parciales de primer orden;

Ricatti extendi´o el m´etodo de Charpit-Lagrange a dimensiones superiores a dos, resolviendo ecuaciones donde aparecen jacobianos.

La segunda etapa (1728) de la historia de las ecuaciones diferenciales estuvo dominada por el ma- tem´atico Leonhard Euler (1707-1783), quien identific´o la condici´on para la exactitud de las ecuaciones diferenciales de primer orden entre 1734-1735, desarroll´o la teor´ıa de los factores de integraci´on, dio la soluci´on general de las ecuaciones lineales homog´eneas con coeficientes constantes y, entre 1750-1751 ex- tendi´o estos resultados a las ecuaciones no homog´eneas. Euler hizo uso frecuente de series de potencias y m´etodos num´ericos para resolver ecuaciones diferenciales. En este siglo, un italiano, f´ısico, matem´atico y astr´onomo, nervioso y t´ımido, preferido por el Rey en Berl´ın, evitaba la controversia y dio cr´edito a otros, de sus obras. Este matem´atico fue Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), quien demostro´ en 1762-1765 que la solucin´ general de una ecuaci´on diferencial lineal homog´enea de n-´esimo orden es una combinaci´on li- neal de soluciones independientes. M´as tarde, en 1774-1775, realiz´o un desarrollo completo del m´etodo de variaci´on de par´ametros. Lagrange transforma la ecuaci´on en derivadas parciales en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, obtiene los multiplicadores de Lagrange, y en el c´alculo de variaciones, encuentra la relaci´on funcional *y* = *f* (*x*) para que una integral *b g*(*x, y, y*j)*dx* tome un valor m´aximo o m´ınimo; por ejemplo en isoperimetr´ıas o problemas de descenso m´as r´apido, estudia la teor´ıa de propagaci´on del soni- do, descubre un error de Newton y obtiene la ecuaci´on diferencial general del movimiento, resolvi´endola para el movimiento en l´ınea recta, hace entonces aportes a la mec´anica anal´ıtica con ecuaciones gene- rales del movimiento de un sistema din´amico, realiza publicaciones sobre mec´anica de s´olidos y fluidos, serie infinita, puntos de Lagrange donde se han encontrado asteroides troyanos y sat´elites troyanos de Saturno. Para Lagrange la matem´atica era un arte que justificaba su existencia. En la misma ´epoca, Pierre-Sim´on de Laplace (1749-1827) obtiene la ecuaci´on de Laplace, fundamental en muchas ramas de la f´ısica matem´atica como hidrodin´amica, elasticidad y electromagnetismo, y Laplace la estudi´o de manera extensa con relaci´on a la atracci´on gravitacional. La transformada de Laplace tambi´en se llama as´ı en su honor, aunque su utilidad para resolver ecuaciones diferenciales no fue reconocida sino hasta mucho tiempo despu´es. Para Laplace la naturaleza era esencial y la matem´atica solo una herramienta. Monge (1746- 1818), inventor de la geometr´ıa descriptiva, contribuye con la visi´on geom´etrica que da a las ecua- ciones diferenciales de primer y segundo orden mediante el m´etodo de la ecuaci´on caracter´ıstica; introdujo transformaciones de contacto para reducir ecuaciones a otras cuya soluci´on sea conocida, observ´o adem´as que ecuaciones de la forma *P* (*x, y, z*)*dx* + *Q*(*x, y, z*)*dy* + *R*(*x, y, z*)*dz* = 0 pueden resolverse si se obtiene como soluciones de variedades de orden inferior (como curvas), estas se generalizaron despu´es por Pfaff y se aplican en termodin´amica o mec´anica cl´asica, por lo cual fueron estudiadas despu´es por Grassmann, Frobenius (establece cu´ando un sistema general de ecuaciones de Pfaff admite factores integrantes), Lie, Darboux, y Caran. Hacia finales del siglo XVIII, siglo de integraci´on elemental, se hab´ıan desarrollado muchos m´etodos elementales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. En el siglo XIX, el inter´es se volvi´o m´as hacia la investigaci´on de cuestiones te´oricas de existencia y unicidad y el desarrollo de m´eto- dos menos elementales, como los basados en desarrollos en series de potencias. De esta manera, Friedrich

*a*

∫

Wilhelm Bessel (1784-1846), alem´an, hace aportes en astronom´ıa, calcul´o la ´orbita del cometa Halley; introdujo las funciones de Bessel y en 1817 estudi´o el trabajo de Kepler. De otra parte, el ruso Pafnuti Liwovich Chebyshev (1821-1894) trabaja en teor´ıa de nu´meros (nu´meros primos), probabilidad, funciones ortogonales, polinomios de Chebyshev. El franc´es Alexis Claude Clairaut (1713-1765) hace aportes a la geometr´ıa, establece la ecuaci´on de Clairaut y soluciones singulares (1734); Clairaut tambi´en trabaj´o en astronom´ıa, en el problema de los tres cuerpos (imposibilidad de encontrar ecuaciones de las trayecto- rias, inestabilidad del sistema), calcul´o con precisi´on (1759) el perihelio del cometa Halley. As´ı mismo, el franc´es, Jean D’Alembert (1717-1783) hace aportes a la mec´anica incluyendo el problema de la cuerda vibrante aplicado a la mu´sica, din´amica de fluidos, y ecuaciones diferenciales parciales, public´o tratados de din´amica, equilibrio y movimiento de los fluidos, trabaj´o en el teorema fundamental del ´algebra o principio de D’Alembert. Fourier con su trabajo de difusi´on del calor (1768-1830), obtiene la ecuaci´on del calor con distintas condiciones de contorno, desarrollando el m´etodo de variables separables y representa soluciones en series trigonom´etricas, prueba la convergencia de sus series correspondientes a funciones pe- ri´odicas, hoy d´ıa formuladas por teor´ıa de distribuciones. El primer resultado en estas series fue obtenido

por Dirichlet en 1829, *t* = *k*  *∂*2*y* + *∂y* + *∂y*  , Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), alem´an, hace

*∂*2*x*

*∂y*2

*∂z*2

aportes adem´as en teor´ıa de nu´meros, mec´anica de fluidos, an´alisis matem´atico; estableci´o las condiciones para la convergencia de las series de Fourier. El pr´ıncipe de las matem´aticas, nace tambi´en en esta ´epoca, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), y su influencia en ecuaciones diferenciales es m´ınima e indirecta, estu- di´o ecuaciones hipergeom´etricas y funciones el´ıpticas e hizo estudios en geometr´ıa diferencial o variable compleja, su teorema de la divergencia es fundamental para la teor´ıa del potencial y la f´ısica.

La etapa siguiente (1820) fue una etapa de formalizaci´on o edad del rigor, y en ella, hay dos perso- najes importantes Niels Henrik Abel (1802-1829), quien hizo aportes en ecuaciones integrales, funciones el´ıpticas, y al ´algebra (prob´o que las ecuaciones polin´omicas de quinto grado no tienen soluciones exac- tas) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matem´atico franc´es pionero en el an´alisis matem´atico, hace aportes en c´alculo de probabilidades, c´alculo de variaciones, ´optica, astronom´ıa, mec´anica, elasticidad, ecuaciones diferenciales, series infinitas, determinantes, probabilidad y f´ısica matem´atica Para Cauchy no todas las ecuaciones diferenciales se pueden resolver, pues nada garantiza que una serie converge o sea hacia la funci´on deseada. Estudi´o los m´etodos que permiten probar la existencia de soluciones del problema de valor inicial *y*j = *f* (*x, y*);*y*(*x*0) = *y*0 que se denomina problema de Cauchy, adaptando el m´etodo del pol´ıgono de Euler. Cre´o la teor´ıa de la variable compleja (1820) y aplic´o su teor´ıa a las ecua- ciones diferenciales. Durante los an˜os 1839 y 1842 el m´etodo m´as utilizado es la anal´ıtica, aplicado en campo complejo. En 1842 Cauchy aplica el m´etodo de la mayorante en ecuaciones diferenciales parciales, denomin´andose teorema de Cauchy-Kovaleskaya, extiende el teorema de existencia a ecuaciones de orden superior, ecuaciones ordinarias y ecuaciones de primer orden en el plano complejo, trabajo que realiza junto a la matem´atica rusa Sofia Kovaleskaya (1850-1891), obtiene resultados en ecuaciones con datos en forma normal sobre una superficie no caracter´ıstica, present´o un ejemplo de una ecuaci´on que no cumple hip´otesis del teorema y no posee soluci´on anal´ıtica alguna; los m´etodos utilizados proporcionaron algorit- mos para obtener aproximaciones de la soluci´on con el grado de exactitud para servir de fundamento en procesos de integraci´on num´erica. A Cauchy se debe la memoria sobre la propagaci´on de ondas ´opticas en 1815, relaciona la variable compleja y las ecuaciones diferenciales, manifiestos en estudios llevados a cabo por Fuchs, Kummer, Riemann, Painlev´e, Klein, Poincar´e, Hilbert, sobre puntos singulares de soluciones de ecuaciones diferenciales. Los hallazgos de Cauchy permitieron en 1854 que Briot y Bouquet simplifica- ran la demostraci´on de Cauchy y analizaran el caso en *f* (*x, y*) singular en un punto del plano complejo, comprobando que el radio de convergencia es el m´aximo posible hasta que se alcanza la singularidad. El que la soluci´on no sea u´nica contradijo la idea de Laplace y se utiliza la aleatoriedad en el contexto de las ecuaciones diferenciales.

Importantes matem´aticos franceses hacen aportes a las ecuaciones diferenciales en este siglo (XIX), por ejemplo, Charles E´mile Picard (1856-1941) gener´o el m´etodo de Picard y teoremas de existencia-unicidad para ecuaciones diferenciales, trat´o las aproximaciones sucesivas e impulso´ las condiciones de Lipschitz,

hace adem´as aportes a la geometr´ıa algebr´aica, topolog´ıa, variable compleja. Vall´e Poussin asoci´o a la ecuaci´on diferencial la suma superior y la suma inferior, m´etodo que admite alguna discontinuidad de la funci´on *f* importante en control. Jules Henri Poincar´e (1858-1912) hace aportes a las ecuaciones dife- renciales no lineales y estabilidad; topolog´ıa, mec´anica celeste incluyendo el problema de los 3 cuerpos, geometr´ıa no euclideana, filosof´ıa de la ciencia. Sime´on Denis Poisson (1781-1840) fue un f´ısico matem´atico que hace aportes a la electricidad y el magnetismo, su ecuaci´on de Poisson, f´ormula de Poisson, proba- bilidad, c´alculo de variaciones y astronom´ıa. El alem´an Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), alumno de Gauss, Jacobi y Dirichlet, obtuvo la soluci´on general de la ecuaci´on hiperb´olica no lineal de segundo orden de dos variables, reduci´endola a una ecuaci´on lineal de segundo orden, resultado utilizado en din´amica de gases, estudi´o soluciones discontinuas para estas ecuaciones y trat´o de resolver problemas de onda de choque pero no lleg´o a la soluci´on correcta porque supuso que la entrop´ıa era constante a lo largo de la discontinuidad. Variable compleja, geometr´ıa no euclidiana, funciones el´ıpticas, ecuaciones diferenciales parciales. Olinde Rodrigues, matem´atico franc´es, (1794-1851) hace aportes al an´alisis ma- tem´atico, en su tesis sobre atracci´on de los esferoides expone la f´ormula de Rodrigues y el movimiento de rotaci´on de un cuerpo de revoluci´on pesada. El alem´an Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) estudia el c´alculo de variaciones, teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales parciales, desigualdad del suizo Jacques Charles; Franc¸ois Sturm hace aportes al ´algebra (nu´mero de ra´ıces reales de ecuaciones algebraicas), geometr´ıa, mec´anica de flu´ıdos, acu´stica, problemas de Sturm-Liouville, trabaja problemas de contorno de geometr´ıa diferencial. Dos siglos despu´es de Galileo, otro arrogante probar´ıa que las leyes de Newton no se cumplen. Einstein nace en 1879, jud´ıo de clase media, callado, introvertido, perseverante, tard´o en empezar a hablar, le gustaban los rompecabezas; a los 9 an˜os construye una torre de cartas de 14 pisos, se burlaban de ´el, viv´ıa aislado en el mundo de las ideas, era capaz de ver en una imagen f´ısicamente lo que los dem´as no pod´ıan ver, era distra´ıdo, ego´ısta, confesado como desastre en la esfera emocional, a los 16 an˜os se pregunta qu´e pasar´ıa si la velocidad corriera a la velocidad de una onda de luz, la luz parecer´ıa estar quieta?, imaginaba mundos que no exist´ıan, ve´ıa lo que los dem´as no pod´ıan ver. A sus 17 an˜os le admiten en la Eidgen¨ossische Technische Hochschule (ETH), perspicaz, rebelde con sentido del humor, f´ısico te´orico, aprueba ex´amenes y se gradu´a con notas normales; le negaban el ingreso como docente de la universidad, dado que Heinrich Weber, su profesor, profesaba antipat´ıa por ´el, le escrib´ıa recomendaciones que no le permit´ıan ingresar como catedra´tico. Emite una tesis sobre teor´ıa cin´etica de los gases a Zurich para obtener su t´ıtulo de Doctor, pero no obtiene respuesta. Dos an˜os despu´es logr´o in- gresar como empleado en una oficina de patentes en Berna; casado con la f´ısica Mileva, dado su trabajo sin esfuerzo, se dedica a analizar la naturaleza de la vida, investiga sobre c´omo usar el movimiento browniano para medir el taman˜o de los ´atomos; para Newton, la velocidad de un rayo de luz deber´ıa ser m´as lenta que alguien corriendo. Einstein sosten´ıa que un rayo de luz se aparta de ti a la velocidad de la luz, y para

´el no es posible que se alcance un rayo de luz, por mucho que aceleres, el rayo de luz seguir´a apart´andose de ti a la misma velocidad; cuestiona supuestos, si la velocidad de la luz nunca cambia entonces debe haber algo m´as, entonces deduce que el tiempo es relativo, depende de la velocidad a la cual te mueves, descubre que cuando los cuerpos viajan a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, el sentido comu´n no funciona, las distancias se alargan y el reloj avanza lentamente. “Newton perd´oname”, escribe a los 26 an˜os, nace la teor´ıa de la relatividad con preguntas e im´agenes sencillas, cambiando la visi´on del mundo. En 1907 aborda nuevos retos pero se encierra en s´ı mismo, no le afectaban las normas y en 1914 separado se casa con su prima Elsa, y a sus 35 an˜os persigue como objetivo comprobar aquello que su intuici´on le dice, piensa que debe haber una teor´ıa de la relatividad que explique la fuerza de la gravedad; se sumerge en la matem´atica, sufre depresi´on nerviosa, no com´ıa perdiendo demasiado peso; en 1915 demuestra ma- tem´aticamente que la masa y la energ´ıa curvan el espacio-tiempo, un cuerpo inmenso como el sol deforma el espacio-tiempo, que un planeta cercano deforma una trayectoria curva, para Newton se atraen pero un planeta cercano se mueve alrededor a trav´es de una trayectoria curva, fue ilusi´on la atracci´on por una mis- ma fuerza., los cuerpos que parecen atra´ıdos por una fuerza gravitatoria est´an realmente viajando por un espacio deformado, cambia entonces la idea del espacio-tiempo. Llega a ecuaciones que rigen la curvatura espacio-tiempo, unas simples l´ıneas describen el movimiento de las galaxias; el movimiento de los cuerpos

celestes se resume en una ecuaci´on de cinco cent´ımetros, siendo impresionante. A los 40 an˜os completa su obra. En 1918 Constantin Carath´eodory (1873–1950), utiliz´o la integral de Lebesgue; Lipschitz fue el primero en abordar los criterios de unicidad, Jordan los simplific´o y Per´on con su m´etodo en 1926 unific´o y mejor´o los m´etodos anteriores. Carath´eodory realiz´o importantes contribuciones a la teor´ıa de funciones de una variable real, al c´alculo de variaciones y a la teor´ıa de la medida, el teorema de existencia que lleva su nombre trata sobre la soluci´on de ecuaciones diferenciales ordinarias, en teor´ıa de la medida, el teorema de extensi´on de Carath´eodory es fundamental en teor´ıa moderna de conjuntos. En teor´ıa de funciones de variable compleja, demostr´o un teorema sobre la extensi´on de una aplicaci´on conforme a la frontera de un dominio de Jordan: este estudio motiv´o el inici´o de la teor´ıa de compactificaciones por finales primos. Se le atribuye la autor´ıa de la conjetura de Carath´eodory, que afirma que una superficie cerrada y convexa admite al menos dos puntos umbilicales. La formulacio´n del concepto de independencia lineal de un sistema de funciones, en t´erminos del determinante llamado wronskiano fue introducido por Wronski (1775-1853), y utilizado como herramienta dentro de los m´etodos de soluci´on de ecuaciones dife- renciales. Galileo aplic´o las matem´aticas al movimiento, Newton las perfeccion´o en la cotidianidad, pero Einstein descubri´o las leyes que rigen el espacio-tiempo. Al lado de estos genios se tiene que mencionar a Stephen Hawking (fallecido el 14 de marzo de 2018 en Cambridge –RU-), quien ocup´o el puesto en esta ciudad que tuvo Newton y trabaj´o en la teor´ıa de la relatividad de Einstein; admirador de Galileo, nace en 1942 en Oxford (Inglaterra), fascinado por c´omo funcionan las cosas, Hawking no estudia, conf´ıa en la facilidad que tiene en las matem´aticas, sale con amigos, no era aplicado, pero si aburrido y ap´atico, para

´el no val´ıa la pena esforzarse por nada; pero en 1962 inicia estudios de Cosmolog´ıa en Cambridge, pero

los s´ıntomas de su enfermedad empiezan a aparecer, padece esclerosis lateral amiotr´ofica, se le atrofian las neuronas que controlan el movimiento, se deprime, son˜´o que le ejecutar´ıan y se propone hacer cosas si no muere; trabaja gustoso en 1970 como Cosm´ologo; obstinado tiene hijos (tres) e intenta desarrollar la teor´ıa de la relatividad de Einstein, predice el movimiento de cuerpos muy grandes como galaxias, pero no explica el comportamiento de las part´ıculas subat´omicas desde el campo de la teor´ıa cu´antica. Hawking se pregunta, ¿qu´e pasar´ıa si observamos un agujero negro, una predicci´on extran˜a de Einstein y observamos las part´ıculas diminutas? Una bola en el espacio a su alrededor se deforma tanto que la gravedad impide que se escape la luz, es como una membrana donde las cosas entran pero no pueden salir, intenta utilizar las ecuaciones de la teor´ıa cu´antica para analizar las part´ıculas en los m´argenes de los agujeros negros, descubre que ´estos emiten pequen˜as part´ıculas llamadas radiaci´on de Hopkins, los agujeros se desvanecen poco a poco como el agua en ebullici´on evapor´andose lentamente; la relatividad y la teor´ıa cu´antica se combinan con ´exito, los agujeros brillan como cuerpos incandescentes; su teor´ıa explicar´ıa el origen del universo. En los u´ltimos an˜os se ha desarrollado la mec´anica no lineal a trav´es de los estudios de Euler, Lagrange y otros ge´ometras, se ampl´ıa la gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en todas las ciencias y artes. Otra caracter´ıstica de las ecuaciones diferenciales en el siglo XX fue la creaci´on de m´etodos geom´etricos o topol´ogicos, en especial para ecuaciones no lineales. El objetivo es comprender al menos el comportamiento cualitativo de las soluciones desde un punto de vista geom´etrico y anal´ıtico. Entre los matem´aticos del siglo XX se encuentra Edward Moore quien en 1908 estudia las ecuaciones con un nu´mero infinito de variables; la matem´atica Olga Arsenievna Oleinik (1925-2001) activa y entusiasta docente e investigadora, supervis´o m´as de 50 tesis doctorales y lleva a cabo un trabajo pionero en teor´ıa de ecuaciones en derivadas parciales, teor´ıa de la elasticidad y teor´ıa matematica de capas l´ımite, estudia para analizar la variaci´on de velocidades en la zona de contacto entre un fluido y un obst´aculo que se encuentra en su seno o por el que se desplaza, donde la presencia de esta capa es debida principalmente a la existencia de la viscosidad, propiedad inherente de cualquier fluido. Mujtarbay Otelb´ayev afirma haber encontrado una soluci´on “satisfactoria y u´nica”para la ecuaci´on Navier-Stokes,

*Dvx i* = *∂vx i* + *v*

*∂vx i* + *v*

*∂vx i* + *v*

*∂vx i.*

*Dt ∂t*

*x ∂x*

*y ∂y*

≈ *∂z*

*Dvy j* = *∂vy j* + *v*

*∂vx j* + *v*

*∂vy j* + *v*

*∂vy j.*

*Dt ∂t*

*x ∂x*

*y ∂y*

≈ *∂z*

uno de los siete problemas ’del milenio’. El trabajo del kazajo queda a expensas de la comunidad cient´ıfica que ahora debe determinar si ha encontrado correctamente la solucio´n para el enigma. En caso de confir- marse, el estudio permitir´ıa avanzar en muchos ´ambitos de la f´ısica y de la ingenier´ıa, como es el caso de la aeron´autica. Aunque constituyen un tema antiguo del que se sabe mucho, en el siglo XXI las ecuaciones diferenciales siguen siendo una fuente inagotable de problemas fascinantes y decisivos por resolver.

## Una sencilla ecuacio´n diferencial

*Tomado de: Acta de Mathematica. Bartolom´e L´opez Jim´enez* “Va un coche por la carretera y encuentra una sen˜al: “REDUZCA A 40 *km/h* ”. El conductor reduce a esa velocidad y continu´a. Cuando lleva recorrido cierto trayecto, una nueva sen˜al apunta: “REDUZCA A 30 *km/h*”. El conductor reduce y continu´a; al cabo de un rato otra sen˜al anuncia: “REDUZCA A 10 *km/h* ”. El conductor reduce y continu´a, y cuando ha recorrido un trayecto encuentra un cartel que informa: “BIENVENIDO A REDUZCA”.

Bartolom´e ya ten´ıa suficiente formaci´on como para plantearse un pequen˜o problema basado en este chiste. Supongamos que el coche va por la carretera a 100 kil´ometros por hora y en un momento dado que est´a a 100 kil´ometros de su destino. A partir de ese momento el conductor va reduciendo la velocidad de modo que sea igual (en kil´ometros por hora) a la distancia (en kil´ometros) que le falta para llegar a su destino. La pregunta es: ¿cu´anto tiempo tarda en llegar?. Aun conociendo la noci´on de derivada (o al menos conociendo la existencia de esta noci´on), yo tend´ıa a resolver este tipo de problemas utilizando un concepto m´as primitivo: el de l´ımite de una sucesi´on. Y de este modo us´e la siguiente estrategia para resolver el problema. Se representa en un segmento la distancia de los 100 kil´ometros y se divide el segmento en *n* partes iguales; designo los puntos que dividen el segmento por *a*1*, a*2*,. .., an*+1 donde *a*1

representa el punto que est´a a 100 kil´ometros del destino *a*2

el punto que est´a a 100(*n* − 1) kil´ometros, *a* el

*n*

3

punto que est´a a 100(*n* − 2) kil´ometros, y as´ı sucesivamente hasta *a*

*n*

*n*+1

, que es el punto de destino. Ahora

se calcula el tiempo que tarda el coche en recorrer cada tramo, determinado por dos puntos consecutivos,

*ai* y *ai*+1, si lo recorre a una velocidad igual (en kil´ometros por hora) a la distancia (en kil´ometros) entre el punto *ai* y el destino (representado por el punto *an*+1); despu´es se suman los tiempos recorridos en los *n* tramos. Por ejemplo, si divido la distancia en 2 partes iguales, tengo 3 puntos, *a*1, a 100 kil´ometros del destino, *a*2, a 50 kil´ometros del destino, y *a*3, que es el destino. El coche recorre el primer tramo a 100 kil´ometros por hora, y el segundo a 50 por hora; el tiempo pues que tarda es 50/100=1/2 de hora para el primer tramo y 50/50 = 1 hora para el segundo tramo; en total (1/2) + 1 horas.

Si divido la distancia en 3 partes iguales, tengo 4 puntos, *a*1, a 100 kil´ometros del destino, *a*2 a (2/3)

· 100 kil´ometros del destino, *a*3, a (1/3) · 100 kil´ometros del destino, y *a*4, que es el destino (Figura 1). El coche recorre el primer tramo a 100 kil´ometros por hora, el segundo a (2/3) 100 kil´ometros por hora

·

1

100

3

y el tercero a (1/3) · 100 kil´ometros por hora. El tiempo que tarda es 3 ∗100 = 1 de hora para recorrer el

1

1

primer tramo, 3 ∗100 = 1 de hora para recorrer el segundo tramo, y 3 ∗100 = 1 hora para el tercer tramo.

2

1

3 ∗100 2 3 ∗100

El tiempo total es pues (1/3) + (1/2) + 1 horas. Si divido la distancia en *n* partes iguales, como en los dos

casos anteriores, puedo calcular el tiempo que tarda el coche en recorrer los 100 kil´ometros; compruebo que este tiempo es

1 1

+

*n n* − 1

1

+ *...* + +1

2

horas. En resumen, si se calcula el l´ımite de esta expresi´on cuando *n* tiende a infinito, tendr´emos la respuesta al problema planteado. Pero...poco despu´es de todas estas reflexiones empezaron a explicarme en la carrera las ecuaciones diferenciales. No fue inmediatamente cuando me di cuenta de que pod´ıa aplicar esta noci´on nueva para m´ı al problema anterior, pero no tard´e mucho tiempo. No ten´ıa muy presente la F´ısica del bachillerato, pero recordaba al menos que la velocidad era la derivada del espacio con respecto al tiempo. El problema se reduc´ıa entonces a resolver la sencilla ecuaci´on diferencial *x*j(*t*) = 100 − *x*(*t*)

donde *t* es el tiempo y *x*(*t*) el espacio recorrido por el coche en el instante *t*. Dado que suponemos que *x*(0) = 0, la soluci´on de esta ecuaci´on diferencial es *x*(*t*) = 100(1 − *e*−*t*)*.* Como se puede ver, una de las ventajas del c´alculo diferencial es que da respuesta completa al problema, es decir, permite calcular el espacio que ha recorrido el coche en el instante *t*. Se observa adem´as lo siguiente en la expresi´on de *x*(*t*): para *t* = 0, *e*−*t* = 1, y cuando *t* crece, *e*−*t* decrece y se aproxima a 0. Por tanto el espacio que recorre el coche, a medida que el tiempo pasa, se aproxima a 100 kil´ometros, es decir, el coche est´a cada vez m´as cerca del destino; sin embargo no llega nunca, porque *e*−*t >* 0, aunque *t* sea muy grande.

La frustraci´on que quiz´a produzca el hecho de estar tan cerca del destino y no llegar nunca puede ser

superada si se resuelve el siguiente problema. Supongamos que una persona va caminando por un sendero a una velocidad de 3 kil´ometros por hora y en un momento dado est´a 9 kil´ometros de su destino; a partir de ese momento el caminante va reduciendo su marcha de modo que su velocidad sea igual (en kil´ometros por hora) a la ra´ız cuadrada de la distancia (en kil´ometros) que le falta para llegar a su destino. La pregunta es: ¿cu´anto tiempo tarda en llegar?

## Definici´on y clasificaci´on de las ecuaciones diferenciales

Una ecuaci´on es una igualdad matem´atica entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o inc´ognitas, relacionados mediante opera- ciones matem´aticas. Las ecuaciones son un pilar clave y fundamental de la ciencia y la ingenier´ıa que han permitido entender mejor el mundo que nos rodea. Algunas ecuaciones relevantes son, por ejemplo:

El teorema de Pit´agoras, desarrollado por Pit´agoras de Samos en el 530 a.C., su archiconocido teorema establece que, en todo tri´angulo rect´angulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del tri´angulo rect´angulo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del tri´angulo, los que conforman el ´angulo recto)

*a*2 + *b*2 = *c*2*.*

La ley de gravitaci´on universal es una ley f´ısica cl´asica que describe la interacci´on gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. E´sta fue presentada por Isaac Newton en su libro Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, publicado en 1687, donde establece por primera vez una relaci´on cuantitativa (deducida emp´ıricamente de la observaci´on) de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa. La ley de la Gravitaci´on Universal predice que la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas *m*1 y *m*2 separados una distancia *r*, es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir:

*F* = *Gm*1*m*2 *.*

*r*2

La segunda ley de la termodin´amica, es una de las leyes m´as importantes de la f´ısica que, aun pudi´endose formular de muchas maneras, todas llevan a la explicaci´on del concepto de irreversibilidad y al de entrop´ıa. Este u´ltimo concepto, cuando es tratado por otras ramas de la f´ısica, sobre todo por la mec´anica estad´ıstica y la teor´ıa de la informaci´on, queda ligado al grado de desorden de la materia y la energ´ıa de un sistema. La segunda ley de la termodin´amica dictamina que, si bien la materia y la energ´ıa no se pueden crear ni destruir, s´ı que se transforman, y establece el sentido en el que se produce dicha transformaci´on. Sin embargo, el punto capital del segundo principio es que, como ocurre con toda la teor´ıa termodin´amica, se refiere u´nica y exclusivamente a estados de equilibrio

*δQ dS* ≥ *T .*

La ecuaci´on de onda es una importante ecuaci´on lineal de segundo orden que describe la propagaci´on de una variedad de ondas, como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en el agua. Es importante en varios campos como la acu´stica, el electromagnetismo y la din´amica de fluidos. Hist´oricamente, el problema de una cuerda vibrante como las que est´an en los instrumentos musicales fue estudiado por

Jean le Rond d’Alembert en 1746 por primera vez, seguido de Leonhard Euler en 1748, Daniel Bernoulli en 1753 y Joseph-Louis Lagrangeen 1759

*∂*2*u*

*∂t*2 = *c*

2 *∂*2*u*

*∂t*2 *.*

Como puede observarse, las dos u´ltimas ecuaciones adem´as de variables, muestran que existe variaci´on de una variable respecto a la otra u otras, contienen entonces derivadas, raz´on por la cual se les denomina ecuaciones diferenciales.

**Definici´on 1.3.1.** *(****Ecuaci´on diferencial****)*

*Una ecuaci´on diferencial es aquella que contiene derivadas de una funci´on, de una o m´as variables. La ecuaci´on se denomina ordinaria cuando las derivadas que aparecen en ella, corresponden a una funci´on en una variable independiente y*(*x*)*.*

**Ejemplos 1.3.1.** *Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias*

*dy*

*1.* + 4*xy* = 5*.*

*dx*

*d*2*y dy*

*2. dx*2 + *dx* + *y* = 10*.*

*d*2*y* 2

1. *dx*2

*dy*

— *xdx* + 5*y* = *n.*

1. *d*2*xm* = *F.*

*df* 2

*5. dw* 2 + *d*2*w* = 10*.*

*dt*

*dt*

Son ecuaciones diferenciales ordinarias. En el ejemplo 1 aparece la primera derivada y la funci´on *y*(*x*); en el ejemplo 2 aparecen la primera y la segunda derivada de la funci´on *y*(*x*), adem´as la funci´on *y*(*x*). El ejemplo 3 es similar al 2, s´olo que la segunda derivada de *y*(*x*) aparece elevada al cuadrado. En el ejemplo 4 aparece la segunda derivada de la func´on *x*(*t*) con respecto a *t*. y finalmente en el ejemplo 5 se muestra la primera y segunda derivada de la funci´on *w*(*t*). De otra parte, la ecuaci´on diferencial se denomina parcial, cuando las derivadas que aparecen, corresponden a una funci´on de dos o m´as variables independientes.

**Ejemplos 1.3.2.** *As´ı por ejemplo, las ecuaciones:*

*1. ∂z* + 2*xz ∂z* = 5*y.*

*∂x ∂y*

*∂*2*u* 2

−

*2.*

*∂x∂y*

*∂u* 3

*∂y*

= *ux.*

*∂x* 3

*3.*

*∂t*

*∂*3*x*

+ *∂v*3 +2 =

*∂*2*x* 3

*,*

*∂v∂t*

*son ecuaciones diferenciales parciales.*

En la primera ecuaci´on de los Ejemplos 1.3.2 aparecen las primeras derivadas parciales en *x y* de la funci´on *z*(*x, y*) y en la segunda ecuaci´on, aparecen la segunda derivada parcial cruzada de la funci´on *u*(*x, y*) con respecto a *x* e *y*, elevada al cuadrado; y la primera derivada parcial de la ecuaci´on *u*(*x, y*) con respecto a *y* elevado al cubo. En la tercera ecuaci´on aparecen la primera, segunda y tercera derivada parcial de *X*(*t, v*), con respecto a *t* y *v* respectivamente. El orden de una ecuaci´on diferencial es determinado por el nu´mero de la derivada ma´s alta que aparece en la ecuaci´on y el grado es el exponente de la derivada que determina el orden.

**Ejemplos 1.3.3.** *Ecuaciones diferenciales.*

*∂y* + 4*xy* = 5*. La ecuaci´on diferencial es ordinaria de primer orden y primer grado EDO*(1*,* 1)*.*

*∂x*

*d*2*y* + *dy* + *y* = 10*. La ecuaci´on diferencial es ordinaria de segundo orden y primer grado EDO*(2*,* 1)*.*

*dx*2 *dx*

*d*2*y*  3 − *xdy* + 5*y* = 0*. La ecuaci´on diferencial es ordinaria de segundo orden y segundo grado*

*dx*2

*EDO*(2*,* 2)*.*

*dx*

*∂u* + 2*xy ∂x* = 5*y. La ecuaci´on diferencial es parcial de primer orden y primer grado EDO*(1*,* 1)*.*

*∂y ∂y*

*∂*2*u*  2 − *∂u* 2 = *ux. La ecuaci´on diferencial es ordinaria de segundo orden y segundo grado*

*∂xdy*

*EDO*(2*,* 2)*.*

*∂y*

*dy* =  4 − 1 *y* + *y*2*. La ecuaci´on diferencial es ordinaria de primer orden y primer grado EDO*(1*,* 1)*.*

*dx*

*x*2

*x*

*ut* = 4*uxx* − 3(*u* − 1)*. La ecuaci´on diferencial es parcial de primer orden y primer grado EDO*(1*,* 1)*.* La Figura 1.1 muestra la diferentes formas de representaci´on de una ecuaci´on diferencial de orden *n*.

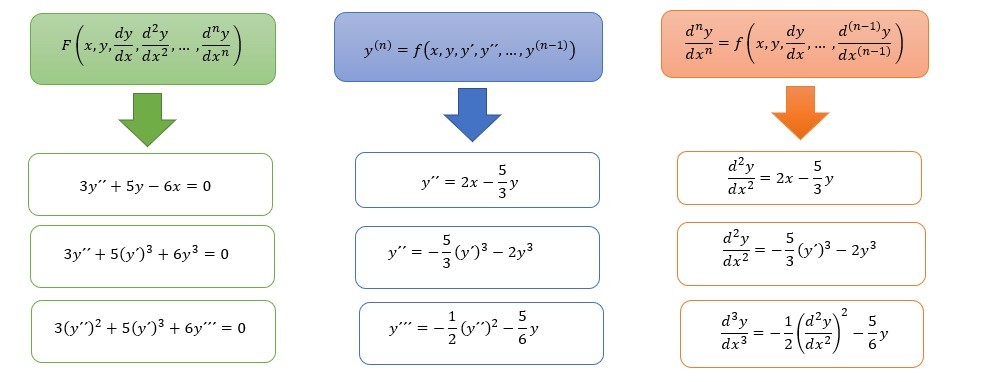
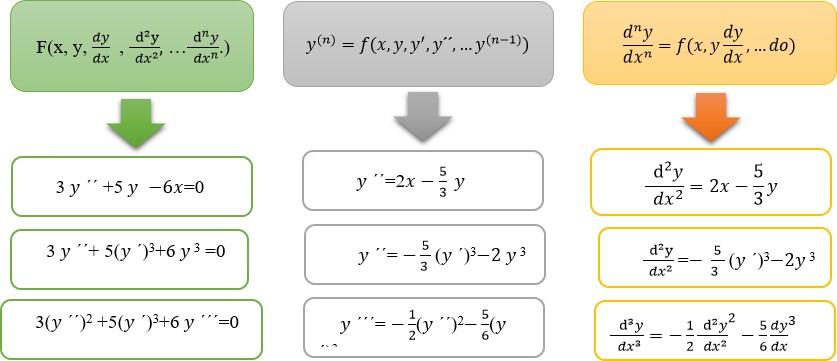


Figura 1.1: Ejemplo de formas de representar una ecuaci´on diferencial.

## Ecuaciones diferenciales segu´n su linealidad

La ecuaci´on diferencial *F* (*x, y, y*′ *,. .., yn*) = 0 es una ecuaci´on lineal de orden *n* si *y, y*′ *,. .., yn* son linealmente independientes. Cualquier ecuaci´on diferencial que no sea de la siguiente forma

*an*(*x*)*y*(*n*) + *a*(*n*−1)(*x*)*y*(*n*−1) + *. ..* + *a*2(*x*)*y*jj + *a*1(*x*)*y*j + *a*0(*x*)*y* = 0*,* con *an*(*x*) /=*,* 0 recibe el nombre de ecuaci´on diferencial no lineal.

**Ejemplos 1.4.1.** *Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.*

* + 1. 3*x*2*y*′′′ − 5*xy*′′ + 6*y*′ − 7*y* = 0*, ecuacio´n diferencial lineal de orden 3.*
    2. 4*y*′′ − 5*y*′ + 6*y* = 0*, ecuacio´n diferencial lineal de orden 2.*
    3. (cos *x*)*y*′ − 3*y* = 0*, ecuacio´n diferencial lineal de orden 1*
    4. −2*y*′′ + 4*y*′ − 7*y*2 = 0*, no es una ecuaci´on diferencial lineal*
    5. *y*′ + 3*y*′ + 5*ex*+*y* = 0*, no es una ecuaci´on diferencial lineal*
    6. *y*′ + 3*y*′ + 5*ex*+ln *y* = 0*, ecuacio´n diferencial lineal de orden 1*
    7. *y*′ = sen(*x* + *y*)*, no es una ecuaci´on diferencial lineal.*

## Soluci´on de una ecuaci´on diferencial

Se dice que la funci´on *φ* definida en el intervalo *I* es soluci´on de la ecuaci´on *F x, y, y*′ *,. .., y*(*n*) = 0, si al reemplazar *φ, φ*′ *,. .., φ*(*n*) en la ecuaci´on diferencial, esta se reduce a la identidad, es decir que:

*F x, φ, φ*′ *,. .., φ*(*n*) = 0

Obs´ervese que

1. La funci´on *φ* est´a definida en un intervalo *I*.
2. La funci´on *φ* es *n* veces diferenciable.

La funci´on *y* = *xex* es soluci´on de la ecuaci´on diferencial *y*′′ − 2*y* + *y* = 0 en el intervalo I= (−∞*,* ∞).

¿C´omo se comprueba si es soluci´on? Dado que la ecuaci´on es de orden 2, se deriva dos veces y se reemplaza la soluci´on en la ecuaci´on, es decir, para *y* = *xex* se tiene que *y*′ = *ex* +*xex* = *ex*(1+*x*), *y*′′ = *ex* +1*ex* +*xex* y *y*′′ = *ex*(2 + *x*). Reemplazando en la ecuaci´on diferencial tenemos:

*y*jj − 2*y*j + *y* = *ex*(*x* + 2) − 2*ex*(*x* + 1) + *xex*

= *ex*((*x* + 2) − 2(*x* + 1) + *x*)

= *ex*(0)

= 0*.*

**Ejemplos 1.5.1.** *Verificaci´on de solucio´n de ecuaci´on diferencial*

* 1. *Demostrar que*

*y*(*x*) = *c*1*ekx* + *c*2*e*−*kx,* (1.1)

*es la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

*d*2*y* 2

*dx*2 − *k*

*y* = 0*,* (1.2)

*en donde c*1 *y c*2 *son constantes arbitrarias. Para llevar a cabo la demostraci´on, se deriva dos veces la funci´on y se reemplaza en la ecuaci´on diferencial para verificar una igualdad. Entonces, si y*(*x*) = *c*1*ekx* + *c*2*e*−*kx, se sigue que:*

*dy kx*

−*kx*

*d*2*y*

2 *kx*

2 −*kx*

*dx* = *c*1*ke*

— *c*2*ke*

*y dx*2 = *c*1*k e*

+ *c*2*k e*

*.* (1.3)

*Reemplazando y*(*x*) *definido en (1.1) y d*2*y/dx*2 *definido en (1.3) en la equaci´on (1.2) se verifica*

*c*1*k*2*ekx* + *c*2*k*2*e*−*kx* − *k*2 *c*1*ex* + *c*2*e*−*x* = 0*.*

*c*1*ex dy*

* 1. *La funci´on y* = 1+ *c ex es soluci´on de la ecuaci´on diferencial dx* = *y*(1 − *y*) *ya que si derivamos la*

*soluci´on con respecto a x, Que reemplazando en la ecuaci´on diferencial, se tiene:*

1

*c*1*k*2*ekx* + *c*2*k*2*e*−*kx* − *k*2(*c*1*ekx* + *c*2*e*−*kx*)= 0*,*

*se tiene*

[1 + *c ex*]2 *,*

=

*es decir,*

*dy c*1*ex*(1 + *c*1*ex*) − *c*1*ex*(*c*1*ex*) *dx* 1

*dy c*1*ex* + *c*2*e*2*x* − *c*2*e*2*x*

= 1 1 =

*dx* [1 + *c*1*ex*]2

*c*1*ex*

*.*

(1 + *c*1*ex*)2

*Remplazando el valor de la funci´on y y su primera derivada en la ecuaci´on diferencial se tiene*

*c*1*ex*

(1 + *c ex*)2 = 1+ *c ex*

*c*1*ex*

*c*1*ex*

1

1

1

*Efectuando operaciones dentro del par´entesis se tiene*

1+ 1+ *c ex*

*.*

*c*1*ex*

(1 + *c ex*)2 =

1

*c*1*ex*[1 + *c*1*ex* − *c*1*ex*]

1

(1 + *c ex*)2 *,*

*simplificando llegamos a la igualdad*

*c*1*ex*

*c*1*ex*

(1 + *c ex*)2 = (1 + *c ex*)2 *.*

1 1

*c*1*ex*

*As´ı y* = 1+ *c ex es la soluci´on de la ecuaci´on diferencial dada en* (−∞*,* ∞)*.*

1

* 1. *Si y* = *e*−*t*2 ∫ *t ex*2 *dx*+*c e*−*t es soluci´on de la ecuaci´on diferencial dy* +2*ty* = 1*, entonces reemplazando*

0

*dt*

1

*la funci´on y*(*t*) *y su primera derivada y*′ (*t*) = *dy en la ecuaci´on diferencial debemos llegar a una*

*dt*

*identidad. En efecto, derivemos y*(*t*)*, es decir y* = *e*−*t*2

*tiene,*

∫ *t ex*2

0

*dx* + *c*1

*derivando respecto a t se*

*dy d*

−*t*2 ∫ *t x*2

= *e*

*dt dt*

*Aplicando la regla del producto se tiene*

*e dx* + *c*1 *.*

0

*dy* −*t*2 ∫ *t x*2

*d* ∫ *t x*2

−*t*2

*es decir*

*dt* = −2*te*

*e dx* + *c* +

0 *dt*

*e dx* + *c*1 *e ,*

0

*dy* = *e*−*t*2 *dt*

−*t*2

= *e*

*t*

−2*t*

∫

∫ *t*

0

−2*t*

0

*ex*2

*x*2

*e*

*dx* + 2*tc*1 + *e*

*t*2

*dx* + *e*

*t*2

— 2*tc*1

*.*

*Remplazando en la ecuaci´on diferencial se tiene*

*e*−*t*2

−2*t*

*t*

*ex*2

∫

0

*dx* + *et*2

— 2*tc*1

+ 2*t*

∫

−*t*2 *t*

0

∫

*e*

*ex*2

*dx* + *c*1*e*

−*t*2 =

— 2*te*

−*t*2 *t*

0

∫

*x*2*dx* + *et*2

*e*−*t*2

— 2*tc*1*e*

−*t*2

+ 2*te*

−*t*2 *t*

0

*ex*2

*dx* + *c*1*e*

−*t*2

2*t* =

*e*0 − 2*tc e*−*t*2 + *e*0 − 2*tc e*−*t*2 = 1*.*

1

1

*Lo cual da por hecho que la funcio´n y* = *e*−*t*2 ∫ *t ex*2

0

*dx* + *c*1*e*

−*t es soluci´on de la ecuaci´on diferencial*

*dada.*

**Teorema 1.5.1.** *Si b es un nu´mero real dado, existe una y solo una funci´on f* (*x*) *que satisface la ecuaci´on diferencial y*j(*x*) *y*(*x*) = 0*, para todo x real, y, adem´as satisface la condici´on y*(0) = *b. Esta funci´on viene por f* (*x*) = *bex para todo x real.*

−

*Demostraci´on.* Comprobaremos que la funci´on *f* as´ı definida satisface las condiciones del teorema, es decir, *y*j(*x*) − *y*(*x*) = 0, *y*, *y*(0) = *b*. En efecto, como *f* (*x*) = *bex*, luego *f* j(*x*) = *bex*, entonces *f* j(*x*) − *f* (*x*) = *bex* − *bex* = 0 para todo *x* real, adem´as *f* (0) = *be*0 = *b,*1 = *b.* Entonces *f* (*x*) = *bex* satisface la ecuaci´on diferencial y la condici´on dada, probemos que esta funci´on es u´nica, sea *g* una funci´on que verifica *g*j(*x*) − *g*(*x*) = 0, *y*; *g*(0) = *b*; definimos: *h*(*x*) = *g*(*x*)*e*−*x* para todo *x* real, luego *h* es diferenciable en R. Entonces

*h*j(*x*) = *g*j(*x*)*e*−*x* − *g*(*x*)*e*−*x*

= *e*−*x*[*g*j(*x*) − *g*(*x*)]

= *e*−*x,*0 = 0*,* para todo *x* ∈ *R.*

Luego *h* es una funci´on constante, *y*, *h*(*x*) = *h*(0) = *g*(0)*e*−0 = *b* para todo *x* real, luego, *h*(*x*) = *g*(*x*)*e*−*x* =

*b*, o sea *g*(*x*) = *bex* para todo *x* real, a donde dese´abamos llegar.

**Teorema 1.5.2** (Teorema de existencia y unicidad)**.** *Sea R una regi´on rectangular del plano xy definida*

*∂f*

*por a* ≤ *x* ≤ *b y c* ≤ *y* ≤ *d que contiene al punto* (*x*0*, y*0) *en su interior. Si f* (*x, y*)

*son continuas en*

*∂y*

R*, entonces existe un intervalo I*0 : *x*0 − *h < x < x*0 + *h, h >* 0 *contenido en a* ≤ *x* ≤ *b y una funci´on*

*u´nica y*(*x*) *definida en I*0 *que es una soluci´on del problema de valor inicial*

*y*j = *f* (*x.y*)*, y*(*x*0) = *y*0*.*

*Un problema de valor inicial tiene m´as de una soluci´on. Si la ecuaci´on diferencial satisface algunas condiciones donde x* = *x*0 *y y* = *y*0*, la soluci´on es u´nica.*

**Ejemplos 1.5.2.** *Determine si el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza la unicidad de la soluci´on en los siguientes problemas de valores iniciales*

*1.*

*y*j = *y, y*(0) = 0*.*

*∂f*

*En este caso f* (*x, y*) = *y, lo cual implica que* = 1 *y* (*x*0*, y*0) = (0*,* 0)*. Observemos que tanto*

*∂y*

*f* (*x, y*) *como ∂f son continuas en* R2*, dado que* (0*,* 0) ∈ R2*,* ***el teorema de existencia y unicidad*** *garantiza la existencia de una u´nica soluci´on del problema de valor inicial y*′ = *y, y*(0) = 0 *en el intervalo I* = R = (−∞*,* ∞)*.*

*∂y*

*2.*

1

1

*En este caso f* (*x, y*) = *y* 2 *, ∂f* = 1

*y*j = *y* 2 *, y*(0) = 0*.*

*y* (*x ,y* ) = (0*,* 0)*. Observemos que tanto ∂f*

*es continua*

*∂y* 2√*y* 0 0 *∂y*

}

*en R* = (*x, y*) ∈ R2*y >* 0 *como* (0*,* 0) ∈*/* R *dado que el* ***Teorema de existencia y Unicidad*** *no*

*garantiza la existencia de una u´nica soluci´on del problema.*

*3.*

′

1 *∂f*

1

*y* = *y* 2 *, y*(1) = 0*.* (1.4)

1 *∂f*

*En este caso f* (*x, y*) = *y* 2 *, ∂y* = 2√*y y* (*x*0*, y*0) = (1*,* 0) *Observemos que tanto*

}

*es continua en*

*∂y*

*R* = (*x, y*) ∈ R2 : *y >* 0 *como* (1*,* 0) ∈*/* R *dado que el* ***Teorema de Existencia y Unicidad*** *no garantiza la existencia de una u´nica soluci´on del problema.*

### Solucio´n de ecuaciones diferenciales por anti-derivada

Se quiere encontrar una funci´on en una variable independiente *y*(*x*) tal que su segunda derivada sea

la constante 10. En otras palabras hallar la soluci´on de la ecuaci´on *d*2*y*

*dx*2

= 10*.* Es claro que el estudiante

puede resolver este ejercicio, buscando qu´e funci´on al derivarla dos veces su resultado es 10, luego la primer derivada ser´a 10*x* + *A* y al buscar que funci´on da esta derivada llega a 5*x*2 + *Ax* + *B* ´o integra dos veces. Es decir, la ecuaci´on anterior se puede reescribir en la forma

*dy*

= 10*dx.*

*dx*

Para obtener el diferencial del lado izquierdo integramos miembro a miembro, as´ı

∫ ∫

*dy* = 10*dx, dx*

cuya soluci´on es

*dy*

= 10*x* + *c,*

*dx*

la constante de integraci´on *c*, se an˜ade por aquello de la integraci´on indefinida. La u´ltima ecuaci´on es otra ecuaci´on diferencial, que se puede reescribir como

*dy* = (10*x* + *c*1)*dx.*

Integrando de nuevo, miembro a miembro se obtiene

∫ *dy* = ∫ (10*x* + *c*1)*dx,*

de donde *y* = 5*x*2 + *c*1*x* + *c*2 es soluci´on general de la ecuaci´on dada. La soluci´on general se dice que es una familia de curvas soluci´on de la ecuaci´on, ya que al darle valores a las constantes, se obtienen distintas curvas. ¿Cu´antas soluciones se obtienen si se dan condiciones iniciales?

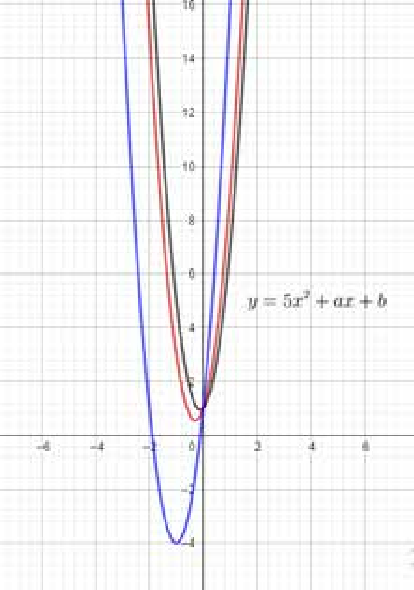


Figura 1.2: Gr´afica de la funci´on *y*(*x*) = 5*x*2 + *c*1*x* + *c*2 para diferentes valores de *c*1 y *c*2.

**Ejemplos 1.5.3.** *Calcular la anti-derivada, es decir, solucione la ecuacio´n diferencial.*

* + - 1. *Dada*

*dy* 1

*dx* = 1+ *x*2 *,*

*se procede a encontrar la soluci´on aplicando las t´ecnicas para encontrar integrales, es decir*

*dx dy* = 1+ *x*2 *,*

*luego*

*y*(*x*9 = *dx* = *arctang*(*x*)+ *c,* 1+ *x*2

∫

*donde c es una constante de integraci´on arbitraria.*

* + - 1. *Dada*

*dy* = *x*2 sen *xdx, dx*

∫

*multiplicando esta expresi´on por dx, se tiene dy* = *x*2 sin *xdx resulta ser, x*2 sin *xdx, as´ı aplicando la integraci´on por partes se tiene*

*u* = *x*2*, dv* = sen *xdx du* = 2*x dx, v* = − cos *x,*

*es decir*

*y* = −*x*2 cos *x* +2 ∫ *x* cos *xdx,*

*nuevamente aplicando la integraci´on por partes se tiene:*

*u* = *x, dv* = *dx dv* = cos *xdx,*

*es decir As´ı*

*v* = sen *x.*

*y* = −*x*2 cos *x* +2 *x* sen *x* − ∫ sen *x, dx* + *c.*

*Finalmente, la soluci´on de la ecuaci´on diferencial dada es*

*y* = −*x*2 cos *x* + 2*x* sen *x* + 2 cos *x* + *c.*

### Solucio´n particular de una ecuaci´on diferencial

Para la ecuaci´on diferencial de la Secci´on 1.5.1, halle la soluci´on particular que satisface las condiciones iniciales *y*(0) = 1 y *y*j(0) = 1*.* Las condiciones iniciales indican que de la familia de curvas soluci´on, interesa aquella funci´on que pasa por el punto (0,1) y cuya derivada en *x* = 0, vale 1. Entonces, se reemplazan los valores *y* = 1 y *x* = 0 en la ecuaci´on *y* = 5*x*2 + *c*1*x* + *c*2, obteniendo: 1 = 5(0)2 + *c*1(0) + *c*2*.* Lo anterior

implica que *c*2 = 1. Como *y*(0) = 1, entonces en la ecuaci´on

*dy*

*dx* = 10*x* + *c*1, hacemos *x* = 0 y

*dy*

= 1,

*dx*

para obtener 1 = 10(0) + *c*1, y as´ı *c*1 = 1. Luego la soluci´on particular es *y* = 5*x*2 + *x* + 1.

Como se vio en el ejemplo anterior, la soluci´on general de una ecuaci´on diferencial es una funci´on que contiene tantas constantes arbitrarias independientes como el orden de la ecuaci´on, es decir, que si la ecuaci´on diferencial es de segundo orden, su soluci´on general debe tener dos constantes de integraci´on independientes, como en el ejemplo *c*1 y *c*2.

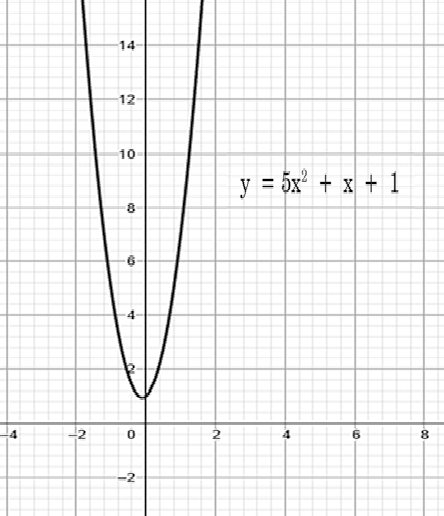


Figura 1.3: Gr´afica de la funci´on *y*(*x*) = 5*x*2 + *x* + 1.

**Ejemplos 1.5.4.** *Soluci´on general y soluci´on particular*

* + - 1. *Encontremos la soluci´on general y la soluci´on particular de la ecuaci´on diferencial*

3 *dy* 8*x*2 = 1*. dx*

−

*Si se cumple que y*(0) = 10*, en efecto* 3 *dy* 8*x*2 = 1 *entonces* 3*dy* = (1 + 8*x*2)*dx. Integrando ambos*

−

*dx*

8*x*3 *x* 8 3 *c*1

*miembros se llega* 3*y* = *x* + + *c*1*, c*1 = *cte. Despejando y* = + *x* + *c, con c* = ∈ R *que*

3 3 9 3

*corresponde a la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial dada. Ahora bien, si y*(0) = 10 = *c as´ı*

*se tiene una soluci´on particular a saber y* = *x* + 8 *x*3 + 10 *de la ecuaci´on diferencial* 3 *dy* − 8*x*2 = 1*.*

3

9

*dx*

*dr*

* + - 1. *La solucio´n general de*

*dθ*

= *θr*1*/*2 *se obtendr´a mediante el siguiente procedimiento: dr*

*dθ*

= *θr*1*/*2

*tenemos que r*

−1*/*2

*dr* = *θdθ. Integrando ambos miembros se tiene* 2*r*

1*/*2 =

*θ*2

+ *k donde k es la*

2

1*/*2 *θ*2 *k*

*constante de integraci´on; as´ı r*

= 4 + *c con c* = 2 ∈ R *que corresponde a la soluci´on general de*

*dr*

*la ecuaci´on diferencial*

*dθ*

= *θ*1*/*2 *Una soluci´on particular de la ecuaci´on diferencial esta dada por*

*la expresio´n:*

*θ*2 2 *θ*4

*r* = =

4

16

*para c* = 0*.*

## Estrategia de solucio´n

Como se muestra en el diagrama de bloques 1.4, se define una de las curvas, soluci´on que se conoce como la soluci´on particular de la ecuaci´on y es aquella que cumple condiciones iniciales o de frontera. Las condiciones iniciales son aquellas que se dan para la curva y sus derivadas en un mismo valor de la variable independiente y las condiciones de frontera en cualquier otro valor de la variable independiente por donde pasa la curva soluci´on.

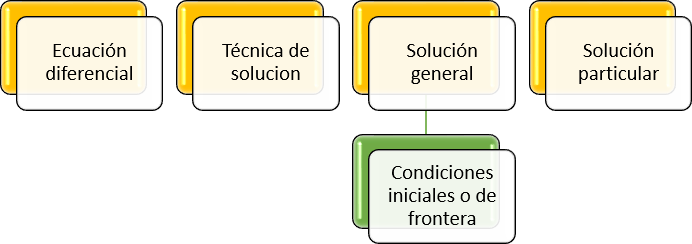


Figura 1.4: Este diagrama de bloques muestra las estrategias a seguir para solucionar una ecuaci´on diferencial.

## Ejercicios

* + 1. Determine si las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales, y las que corresponden a este tipo de ecuaciones, clasif´ıquelas en lineales o no lineales.
       1. 3*x*2*y*jjj − 5*xy*jjj + 6*y*j − 7*y* = 0.

*b*) 4*y*” − 5*y*j + 6*y* = 0.

*c*) (cos *x*)*y*jj − 3*y* = 0.

*d* ) −2*y*”+ 4*y*j − 7*y*2 = 0.

*e*) *y*”+ 3*y*j + 5*ex*+*y* = 0.

*f* ) *y*”+ 3*y*j + 5*ex*+ln *y* = 0.

* + 1. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales segu´n el tipo, orden, linealidad e indique cu´al o cu´ales son las variables dependientes o independientes.

*πey* = sen *x.*

3*d*2*y*

*a*)

*dx*2 +

*dy* √

*b*) 8*π*

*∂*2*x*

*∂t∂y*

+ 3√2*x ∂v* + *∂v*

*∂y ∂t*

= *t*2

2 +

*dx*

+ *y*2*.*

*∂*2*x ∂*2*y*

*c*) *∂t*2 + *∂t*2 = 0*.*

3*d y*

1

3

*d* ) *dx*3 −

*dy* 6

*dx*

= *y*5*.*

*∂*2*t ∂*2*t ∂*2*t*

*e*) *∂x*2 + *∂y*2 + *∂z*2 = 0*.*

*f* ) *dx* = *xt* + 3*.*

*dt*

*d*2*y d*2*y* 2

*g* )

= *xy*2*.*

*dx*2 *dx*2

* + 1. Determine si la funci´on dada es o no soluci´on de la ecuaci´on diferencial asociada.
       1. *y* = *ex* + *e*−*x*, *y*” − *y* = 0.
       2. *y* = 1 , *xy*j + *y* = 0.

*x*

*c*) *x* = 3*t*2, *dx* = *t*1*/*2*x*.

*dy*

*d* ) *x*2 + *y*2 = 25, *y dy* + *x* = 0.

*dx*

1 + sin *x d*2*y* 1

*e*) *y* = −(cos *x*) ln |

cos *x* |, *dx*2 − coth *x* + *y* = 0.

*f* ) *y* = *e*−*x/*2, 2*y*j + *y* = 0.

*g* ) *y*(*x*) = 5 *e*−*x* − 2 *e*−4*x*, *d*2*y*

3

3

*dx*2 +5

*dy*

+ 4*y* = 0.

*dx*

1. *y* = −*r,* si *r <* 0

*r*2*,* otherwise*.*

*dr*

*, rdy* − 2*y* = 0

1. *r* = *e*−*t*2 ∫ *t et*2 *dt* + *c e*−*t*2 ,*dr* + 2*rt* = *t*.

0

*dt*

1

* + 1. Encontrar la soluci´on de la ecuaci´on diferencial dada y grafique la familia soluci´on.

*dy*

*a*) = senh *x*.

*dx*

*b*) *dy* = *x*2 + 2*x* + 3.

*dx*

*dy* (2*π*√*e*)

*c*) *dx* = *x*2+√2*x*+*e*).

1. ) *dr* = *φ* .

*dθ* (*θ*−*n*)3

1. *dj* = *k*2 sen2 *k*.

*dk*

*du*

*f* ) = 0.

*dy*

* + 1. Determine si el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza la unicidad de la soluci´on en los si- guientes Problemas de valores iniciales

*a*) *y*j = *y*, *y*(0) = 1, *x*0 = 0 *y*0 = 1 donde (*x*0*, y*0) = (0*,* 1).

*b*) *y*j = *y*1*/*2, *y*(0) = 1.

*c*) *y*j = *sen*(*x* + *y*), *y*(*π*) = 0.

*d* ) *y*j = ln *x* , *y*(1) = 1.

*y*

* + 1. Encontrar la soluci´on de los siguientes problemas de valores iniciales.

*a*) *dy* 2*x*3 = 1, *y*(0) = 0.

−

*dx*

*dy* 2

*b*)

*dx*

*dv* 2

*c*)

*du*

*dy*

— sin2 *x* = 0, *y*(*π/*2) = 10.

= 1 − *v*2, *v*(1) = 0.

*d* ) = 0, *y*(10) = 4.

*dx*

**Cap´ıtulo 2**

# Ecuaciones diferenciales de primer orden

Analice la siguiente situaci´on de la Figura 2.1.



Figura 2.1: Situaci´on problema.

La polic´ıa descubre el cuerpo de una profesora de ecuaciones diferenciales. Para resolver el crimen es decisivo determinar cu´ando se cometi´o el homicidio. El forense lleg´o al medio d´ıa y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 30◦ grados Celsius. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29◦ grados Celsius. As´ı mismo, observa que la temperatura de la habitaci´on es constante a 27◦ grados Celsius; suponiendo que la temperatura de la v´ıctima era normal en el momento de su fallecimiento (37◦ grados Celsius). Responde

1. A qu´e hora se cometi´o el crimen?
2. Qu´e planteamiento realiz´o para determinar la hora de muerte de la profesora?

## Teoremas

Dado el operador diferencial lineal *L*, de *C*1(*I*) en *I*, definido por *L*(*y*) = *y*j+*P* (*x*)*y* , donde *y*, pertenece a *C*1(*I*) , y, *P* es una funci´on continua en *I*. Se est´a interesado en hallar la soluci´on de *L*(*y*) = *Q*(*x*), donde *Q* es una funci´on continua en I. Para ello, se presentar´an dos teoremas, en el primero se solucionar´a la ecuaci´on *y*j + *P* (*x*)*y* = 0, y, finalmente se buscar´a la soluci´on de *y*j + *P* (*x*)*y* = *Q*(*x*).

**Teorema 2.1.1.** *Sea P una funci´on continua en un intervalo I. Sea a un punto de I y b un num´ero real dado. Existe una y solo una funci´on y* = *f* (*x*) *que satisface la ecuaci´on y*j(*x*)+ *P* (*x*)*y* = 0*, para todo x* ∈ *I, adem´as y*(*a*) = *b. Esta funcio´n viene dada por f* (*x*) = *be*−*A*(*x*) *donde A*(*x*) = *P* (*x*)*dx.*

0

∫

*x*

32

*Demostraci´on.* Sea *f* (*x*) = *be*−*A*(*x*) donde *A*(*x*) = ∫ *x P* (*t*)*dt*, se verifica que *f* j(*x*) + *P* (*x*)*f* (*x*) = 0 para

*a*

todo *x* en *I*, y, *f* (*a*) = *b.* En efecto, como

*f* (*x*) = *be*−*A*(*x*)*,*

y Entonces

Como *A*(*a*) = ∫ *a*

−*a*

*f* j(*x*) = −*bA*j(*x*) = −*bP* (*x*)*e*−*A*(*x*)*.*

*f* j(*x*)+ *P* (*x*)*f* (*x*) = −*bP* (*x*)*e*−*A*(*x*) + *P* (*x*)*be*−*A*(*x*) = 0 para todo*x* ∈ *I.*

*P* (*t*)*dt* = 0, entonces *f* (*a*) = *be*−*A*(*a*) = *b*. Se prueba ahora que esta funci´on es u´nica,

j

para ello, sea *g* una funci´on que satisface las condiciones dadas, entonces *g* (*x*)+ *P* (*x*)*g*(*x*) = 0 para *x* en

I y *g*(*a*) = *b*; definiendo

Derivando *h* se obtiene

*h*(*x*) = *g*(*x*)*eA*(*x*) para *x* en *I.*

*h*j(*x*) = *g*j(*x*)*eA*(*x*) + *A*j(*x*)*g*(*x*)*eA*(*x*) = *eA*(*x*) *g*j(*x*)+ *P* (*x*)*g*(*x*) = 0*,*

para *x* en el intervalo *I*. Luego *h* es una funci´on constante en *I*, *h*(*x*) = *h*(*a*) = *g*(*a*)*eA*(*a*) = *b*; es decir,*g*(*x*)*eA*(*x*) = *b* para todo *x* en *I*, entonces *g*(*x*) = *be*−*A*(*x*)*,* para todo *x* en *I*, lo cual verifica que la soluci´on es u´nica.

**Teorema 2.1.2.** *Sean P y Q funciones continuas en un intervalo I. Sea a un punto en I, y b un nu´mero real dado, entonces existe una y solo una funci´on f que satisface la ecuaci´on diferencial y*j(*x*)+*P* (*x*)*y*(*x*) = *Q*(*x*)*, y, la condici´on y*(*a*) = *b. Esta funci´on es*

∫

*donde A*(*x*) = ∫ *x P* (*t*)*dt.*

*a*

+ *e*

*f* (*x*) = *be*

−*A*(*x*)

−*A*(*x*) *x a*

*Q*(*t*)*e*

*A*(*t*)

*dt,*

*Demostraci´on.* Es f´acil verificar que *f* , as´ı definida, satisface las condiciones del teorema, se prueba que esta funci´on es u´nica, para ello suponga una funci´on *g* que satisface las condiciones dadas. Definimos *h*(*x*) = *g*(*x*)*eA*(*x*) para *x* en *I*, derivando *h* se tiene

*h*j(*x*) = *g*j(*x*)*eA*(*x*) + *A*j(*x*)*g*(*x*)*eA*(*x*)

= *eA*(*x*) *g*j(*x*)+ *A*′ (*x*)*g*(*x*)*eA*(*x*)

= *g*j(*x*)+ *P* (*x*)*g*(*x*)

= *eA*(*x*)*Q*(*x*)*.*

Por el primer teorema fundamental del C´alculo se tiene *h*(*x*) − *h*(*a*) = ∫ *x eA*(*t*)*Q*(*t*)*dt* para *x* en *I.* Luego

*a*

∫

*h*(*x*) = *h*(*a*)+

*x*

*eA*(*t*)

*a*

∫

*Q*(*t*)*dt*

*g*(*x*)*e*

*A*(*x*)

= *g*(*a*)*eA*(*a*) +

*x*

*eA*(*t*)

*a*

∫

+ *e*

*Q*(*t*)*dt*

para *x* en *I.*

*g*(*x*) = *be*

−*A*(*x*)

−*A*(*x*) *x*

*a*

*Q*(*t*)*e*

*A*(*t*)

*dt,*

**Ejemplo 2.1.1.** *Hallar la soluci´on del siguiente problema de valores iniciales*

*xy*j − 2*y* = *x*5*, y*(1) = 1*,* (2.1)

*para x >* 0*. Como x es diferente de cero, entonces la ecuaci´on se puede escribir como*

*y*j 2*y* = *x*4*, x*

−

*luego P* (*x*) = −2

*x*

*y Q*(*x*) = *x*4*. Aplicando el Teorema 2.1.2, se obtiene la siguiente soluci´on*

*donde*

*y*(*x*) = *y*(1)*e*

−*A*(*x*)

−*A*(*x*) *x*

1

∫

+ *e*

*t*4*e*

*A*(*t*)

*dt,*

*Luego*

*A*(*x*) = −

*x* 2

*t dt* = −2 ln *x.*

∫

1

*y*(*x*) = 1 · *e*

1. ln *x*

2 ln *x x*

1

∫

+ *e*

2 ∫

*e*− ln *t*2 *dt*

= *x*2

2

*x*

+ *x t*4

2 ∫ *x* 2

1

1

· *t*−2*dt*

= *x* + *x*

2

= *x*

+ *x*

2 *x*3

*t dt*

1

3 − 3

2*x*2 *x*5

= +

3 3

*para todo x >* 0*.*

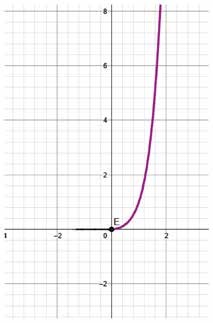
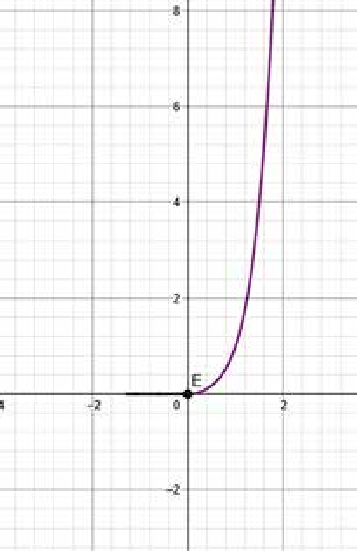


Figura 2.2: Gr´afica de la curva soluci´on del problema de valores iniciales (2.1).

En el punto anterior, se vio que si se tiene el operador lineal de primer orden *L* definido por *L*(*y*) = *y*j + *P* (*x*)*y,* donde *P* ∈ *C*(*I*). Entonces la ecuaci´on *L*(*y*) = *Q*(*x*) donde *Q* ∈ *C*(*I*), tiene una u´nica soluci´on *f* , que verifica la condici´on *f* (*a*) = *b*, para a un elemento de *I*, y, *b* un real dado, esta funci´on viene dada por

∫

+ *e*

*f* (*x*) = *be*

−*A*(*x*)

−*A*(*x*) *x a*

*Q*(*t*)*e*

*A*(*t*)

*dt,*

donde *A*(*x*) = *x P* (*t*)*dt.* Gr´aficamente esto significa que para la ecuaci´on *L*(*y*) = *Q*(*x*), y para cada punto (*x*0*, y*0) ∈ *I* × R, existe *f* que es soluci´on de la ecuaci´on y satisface la condici´on *f* (*x*0) = *y*0 , es decir, se llena la franja dada por *I* × R.

*a*

∫

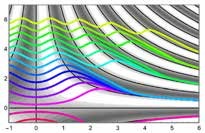
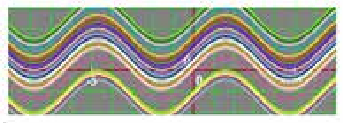
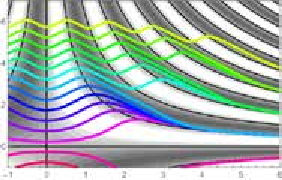


Figura 2.3: Is´oclinas de *y* = sen *x* con (*x*0*, y*0) ∈ *I* × R. Apps Graphm´atica- VisualDSolve [*x*j[*t*] ==

*Sin*[*tx*[*t*]]*,* {*t,* −1*,* 6}*,* {*x,* −1*,* 7}]

## M´etodos de soluci´on para ecuaciones de variables separables de primer orden

Una ecuaci´on diferencial de la forma *y*′ = *f* (*x, y*) se denomina de variables separables si *y*j(*x*) = *f* (*x, y*) = *Q*(*x*)*R*(*y*), donde *Q* y *R* son funciones dadas, es decir, se puede expresar como un producto de dos factores, uno dependiente de *x* u´nicamente y el otro solamente de *y*, luego la ecuaci´on se puede escribir as´ı: *P* (*y*)*y*j = *Q*(*x*), si *R*(*y*) /= 0, y*P*, (*y*) = [*R*(*y*)]−1; la soluci´on a dicha ecuaci´on viene caracterizada por la siguiente proposici´on.

**Teorema 2.2.1.** *Sea y* = *Y* (*x*) *una soluci´on cualquiera de la ecuaci´on diferencial*

*P* (*y*)*y*j = *Q*(*x*)*,* (2.2)

*tal que Y es un elemento de C*1(*I*)*. Sean P y Y elementos de C*(*I*)*, se define*

*h*j(*x*) = *P* (*x*)*,*

*para todo x* ∈ *I, donde y verifica*

∫

*h*(*y*) = *Q*(*x*)*dx* + *c,* (2.3)

*para un valor c. Adem´as, si y satisface (2.3) entonces y es soluci´on de (2.2).*

*Demostraci´on.* Supongamos que *y* = *y*(*x*) para *x* en *I* es soluci´on de *P* (*y*)*y*j = *Q*(*x*). Luego *P* [*Y* (*x*)]*Y* j(*x*) = *Q*(*x*) para *x* en *I*. Como *h*j(*x*) = *P* (*x*), entonces *h*j[*Y* (*x*)]*Y* j(*x*) = *Q*(*x*). Utilizando la regla de la cadena, se tiene que [(*hoY* )(*x*)]j = *Q*(*x*), luego

*h*[*Y* (*x*)] = ∫ *Q*(*x*)*dx* + *c.*

Para un cierto valor de c, como *y* = *Y* (*x*) entonces

*h*(*Y* ) = ∫ *Q*(*x*)*dx* + *c,*

derivando [*h*j(*y*)]*y*j = *Q*(*x*), o sea *P* (*y*)*y*j = *Q*(*x*) para *x* ∈ *I*. Lo cual prueba: y satisface (2.3), entonces *y*

es soluci´on de (2.2). Es importante notar que como *y* = *Y* (*x*) para *x* ∈ *I*, luego *dy* = *Y* j(*x*)*dx*, entonces

*P* (*y*)*y*j = *P* [*Y* (*x*)]*Y* j(*x*)*dx* = *Q*(*x*)*,*

e integrando con respecto a *x* se tiene:

∫ *P* (*y*)*y*j = ∫ *P* (*y*)*dy* = ∫ *Q*(*x*)*dx* + *c.*

Dado *y*j = *dy* , cociente, se tiene la relaci´on *P* (*y*)*dy* = *Q*(*x*)*dx*, integrando a ambos miembros de esa

*dx*

ecuaci´on y sumamos una constante obtenemos (2.3), lo cual muestra la eficacia de la notaci´on de Leibniz.

**Ejemplos 2.2.1.** *Ejemplos ecuaciones de variables separables.*

* + 1. *Halle la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

(*xy*2 − *x*)*dx* + (*x*2*y* + *y*)*dy* = 0*.*

***Soluci´on:*** *Factorizando se tiene*

*x*(*y*2 − 1)*dx* + *y*(*x*2 + 1)*dy* = 0*.*

*Dividiendo todos los t´erminos por el factor* (*y*2 − 1)(*x*2 + 1)*, siempre que y* /= ±1; *se llega a la*

*ecuaci´on* *x*

2

*y*

*dx* + 2

*dy* = 0*,*

*x* + 1 *y* − 1

*la cual es, una ecuaci´on de variables separables. Integrando t´ermino a t´ermino*

∫ *x dx* = − ∫ *y dy.*

*x*2 + 1

*y*2 − 1

*Integrando por sustituci´on, se reemplaza z* = *x*2 + 1*, en la primer integral, dz* = 2*xdx. Sustituyendo*

1 ∫ *dz* = 1 ln |*z*| *.*

2

*z*

2

*La misma t´ecnica se aplica a la segunda integral y se llega a la soluci´on de la ecuaci´on diferencial,*

2 2

1 ln *x*2 + 1 + 1 ln *y*2 + 1 = *c.*

*Multiplicando por 2 se obtiene*

ln *x*2 + 1 + ln *y*2 − 1 = 2*c.*

*Aplicando propiedad de los logaritmos* ln *a* + ln *b* = ln(*ab*) *se obtiene*

ln(*x*2 + 1)(*y*2 − 1) = 2*c.*

*Para obtener el argumento de la funci´on logaritmo, se aplica antilogaritmo a la ecuaci´on*

*eLn*(*x*2−1)(*y*2−1) = *e*2*c,*

*luego por propiedad e*ln *u* = *u se tiene*

(*x*2 + 1)(*y*2 − 1) = *K,*

*siendo e*2*c* = *K. De la u´ltima ecuaci´on se despeja y, para obtener la soluci´on general*

*y*(*x*) = *K*

±

*x*2 + 1

+ 1*.*

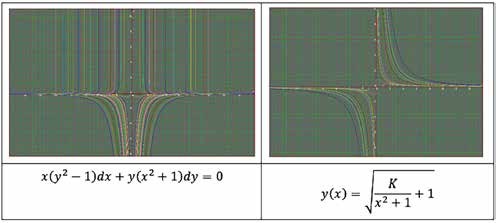
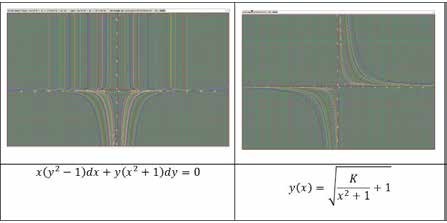


Figura 2.4: Ecuaci´on diferencial y su soluci´on gr´afica obtenida de apps Graphm´atica.

* + 1. *Halle la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

*dy*

= *x* + *xy.*

*dx*

*dy*

***Soluci´on:*** *Observe que*

*Luego*

= *x* + *xy, entonces*

*dx*

∫ ∫

*dy* = *x dx* + *c.* 1 + *y*

*x*2

ln(1 + *y*) =

2

+ *c,*

*en consecuencia y*(*x*) = *Aex*2*/*2*, con c y A constantes arbitrarias a ser determinadas por las condi- ciones iniciales.*

* + 1. *Halle la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

*dy* = *xex.* (2.4)

*dx*

∫ ∫

***Soluci´on:*** *A partir de (2.4) se obtiene dy* = *xexdx, luego dy* = *xexdx. Por el m´etodo de integrando por partes se obtiene u* = *x, du* = *dx, dv* = *exdx, v* = *ex. En consecuencia*

*y*(*x*) = *xex* − ∫ *exdx* = *xex* − *ex* + *c.*

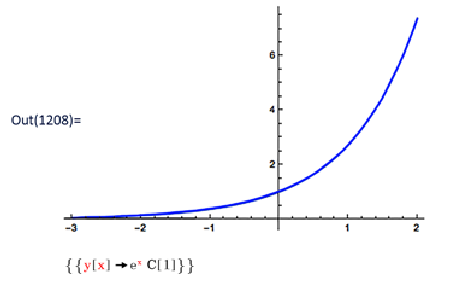


Figura 2.5: Gr´afica de la funci´on *y* = *ex*, Mathematica 10.

**Nota 2.2.1.** *Recuerde que una ecuaci´on diferencial de primer orden y primer grado se puede escribir en una de las siguientes formas*

*1. M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0*.*

*dy*

*2.* = *f* (*x, y*)*.*

*dx*

*Observe que si en la forma* 2) *f solo depende de x o es una constante, entonces la ecuaci´on diferencial se puede resolver aplicando las t´ecnicas de integraci´on directas ya vistas.*

#### 2.2.1. Solucio´n de ecuaci´on diferencial utilizando software Mathematica

*In*[1] *s* = *DSolve*[ *y*j[*x*] == *y*[*x*]*, y*[0] == 1} *, y*[*x*]*, x*] *Out*[1] {{[*x*] → *ex*}}

Salida Mathematica 10

C´odigo Mathematica 10

*In*[2] *Plot*[*y*[*x*]*/.s,* {*x,* −3*,* 2}]

Las ecuaciones diferenciales se han resuelto aplicando t´ecnicas de integraci´on directas. Sin embargo, no siempre es posible encontrar la soluci´on aplicando anti-derivadas. En lo que sigue se analizan m´etodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado cuyas soluciones no pueden obtenerse aplicando anti-derivadas (Ver Figura 2.5).

## M´etodos de sustitucio´n

#### Ecuaci´on diferencial homog´enea

Una ecuaci´on diferencial homog´enea *M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0 puede resolverse a trav´es de m´etodos de sustituci´on, si cumple la propiedad de homogeneidad. ¿Qu´e dice esta propiedad?

**Propiedad 2.3.1.** *La funcio´n f* (*x, y*) *es homog´enea de orden n si*

*f* (*tx, ty*) = *tbf* (*x, y*)*.*

La Propiedad 2.3.1 se llama propiedad de *homogeneidad*.

**Ejemplos 2.3.1.** *Ejemplos de funciones homog´eneas*

* + - 1. *f* (*x, y*) = *x*2 + *y*2 *es una funci´on homog´enea de segundo orden. En efecto,*

*f* (*tx, ty*) = (*tx*)2 + (*ty*2) = *t*2(*x*2 + *y*2) = *t*2*f* (*x, y*)*.*

√ *y*2

*2. f* (*x, y*) =

*xy* +

*x*

*es una funci´on homog´enea de orden 1 ya que*

*f* (*tx, ty*) = √

*tx.ty* +

(*ty*)2

*tx*

= √*t*2*xy* +

*t*2*y*2 *tx*

= *t* √*xy* + *y .*

*x*

2

**Ejercicios 2.3.1.** *Determine si las siguientes funciones son homog´eneas*

*x*

*1. f* (*x, y*) = *.*

*y*

*2. f* (*x, y*) = *x*2*y* + *y*4*.*

*x*3

*3. f* (*x, y*) = *xy* + *.*

*x* + *y*

sin(*xy*)

*4. f* (*x, y*) =

*.*

cos *x*

*5. f* (*x, y*) = 8(ln *y* − ln *x*)*. 6. f* (*x, y*) = 3*.*

**Teorema 2.3.1.** *La ecuaci´on diferencial*

*M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0*,*

*es una ecuaci´on diferencial homog´enea si*

*M* (*x, y*) *y N* (*x, y*)*,*

*son funciones homog´eneas del mismo orden; es decir, si se verifica la propiedad de homogeneidad en M y N.*

*Demostraci´on.* Consideramos la ecuaci´on de primer orden

*y*j = *f* (*x, y*)*.* (2.5)

La cual verifica la propiedad de homogeneidad; es decir, *f* (*tx, ty*) = *f* (*x, y*), para todo *x, y* con *t* = 0. Aplicando esta condici´on para *x* = 1 a 4.1 se obtiene

/

*t*

Sea *u* =

*y*j = *f* 1*, y .* (2.6)

*y*

*x*

, luego *y* = *ux* derivando con respecto a *x* y sustituyendo en (4.5), se tiene

*x*

*u*j*x* + *u* = *f* (1*, u*)*,* (2.7)

de donde

*du*

*xdx* = *f* (1*, u*) − *u,*

la cual es una ecuaci´on de variables separables de primer orden. Sean *M* y *N* funciones homog´eneas del mismo orden *n*. Es decir:

*M* (*tx, ty*) = *tnM* (*x, y*) y *N* (*tx, ty*) = *tnN* (*x, y*)*.*

Aplicando esta condici´on para *t* = 1

*x*

entonces *M* y *N* se tiene:

Es decir

*M* 1*, y*

*x*

=

1 *n*

*x*

*M* (*x, y*)*.*

*M* 1*, y* = *x*−*nM* (*x, y*)

*x*

*N* 1*, y*

=

*x*

1 *n*

*x*

*N* (*x, y*)

= *x*−*nN* (*x, y*)*.*

En consecuencia

*M* (*x, y*) = *xnM* 1*, y N* (*x, y*) = *xnN* 1*, y .*

Reemplazando en la Ecuaci´on Diferencial homog´enea

*x*

*x*

*xnM* 1*, y dx* + *xnN* 1*, y dy* = 0*.*

*x x*

Factorizando *xn* se obtiene

*xn M* 1*, y dx* + *N* 1*, y dy* = 0*.*

Como *xn* /= 0, entonces

*M* 1*,*

*x*

*y*

*dx* + *N*

*x*

1*,*

*x*

*y*

*dy* = 0*.* (2.8)

*x*

Se realiza cambio de variables, siendo *u* = *y* ; es decir, *y* = *ux* , *y*j = *u*j*x* + *u* Observe que *dy* = *xdu* + *udx*.

*x*

Reemplazando en (2.8) se tiene

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *M* (1*, u*)*dx* + *N* (1*, u*)[*xdu* + *udx*] | = | 0 |
| *M* (1*, u*)*dx* + *xN* (1*, u*)*du* + *uN* (1*, u*)*dx* | = | 0 |
| *M* (1*, u*)*dx* + *uN* (1*, u*)*dx* + *xN* (1*, u*)*dy* | = | 0 |
| *xN* (1*, u*)*du*  *N* (1*, u*)*du* | =  = | −[*M* (1*, y*)+ *uN* (1*, u*)]*dx*  −*dx* |

*M* (1*, u*)+ *uN* (1*, u*) *x*

*dy M* (1*, u*)+ *uN* (1*, u*) −1

= *.*

*dx N* (1*, u*) *x*

= *g*(*u*)*.h*(*x*)*,*

donde

[*M* (1*, u*)+ *N* (1*, u*)*u*] 1

*g*(*u*) =

*N* (1*, u*) y *h*(*x*) = − *x.*

Por lo tanto, la ecuaci´on diferencial (4.1) es separable.

1

**Ejercicios 2.3.2.** *Repita el proceso definiendo t* =

*ecuaci´on diferencial de variables separables.*

*, y reduzca la ecuaci´on diferencial homog´enea a una*

*y*

**Teorema 2.3.2.** *La ecuaci´on diferencial M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0 *es homog´enea si y solo si M y N*

*son funciones homog´eneas del mismo orden.*

*Demostraci´on.* Suponga que *M* y *N* son funciones homog´eneas del mismo orden. Entonces

*M* (*tx, ty*) = *tnM* (*x, y*)

*N* (*tx, ty*) = *tnN* (*x, y*)*.*

1

Sea *t* =

*y*

entonces *M* y *N* se escriben como

*M x y*

*x*

*,* 1

1 *n*

*y*

1 *n*

=

*M* (*x, y*)

En consecuencia

*N ,* 1 =

*y y*

*N* (*x, y*)*.*

*M* (*x, y*) = *ynM x,* 1

*y*

*N* (*x, y*) = *ynN x,* 1 *.*

*y*

Reemplazando en la ecuaci´on diferencial homog´enea

*ynM x,* 1 *dx* + *ynN x,* 1 *dy* = 0

*y*

*y*

*yn M x,* 1 *dx* + *N x,* 1 *dy* = 0*.*

*y y*

Puesto que *yn* = 0 entonces

/

*x x*

*M ,* 1

*y*

*dx* + *N*

*,* 1 *dy* = 0*,* (2.9)

*y*

realizando cambio de variable. Sea *u* = *x* , *x* = *u* ∗ *y*, entonces *dx* = *udy* + *ydu*, sustituyendo en (4.6) se

*y*

obtiene

−1 *uM* (*u,* 1) + *N* (*u,* 1) = *du,*

*y*

*M* (*u,* 1)

*dy*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *M* (*u,* 1)[*udy* + *ydu*]+ *N* (*u,* 1)*dy* | = | 0 |
| *uM* (*u,* 1)*dy* + *yM* (*u,* 1)*du* + *N* (*u,* 1)*dy* | = | 0 |
| [*uM* (*u,* 1) + *N* (*u,* 1)] *dy* | = | −*yM* (*u,* 1)*du* |

luego

esta Ecuaci´on Diferencial es separable. Con

*du*

= *h*(*y*)*g*(*u*)*,*

*dy*

*uM* (*u,* 1) + *N* (*u,* 1) 1

*g*(*u*) =

*M* (*u,* 1) *h*(*y*) = − *y .*

**Ejemplo 2.3.1.** *Determine si la siguiente ecuaci´on diferencial es homog´enea, en caso positivo resolverla*

(*x*2 + *y*2)*dx* + (*x*2 − *xy*)*dy* = 0*.*

*En este caso M y N est´an dados por*

*M* (*x, y*) = *x*2 + *y*2*, N* (*x, y*) = *x*2 − *xy.*

*Luego*

*M* (*tx, ty*) = (*tx*)2 + (*ty*)2

= *t*2(*x*2 + *y*2)

= *t*2*M* (*x, y*) *N* (*tx, ty*) = (*xt*)2 − (*xt*)(*ty*)

= (*xt*)2 − *t*2*xy*

= *t*2(*x*2 − *xy*)

= *t*2*N* (*x, y*)*,*

*por lo cual, la ecuacio´n diferencial es homog´enea. Sea y* = *ux entonces*

*dy dy*

= *u* + *x , dx dx*

*o equivalentemente*

*dy* = *udx* + *xdu.*

*Reemplazando y, dy, en la ecuaci´on diferencial se obtiene*

(*x*2 + (*ux*)2)*dx* + (*x*2 − *x*(*ux*)) [*udx* + *xdu*] = 0 (*x*2 + *u*2*x*2)*dx* + (*x*2 − *ux*2)*udx* + (*x*2 − *ux*2)*xdu* = 0*,*

*multiplicando y asociando dx se obtiene*

(*x*2 + *u*2*x*2 + *x*2*u* − *u*2*x*2)*dx* + (*x*2 − *ux*2)*xdu* = 0*,*

*simplificando*

*o equivalentemente Separando variables*

(*x*2 + *x*2*u*)*dx* = −*xx*2(1 − *u*)*du, x*2(1 + *u*)*dx* = −*x*3(1 − *u*)*du.*

*como x* /= *y*0 *u* /=−1*, entonces*

*x*2 *x*3 *dx* =

−(1 − *u*) *du, u* + 1

*dx* = −(1 − *u*) *du x u* + 1

*dx* = *u* − 1 *. du. x u* + 1

*Integrando*

*x*

*u* + 1

∫ *dx* = ∫ *u* − 1 *du,*

*luego*

*Dado que u* = *y , entonces*

ln *x* + *C* = ∫ 1 − 2 *du* = *u* − 2 ln |1 + *u*|*.*

*x y y*

1 + *u*

*con c* = ln(*c*1)*. En consecuencia*

*x* − 2 ln 1 + *x*

= ln(*cx*)*,*

*y* = ln 1 + *y* 2 + ln(*cx*) = ln *cx* 1 + *y* 2 *,*

*x x x*

*con c* ∈ R*.*

**Ejemplo 2.3.2.** *Determine si la siguiente ecuaci´on diferencial es homog´enea, en caso positivo resolverla*

(*x*2 2*y*2) *dx* = *xy,*

−

*dy*

*con condicio´n inicial y*(−1) = 1*. A partir de la ecuaci´on se obtiene*

(*x*2 − 2*y*2)*dx* = *xydy*

(*x*2 − 2*y*2)*dx* − *xydy* = 0*,* (2.10)

*luego*

*En consecuencia*

*M* (*x, y*) = *x*2 − 2*y*2*, N* (*x, y*) = −*xy.*

*M* (*tx, ty*) = (*tx*)2 + 2(*ty*)2

= *t*2(*x*2 + 2*y*2)

= *t*2*M* (*x, y*) *N* (*tx, ty*) = −*txty*

= −*t*2*xy*

= *t*2*N* (*x, y*)*,*

*y*

*as´ı la ecuaci´on diferencial dada es homog´enea. Sea u* =

*x*

*entonces y* = *ux, derivando se obtiene dy* =

*udx* + *xdu. Reemplazando en la ecuaci´on (2.10) se obtiene*

(*x*2 − 2*y*2)*dx* − *xydy* (*x*2 2*u*2*x*2)*dx xux* [*udx* + *xdu*] *x*2 (1 − 2*u*2)*dx* − *u* [*udx* + *xdu*]

— −

|  |  |
| --- | --- |
| = | 0 |
| = | 0 |
| = | 0*,* |

*como x*2 /= 0*, entonces*

*luego*

(1 − 2*u*2)*dx* − *u*2*dx* − *uxdu* = 0 (1 − 2*u*2 − *u*2)*dx* − *uxdu* = 0 (1 − 3*u*2)*dx* − *uxdu* = 0

(1 − 3*u*2)*dx* = *uxdu,*

*dx udu*

=

*x* 1 − 3*u*2

∫

∫

*dx* = *udu ,*

*x* 1 − 3*u*2

*sea p* = 1 − 3*u*2*, entonces dp* = −6*udu, lo anterior implica* − 1 *dp* = *udu. En consecuencia*

6

ln *x* = − 1 ∫ *dp*

6

*p*

*o equivalentemente*

= − 1 ln |1 − 3*u*2| + ln *c,*

ln *x* + 1 ln |1 − 3*u*2| = *lnc*

6

6

ln *x*(1 3*u*2)1*/*6 = *lnc*

| − |

2 1*/*6

|

|*x*(1 − 3*u* )

6

2

= *c*

6

*A partir de la ecuaci´on anterior se obtiene*

|*x* (1 − 3*u* )| = *c*

|(1 − 3*u*2)| = *x*−6*c*6*,*

−3*u*2 = *x*−6*c*6 − 1 3*u*2 = −*x*−6*c*6 + 1

−

*u*2 =

*x*6*c*6 1

+

3 3

*y* 2 =

*x*

*x*6*c*6 1

+

−

3 3

*y*2 = *x*

2 −*x*6*c*6 1

3 3

+

2 −*x*6*c*6 1

*y*(*x*) = ±

*x*

+

3 3

*.*

#### Ecuaciones de la forma

##### dy

= *f* (*Ax* + *By* + *C*)

##### dx

*dy*

**Teorema 2.3.3.** *Una ecuaci´on diferencial de la forma*

*dx*

= *f* (*Ax* + *By* + *C*) *donde A, B y C son*

*constantes, se puede reducir a una ecuaci´on diferencial separable.*

*Demostraci´on.* En efecto, haciendo el cambio de variable *u* = *Ax* + *By* + *C* se obtiene

*du dy*

= *A* + *B ,*

*dx dx*

despejando

*dy* = 1 *du* − *A .*

*dx B dx*

Reemplazando la ecuaci´on diferencial

1 *du* − *A* = *f* (*u*)*,*

*B*

*dx*

luego

*du*

= *Bf* (*u*) + *A,*

*dx*

sea *g*(*u*) = *Bf* (*u*) + *A*, entonces

es una ecuaci´on diferencial separable.

*du*

= *g*(*u*)*,*

*dx*

**Ejemplo 2.3.3.** *Resolver la ecuaci´on*

*dy* = ( 2*x* + *y*)2 7*. dz*

— −

*En este caso u* = −2*x* + *y, en consecuencia*

*du dy*

*luego*

*dx* = −2 + *dx,*

*dy*

=

*dx*

*Reemplazando en la ecuaci´on diferencial inicial*

*du*

+ 2*.*

*dx*

*o equivalentemente*

*Integrando la ecuaci´on anterior se obtiene*

*du* + 2 = *u*2 7*, dx*

*du* = *u*2 9*. dx*

−

−

*du u*2 − 9

∫

= ∫ *dx*

1 ln *u* − 3 = *x* + *c*

6

*u* + 3

1 ln −2*x* + *y* − 3 = *x* + *c.*

6 −2*x* + *y* + 3

**Ejemplo 2.3.4.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*dy* = (2*x* + 3*y* + 1)2*dx.*

*Sea u* = 2*x* + 3*y* + 1*, entonces du* = 2 + 3 *dy . Despejando dy*

*se tiene*

*dx dx*

*dy*

*dx*

1 *du* 2

*Sustituyendo u y dy*

*dx*

*dx* = 3 *dx* − 3 *.*

*en la ecuaci´on diferencial dada se tiene*

1 *du* 2 2

*es decir,*

3 *dx* − 3 = (*u*) *,*

*du* = 3*u*2 + 2*, dx*

*que corresponde a una ecuaci´on diferencial en variables separables, de este modo*

*du*

3*u*2 + 2 = *dx,*

*integrando la ecuaci´on anterior se obtiene*

1 ∫ *du* = *x* + *c*; *c* ∈ R*.* (2.11)

3

*u*2 + 2*/*3

*Sea u* = √2*/*3 tan *t, entonces du* = √2*/*3 sec2 *t dt. Sustituyendo en la ecuaci´on (2.11) se obtiene*

3

3

2 *tan*2(*t*) + 2

= 2 ∗ 3

3

*dt* = *t.*

6

1 2 ∫ sec2(*t*)*dt* 3 1 2 ∫ 1

3

3

3 2

*x* + *c* = tan−1 3 *u,*

*pero u* = 2*x* + 3*y* + 1*. Finalmente la soluci´on general de la Ecuaci´on diferencial dada es;*

2

*Como u* = 2 tan(*t*)*, entonces t* = tan−1 3 *u* *, as´ı*

*x* + *c* = tan−1 √3 (2*x* + 3*x* + 1) *.*

2

**Ejemplo 2.3.5.** *Encontrar la soluci´on general de la siguiente ecuacio´n diferencial*

*dθ*

— *ϕµ* +

*d*Γ

= sin 3*πϕ θ* + √*π* Γ*,* (2.12)

*con ϕ y µ constantes. La ecuaci´on (2.12) se reescribe como*

5*i*

e

*dθ* = sin 3*πϕ θ* + √*π* Γ + *ϕµ.* (2.13)

*d*Γ

5

e

*Sea h* = sin 3*πϕ θ* + √*π* Γ + *ϕµ, derivando respecto a* Γ *se tiene*

5 e

*dh* = sen 3*πϕ dθ* + √*π.*

*d*Γ

5

*d*Γ

e

*Despejando*

*dθ*

*se obtiene*

*d*Γ

*dθ*

1 *dh*

1 √*π*

=

*d*Γ sen

*dθ*

5

5

3*πϕ dr* −

sen

3*πϕ* e *.*

*Remplazando h y*

*d*Γ

*en (2.13) se tiene;*

1 *dh* √*π*

5

sen

3*πϕ d*Γ −

*e* sen

3*πϕ* = *h,*

5

*que corresponde a una Ecuaci´on diferencial en variables separables*

*dh* = *sin* 3*πϕ h* + √*π.*

*d*Γ

5

*e*

*Separando variables se obtiene*

sen

*dh*

3*πϕ h* + √*π*

5

*e*

= *d*Γ*,*

*luego*

5

*e*

∫ *dh*

*donde c*1 ∈ R*. Sea*

sen

3*πϕ h* + √*π*

= Γ+ *c*1*,*

*v* = sen 3*πϕ h* + √*π,*

5 *e*

*entonces*

*dv*

5

*luego*

sen 3*π ϕ* = *dh,*

1 ∫ *dv*

5

*En consecuencia*

sen 3*π ϕ*

*v* = Γ+ *c*1*.*

ln *v* = Γ sen 3*πϕ* + *c ,*

5 2

*con c*2 = sen 3*πϕ c*1 *como*

5

*v* = sen 3*πϕ h* + √*π,*

5 *e*

*y*

*h* = sen 3*πϕ θ* + √*π* Γ+ *ϕµ,*

5 *e*

*luego*

*v* = sen2 3*πϕ θ* + sen 3*πϕ* + √*π* Γ*.*

5 5 *e*

*De este modo la soluci´on general es*

.

sen

3*πϕ*

5

Γ = ln .sen2

3*πϕ*

*θ* +

5

.

3*πϕ* 5

+ *ϕµ* sen

√sen *π*

*e*

3*πϕ* 5

. + *c.*

## Ecuacio´n diferencial exacta

Sea *z* = *f* (*x, y*) entonces el diferencial de *z* es

*dz* =

*∂f*

*dx* +

*∂x*

*∂f*

*dy.*

*∂y*

**Definici´on 2.4.1.** *Una expresi´on diferencial M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy es una diferencial exacta en una regi´on R del plano xy, si corresponde a la diferencial exacta de alguna funci´on f* (*x, y*)*.*

**Ejemplo 2.4.1.** *Sea* 3*x*2*y*2*dx* + 2*x*3*ydy, una expresi´on diferencial, verificar si es exacta. En este caso, si M* (*x, y*) = 3*x*2*y*2 *y N* (*x, y*) = 2*x*3*y, comparando al determinar la funci´on z tal que sus derivadas parciales corresponden a*

*∂f* = 3*x*2*y*2

*∂x*

*∂f* = 2*x*3*y,* (2.14)

*∂y*

*se tiene que, para la funci´on z* = *f* (*x, y*) = *x*3*y*2 *el diferencial est´a dado por dz* = 3*x*2*y*2*dx* + (2*x*)3*ydy. En consecuencia es una expresi´on diferencial exacta. Ahora bien, si esta expresi´on se iguala a cero entonces la ecuacio´n diferencial es una ecuaci´on diferencial exacta.*

A partir del c´alculo de varias variables se tiene que las derivadas cruzadas satisfacen

*∂*2*f*

=

*∂y∂x*

*∂*2*f*

*.*

*∂x∂y*

De otra parte, sea *z*(*t*) = *f* (*x, y*) = *c* soluci´on de la ecuaci´on diferencial, donde *x* = *x*(*t*) y *y* = *y*(*t*), funciones con par´ametro *t, f* (*x, y*) = *f* (*x*(*t*)*, y*(*t*)), por regla de la cadena

*dz ∂f dx*

= +

*dt ∂x dt*

*∂f dy*

*∂y dt*

*∂f*

= *dx* +

*∂x*

*∂f*

*dy.*

*∂y*

Comparando esta ecuaci´on con la ecuaci´on diferencial

*M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0*,*

*∂f*

se verifica que *M* (*x, y*) =

*∂x*

y *N* (*x, y*) = *∂f*

lo cual implica que:

*∂y*

*∂M* = *∂ ∂f* =

*∂*2*f*

*∂*2*f*

=

= *∂ ∂f* =

*∂ ∂N*

(*N* (*x, y*)) = *.*

*∂y ∂y ∂x*

*∂y∂x*

*∂x∂y*

*∂x ∂y ∂y ∂x*

**Propiedad 2.4.1** (Criterio para una ecuaci´on diferencial exacta)**.** *Sean M* (*x, y*) *y N* (*x, y*) *funciones en x y y con derivadas parciales continuas en una regi´on R rectangular definida por a < xb y c < y < d, entonces una condici´on necesaria y suficiente para que M* (*x, y*)*dx*+*N* (*x, y*)*dy sea una ecuaci´on diferencial exacta es*

*∂M ∂N*

= *.*

*∂y ∂x*

**Ejemplos 2.4.1.** *Ecuaciones diferenciales exactas*

* + 1. *Determinar si la siguiente ecuaci´on diferencial* 3*x*2*y*2*dx* + (2*x*)3 *y dy* = 0 *es exacta? Si, en efecto, sean M* (*x, y*) = 3*x*2*y*2 *y N* (*x, y*) = 2*x*3*y, entonces*

*∂M* = 6*x*2*y y ∂N* = 6*x*2*y,*

*∂y ∂x*

*lo cual implica que*

*∂M ∂N*

= *.*

*∂y ∂x*

*As´ı la ecuaci´on* 3*x*2*y*2*dx* + 2*x*3*ydy* = 0 *es una ecuaci´on diferencial exacta.*

* + 1. *Determinar si la siguiente ecuaci´on diferencial*

(*xy*2 − cos *x* sen *x*)*dx* − *y*(1 − *x*2)*dy* = 0*,*

*es exacta? Sean M* (*x, y*) = *xy*2 − cos *x* sen *x y N* (*x, y*) = −*y*(1 − *x*2)*, entonces ∂M*

*∂y*

= 2*xy y*

*∂N*

= 2*yx* = 2*xy por lo tanto la ecuaci´on diferencial es exacta.*

*∂x*

* + 1. *Determinar si la siguiente ecuaci´on diferencial*

*e*2*y* − *y* cos(*xy*) *dx* + 2*xe*2*y* − *x* cos(*xy*)+ 2*y dy* = 0*,*

*es exacta? En este caso M* (*x, y*) = *e*2*y* − *y* cos(*xy*) *y N* (*x, y*) = 2*xe*2*y* − *x* cos *xy* + 2*y, sus derivadas satisfacen*

*∂M* = 2*e*2*y* − cos(*xy*)+ *xy* sen(*xy*) = *∂N,*

*∂y ∂x*

*por tanto la ecuaci´on diferencial es exacta.*

### Solucio´n de una ecuaci´on diferencial exacta

Una vez determinada la exactitud de la ecuaci´on diferencial, dado que se tiene la derivada parcial de

*∂f*

la soluci´on *f* respecto a cada derivada, donde *M* (*x, y*) =

*∂x*

*∂f*

y *N* (*x, y*) =

*∂y*

. Se toma una de las dos

derivadas, en busca de la funci´on tal que al derivarla parcialmente se obtuvo la expresi´on *M* o *N* . Por

ejemplo, sea

*∂f*

= *M* (*x, y*)*.*

*∂x*

Integrando respecto a *x* se obtiene

*∂fdx* = *M* (*x, y*)*dx* + *K,*

∫ ∫

*∂x*

donde *K* es una funci´on respecto a la variable contraria a la cual se integra. Por el Teorema Fundamental del c´alculo

*f* (*x, y*) = ∫ *M* (*x, y*)*dx* + *g*(*y*)*.*

Por otro lado, al derivar parcialmente respecto a *y* se obtiene

*∂f* = *∂* ∫ *M* (*x, y*)*dx* + *g*(*y*) *.*

*∂y ∂y*

Es decir que

Despejando *g*j(*y*) se obtiene Por lo tanto

*N* (*x, y*) = *∂* ∫ *M* (*x, y*)*dx* + *g*j(*y*)*.*

*g*j(*y*) = *N* (*x, y*) − *∂* ∫ *M* (*x, y*)*dx . g*(*y*) = ∫ *N* (*x, y*) − *∂* ∫ *M* (*x, y*)*dx dy.*

*∂y*

*∂y*

*∂y*

Una vez encontrado *g*(*y*) se reemplaza en la expresi´on que define *f* , obteniendo la soluci´on o primer integral *f* (*x, y*) = *c*, donde *c* es una constante. La soluci´on o primera integral *f* (*x, y*) = *c* donde *c* es una constante.

#### Otra forma de resolver las ecuaciones diferenciales exactas

*∂f*

Al repetir el m´etodo de soluci´on anterior pero determinando *f* a trav´es de *N* (*x, y*) =

*∂y*

*∂f*

, se tiene

Integrando respecto a *y* se tiene

*N* (*x, y*) = *.*

*∂y*

luego

De otra parte,

*∂fdy* = *N* (*x, y*)*dy,*

*∂y*

∫ ∫

*f* (*x, y*) = ∫ *N* (*x, y*)*dy* + *h*(*x*)*.*

*∂f* = *∂* ∫ *N* (*x, y*)*dy* + *h*(*x*) *,*

*∂x ∂x*

lo cual implica que

*∂f* = *∂* ∫ *N* (*x, y*)*dy* + *h*j(*x*)*.*

Despejando *h*′ (*x*) se tiene

*∂x ∂x*

*h*(*x*) = *∂f* − *∂* ∫ *N* (*x, y*)*dy .*

*∂x ∂x*

Por lo tanto

*h*(*x*) = ∫ *∂f* − *∂* ∫ *N* (*x, y*)*dy dx.*

*∂x*

*∂x*

Finalmente reemplazando *h*(*x*) en *f* (*x, y*) = *N* (*x, y*)*dy* + *h*(*x*) y recordando que *f* (*x, y*) = *c* se tiene la siguiente soluci´on

∫

*f* (*x, y*) = ∫ *Ndy* + ∫ *∂f* − *∂* ∫ *N* (*x, y*)*dy dx*

*∂x ∂x*

**Ejemplos 2.4.2.** *Ecuaciones diferenciales exactas*

* + - 1. *Resolver la ecuaci´on diferencial*

(*xy*2 − cos *x* sen *x*)*dx* − *y*(1 − *x*2)*dy* = 0*,*

*al ser ecuaci´on diferencial exacta, entonces*

*∂f* = *M* (*x, y*) = *xy*2 cos *x* sen *x.*

−

*∂x*

*Siguiendo el m´etodo se obtiene*

*f* (*x, y*) = ∫ *M* (*x, y*)*dx*

= ∫ (*xy*2 − *cosx senx*)*dx* + *g*(*y*)

=

*Derivando con respecto a y, se obtiene*

*∂f*

*x*2*y*2

2 −

*x*2*y*2

*sen*2*x*

+ *g*(*y*)*.*

2

j

=

*∂y* 2

+ *g* (*y*) = *N* (*x, y*)*,*

*puesto que N* (*x, y*) = −*y*(1 − *x*2)*, en*∫*tonces x*2*y* + *g*j(*y*) = −*y* + *x*2*y. Por la propiedad conmutativa*

*g*j(*y*) = −*y lo cual implica g*(*y*) = −

*ydy* = *df racy*22*. En consecuencia*

*f* (*x, y*) =

*x*2*y*2

2 −

sen2 *x y*2

2 − 2 *.*

*Lo anterior implica que la familia de curvas soluci´on est´a dada por*

*y*2(*x*2 − 1) − *sen*2*x*

*f* (*x, y*) = = *c*

2

* + - 1. *Resolver el PVI*

*Observe que*

*e*2*y* − *y* cos(*xy*) *dx* + 2*xe*2*y* − *x* cos(*xy*)+ 2*y* = 0*, y*(0) = 2*.*

*∂f* = *e*2*y y* cos(*xy*)*.*

−

*∂x*

*Ahora, integrando tenemos*

*f* (*x, y*) = ∫ (*e*2*y* − *y* cos(*xy*)*dx* + *g*(*y*)

= ∫ *e*2*ydx* − ∫ *y* cos(*xy*)*dx* + *g*(*y*)

= ∫ *e*2*yx* − *y* sen(*xy*)+ *g*(*y*)

*y*

= *e*2*yx* − sen(*xy*)+ *g*(*y*)*.*

*Derivando f con respecto a y se obtiene*

*Despejando g*j *se obtiene*

= 2*xe*2*y x* cos(*xy*)+ *g*j(*y*)

*∂y*

*∂f*

−

= 2*xe*2*y* − *x* cos(*xy*)+ 2*y*

*g*j(*y*) = 2*y,*

*luego*

*g*(*y*) = ∫ 2*y dy* = *y*2*.*

*En consecuencia f* (*x, y*) = *e*2*yx* − sen(*xy*) + *y*2*, lo cual implica que la familia de curvas soluci´on est´a dada por*

*f* (*x, y*) = *e*2*yx* − sen(*xy*)+ *y*2 = *c.*

*Dado que y*(0) = 2*, entonces c* = 22 = 4*. Luego*

*f* (*x, y*) = *e*2*yx* − sen(*xy*)+ *y*2 = 4*,*

*es la soluci´on del PVI.*

#### Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas

En algunas ocasiones ciertas ecuaciones diferenciales se pueden reducir a ecuaciones diferenciales exactas (al multiplicar por un factor integrante). Por ejemplo, en la ecuaci´on diferencial

*xydx* + (2*x*2 + 3*y*2 − 20)*dy* = 0*.* (2.15)

En este caso *M* (*x, y*) = *xy* y *N* (*x, y*) = 2*x*2 +3*y*2 −20 luego *∂M* = *x* y *∂N* = 4*x*. Por lo tanto *∂M* / *∂N* .

=

*∂y ∂x ∂y ∂x*

Por lo tanto no es exacta, sin embargo, al multiplicar la ecuaci´on diferencial por *y*3 se obtiene

*y*3[*xydx* + (2*x*2 + 3*y*2 − 20)*dy*] = 0*,*

o equivalentemente

*xy*4*dx* + *y*3(2*x*2 + 3*y*2 − 20)*dy* = 0*.*

En consecuencia, para la nueva ecuaci´on diferencial se obtiene *M* (*x, y*) = *xy*4 y *N* (*x, y*) = *y*3(2*x*2 + 3*y*2 −

20), las cuales satisfacen

*∂M* = 4*xy*3 = *∂N ,*

*∂y ∂x*

que la trasnforma en una ecuaci´on diferencial exacta. Suponga que la ecuaci´on diferencial *M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0 no es exacta, como la ecuaci´on (2.15), algunas veces se idea un factor, *µ*(*x, y*), con el cual al multiplicar la ecuaci´on diferencial, esta se convierte en una ecuaci´on diferencial exacta. Observe el PVI

*dy* = *e*−*x ay, y*(0) = 2*, dx*

−

donde *a* es una constante. La ecuaci´on anterior se reescribe como

*dy* + *ay* = *e*−*x.* (2.16)

*dx*

Multiplicando (2.16) por la funci´on *µ*(*x*) se obtiene

*µ*(*x*) *dy* + *ay* = *µ*(*x*)*e*−*x.* (2.17)

*dx*

La pregunta es si existe un factor *µ*(*x*) tal que el lado izquierdo de la ecuaci´on (2.17) satisfaga

*µ*(*x*) *dy* + *ay* = *d*[*µ*(*x*)*y*(*x*)] *.*

*dx*

*dx*

Para este caso, por inspecci´on, se podr´ıa pensar en una funci´on exponencial *µ*(*x*) = *eax*, es decir

*eax dy* + *ayeax* = *e*−*xeax dx*

*d*(*eaxy*) *dx*

= *e*(*a*−1)*x.*

Integrando en ambos lados de la ecuaci´on con respecto a *x*, se obtiene

*eaxy* = ∫

(*e*(*a*−1)*x*

*dx* + *c* =

*e*(*a*−1)*x a* − 1

+ *c,*

donde *c* es una constante. Utilizando la condici´on inicial *y*(0) = 2 en la ecuaci´on anteror se obtiene

*ea*·0

*y*(0) =

*e*(*a*−1)·0

+ *c*

−

*a* 1

1

2 =

*a* − 1

+ *c.*

Despejando *c* a partir de la ecuaci´on anterior se obtiene *c* = 2*a* − 3 .

*a* − 1

**Nota 2.4.1.** *Un par de comentarios son pertinentes:*

*El factor µ puede depender tanto de x como de y; es decir, µ*(*x, y*)*.*

*Se llama al t´ermino µ*(*x, y*) *factor integrante de la ecuaci´on diferencial, el cual, est´a relacionado con propiedades de simetr´ıa de la ecuaci´on*

*La soluci´on general de esa ecuaci´on diferencial toma la forma de yg*(*x*) = *e*−*x* + *ce*−*ax donde el se- gundo de los t´erminos ygh*(*x*) = *ce*−*ax corresponde a la soluci´on general para la ecuacio´n homog´enea asociada a esa ecuaci´on diferencial dy/dx* + *ay* = 0*. El otro t´ermino ynoh*(*x*) = *e*−*x corresponde a la soluci´on particular de la no homog´enea dy/dx* + *ay* = *e*−*x. Esta ser´a una propiedad general para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden, donde se resuelve la ecuaci´on homog´enea y luego la soluci´on de la no homog´enea o particular, y la soluci´on general ser´a la suma de ambas soluciones.*

*Para ecuaciones homog´eneas con coeficiente constante se tienen soluciones de la forma y* = *cemx.*

Generalizando, entonces existe en algunos casos un factor integrante *u*(*x, y*) que convierte o transforma la ecuaci´on anterior en una ecuaci´on diferencial exacta

*u*[*M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy*] = 0

*uM* (*x, y*)*dx* + *uN* (*x, y*)*dy* = 0*.*

Dicha ecuaci´on diferencial es exacta si y s´olo s´ı

*∂*

(*uM* ) =

*∂y*

*∂u ∂M*

*∂*

(*uN* )

*∂x*

*∂u ∂N*

*M* + *u*

*∂y ∂y*

= *N* + *u .*

*∂x ∂x*

A partir de la anterior ecuaci´on se obtiene

*u ∂M* − *∂N* = *∂uN* − *∂uM.* (2.18)

*∂y*

*∂x*

*∂x*

*∂y*

La ecuaci´on (2.18) es una ecuaci´on diferencial parcial que no siempre tiene soluci´on anal´ıtica por tal raz´on nos conscentraremos en casos particulares.

*µ* **depende solo de** *x***:** En este caso *µ*(*x, y*) = *µ*(*x*) lo cual implica que *∂µ/∂y* = 0. Por lo tanto la ecuaci´on (2.18) se reduce a

*µ ∂M* − *∂N* = *∂µN,*

luego

*∂y*

*∂µ*

(*x*) =

*∂x*

*∂x*

*∂M*

*∂y* −

*N*

*∂x*

*∂N*

*∂x µ*(*x*)*,* (2.19)

Dado que *µ* depende unicamente de *x*, entonces su derivada tambi´en depende unicamente de *x*. Lo

anterior implica que *∂M/∂y* − *∂N/∂x* solo depende de *x*. Sea Φ(*x*) = *∂M/∂y* − *∂N/∂x* entonces

*N N*

la ecuaci´on (2.19) se reescribe como

*∂µ*

(*x*) = Φ(*x*)*µ*(*x*)*.* (2.20)

*∂x*

*Cap´ıtulo 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden* 55

*entonces*

*f* (*x, y*) = ∫ *xy*4*dx* + *g*(*y*) *x*2*y*4

= + *g*(*y*)*.* (2.24)

2

*Derivando f definido en (2.24) con respecto a y, se obtiene*

*∂f ∂ x*2*y*4

=

+ *g*(*y*)

= 2*x*2*y*3

+ *g*j(*y*)*.* (2.25)

*∂y ∂y* 2

*Dado que*

*∂f* = *N* (*x, y*) = 2*x*2*y*3 + 3*y*5 20*y*4*,* (2.26)

*∂y*

−

*entonces igualando (2.24) y (2.26) se obtiene*

2*x*2*y*3 + *g*j(*y*) = 2*x*2*y*3 + 3*y*5 − 20*y*4*.* (2.27)

*Despejando g*j(*x*) *de (2.27) se obtiene*

*g*j(*y*) = 3*y*5 − 20*y*4*.* (2.28)

*Integrando con respecto a y en ambos lados de (2.28) se obtiene*

*Reemplazando (2.29) en (2.24) se obtiene*

*y*2 5

*g*(*y*) = 2 − 4*y*

+ *c.* (2.29)

*f* (*x, y*) =

*x*2*y*4

+

2

*y*2 5

2 − 4*y*

+ *c.*

*Por lo tanto la familia mono param´etrica de soluciones est´a dada por*

*donde C* = −*c.*

*x*2*y*4

+

2

*y*6 5

2 − 4*y*

= *C,*

**Ejemplo 2.4.3** (Factor integrante de la forma *µ*(*x*))**.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

(*x*2 + *y*2 + *x*)*dx* + *xydy* = 0*.* (2.30)

*En este caso M* (*x, y*) = *x*2 + *y*2 + *x y N* (*x, y*) = *xy, por lo tanto*

*∂M*

Φ(*x*) = *∂y*

*∂N*

*∂x* = 2*y* − *y* = *y* = 1 *, y* /=*.* 0

−

*N*

*De esta forma el factor integrante ser´a*

*xy xy x*

*µ*(*y*) = *e*, 1 *dx* = *e*ln *x* = *e*ln *x* = *x,* (2.31)

*x*

*multiplicando el factor integrante µ*(*x*) *definido en (2.31) por la ecuaci´on diferencial (2.30) se obtiene*

*x*((*x*2 + *y*2 + *x*)*dx* + *xydy*) = 0

(*x*3 + *xy*2 + *x*2)*dx* + *x*2*ydy* = 0*,* (2.32)

*entonces*

*f* (*x, y*) = ∫ *xy*4*dx* + *g*(*y*) *x*2*y*4

= + *g*(*y*)*.* (2.24)

2

*Derivando f definido en (2.24) con respecto a y, se obtiene*

*∂f ∂ x*2*y*4

=

+ *g*(*y*)

= 2*x*2*y*3

+ *g*j(*y*)*.* (2.25)

*∂y ∂y* 2

*Dado que*

*∂f* = *N* (*x, y*) = 2*x*2*y*3 + 3*y*5 20*y*4*,* (2.26)

*∂y*

−

*entonces igualando (2.24) y (2.26) se obtiene*

2*x*2*y*3 + *g*j(*y*) = 2*x*2*y*3 + 3*y*5 − 20*y*4*.* (2.27)

*Despejando g*j(*x*) *de (2.27) se obtiene*

*g*j(*y*) = 3*y*5 − 20*y*4*.* (2.28)

*Integrando con respecto a y en ambos lados de (2.28) se obtiene*

*Reemplazando (2.29) en (2.24) se obtiene*

*y*2 5

*g*(*y*) = 2 − 4*y*

+ *c.* (2.29)

*f* (*x, y*) =

*x*2*y*4

+

2

*y*2 5

2 − 4*y*

+ *c.*

*Por lo tanto la familia mono param´etrica de soluciones est´a dada por*

*donde C* = −*c.*

*x*2*y*4

+

2

*y*6 5

2 − 4*y*

= *C,*

**Ejemplo 2.4.3** (Factor integrante de la forma *µ*(*x*))**.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

(*x*2 + *y*2 + *x*)*dx* + *xydy* = 0*.* (2.30)

*En este caso M* (*x, y*) = *x*2 + *y*2 + *x y N* (*x, y*) = *xy, por lo tanto*

*∂M*

Φ(*x*) = *∂y*

*∂N*

*∂x* = 2*y* − *y* = *y* = 1 *, y* /=*.* 0

−

*N*

*De esta forma el factor integrante ser´a*

*xy xy x*

*µ*(*y*) = *e*, 1 *dx* = *e*ln *x* = *e*ln *x* = *x,* (2.31)

*x*

*multiplicando el factor integrante µ*(*x*) *definido en (2.31) por la ecuaci´on diferencial (2.30) se obtiene*

*x*((*x*2 + *y*2 + *x*)*dx* + *xydy*) = 0

(*x*3 + *xy*2 + *x*2)*dx* + *x*2*ydy* = 0*,* (2.32)

*las funciones M y N para la ecuaci´on (2.32) esta´n dadas por*

*M* (*x, y*) = *x*3 + *xy*2 + *x*2 *y N* (*x, y*) = *x*2*y.*

*En consecuencia*

*∂M*

= 2*xy y*

*∂y*

*∂N*

= 2*xy.*

*∂x*

*Como ∂M* = *∂N*

*∂y ∂x*

*entonces (2.32) corresponde a una ecuaci´on diferencial exacta. Observe que*

*∂f* = *N* (*x, y*) = *x*2*y,*

*∂y*

*entonces*

*f* (*x, y*) = ∫ *x*2*ydy* + *g*(*x*)

*x*2*y*2

= + *g*(*x*)*.* (2.33)

2

*Derivando f definido en (2.33) con respecto a x, se obtiene*

*∂f ∂ x*2*y*2

=

+ *g*(*x*)

= *xy*2

+ *g*j(*x*)*.* (2.34)

*∂x ∂x* 2

*Dado que*

*∂f* = *M* (*x, y*) = *x*3 + *xy*2 + *x*2*,* (2.35)

*∂x*

*entonces igualando (2.33) y (2.35) se obtiene*

*xy*2 + *g*j(*x*) = *x*3 + *xy*2 + *x*2*.* (2.36)

*Despejando g*j(*x*) *de (2.36) se obtiene*

*g*j(*x*) = *x*3 + *x*2*.* (2.37)

*Integrando con respecto a x en ambos lados de (2.37) se obtiene*

*y*4

*g*(*x*) =

4

*x*3

+ + *c.* (2.38)

3

*Reemplazando (2.38) en (2.33) se obtiene*

*f* (*x, y*) =

*x*2*y*2 *x*4 *x*3

+ +

2 4 3

+ *c.*

*Por lo tanto la familia mono param´etrica de soluciones est´a dada por*

*donde C* = −*c.*

*x*2*y*2 *x*4 *x*3

+ +

2 4 3

= *C,*

* + 1. **Ecuaciones diferenciales de la forma** *yf* (*x, y*)*dx* + *xg*(*x, y*)*dy* =0

Si *M* (*x, y*)*dx* + *N* (*x, y*)*dy* = 0 se puede escribir en la forma

donde *f* (*x, y*) /=*g*(*x, y*)*,* entonces

*yf* (*x, y*)*dx* + *xg*(*x, y*)*dy* = 0*,* (2.39)

1

es un factor integrante.

*µ*(*x, y*) =

*xy*(*f* (*xy*) − *g*(*xy*))

*,* (2.40)

**Ejemplo 2.4.4.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*y*(*x*2*y*2 + 2)*dx* + *x*(2 − 2*x*2*y*2)*dy* = 0*.* (2.41)

*Observemos que la ecuaci´on (2.41) tiene la forma de la ecuaci´on diferencial (2.39) con f* (*x, y*) = (*xy*)2 +2

*y g*(*x, y*) = 2 − 2(*xy*)2*, lo anterior implica que*

1 1

*µ*(*x, y*) = *xy*((*xy*)2 + 2 − (2 − 2(*xy*)2)) = 3*x*3*y*3 *,* (2.42)

*es un factor integrante de la ecuacio´n diferencial (2.41). En este sentido, multiplicando µ*(*x, y*) *definido en (2.42) por la ecuaci´on diferencial definida en (2.41) se obtiene*

1 *y*(*x*2*y*2 + 2)*dx* + *x*(2 2*x*2*y*2)*dy* = 0 3*x*3*y*3

−

*y*(*x*2*y*2 + 2) 3*x*3*y*3 *dx* +

*x*2*y*2 + 2

*x*(2 2*x*2*y*2)

3*x*3*y*3 *dy* = 0

−

2 − 2*x*2*y*2

*En este caso M y N est´an dados por*

3*x*3*y*2 *dx* + 3*x*2*y*3 *dy* = 0*.* (2.43)

*x*2*y*2 + 2 2 − 2*x*2*y*2

*M* (*x, y*) =

*A partir de (2.44) se verifica que*

3*x*3*y*2 *y N* (*x, y*) =

3*x*2*y*3 *.* (2.44)

*∂M* 4 *∂N*

*∂y* = − 3*x*3*y*3 = *∂x .*

*Por lo tanto, la ecuaci´on diferencial (2.43) es exacta. En consecuencia*

∫ *x*2*y*2 + 2

*f* (*x, y*) =

3*x*3*y*2 *dx* + *g*(*y*)

= ∫ 1 *dx* + ∫ 2 *dx* + *g*(*y*)

3*x* 3*x*3*y*2

1 1

= 3 ln *x* − 3*x*2*y*2 + *g*(*y*)*..* (2.45)

*Derivando f definido en (2.45) con respecto a y se obtiene*

*∂f* 2

=

+ *g*j(*y*)*,*

*∂y* 3*x*2*y*3

*igualando la ecuaci´on anterior a N* (*x, y*)*, se obtiene*

2 j 2 − 2*x*2*y*2

3*x*2*y*3 + *g* (*y*) =

3*x*2*y*3 *,*

*luego*

*g*j(*y*) = 2 *,*

3*y*

−

*lo cual implica que g*(*y*) = −2*/*3 ln *y. En consecuencia la primitiva de la ecuaci´on diferencial (2.41) es*

1 1 2

3 ln *x* − 3*x*2*y*2 − 3 ln *y* = ln *c.*

#### Factor integrante por inspecci´on

Existen algunos casos donde despu´es de agruparse los t´erminos convenientemente en la ecuaci´on, se reconocen cierto grupo de t´erminos formando parte de una ecuaci´on diferencial que permite reconocer el factor integrante. En la Tabla 2.1 se presentan algunos casos.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Grupo de t´ermino | Factor integrante | Diferencial Exacta |
| *xdy* − *ydx* | 1  *x*2 | *xdy* − *yx* = *d y*  *x*2 *x* |
| *xdy* − *ydx* | 1  *y*2 | *xdy* − *yx* = *d y*  *y*2 *x* |
| *xdy* − *ydx* | 1  *xy* | − = *d* ln  *dy dx y*  *y x x* |
| *xdy* − *ydx* | 1  *x*2 + *y*2 | *xdy* − *yx* = *d* arctan *y*  *x*2 + *y*2 *x* |

Cuadro 2.1: Factores integrantes.

**Ejemplo 2.4.5.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*xdx* + *ydy* + 4*y*3(*x*2 + *y*2)*dy* = 0*.* (2.46)

1

*El u´ltimo t´ermino de la ecuaci´on sugiere que µ*(*x, y*) = *x*2 + *y*2 *es factor integrante. Multiplicando la*

*ecuaci´on (2.46) por µ*(*x, y*) *se tiene*

*A partir de (2.47) se verifica*

*xdx* + *ydy* + 4*y*3*dy* = 0*.* (2.47)

*x*2 + *y*2

*x M* (*x, y*) = *x*2 + *y*2

*y*

*y N* (*x, y*) = *x*2 + *y*2

+ 4*y*3*.* (2.48)

*Derivando M con respecto a y y N con respecto a x se obtiene*

*∂M* 2*xy ∂N*

*∂y* = −(*x*2 + *y*2)2 = *∂y .*

*Dado que la ecuaci´on diferencial (2.47) es exacta, entonces*

*f* (*x, y*) = ∫ *x dx* = 1 ln(*x*2 + *y*2) + *g*(*y*)*.* (2.49)

*x*2 + *y*2

2

*Derivando f definida en (2.49) con respecto a y y utilizando la igualdad ∂f/∂y* = *M se obtiene*

*∂f y y*

= + *g*j(*y*) =

+ 4*y*3*.* (2.50)

*∂y x*2 + *y*2 *x*2 + *y*2

*Despejando g*j(*y*) *de la ecuaci´on (2.50) se obtiene*

*g*j(*y*) = 4*y*3*.* (2.51)

*Integrando (2.52) con respecto a y, se obtiene*

*g*(*y*) = *y*4 + *c.* (2.52)

*Reemplazando (2.52) en (2.49) se obtiene*

1

*f* (*x, y*) =

2

ln *x*2

+ *y*2

+ *y*4

+ *c.*

*Por lo tanto la familia mono param´etrica de soluciones est´a dada por*

1 ln *x*2 + *y*2 + *y*4 = *C,*

2

*donde C* = −*c.*

## Ecuacio´n diferencial lineal

**Definici´on 2.5.1.** *Una ecuaci´on diferencial de la forma*

*dy*

*a*1(*x*) *dx* + *a*0(*x*)*y* = *g*(*x*)*,* (2.53)

*donde a*0(*x*)*, a*1(*x*) *y g*(*x*) *funciones que dependen de x y a*1(*x*) /=*,* 0*recibe el nombe de ecuacio´n diferencial lineal.*

**Nota 2.5.1.** *Cuando g*(*x*) = 0 *se dice que la ecuaci´on lineal es homog´enea. Si g*(*x*) /= *e*0*ntonces la ecuaci´on diferencial es no homog´enea.*

**Ejemplo 2.5.1.** *En la ecuaci´on diferencial lineal no homog´enea*

3*x*2 *dy* sen(*x*)*y* = *x*2 ln *x, dx*

−

*se verifica que a*1(*x*) = 3*x*2*, a*0(*x*) = − sen *x y g*(*x*) = *x*2 ln *x.*

**Definici´on 2.5.2.** *La forma est´andar de la ecuaci´on diferencial lineal es*

*dy*

+ *P* (*x*)*y* = *Q*(*x*)*.* (2.54)

*dx*

A partir de (2.53) se verifica que

*P* (*x*) = *a*0(*x*)

*a*1(*x*)

*g*(*x*)

*y P* (*x*) = *.*

*a*1(*x*)

#### M´etodo de variaci´on de par´ametros

Esta ecuaci´on tiene soluci´on por diferentes m´etodos, uno de ellos es el m´etodo de variaci´on de par´ame- tros. En este m´etodo la soluci´on general de la ecuaci´on lineal (2.54) est´a dada por

*y*(*x*) = *yh*(*x*) + *yp*(*x*)*,* (2.55)

donde *yh* es la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial lineal homog´enea asociada a (2.54); es decir, es la soluci´on de

*dy*

+ *P* (*x*)*y* = 0*,* (2.56)

*dx*

y *pp* es una soluci´on particular de (2.54). Observe que (2.56) es una ecuaci´on diferencial separable, en consecuencia

*dy*

= −*P* (*x*)*y.*

*dx*

A partir de la ecuaci´on anterior se obtiene

luego

Por lo tanto

*dy*

*y* = −*P* (*x*)*dx,*

∫ *dy* = − ∫ *P* (*x*)*dx.*

*y*

*yh*(*x*) = *e*− , *P* (*x*)*dx*+ln *c* = *ce*− , *P* (*x*)*dx.* (2.57)

Para encontrar una soluci´on particular *yp* que sea linealmente independiente de *yh*, es decir, *yp* no es mu´ltiplo de *yh*, entonces se busca

*yp*(*x*) = *u*(*x*)*yh*(*x*)*,* (2.58)

para lo cual se debe determinar *u*(*x*). Como *yP* es soluci´on entonces, *yp* satisface la ecuaci´on no homog´enea (2.54); es decir

*yP*j

+ *P* (*x*)*yp* = *Q*(*x*)*.*

A partir de (2.58) se verifica que la derivada de *yp* est´a dada por

*yp*j (*x*) = *u*j(*x*)*yhx* + *u*(*x*)*yh*j (*x*)*.* (2.59)

Reemplazando (2.59) en (2.54) se obtiene

*u*j(*x*)*yhx* + *u*(*x*)*yh*j (*x*) + *P* (*x*)*u*(*x*)*yh*(*x*) = *Q*(*x*)*.* (2.60)

Factorizando *u*(*x*) en (2.60) se obtiene

*u*′ (*x*)*yh*(*x*) + *u*(*x*)[*y*′ (*x*) + *P* (*x*)*yh*(*x*)] = *Q*(*x*)*.* (2.61)

*h*

Recuerde que *yh* es soluci´on de la ecuaci´on diferencial homog´enea (2.56) lo cual implica que

*yh*j (*x*) + *P* (*x*)*yh*(*x*) = 0*,* reemplazando la ecuaci´on anterior en (2.61) se tiene

*u*j(*x*)*yh*(*x*) = *Q*(*x*)*,* (2.62)

a partir de (2.62) se obtiene

*u*j(*x*) = *Q*(*x*) *.*

*yh*(*x*)

A partir del Teorema Fundamental del c´alculo se concluye

∫

*u*(*x*) = *Q*(*x*) *dx.*

*yh*(*x*)

Por lo tanto

*yp*(*x*) = *u*(*x*)*yh*(*x*)

= *ce*− , *P* (*x*)*dx* ∫ *Q*(*x*) *dx*

∫ *ce*− , *P* (*x*)*dx*

= *e*− , *P* (*x*)*dx*

Reemplazando (2.57) y (2.63) en (2.55) se obtiene

*Q*(*x*)

*e*− , *P* (*x*)*dx*

*dx.* (2.63)

*y*(*x*) = *yh*(*x*) + *yp*(*x*)

= *ce*− , *p*(*x*)*dx* + *e*− , *p*(*x*)*dx* ∫ *Q*(*x*)*e*, *P* (*x*)*dxdx*

= *e*− , *p*(*x*)*dx c* + ∫ *Q*(*x*)*e*, *P* (*x*)*dxdx .* (2.64)

**Ejemplo 2.5.2.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

3*x*2 *dy* − *x*3(sen *x*)*y* = *x*2 ln |*x*|*.* (2.65)

*dx*

*La forma est´andar de la ecuaci´on diferencial (2.65) es*

*dy* − 1 *x* sen *x y* = 1 ln |*x*|*.* (2.66)

*dx*

3

3

*Se inicia resolviendo la ecuacio´n lineal homog´enea asociada a (2.66)*

*dy* 1

*dx* − ( 3 *x* sen *x*)*y* = 0*.* (2.67)

*Dado que la ecuaci´on diferencial (2.67) es separable, entonces siguiendo el procedimiento se obtiene*

1 *dy* = 1 *x* sen *x dx,*

*y*

3

*luego*

∫ 1 *dy* = 1 ∫ (*x* sen *x*) *dx*

*Por lo tanto*

*y*

ln |*y*| =

3

1

3 (−*x* cos *x* + sen *x*) + ln |*c*|*.*

*yh*(*x*) = *ce*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3*.* (2.68)

*Ahora se determinar´a una soluci´on particular de la forma*

*yp*(*x*) = *u*(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3*.* (2.69)

*Sustituyendo yp*(*x*) *definido en (2.69) en la ecuaci´on diferencial (2.66) se obtiene*

*d u*(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3 − 1 *x* sen *x u*(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3 = 1 ln |*x*|*.* (2.70)

*dx*

3

3

*A partir de la ecuaci´on (2.70) se obtiene*

*u*j(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3 + *u*(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3(− cos *x* + *x* sen *x* + cos *x*)

— 1 *x* sen *x u*(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3 = 1 ln |*x*|*.* (2.71)

3

3

*Simplificando la ecuaci´on (2.71) se obtiene*

*u*j(*x*)*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3 = 1 ln |*x*|*.* (2.72)

3

*Separando variables e integrando en (2.72) se obtiene*

*u*(*x*) = ∫ *du* = 1 ∫ ln |*x*| *dx.* (2.73)

*Por lo tanto*

3 *e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3

*y*(*x*) = *yh*(*x*) + *yp*(*x*)

∫

= *e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3 *c* + ln |*x*| *dx .*

*e*(−*x* cos *x*+sen *x*)*/*3

**Nota 2.5.2.** *Cabe resaltar que la integral que aparece en (2.73) no tiene soluci´on expl´ıcita.*

**Ejemplo 2.5.3.** *Resolver la ecuaci´on*

*x*2*y*j + 6*xy* + 4*x*2 = −4*xy* + *x*7*.* (2.74)

*Para x* /=*,* 0*la forma est´andar de la ecuaci´on diferencial (2.74) est´a dada por*

*y*j + 10 *y* = *x*5 4*.* (2.75)

−

*x*

*Se inicia resolviendo la ecuacio´n lineal homog´enea asociada a (2.75)*

*y*j + 10 *y* = 0*.* (2.76)

*x*

*Dado que la ecuaci´on diferencial (2.76) es separable, entonces siguiendo el procedimiento se obtiene*

1 10

*Por lo tanto la soluci´on de (2.77) es*

*ydy* = − *x dx.* (2.77)

*yh*(*x*) = *cx*−10*.* (2.78)

*Ahora se detrminar´a una soluci´on particular de la forma*

*yp*(*x*) = *u*(*x*)*x*−10*.* (2.79)

*Sustituyendo yp*(*x*) *definido en (2.79) en la ecuaci´on diferencial (2.75) se obtiene*

*dx x*

*d u*(*x*)*x*−10 + 10 *u*(*x*)*x*−10 = *x*5 − 4*.* (2.80)

*A partir de la ecuaci´on (2.80) se obtiene*

*u*j(*x*)*x*−10 − 10*u*(*x*)*x*−11 + 10 *u*(*x*)*x*−10 = *x*5 − 4*.* (2.81)

*x*

*Simplificando la ecuaci´on (2.81) se obtiene*

*u*j(*x*)*x*−10 = *x*5 − 4*.* (2.82)

*La solucio´n de (2.82) es*

*x*16

4 11

*Reemplazando (2.82) en (2.79) se obtiene*

*u*(*x*) = 16 − 11 *x*

*.* (2.83)

*x*16

*yp*(*x*) =

16 − 11 *x*

4 11

−10

*x*

*x*6 4*x*

*Finalmente la soluci´on general de (2.74) es*

= 16 − 11 *.* (2.84)

−10 *x* 4*x*

6

*y*(*x*) = *yh*(*x*) + *yp*(*x*) = *cx*

**Ejemplo 2.5.4.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

+ 16 − 11 *.*

*y*j + (tan *x*)*y* = 2*x* cos *x* + sec *x,* (2.85)

*donde* 0 *< x < π/*2*. Se inicia resolviendo la ecuaci´on lineal homog´enea asociada a (2.85)*

*y*j + (tan *x*)*y* = 0*,* (2.86)

*Dado que la ecuaci´on diferencial (2.86) es separable, entonces siguiendo el procedimiento se obtiene*

1

−

*dy* = (tan *x*)*dx,* (2.87)

*y*

*luego*

*Por lo tanto*

∫ 1 *dy* = − ∫ (tan *x*)*dx.*

*yh*(*x*) = *e*ln | cos *x*| = | cos *x*| = cos *x,* 0 *< x < π/*2*.* (2.88)

*y*

*Considere una soluci´on particular de la forma yp*(*x*) = *u*(*x*) cos *x, entonces*

*yp*j (*x*) = *u*j(*x*) cos *x* − *u*(*x*) sen *x.* (2.89)

*Sustituyendo yp*j (*x*) *definido en (2.89) en la ecuaci´on diferencial (2.85) se obtiene*

*u*j(*x*) cos *x* − *u*(*x*) sen *x* + (tan *x*)*u*(*x*) cos *x* = 2*x* cos *x* + sec *x,* (2.90)

*Simplificando la ecuaci´on (2.90) se obtiene*

*u*j(*x*) cos *x* = 2*x* cos *x* + sec *x.* (2.91)

*La ecuaci´on (2.91) es equivalente a La solucio´n de (2.92) es*

*luego*

*u*j(*x*) = 2*x* + sec2 *x.* (2.92)

*u*(*x*) = *x*2 + tan *x,*

*yp*(*x*) = (*x*2 + tan *x*) cos *x* = *x*2 cos *x* + sen *x.*

*Finalmente la soluci´on general de (2.85) es*

*y*(*x*) = *yh*(*x*) + *yp*(*x*) = *c* cos *x* + *x*2 cos *x* + sen *x.*

#### M´etodo de factor integrante para resolver ecuaciones diferenciales lineales

Sea la ecuaci´on diferencial lineal

*y*j(*x*) + *P* (*x*)*y* = *Q*(*x*)*.*

Como se vio en el m´etodo de factor integrante, las ecuaciones lineales tienen soluciones de la forma *y* = *ceax*, luego se puede considerar por factor integrante a *u*(*x*) = *e P* (*x*)*dx*, multiplicando entonces la ecuaci´on diferencial por este factor, se tiene

,

*e*, *P* (*x*)*dxy*j(*x*) + *e*, *P* (*x*)*dxP* (*x*)*y* = *e*, *P* (*x*)*dxQ*(*x*)

*dy e*, *P* (*x*)*dx* + *P* (*x*) *e*, *P* (*x*)*dx y* = *e*, *P* (*x*)*dxQ*(*x*)

*dx*

*e*, *P* (*x*)*dx dy* + *P* (*x*) *e*, *P* (*x*)*dx ydx* = *e*, *P* (*x*)*dxQ*(*x*)*dx*

*d e*, *P* (*x*)*dxy* = *e*, *P* (*x*)*dxQ*(*x*)*dx.* (2.93)

*dx*

Integrando la ecuaci´on (2.93) con respecto a *x* se obtiene.

*e*, *P* (*x*)*dxy* = ∫ *e*, *P* (*x*)*dxQ*(*x*)*dx* + *K.*

Por lo tanto

*y*(*x*) =

*e*, *P* (*x*)*dxQ*(*x*)*dx* + *K*

*e*, *P* (*x*)*dx .*

∫

**Nota 2.5.3.** *e*, *P* (*x*)*dx es factor integrante para las ecuaciones lineales de primer orden.*

**Ejemplo 2.5.5.** *Resolver por medio del m´etodo del factor integrante la ecuaci´on del siguiente PVI*

*dy*

+ *y* = *x, y*(0) = 4*.* (2.94)

*dx*

*Como la ecuaci´on (2.94) est´a en su forma est´andar con P* (*x*) = 1*, entonces el factor integrante es*

*e*, *dx* = *ex.*

*Ahora multiplicamos la ecuaci´on diferencial por ex se obtiene*

*ex dy* + *exy* = *xex, dx*

*o equivalentemente*

*d* (*exy*) = *xex.* (2.95)

*dx*

*Integrando (2.95) con respecto a x se obtiene*

*exy* = *xex* − *ex* + *C.* (2.96)

*Depejando y en la ecuaci´on (2.96) se obtiene*

*xex* − *ex C*

*y*(*x*) =

*ex* + *ex*

= *x* − 1 + *Ce*−*x.* (2.97)

*Reemplazando la condicion inicial y*(0) = 4 *en la ecuaci´on (2.97) se obtiene y*(0) = 0 − 1 + *Ce*−0 = 4 *lo cual implica que C* = 5*. Por lo tanto la soluci´on de PVI (2.94) es*

*y*(*x*) = *x* − 1 + 5*e*−*x.*

**Nota 2.5.4.** *En general, el factor integrante para la ecuacio´n diferencial*

*y*j + *ay* = *g*(*x*)*,*

*es µ*(*x*) = *eax, y la soluci´on general est´a dada por*

∫

*yg*(*x*) = *Ce*−*ax*

+ *e*

−*ax x x*0

*g*(*t*)*eat*

*dt,* (2.98)

*donde el primer t´ermino de (2.98) corresponde a la solucio´n general de la ecuacio´n homog´enea y el segundo t´ermino corresponde a la soluci´on particular de la ecuaci´on no homog´enea.*

Para finalizar, el siguiente esquema muestra el mapa de ruta para la resoluci´on de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

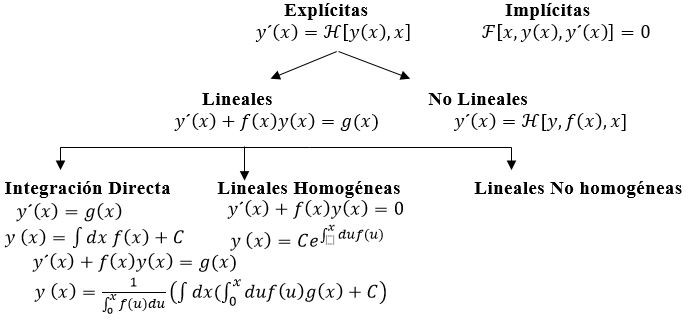


Figura 2.6: Mapa de ecuaciones diferenciales de primer orden.

## Ecuacio´n diferencial de Bernoulli

**Definici´on 2.6.1.** *La ecuacio´n de la forma*

*dy* + *P* (*x*)*y* = *Q*(*x*)*yn,* (2.99)

*dx*

*donde n es una constante, con n* /= *o*0 *n* /=*,* 1*se denomina ecuaci´on diferencial de Bernoulli de orden n.*

Para resolver la ecuaci´on diferencial de Bernoulli se busca un operador que la reduzca a una ecuacio´n diferencial lineal, es decir, inicialmente se busca eliminar el t´ermino *yn*. Esto podr´ıa lograrse multiplicando la ecuaci´on por *y*−*n*, para ello, se busca una funci´on tal que su integral sea *y*−*n*. La funci´on que cumple esta condici´on es *y*1−*n*. De esta manera, se realiza el cambio de variable *z* = *y*1−*n*, en efecto. Dividiendo entre *yn* la ecuaci´on de Bernoulli se obtiene

*y*−*n dy* + *P* (*x*)*y*1−*n* = *Q*(*x*)*.* (2.100)

*dx*

Sea *z* = *y*1−*n*, derivando *z* respecto a *x* se obtiene

o equivalentemente

−

*dz* = (1 *n*)*y*−*n dy , dx dx*

1 *dz dy*

= *y*−*n .* (2.101)

1 − *n dx dx*

Reemplazando (2.101) en la ecuaci´on diferencial (2.100), se tiene

1 *dz*

+ *P* (*x*)*z* = *Q*(*x*)*,*

o de manera equivalente

1 − *n dx*

*dz*

*dx* + (1 − *n*)*P* (*x*)*z* = (1 − *n*)*Q*(*x*)*,*

la cual es una ecuaci´on diferencial lineal.

**Ejemplo 2.6.1.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*xdy* + *y* = *x*2*y*2*.* (2.102)

*dx*

*Dividiendo la ecuaci´on entre x se obtiene la ecuaci´on de Bernoulli de segundo orden*

*dy* + 1 *y* = *xy*2*.* (2.103)

*dx x*

*En este caso n* = 2*, por lo tanto z* = *y*1−2 = *y*−1*, luego*

*dz* = *y*−2 *dy . dx dx*

−

*Ahora multiplicando la ecuaci´on diferencial (2.103) por* −*y*−2 *se obtiene*

— *y*−2 *dy* − 1 *y*−1 = −*x.* (2.104)

*dx x*

*Reemplazando z y dz/dx en (2.104) se tiene*

*dz* 1

*El factor integrante de (2.105) es*

*dx* − *xz* = −*x* (2.105)

*e*− , 1 *dx* = *e*− ln |*x*| = *x*−1*.* (2.106)

*x*

*Multiplicando (2.106) por (2.105) se obtiene*

*x*−1 *dz* − 1 *z* = −1

*dx*

*x*2

*Integrando (2.107) se obtiene luego*

*Dado que z* = *y*−1*, entonces*

*d x*−1*z* = −1*.* (2.107)

*x*−1*z* = −*x* + *c, z*(*x*) = (−*x* + *c*)*x.*

*dx*

*y*(*x*) = [*z*(*x*)]−1 = 1 *.*

*x*(−*x* + *c*)

**Ejemplo 2.6.2.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*xdy* + *y* = *y*2 ln *x.* (2.108)

*dx*

*Dividiendo la ecuaci´on entre x se obtiene la ecuaci´on de Bernoulli de segundo orden*

*dy* + 1 *y* = ln *xy*2*.* (2.109)

*dx x x*

*En este caso n* = 2*, por lo tanto z* = *y*1−2 = *y*−1*, luego*

*dz* = *y*−2 *dy . dx dx*

−

*Ahora multiplicando la ecuaci´on diferencial (2.109) por* −*y*−2 *se obtiene*

— *y*−2 *dy* − 1 *y*−1 = −ln *x.* (2.110)

*dx x x*

*Reemplazando z y dz/dx en (2.110) se tiene*

*dz* 1 ln *x*

*dx* − *xz* = −

*.* (2.111)

*x*

*La ecuaci´on (2.111) es lineal con P* (*x*) = −1*/x y Q*(*x*) = − ln *x/x, en consecuencia su soluci´on est´a dada por*

*z*(*x*) =

*K* + ∫ *Q*(*x*)*e*, *P* (*x*)*dxdx*

*K* + ∫ −ln *x* 1 *dx*

, *P* (*x*)*dxe*

= *x x*

1

*x*

*Dado que z* = *y*−1*, entonces*

= *x K* − ∫ ln *xdx*

= *x K* + ln *x* + 1 *.*

*x*

*x*2

*y*(*x*) = [*z*(*x*)]−1 =

*x K* +

1

ln *x* + 1 *.*

*x*

**Ejemplo 2.6.3.** *Determinar la soluci´on general de la siguiente ecuaci´on diferencial*

1 *dx*

*Multiplicando (2.112) por x*−1 *se obtiene*

*x dy*

+ 1 = *x* sen *y.* (2.112)

*Sea t* = *x*−1*, entonces dt* = −*x*−2 *dx*

*dy dy*

*x*−2 *dx* + *x*−1 = sen *y.* (2.113)

*dy*

*o equivalentemente*

*x*−2 *dx* = − *dt .* (2.114)

*dy*

*dy*

*Reemplazando (2.114) en (2.113) se obtiene*

*dt*

*La solucio´n de (2.115) es*

*Dado que t* = *x*−1*, entonces*

— *dy* + *t* = sen *y.* (2.115)

*t*(*y*) = *ey K* − ∫ *e*−*y* sen *y*

= *ey K* + *e*−*y*(cos *y* + sen *y*)

= *Key* + cos *y* + sen *y.*

*x*(*y*) = [*t*(*y*)]−1 = 1 *.*

*Key* + cos *y* + sen *y*

## Ecuacio´n de Ricatti

**Definici´on 2.7.1.** *Una ecuaci´on de la forma*

*dy* = *P* (*x*) + *Q*(*x*)*y* + *R*(*x*)*y*2*,* (2.116)

*dx*

*se llama ecuaci´on de Ricatti.*

El siguiente teorema establece el m´etodo de soluci´on para la ecuaci´on de Ricatti.

**Teorema 2.7.1.** *Si y*1 *es una solucio´n particular de la ecuaci´on de Ricatti (2.116), entonces y* = *y*1 + *u*

*es una familia de soluciones de (2.116), en donde u es la soluci´on de la ecuaci´on asociada*

*du* 2

*dx* − [*Q*(*x*) + 2*R*(*x*)*y*1]*u* = *R*(*x*)*u .* (2.117)

*Demostraci´on.* Sea *y* = *y*1 +*u* es la soluci´on general de la ecuaci´on de Ricatti (2.116), entonces *y*j = *y*1j +*u*j tambi´en satisface (2.116). Reemplazando *y* y *y*j en (2.116) se obtiene

*y*1j + *u*j = *P* (*x*) + *Q*(*x*)(*y*1 + *u*) + *R*(*x*)(*y*1 + *u*)2

= *P* (*x*) + *Q*(*x*)(*y*1 + *u*) + *R*(*x*)(*y*2 + 2*y*1*u* + *u*2)

1

= *P* (*x*) + *Q*(*x*)(*y*1 + *u*) + *R*(*x*)*y*2 + 2*R*(*x*)*y*1*u* + *R*(*x*)*u*2

1

= *y*1j + *Q*(*x*)*u* + 2*R*(*x*)*y*1*u* + *R*(*x*)*u*2*.* (2.118)

Simplificando (2.118) se obtiene la ecuaci´on de Bernoulli de orden 2 (2.117). Por medio del cambio de variable *Z* = *u*−1 la ecuaci´on (2.117) se reduce a la ecuaci´on lineal

*dz*

*dx* + [*Q*(*x*) + 2*R*(*x*)*y*1]*z* = −*R*(*x*)*.* (2.119)

Una vez obtenida la soluci´on de (2.119) entonces *u* = *z*−1 y por lo tanto la soluci´on de la ecuaci´on de Ricatti ser´a *y* = *y*1 + *w*.

**Ejemplo 2.7.1.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*dy* = *e*2*x* + (1 + 2*ex*)*y* + *y*2*,* (2.120)

*dx*

*si y*1(*x*) = *e*−*x es una soluci´on particular de (2.120).*

*En este caso*

*P* (*x*) = *e*2*x, Q*(*x*) = 1 + 2*ex*) *y R*(*x*) = 1*.* (2.121)

*Sustituyendo (2.121) en la ecuaci´on (2.119) se obtiene*

*dz* + (1 + 2*ex* + 2( *ex*)(1))*z* = 1

— −

*dx*

*La solucio´n de (2.122) es Dado que u* = *z*−1*, entonces*

*Por lo tanto la soluci´on de (2.120) es*

*dz*

*dx* + *z* = −1*.* (2.122)

*z*(*x*) = −1 + *ce*−*x.* (2.123)

1

*u*(*x*) = *ce*−*x* − 1 *.*

*y*(*x*) = *y* (*x*) + *u*(*x*) = −*ex* + 1 *.*

1

## M´etodo de las Isoclinas

*ce*−*x* − 1

Una funci´on *y* = *f* (*x*) es diferenciable en un punto *x*0, si localmente se puede aproximar por una recta tangente *L*(*x*) en *x*0, y las soluciones a las ecuaciones diferenciales son diferenciables. La Figura 2.7 muestra las l´ıneas tangentes en cada punto de la funci´on *f* (*x*) = sen 0*,*2*x*2 .

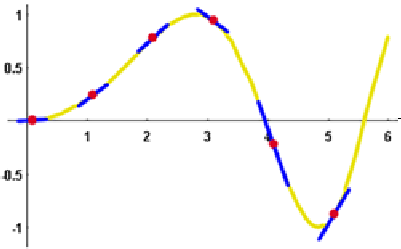


Figura 2.7: L´ıneas tangentes en puntos de la funci´on.

Este m´etodo se basa en la idea de campo y curvas integrales que se estudia en campos vectoriales. La idea es bien simple, los campos de vectores (tambi´en llamados los campos de direcci´on) son una herramienta para obtener gr´aficamente las soluciones a una ecuaci´on diferencial de primer orden. En general una ecuaci´on diferencial de primer orden (expl´ıcita respecto a la derivada) se podr´a representar como *y*j = *f* (*x, y*). Ahora bien, el lado derecho de esa igualdad representa una funci´on de dos variables, la cual tendr´a un valor en cada punto (*x, y*). Ese valor (por la igualdad que representa la ecuaci´on diferencial) ser´a el valor de la derivada en ese punto y el valor de la derivada en un punto, no es otra cosa que la pendiente de la recta tangente a ese punto. Con eso, al construir una gr´afica se recuerdan las curvas integrales de los campos vectoriales y se reconstruyen las curvas soluci´on a partir de sus tangentes.

**Ejemplo 2.8.1.** *Considere la ecuaci´on diferencial*

*y*j = −2*xy.* (2.124)

*Se determina la pendiente, y*j(*x*)*, de las soluciones y*(*x*) *de (2.124). Una vez se conozcan los valores para*

*x y y, por ejemplo, si x* = 1 *y y* = −1*, la pendiente de la soluci´on y que pasa a trav´es del punto* (1*,* −1) *es*

−2(1)(−1) = 2*. Lo cual se representa gr´aficamente, insertando un segmento de l´ınea en el punto* (1*,* −1)

*de pendiente* 2*.*

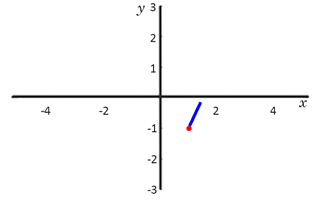


Figura 2.8: Segmento de l´ınea en el punto (1*,* −1) de pendiente 2.

*As´ı, la soluci´on de la ecuaci´on diferencial con la condici´on inicial y*(1) = −1 *se asimila a este segmento de l´ınea mientras se est´a cerca de x* = 1*. Por supuesto, hacer esto en apenas un punto no da suficiente informaci´on sobre las soluciones. No obstante, al realizar este procedimiento simult´aneamente en muchos puntos en el plano, se obtienen trazos de l´ıneas tangentes a las soluciones de la ecuaci´on diferencial conectando los puntos, en la Figura 2.9 se muestra una idea cercana a la soluci´on de la ecuaci´on diferencial y*j = −2*xy. La Figura 2.10 contiene cuatro ejemplos de estas construcciones. Espec´ıficamente, muestra*

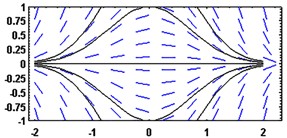
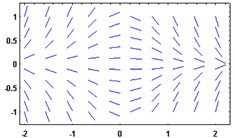
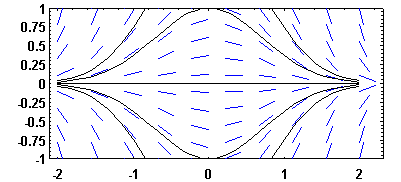
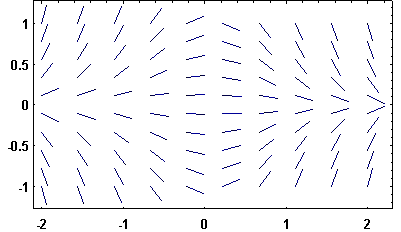


Figura 2.9: Campos de vectores tangentes a la soluci´on de *y*j = −2*xy*.

*las isoclinas de las siguientes ecuaciones diferenciales*

1. *dy* = *e*−*x* − *y .*

*dx* 3

*dy y*

*2.* = *.*

*dx x*

*dy x*

*3. dx* = − *y .*

*dy*

*4.* = 1+ *xy.*

*dx*

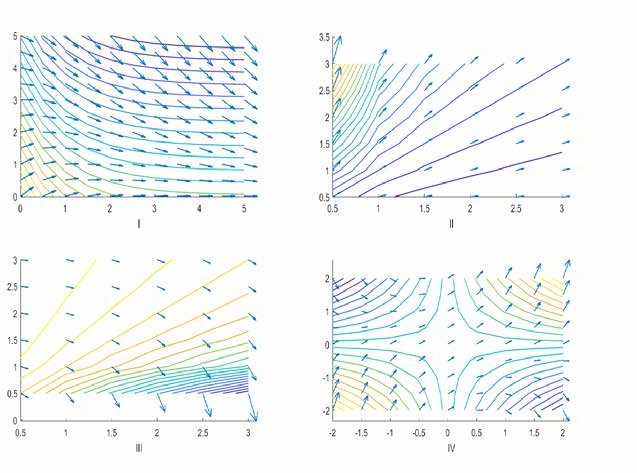


Figura 2.10: Isoclinas para cuatro ecuaciones diferenciales.

*La Figura 2.10 muestra la representaci´on gr´afica para las tangentes de las ecuaciones diferenciales definidas anteriormente. Es importante sen˜alar que este m´etodo permite obtener las posibles soluciones de una ecuaci´on diferencial no importa lo complicada que sea. En la regi´on I se muestran las gr´aficas de las soluciones particulares para diferentes condiciones iniciales de la ecuaci´on dy* = *e*−*x* − *y . La regi´on II*

*dx*

3

*corresponde a las tangentes generadas a partir de la ecuaci´on dy* = *y . N´otese que son curvas integrales*

*dx*

*x*

*radiales, para el punto x* = 0 *no est´a definida la curva integral. La regi´on III representa las tangentes de la ecuaci´on dy* = − *x. La regi´on IV contiene las tangentes a la ecuaci´on dy* = 1+ *xy en ella se han indicado*

*dx*

*y*

*dx*

*las curvas integrales para las soluciones particulares correspondientes a diferentes condiciones iniciales.*

### Puntos ordinarios y singulares

Un punto ordinario de orden *n*, es un punto *x*0 en el cual la funci´on y sus n-derivadas est´an definidas, esto es *y*(*x*0)*, y*j(*x*0)*, y*jj(*x*0)*,. .., y*(*n*)(*x*0) est´an definidas. En contraste a un punto ordinario llamaremos punto extraordinario o singular a un punto *xs* tal que la funci´on o alguna de sus derivadas no se encuentran definidas en ´este.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, los puntos ordinarios y singulares tienen que ver con la funci´on y su primera derivada. N´otese que en las regiones I y IV de la Figura 2.10, todos los puntos son ordinarios de orden infinito. En la regi´on II la funci´on no est´a definida para *xs* = 0 con lo cual es un punto singular, y en la regi´on III, la funci´on est´a definida para *xs* = 0 pero no as´ı su derivada por lo cual es un punto singular.

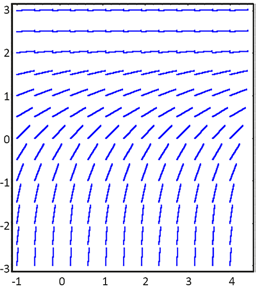
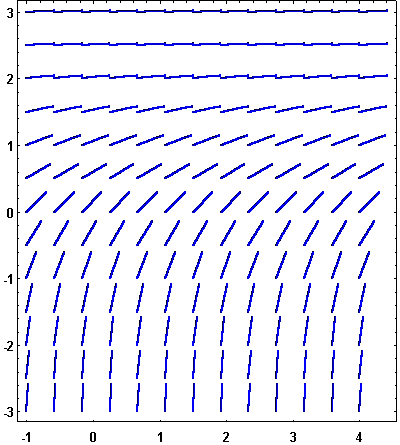


Figura 2.11: Isoclinas soluci´on *y*j(*x*) = *e*−*y*.

### Ecuacio´n diferencial Auto´noma

**Definici´on 2.8.1.** *La ecuacio´n diferencial*

*dy*

= *f* (*y*)*,* (2.125)

*dx*

*se llama aut´onoma porque la funci´on f no depende de la variable independiente x.*

Considere la ecuaci´on diferencial *y*j(*x*) = *e*−*y*, el lado derecho de la ecuaci´on diferencial depende sola- mente de la variable dependiente *y*, no de la variable independiente *x*, es decir, es una ecuaci´on aut´onoma. Las ecuaciones diferenciales aut´onomas son siempre separables y sus campos son horizontalmente inva- riantes, es decir, a lo largo de una l´ınea horizontal la pendiente no var´ıa (ver Figura 2.11). El hecho de que la ecuaci´on aut´onoma (2.125) sea de variables separables implica que existe una u´nica soluci´on de la ecuaci´on que satisface *y*(*x*0) = *y*0 si *f* (*y*0) /= 0. As´ı mismo, s*y*i(*x*) es la soluci´on tal que en *x*0 toma el valor *y*0, entonces *y*(*x* + *X*) es la soluci´on que en *x*1 toma el valor *y*0, donde *X* = *x*0 − *x*1. Gr´aficamente esto significa que una soluci´on se obtiene corriendo la otra *X* unidades hacia la izquierda.

**Definici´on 2.8.2.** *Una soluci´on constante y*(*x*) = *y*0 *de y*j = *f* (*y*) *se llama punto de equilibrio o soluci´on estacionaria de la ecuacion diferencial.*

**Nota 2.8.1.** *Observe que si y*0 *es un punto de equilibrio, entonces f* (*y*0) = 0*.*

En este caso, la soluci´on que en algu´n instante *x* toma el valor de *y*0, ser´a necesariamente constante igual a *y*0. Si se tiene un modelo poblacional, el hecho de que *y*0 sea punto de equilibrio significa que, si la poblaci´on inicial es *y*0, entonces se mantendr´a este valor en el futuro.

La Figura 2.11 muestra las isoclinas de la ecuaci´on diferencial *y*j(*x*) = 0*,*3(1 − *y/*15), mientras que la Figura 2.12 muestra simult´aneamente tanto las isoclinas como las curvas soluci´on de la anterior ecuaci´on

diferencial. Como se puede observar, el campo vectorial bosquejado por las isoclinas muestran la direcci´on o el flujo que siguen las soluciones de la ecuaci´on diferencial.

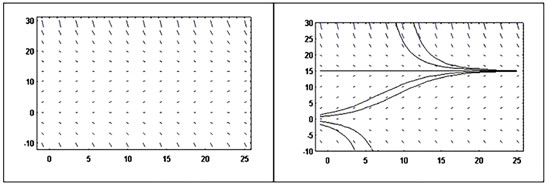
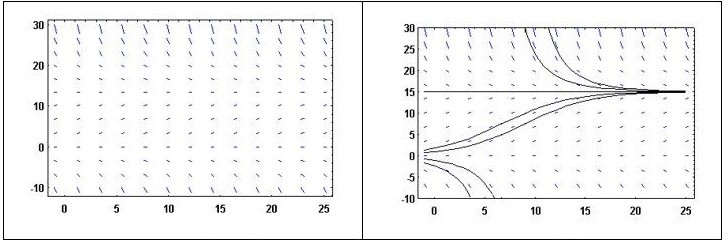
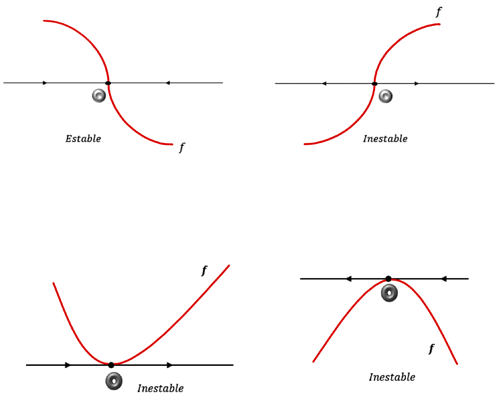


Figura 2.12: Isoclinas de la ecuaci´on diferencial *y*j(*x*) = 0*,*3(1 − *y/*15).

Puede suceder que el modelo considerado sufra una pequen˜a alteraci´on en cierto momento (por ejemplo una guerra o una repentina inmigraci´on), y se desee saber si despu´es de esta perturbaci´on la poblaci´on vuelve a estabilizarse en el valor *y*0, o si toma otro rumbo. Para ello, se considera que si la funci´on es positiva en *y* toda soluci´on que en un cierto valor *x* sea igual a *y* tendr´a que ser creciente en el instante *x*, por tanto, si *y*(*x*0) = 0 y *f* positiva es un semi-entorno izquierdo de *y*0, entonces para cualquier *y* en ese entorno, se tiene que la soluci´on que pasa por *y* crece, y por tanto se mantiene en el entorno y tender´a a *y*0. Si en cambio es negativa en un semientorno izquierdo de *y*0, entonces la soluci´on que tome el valor *Y*0 decrecer´a, alej´andose de *y*0. Si en un entorno reducido de *y*0 el signo de *f* es constante, entonces *y*0 es inestable.

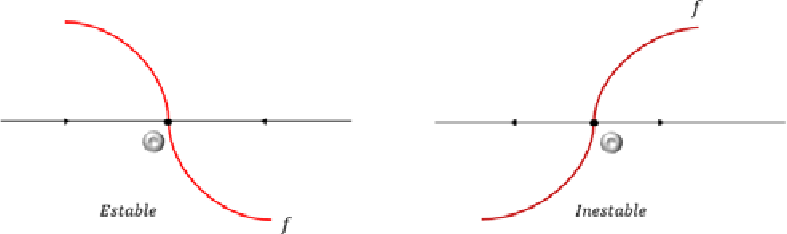


Figura 2.13: Criterio de estabilidad para *y*0

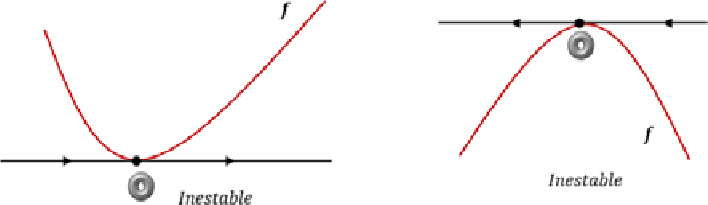


Figura 2.14: Criterio de inestabilidad para *y*0

inestable.

**Proposici´on 2.8.1** (Criterio de estabilidad)**.** *Un punto de equilibrio y*0 *es estable si f* (*y*) *es positiva en un semi-entorno izquierdo de y*0 *y negativa en uno derecho.*

**Proposici´on 2.8.2** (Criterio de inestabilidad)**.** *Un punto de equilibrio y*0 *es inestable si f* (*x*) *es negativa en un semientorno izquierdo de y*0 *o positiva en uno derecho.*

Si *f* es una funci´on derivable, la condici´on de la Proposici´on 2.8.1 es verificada siempre que *f* j(*y*0) *<* 0, y entonces se tiene el siguiente corolario

**Corolario 2.8.1.** *Un punto de equilibrio y*0 *es estable si f* j(*y*0) *<* 0*.*

**Corolario 2.8.2.** *Un punto de equilibrio y*0 *es inestable si f* j(*y*0) *>* 0*.*

Cuando una ecuaci´on aut´onoma no pueda resolverse por lo complicadas que puedan ser las integrales involucradas, de todos modos es posible calcular el l´ımite de una soluci´on cuando *x* tiende a ±∞. En efecto, se tiene determinado el signo de la funci´on *f* y que y es una soluci´on cuyo valor en algu´n instante *x* pertenece a un intervalo (*a, b*) donde *f* es positiva y que *f* (*b*) = 0. Entonces *x* es una funci´on creciente, y solo dejar´ıa de ser creciente si en algu´n momento *y*(*x*) se pasa de *b*. Pero esto no es posible porque el punto *b* es de equilibrio, y si *y* alcanza alguna vez el valor *b* quiere decir que es b para todo *x*. Se concluye que la soluci´on es creciente para todo *x >* 0, y resta ver hasta donde llega, es decir, se desea saber el l´ım*x*→0 *y*(*x*) que existe porque la *y*(*x*) es creciente. El l´ımite es precisamente *b*: en efecto, si fuera menor, ser´ıa algu´n *α < b* donde la *f* es positiva, y entonces *y*j(*x*) es mayor que una constante positiva a partir de un cierto *x*, y eso es absurdo ya que implicar´ıa que la *y*(*x*) tiende a +∞ (ver Figuras 2.13 y 2.14).

**Ejemplo 2.8.2.** *Para verificar esto, sea el modelo para la temperatura de un fluido est´a dado por*

*y*j = (*y*2 − 3*y* + 2)*e*−*y,*

*Integrado la ecuaci´on anterior se obtiene*

∫ ∫

*dy* = *dx* = *x* + *c.* (*y*2 − 3*y* + 2)*e*−*y*

*Si el inter´es es averiguar si la temperatura llegar´a a cero o no, y cu´ales son los estados de equilibrio estables del sistema. Es factible determinarlo estudiando el signo de la funci´on f* (*y*) = (*y*2 − 3*y* + 2)*e*−*y (ver Figura 2.15). Los puntos equilibrio (o sea las ra´ıces de f) son x* = 1 *y x* = 2*; se tiene que f es*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| + | 0 | – | 0 | + |
|  | 1 |  | 2 |  |

Figura 2.15: signos de *f* (*y*).



*negativa entre 1 y 2 y positiva fuera del intervalo* [1*,* 2]*. Por tanto*

* + - 1. *Como f es positiva a la izquierda de 1 y negativa a su derecha, resulta que 1 es punto de equilibrio estable.*
      2. *Como f es negativa a la izquierda de 2 y positiva a su derecha, resulta que 2 es punto de equilibrio inestable.*
      3. *Si la condici´on inicial es y*0 *<* 1 *entonces la soluci´on tender´a al punto de equilibrio 1.*
      4. *Si la condici´on inicial es y*0 ∈ (1*,* 2) *entonces la soluci´on tender´a al punto de equilibrio estable 1.*
      5. *Si la condici´on inicial es y*0 *>* 2 *entonces la soluci´on tender´a a* +∞*.*
      6. *Si la temperatura inicial es positiva, entonces se mantendr´a positiva en el futuro.*

## Ecuacio´n de Clairaut

**Definici´on 2.9.1.** *La ecuacio´n diferencial de la forma*

*y* = *xdy* + *f dy ,* (2.126)

*dx dx*

*se llama de Clairaut.*

La soluci´on de (2.126)se efectu´a realizando la sustituci´on *p* = *dy* , en la nueva variable (2.126) se

*dx*

reescribe como

*y* = *xp* + *f* (*p*)*.* (2.127)

Derivando (2.127) con respecto de *x* se obtiene

*dy dp*

= *p* + *x*

*dx dx*

Dado que *p* = *dy/dx*, entonces (2.128) se reduce a

*df dp*

+

*dp dx*

*.* (2.128)

0 = *xdp* + *df dp* = *dp x* + *df* (2.129)

*dx dp dx dx dp*

*dp df*

A partir de (2.129) se establece que

= 0 o *x* +

*dx dp*

= 0.

**Caso 1:** Si *dp*

*dx*

= 0, entonces *p* = *c* con *c* constante. Reemplazando el valor de *p* en (2.127) se obtiene

*y* = *px* + *f* (*c*) que corresponde a una familia de rectas.

**Caso 2:** Si *x* = − *df* , entonces (2.127) se reescribe como *y* = −*p df*

*dp*

*dp*

+ *f* (*p*) la cual corresponde a la

ecuaci´on de la curva envolvente de la familia de rectas *y* = *cx* + *f* (*c*).

**Ejemplo 2.9.1.** *Resolver la ecuaci´on*

*y* = *x* + 1 − ln *.* (2.130)

*dy dy*

*dx dx*

*Sea p* = *dy , entonces (2.130) se reescribe como*

*dx*

*y* = *xp* + 1 − ln (*p*) *.* (2.131)

*Derivando (2.131) con respecto a x se obtiene*

*dy dp* 1 *dp*

*dx* = *p* + *xdx* − *p dx.* (2.132)

*Dado que p* = *dy/dx, entonces (2.132) se reduce a*

0 = *xdp* − 1 *dp* = *dp x* − 1 *.* (2.133)

*dx p dx dx p*

*dp* 1

*A partir de (2.133) se establece que*

*dp*

= 0 *o x* = *.*

*dx p*

*Si* = 0*, entonces p* = *c con c constante. Reemplazando el valor de p en (2.127) se obtiene*

*dx*

*y* = *cx* + 1 − ln *c.*

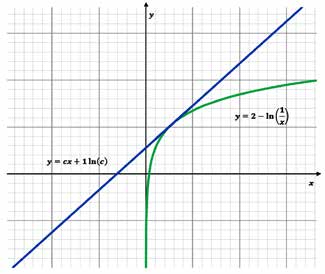
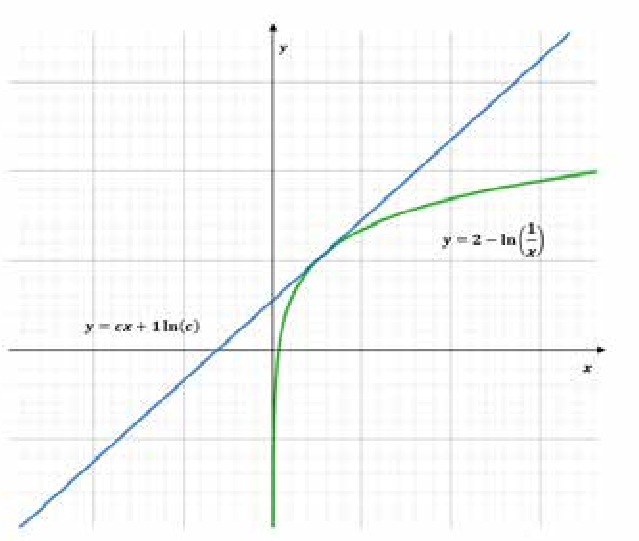


Figura 2.16: Gr´afica de la soluci´on de (2.130).

*Si x* =

1

*, entonces (2.127) se reescribe como*

*p*

*y* = *x* 1 +1 − ln 1 = 2 − ln 1 *.*

*x*

*x*

*x*

**Ejemplo 2.9.2.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*y* = *xdy* − tan *dy .* (2.134)

*dx dx*

*Sea p* = *dy , entonces (2.134) se reescribe como*

*dx*

*y* = *xp* − tan (*p*) *.* (2.135)

*Derivando (2.135) con respecto a x se obtiene*

*dy* = *p* + *xdp* − sec2 (*p*) *dp .* (2.136)

*dx*

*dx*

*dx*

*Dado que p* = *dy/dx, entonces (2.136) se reduce a*

0 = *xdp* − sec2 *pdp* = *dp x* − sec2 *p .* (2.137)

*dx*

*dx*

*dx*

*A partir de (2.137) se establece que dp* = 0 *o x* = sec2 *p.*

*dx*

*dp*

*Si* = 0*, entonces p* = *c con c constante. Reemplazando el valor de p en (2.127) se obtiene*

*dx*

*y* = *cx* − sec *c.*

*Si x* = sec2 *p, entonces (2.127) se reescribe como*

*y* = *p* sec2 *p* − tan *p,*

*que representa la ecuaci´on de la envolvente de la familia de rectas y* = *cx* − tan *c.*

**Ejemplo 2.9.3.** *Resolver la ecuaci´on diferencial*

*y* = *xy*j + 2 1+ (*y*′ )2*.* (2.138)

*Sea p* = *dy , entonces (2.138) se reescribe como*

*dx*

*y* = *xp* + 2 1+ *p*2*.* (2.139)

*Derivando (2.139) con respecto a x se obtiene*

√

*dp*

*dy dp* 2*pdx*

√

*dx* = *p* + *xdx* + 1+ *p*2 *.* (2.140)

*Dado que p* = *dy/dx, entonces (2.140) se reduce a*

*dp*

2*p*

*dp dx dp*

2*p*

0 = *xdx* + √1+ *p*2 = *dx*

*x* + √1+ *p*2

*.* (2.141)

*dp* 2*p*

*A partir de (2.137) se establece que*

*dp*

*dx* = 0 *o x* = −√1+ *p*2 *.*

*Si* = 0*, entonces p* = *c con c constante. Reemplazando el valor de p en (2.127) se obtiene*

*dx* √ 2

*y* = *cx* +2 1+ *c .*

2*p*

*Si x* = −√1+ *p*2 *, entonces (2.127) se reescribe como*

−2*p*2 √

2

*y* = √1+ *p*2 +2 1+ *p*

√

−

*Lo anterior implica que*

2*p*2 + 2+ 2*p*2

=

1+ *p*2

2

= √1+ *p*2 *.*

2

√

*y* =

1+ *p*2

2*p*

√

*x* = − 1+ *p*2 *,*

*son las ecuaciones param´etricas de la envolvente de la familia de rectas dada por y* = *cx* + 2√1+ *c*2*.*

## Ejercicios

### Ecuaciones de Variables Separables

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

*dy y*

* + - 1. *dx* = √*x* .
      2. *dy* = *y y*3. *dx*

−

*dr*

=

* + - 1. *s* ln *r*

*ds*

*s* + 1 2

*r*

4. *dy* = *xy* + 3*x* − *y* − 3 .

.

*dx xy* − 2*x* + 4*y* − 8

1. *dy* = sen−1 *x*.

*dx*

*dθ* cos *θ*

1. *rdr* = −sen *θ* .

7. (1 + *y*2)*dx* = (*y* − √ 2 2 3

1+ *y*

)(1 + *x* ) 2 *dy*.

8. (√2+ √2*y*)*dy* = (*y* + 1)*ds* donde *y* = *y*(*s*).

*dy*

9. *dx* − *y* tan *x* = 0.

### Ecuacio´n de la forma

*dy*

= *f* (*Ax* + *By* + *C*)

*dx*

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales 1. 4 *dy* = (8*x* + 2*y* + 4)3*/*2 + 3.

*dx*

2. *dy* = (√2*x*+*πy*+*e*)3 .

*dx* 10

3. *dx* = (*t* + 2*x* + 4)5*/*4*dt* + *dt*.

4. *dy* = 5+ √3 2*y* 3*x* + 7.

−

*dx*

5. *dy* = 2 *ex*+*y*+1. *dx*

−

### Ecuaciones diferenciales exactas

En cada problema determine si la ecuaci´on diferencial es exacta. Si es exacta resolverla.

* + - 1. *y* − ln *y dx* + ln *x* − *x dxy* = 0.

*x*

*y*

2. (2*x* − 1)*dx* + (3*y* + 5)*dy* = 0.

3. (2*x* + *y*)*dx* + (*x* + 6*y*)*dy* = 0. 4. (2*x* + *y*)*dx* − (*x* + 6*y*)*dy* = 0.

5. *x* − *y*3 − *y*2 sen *x dx* = (3*xy*2 + 2*y* cos *x*)*dy*.

6. 3*x*2*y* + *ey dx* + *x*3 + *xey* − 5*y dy* = 0.

7. 1 + 1 − *y dt* + *yey* + *t dy* = 0.

*t*

*t*2

*t*2 + *y*2

*t*2 + *y*2

8. 1 + cos *x* − 2*xy dy* = *y*(*y* + sen *x*).

1+ *y*2 *dx*

*ydx* + *xdy*

9. 1 − *x*2*y*2 + *xdx* = 0.

10. 2*x* 1+ √*x*2 − *y dx* = √*x*2 − *ydy*.

### Ecuaciones reducibles a diferenciales exactas

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales 1. 3*x*2 − *y*2 *dy* − 2*xydx* = 0.

1. *exdx* + (*ex* cot *y* + 2*y* csc *y*) *dy* = 0.
2. (*x* ln *y* − 2*xy*)*dx* + (*x* + *y*)*dy* = 0.

4. (*y*2 + *xy* + 1)*dx* + (*x*2 + *xy* + 1)*dy* = 0.

1. *xdy* − *ydx* = (1 + *y*2)*dy*.
2. (*y* + *x*)*dy* = (*y* − *x*)*dx*.

*y*

1. *dy* +

*dx* = sen *xdx*.

*x*

1. cos *xdx* + 1+ 2 sen *xdy* = 0.

*y*

### Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

* + - 1. *y*j + *y* = *e*4*x*.
      2. *x*3*y*j + *xy* = 8.

3. (1 + *x*) *dy xy* = *x* + *x*2.

−

*dx*

4. (*x* + 2)2 *dy* = 5 8*y* 4*xy*.

— −

*dx*

5. *y*j + 2*xy* = *y* + 4*x* − 2.

*dr*

6. + *r* sec *θ* = cos *θ*.

*dθ*

7. (1 + *x*) *dy xy* = *x* + *x*2.

−

*dx*

*dy*

8. 3

*dx*

*dy*

+ 12*y* = 4.

2*x* +1

9. *x* +

*dx*

*x* +1 *y* = *x* − 1.

**Cap´ıtulo 3**

# Aplicaciones para ecuaciones diferenciales de primer orden

“Es dif´ıcil apreciar del todo los capullos de las plantas en floraci´on sin un conocimiento razonable de las ra´ıces, tallos y hojas que los nutren y soportan. El mismo principio es v´alido en matem´aticas, en particular, en un curso de ecuaciones diferenciales”.

Autor: Desconocido Uno de los problemas que un cient´ıfico encuentra en su investigaci´on diariamente es resolver la pregunta “¿C´omo traduzco un fen´omeno a un sistema de ecuaciones que lo describa? Es generalmente imposible describir un fen´omeno totalmente, se centran los esfuerzos generalmente para un sistema de ecuaciones

que describa el sistema o una situaci´on aproximada y adecuada.

En general, una vez que se construye la ecuaci´on o el sistema de ecuaciones, se comparan los datos generados por las ecuaciones con los datos verdaderos recopilados del sistema (por la medida). Si los dos sistemas de datos “convienen el” est´an cercanos, podr´ıa pensarse que el sistema describe de manera eficiente, algunas veces efectiva constituy´endose en un modelo matem´atico si es validado. Por ejemplo, es factible utilizar las ecuaciones para hacer predicciones sobre el comportamiento a largo plazo del sistema. Si una predicci´on conduce a algunas conclusiones que no est´an cerca del comportamiento futuro del mundo real, deben modificarse, corregirse o no tenerse en cuenta las ecuaciones subyacentes.

Los pasos b´asicos en la construcci´on de un modelo son:

**Paso 1:** Indique claramente las suposiciones en las cuales el modelo est´a basado. Estas suposiciones deben describir las relaciones entre las cantidades que se analizar´an.

**Paso 2:** Describa totalmente los par´ametros y las variables a utilizar en el modelo.

**Paso 3:** Utilice los supuestos (del paso 1) para derivar las ecuaciones matem´aticas que relacionan los par´ametros y las variables (del paso 2).

## Crecimiento y decrecimiento

### Ecuacio´n de Malthus

El crecimiento poblacional o din´amica de poblaciones, fue uno de los primeros intentos de modelar matem´aticamente el crecimiento demogr´afico humano. El economista ingl´es Thomas Malthus en 1798 logr´o describir la curva de crecimiento de la poblaci´on de un pa´ıs. En esencia la idea del modelo malthusiano es la hip´otesis de que la tasa de crecimiento de la poblaci´on de un pa´ıs con ´ındices constantes de nacimiento y mortalidad, crece en forma proporcional a la poblaci´on (si dos cantidades *u* y *v* son proporcionales, se escribe *uαv*, esto quiere decir que una cantidad es mu´ltiplo de otra: *u* = *kv*). Para el caso de la poblaci´on

total *P* (*t*) de ese pa´ıs en cualquier momento *t*, es

*dP dt*

= *kP,* (3.1)

donde *K* es la constante de proporcionalidad. Dado que (3.1) es una ecuaci´on de variables separables, entonces

∫

∫

Integrando (3.2) se obtiene

*dP* = *kdt.* (3.2)

*P*

luego

En consecuencia

ln |*P* | = *kt* + *C, e*ln |*P* | = *ekt*+*C* = *ekteC.*

*P* (*t*) = *ekt*+*C* = *ekteC.*

Sea *P*0, la cantidad de poblaci´on inicial, es decir, en un tiempo *t* = 0,

*P* (0) = *ek*∗(0)*eC* = *eC* = *P*0*.*

Por lo tanto, la soluci´on de (3.1) sujeta a la condici´on inicial *P* (0) = *P*0 es

*P* (*t*) = *P*0*ekt.* (3.3)

La funci´on *P* definida en (3.3) define una familia de curvas segu´n el valor inicial *P*0. *k* indica la velocidad de variaci´on de *P* con relaci´on a *t*. A partir de (3.1) se verifica que si la constante de proporcionalidad *k*, y, *P* (*t*) son positivas, entonces *P* j(*t*) es positiva y *P* (*t*) es creciente, en este caso se dice que el problema es de crecimiento. Pero, si *k* es negativa, y, *P* (*t*) es positiva, entonces *P* j(*t*) ser´a negativa, lo cual implica que *P* (*t*) es decreciente, y el problema es de decrecimiento.



**Ejemplo 3.1.1** (Crecimiento del cultivo de bac- terias)**.** *Suponga que la poblaci´on de una colonia de bacterias crece de manera proporcional a la poblacio´n en el tiempo t, que la poblaci´on inicial de bacterias fue de 1000 y despu´es de tres horas de observaci´on, desde el inicio del proceso, se detectan 2000 bacte- rias.*

Figura 3.1: Bacterias.

**Soluci´on:** A partir de la informaci´on disponible se establece *P* (0) = 1000 y *P* (3) = 2000. Dado que es un problema de crecimiento *P* (*t*) satisface la ecuaci´on diferencial (3.1) cuya soluci´on est´a dada por (3.3). Evaluando (3.3) en *t* = 0 se obtiene *P* (0) = *P*0*ek*0 = *P*0, lo anterior implica que *P*0 = *P* (0) = 1000. Por otro lado, reemplazando *t* = 3 en (3.3) se obtiene *P* (3) = *P*0*e*3*k* = 1000*e*3*k*. Reemplazando *P* (3) = 2000 en la ecuaci´on anterior se obtiene

2000 = 1000*e*3*k,* (3.4)

lo cual permitir´a conocer el valor de *k*. En efecto, la soluci´on de (3.4) es equivalente a 2 = *e*3*k* luego ln 2 = 3*k* lo cual implica que *k* = ln 2*/*3 = 0*,*347. As´ı entonces, la ecuaci´on que modela el fen´omeno es

*P* (*t*) = 1000*e*0*,*347*t.*

Observe que *ekt* = *e*ln 2(*t/*3) = *e*ln 2 *t/*3 = 2*t/*3, por consiguiente la soluci´on de (3.1) se reescribe como

*P* (*t*) = 1000 2*t/*3 *.*

Con esta ecuaci´on podemos determinar, por ejemplo, la cantidad de bacterias que habr´ıa al t´ermino de 4 horas; ella ser´ıa *P* (4) = 1000 24*/*3 = 4000 ; note que con la primera ecuaci´on, el valor es *P* (4) = 3999*,*999996.

**Ejemplo 3.1.2** (Crecimiento del cultivo de bacterias)**.** *Un cultivo tiene una cantidad inicial N*0 *de bacterias. Cuando t* = 1*hora, la cantidad medida de bacterias es* 3 *N*0*. Si la raz´on de reproducci´on es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.*

2

**Soluci´on:** *Sea N* (*t*) *la cantidad de bacterias en el tiempo t, entonces a partir de los datos se obtiene N* (0) = *N*0 *y N* (1) = 3*N*0*/*2*. Se desea establecer el tiempo t* = *t*∗ *para el cual la cantidad inicial de bacterias se triplica; es decir, se debe encontrar t*∗ *tal que*

*N* (*t*∗) = 3*N*0*.* (3.5)

*Dado que la raz´on de reproducci´on es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, entonces el fen´omeno es modelado por la ecuaci´on diferencial*

*dN*

= *kN,* (3.6)

*dt*

*donde k es la tasa de crecimiento poblacional constante. La soluci´on de (3.6) est´a dada por*

*N* (*t*) = *Cekt,* (3.7)

*donde C es la constante de integraci´on. Reemplazando N* (0) = *N*0 *en (3.7) se obtiene N* (0) =

*Cek*·0 = *C* = *N*0*, lo cual implica que C* = *N*0*. Por lo tanto (3.7) se reescribe como*

*N* (*t*) = *N*0*ekt.* (3.8)

*Evaluando en t* = 1 *la expresi´on para N definida en (3.8) y utilizando la condici´on N* (1) = 3*N*0*/*2 *en (3.8) se obtiene la siguiente igualdad N*0*ek* = 3*N*0*/*2*, a partir de la ecuaci´on anterior se despeja k obteniendo*

2

*Por lo tanto*

*k* = ln 3 = 0*,*405*.*

*N* (*t*) = *N*0*e*0*,*405*t.* (3.9)

*Ahora, utilizando la ecuaci´on (3.5) se obtiene*

*N* (*t*∗) = *N*0*e*0*,*405*t*∗ = 3*N*0*,* (3.10)

*a partir de (3.10) se despeja t*∗ = ln 3

0*,*405

*poblaci´on de bacterias es de* 2*,*71 *horas.*

= 2*,*71*. Por tanto, el tiempo necesario para triplicar la*

#### Crecimiento Log´ıstico

**Ejemplo 3.1.3.** *Halle la soluci´on de la ecuaci´on diferencial que describe el hecho de que cuando los factores ambientales imponen un l´ımite superior sobre su taman˜o, la poblaci´on crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su taman˜o actual y a la diferencia entre su l´ımite superior y su taman˜o actual.*



Figura 3.2: Alusi´on al crecimiento.

**Soluci´on:** Sea *P* (*t*) el taman˜o de la poblaci´on en el tiempo *t*, y *L* el l´ımite superior impuesto a la poblaci´on por el medio ambiente. Entonces, el ritmo de crecimiento de la poblaci´on es *dP* , y la diferencia entre el l´ımite superior y la poblaci´on es = *L* − *P* . Como “conjuntamente proporcional”significa “proporcional al producto”, entonces la ecuaci´on diferencial que modela el problema es,

*dt*

*dP*

−

= *kP* (*L P* )*,* (3.11)

*dt*

siendo *k*, la constante de proporcionalidad. Ajustando las variables, la ecuaci´on queda  *dP* = *kdt*

*P* (*L*−*P* )

o en la forma general *kdt* =  *dP* = 0*,* integrando t´ermino a t´ermino se tiene

*P* (*L*−*P* )

∫ ∫−

*kdt*  *dP* = *C.* (3.12)

*P* (*L* − *P* )

La primera integral es inmediata, la segunda se puede resolver aplicando fracciones parciales as´ı:

1

*P* (*L* − *P* )

*A B*

= + *, P L* − *P*

luego 1 = *A*(*L* − *P* ) + *BP* . la ecuaci´on anterior implica que 1 = *AL* y *A* = *B* lo cual implica que

*A* = *B* = 1*/L.* De esta forma, la ecuaci´on (3.12) se reescribe como

*kt* − ∫ 1 + 1 *dp* = *C*

(*LP* )

1

*L*(*L* − *P* )

1

*kt* − *L* ln *P* + *L* ln(*L* − *P* ) = *C.*

Multiplicando por *L* la ecuaci´on anterior, se obtiene *KLt* −ln *P* +ln(*L* − *P* ) = *CL*. Ahora aplicamos las propiedades de los logaritmos y simplificando se obtiene

ln *L* − *P*

*P*

= *L*(*C* − *kt*)*,*

luego

*L* − *P P*

= *eL*(*C*−*kt*)*.*

Despejando *P* a partir de la ecuaci´on anterior se obtiene

donde *C*1 = *eCL*.

*P* (*t*) =

1

*,*

1 + *C*1*e*−*kLt*

Figura 3.3: Estudiantes.



**Ejemplo 3.1.4** (Propagaci´on de un virus)**.** *Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su escuela donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la raz´on con que se propaga al virus no s´olo a la cantidad x de alumnos infectados, sino tambi´en a la cantidad de alumnos no infectados, determinar la cantidad de alumnos infectados seis d´ıas despu´es si se observa que a los cuatro d´ıas hab´ıan 50 alumnos contagiados, x*(4) = 50*.*

**Soluci´on:** Suponiendo que nadie sale de la escuela durante la epidemia, debemos resolver la ecuaci´on diferencial log´ıstica

*dx*

*dt* = *kx*(1000 − *x*)*.* (3.13)

donde *x*(*t*) representa la cantidad de alumnos infectados en el tiempo *t* y *k* es la tasa constante de crecimiento de la poblaci´on de infectados. Separando variables e integrando por fracciones parciales, se tiene

*dx x*(1000 − *x*)

= *kdt*

1 1

1000 + 1000

*dx* = *kdt.* (3.14)

*x* 1000 − *x*

Integrando en ambos lados de la ecuaci´on (3.14) se obtiene

∫ 1 1 ∫

1000 + 1000

*dx* =

*dt*

*x* 1000 − *x*

1 *x*

. .

ln

= *kt* + *c ,*

de donde se obtiene

1000

. 1000 − *x* . 1

*x* = *c e*1000*kt.*

2

1000 − *x*

Despejando la variable *x* como funci´on de *t*, se tiene

1000*c*2*e*1000*kt*

1000*c*2

*x*(*t*) = 1 + *c e*1000*kt* = *e*−1000*kt* + *c*

2

2

*.* (3.15)

Dado que al inicio de la infecci´on solo un alumno es portador del virus de la gripe entonces *x*(0) = 1, reemplazando la ecuaci´on anterior en (3.15) se verifica que 1 = 1000*c*2 , por lo tanto *c*2 = 1*/*999.

1+*c*2

Reemplazando el valor de *c* en (3.15) se obtiene

1000

*x*(*t*) = 999 *.* (3.16)

−*e* +

1

1000*kt*

999

Reemplazando la segunda condici´on inicial *x*(4) = 50 en (3.16) se obtiene

1000

50 = 999 *,* (3.17)

−*e* +

1

4000*t*

999

luego

*k* = −

ln 19

999

4000

= 0*,*0009906*.*

Reemplazando el valor de *k* en (3.16) se obtiene

1000

*x*(*t*) = 999 *.* (3.18)

−*e* +

1

0*,*9906*t*

999

Ahora, evaluando (3.18) en *t* = 6 se obtiene

1000

*x*(6) = 999 = 276*,*25*. e*−0*,*9906·6 + 1

999

Por lo tanto despu´es de 6 d´ıas habr´an 276 estudiantes infectados con la gripe.

**Ejemplo 3.1.5** (Uso de sistemas computarizados bajo f´ormula dada)**.** *La cantidad N* (*t*) *de supermerca- dos del pa´ıs que est´an usando sistemas de revisi´on computarizados se describe por el problema con valores iniciales*

*dN*

*dt* = *N* (1 − 0*,*0005*N* )*, N* (0) = 1*.* (3.19)

*Se debe predecir cu´antos supermercados se espera que adopten el nuevo procedimiento en un periodo de tiempo largo. Resuelva el problema con valores iniciales ¿Cu´antas compan˜´ıas se espera que adopten la nueva tecnolog´ıa cuando t=10?*

**Soluci´on:** *Siguiendo un procedimiento similar al realizado en el Ejemplo 3.1.4 se calcula la soluci´on del PVI definido en (3.19), la cual est´a dada por*

2000*et*

*N* (*t*) = 1999 + *et .*

*Ahora, para t* = 10 *se tiene*

2000*e*10

*N* (10) = 1999 + *e*10 = 1833*,* 59*.*

*Por tanto, se espera que 1834 empresas opten por la nueva tecnolog´ıa en 10 an˜os.*

#### Vida media

La vida media es una medida de estabilidad de una sustancia radioactiva, es simplemente el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute a la mitad de los ´atomos de una muestra inicial, *AO*, y se conviertan en ´atomos de otro elemento. Por ejemplo, la vida media del Radio (*Ra* − 256), ´atomo muy radioactivo, es de aproximadamente 1700 an˜os. En este lapso de tiempo la mitad de determinada cantidad de ´atomos *Ra* − 256 se transforma en ´atomos Rad´on, *Rn* − 222. El Uranio (*U* − 238) tiene una vida media de 4500 millones de an˜os, tiempo que tarda para que la mitad de sus ´atomos se transformen en ´atomos de Plomo, *Pb* − 206.

**Ejemplo 3.1.6.** *Un reactor de reproducci´on convierte el Uranio (* U-238*) relativamente estable en Plutonio (* Pu-239*), is´otopo radioactivo. Al cabo de 5 an˜os se tiene que se ha desintegrado* 0*,* 043 % *de la cantidad inicial de una muestra de* Pu-239*. Calcule la vida media de ese is´otopo. Si la rapidez de desintegraci´on es proporcional a la cantidad restante.*



Figura 3.4: Reactor.

**Soluci´on:** *Sea A*(*t*) *la cantidad de plutonio restante en el tiempo t, entonces*

*dA*

= *kA, A*(0) = *A*0*,* (3.20)

*dt*

*la din´amica del* Pu-239*. Dado que al cabo de 5 an˜os se ha desintegrado* 0*,* 043 % *de la cantidad inicial de una muestra de* Pu-239*, entonces*

*A*(5) = *A*0 − 0*,* 043 %*A*0 = 0*,*99957*A*0*.*

*Sea t*∗ *la vida media del Plutonio, entonces*

*La solucio´n del PVI (3.20) es*

*A*(*t*∗) = *A*0 *.*

2

*A*(*t*) = *A*0*ek*(*t*)*.*

*Utilizando la condici´on inicial A*(5) = 0*,* 99957*A*0 *se obtiene*

*A*(5) = *A*0*e*5*k* = 0*,* 99957*A*0*,*

*lo cual implica que*

*luego*

*k* = ln(0*,*99957) = −8*,*60∗−5*,*

*A*(*t*) = *A e*−8*,*6∗10−5*t.* (3.21)

5

0

*Evaluando (3.21) en la vida media t*∗ *se obtiene*

*A*(*t*∗) = *A e*−8*,*6*x*10−5*t*∗ = *A*0 *.* (3.22)

0 2

*Despejando t*∗ *a partir de (3.22) se obtiene*

∗

ln 1

*t* = 2 = 8*,*058*.*

8*,*6 ∗ 10−6

*Por lo tanto la vida media del* Pu-239 *es de aproximadamente 8.1 an˜os.*

### M´etodo del carbono C-14

El m´etodo del carbono C-14 se debe al qu´ımico Willard Libby cuyo descubrimiento le vali´o el Premio Nobel de Qu´ımica en 1960. La teor´ıa se basa en lo siguiente; la atm´osfera terrestre es continuamente bombardeada por rayos c´osmicos, los cuales producen neutrones libres que se combinan con el nitr´ogeno de la atm´osfera para producir el is´otopo C-14 (carbono 14 o radiocarbono).

Este C-14 se combina con el bi´oxido de carbono presen- te en la atm´osfera, el cual es absorbido por las plantas y estas a su vez son alimento para los animales. As´ı es como se incorpora el radiocarbono a los tejidos de los seres vivos. El cociente de la cantidad de C-14 y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atm´osfera constante, y en consecuencia la proporci´on de is´otopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atm´osfera. Cuando un organismo muere, la veloci- dad de incorporaci´on de radiocarbono a ´el se hace nula y entonces comienza el proceso de desintegracio´n radioac- tiva del C-14, que se encontraba presente en el momento

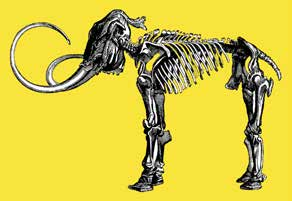
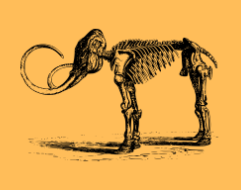


Figura 3.5: F´osil.

de su muerte.

As´ı comparando la proporci´on de C- 14 que hay en un f´osil con la proporci´on constante encontra- da en la atm´osfera es posible obtener una estimaci´on razonable de su edad. Para expresar el ritmo de descomposici´on de un elemento se utiliza el concepto de vida media *t*∗ tratado en la Secci´on 3.1.3.

**Ejemplo 3.1.7.** *Sea y* = *f* (*t*) *la cantidad de sustancia existente de un cuerpo en un tiempo t, entonces la ecuacio´n diferencial*

*f* j(*t*) = *kf*(*t*)*,* (3.23)

*la din´amica de crecimiento o decrecimiento de la sustancia qu´ımica. Si el proceso es de desintegraci´on, entonces k es menor que cero. La soluci´on de (3.23) es f* (*t*) = *f* (0)*ekt, en ningu´n tiempo t se anula, puesto que ekt es siempre positiva, por tanto no se puede hablar de “tiempo total de vida” de una sustancia radiactiva. Pero es posible determinar el tiempo necesario para que se desintegre una fracci´on parcial de la muestra. Generalmente se elige la mitad de la sustancia, es decir f* (*t*∗) = 1 *f* (0)*, siendo t*∗ *la vida media*

2

*de la sustancia tal que:*

*f* (*t*) = *f* (0)*ekt* =

1

*f* (0)*,*

2

*luego ekt* = 1 *, tomando logaritmo natural en ambos lados de la ecuaci´on anterior se tiene* ln *ekt* = ln 1 *,*

2 1 2

*o equivalentemente kt* =∈

2 *. En consecuencia,*

*t*∗ = 1 ln 1 = −ln 2 *,*

*k*

2

*k*

*donde k <* 0*. La Figura 3.6 muestra la gr´afica de f* (*t*) = *f* (0)*ekt con k menor que cero es:*

**Ejemplo 3.1.8.** *La vida media del radio es de 1700 an˜os, qu´e porcentaje de radio quedar´a al cabo de 50 an˜os, y al cabo de 2000 an˜os?*

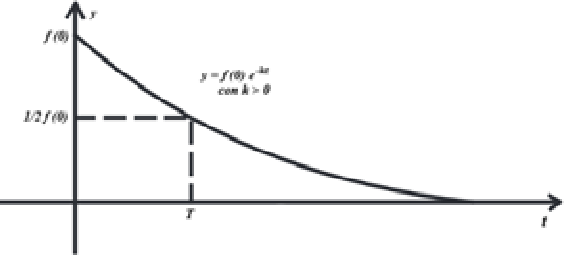


Figura 3.6: Curva solucio´n de la ecuaci´on *f* j(*t*) = *kf* (*t*) bajo las condiciones del Ejemplo 3.1.7.

**Soluci´on:** *Sea y* = *f* (*t*) *la cantidad de radio existente en un tiempo t, como y*j = *ky con k mayor que cero, entonces la ecuaci´on diferencial que determina la din´amica del fen´omeno es y*j + *ky* = 0*, cuya soluci´on es f* (*t*) = *f* (0)*e*−*kt. Hallemos k, utilizando la vida media del radio la cual es de 1.700 an˜os. Lo anterior implica f* (1700) = *f* (0)*e*−1700*k* = 1 *f* (0)*, luego* 1 = *e*−1700*k, tomando logaritmo natural*

−

2 2

*se tiene* ln(1*/*2) = ln *e*−1700 = −1700*k, por lo tanto k* = ln(2*/*1700)*. La soluci´on de la ecuaci´on diferencial dada es f* (*t*) = *f* (0)*e* − ln 2 *t. La ecuaci´on anterior implica que el porcentaje de radio que*

1700

*resta despu´es del tiempo t est´a dado por*

*porcentaje*(*t*) = *f* (*t*) = *e*− ln 2 *t.* (3.24)

1700

*f* (0)

*Evaluando (3.24) en t* = 50 *se obtiene*

ln 2

— 50

*porcentaje*(50) = *e* 1700 = 0*,*9798*,*

*lo anterior implica que despues de 50 an˜os queda aproximadamente el* 98 % *de radio. Ahora eva- luando (3.24) en t* = 2000 *se obtiene*

*porcentaje*(200) = *e*− 1700 2000 = 0*,*4424*,*

ln 2

*en consecuencia despu´es de 2000 an˜os queda aproximadamente el* 44 % *de radio.*

**Ejemplo 3.1.9.** *Se analiz´o un hueso fosilizado y se encontr´o que conten´ıa la centesima parte de la cantidad original de C-14 determine la edad del f´osil.*



Figura 3.7: Hueso fosilizado.

**Soluci´on:** *Sea A*(*t*) *la cantidad de C-14 en el tiempo t, entonces el PVI*

*dA*

= *kA, A*(0) = 0*,* (3.25)

*dt*

*describe la din´amica de degradaci´on de C-14 en el tiempo. Sabemos que la solucio´n de (3.25) es*

*A*(*t*) = *A*0*ekt.*

*Ahora, dado que la vida media del C-14 es 5600 an˜os, entonces*

*A*(5600) = *A e*5600*k* = *A*0 *,* (3.26)

0 2

*a partir de (3.26) se obtiene k* = ln(1*/*2)*/*5600 = −0*,*00012378*. Por lo tanto*

*A*(*t*) = *A*0*e*−0*,*00012378*t.*

*Como el f´osil conten´ıa la cent´esima parte entonces su edad es la soluci´on t*∗ *de la siguiente ecuaci´on*

*A e*−0*,*00012378*t*∗ = *A*0 *,*

*la cual est´a dada por*

0

1

*t*∗ = ln 100 =

−0*,*00012378

100

ln 100 0*,*00012378

= 37204*,*

*es decir que el f´osil tiene una edad aproximada de 37204 an˜os.*

**Ejemplo 3.1.10.** *Los arque´ologos utilizan piezas de madera quemada o carb´on vegetal, encontradas en un lugar para datar pinturas prehist´oricas de paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia. Precise la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si se determin´o que* 85*,*5% *de su C-14 encontrado en los a´rboles vivos del mismo tipo se hab´ıa desintegrado.*



Figura 3.8: Arqu´eologa.

**Soluci´on:** *Sea B*(*t*) *la cantidad de C-14 presente en la madera que quedo´ a trav´es del tiempo. Siguiendo el mismo procedimiento del Ejemplo 3.1.9 se establece que la funci´on que rige la din´amica es*

*B*(*t*) = *B*0*e*−0*,*00012378*t.* (3.27)

*Como se desintegro´ el* 85*,* 5% *del C-14, entonces resta un* 14*,* 5 %*. Sea t*∗ *la edad aproximada de una pieza de madera quemada, entonces*

*B*(*t*∗) = 0*,*145*B*0*.* (3.28)

*Evaluando (3.27) en t*∗*, e igualando las ecuaciones (3.27) y (3.28) se obtiene*

*B*0*e*−0*,*00012378*t* = 0*,*145*B*0*,*

*luego t*∗ = ln(0*,*145)

−

*15.600 an˜os.* −0*,*00012378

= 15597*,* 91*. Por lo tanto, la madera hallada en la caverna data de hace*

## Ley de enfriamiento de Newton

Esta propiedad establece que la variaci´on de la temperatura en un determinado medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura presente. Si *T* (*t*) es la temperatura en el tiempo *t* y *Tm* la temperatura del medio entonces

*dT*

— *m*

= *k*(*T T* )*.* (3.29)

*dt*

**Ejemplo 3.2.1.** *Al sacar un pastel del horno su temperatura es* 300◦*F, despu´es de 4 minutos su temperatura es de* 100◦*F ¿En cuanto tiempo se enfriar´a hasta la temperatura ambiente de* 70◦*F* ?*.*

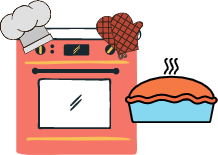


Figura 3.9: Pastel a 300◦*F* .

**Soluci´on:** *Al sacar un pastel del horno su temperatura es de* 300◦*F, lo cual es equivalente a T* (0) = 300◦*F. Despu´es de 3 minutos su temperatura es de* 200◦*F; es decir, T* (4) = 100◦*F. En este caso, la temperatura ambiente o del medio es Tm* = 70◦*F. Lo anterior inplica*

*dT*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *dt* | = | *k*(*T* − 70) | (3.30) |
| *T* (0) | = | 300 | (3.31) |
| *T* (4) | = | 100*.* | (3.32) |

*Observe que la ecuac´on (3.30) es separable y tambi´en lineal, su soluci´on est´a dada por*

*T* (*t*) = 70 + *c*1*ekt.* (3.33)

*Reemplazando (3.31) en (3.33) se obtiene,*

*T* (0) = 70 + *c*1*ek*·0 = 300*,*

*luego*

70 + *c*1 = 300*,*

*lo cual implica que c*1 = 230*. Reemplazando el valor de c*1 *en (3.33) se obtiene*

*T* (*t*) = 70 + 230*ekt.* (3.34)

*Ahora, reemplazando (3.32) en (3.34) se obtiene*

*T* (4) = 70 + 230*e*4*k* = 100*,*

*luego k* =

ln(3*/*23)

4 = −0*,*51*. Por lo tanto*

*T* (*t*) = 70 + 230*e*−0*,*51*t.* (3.35)

|  |  |
| --- | --- |
| Tiempo | Temperatura |
| 10 | 71.4 |
| 11 | 70.8 |
| 12 | 70.5 |
| 13 | 70.3 |
| 14 | 70.2 |
| 15 | 70.1 |

Cuadro 3.1: Ley de enfriamiento.

*Observe que*

l´ım *T* (*t*) = 70*,*

*t*→∞

*lo cual implica que la temperatura alcanza los* 70◦*F en . Sin embargo, en la Tabla 3.1 se verifica que despu´es de 15 minutos la temperatura es muy cercana a los* 70◦*F.*

∞

**Ejemplo 3.2.2.** *Se calienta agua hasta su punto de ebullicio´n* 100◦*C, se retira del fuego y se mantiene en un recinto que se encuentra a una temperatura constante de* 60◦*C. Al final de 3 minutos la temperatura del agua es de* 90◦*C. Calcular la temperatura del agua al final de 6 minutos y el tiempo en la cual la temperatura del agua ser´a de* 75◦*C.*

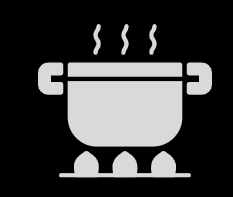


Figura 3.10: Agua a 100◦*C*.

**Soluci´on:** *Sea y* = *f* (*t*) *la temperatura de un cuerpo en un tiempo t; la velocidad de variaci´on de y con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente (Ley de Enfriamiento de Newton). Sea M la temperatura del medio ambiente. Luego la ecuaci´on diferencial que sirve de modelo a este problema es y*j = −*k*(*y* − *M* ) *o equivalentemente*

*y*j + *ky* = *kM,* (3.36)

*donde k es una constante positiva, esta ecuaci´on es diferencial lineal de primer orden, luego su soluci´on viene dada por*

∫

+ *e*

*f* (*t*) = *f* (*a*)*e*

−*kt*

−*kt t a*

*kMekt*

*dt,* (3.37)

*donde f* (*a*) *es la temperatura del cuerpo en un tiempo t* = *a. Para nuestro problema se tiene*

*f* (0) = 100*, la cual es la condici´on inicial dada, adem´as M* = 60*. Reemplazando estas condiciones*

*en (3.37) se tiene*

∫

*f* (*t*) = 100*e*

−*kt*

−*kt t a*

+ *e*

*k*60*ekxdx*

= 100*e*−*kt* + *e*−*kt*[60*ekt* − 60]

= 100*e*−*kt* − 60*e*−*kt* + 60

= 40*e*−*kt* + 60*.* (3.38)

*Hallamos k utilizando la condici´on de f* (3) = 90*. En efecto, evaluando f definido en (3.38) en t* = 3

*se obtiene*

*f* (3) = 40*e*−3*k* + 60 = 90*,*

*lo anterior implica que k* = 1 ln 4 *. Entonces la soluci´on a la ecuaci´on diferencial (3.36) es*

3

3

1

4

*f* (*t*) = 40*e*− 3 ln( 3 )*t* + 60*.*

*Hallemos la temperatura al final de 6 minutos, calculamos*

1 4

*f* (6) = 40*e*− 3 ln( 3 )(6) + 60

= 40*e*−2 ln( 3 ) + 60

4

= 40*e*− ln( 9 ) + 60

16

45

= + 60 = 82*,*5

2

*Por lo tanto, despu´es de 6 minutos la temperatura sera´ de* 83◦*C aproximadaente. El instante en el cual la temperatura es de* 75◦*C, lo podemos calcular as´ı:*

75 = *f* (*t*) = 40*e*−(1*/*3) ln(4*/*3)*t* + 60*,*

*luego*

75 = 40*e*−(*t/*3) ln(4*/*3) + 60

15 = 40*e*(*t/*3) ln(4*/*3)*,*

*la solucio´n de la ecuaci´on anterior es t* = 10 *minutos.*

**Ejemplo 3.2.3.** *La polic´ıa descubre el cuerpo de una profesora de ecuaciones diferenciales. Para re- solver el crimen es decisivo determinar cuando se cometi´o el homicidio. El forense lleg´o al medio d´ıa y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 30 grados Celcius. Espera una hora y obser- va que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29 grados Celcius. As´ı mismo, observa que la tempera- tura de la habitaci´on es constante a 27 grados Cel- cius. Suponiendo que la temperatura de la v´ıctima era normal en el momento de su fallecimiento (37 gra- dos Celcius), determinar la hora en que se cometi´o el crimen.*

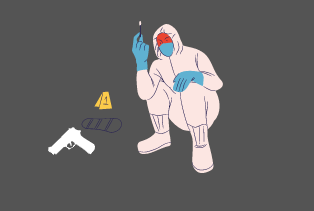


Figura 3.11: Lugar del crimen.

**Soluci´on:** Para determinar la hora del crimen, hacemos uso de la ley de enfriamiento de Newton que establece que la tasa de cambio de la temperatura *T* (*t*) de un cuerpo con respecto al tiempo *t* es proporcional a la diferencia entre *T* y la temperatura *A* del ambiente. La ecuaci´on que rige esta ley se formula

*dT*

*dt* = *k*(*T* − *A*)*,*

con *k* constante real. En nuestro caso tenemos que la ecuaci´on diferencial viene dada por

*dT*

−

= *k*(*T* 27)*,*

*dt*

y puesto que se trata de una ecuaci´on de variables separables, es f´acil calcular su soluci´on general, la cual viene dada por

*T* (*t*) = 27 + *Cekt.*

Ahora bien, observando las condiciones del problema, y considerando el medio d´ıa como *t* = 0, se tiene que *T* (0) = 30 y *T* (1) = 29. De aqu´ı se obtiene que *C* = 3 y *k* = ln(2*/*3)*/*3 = −0*,*4056. Por tanto,

*T* (*t*) = 27 + *Ce*−0*,*4055*t.*

Teniendo ahora en cuenta que en el instante de su muerte, la temperatura de la v´ıctima era de 37 grados Celsius, entonces

luego

37 = 27 + 3*e*−0*,*4055*t,*

1

*t* = − 0*,*4055 ln(10*/*3) ≈ −3*.*

Lo que traduce que la v´ıctima muri´o tres horas antes del medio d´ıa, esto es, a las 9:00 horas.

## Mezclas

Estos modelos se caracterizan por entradas y salidas de volu´menes de fluidos por lo general cuando se mezclan dos compuestos, estos generan un nuevo compuesto. Por ejemplo, cuando describimos la mezcla de dos salmueras la raz´on con que cambia la cantidad de sal, *A*j(*t*) en el tiempo de mezcla est´a dada por

*dA*

= Rapidez con que entra la sal-Rapidez con que sale la sal

*dt*

= *R*0 − *RS.* (3.39)

*R*0 y *RS* tambi´en son llamados raz´on de entrada y raz´on de salida, respectivamente, y se definen como

*R*0 = *ceve* (3.40)

*RS* = *csvs,* (3.41)

donde *ce* es la concentraci´on de entrada y, *ve* es la velocidad de salida, *cs* es la concentraci´on de salida y

*vs* es la velocidad de salida.

**Ejemplo 3.3.1.** *Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de salmueras, otra soluci´on de salmuera se bombea al tanque a raz´on de 3 galones por minuto, la concentraci´on de sal en este efluente es de 2 litros por gal´on, la soluci´on bien agitada se desaloja a la misma raz´on. Si hab´ıa 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales, ¿cu´anta sal habr´a en el tanque pasado mucho tiempo?*

**Soluci´on:** *A partir de la informaci´on del ejemplo se establece que ve* = 3 *gal/min, ce* = 2 *L/g, vs* = 3 *gal/min y cs* = *A*(*t*) = *A . Sea A*(*t*) *la cantidad de sal en el tiempo t entonces*

*V* 300

*La solucio´n de (3.42) est´a dado por*

*dA*

*dt* = *ceve* − *csvs*

*A*

= (2)(3) − 3300

*A*

= 6 − 100 *.* (3.42)

*A*(*t*) = 600 + *ke*− 100 *t.* (3.43)

1

*Evaluando (3.43) en t* = 0 *se obtiene A*(0) = 600 + *ke*− 100 ·0 = 6000 + *k. Por otro lado, utilizando la condici´on inicial A*(0) = 50 *se obtiene* 600 + *k* = 50*, luego k* = −550*. Reemplazando el valor de k en (3.43) se obtiene*

1

1

*Dado que*

*A*(*t*) = 600 − 550*e*− 100 *t.* (3.44)

l´ım *A*(*t*) = l´ım 600 − 550*e*− 1 *t* = 600*,*

100

*t*→∞ *t*→∞

*entonces pasado mucho tiempo habr´an* 600 *libras de sal.*

## Aplicaciones a la mec´anica

**Ejemplo 3.4.1.** *Una gota de aceite, cuya masa es de* 0*,*2 *g cae partiendo del reposo. Cuando su velocidad es de* 40 *cm/s, la fuerza debida a la resistencia del aire es de 160 dinas. Suponiendo que dicha fuerza es proporcional a la velocidad instant´anea:*

1. *H´allense la velocidad y la distancia recorrida en funci´on del tiempo.*
2. *Determinar la velocidad l´ımite.*

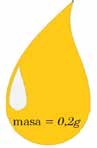


Figura 3.12: Gota de aceite de masa 0*,* 2*g*.

**Soluci´on:** *La gota est´a afectada por dos fuerzas una debida a su peso w, la cual obliga a la gota a ir hacia abajo y otra que se opone a esta y es la resistencia del aire r, la cual es proporcional a la velocidad instant´anea. Consideraremos positivo hacia abajo y negativo hacia arriba. Entonces segu´n la segunda ley de Newton tenemos F* = *w kv, donde k es la constante de proporcionalidad y es positiva, luego la ecuaci´on diferencial correspondiente es mv*j = *mg kv, siendo m la masa, v la velocidad, g la gravedad, esta ecuaci´on se puede transformar en v*j + *kv* = *g. La cual es una ecuaci´on*

−

−

*m*

*diferencial lineal de primer orden, su soluci´on es*

*ge*

*dx,* (3.45)

−*A*(*t*)

*v*(*t*) = *v*(0)*e*

+ *e*

−*A*(*t*) ∫ *t*

0

*A*(*x*)

*donde*

*t k*

∫

*A*(*t*) =

*k*

*dx* = *t,*

*luego*

0 *m m*

*kt* − *kt* ∫ *t kx*

0

−

*v*(*t*) = *v*(0)*e*

*m* + *e*

*m*

*ge m dx*

= *v*(0)*e*− *kt* + *e*− *kt gmekt* − *gm*

*m m*

*m*

*m*

*k*

*m*

*k*

= *v*(0)*e*− *kt* + *gm* 1 − *e*− *kt .* (3.46)

*k*

*Si v*(0) = 0*, como en nuestro caso entonces:*

*v*(*t*) = *gm* 1 − *e*− *kt .*

*m*

*k*

*De acuerdo a la condici´on dada que la resistencia al movimiento es de 160 dinas cuando la velocidad es de 40 cent´ımetros por segundo y dicha fuerza es proporcional a la velocidad instant´anea, entonces podemos hallar el valor de k, ya que* 160 = 40*k, luego k* = 4*. Reemplazando este valor en la soluci´on final tenemos que v*(*t*) = 49[1 − *e*−20*t*]*. Para hallar la distancia recorrida en funcio´n del tiempo*

*podemos emplear la condici´on que v*(*t*) = *ds luego:*

*dt*

*ds* = 49 49*e*−20*t. dt*

−

*Esta es una ecuaci´on de variables separables, entonces*

*s*

∫

*ds* =

0

*t*

49*dt*

∫

−

0

*t*

49*e*

∫

0

−20*sds*

*s*(*t*) = 49*t* + 49 [*e*−20*t* 1]*.*

−

20

*La velocidad l´ımite se tiene cuando t se hace tan grande que podemos decir que t , entonces en este caso e*−20*t tiende a cero, luego la velocidad l´ımite es 49 cent´ımetros por segundo.*

→ ∞

**Ejemplo 3.4.2.** *Un d´ıa comenz´o a nevar a una tasa pesada y constante. Una ma´quina quitanieves comenz´o a trabajar a medio d´ıa, avanzando a 2 millas la primera hora y a una milla la segunda hora. ¿A qu´e hora comenzo´ a nevar?*

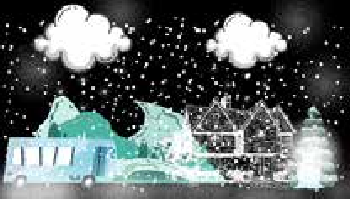


Figura 3.13: D´ıa nevado.

**Soluci´on:** En primer lugar, los datos del problema est´an de acuerdo con la idea de que el quitanieves se mover´a m´as lentamente a medida que la capa de nieve aumenta. Sin pretender determinar cu´ales asunciones pueden ser buenas o malas, asumimos que el quitanieves quita la nieve a una tasa constante de *K* metros cu´bicos por hora. Luego *t* ser´a el tiempo medido en horas a partir del medio d´ıa, y *x* denotar´a la profundidad en mm de nieve en un tiempo *t*. Adem´as *y* denotar´a la distancia que

se mueve el quitanieves con respecto al tiempo. Luego *d*

*dt*

es la velocidad de quitanieves y nuestra

asunci´on ser´a *wxdy*

*dt*

= *K*, donde *w* es la anchura que da el quitanieves. Para encontrar co´mo *x*

depende del tiempo, *t*0 ser´a el nu´mero de horas antes del medio d´ıa cuando comenz´o a nevar, y S ser´a la tasa constante en mm en la cual la profundidad de la nieve se incrementa. Luego usando *t >* −*to*

*x* = *S*(*t* + *to*)*,*

y obtenemos la ecuaci´on diferencial:

*dy k*

= *.*

*dt ws*(*t* + *to*)

Esta ecuaci´on diferencial tiene la forma *dy* = *f* (*t*), y vemos que *y* = *k* [ln(*t* + *t* ) + *C*] donde *C* es

*dt ws* 0

una constante. Se puede sospechar o especular que el conocimiento de muchos pares de valores de *y*

y *t* deben permitirnos determinar *t*0 y as´ı obtener una soluci´on para el problema. En *y* = 0 cuando

*t* = 0 encontramos que en la ecuaci´on anterior *C* = − ln *t*0. Entonces:

*y* = *k* ln 1 + *t .*

*ws*

*t*0

Luego usamos el hecho de que *y* = 2 cuando *t* = 1, y *y* = 3 cuando *t* = 2 para obtener:

1 +

2 2

*to*

= 1 +

1 3

*.*

*to*

Expandiendo los exponentes y simplificando la ecuaci´on *t*2 + *to* − 1 = 0, donde *to >* 0, obtenemos

*o*

*t* = (−1 + √5) = 0*,* 618 *horas* = 37 *min.*

*o*

2

Por lo tanto, la hora en que empez´o a nevar fue a las 11:23 a.m.

**Ejemplo 3.4.3.** *Una part´ıcula se mueve en l´ınea recta hacia un punto fijo 0, bajo la acci´on de una fuerza atractiva en 0 que var´ıa directamente con su distancia a 0. Cuando t* = 0 *la part´ıcula dista 4 cms de 0 y se mueve hacia 0 con una velocidad de 6 cent´ımetros por segundo, y una aceleraci´on de 16 cent´ımetros por segundo cuadrado.*

1. *H´allense su posici´on y velocidad de part´ıcula en funci´on del tiempo.*
2. *Obt´engase la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.*
3. *Determ´ınese la velocidad y aceleraci´on m´axima.*

**Soluci´on:** *Tomemos un punto fijo 0 como origen de un sistema de coordenadas, supongamos que la part´ıcula inicia su movimiento en un punto A, tomemos* 0*A como sentido positivo. Sea P la posici´on de la part´ıcula en un instante t. Como la magnitud de la fuerza de atracci´on F hacia* 0 *es proporcional a su distancia a este punto tendremos F* = *kx, con k >* 0*. Supongamos x* ≥ 0*, luego la magnitud de la fuerza es kx. Como la fuerza F est´a dirigida hacia* 0 *(en sentido negativo) tendremos que F* = −*kx con x mayor o igual a cero. Si x <* 0*, luego la magnitud de la fuerza es* −*kx, como la fuerza F est´a dirigida hacia la derecha (en sentido positivo) luego F* = −*kx con x menor que*

*cero; luego la ecuaci´on diferencial que describe este fen´omeno f´ısico es md*2*x* = −*kx. Para nuestro*

*dt*2

*caso la velocidad y la aceleraci´on est´a dirigida hacia O, cuando la part´ıcula dista* 4 *cm o sea para*

*t* = 0 *tendremos x*(0) = 4*, v*(0) = −6*, a*(0) = −16*, cada una con sus respectivas unidades del*

*sistema CGS, ahora podemos calcular el cociente k ya que* −16 = − *k* 4*, luego* *k* = 4*. La ecuaci´on*

*m*

*m*

*m*

*diferencial original se transforma en d*2*x* = −4*x. Para resolver esta ecuaci´on de segundo orden la*

*dt*2

*transformamos en una de primer orden, mediante el siguiente cambio de variable, como v*(*t*) = *dx,*

*dt*

*de modo que*

*d*2*x dv dv dx dv*

*dt* = *dt* = *dx* · *dt* = *v* · *dt .*

*Luego la ecuaci´on diferencial de segundo orden se convierte en:*

*dv*

*v* · *dx* = −4*x.*

*La cual es una ecuaci´on diferencial de variables separables, su soluci´on est´a dada por*

*Entonces:*

*v*

−6

∫

*v*2(*t*)

*v dv* = −

36

*x*

4*x dx.*

∫

4

2

2 − 2 = −2*x*

+ 32

*v*2(*t*) = 4(25 − *x*2)

√

*v*(*t*) = ±2 25 − *x*2*.*

*Como v*(*t*) = *dx, reemplazando en la u´ltima ecuaci´on tenemos una ecuacio´n de variables separables.*

*dt*

*dx* = 2 25 *x*2 (3.47)

√ −

*dt*

*dx* = −2√25 − *x*2*.* (3.48)

*dt*

*La solucio´n de la ecuacio´n diferencial (3.47) es*

∫

*x dx*

√25 − *x* =

4

*t*

2*dt* (3.49)

∫

0

*x* 4

arcsin 5 − arcsin 5 = 2*t.* (3.50)

*Definimos u* = arcsin 2 *, luego* sin *u* = 4 *, y,* cos *u* = 3 *, luego la ecuaci´on (3.50) se transforma en*

5

*Aplicando la funci´on seno tenemos:*

5

*x*

arcsin

5

5

= 2*t* + *u.*

*x*(*t*) = 5 sin(*u* + 2*t*)

= 5 cos 2*t* sin *u* + sin 2*t* cos *u.*

*Luego*

*x* = 4 cos 2*t* + 3 sin 2*t*

*v* = −8 sin 2*t* + 6 cos 2*t.*

*Podemos definir el signo, tanto para x como para v, usando la condici´on dada de que v*(0) = −6*, lo cual implica que:*

*x*(*t*) = 4 cos 2*t* − 3 sin 2*t v*(*t*) = −8 sin 2*t* − 6 cos 2*t*

*a*(*t*) = −16 cos 2*t* + 12 sin 2*t.*

*Para calcular la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento recurrimos a la f´ormula x*(*t*) = 5 sin(*u* − 2*t*)*. Luego v*(*t*) = −10 cos(*u* − 2*t*) *y a*(*t*) = −20 sin(*u* − 2*t*)*. Es fa´cil ver que la amplitud es 5, el periodo es π y la frecuencia es , cada uno con sus respectivas unidades. La velocidad m´axima es de 10 cent´ımetros por segundo y la aceleraci´on m´axima es de 20 cent´ımetros por segundo cuadrado.*

*π*

1

**Ejemplo 3.4.4.** *Para movimientos de gran rapidez en el aire, como el que realiza un paracaidista, que est´a cayendo antes de que se abra el paraca´ıdas la resistencia del aire es cercano a una potencia de la velocidad instant´anea v*(*t*)*. Determinar una ecuaci´on diferencial para la velocidad v*(*t*) *de un cuerpo de masa m que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instant´anea (ver Figura 3.14).*



Figura 3.14: El paracaidista.

**Soluci´on:** *En la din´amica del movimiento actu´an dos fuerzas f*1 *el peso y f*2 *la resistencia del aire. A partir de las leyes de la f´ısica se establece que la fuerza total es*

Σ

*f* = *f*1 + *f*2*.*

*El peso actu´a sobre el cuerpo hacia abajo (direcci´on positiva). La resistencia* (*kv*2) *con k >* 0 *actu´a para impedir el movimiento, va hacia arriba (direcci´on negativa).*

Σ *f* = *mg* − *kv*2*.*

*Utilizando la segunda ley de Newton*

*Igualando las sumatorias de fuerzas donde*

Σ *f* = *ma. mg* − *kv*2 = *ma,*

*dv*

*a* = *. dt*

*Sustituyendo en la ecuaci´on anterior se obtiene*

*mg mg kv*2 = *mdv .*

— −

*dt*

**Ejemplo 3.4.5.** *Un paracaidista cuya masa es de 75kg se deja caer desde un helic´optero, que est´a a 4000 m de altura. La fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instant´anea de ca´ıda, siendo k* = 15*kg/s la constante de cuando el paraca´ıdas est´a cerrado y k* = 105 *kg/s cuando est´a abierto. Si el paraca´ıdas se abre un minuto despu´es de saltar. Calcular la velocidad v*(*t*) *y la correspondiente posici´on s*(*t*) *en cada instante. ¿Cu´anto tarda en llegar a la superficie?*

**Soluci´on:** *Podemos observar que tenemos dos situaciones diferentes una* (*P*1) *antes de abrir el paraca´ıdas y otra* (*P*2) *despu´es de abrir el paraca´ıdas, al cabo de 60 s. Esto da lugar a dos problemas de valor inicial diferentes:*

d*v*

*m* d*t* = *mg* − 15*v , v*(0) = 0 (3.51)

d*v*

*m* d*t* = *mg* − 105*v , v*(60) = *v*1*.* (3.52)

*El PVI (3.51) corresponde a P*1 *y el PVI (3.52) corresponde a P*2*. La soluci´on del problema P*1*, que es v´alida para* 0 ≤ *t* ≤ 60*, viene dada por:*

*mg*

15 −

15

*m*

5

*v*(*t*) =

*mge* −15*t* = 5*g*(1 − *e* −*t* )*.*

*Haciendo uso de esta expresi´on, obtenemos que v*(60) ≈ 49*m/s* = *v*1*. Podemos ahora resolver el problema P*2*, obteniendo que*

*v*(*t*) = 5*g* (1 + 6*e*84− 7*t* )*,*

5

7

∫

*para t >* 60*. Si calculamos el desplazamiento s*(*t*) = *v*(*t*)*dt, tenemos que, para* 0 ≤ *t* ≤ 60*, y teniendo en cuenta que s*(0) = 0 *(se mide a partir de la posici´on del helic´optero), se obtiene que*

*s*(*t*) = 5*g*(*t* + 5*e* −*t* − 5)*,*

5

*para* 0 ≤ *t* ≤ 60*. Cuando t* = 60*, al abrir el paraca´ıdas, se tiene que el espacio recorrido es*

*s*(*t*) = 5*g*(55 + 5*e*−12) ≈ 2695*m. Para t >* 60 *la soluci´on es s*(*t*) = 5*g* (*t* − 5 6*e*84− 7*t* ) + 2305*. Por*

5

7 7

*u´ltimo, cuando llega al suelo debe ser s*(*t*) = 4000*. Por tanto, resolvemos la ecuaci´on en t,*

5*g t* − 56*e*84− 7*t* + 2305 = 4000

5

7 7

*t* − 56*e*84− 7*t* = 242*,*

5

7

*y cuando t >* 60 *se verifica que t* − 5 6*e*84− 7*t* ≈ *t, luego el paracaidista tarda en llegar a la superficie*

5

7

*t* ≈ 242 *s*

**Ejemplo 3.4.6.** *Un cuerpo de 8 lb de peso cae partiendo del reposo desde una gran altura. Conforme cae, actu´a sobre ´el la resistencia del aire a la que supondremos (en libras) num´ericamente igual a* 2*v, siendo v la velocidad (en pies por segundo). Hallar la velocidad y la distancia recorrida al cabo de t segundos.*

**Soluci´on** *Elegimos el eje x positivo como vertical y hacia abajo, a lo largo de la trayectoria del cuerpo B, el origen en el punto en que el cuerpo inicia su ca´ıda. Las fuerzas que actu´an sobre el cuerpo son:*

1. *F*1*, su peso,* 8*lb, actuando hacia abajo y, por tanto positiva.*
2. *F*2*, la resistencia del aire num´ericamente igual a* 2*v, actuando hacia arriba y por lo tanto negativa y con valor de* −2*v.*

*La segunda ley de Newton F* = *ma se transforma en m* = d*v*

d*t*

= *F* 1 + *F* 2*. Tomando g* = 32 *y*

*utilizando m* = *w* = 8*,* 32 = 1 *, y puesto que el cuerpo se encontraba inicialmente en reposo se*

*g*

4

*obtiene*

1 d*v*

4 d*t* = 8 − 2*v* (3.53)

*v*(0) = 0*.* (3.54)

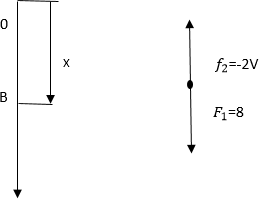


Figura 3.15: Geometr´ıa.

*La ecuaci´on (3.53) es separable. Separando variable tenemos*

*Integrando hallamos que*

*dv*

8 − 2*v*

1

= 4*dt.*

*Que se reduce a*

− 2 *ln* [8 − 2*v*♩ = 4*t* + *c*0*.*

8 − 2*v* = *c*1*e*−8*t.*

*Aplicando la condici´on de (3.54) encontramos que c*1 = 8 *por lo que la velocidad en el instante t*

*viene dada por*

*v* = 4(1 − *e*−8*t*)*.* (3.55)

*Para determinar ahora la distancia recorrida hasta el instante t escribimos la ecuaci´on (3.55) en la forma*

d*x* = *v* = 4(1 *e*−8*t*) d*t*

−

*Observe que x*(0) = 0*. Integrando la ecuaci´on anterior tenemos*

1 −8*t*

*x* = 4

*t* + *e*

8

+ *c*2

*Puesto que x* = 0 *cuando t* = 0 *encontramos que c*2 = 1

2

*por lo que en definitiva, la distancia*

*recorrida viene dada por*

1 −8*t* 1

Interpretaci´on de Resultados*: La ecuaci´on (3.54) demuestra que cuando t* → ∞*, la velocidad v se aproxima a la velocidad l´ımite* 4(*pies/s*)*. Observamos tambi´en que esta velocidad l´ımite se alcanza aproximadamente en un tiempo muy corto. La ecuaci´on (3.56) demuestra que cuando t* → ∞*, x* → ∞*. ¿Implica esto que el cuerpo penetrar´a en la tierra y continuar´a eternamente? Por supuesto que no, ya que cuando el cuerpo alcance la superficie de la tierra detendra´ su movimiento. ¿C´omo reconciliar este final evidente del movimiento con lo que enuncia la ecuaci´on (3.56)? Es bien sencillo, cuando el cuerpo alcanza la superficie terrestre la ecuacio´n diferencial (3.53) y, por lo tanto, la ecuaci´on (3.56), dejan de ser aplicables.*

*x* = 4

*t* + *e*

8

— 2

*.* (3.56)

**Ejemplo 3.4.7.** *Una persona P, a partir del origen, se mueve en direcci´on del eje x positivo tirando un peso a lo largo de la curva C, llamada ‘tractriz”, como se muestra en la Figura 3.16. El peso, se encuentra inicialmente ubicado en el eje y en* (0*, s*)*, se aleja mediante una cuerda de longitud constante s, que se mantiene tensa durante el movimiento. Determine una ecuaci´on diferencial para definir la trayectoria del movimiento. Asumir que la cuerda siempre es y tangente a C.*

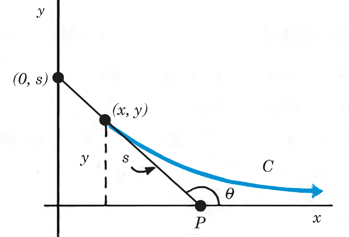


Figura 3.16: Gr´afica del problema.

**Soluci´on:** *De acuerdo con la gr´afica tenemos que:*

tan(*π θ*) = tan *π* − tan *θ* = tan *θ.*

— −

1 + tan *π* tan *θ*

*Tambi´en se tiene que:*

*y*

tan(*π* − *θ*) = √*s*2 − *y*2 *.*

*Pero, tanθ* = d*y , puesto que* tan *θ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto*

d*x*

*P* (*X, Y* )*, reemplazando obtenemos finalmente:*

d*y* −*y*

### Soluciones qu´ımicas

tan *θ* = d*x* = √*s*2 − *y*2 *.*

**Ejemplo 3.4.8.** *A un tanque que contiene 400 litros de agua fresca, se le incorpora salmuera que*

*contiene* 1

8

*de kilogramo por litro de sal a raz´on de 8 litros por minuto y la mezcla se mantiene uniforme*

*por agitacio´n, abandona el tanque por un orifico a raz´on de 4 litros por minuto. Encontrar:*

1. *La cantidad de sal presente en el tanque cuando este contenga 500 litros de salmuera.*
2. *La concentraci´on de sal en el tanque al final de una hora.*



Figura 3.17: Gr´afica alusi´on al planteamiento.

**Soluci´on:** *Sea y* = *f* (*t*) *la cantidad de sal existente en el tanque en un tiempo t, luego la rapidez de cambio de la cantidad de sal con respecto al tiempo depende de la sal que entra menos la cantidad de*

*sal que sale. Como entran 8 litros por minuto y cada litro contiene* 1

8

*de kilogramo de sal, entonces*

*la sal que entra en el tanque en 1 minuto es 1 kilogramo; como entran 12 litros de salmuera por minuto y de la mezcla salen 8 litros por minuto, luego el nu´mero de litros del tanque aumenta 4 litros por minuto de manera que en un tiempo t el volumen de salmuera en el tanque es de* 400 + 4*t, la cual contiene y kilogramos de sal por litro, y de esta mezcla salen 8 litros por minuto. Luego*

400+4*t y*

*en cada minuto la cantidad de sal que sale del tanque es* ( 400+4*t* )8 *kilogramos. Entonces el fen´omeno*

*est´a definido por la ecuaci´on diferencial*

*luego*

*y*j = 1 2*y ,*

100 + *t*

−

*y*j = 1 2*y , f* (0) = 0*.*

−

100 + *t*

*La cual es una ecuaci´on homog´enea lineal de primer orden y su soluci´on est´a dada*

*donde,*

*f* (*t*) = *f* (0)*e*

∫ *T* 2*dx*

−*A*(*t*)

−*A*(*t*) *T*

0

∫

+ *e*

*Q*(*x*)*e*

*A*(*x*)

*dx,*

100 + *t*

*Luego,*

*A*(*t*) =

0

100 + *x* = 2 ln(100 + *t*) − ln 100 = 2 ln

*.*

100

*f* (*t*) = *exp*

− ln

100 + *t* 2

100

*t*

*. exp*

∫

0

*ln*

100 + *x* 2

*dx*

100

100 2 ∫ *t* 100 + *x* 2

*dx*

100 + *t* 0

=

100

1 2 ∫ *t*

=

(100 + *x*)2*dx*

100 + *t*

1 2

=

100 + *t*

0

104*t* + 102*t*2 + *t .*

3

3

*Deseamos hallar la cantidad de sal existente cuando el tanque contenga 500 litros, como el volumen del tanque est´a dado por* 400 + 4*t, para un tiempo t, luego los 500 litros se tendr´an para t* = 25 *minutos, ahora f* (25) = 65 *. Para hallar la concentraci´on de sal al cabo de una hora, hallamos el*

3

*valor del cociente f*(60) =  45 = 0*,* 072 *kilogramos de sal por litro.*

*v*(60) 625

**Ejemplo 3.4.9.** *Suponga que en principio un gran dep´osito de mezclado contiene 300 galones de agua en la que se han disuelto 50 libras de sal. Otra soluci´on de salmuera se bombea hacia el dep´osito a raz´on de 3 galones por minuto, y cuando la soluci´on est´a bien agitada, se bombea hacia afuera s´olo 2 galones por minuto. Si la concentraci´on de la soluci´on entrante es 2 libras por gal´on, determine una ecuaci´on diferencial para la cantidad de sal A*(*t*) *que se encuentra en el tanque en el instante t.*

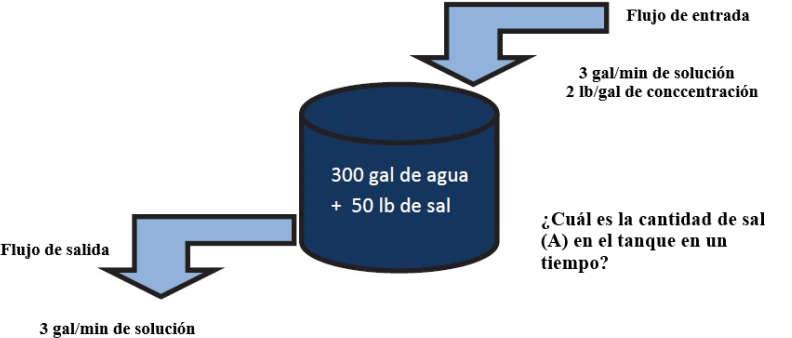


Figura 3.18: Gr´afica del problema.

**Soluci´on:** *Sabemos que la cantidad de sal* (*A*) *que se encuentra en el tanque en un tiempo t, est´a dado por la cantidad de sal que entra al recipiente y la cantidad de sal que sale de este; matem´aticamente esto es expresado como*

d*A*

d*t* = *Rentrada* − *Rsalida,*

*donde la cantidad de sal que entra* (*Rentrada*) *est´a dada por*

*Rentrada* = 3

*gal*

*lib*

∗ 2

*min*

*gal*

*lib*

= 6 *,*

*min*

*donde el primer t´ermino de esta expresi´on es la velocidad de entrada de la soluci´on, y el segundo es la concentraci´on de este flujo. Y la cantidad de sal que sale es*

*R* = *A lib* (2 *gal* ) = 2*A lib .*

*salida*

300 + *t gal*

*min*

300 + *t min*

*En esta expresi´on el primer t´ermino es la concentraci´on de sal en el flujo de salida, la concentraci´on de esta, est´a dada por la cantidad de soluto (sal) sobre la cantidad de solvente (agua), y est´a u´ltima var´ıa con el tiempo porque el flujo de salida es menor que el de entrada. Retomando tenemos que*

d*A*

= *Rentrada* − *Rsalida*

d*t*

*lb* 2*A lb*

= 6 *min* − 300 + *t min.*

*Para resolver esta ecuaci´on diferencial, entonces tenemos que:*

d*A* 2*A*

d*t* = 6 − 300 + *t.*

*Llevando la ecuaci´on a la forma est´andar se obtiene*

*entonces,*

d*A* 2*A*

+

d*t* 300 + *t*

2

= 6*,*

*Factor Integrante*

*P* (*x*) =

300 + *t*

*,f*(*x*) = 6*.*

*e*, *P* (*x*)*dx* = *e*, 2 *dt* = *e*2*ln*|300+*t*| = (300 + *t*)2*.*

200+*t*

*Extrapolando con la soluci´on est´andar encontramos que*

*A*(*t*) = *c* + 1 ∫ 6(300 + *t*)2*dt*

(300 + *t*)2

*c*

= (300 + *t*)2 +

(300 + *t*)2

2(300 + *t*)3

(300 + *t*)2 *.*

*Simplificando*

*c*

*A*(*t*) = (300 + *t*)2 + 2(300 + *t*)*.*

### Modelamiento matem´atico de procesos industriales

Para investigar como var´ıa el comportamiento de un proceso qu´ımico ante cambios en los disturbios externos y las variables manipuladas y estar en la capacidad de disen˜ar el controlador apropiado, puede usarse dos enfoques:

1. Enfoque experimental: este enfoque se aplica cuando el equipo f´ısico del proceso industrial est´a dispo- nible. El m´etodo consiste en cambiar deliberadamente las variables de entrada del proceso (disturbios externos y variables manipuladas) y medir cuidadosamente las variables de salida (temperatura, pre- si´on, flujo, etc.) para observar como var´ıan estas con el tiempo.
2. Enfoque te´orico: se aplica generalmente cuando se requiere disen˜ar un controlador para un proceso industrial cuya planta au´n no ha sido construida. La representaci´on del proceso se hace mediante ecua- ciones matem´aticas (algebraicas y o diferenciales), cuya soluci´on permite conocer el comportamiento din´amico del proceso.

###### Necesidad del modelamiento matem´atico para el control de procesos:

Para disen˜ar un sistema de control es necesario conocer la dina´mica de la planta ante cambios en

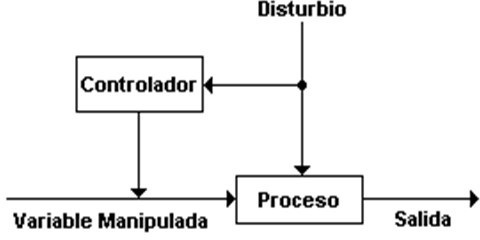
las variables de entrada y perturbaciones externas. Si la planta no esta´ construida entonces para

conocer su din´amica es necesario tener el modelo matem´atico de la planta y en el caso de que la planta f´ısica exista la aplicaci´on del m´etodo experimental es muy costosa por lo que tambi´en es u´til tener el modelo matem´atico de la planta.

Generalmente lo que el disen˜ador necesita es una descripci´on sencilla de c´omo reacciona el proceso ante cambios en la variable de entrada y esto es lo que el modelo matem´atico provee al disen˜ador del sistema de control.

**Ejemplo 3.4.10.** *Disen˜o de un controlador de acci´on pre-calculada para un proceso.*

*Con el objetivo de mantener la salida en un nivel deseado, es necesario cambiar el valor de la variable manipulada de tal forma que elimine el impacto que el disturbio podr´ıa ocasionar en la salida. ¿En qu´e cantidad habr´a que variar la variable manipulada para eliminar el efecto del disturbio?*



Disturbio

Controlador

Variable Manipulada

Proceso

Salida

Figura 3.19: Configuraci´on de un control de Acci´on Precalculada.

*Salida = f*1 *(disturbio)*

*Salida = f*2 *(variable manipulada).*

*Las relaciones matem´aticas f*1 *y f*2 *, son previstas por el modelo matem´atico del proceso. Si queremos que la salida permanezca sin variaci´on, la variable manipulada debe cumplir la siguiente relacio´n*

*f*1(*disturbio*) − *f*2(*variable manipulada*) = 0*.* (3.57)

*Aqu´ı puede verse la importancia del modelo matem´atico en el disen˜o de sistemas de control de acci´on pre- calculada (feedforward). Por otro lado tan importante como tener el modelo matem´atico es que el modelo sea preciso, pues de lo contrario ser´a imposible obtener disen˜os eficientes de los sistemas de control de acci´on pre-calculada.*

*Variables y ecuaciones de estado de un proceso.*

*Con el objetivo de caracterizar un proceso (tanque de calor, reactor, columna de destilacio´n etc.) se requiere lo siguiente:*

1. *Un conjunto de variables, las cuales describen el estado natural del sistema.*
2. *Un conjunto de ecuaciones que relacionen las variables mencionadas y que describan como el estado natural del sistema cambia con el tiempo.*

*Las ecuaciones que relacionan las variables de estado (variables dependientes) a las variables independien- tes, se derivan aplicando el principio de conservaci´on y se denominan ecuaciones de estado. El principio de conservacio´n de una cantidad de estado S, establece que:*

*Acumulado de S en el sistema*

=

*Periodo de Tiempo*

*Flujo de S que entra al sistema Periodo de tiempo*

*Flujo de S que sale del sistema*

— *Periodo de tiempo*

*Cantidad de S generada por el sistema*

+

*Periodo de tiempo*

*Cantidad de S consumida por el sistema*

−

*.*

*Periodo de tiempo*

*La cantidad S puede ser cualquiera de las siguientes cantidades fundamentales: Masa total.*

*Masa de los componentes individuales.*

*Energ´ıa total.*

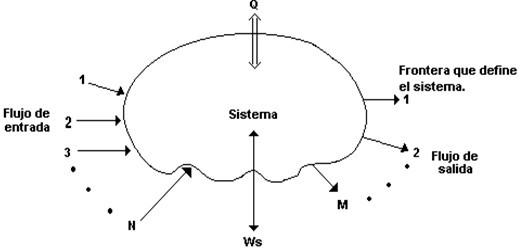


Figura 3.20: Un sistema general y su interacci´on con el externo.

*Las ecuaciones son:*

*Balance total de masa*

d*t*

*i*

*i*

*j*

*j*

d(*pV* ) = Σ *p F*

*i*=*ent*

— Σ *p F .* (3.58)

*j*=*ent*

*Balance de masa en el componente A:*

d(*nA*) d*t*

= d(*cAV* )

= Σ *cAiFi* − Σ

d*t*

*j*=*ent*

*i*=*ent*

*cAjFj* ± *rV.* (3.59)

*Balance total de energ´ıa*

d*E d*(*U* + *K* + *P* )

=

d*t dt*

= Σ *PiFihi* − Σ

*j*=*ent*

*i*=*ent*

*PjFjhj* ± *Q* ± *Ws.* (3.60)

*Por convenci´on se toma como positiva la cantidad si fluye entrando al sistema y negativa si sale del sistema. Las ecuaciones de estado con las variables de estado asociadas, constituyen el modelo matem´atico del proceso, el cual representa el comportamiento est´atico o dinamico del proceso.*

**Ejemplo 3.4.11** (Ecuaciones y variables de estado para el tanque con calentador y agitador)**.** *Consi- deremos un tanque con calentador y agitador, las cantidades fundamentales dadas como datos son*

* 1. *La masa total del l´ıquido en el tanque.*
  2. *La energ´ıa total del material en el tanque.*

*Las variables de estado para el tanque calentador son*

*La masa total en el tanque:*

*Masa total* = *pV* = *pAh,* (3.61)

*donde ρ es la densidad del l´ıquido, V el volumen del l´ıquido, A la secci´on horizontal del ´area del tanque, y h la altura del nivel del l´ıquido.*

*La energ´ıa total del tanque es:*

*E* = *U* + *K* + *P.* (3.62)

*Como el tanque no se mueve, la energ´ıa cin´etica K y la potencial p permanecen constantes, entonces, derivando la ecuaci´on encontramos*

*Para el sistema del l´ıquido*

d*E* d*U*

=

d*t* d*t*

d*U* d*H*

*.* (3.63)

d*t* ≈

*,* (3.64)

d*t*

*donde H es la entalp´ıa total del l´ıquido del tanque. Adema´s,*

*H* = *pV cp*(*T* − *Tref* ) = *pAhcp*(*T* − *Tref* )*,* (3.65)

*donde cρ es el calor espec´ıfico del l´ıquido del tanque, Tref es la temperatura de referencia, donde la entalp´ıa espec´ıfica del l´ıquido se asume cero. Las variables de estado: h y T, y los par´ametros constantes: p, A, cp, Tref .*

*Balance total de masa*

[*masa total acumulada*]

=

*tiempo*

d(*pAh*)

[*masa total de entrada*]

+

*tiempo*

[*masa total de salida*] *tiempo*

d*t* = *pFe* − *pF,* (3.66)

*donde Fe y F son la tasa de flujo que ingresa y sale del tanque. Asumiendo la densidad constante, la ecuacio´n se transforma en*

*Balance total de energ´ıa*

*[acumulaci´on de energ´ıa total]*

*tiempo*

d*h*

*A* d*t* = *Fe* − *F.* (3.67)

*[energ´ıa total de entrada]*

=

*tiempo*

[*energ´ıa total de salida]*

— *tiempo*

[*energ´ıa dada por el calor]*

+

*tiempo*

*d* [*pAhcp*(*T* − *Tref* )] *dt*

= *pFecp*(*Te*

— *Tref*

) − *pFcp*(*T* − *T*

*ref*

)+ *Q,*

*donde Q es la cantidad de calor suministrada por el vapor por unidad de tiempo. La ecuaci´on se*

*simplifica, si asumimos que Tref* = 0 *y la agrupaci´on convenientemente, a la forma*

d*T Q*

*Ah* d*t* = *Fe*(*Te* − *T* )+ *pc*

*p*

*.* (3.68)

*Las variables de las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse as´ı:*

*Variables de estado: h, T.*

*Variables de salida: h, T.*

*Perturbaciones: Te, Fe.*

*Variables manipuladas: Q y F (para el control por retroalimentaci´on), Fe (para el control por acci´on precalculada).*

*Par´ametros: A, p, cp, Tref .*

*Consideraciones en el modelamiento para procesos de control:*

*El modelo entrada - salida:*

*El modelo deber´ıa tener la siguiente forma general:*

*Salida* = *f* (*variables de entrada*)*.*

### Grados de libertad

Usando la Figura 3.21, la relaci´on se expresar´ıa:

*yi* = *f* (*m*1*, m*2*, ..., mk, d*1*, d*2*, ..., dn*)*,* (3.69)

donde *i* = 1*,* 2*, ..., m*. Cada modelo que describe directamente la relaci´on entre las variables de entrada y salida de un proceso, se llama modelo entrada-salida.

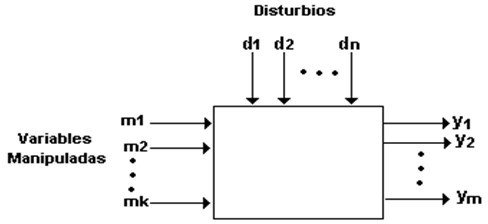


Figura 3.21: Un proceso y sus variables de entrada y salida.

Se denomina grados de libertad de un proceso, a las variables independientes que deben ser especifi- cadas para poder definir un proceso en forma completa. Por lo tanto, los interrogantes sobre el control de un proceso, pueden darse por aclarados si y s´olo si todos los grados de libertad del proceso hayan sido especificados.

**Ejemplo 3.4.12** (Grados de libertad del tanque con calentador y agitador)**.** *El modelo matem´atico del tanque con calentador y agitador, tal como se dedujo en el ejemplo 2, est´a dado por:*

*dh*

*A dt* = *Fe* − *F* (3.70)

d*T Q*

*A* d*t* = *Fe* − (*Te* − *T* )+ *pc*

*p*

*.* (3.71)

**Soluci´on** *¿Las ecuaciones tienen soluci´on? Si, la soluci´on es posible, ¿cu´antas soluciones existen? Estas preguntas se responden analizando el nu´mero de ecuaciones y de variables.*

*Nu´mero de ecuaciones = 2,*

*Nu´mero de variables = 6; h,T,Fe,F,Te y Q.*

*Se ha asumido que A, p, y,Cp son par´ametros que permanecen constantes. Evidentemente: el nu´mero de variables es mayor que nu´mero de ecuaciones. Las variables que pueden especificarse arbitraria- mente son los grados de libertad y el nu´mero viene dado por la siguiente relacio´n*

*f* = (*nu´mero de variables*) − (*nu´mero de ecuaciones*)*.* (3.72)

*Para especificar completamente un proceso el nu´mero de grados de libertad debe ser igual a cero.*

**Nota 3.4.1** (Grados de libertad y el control de proceso)**.** *Un proceso industrial cuidadosamente modelado tendr´a, en general uno o m´as grados de libertad. Por lo tanto desde que f >* 0 *el proceso tendr´a un infinito nu´mero de soluciones y nace la pregunta:*

*¿Qu´e se debe hacer para reducir el nu´mero de grados de libertad a cero, tal que se logre tener un sistema completamente especificado con comportamiento u´nico?*

*Existen dos fuentes que nos proveen de ecuaciones adicionales* 1) *el mundo exterior al sistema y* 2)

*al sistema de control.*

#### Circuitos el´ectricos

Los circuitos el´ectricos est´an descritos en su comportamiento por la Ley de Kirchhoff, en realidad, la teor´ıa el´ectrica est´a regida por un conjunto de ecuaciones conocidas en la teor´ıa electromagn´etica como ecuaciones de Maxwell, que se salen de nuestro alcance, y para nuestro estudio es suficiente por ahora la Ley de Kirchhoff, la cual describe una ecuaci´on diferencial lineal de primer orden. Estudiaremos circuitos el´ectricos en serie tan elementales como los que se muestran en la Figura 3.22. Los elementos del circuito



Figura 3.22: Circuito.

son:

La fuerza electromotriz que produce un voltaje, *E*, el cual “origina” una corriente el´ectrica que recorre el circuito.

La resistencia que utiliza dicha energ´ıa, *R*.

La inductancia, que se opone a la variaci´on de la intensidad de corriente, *L*.

El condensador, *C*, que es un elemento que almacena energ´ıa.

Para el circuito de la izquierda, Figura 3.22, su modelo matem´atico es

*di*

*L* + *RI* = *E.* (3.73)

*dt*

Para el circuito de la derecha en la Figura 3.22 su modelo matem´atico es

*dQ Q R* +

*dt C*

= *E.* (3.74)

**Ejemplo 3.4.13.** *Un generador cuya fem es 100 voltios, se conecta en serie con una resistencia de 10 ohmios y una inducci´on de 2 henrios. Si el interruptor se cierra cuando t=0. Hallar la intensidad de la corriente en funci´on del tiempo.*

**Soluci´on:** *El esquema gra´fico del circuito est´a dado por la gr´afica del lado derecho de la Figura 3.22, la ecuaci´on diferencial que modela la din´amica es*

*luego*

d*I*

2 + 10*I* = 100*,*

d*t*

d*I*

+ 5*I* = 50*.* (3.75)

d*t*

*La solucio´n de (3.75) es*

*donde,*

*I*(*t*)= *I*(0)*e*

−*A*(*t*)

∫ *t*

−*A*(*t*) *t*

0

∫

+ *e*

50*e*

*A*(*x*)

*dx,*

*Luego,*

*A*(*t*)=

5*dx* = 5*t, I*(0)= 0*.*

0

*I*(*t*) = 50*e*

*Su gr´afica se muestra en la Figura 3.23.*

−5*t t*

0

∫

*e*5*x*

*dx* = 10(1 − *e*

−5*t*)*.*

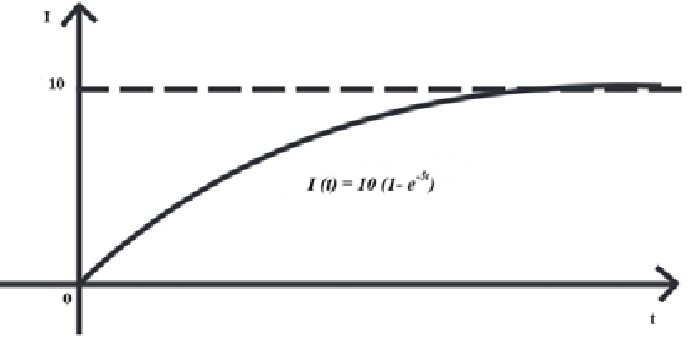


Figura 3.23: Gr´afica circuito.

**Ejemplo 3.4.14.** *Una fem decreciente, E* = 200*e*−5*t , se conecta en serie con una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0.01 faradios. Supongamos que la carga es cero en un tiempo cero; hallar la carga y la intensidad en cualquier tiempo t, hallar la carga m´axima y el tiempo necesario para alcanzarla.*

**Soluci´on:** *Su esquema gr´afico est´a dado por la gr´afica de la derecha en la Figura 3.22, y su ecuaci´on diferencial es*

*luego*

*Su soluci´on es:*

20 d*Q* + 100*Q* = 200*e*−5*t,*

d*t*

d*Q* + 5*Q* = 10*e*−5*t.*

d*t*

*donde*

*Q*(*t*) = *Q*(0)*e*

−*A*(*t*)

+ *eA*(*t*)*.*

*t*

10*e*

∫

0

−5*x*

*eA*(*x*)

*dx,*

*A*(*t*) =

*t*

5*dx* = 5*t*

∫

0

= 10*te*−5*t*

*Q*(0) = 0*.*

*La intensidad de la corriente en un instante cualquiera es:*

*I*(*t*) = *dQ* = 10*e*−5*t* 50*te*−5*t. dt*

−

*Para determinar el m´aximo de carga, hacemos dQ* = 0*. Es decir,* 10*e*−5*t* − 50*te*−5*t* = 0*, de la cual*

*dt*

*deducimos que t* = 1 *segundos, y el valor de la carga m´axima es Q* 1 = 10 *e*−1 = 0*,*74 *coulombs.*

5 5 5

**Ejemplo 3.4.15.** *En la Figura 3.24 se muestra un marcapasos de coraz´on, que consiste en un inte- rruptor, una bater´ıa, un capacitor y el coraz´on como un resistor. Cuando el interruptor S est´a en P, el capacitor se carga; cuando S est´a en Q el capacitor se descarga, enviando est´ımulos el´ectricos al coraz´on. Durante el tiempo que se est´an aplicando est´ımulos el´ectricos al coraz´on, el voltaje E que atraviesa el coraz´on satisface la ecuacio´n diferencial lineal.*

d*E* 1

d*t* = − *RC E.* (3.76)

1. *Suponga que el intervalo de tiempo de duraci´on* 0 *< t < t*1*. El interruptor S, est´a en la posici´on P como se muestra en la Figura 3.24 y el capacitor se est´a cargando. Cuando el interruptor se mueve a la posici´on Q al tiempo t*1 *el capacitor se descarga, enviando un impulso al coraz´on durante el intervalo de tiempo de duraci´on t*2 *con t*1 ≤ *t < t*1 + *t*2*. Por lo que el intervalo inicial de descarga es* 0 *< t < t*1 + *t*2*. El voltaje en el coraz´on se modela realmente por la ecuaci´on diferencial definida por tramos*

≤=

*dE* 0*,* 0 *t < t*1

1

*dt* − *RC E, t*1 ≤ *t < t*1 + *t*2*.*

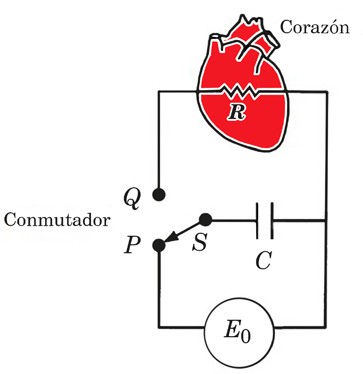
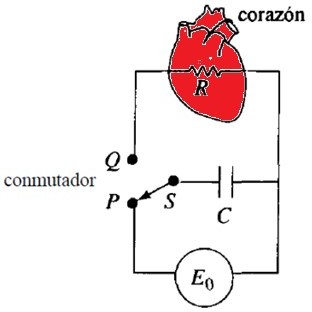


Figura 3.24: Circuito 2.

*Al moverse S entre P y Q, los intervalos de carga y descarga de duraciones t*1 *y t*2*, se repiten inde- finidamente. Suponga que t*1 = 4*s, t*2 = 2*s, E*0 = 12*V , E*(0) = 0*,E*(4) = 12*, E*(6) = 0*, E*(10) = 12*, E*(12) = 0*, etc. Determine E*(*t*) *para* 0 ≤ *t* ≤ 24*.*

1. *Suponga para ilustrar que R* = *C* = 1*. Utilice un programa de graficaci´on para trazar la gra´fica de la soluci´on del PVI del inicio a) para* 0 ≤ *t* ≤ 24*.*

**Soluci´on parte a)** *Para* 0 ≤ *t <* 4*,* 60 ≤ *t <* 10*,* 12 ≤ *t <* 16 *y* 18 ≤ *t <* 22*, el voltaje no est´a siendo aplicado en el coraz´on y E*(*t*) = 0*. Para los otros tiempos* 4 ≤ *t <* 6*,* 10 ≤ *t <* 12*,* 16 ≤ *t <* 18 *y* 22 ≤ *t <* 24 *la ecuacio´n diferencial est´a dada por*

*dE* 1

*dt* = − *RC E.* (3.77)

*Por medio de separaci´on de variables tenemos:*

d*E* = 1 *dt*

∫

∫ −

*E RC*

1

ln |*E*| = − *RC t* + *K*

*e*ln|*E*| = *e* − 1 *t*+ln *K*

*RC*

*t*

−

*E*(*t*) = *Ke RC .*

**Soluci´on parte b)** *Se deja como ejercicio para el lector.*

#### Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en los modelos econo´micos

Macro Modelo de Domar

En este modelo se consideran las siguientes variables: *S*(*t*) es el ahorro, *l*(*t*) es la inversi´on, y (*t*) la renta, todas las funciones del tiempo. *S*(*t*) = *ay*(*t*), *I*(*I*) = *β dy* , *S*(*l*) = *L*(*t*), *α >* 0, *β >* 0. Hallar la soluci´on particular *yp*(*L*), *Lp*(*t*) y *Sp*(*t*) si *y* = *y*0 cuando *t* = 0. Realizar un gr´afico.

*dt*

Modelos de Deuda de Domar

*D* es una deuda nacional y *yp*(*t*) la renta nacional

*dD*

= *αy*(*t*) *, D*(0) = *D*0

*dt*

*dy*

= *β , y*(0) = *y*0

*dt*

*α >* 0 *, β >* 0

Analizar la relaci´on entre la deuda nacional y la renta nacional en *t* → ∞. Un segundo modelo de deuda de Domar

*D* es la deuda nacional y *y*(*t*) la renta nacional.

*dy*

= *βy*(*t*) *, y*(0) = *y*0

*dt*

*D*(0) = *D*0 *, α >* 0*,β >* 0*.*

Analizar la relaci´on entre la deuda nacional y la renta nacional en cuanto *t* → ∞.

Modelo de ajuste del precio de Evans

*d*(*t*) = *α*0 + *α*1*p*(*t*) *Demanda s*(*t*) = *β*0 + *β*1*p*(*t*) *Oferta*

d*p*

−

= *γ*(*d s*)

d*t*

*α*0 *>* 0*, α*1 *>* 0*, β*1 *>* 0*,γ >* 0*.*

Hallar *p*(*t*) si *p*(0) = *P*0. Tenga en cuenta que *pt*

= *α*1 − *β*0

*β*1 − *α*1

es el precio de equilibrio.

Modelo de Demanda y Oferta

La demanda y la oferta (por unidad de tiempo) de un art´ıculo est´an dadas respectivamente por *x*

y *y*, siendo *p* el precio unitario:

*x* = *ap* + *b y* = *cp* + *d.*

Sup´ongase que el precio cambia de tal manera que el exceso de la demanda sobre la oferta decrece a una tasa proporcional a dicho exceso. Encuentre *p*(*t*) si *p*(0) = *P*0. Demostrar que el precio unitario

tiende al valor de equilibrio dado por *pe*

= *b* − *d* .

*β* − *a*

**Ejemplo 3.4.16.** *La relaci´on entre el costo de manufactura por art´ıculo, C, y el nu´mero de clases de art´ıculos fabricados, x, es tal que la tasa de incremento del costo de manufactura, a medida que aumenta el nu´mero de clases, es igual a la raz´on del costo por art´ıculo m´as el nu´mero de clases, dividido todo entre el nu´mero de clases de art´ıculos que se manufacturan. Obtener la relaci´on entre el costo de fabricaci´on por art´ıculo y el nu´mero de clases de productos fabricados si C* = *C*0 *cuando x* = 1

**Soluci´on** *La ecuaci´on diferencial que modela el problema es dC* = *C*+*x que se puede reescribir en la forma*

*x* + 1*, y as´ı, f* (*u*) = *u* + 1*. Aplicando la f´ormula, tenemos:* ln *kx* =

(*u*+1)−*u* =

*du* = *u* = *x.*

*dC C*

*dx* =

*dx x*

∫ *du* ∫ *c*

*Luego la soluci´on general es C*(*x*) = *x* ln *kx siendo k la constante de integraci´on. Como C* = *c*0

*Cuando x* = 1 *entonces, al reemplazar en la soluci´on general tenemos*

*C*0 = (*i*)*lnk*(*I*)*.*

*De donde se obtiene para K* = *eC*0 *. Reemplazando este valor de k en la soluci´on general, tenemos la soluci´on particular, C*(*x*) = *xlneC*0 *x* = *x*(*c*0 − ln *x*) = *x*(*C*0 + *lnx*)*.*

**Ejemplo 3.4.17.** *El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece durante el periodo de 10 an˜os a un ritmo que depende de la antigu¨edad de la maquinaria, cuando la maquinara tiene t an˜os, el ritmo al que cambia su valor es* 220(*t* − 10) *d´olares por an˜o. Exprese el valor de la maquinaria como una funci´on de su antigu¨edad y del valor inicial. Si la maquinaria val´ıa originalmente US*  *12.000 =¿Cu´anto valdr´a cuando tenga 10 an˜os?*

**Soluci´on:** *Sea v*(*T* ) *el valor de la maquinaria al cabo de t an˜os, entonces la ecuaci´on diferencial que modela el problema es,*

d*V*

d*t* = 220(*t* − 10)*.*

∫

*De donde se obtiene v*(*t*) = 220(*t* − 10)*dt* = 110*t*2 − 2200*t* + *C. Como v*(0) = 12*,*000 *entonces*

*v*(*t*) = 110*t*2 − 2200*t* + 12000 *y el valor de la maquinaria despu´es de 10 an˜os es.*

*v*(10) = 110(10)2 − 2200(10) + 12*,*000 − 1*,*000*.*

*US*$1*,*000 *Despu´es de 4 an˜os. ¿Cu´anto valdr´a la maquinar´ıa cuando tenga 8 an˜os? Para cierto bien las ecuaciones de oferta y de demanda son las siguientes*

*D* : *p* + 2*xp* = 25

*S* : *p* + 2*xs* = 5*.*

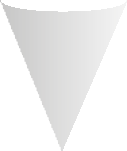
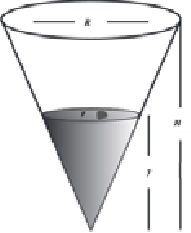
*Supongamos que si el mercado no est´a en equilibrio* (*xp* + *xs*)*, entonces el precio cambia en raz´on proporcional al exceso de demanda sobre la oferta* d*p* = *k*(*xp* − *xs*)*. Sustituya xp y xs, y resuelva la ecuaci´on diferencial resultante para p*(*t*)*. Pruebe que no importa cu´al sea el precio inicial, el mercado se aproxima eventualmente al equilibrio en p* = 17*.*

d*t*

*Suponga que la tasa de crecimiento proporcional y*j(*t*)*, y*(*t*) *de la poblaci´on de la tierra es una constante. La poblaci´on en 1930 era de 2 mil millones de habitantes y en 1975 fue de 4 mil millones. Considerando a 1930 como t* = 0*, determine la poblaci´on y*(*t*) *de la tierra en el instante t. De acuerdo con este modelo, ¿Cu´al debio´ ser la poblaci´on en 1960?*

*El ritmo al que se propaga una epidemia en una comunidad, es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que ha sido infectada y al nu´mero de residentes propensos a la enfermedad que no ha sido infectado. Exprese el nu´mero de residentes que ha sido infectado como una funci´on del tiempo.*

### Aplicaciones a volu´menes



*R*

*r*

*H*

*y*

Supongamos que el recipiente es el de la Figura 3.25, donde *A*(*y*) es el ´area de la secci´on recta del dep´osito a una altura *y* y *B* es el ´area del orificio con bordes perfectamente pulimentados.

Figura 3.25: Volumen 2.

Si no existiera rozamiento no hay p´erdida de energ´ıa potencial, toda se convertir´ıa en energ´ıa cin´etica la cual ser´ıa la u´nica que aparecer´ıa en este fen´omeno f´ısico. Luego

*mgy* =

1 *mv*2*,* 2

1

donde *y* es la altura de ca´ıda, luego la velocidad de salida ser´ıa de (2*gy*) 2 metros por segundo. Como el

1

´area de orificio es *B* entonces el producto *B*(2*gy*) 2 representa el nu´mero de metros cu´bicos por segundo

de l´ıquido que sale por el orificio. Sea *c* el coeficiente de rozamiento, es decir, el chorro no es completo por

1

el orifico, luego la velocidad de descarga es *cB*(2*gy*) 2 metros cu´bicos por segundo. Sea *V* (*y*) el volumen

del l´ıquido que est´a en el dep´osito a una altura y entonces:

Luego

*y*

*V* (*y*) =

∫

0

d*v*

d*v*

*A*(*u*)*du, y,*

d*y*

1

= *A*(*y*)*.*

d*t* = −*cB*(2*gy*) 2 *.*

Este resultado es negativo porque el volumen decrece con el tiempo. Usando la regla de la cadena tenemos:

*dv dv dy*

= *.*

*dt dy dt*

*dv*

= *A*(*y*) *,*

*dt*

entonces combinando la dos u´ltimas ecuaciones tenemos la ecuaci´on que describe nuestro suceso

d*y* 1

*A*(*y*) d*t* = −*cB*(2*gy*) 2 *.*

La cual es una ecuaci´on de variables separables de primer orden.

**Ejemplo 3.4.18.** *Un embudo tiene la forma de un cono circular recto, cuyo v´ertice est´a hacia abajo y est´a lleno de agua. Si la mitad del volumen se desocupa en un tiempo T, encontrar el tiempo requerido para vaciarse completamente.*

**Soluci´on:** *El gra´fico del recipiente y sus elementos son: H la altura del cono, R el radio mayor, r el radio de la secci´on recta A (y) a una altura y del v´ertice, como la altura depende del tiempo, sea y* = *f* (*t*) *la funci´on que determina la altura del l´ıquido en el recipiente, de acuerdo a la condici´on dada que la mitad del volumen sale en un tiempo T, podemos hallar la altura del l´ıquido que queda*

*en funci´on de H. Tenemos que V*

= *πR*2*H , y,* 1 *V* = *πR*2*H . De acuerdo a la semejanza de*

*total* 3 2 *total* 6

*tri´angulos, tenemos que:* *r*

= *h . Luego, r*2*h* = *h*3 *como la raz´on entre los dos volu´menes es de*

*1:2, entonces*

*R H R*2*H H*3

1 *h*3

*Luego*

*de donde*

*Como*

2 = *H*3 *.*

*H*3 = 2*h*3*,*

*H f* (*T* ) = *h* = √2 *.*

*A*(*y*) = *πr*2 =

d*y*

*πR*2*y*2 *H*2 *.*

1

*Luego la ecuaci´on diferencial A*(*y*) = d*t* = −*CB*(2*gy*) 2 *se transforma en*

*πR*2*y*2*dy* 1

*cuya solucio´n viene dada por*

*H*2*dt* = −*cB*(2*gy*) 2 *,*

*Luego,*

*πR*2 *H*2√2*g*

*y*

3

∫

−

*y* 2 *dy* =

*H*

*t*

*cBdt.*

∫

0

2*πR*2 5 5

5*H*2√2*g*

*Para y* = 0 *tenemos el tiempo total, entonces*

*y* 2 − *H* 2

= −*cBt.*

2*πR*2*H* 5

2

5*H*2√2*g* = *cBt total.*

*Luego,*

*ttotal* =

2*πR*2√*H*

5*cB*√2*g .*

*El cual aparece en funci´on de H, R, c y B, y lo importante es dejarlo en funci´on u´nicamente de T, pero la condici´on dada de que f* (*T* ) = √*H , luego podemos reemplazar esta condici´on en la soluci´on*

3 2

*a la ecuaci´on diferencial y tenemos*

2*πR*2*H* 1 1

2

5*cB*√2*g*

√6 32 − 1

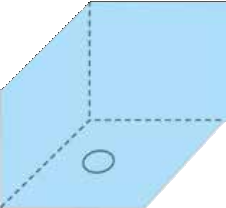
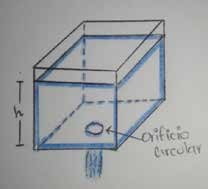
= −*cBT*

2*πR*2√*H* √6 32

*Luego,*

5*cB*√2*g* = *T* √6 32 − 1 *.*

*ttotal* = 2*,* 28*T.*



*h*

*Oricio Circular*

Figura 3.26: Tanque con agujero circular.

**Ejemplo 3.4.19.** *Suponga que est´a saliendo agua de un tanque a trav´es de un agujero circular de*

*´area A*0 *que est´a en el fondo. Cuando el agua sale a trav´es del agujero, la fricci´on y la contracci´o*√*n de*

*la corriente cerca del agujero reducen el volumen de agua que sale del tanque por segundo a cA*0 2*gh*

*donde c donde* 0 *< c <* 1 *es una constante emp´ırica. Determine una ecuaci´on diferencial para la altura h del agua al tiempo t para el tanque cu´bico, que se muestra en la figura. El radio del agujero es de 2 pulg g* = 32 *pies , el ´area del ´agujero es Ah* = *π*(2*pulg*)2*, el ´area de la base es Aw* = 100*, c es la constante que*

*s*2 √

*depende de las propiedades f´ısicas del l´ıquido. Partimos de: dv* = −*Ah* 2*gh . En primer lugar, podemos*

*dt*

*obtener el volumen del tanque v* = 100*h. Como la altura y el volumen var´ıan con respecto al tiempo,*

*tenemos*

*dv dh dh* 1 *dv*

*Pero*

*dt* = 100 *dt* ⇔

= *.*

*dt* 100 *dt*

*dt*

*dv* = *cAh*√2*gh* ⇔ *dv* = *cπ*(2)2√2 ∗ 32 ∗ *h.*

*dv*

= *cπ*

*dt*

*dt*

1 2

√

64*h*

6

*dv* = *cπ* 1 8√*h*

*dt* 36

*dv* 2 √

*Sustituyendo dv*

*dt*

*dh se obtiene*

*en*

*dt*

= *cπ h.*

*dt* 9

= *cπ*√*h*

*dh* 1 2

*dt* 100 9

*dh cπ*√*h*

= *.*

*dt* 450

*Pero como el nivel del agua est´a disminuyendo concluimos*

*dh*

*dt* = −

*cπ*√*h*

*.*

450

### Trayectorias ortogonales

Sup´ongase que se tiene una sola familia infinita de curvas. Consid´erese una segunda familia compuesta de todas las curvas que intersectan a todas las curvas de la familia dada en ´angulos rectos. Cuando dos familias est´an relacionadas en la forma que se ha descrito, se dice que las curvas de una familia son las trayectorias ortogonales de la otra. Si se diferencia la ecuaci´on de la familia de curvas dadas y se elimina

el par´ametro, se obtiene la ecuaci´on diferencial de la familia dada, una ecuaci´on que da la pendiente d*y* de cualquiera de las curvas, en funci´on de las coordenadas *x*, *y* de un punto de la curva. Ahora bien, la pendiente de la trayectoria ortogonal en el punto (*x, y*) debe ser la rec´ıproca negativa de la pendiente de la curva dada, con objeto que se cumpla la condici´on de perpendicularidad. La ecuaci´on diferencial de las trayectorias ortogonales se obtiene entonces escribiendo *dy* , e igualando a la rec´ıproca negativa del valor

d*x*

*dx*

que tiene en la ecuaci´on diferencial de la familia dada.

**Ejemplo 3.4.20.** *Hallar las trayectorias ortogonales de las hip´erbolas xy* = *c.*

**Soluci´on:** *la familia dada es la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial dy* = − *y , luego la ecuaci´on*

*dx*

*x*

*diferencial de las trayectorias ortogonales es: dy* = *x , la cual es una ecuaci´on de variables separables,*

*dx y*

*cuya soluci´on es y*2 = *x*2 + *c, donde c es una constante.*

## Curvas determinadas de propiedades geom´etricas

A menudo se tiene una familia de curvas caracterizada por una propiedad geom´etrica indicada en funci´on de las coordenadas de un punto en una de las curvas y de la primera derivada de una de las coordenadas con respecto a la otra. Tal enunciado ser´a una ecuaci´on diferencial de primer orden cuya soluci´on general representa la familia de curvas, cada una de las cuales posee la propiedad dada. Si se da una condici´on adicional, tal como que la curva contiene un punto fijo dado, se puede usar dicha condici´on para determinar la constante en la soluci´on general.

**Ejemplo 3.5.1.** *Hallar la familia de curvas de tal manera que la proyecci´on de la normal al eje x tiene una longitud k.*

**Soluci´on:** *En la Figura 3.27 se observa la curva, su tangente y su normal en un punto P* (*x, y*)*, luego para nuestro caso tenemos que DB mide k, luego y* tan *u* = *y dy . Para P en cualquiera de los cuatro*

*dx*

*dx*

*cuadrantes dy/dx ya sea obtuso o agudo, la longitud de DB es siempre y dy*

*dx*

*, o,* −*y dy . Luego la*

*ecuaci´on diferencial para la familia pedida es*

*dy*

±*ydx* = *k.*

*La cual es una ecuaci´on de variables separables cuya soluci´on es*

*y*2 = ±2*kx* + *c,*

*donde c es una constante.*

## T´ecnica moderna avanzada para la cuantificaci´on del riesgo de terrorismo: ecuaciones Lanchester modificadas

En el art´ıculo llamado Lanchester resurgent? The mathematics of terrorism, escrito por Michael Powers (2008), se hace un an´alisis de la aplicabilidad de las ecuaciones de Lanchester de combate militar en el modelaje de los riesgos financieros asociados con los ataques terroristas contempor´aneos. El ensayo inicia describiendo el modelo original de Lanchester y su espacio de aplicaci´on. Las ecuaciones de combate militar tradicionales Lanchester datan de la primera guerra mundial (1916), y se escriben a continuaci´on (Powers, 2008, p. 227).

= *k Aα*1 *Dδ*1 (3.78)

*dA*

— 1

*dt*

*dD*

= *k Aα*2 *Dδ*2 *,*

— 2

*dt*

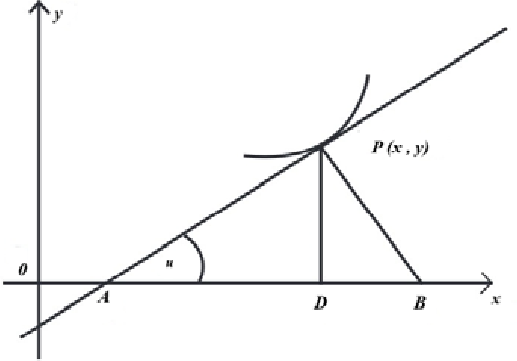


Figura 3.27: Gr´afica del problema.

donde *A* = *A*(*t*) y *D* = *D*(*t*) denota, respectivamente, los taman˜os de las fuerzas de los atacantes y de los defensores en el tiempo *t* ≥ 0 ; *k*1, *k*2 son par´ametros positivos reales denotando, respectivamente, las tasas de destrucci´on efectivas de los defensores y los atacantes; y *α*1, *α*2 y *δ*1, *δ*2 son par´ametros reales reflejando la naturaleza fundamental del combate bajo an´alisis. En su formulaci´on original, Lanchester (1916) considera dos casos considerados: uno para guerra “antigua”, en el cual *α*1 = 1; *δ*1 = 1; *α*1 = 1; *α*2 = 1, y uno para la guerra “moderna” en el cual, *α*1 = 0; *δ*1 = 0; *α*1 = 0; *α*2 = 0. La deducci´on para el modelo original surge del combate mano a mano, en el que el nu´mero potencial de micro-enfrentamientos es dado por el producto de las fuerzas de los dos ej´ercitos, as´ı que la tasa de atrici´on de cada uno de los ej´ercitos en cualquier momento t es proporcional a su producto. Resolviendo los sistemas de ecuaciones diferenciales bajo este supuesto da la siguiente condici´on (Powers, 2008, p. 227)

*k*2 *>* [*<*] *D*(0) *,* (3.79)

*k*1 *A*(0)

para que los atacantes (defensores) puedan ganar. El u´ltimo modelo trata de reflejar un tipo de combate en el cual los dos ej´ercitos se disparan uno a otro de cierta distancia, con lo que la tasa de atrici´on de cada uno de los ej´ercitos en un momento determinado t es proporcional al taman˜o de las fuerzas del ej´ercito oponente. Bajo este supuesto, el sistema de ecuaciones diferenciales obtiene la siguiente condici´on (Powers, 2008, p. 227)

*k*2

*>* [*<*]

*k*1

*D*(0) 2

*A*(0)

*,* (3.80)

para que los atacantes (defensores) puedan ganar. La principal conclusi´on obtenida del an´alisis original es que la proporci´on de las fuerzas de los ej´ercitos oponentes iniciales (i.e. *D*(0) = *A*(0)) juega un papel m´as importante en el combate “moderno”, al evaluar el cuadrado en la condici´on (3.80), que en combate “antiguo”, en comparaci´on a la primera (3.79) elevado solo a la primera potencia. A pesar de su aplica- bilidad exitosa, las ecuaciones de Lanchester han presentado ciertas debilidades que les han hecho perder terreno frente a t´ecnicas como la simulaci´on y t´ecnicas de juegos de rol. Esas debilidades se expresan a continuaci´on:

El supuesto de las fuerzas homog´eneas (es decir; tanto *A*(*t*) y *D*(*t*) cambian continuamente a trav´es del tiempo, as´ı la p´erdida de un tanque no se diferencia de la p´erdida de un soldado).

La formulaci´on meramente determin´ıstica (es decir; el ej´ercito con fuerzas mayores asegura la vic- toria).

La presencia de componentes dif´ıciles de cuantificar (especialmente terreno, clima y moral).

La falla de reconocer ciertas asimetr´ıas entre ej´ercitos (es decir; espec´ıficamente las diferencias en objetivos, informaci´on y armamento).

### Combate de terrorismo

¿Por qu´e intentar un enfoque de Lanchester hacia el terrorismo cuando la naturaleza del conflicto no necesariamente debe ser determin´ıstico, donde los terrenos inexplorados juegan un papel vital, y cuando las asimetr´ıas de los objetivos, informaci´on y armamento son tan extremos? La respuesta es simple. La ventaja principal del enfoque de Lanchester es el tratamiento anal´ıtico. Por lo tanto, asumiendo que la motivaci´on de nuestra discusi´on es calcular la probabilidad condicional de la destrucci´on de un objetivo, dado el objetivo seleccionado para ataque; esto representa una oportunidad de intentar sobreponerse a las debilidades expuestas anteriormente. Estas debilidades pueden ser abordadas al sustituir las ecuaciones (3.78) por un sistema de ecuaciones diferenciales estoc´asticas (Powers, 2008, p. 228)

*dA* = − *k*1 *ADdt* + *σ dz*

*vq*

1

(3.81)

1

*dD* = −*k*2*Adt* + *σ*2*dz*2*,*

donde *dz*1, *dz*2, son movimientos est´andares Brownianos; *σ*1 = *δ*1 (*A, D, t*) *>* 0, *σ*2 = *δ*2 (*A, D, t*) *>* 0 son las desviaciones est´andar infinitesimales asociadas; *v* denota el volumen tridimensional del objetivo bajo ataque; y *q* denota un par´ametro potencia-transformaci´on usado para reconocer el campo apropiado

de combate (e.g. *q* = 1 si un edificio puede ser atacado a trav´es del per´ımetro del primer piso, *q* = 2

3

3

si el edificio puede ser atacado por cualquier parte de su superficie, como un avi´on lleno de kerosene, y *q* = 1 si una bomba puede ser colocada en cualquier parte del edificio). Aunque cualquier formulaci´on con valores continuos de *A* y *D*, se modelaran fuerzas homog´eneas solo de forma aproximada, el sistema de ecuaciones (3.81) posee una serie de mejoras en relaci´on al modelo de Lanchester original. Primero, este introduce una estructura estoc´astica espec´ıfica en un esquema determin´ıstico. Segundo, este captura el papel del terreno hasta cierto grado a trav´es del par´ametro *q*, y casi no es afectado por cambios en el clima y la moral debido a que los ataques terroristas son generalmente cortos en duraci´on. Tercero, ´este captura la informaci´on asim´etrica asociada con un ataque sorpresa sobre el objetivo a trav´es de las formas funcionales de los cambios infinitesimales en el lado derecho de las ecuaciones (3.81).

## Ejercicios

### Crecimiento y Decaimiento

* + - 1. Si se sabe que la poblaci´on de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento *t*. Si la poblaci´on se duplico en cinco an˜os, ¿en cu´anto tiempo se triplicar´a y cuadruplicar´a?
      2. La poblaci´on de una comunidad crece a raz´on proporcional a la poblaci´on en cualquier momento *t*. Su poblaci´on inicial es de 500 y aumenta un 15 % en 10 an˜os. ¿cu´al ser´a la poblaci´on en 30 an˜os?
      3. Cuando pasa un haz vertical de luz por una sustancia transparente, la rapidez con que decrece su intensidad *I* es proporcional a *I*(*T* ), donde *t* representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es de 25 % de la intensidad inicial *I*0 del haz incidente. ¿Cu´al es la intensidad del haz a 15 pies bajo la superficie?
      4. El Pb-209, Is´otopo radioactivo del plomo, se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier cuerpo *t* y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio hab´ıa 1 gramo de plomo, ¿Cu´anto tiempo debe transcurrir para que se desintegre un 90 %?
      5. Al inicio hab´ıa 100 miligramos de una sustancia radioactiva. Al cabo de seis horas, esa cantidad

disminuyo´ 3 %. Si la rapidez de desintegraci´on, en cualquier tiempo *t*, es proporcional a la cantidad

de la sustancia presente calcule la cantidad que queda despu´es de 24 horas.

### Fechado con carbono

* + - 1. Muchos creen que el Sudario de Tur´ın, que muestra un negativo de la imagen de un cuerpo de un hombre crucificado, es la mortaja de Jesu´s de Nazareth. En 1988, el Vaticano otorg´o autorizaci´on para que fechara el carbono del manto. Tres laboratorios cient´ıficos independientes, que analizaron la tela, llegaron a la conclusi´on que tiene unos 660 an˜os, edad que coincide con su aparici´on hist´orica. Con esa edad, determine qu´e porcentaje de la cantidad original de C-14 quedaba en la tela en 1988.

### Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

* + - 1. Un term´ometro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es 70◦*F* y se lleva al exterior, donde la temperatura es 10◦*F* . Despu´es de 1 minuto el term´ometro indica 50◦*F* . ¿Cu´al es la lectura cuando t=1 min? cu´anto tiempo se necesita para que el term´ometro llegue a 15◦*F* .

2

* + - 1. Si una barra met´alica pequen˜a, cuya temperatura inicial es de 20◦*C* se deja caer en un recipiente con agua hirviente, ¿Cu´anto tiempo tardar´a en alcanzar 90◦*C* si se sabe que su temperatura aument´o 2◦*C* en un segundo? ¿Cu´anto tiempo tardar´a en llegar a 98◦*C*.

### Mezclas

* + - 1. Un tanque contiene 200 litros de agua donde se han disuelto 30 g de sal y le entran 4 L/min de soluci´on con un 1 g de sal por litro; bien mezclado, de ´el sale l´ıquido con la misma rapidez. Calcule la cantidad *A*(*t*) de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier instante *t*.
      2. Un tanque tiene 500 galones de agua pura y le entra salmuera con 2 libras de sal por gal´on a raz´on de 5 *gal* . El tanque est´a bien mezclado, y de ´el sale la soluci´on con la misma rapidez. Determine la cantidad *A*(*t*) de libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante *t* ¿Cu´al es la concentraci´on de la soluci´on en el tanque cuando *t* = 5 min?

*min*

* + - 1. Un tanque est´a parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 lb de sal disuelta. Le entra salmuera con 1 lb de sal por gal´on a raz´on de 6 *gal* . El contenido del tanque est´a bien mezclado y

2 *min*

de ´el sale a raz´on de 4 gal/min de soluci´on. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque

a los 30 minutos.

### Ejercicios Generales

* + - 1. Una piedra que pesa 4 lbs cae hacia la superficie terrestre partiendo del reposo desde una gran altura. Conforme cae, el aire ejerce sobre ella una resistencia que es num´ericamente igual a 1 *v* (en

2

libras), donde *v* es la velocidad (en pies por segundo).

* + - * 1. Hallar la velocidad y distancia recorrida en *t* segundos.
        2. Hallar la velocidad y distancia recorrida al final de los 5 segundos.
      1. Desde un punto situado a 6 pies por encima de la superficie terrestre y con una velocidad inicial de 20 *pies* , se lanza verticalmente hacia arriba una bola que pesa 1 *lib*. En su ascensi´on encuentra una

*seg* 2

resistencia por parte del aire que es num´ericamente igual  1 *v* (en libras), donde *v* es la velocidad (en pies por segundo).¿Cu´al ser´a la altura alcanzada por la bola?

64

* + - 1. Dos hombres navegan en una lancha motora, siendo 640 lb el peso combinado de los hombres, motor, lancha y equipo. El motor ejerce una fuerza constante de 20 lb sobre la lancha en el sentido del movimiento, mientras que la resistencia (en libras) es num´ericamente igual a una mitad de la velocidad (en pies por segundo). Si la lancha parti´o del reposo, hallar su velocidad al cabo de (a) 20 seg, (b) 1 minuto.
      2. Una bala de 2 onzas de peso se dispara verticalmente hacia abajo desde un helic´optero detenido en el aire con una velocidad en la boca del arma de 1200 pies/seg. La resistencia del aire (en libras) es num´ericamente igual a 10−5*v*2, donde *v* es la velocidad (en pies por segundo). Hallar la velocidad de la bala como funci´on del tiempo.
      3. Supongamos que el coeficiente de variaci´on instant´anea con que se desintegra un nu´cleo radioactivo es proporcional al nu´mero de tales nu´cleos, presentes en una muestra dada. En una cierta muestra, el 10 % del nu´mero original de nu´cleos radioactivos ha sufrido desintegraci´on en un periodo de 200 an˜os.
         1. ¿Qu´e porcentaje de los nu´cleos radioactivos originales quedar´a al cabo de 1000 an˜os?
         2. ¿En cu´antos an˜os quedar´a solamente un cuarto del nu´mero original?
         3. Realice el diagrama de fase.
      4. Una reacci´on qu´ımica convierte un cierto compuesto en otro, siendo la raz´on de conversi´on del primer compuesto proporcional a la cantidad de ´este presente en cualquier instante. Al cabo de una hora quedan 50 gr. del primer compuesto, mientras que al cabo de las tres horas s´olo quedan 25 gr.
         1. ¿Cu´antos gramos del primer compuesto exist´ıan inicialmente?
         2. ¿Cu´antos del primer compuesto quedar´an al cabo de 5 horas?
         3. ¿En cu´antas horas quedar´an s´olo 2 gramos del primer compuesto?
      5. La poblaci´on de una ciudad aumenta con un coeficiente de variaci´on que es proporcional al nu´mero de sus habitantes en cualquier instante t. Si la poblaci´on de la ciudad era 30000 en 1960 y 35000 en 1970 ¿Cu´al ser´a su poblaci´on en 1980?

**Cap´ıtulo 4**

# Ecuaciones diferenciales de orden superior

## Ecuacio´n diferencial lineal de orden n

La teor´ıa general de ecuaciones diferenciales lineales, en realidad comienza con los teoremas que hallan la soluci´on a las ecuaciones de orden n; hasta el momento u´nicamente lo hemos hecho para orden uno, para el caso de orden n la existencia y unicidad de la soluci´on es mucho m´as compleja de probar, debido a ello nos limitaremos a enunciarlo y al final en el ap´endice segundo lo demostraremos, para el lector interesado.

**Teorema 4.1.1.** *Sea L un operador diferencial lineal normal de orden n, definido en un intervalo I, y sea x*0 *un punto arbitrario de I. Si a*0*, a*1*,. .., an*−1 *son reales arbitrarios, entonces la ecuaci´on L*(*y*) = *h, con h* ∈ *C*(*I*)*, y y*(*x*0) = *a*0*, y*j(*x*0) = *a*1*,. .., yn*−1(*x*0) = *an*−1 *tiene una u´nica soluci´on.*

Luego este teorema caracteriza la existencia y unicidad de la solucio´n de una ecuaci´on diferencial lineal normal de orden n. Ahora probemos que la dimensi´on del espacio soluci´on a dicha ecuaci´on es igual al orden de la ecuaci´on.

**Teorema 4.1.2.** *Dada la ecuaci´on diferencial lineal normal homog´enea de orden n*

*an*(*x*)*y*(*n*) + *an*−1(*x*)*y*(*n*−1) + *...* + *a*0(*x*)*y* = 0*,* (4.1)

*definida en I. entonces el espacio soluci´on de esta ecuaci´on es un sub-espacio n-dimensional de Cn*(*I*)*.*

*Demostraci´on.* Para un punto fijo *x*0 de *I*, y las siguientes *n*-etuplas

(1*,* 0*,* 0*,. ..,* 0)

(0*,* 1*,* 0*,. ..,* 0)

.

(0*,* 0*,* 0*,. ..,* 1)*,*

existen *y*1(*x*), *y*2(*x*), *. . .*, *yn*(*x*) que son soluciones de la ecuaci´on (4.1) y satisfacen las condiciones dadas. Entonces

*y*1(*x*0) = 1 *y*j (*x*0) = 0 *... y*(*n*−1)(*x*0) = 0

1 1

*y*2(*x*0) = 0 *y*j (*x*0) = 1 *... y*(*n*−1)(*x*0) = 0

2 2

*. . ... .*

*. . ... .*

*. . ... .*

*y* (*x* ) = 0 *y*j (*x* ) = 0 *... y*(*n*−1)(*x* ) = 1*,*

*n* 0 *n* 0 *n* 0

122

o sea (*yi*(*x*0)*, y*j(*x*0)*,. .., y*(*n*−1)(*x*0))*,* para *i* = 1*,* 2*, ..., n* son vectores de R*n* y forman una base de ´este.

*i i*

Probemos que estas soluciones son una base para el espacio solucio´n de (4.1). Sean *a*1*, a*2*,. .., an n*-reales

tales que

*a*1*y*1(*x*) + *a*2*y*2(*x*) + *. ..* + *anyn*(*x*) = 0*,* para *x* en *I*. Luego hallando las *n* − 1 derivadas, tenemos

*a*1*y*1(*x*) + *a*2*y*2(*x*) + *...* + *anyn*(*x*) = 0

*a*1*y*1j (*x*) + *a*2*y*2j (*x*) + *...* + *anyn*j (*x*) = 0

*.*

*.*

*.*

*a y*(*n*−1)(*x*) + *a y*(*n*−1)(*x*) + *...* + *a y*(*n*−1)(*x*) = 0*.*

1 1 2 2 *n n*

Haciendo *x* = *x*0, obtenemos

*a*1*y*1(*x*0) + *a*2*y*2(*x*0) + *. ..* + *anyn*(*x*0) = 0

*a*1*y*1j (*x*0) + *a*2*y*2j (*x*0) + *. ..* + *anyn*j (*x*0) = 0

*.*

*.*

*.*

*a y*(*n*−1)(*x* ) + *a y*(*n*−1)(*x* ) + *. ..* + *a y*(*n*−1)(*x* ) = 0*.*

1 1 0 2 2 0

*n n* 0

Entonces *a*1 = *a*2 = *...* = *an* = 0 , lo cual implica que *y*1*, y*2*,. .., yn* son linealmente independientes en *C*(*I*), lo u´nico que falta para poder concluir que (*y*1(*x*)*, y*2(*x*)*,. .., yn*(*x*)) es una base del espacio soluci´on de la ecuaci´on (4.1), es que cualquier soluci´on de dicha ecuaci´on se puede expresar como combinaci´on lineal de las n-funciones dadas. Sea *y* una soluci´on arbitraria de la ecuaci´on (4.1) y supongamos que *y*(*x*0) = *c*1, *y*j(*x*0) = *c*2*,. .., y*(*n*−1)(*x*0) = *cn*. Por el Teorema 4.1.1, sabemos que esta soluci´on es u´nica. Definimos *h*(*x*) = *c*1*y*1(*x*)+ *c*2*y*2(*x*)+ *...* + *cnyn*(*x*) para *x* en *I*. Luego *h* es soluci´on de (4.1) y satisface las condiciones dadas, pero el teorema 5 asegura que dicha soluci´on es u´nica, luego *y* = *c*1*y*1 + *c*2*y*2 + *...* + *cnyn*, de donde podemos concluir que *y*1*, y*2*, ..., yn* generan el espacio soluci´on de la ecuaci´on (4.1), luego este conjunto de funciones es una base a dicho espacio generan el espacio soluci´on de la ecuaci´on (4.1), luego este conjunto de funciones es una base a dicho espacio.

Al observar la demostraci´on del Teorema 6, vemos que establece un m´etodo para comprobar la inde- pendencia lineal de funciones, el cual lo podemos caracterizar as´ı.

**Corolario 4.1.1.** *Sea y*1*, y*2*,. .., yn, n-funciones de C*(*I*)*, cada una de las cuales posee derivadas hasta del orden* (*n* 1) *inclusive en todo I, y supongamos que existe un punto x*0 *en I tal que los vecto- res y*(*x*0)*, y*j(*x*0)*,. .., y*(*n*−1)(*x*0) *, para i* = 1*,* 2*,. .., n Son linealmente independientes en Rn. Entonces y*1*, y*2*,. .., yn linealmente independientes en C*(*I*)*.*

−

#### El Wronskiano

Acabamos de mostrar cuando n-funciones son linealmente independientes en *C*(*I*), pero esto tambi´en lo podemos caracterizar a trav´es de la idea del Wronskiano de *y*1*, y*2*, ..., yn* para n-funciones de *C*(*n*−1)(*I*), el cual notaremos as´ı

*W* (*y*1(*x*)*, y*2(*x*)*, ..., yn*(*x*))*,* (4.2)

y est´a definido por el siguiente determinante

.

*y*1(*x*) *y*2(*x*) *... yn*(*x*)

*y*j (*x*) *y*j (*x*) *... y*j (*x*) .

1

2

*n*

. .

*W* (*y*1(*x*)*, y*2(*x*)*, ..., yn*(*x*)) =

.

. .

*. . ... .*

*. . ... .*

*. . ... .*

(*n*−1)

(*n*−1)

= 0*.*

.

(*n*−1)

*y*1 (*x*) *y*2 (*x*) *... yn* (*x*)

En el ap´endice uno, se demostrar´a que si *a*1*, a*2*,. .., an* son *n*-vectores linealmente independientes entonces

*a*11 *a*12 *... a*1*n a*21 *a*22 *... a*2*n*

.. ..

*. . ... .*

*D*(*a*1*, a*2*, ..., an*) =

.

.

*. . ... .*

*. . ... .*

*an*1 *an*2 *... ann*

. /=*.* 0

.

Con base en este enunciado tenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.1.3.** *Dadas las funciones y*1*, y*2*,. .., yn, n-funciones de C*(*n*−1)(*I*) *tal que W* (*y*1(*x*)*, y*2(*x*)*, ..., yn*(*x*)) /= 0 *para x en I, entonces y*1*, y*2*,. .., yn son linealmente independientes en C*(*I*)*.*

**Ejemplo 4.1.1.** *Hallemos el wronskiano de las funciones ex y e*−*x, y determinemos si las funciones son linealmente independientes.*

Soluci´on:

. .

*W ex*

*, e*−*x*

*ex e*−*x*

= *x x* = 2*,*

. .*e* −*e*

*luego ex y e*−*x son linealmente independientes en* R*.*

**Ejemplo 4.1.2.** *Dadas las funciones x*3 *y* |*x*|3*, ya que si c*1*x*3 + *c*2 |*x*|3 = 0 *para x* = 1*, y, x* = −1*, tenemos que c*1 = *c*2 = 0*. Pero*

3 3 . 3 3 .

*x x*

= 2 = 0*,*2

*si x es mayor o igual a cero. El wronskiano satisface*

*W x ,* |*x*|

.3*x* 3*x* .

3 3

= 2 = 0*,*2

. *x*3 −*x*3 .

*si x es menor de cero.*

*W x ,* |*x*|

.3*x* −3*x* .

Lo cual demuestra que el rec´ıproco al Teorema 4.1.3 es falso, o sea no podemos deducir dependencia lineal de un conjunto de funciones en *C*(*I*) del hecho de que su Wronskiano sea id´enticamente cero en *I*, pero si condicionamos estas funciones a ser soluciones de una ecuaci´on diferencial lineal normal homog´enea, podemos concluir el siguiente resultado

**Teorema 4.1.4.** *Sean y*1*, y*2*,. .., yn, n-funciones de Cn*(*I*) *que son soluciones de la ecuaci´on diferencial lineal homog´enea normal de orden n.*

*an*(*x*)*y*(*n*) + *an*−1(*x*)*y*(*n*−1) + *...* + *a*0(*x*)*y* = 0*,*

*tales que W* (*y*1(*x*)*, y*2(*x*)*, ..., yn*(*x*)) = 0 *sobre I. Entonces y*1*, y*2*,. .., yn, son linealmente dependientes en*

*Cn*(*I*)*.*

*Demostraci´on.* Sean *c*1*, c*2*,. .., cn* n inc´ognitas tales que

*c*1*y*1(*x*)+ *c*2*y*2(*x*)+ *...* + *cnyn*(*x*) = 0*,*

para *x* en *I*. Entonces

*c*1*y*1(*x*0)+ *c*2*y*2(*x*0)+ *...* + *cnyn*(*x*0)

*c*1*y*1j (*x*0)+ *c*2*y*2j (*x*0)+ *...* + *cnyn*j (*x*0)

*.*

*.*

*.*

(4.3)

*c y*(*n*−1)(*x* )+ *c y*(*n*−1)(*x* )+ *...* + *c*

*y*(*n*−1)(*x* )*,*

1 1 0 2 2 0

*n n* 0

Dado que *W* (*y*1(*x*)*, y*2(*x*)*, ..., yn*(*x*)) = 0 para *x* en *I*, entonces *y*1*, y*2*,. .., yn*, son linealmente dependientes en *Cn*(*I*)

Ahora, el determinante de (4.3) es cero y el sistema tiene una soluci´on no trivial (*c*ˆ1*, c*ˆ2*, ..., c*ˆ*n*) en base al siguiente teorema.

**Teorema 4.1.5.** *Si los vectores a*1*, ..., an son linealmente dependientes entonces D*(*a*1*, ..., an*) = 0*.*

*Demostraci´on.* Luego la funci´on *y*(*x*) = Σ*n c y*ˆ(*x*) es soluci´on de la ecuaci´on diferencial y satisface las

*i*=1

1

*i*

condiciones *y*(*x*0) = 0*, y*j(*x*0) = 0*, yn*−1(*x*0) = 0. Como la funci´on *y*(*x*) = 0 para *x* en *I* es soluci´on a la ecuaci´on con esas condiciones, entonces por el teorema de existencia y unicidad de la soluci´on la ecuaci´on

diferencial lineal normal homog´enea de orden *n*, tenemos *c*ˆ1*y*1(*x*)+ *c*ˆ2*y*2(*x*)+*...* + *c*ˆ*nyn*(*x*) = 0, para *x* en *I*. Luego *y*1*, y*2*,. .., yn*, son n-funciones linealmente dependientes ya que no todas las *ci* para *i* = 1*,* 2*,. .., n*, no son cero.

Al observar la demostraci´on vemos que solamente se hace uso del hecho de que el Wronskiano de

*y*1*, y*2*,. .., yn* se anula en un solo punto de *I*. Luego podemos deducir

**Teorema 4.1.6.** *Un conjunto de soluciones de una ecuacio´n diferencial lineal homog´enea normal de orden n es linealmente independiente en Cn*(*I*)*, y por consiguiente una base para el espacio soluci´on de la ecuacio´n, si y solo s´ı, su Wronskiano nunca se hace cero en I.*

**Ejemplo 4.1.3.** *El Wronskiano de u*1*, u*2 *es nulo para todo x en un intervalo abierto I, demostrar que*

*el cociente u*2

*u*

1

*es constante en I.*

*Para ello tomemos el cociente u*2(*x*)

*u* (*x*)

1

*y derivamos, obtenemos:*

*u*j2(*x*)*u*1(*x*) − *u*j1(*x*)*u*2(*x*) = *W* (*u*1(*x*)*, u*2(*x*)) = 0*.*

1

1

*Para todo x en I, luego u*2

*u*

1

*u*2(*x*)

*es constante en I.*

*u*2(*x*)

**Ejemplo 4.1.4.** *Sea w el Wronskiano de u*1*, u*2*, soluciones de la ecuacio´n diferencial y*jj + *ay*j + *by* = 0*, siendo a y b constantes.*

1. *Demostrar que W satisface la ecuaci´on de primer orden W* j+*aW* = 0 *y por tanto W* (*x*) = *W* (0)*e*−*αx.*
2. *Suponiendo que u*1 *no es id´enticamente nula, demostrar que W* (0) = 0 *si y solo si u*1*, u*2 *es constante.*

Soluci´on:

*1. Como W* (*u*1(*x*)*, u*2(*x*)) = .*u*1(*x*) *u*2(*x*). = *u*1(*x*)*u*j (*x*) − *u*j (*x*)*u*2(*x*)*. Luego*

.*u*j1(*x*) *u*j2(*x*)

2

1

*Entonces*

*W* j (*u*1(*x*)*, u*2(*x*)) = *u*1(*x*)*, u*j2j(*x*) − *u*2(*x*)*, u*1jj(*x*)*.*

*W* j (*u*1(*x*)*, u*2(*x*)) + *aW* (*u*1(*x*)*, u*2(*x*)) = *u*1(*x*)*, u*j2j(*x*) − *u*2(*x*)*, u*1jj(*x*)+ *au*1(*x*)*, u*j2(*x*)

−*au*2(*x*)*, u*j1(*x*)

= *u*1(*x*) *u*2jj(*x*)*au*2j (*x*) − *u*2(*x*) *u*1jj(*x*)*au*1j (*x*)

= *u*1(*x*) [−*bu*2(*x*)(*x*)] − *u*2(*x*) [−*bu*1(*x*)]

= 0*.*

*Que era lo que dese´abamos probar. Aplicando la soluci´on de la ecuaci´on diferencial lineal homog´enea de orden uno, a*

*W* j + *aW* = 0*,*

∫

*tenemos que W* (*x*)= *W* (0)*e*−*A*(*x*)*, donde A*(*x*)= *x adt* = *ax, entonces W* (*x*)= *W* (0)*e*−*a*(*x*)*.*

0

*2. Si u*1(*x*) *es diferente de cero para todo x en I, y suponemos que W* (*u*1(0)*, u*2(0)) = 0*, probemos que*

*u*2 *es constante, para ello derivemos dicho cociente, y obtenemos*

*u*

1

*d u*2(*x*) = *u*j2(*x*)*u*1(*x*) − *u*j1(*x*)*u*2(*x*)

1

*dx u*1(*x*)

*u*2(*x*)

= *W* [*u*1(*x*)*, u*2(*x*)]

*u*2(*x*)

1

*W* (0)*e*−*ax*

=

1

= 0*.*

*u*2(*x*)

*Luego el cociente u*2

*u*

2

*es una funci´on constante en I. Ahora, supongamos que u*2

2

*u*

*es constante para*

*todo elemento de I, derivando este cociente tenemos:*

*d u*2(*x*) = *u*j2(*x*)*u*1(*x*) − *u*j1(*x*)*u*2(*x*)

1

*Luego,*

*dx u*1(*x*)

*u*2(*x*)

= *W* [*u*1(*x*)*, u*2(*x*)] = 0*.*

*u*2(*x*)

1

*W* (*u*1(*x*)*, u*2(*x*)) =0= *W* (*u*1(0)*, u*2(0)) *.*

## Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Algunas ecuaciones de segundo orden se pueden resolver por procesos de integraci´on inmediata o por reducci´on de orden.

#### Ecuaciones del tipo

*d*2*y*

*dx*2 = *f* (*x*)

La soluci´on general se obtiene integrando dos veces, as´ı

∫

*dy* = *f* (*x*)*dx* + *c*

*dx* 1

*y*(*x*) = ∫ ∫ *f* (*x*)*dx* + *c*1 *dx* + *c*2*.*

**Ejemplo 4.2.1.** *Hallar la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

*d*2*y* 2

*dx*2 = 10*x .*

***Soluci´on:*** *Integrando la ecuaci´on diferencial con respecto a x dos veces obtenemos*

∫

*dy* = 15*x*2*dx* = 5*x*3 + *c dx* 1

*y*(*x*) = ∫ (5*x*3 + *c* )*dx* = 5 *x*4 + *c x* + *c*

1 4 1 2

*y*(*x*) = 5 *x*4 + *c x* + *c .*

4 1 2

**Ejemplo 4.2.2.** *Hallar la soluci´on de la siguiente ecuaci´on diferencial*

*con n* ∈ Z+*.*

*d*2*y*

*d dy* −

*d*2*y*

*dx*2 = *x*− *n*

1

*Soluci´on: Como*

*dx*2 =

(

*dx dx*

1

∫

) = *x*

*n , entonces*

*dy* = *x*− 1 *dx dx*

*x*

*x*−( *n*−1 )

*n*

= + *c*

1

− *n* + 1

*xn*−1

*n*

= *n* 1 + *c*

−

*n*

= *n xn*−1 + *c.*

*Integrado la ecuaci´on anterior se obtiene*

∫ −*y* = *x dx* + *cx* + *c*

*n*

(*n* − 1)

*n n* 1

*n*

0

(*n* − 1)

*n*

= *.*

(*n* − 1)

*xn*−1 +1

2*n* 1

*n*

*n*

−

+ *cx* + *c*0

*donde c, c*0 ∈ R*.*

*n*2

= *x*

(*n* − 1)(2*n* − 1)

2*n* 1

*n* + *cx* + *c*0*,*

−

**Ejemplo 4.2.3.** *Resolver la Ecuaci´on diferencial*

*d*2*y dx*2 =

(*xm xn*)2

√2 ; *m, n* ∈ Z *.*

−

+

***Soluci´on:*** *Sabemos que*

*dy*

=

*dx*

=

(*xm xn*)2

√*x dx*

∫ −

∫ −

*x*2*m* 2*xm*+*n* + *x*2*n*

√*x dx*

= ∫ *x*2*m*− 1 − 2*xm*+*n*− 1 + *x*2*n*− 1 *dx*

2

*x*2*m*− 1 +1

2

2

2*xm*+*n*− 1 +1

2

2

*x*2*n*−1

= 2*m* − 1 + 1 − *m* + *n* − 1 + 1 + 2*n* − 1 + *c*

2

2*m*+ 1

*x* 2

2

*m*+*n*+ 1

2*x* 2

*x*2*n*−1

= 2*m* + 1 − 2(*m* + *n*) + 1 + 2*n* − 1 + *c.* (4.4)

2

*Integrando (4.4) se obtiene*

2*m*+ 3

*m*+*n*+ 3

2*n*+ 1

2*x* 2 4*x*

2 2*x* 2

*con c, c*0 ∈ R*.*

*y*(*x*) = 4*m* + 3 − 2(*m* + *n*) + 1 +

4*n* + 1 + *cx* + *c*0*,*

**Ejemplo 4.2.4.** *Resolver la siguiente ecuaci´on diferencial*

*d*2*x* 2

*dt*2 = tan(*t*) *.*

***Soluci´on:*** *Integrando la ecuaci´on diferencial se tiene*

*dx* = ∫ (sec *t*)2 − 1 *dt* + *c*

*dt*

1

= tan *t* − *t* + *c*1*,*

*luego*

*Por lo tanto,*

*x* = ∫

tan *tdt* −

*t*2

2 + *c*1*t* + *c*2*.*

*t*2

*x*(*t*) = − ln |cos *t*|− 2 + *c*1*t* + *c*2*,*

*con c*1*, c*2 ∈ R*.*

* + 1. **Ecuaciones del tipo** *d*2*y* = *f* (*x, dy* )**.**

*dx*2 *dx*

En estas ecuaciones se utiliza el cambio de variable *z* = *dy*

*dx*

para llevarlas a una ecuaci´on diferencial

de primer orden de la forma

*dy*

= *f* (*x, z*)*.*

*dx*

**Ejemplo 4.2.5.** *Hallar la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

*d*2*y dy*

(*x* − 1) *dx*2 + *dx* = 0*.*

***Soluci´on:*** *Haciendo el cambio de variable z* = *dy*

*dx*

*se obtiene dz*

= *d*2*y , por lo que la ecuaci´on dada se*

*transforma en*

*o equivalentemente*

*dz*

*dx*

*dx*2

(*x* − 1) *dx* + *z* = 0*,*

*cuya soluci´on es*

*dz dx*

= *,*

*z x* − 1

ln *z* + ln(*x* − 1) = ln *c*1*,*

*con c*1 *constante. Aplicando las propiedades de logaritmos se obtiene*

ln(*x* − 1)*z* = ln *c*1*,*

*luego*

*en consecuencia*

(*x* − 1)*z* = *c*1*,*

*c*1

*Ahora deshacemos el cambio de variables*

*z* = *.*

*x* − 1

*dy* = *c*1 *,*

∫

*de donde se obtiene*

*dx x* − 1

*Finalmente la soluci´on general es*

*y*(*x*) = *c*1 *dx.*

*x* − 1

*y*(*x*) = *c*1 ln(*x* − 1) + *c*2*.*

*Obs´ervese que la soluci´on general tiene las dos constantes c*1 *y c*2 *ya que la ecuaci´on diferencial es de segundo orden.*

**Ejemplo 4.2.6.** *Hallar la soluci´on general y particular de la ecuaci´on diferencial.*

*d*2*y* 1 *dy*

*dx*2 − *x dx* = 0*,*

*con las condiciones iniciales y*(1) = *y*j(1) = 0*. Haciendo el cambio de variable z* = *dy , entonces dz* = *d*2*y ,*

*por lo que la ecuaci´on dada se transforma en*

*dx dx*

*dx*2

*dz* 1 *dz dx*

*Deshaciendo el cambio*

*dx* − *xz* = 0 ⇒ *z x* ⇒ ln *z* − ln *c*1*x* ⇒ *z* = *c*1*x.*

*dy*

∫

*dx* = *c*1*x* ⇒

*dy* = ∫

*c*1*xdx* ⇒ *y*(*x*) =

*c*1*x*2

2 + *c*2

*La solucio´n general es y*(*x*) = *c*1*x*2 + *c*2*, y la soluci´on particular ser´a yp*(*x*) = *x*2 + 1*.*

* + 1. **Ecuaciones de los tipos** *d*2*y* = *f* (*y*) **y** *d*2*y* = *f* (*y, dy* )

*dx*2 *dx*2 *dx*

*Para reducir el orden de estos dos tipos de ecuaciones, hay que considerar la y como la nueva variable*

*independiente, por lo que el cambio z* = *dy*

*dx*

*se completa as´ı*

*d*2*y dz dz dy dz*

*dx*2 = *dx* = *dy dx* = *zdy.*

*Al realizar el cambio de variable en estos tipos de ecuaciones, las nuevas ecuaciones diferenciales de primer orden quedan as´ı*

*dz dz*

*z* = *f* (*z*) *y z dy dy*

= *f* (*y, z*)*.*

**Ejemplo 4.2.7.** *Hallar la soluci´on general de la ecuaci´on diferencial*

*d*2*y*

*dx*2 − *y* = 0*.*

***Soluci´on:*** *Aplicando los cambios*

*dy*

*dz d*2*y*

*tenemos*

*z* = *dx y z* = *dy* = *dx*2 *,*

*dz*

*o equivalentemente*

*z* = *y, dy*

*luego*

*Deshaciendo el cambio*

*zdz* − *ydy* = 0*,*

*z*2 = *y*2 + *c*1 ⇒ *z* = √*y*2 + *c*1*.*

*dy* = √*y*2 + *c* ⇒ √ *dy* = *dx* ⇒ ∫ √ *dy* = ∫ *dx.*

1

1

*dx*

1

*y*2 + *c*

*y*2 + *c*

*La integral de la izquierda se realiza con un cambio de variable como que sigue. Sea y* = √*c*1 tan *θ, entonces*

*dy* = √*c*1 sec2 *θdθ. En consecuencia*

∫ *dy* ∫ √*c*1 sec2 *θ*

√*y*

2

+ *c*1

=

√*c*

1

*dθ*

sec *θ*

*luego luego*

= ∫ sec *θdθ*

= *ln* |sec *θ* + tan *θ*| *,*

*ln* |sec *θ* + tan *θ*| = *x* + *c*2*,*

sec *θ* + tan *θ* = *c*2*ex.*

*De acuerdo al cambio de variable en θ (ver Figura 4.1 ), se obtiene*

*c* + *y*2

√ 1

√*c*1

*y*

+ √*c*

1

= *c*2*ex*

⇒ √*c*1 + *y*2

+ *y* = *c*2*ex*

⇒ √*c*1 + *y*2

= *c*2*ex*

— *y.*

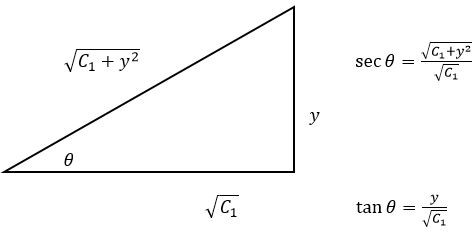


Figura 4.1: Diagarma de la integral.

*Elevando al cuadrado en ambos lados de la u´ltima ecuaci´on*

√*c*

1

+ *y*2 2 = (*c ex* − *y*)2 ⇒ *c* + *y*2 = *c e*2*x* − 2*c yex* + *y*2*,*

*entonces*

2

1

2

2

*En consecuencia Por lo tanto*

*c*1 = *c*2*e*2*x* − 2*c*2*yex.*

2*c*2*yex* = *c*2*ex* − *c*1*. c ex* − *c*

*Luego la soluci´on general es*

*y* = 2

2*c*2*ex*

1 = *c*3*ex* + *c*4*e*−*x.*

*y*(*x*) = *c*1*ex* + *c*2*e*−*x.*

**Ejemplo 4.2.8.** *Resolver*

*d*2*y*

*dx*2 − sen *y* = 0*.*

***Soluci´on:*** *La ecuaci´on anterior es equivalente a y*jj − sen *y* = 0*. Sea z* = *dy , entonces dz* = *d*2*y* = *dz . dy .*

*dx dx dx*2 *dy dx*

*Por lo tanto, d*2*y* = *z dz . As´ı zdy* − sen *y* = 0*, lo cual implica zdy* = sen *y. Por lo tanto*

*dx*2 *dy dz*

*dz*

*zdz* = sen(*y*)*dy,*

*luego*

*lo anterior implica*

*luego*

*o equivalentemente*

∫ *zdz* = ∫ sen(*y*)*dy, z*2

*z* + *c* = − cos(*y*)*,*

*z*2 = −2 cos(*y*) + 2*c, z*2 = −2 cos(*y*) + *c*1*.*

*Despejando z se obtiene*

√

*z* = −2 cos(*y*) + *c*1*,*

*es decir*

*dy* = √−2 cos(*y*) + *c .*

*dx* 1

*Resolviendo la ecuaci´on anterior se obtiene*

*dy*

*luego*

√−2 cos(*y*) + *c* = *dx,*

*x* + *c* = ∫ √ *dy .*

−2 cos(*y*) + *c*1

#### Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Estudiaremos la soluci´on a la ecuaci´on

*y*jj + *ay*j + *by* = *R*(*x*)*.* (4.5)

Donde *a* y *b* son constantes reales y *R* ∈ *C*(*I*). Si *R*(*x*) = 0 para todo *x* en *I*, la ecuaci´on (4.5) se denomina homog´enea, consideremos en principio esta ecuaci´on y hallemos su soluci´on, para ello, supongamos que *a* = 0, es decir, la ecuaci´on homog´enea se transforma en

*y*jj + *by* = 0*.* (4.6)

Consideremos tres casos

* + - 1. Sea *b* = 0, luego la ecuaci´on (2) se transforma en *y*jj = 0, luego las funciones *y* = 1, y *y* = *x* son solucio´n a la ecuaci´on diferencial dada, estas funciones son linealmente independientes porque

1 *xW* (1*, x*) = = 1*.*

.. ..

0 1

Entonces cualquier soluci´on de *y*jj = 0, viene dada por

*y* = *c*1 + *c*2*x,* donde *c*1 y *c*2 son constantes, en base al Teorema 4.1.6.

* + - 1. Sea *b* mayor que cero, entonces existe un real *k* tal que *b* = *k*2 y la ecuaci´on (4.6) se transforma en

*y*jj = −*k*2 y son soluciones a esta ecuaci´on las funciones *y* = cos(*kx*) y *y* = sen(*kx*), las cuales son linealmente independientes, lo cual se puede demostrar usando el Wronskiano de estas funciones. Entonces cualquier soluci´on a *y*jj + *by* = 0, pa√ra *b* mayor que cero est´a dada por *y* = *c*1 cos(*kx*) +

*c*2 sen(*kx*) donde *c*1 y *c*2 son constantes y *k* = *b*.

* + - 1. Sea *b* menor que cero, entonces existe un nu´mero real *k* tal que *b* = *k*2, entonces la ecuaci´on (4.6) se transforma en *y*jj = *k*2*y*, son soluci´on a esta ecuaci´on las funciones *y* = *ekx*, y, *y* = *e*−*kx*, las cuales son linealmente independientes, ya que al calcular el Wronskiano de estas funciones, obtenemos −2*k*,

−

el cual es diferente de cero, implica que cualquier soluci´on de la ecua√ci´on *y*jj + *by* = 0 para *b* menor

que cero, es *y* = *c*1*ekx* + *c*2*e*−*kx*, donde *c*1 y *c*2 son constantes y, *k* = −*b*.

**Teorema 4.2.1.** *Sean y y u funciones en C*(*I*) *tal que y* = *ue* −*ax , entonces y es solucio´n de la ecuaci´on*

2

*y*jj + *ay*j + *by* = 0 *si y solo s´ı, u satisface la ecuaci´on u*jj + 4*b*−*a*2*u* = 0*.*

4

*Demostraci´on.* Si *y* = *ue* −*ax* es soluci´on de la ecuaci´on *y*jj + *ay*j + *by* = 0, entonces la satisface. Ahora, la

2

primera y segunda derivada de *y* est´an dadas por

*y*j = *u*j*e* −*ax* − *aue* −*ax*

2 2

2

2

2

4

2

*y*jj = *u*jj*e* −*ax* − *au*j*e* −*ax*

2

2

2 − − 2

*au*j*e* −*ax* + *a ue* −*ax .*

Reemplazando *y*j y *y*jj en *y*jj + *ay*j + *by* = 0 se obtiene

2 2

*u*jj*e* −*ax* − *au*j*e* −*ax* + *a ue* −*ax* + *au*j*e* −*ax* − *a ue* −*ax* + *bue* −*ax* = 0*,*

2

o equivalentemente

2 2 2 2 2

4 2

2 2

*e* −*ax* (*u*jj − *au*j + *a u* + *au*j − *a u* + *bu*) = 0*.*

2

4 2

Como *e* −*ax* =/ 0 para todo *x* ∈ R entonces

2

jj *a*

2

−

*u u* + *bu* = 0*.*

4

*ax*

jj 4*b*−*a*2*u*

Que era lo que se deseaba demostrar. Ahora, supongamos que *u* = *ye* 2 , es soluci´on de *u* +

En efecto, al reemplazar tenemos

4 = 0.

jj j

*ax*

*ax*

*a*2 *ax*

4*b* − *a*2 *ax*

luego

*y e* 2 + *ay e* 2 +

*ye* 2 +

4

*ye* 2 = 0*,*

4

*eax y*jj

2

+ *ay*j +

*a*2 *a*2

4 *y* + *by* − 4 *y*

= 0*.*

Por lo tanto *y*jj + *ay*j + *by* = 0, de aqu´ı concluimos que *y* = *ue* −*ax* , es soluci´on de *y*jj + *ay*j + *by* = 0. Si *u* es soluci´on de *u*jj − *a*2−4*b u* = 0, como sabemos la soluci´on a esta u´ltima ecuaci´on viene dada por

2

4

*y* = *c*1*u*1(*x*) + *c*2*u*2(*x*), donde *c*1*, c*2 son constantes, y en la cual 1. *u*1(*x*) = 1*, u*2(*x*) = *x,*, si *a*2 − 4*b* = 0.

1. *u*1(*x*) = *ekx, u*2(*x*) = *e*−*kx*, si *a*2 − 4*b* = 0 es mayor que cero, y *k* = 1 √*a*2 − 4*b*.

2

1. *u*1(*x*) = cos(*kx*)*, u*2(*x*) = sen(*kx*), si *a*2 − 4*b* = 0 es menor que cero, y *k* = 1 √4*b* − *a*2.

2

Es decir, podemos caracterizar este resultado en la siguiente proposici´on.

**Teorema 4.2.2.** *La soluci´on a la ecuaci´on y*jj + *ay*j + *by* = 0*, viene dada por la expresi´on*

*ax*

*e* −

2 [*c*1(*x*)*u*1(*x*) + *c*2(*x*)*u*2(*x*)] *,*

*donde c*1 *y c*2 *son constantes, u*1 *y u*2 *son funciones que dependen del valor de a*2 4*b* = *d, que denomi- naremos el discriminante de la ecuaci´on cuadr´atica m*2 + *am* + *b* = 0*, de la siguiente forma:*

−

1. *Si d* = 0 *entonces u*1(*x*) = 1*,u*2(*x*) = *x.*
2. *Si d es mayor que cero, entonces u*1(*x*) = *eax, u*2(*x*) = *e*−*ax donde k* = 1 √*d.*

2

1. *Si d es menor que cero, entonces u*1(*x*) = *coskx, u*2(*x*) = *senkx donde k* = 1 √−*d.*

2

**Ejemplo 4.2.9.** *Hallar la soluci´on*

*y*jj − 3*y*j + 2*y* = 0*.*

***Soluci´on:*** *Le asociamos la ecuaci´on cuadra´tica m*2 − 3*m* + 2 = 0*, luego a* = −3 *y b* = 2 *entonces el discriminante es 1, el cual es mayor que cero, lo cual implica que la solucio´n a la ecuacio´n dada es*

*y* = *e* 3*x c e* 1 *x* + *c e*− 1 *x* = *c e*2*x* − *c ex,*

2

1

2

2

2

1

2

*donde c*1 *y c*2 *son constantes.*

En este momento ya estamos en capacidad de hallar la soluci´on de *y*jj + *ay*j + *by* = *R* donde *a* y *b* son constantes y, *R* ∈ *C*(*I*). Definimos el operador *L* de *Cn*(*I*) en *C*(*I*), tal que *L*(*y*) = *y*jj + *ay*j + *by*, luego *L*(*y*) = *R*, la soluci´on a esta ecuaci´on viene dada por la suma de la soluci´on general a *L*(*y*) = 0, con una soluci´on particular a *L*(*y*) = *R*. Un m´etodo para resolver la u´ltima ecuaci´on es el de “variaci´on de par´ametros”, el cual fue utilizado por Lagrange no solo para ecuaciones de orden dos sino de mayor orden. El m´etodo consiste en hallar funciones *t*1 y *t*2 tales que *t*1*v*1 + *t*2*v*2 sea soluci´on de *L*(*y*) = *R*, donde *v*1, *v*2 son soluciones linealmente independientes de *L*(*y*) = 0. Como dicha funci´on verifica la ecuaci´on *L*(*y*) = 0, entonces derivamos y reemplazamos. Sea *y* = *t*1*v*1 + *t*2*v*2, entonces

*y*j = *t*1j *v*1 + *t*1*v*1j + *t*j2*v*2 + *t*2*v*2j

*y*jj = *t*1*v*1jj + *t*2*v*2jj + (*t*j1*v*1j + *t*j2*v*2j ) + (*t*j1*v*1j + *t*j2*v*2j ) Como *L*(*y*) = *y*jj + *ay*j + *by* = *R* y *L*(*v*1) = *L*(*v*2) = 0, entonces

*L*(*y*) = (*t*j1*v*1j + *t*2j *v*2j ) + (*t*j1*v*1 + *t*2j *v*2)j + *a*(*t*j1*v*1 + *t*2j *v*2)*.*

Como deseamos hallar *t*1 y *t*2 de tal manera que *L*(*y*) = *R*, entonces podemos hacer *t*1j *v*1 + *t*j2*v*2 = 0 y

*t*j1*v*1j + *t*j2*v*2j = *R* que son dos ecuaciones lineales con las inc´ognitas *t*j1 y *t*j2. Luego

Entonces

*t*j1

*t*j2

= −*v*2*R W* [*v*1*, v*2]

*v*1*R*

= *.*

*W* [*v*1*, v*2]

*t* (*x*) = ∫ −*v*2*R*(*x*) *dx*

1

*W* [*v*1(*x*)*, v*2(*x*)]

*t* (*x*) = ∫ *v*1*R*(*x*) *dx.*

2

*W* [*v*1(*x*)*, v*2(*x*)]

Se puede observar que *t*1 y *t*2 se expresan como integrales indefinidas, cada una de las cuales queda determinada si le sumamos una constante, es decir *t*1 + *c*1, y *t*2 + *c*2; podemos definir una funci´on *yh* = *y* + *c*1*v*1 + *c*2*v*2 y aplicamos el operador *L* a esta funci´on, tenemos *L*(*yh*) = *L*(*y*) + *L*(*c*1*v*1 + *c*2*v*2) = *L*(*y*) ya que L es un operador lineal, entonces *yh* es tambi´en soluci´on particular de la ecuaci´on diferencial no homog´enea.

**Ejemplo 4.2.10.** *Hallar la soluci´on general a*

*y*jj + *y* = sen *x.*

*para hallar la soluci´on particular a dicha ecuaci´on usando el m´etodo de variaci´on de para´metros, primero hallaremos la soluci´on de la ecuaci´on y*jj +*y* = 0*. Como el discriminante es menos cuatro, luego la soluci´on general a la ecuaci´on homog´enea es y* = *c*1 sen(2*x*) + *c*2 cos(2*x*)*.*

***Soluci´on:*** *Sea v*1(*x*) = sen 2*x y v*2(*x*) = cos 2*x, hallemos t*1 *y t*2 *de tal manera que t*1*v*1 + *t*2*v*2 *sea soluci´on de y*j + *y* = sen *x. Luego*

1 2

∫

*t* (*x*) = − ∫ cos 2*x* sen *xdx*

cos2 *x* sen *x*

−

= *dx* +

2

sen2 *x* sen *x*

*dx*

∫

2

= ∫ cos2 *x* sen *xdx* + ∫ sen *xdx*

2

cos3 *x*

= 2 −

*t* (*x*) = ∫ sen 2*x* sen *xdx*

cos *x* 2

2 2

= ∫ sen2 *x* cos *xdx*

sen3 *x*

= *dx.*

2

*Entonces la soluci´on a la ecuaci´on diferencial dada es*

sen3 *x* cos3 *x* cos *x*

*y* = *c*1 sen 2*x* + *c*2 cos 2*x* + 3 + 3 − 2 *.*

Otro m´etodo por medio del cual podemos calcular un soluci´on particular a una ecuaci´on definida por el operador *L*, en el cual *L*(*y*) = *y*jj + *ay*j + *by*, siendo *L*(*y*) = *R*, es el llamado m´etodo de coeficientes indeterminados, y como su nombre lo dice se trata de dar como soluci´on un “polinomio” en el cual calculamos los coeficientes, para que este verifique la ecuaci´on, podemos considerar tres casos.

**Caso 1:** si *R* es un polinomio de grado *n*, con *b* /= 0, podemos hallar un polinomi*y*o(*x*) = Σ*n akxk*

*k*=0

que satisface la ecuaci´on *L*(*y*) = *R*; sustituyendo en la ecuaci´on podemos hallar los coeficientes *a*0, *a*1,*. . .*,

*an*−1, *an*.

**Ejemplo 4.2.11.** *Hallar la soluci´on general a*

*y*jj − *y* = *x.*

*La soluci´on general de la ecuaci´on homog´enea asociada es y* = *c*1*ex* + *c*2*e*−*x donde c*1 *y c*2 *son constantes.*

Ahora calculamos una soluci´on particular a la ecuaci´on no homog´enea, usando el m´etodo de coefi- cientes, ya *R*(*x*) = *x* y, *b* = −1, luego *R* es un polinomio de grado 1, entonces supongamos que dicha soluci´on es *Ax* + *B*, derivando esta soluci´on y reemplazando en la original tenemos −*Ax* − *B* = *x*, de donde concluimos que *A* = −1 y, *B* = 0. Entonces la soluci´on particular es *y* = −*x*. Luego ya podemos dar la soluci´on general a la ecuaci´on *y*jj − *y* = *x* cual es

*y* = *c*1*ex* + *c*2*e*−*x* − *x.*

Si *b* = 0, la ecuaci´on *y*jj + *ay*j = *R*, no se puede satisfacer con un polinomio de grado *n*; pero si con uno de grado *n* + 1, siempre que *a* /= 0. S*a*i = *b* = 0, su soluci´on general es un polinomio de grado *n* + 2, obtenido de dos integraciones sucesivas.

**Caso 2:** *R*(*x*) = *p*(*x*)*emx*, siendo *p* un polinomio de grado *n* y *m* una constante; si hacemos el siguiente cambio de variable *y* = *u*(*x*)*emx*, la ecuaci´on diferencial *y*jj + *ay*j + *by* = *R* se transforma en *u*jj + (2*m* + *a*)*u*j + (*m*2 + *am* + *b*)*u* = *p*. La cual es una ecuaci´on del caso anterior.

**Caso 3:** si *R*(*x*) = *p*(*x*)*emxcos*(*ux*) o *R*(*x*) = *p*(*x*)*emxsen*(*ux*), siendo *p* un polinomio; *m* y *u* constantes. En ambos casos, existe siempre una soluci´on particular de la forma *y*(*x*) = *emx*[*Q*(*x*) cos(*ux*) + *H*(*x*) sen(*ux*)], donde *Q* y *H* son polinomios.

**Ejemplo 4.2.12.** *Determinemos la soluci´on de*

*y*jj + 3*y*j + 4*y* = 0*.*

*De aqu´ı a* = 3 *y b* = 4*, la ecuacio´n cuadr´atica asociada a la ecuacio´n diferencial dada es m*2 + 3*m* +4 = 0*.*

*Por consiguiente d* = √33 − 4 = √9 − 4 = √5 *>* 0*. Entonces se tiene u* (*x*) = *e* √5 *x y u* (*x*) = *e* −√5 *x. De*

*este modo la soluci´on general de la ecuaci´on dada es*

1 2 2 2

*y* = *e*− 3 *x c e* √5 *x* + *c e* √5 *x* ⇒ *y* = *c e* −3+√5 *x* + *c e* −3−√5 *x.*

2

1

2

2

2

1

2

2

2

**Ejemplo 4.2.13.** *Hallar la soluci´on de*

*d*2*y dy*

*dx*2 − 2 *dx* + 8*y* = 0*.*

*Soluci´on: Observemos que* √*d* = 4 − 4(8) = 2√−7 *lo cual implica que d* = −28 *<* 0*. Entonces la soluci´on general est´a dada por*

√

*y* = *e* 2*x c* cos √28 *x* + *c*

2

2

1

2

sin √7*x*

= *ex c*1 cos *x* + *c*

√7

2

sin √2 *x .*

Soluci´on de la Ecuaci´on Diferencial *y*jj + *ay*j + *by* = R (M´etodo De Variaci´on De Par´ametros)

7

2

**Ejemplo 4.2.14.** *Hallar la soluci´on general de*

*d*2*y dy*

*dx*2 + 2

*dx*

+ *y* = 10 (4.7)

*Soluci´on: La ecuaci´on diferencial homog´enea asociada a (4.7) es*

*d*2*y dy*

*dx*2 + 2

*dx*

+ *y* = 0*,*

*y su polinomio asociado es m*2 + 2*m* +1 = 0*. De aqu´ı d* = 4 − 4 = 0 *entonces u*1(*x*) − 1 = 0 *y u*2(*x*) = *x.*

*As´ı la soluci´on general de la homog´enea asociada es*

*y* = *e*−*x* [*c*1 + *c*2*x*] *,*

*luego*

*yh* = *c*1*e*−*x* + *c*2*xe*−*x.*

*Ahora sea yp* = *t*1*u*1 + *t*2*u*2 *una solucio´n particular de la ecuaci´on diferencial no homog´enea (4.7). Apli- cando el m´etodo de variaci´on de par´ametros se tiene*

j −*xex,*10 j *e*−*x,*10

*t*1 = *w*(*e*−*x, xe*−*x*) *t*1 = *w*(*e*−*x, xe*−*x*) *.*

*Calculemos*

.

.

−*x* −*x*

) =

*e*−*x xe*−*x*

*W* (*e , xe*

. −*e*−*x e*−*x*(1 − *x*) .

*Ahora luego*

*t*j1 =

= *e*−2*x*(1 − *x*) + *xe*−2*x*

= *e*−2*x* (1 − *x* + *x*)

= *e*−2*x.*

10*xex*

— *x*

*e*−2*x* = −10*xe ,*

*t*1 = −10 ∫ *xexdx.*

*Sea u* = *x y dv* = *exdx, entonces du* = *dx y v* = *ex, por integrando por partes se tiene*

∫ *xexdx* = *xex* − ∫ *exdx* = (*x* − 1)*ex.*

*As´ı,*

*Ahora*

*t*j1 = 10(*x* − 1)*ex.*

*lo cual implica De esta manera*

*t*j2 =

10*e*−*x*

= 10*e ,*

*x*

*e*−2*x*

*t*2 = 10*ex.*

*yp* = *e*−*x*10(*x* − 1)*ex* + 10*exxe*−*x* = 10*x* − 10 + 10*x* = 20*x* − 10*.*

*Finalmente, la soluci´on general es*

*y*(*x*) = *yh*(*x*) + *yp*(*x*) = *c*1*ex* + *c*2*xex* + 20*x* − 10*.*

## Ejercicios

#### Mixtos

*d*2*y* 2

* + - 1. *dx*2 = *th x.*

*d*2*y x*

2. *dx*2 = 3*x.e .*

1. *y*jj = √ *.*

*x*

*x*2 + 1

1. *y*jj = *ex* − *e*−*x.*

1

1. *y*jj = l´ım

*x*→0

*ax* − 1 *.*

1

*x*

*d*2*y*

1. *dx*2 =

5√*x*

√*x .*

*d*2*y ax*

7. *dx*2 = 1 + *a*2*x .*

*d*2*y* 2

8.

= tan(*x*)*.*

*dx*2

9. Las condiciones iniciales *y*(0) = *y*0 y *y*j(0) = *y*1 se aplican a la ecuaci´on diferencial

*x*2*y*jj − 2*xy*j + 2*y* = 0*.*

Para qu´e valores de *y*0 y *y*1 tiene una soluci´on el PVI.

*d*2*y*

**4.3.2. Ecuaciones del tipo**

*dy*

*d*2*y*

*dx*2 = *f*

*x,*

*dx*

1.

*dy* 2

1. *y*jj = *xy*j *.*

*dx*2 =

3*x* +

*dx*

*.*

cos(*x*2)2

1. *y*jj = *dy* +

*dx*

tan

1

*x .*

5

*d*2*y dy*

1. sen(*x*)*.* cos(*x*) *dx*2 = 1 + sen(*x*) *dx.*

*d*2*y*

1. *dx*2

= sen(6*x*)3 *dy* +

*dx*

*dy* 2

*.*

*dx*

*d*2*y*

sen(*x*)*.* cos(*x*) *dy*

6. 3 *dx*2 = √cos(*x*)2*.* sen(*x*)2 + 8*x dx.*

*d*2*y*

**4.3.3. Ecuaciones del tipo**

*dx*2 − *f* (*y*) =0 **y**

*d*2*y*

*dy*

Por medio de las sustituciones *z* = diferenciales

*dy dz*

y

*dx dy*

. Determinar la soluci´on general de las siguientes ecuaciones

*dx*2 = *f*

*y,*

*dx*

*d*2*y dy*

1. *dx*2 − 8 *dx* + 2*y* = 0*.*

*d*2*y dy*

2. *dx*2 + 3

*dx*

+ *y* = 0*.*

*d*2*y dy*

3. *dx*2 − 10 *dx* − *y* = 0*.*

*d*2*y dy*

4. 3 *dx*2 + 2 − 3*y* = 0*.*

*dx*

*d*2*y dy*

5. −8 *dx*2 + 10 *dx* − 16*y* = 0*.*

6. −3*y*jj − 2*y*j + *y* = 0*.*

*d*2*v*

1. *πdu*2 −

*dv*

2 + *eu* = 0*.*

√

*du*

*d*2*θ dθ*

1. *α dt*2 + *β dt* + *θ* = 0*.*

**Cap´ıtulo 5**

# Aplicaciones para ecuaciones diferenciales de orden superior

## 5.1. Segunda ley de Newton y la ley de la gravitacio´n universal

De acuerdo con la ley de la gravitaci´on universal de Newton, la aceleraci´on de ca´ıda libre de un cuerpo, tal como el sat´elite que se muestra en la figura, que est´a cayendo desde una gran distancia hacia la superficie no es la constante *g*. M´as bien, la aceleraci´on es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra *a* = *k/r*2 donde *k* es la constante de proporcionalidad. Utilice el hecho de que en la superficie de la tierra, *r* = *R* y *a* = *g*, para determinar *k*. Si la direcci´on positiva se considera hacia arriba, utilice la segunda ley de Newton y la ley de la gravitaci´on universal para encontrar, una ecuaci´on diferencial para la distancia *r*. Segu´n la ley de la gravitaci´on universal, la aceleraci´on de ca´ıda libre es **a**. Si *a* =*k* donde *k* es la constante de proporcionalidad y *r* = *R*. Distancia desde el centro de la tierra (en la superficie de la tierra *r* = *R* y *a* = *g*). Para la superficie de la tierra (la direcci´on vertical hacia arriba es el eje positivo y el contrario ser´ıa el negativo). Si *a* = *g*, entonces *g* = *k/r*2, en consecuencia para *r* = *R* se tiene *k* = *gR*2.

*r*2

Segu´n la segunda ley de newton *F* = *ma*. Si la fuerza neta del objeto es igual a la fuerza que ejerce el peso del objeto, entonces *ma* = −*mg* (La fuerza del peso del objeto es negativa porque el objeto va cayendo, es decir, va en direcci´on contraria a nuestro eje positivo). Dado que

*d*2*r*

−

*m* = *mg, dt*2

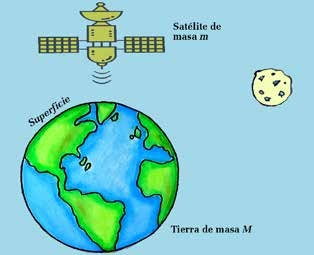


Figura 5.1: Ley de gravitaci´on universal.

140

entonces

Dado que *g* = *a*, entonces *d*2*r*

*dt*2

*d*2*r*

*dt*2 = −*g.*

= −*a*. Ahora, reemplazando *a* =*k*

*r*2

en la ecuaci´on anterior se obtiene

*d*2*r* = − *k* = − *gR*2 . La ecuaci´on diferencial para la distancia *r* es

*dt*2 *r*2 *r*2

*d*2*r dt*2 −

*gR*2

*r*2 = 0*.*

## Movimiento armo´nico simple

Consideremos una part´ıcula que se mueve sin resistencia a lo largo de una recta, que puede ser el eje *x*, bajo la acci´on de una fuerza localizada en el origen 0. Supongamos que la fuerza es proporcional al desplazamiento *x* de la part´ıcula de 0 en un tiempo *t*; suponiendo *x* positiva a la derecha y negativa a la

*dt*2

izquierda de 0. Puesto que la fuerza es proporcional a la aceleraci´on, la aceleracio´

n *d*2*x* ser´a proporcional

al desplazamiento *x*. Si la part´ıcula se encuentra a la derecha de 0, el desplazamiento es positivo y la fuerza (hacia la izquierda) y la aceleraci´on son negativas; si la part´ıcula se encuentra a la izquierda de 0, el desplazamiento es negativo y la fuerza (hacia la derecha) y la aceleraci´on son positivas; luego la aceleraci´on y el desplazamiento son opuestos, y la ecuaci´on diferencial que define el movimiento es

*d*2*x*

*dt*2 = −*kx,*

donde *k* es la constante de proporcionalidad y es positiva. Su soluci´on es

donde *c*

*x*(*t*) = *c*1 sen *dt* + *c*2 cos *dt,* (5.1)

y *c* son constantes y *d* = √*k*. Sea *A* = √*c*2 + *c*2 y cos(*u*) = *c*1 *,* sen(*u*) = *c*2 , Luego *u* = arctan *c*2 .

1

2

1

2

*A*

*A*

*c*1

Por lo tanro, la ecuaci´on (5.1) se transforma en

*x*(*t*) = *A* sen(*dt* + *u*)*.* (5.2)

*dx*

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) dan las dos formas equivalentes para *v* =

*dt*

luego

*v* = *c*1*d* cos *dt* − *c*2*d* sen *dt* = *dA* cos(*dt* + *u*)*.*

Este movimiento se denomina arm´onico simple y la part´ıcula vibra entre *A* y –*A*, la cual es la amplitud

2*π*

del movimiento. El movimiento es peri´odico, su periodo es

*d*

*d*

y, la frecuencia es .

2*π*

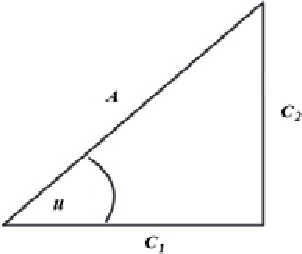


Figura 5.2: Teorema de Pit´agoras.

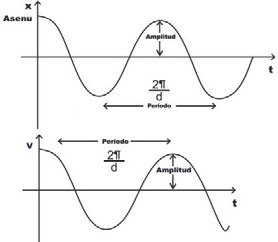


Figura 5.3: Movimiento arm´onico simple.

**Ejemplo 5.2.1.** *una part´ıcula se mueve con un movimiento arm´onico simple en una l´ınea recta. Cuando t=0, la aceleraci´on es 9 metros por segundo cuadrado, la velocidad es de 4.5 metros por segundo y el desplazamiento es de 4 metros a la izquierda del origen. Encontrar*

* + 1. *El desplazamiento cuando ha transcurrido medio periodo.*
    2. *El primer tiempo cuando el desplazamiento es cero y cuando es un metro.*
    3. *La velocidad m´axima.*

***Soluci´on:*** *la ecuaci´on diferencial es d*2*x* = −*kx. Podemos calcular el valor de k ya que d*2*x* = 9 *cuando*

*dt*2

*x* = −4 *luego* 9 = 4*k, entonces k* = 9 *. Luego la ecuaci´on diferencial se transforma en*

4

*dt*2

*d*2*x* 9*x*

*Su soluci´on es*

*dt*2 = − 4 *.* (5.3)

*Adem´as,*

*x*(*t*) = *c*1 sen *t* + *c* cos *t .*

3 3

2

2

2

*v*(*t*) = = *c* cos *t* − *c* sen *t .*

*dx* 3 3 3 3

*dt*

2

1

2

2

2

2

*Podemos hallar c*1 *y c*2*, empleando las condiciones de frontera dadas; x* = −4*, v* = 4*,* 5 *para t* = 0 *y obtenemos c*1 = 3 *y, c*2 = −4*. Luego*

*x*(*t*) = 3 sen 3 *t* − 4 cos 3 *t*

2

2

*v*(*t*) = 9 cos 3 *t* − 6 sen 3 *t .*

2

2

2

*Sean A* = 32 + (42) = 5*,* cos(*u*) = 3

√

5

*y* sen(*u*) = −4 *, entonces*

5

*x*(*t*) = 5 sen 3 *t* + *u*

2

*v*(*t*) = 15 cos 3 *t* + *u .*

2

2

*Para hallar la respuesta a la parte a) debemos hallar el periodo el cual es* 4*π , la mitad de este es* 2*π*

3 3

*sustituyendo en la ecuacio´n (5.1) tenemos x* = 3 sen 2*π* − 4 cos 2*π* = 4 *metros. Para hallar el tiempo*

3

3

*cuando x* = 0*, ´o x* = 1 *metros, empleamos la ecuaci´on (5.2), luego* 0 = 5 sen( 3 *t* − 0*,* 9273)*. Para ello*

2

*primero calculamos el valor de u, como tenemos que* sen(*u*) = − 4 *y,* cos(*u*) = 3 *entonces u pertenece al*

5

5

*cuarto cuadrante, luego u* = −0*,* 9273*, reemplazando este valor tenemos* 0 = 5*sen*( 3 *t* −0*,* 9273)*, luego* 3 *t* =

2

2

0*,* 92730*, lo cual implica que t* = 0*,* 618 *segundos. Cuando x* = 1*, tenemos que hallar el valor de t positivo*

*m´as pequen˜o que satisface* 1 = 5*sen*( 3 *t* − 0*,* 9273)*. Por lo tanto* 3 *t* − 0*,* 9273 = arc sen(0*,* 2) = 0*,* 2013*. Es*

2 2

3 15 3

*decir, que*

2 *t* = 1*,* 1286 *lo cual implica que t* = 0*,* 752*. Para la parte c) tenemos que v* =

2 cos

2 *t* + *u ,*

*luego la m´axima velocidad es* 7*,* 5 *metros por segundo.*

**Ejemplo 5.2.2.** *Un resorte fijo en su extremo superior, soporta un peso en el extremo inferior, que alarga el resorte 15 cent´ımetros.*

1. *Si el peso se baja 7,5 cent´ımetros adicionales de su punto de equilibrio y se suelta, encontrar el periodo de vibracio´n y la ecuacio´n del movimiento del peso.*
2. *Si el peso se hace descender 7,5 cent´ımetros bajo su posici´on de equilibrio y se le aplica una velocidad hacia abajo de 30 cent´ımetros por segundo, encontrar la distancia, bajo la posicio´n de equilibrio, del punto m´as bajo que alcanza el peso; la velocidad m´axima y el tiempo que se requiere para que el peso regrese a la posici´on de equilibrio por primera vez.*

***Soluci´on:*** *primero planteemos el problema, para hallar la ecuaci´on diferencial que representa el mo- vimiento vibratorio de un peso colgando del resorte, bajo la suposici´on de que no existe resistencia al movimiento. En principio tenemos un resorte colgado de su extremo superior verticalmente, Figura 5.4a. Despu´es de que se fija una masa M de peso w, a un resorte, Figura 5.4b, este se estira S unidades y cuelga en reposo en la posici´on de equilibrio. Despu´es el sistema masa-resorte se pone en movimiento, ya sea d´andole una velocidad vertical inicial o puede desplazarse el peso verticalmente de su posici´on de equilibrio y entonces soltarlo. Se toma la posici´on de equilibrio como el origen. Sea que x*(*t*) *denote la dis- tancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Suponga que la direcci´on hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectu´a en una recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa y que las u´nicas fuerzas son peso de la masa y la fuerza restauradora del resorte estirado. La cantidad de desplazamiento del peso en un tiempo t es s* + *x, independiente del hecho que el peso se encuentre arriba o abajo de la posici´on de equilibrio y la tensi´on del resorte es k*(*s* + *x*)*, Figura 5.4c. Con base en la la Ley de Hooke, la fuerza de restauraci´on de un resorte es proporcional a su elongaci´on total. Determine una ecuaci´on diferencial del desplazamiento x*(*t*) *al tiempo t. La c constante de proporcionalidad se llama constante del resorte. En la posici´on de equilibrio la tensi´on del resorte es w kilogramos, y el alargamiento es s metros;*

*luego w* = *ks, donde k es la constante del resorte, entonces k* = *W*

*s*

*kilogramos por metro.*

*El resorte hala entonces el peso hacia arriba con una fuerza* −*k*(*s* + *x*) *y la gravedad lo solicita hacia abajo con una fuerza W, luego la fuerza resultante que actu´a sobre el peso es w* − *k*(*s* + *x*) = −*kx ya que la condici´on de equilibrio es mg* = *kS. Como la fuerza que actu´a sobre un peso es proporcional a la aceleraci´on, entonces la ecuacio´n que define el movimiento es F* = *ma, luego*

Σ

*d*2*x mg* − *k*(*x* + *s*) = *mg* − *kx* − *kS* = *mg* − *kx* − *mg* = *m dt*2 *.*

*Dado que*

*o equivalentemente*

*d*2*x*

−*kx* = *m dt*2 *,*

*d*2*x kx*

*dt*2 + *m* = 0*.*

*Esta ecuaci´on diferencial representa un movimiento arm´onico simple. Luego el peso ejecuta un movimiento arm´onico simple, con respecto a su posici´on de equilibrio. De acuerdo a las condiciones del problema,*

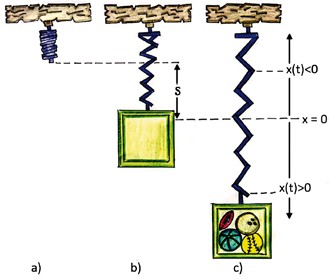
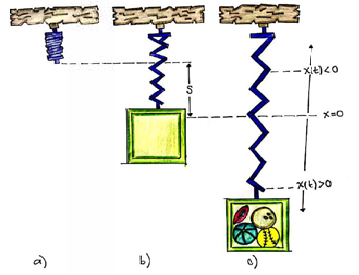


Figura 5.4: Resorte.

*tenemos que el peso W produce un alargamiento de 0,15 metros; luego W* = 0*,* 15*k entonces k* = *W*

0*,*15

*kilogramos por metro. En consecuencia, la ecuaci´on diferencial se transforma en*

*d*2*x gx*

*dt*2 + 0*,* 15 = 0*.*

*Su soluci´on es*

*y*

1

2

*x* = *c*1

sen 20*g t* + *c* 3 2

cos 20*g t* (5.4)

3

*v* = 20*g c cos* 20*g t* − *c sen* 20*g t ,* (5.5)

*donde c*1 *y c*2 *son constantes que podemos hallar con las condiciones dadas en a) y estas son x* = 0*,* 075*,*

3

3

3

*v* = 0 *para t* = 0*, sustituyendo tenemos que c*1 = 0 *y, c*2 = 0*,* 075*, luego la ecuaci´on del movimiento es*

*x* = 0*,* 075*cos* 20*g t. Su periodo es* 2*π* 3 = 0*,* 778 *segundos. Para la parte b) empleamos las condiciones*

*dadas, es decir x* = 0*,* 075*, v* = 0*,* 30 *para t* = 0 *y obtenemos que c*1 = 0*,* 3 3 *y, c*2 = 0*,* 075*. La distancia*

20*g*

2

20*g*

*bajo la posici´on de equilibrio del punto m´as bajo que alcanza el peso es la amplitud del movimiento; esto es*

1

2

10

80*g*

*c*2 + *c*2 = 3 5*g* + 12 *.*

*La velocidad m´axima es el valor de v en la ecuaci´on (5.5); es decir*

20*g* (*c*2 + *c*2) = 3 5*g* + 12 *.*

*Se obtiene cuando el peso pasa por su posici´on de equilibrio. El tiempo requerido para que el peso alcance su posici´on de equilibrio se obtiene haciendo x* = 0 *en la ecuaci´on (1), y resolviendo para el valor positivo m´as pequen˜o de t se obtiene*

3

1

2

20

3

2*,* 01√3

*t* = √20*g* = 0*,* 2505 *segundos.*

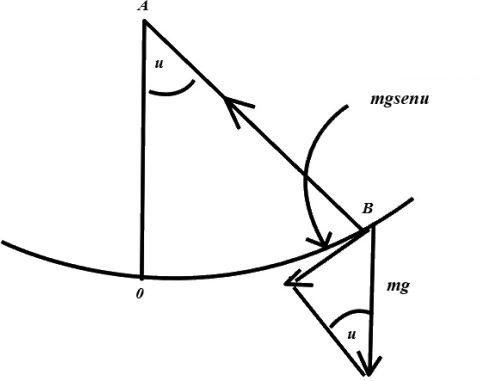


Figura 5.5: Sistema masa - resorte.

**Ejemplo 5.2.3.** *Un peso de* 6 lb *estira un resorte 6 pulg. Si el peso se halla* 4 pulg *por debajo de la posici´on de equilibrio y se suelta. Encuentre la posici´on del peso como una funcio´n del tiempo.*

***Soluci´on:*** *Las medidas expresadas en ulgadas se deben pasar a pies. En consecuencia* 6 *pulg* = 1 *ft*

*y* 4*pulg* ≡ 1 *f t. Ahora, a partir de los datos suministrados se obtiene* 6 = *k* 1 2

3

2

*lo cual implica que*

*k* = 12 *lb*  *. Adem´as, dado que mg* = *P, entonces m* = *P* =  6 *. Reemplazando en la ecuacio´n de*

*ft*

*movimiento se obtiene*

6 *d*2*x*

*g* 32

32 *dt*2 = −12*x.*

*Por lo tanto se obtiene el siguiente problema de valores iniciales*

*cuya solucio´n en est´a dada por*

*dt*2

*x*(0) = 1 *, x*j(0) = 0

3

*d*2*x* + 64*x* = 0

*,*

1

*x*(*t*) =

3

cos 8*t.*

**Ejemplo 5.2.4.** *Sea AB figura 5.5, el alambre, siendo A el punto fijo de suspensi´on y B el otro extremo del alambre, al cual se halla unida una masa m. Designemos por u el ´angulo formado por al alambre y la vertical A*0 *en un instante cualquiera. Cuando la masa m se halla en movimiento, actu´an sobre ella dos fuerzas, la tensi´on T de la cuerda y el peso mg de la masa.*

*Podemos descomponer al peso mg en dos componentes una tangente y otra perpendicular a la trayectoria del movimiento, tenemos que la componente perpendicular es equilibrada por la tensi´on, la fuerza tangen- cial a la trayectoria es mg sen*(*u*)*. Tomemos u positivo si m se halla a la derecha de* 0 *y u es negativo si m se halla a la izquierda de 0. Cuando u es positiva la fuerza resultante se halla dirigida hacia la izquierda y se dirige hacia la derecha si u es negativo, luego la fuerza resultante es* −*mg* sen(*u*)*. Como la longitud del arco es s* = *lu, luego aplicando la Ley de Newton tenemos*

*d*2*s d*2*u*

*es decir*

*m dt*2 = *ml dt*2 = −*mg* sen *u,*

*d*2*u g*

*dt*2 = − *l* sen *u.* (5.6)

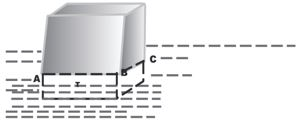


Figura 5.6: Cubo en su posici´on de equilibrio.

*Esta ecuaci´on no se puede resolver exactamente por funciones elementales, pero podemos hacer la apro- ximaci´on, para u entre* 5*o y* −5*o se tiene que* sen *u* ≈ *u, donde u aparece expresado en radianes. Luego la ecuaci´on (5.6) se convierte en*

*d*2*u*

*dt*2 +

*gu*

= 0*.*

*l*

*Su soluci´on es u* = *c*1 sen *g t* + *c*2 cos *g t, donde c*1 *y c*2 *son constantes y el periodo es* 2*π*√*g .*

*l*

*l*

√*l*

Otro ejemplo de movimiento arm´onico simple es el de un cuerpo que flota en el agua. Para analizar este caso resolvamos este problema.

**Ejemplo 5.2.5.** *Una caja cu´bica de 3 metros de lado flota en agua tranquila. Se nota que la caja oscila subiendo y bajando con un periodo de medio segundo. ¿Cu´al es el peso de la caja?*

***Soluci´on:*** *la Figura 5.6 representa el cubo en su posici´on de equilibrio, dado por ABC. En la Figura*

*5.7 el cubo est´a casi totalmente sumergido en el agua, en esta posicio´n hay una fuerza que tiende a empujar la caja hacia arriba. Esta fuerza est´a determinada por el Principio de Arqu´ımedes. Un peso parcial o totalmente sumergido en un l´ıquido, experimenta un empuje hacia arriba originando un movimiento vibratorio por una fuerza igual al peso del l´ıquido que desaloja. Luego en la Figura 5.6, segu´n el principio dado el peso de la parte I sumergida es igual al peso de volumen de agua que desaloja. En la Figura 5.7 se muestra la parte I sumergida y otra parte de cubo dentro del agua a una altura x, lo cual indica que hay una fuerza no equilibrada, luego el peso de agua desalojada es* 3*,*3*.x,*1*,*000*, o sea* 9000*x, ya que* 1000 *kilogramos por metro cu´bico es la masa espec´ıfica del agua. El valor de la fuerza que tiende a mover el cubo es an´aloga a la fuerza de restituci´on del resorte vibrante. Si designamos por W el peso de la caja tendremos la ecuaci´on diferencial*

*W d*2*x*

*.* = −9000*x,*

*g dt*2

*o sea*

*d*2*x dt*2 +

88200*x*

= 0*.*

*W*

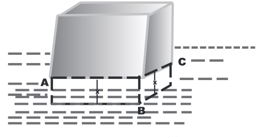


Figura 5.7: Cubo casi totalmente sumergido en el agua.

*W W*

*Su soluci´on es x* = *c*1*cos* 88200 *t* + *c*2 sen 88200 *t donde c*1 *y, c*2 *son constantes, el periodo de vibraci´on*

*es*

2*πW* 1

√88200 = 2 *.*

*Resolviendo esta ecuaci´on tenemos que W* = 559*kgs. En todos estos problemas hemos considerado que la resistencia es despreciable, ahora consideraremos en caso en el cual la resistencia no es nula.*

### 5.2.1. Fuerza de atracci´on proporcional al desplazamiento; resistencia proporcional a la velocidad

El movimiento vibratorio con amplitud constante, resulta de una fuerza proporcional al desplaza- miento. Si se toman en cuenta la fricci´on o fuerzas de rozamientos que disminuyen la amplitud de las oscilaciones y finalmente detienen el movimiento, esta fuerza se denomina amortiguadora o resistente; no se conoce ley exacta que gobierna estas fuerzas puesto que dependen de muchos factores variables, pero se observa experimentalmente que, si la velocidad es pequen˜a, la magnitud de la fuerza amortiguadora

es aproximadamente proporcional a la velocidad instant´anea, o sea su magnitud es *cdx*

*dt*

donde *c* es la

constante de proporcionalidad. La fuerza amortiguadora se opone al movimiento en caso de una part´ıcula que se desplaza sobre la l´ınea recta, sucede que si la part´ıcula se mueve hacia la derecha, la velocidad

es positiva y −*cdx* representa la fuerza resistente. Si la part´ıcula se mueve hacia la izquierda, la veloci-

*dt*

dad es negativa y −*cdx* representa la fuerza amortiguadora; similarmente podemos considerar el caso de movimiento producido por un resorte; luego el modelo matem´atico que define estas situaciones es

*dt*

*d*2*x dx*

o sea

*m dt*2 = −*c dt* − *kx,*

*d*2*x dt*2 +

*c dx*

*.*

1. *dt*

*k*

+ *x* = 0*.*

*m*

La soluci´on a esta ecuaci´on depende del valor de

*c*2 4*k*

*c*2 − 4*km*

*m*2 − *m* =

* 1. Si *c*2 − 4*km* = 0, entonces la soluci´on es

*m*2 *.*

*ct*

−

*x* = *e* 2*m* [*c*1 + *c*2*t*] *,*

donde *c*1 y *c*2 son constantes, su gr´afica se muestra en la Figura 5.8.

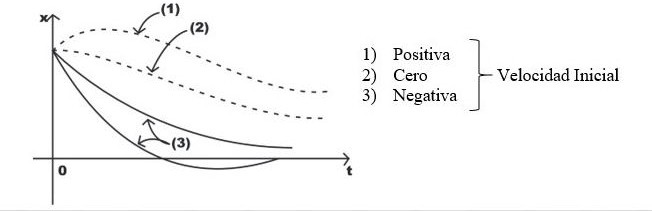


Figura 5.8: Movimiento criticamente amortiguado.

* 1. Si *c*2 − 4*km* es mayor que cero, la soluci´on es

*x* = *e*− *ct c edt* + *c e*−*dt ,*

2*m*

1

2

con *d* = 1 √*c*2 − 4*km*, siendo *c*1 y *c*2 constantes, su gr´afica se muestra en la Figura 5.9

2*m*

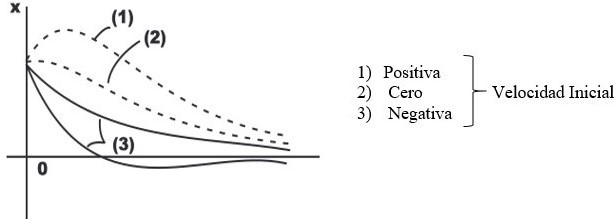


Figura 5.9: Movimiento sobreamortiguado.

* 1. Si *c*2 − 4*km* es menor que cero, la soluci´on viene dada por

*ct*

−

*x* = *e* 2*m* [*c*1 cos *dt* + *c*2 sen *dt*] *,*

con *d* = 1 √4*km* − *c*2, donde *c*1 y *c*2 son constantes, su gr´afica se muestra en la Figura 5.10.

2*m*

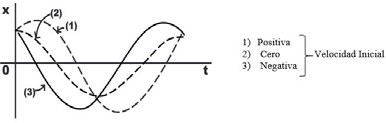


Figura 5.10: Movimiento subamortiguado.

*ct*

−

En todos los casos el factor *e* 2*m* se llama factor de amortiguaci´on.

**Ejemplo 5.2.6.** *Una part´ıcula parte del reposo para t* = 0*, con un desplazamiento x* = 5 *metros a la derecha del origen y se mueve a lo largo del eje x, de acuerdo a la ecuaci´on diferencial*

*d*2*x dx*

*Encontrar:*

*dt*2 + *dt* + 1*,* 25*x* = 0*.*

1. *El tiempo requerido para que el factor de amortiguaci´on disminuya el* 50 %*.*
2. *El porcentaje de disminuci´on del factor de amortiguacio´n despu´es de un periodo.*
3. *La posici´on de la part´ıcula despu´es de un periodo y la velocidad en ese instante.*
4. *Hallar la gra´fica del desplazamiento contra tiempo y la de velocidad contra tiempo.*

***Soluci´on:***

1. *El factor de amortiguamiento es e*− 2 *, para t=0, este es 1, debemos hallar el tiempo t, en el cual el*

*t*

*factor de amortiguamiento es* 1 *, luego e*− *t* 1 *o equivalentemente* − *t* = −*ln*2*. En consecuencia*

2

2

=

2

2

*t* = 21*ln*2 = 1*,* 39 *s.*

1. *Hallemos el factor de amortiguaci´on despu´es de un periodo, para ello e*−*π* = 0*,* 0432*; luego su porcentaje de disminuci´on es* 95*,* 7 %*.*

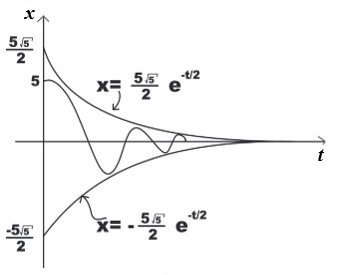


Figura 5.11: Gr´afica de la ecuaci´on (5.7).

1. *Como la soluci´on a la ecuaci´on diferencial es*

*x* = *e*− 2 [*c*1*sen*(*t*) + *c*2*cos*(*t*)] *.* (5.7)

*t*

*Derivando tenemos*

*v* = *e*− *t* (*c*

— *c*2 ) cos(*t*) − ( *c*1 + *c* ) sen(*t*) *.* (5.8)

*Podemos hallar c*1 *y c*2 *con las condiciones dadas de x* = 5*, v* = 0*, para t* = 0*, reemplazando en (5.7)*

2

1

2

2

2

*y en (5.8), obtenemos que c*1 = 5

2

*y c*2 = 5*. Luego:*

*x* = *e*− *t* 5 sen *t* + 5*cost*

2

2

*v* = *e*− *t* − 15 *sen*(*t*) *.*

2

2

*Entonces x*(2*π*) = *e*−*π* (5) = 0*,* 216 *m o sea la part´ıcula despu´es de un periodo se halla a 0,216 metros a la derecha del origen v*(2*π*) = *e*−*π* (0) = 0 *m/s.*

1. *Para realizar las gr´aficas pedidas expresamos estas funciones de una manera m´as sencilla. Sea A* =

√*c*2*.c*2 = 25*.* 25 = 5√5 *y u* = arctan *c*1 = arctan 1 *. Luego la ecuaciones (5.7) y (5.8) se convierten*

1

2

4

2

*c*2

2

2

2

2

2

*en x* = 5√5 *e*− *t* [sen(*t* + *u*)] *y v* = *e*− *t* − 15 sen(*t*) *, respectivamente.*

**Ejemplo 5.2.7.** *se coloca un peso de 3 kilogramos en un resorte el cual se estira 153 mil´ımetros. Si se tira del peso 10 cent´ımetros por debajo de su posici´on de equilibrio y luego se suelta. Hallar la posici´on del peso en funci´on del tiempo si existe una fuerza de amortiguamiento que es 6,12 veces la velocidad.*

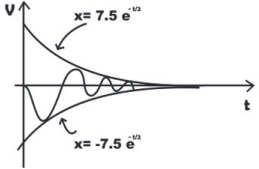


Figura 5.12: Gr´afica de la ecuaci´on (5.8).

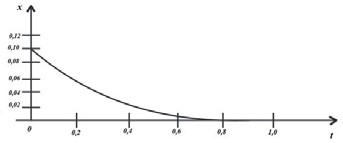


Figura 5.13: Gr´afica de *x* = 4 *e*−4*t* − 1 *e*−16*t*.

9

9

***Soluci´on:*** *la ecuacio´n diferencial que define el movimiento es*

3 *d*2*x dx*

*o sea*

9*,* 8 *dt*2 = −19*,* 6*x* − 6*,* 12 *dt ,*

*d*2*x dx*

*dt*2 + 20 *dt* + 64*x* = 0*.*

*Las condiciones iniciales son x* = 0*,* 10 *metros, v* = 0*, para t* = 0*. Luego al reemplazar las condiciones dadas en la solucio´n a la ecuaci´on diferencial x* = *Ae*−4*t* + *Be*−16*t. Tenemos x* = 4 *e*−4*t* − 1 *e*−16*t cuya*

9

9

*gr´afica se muestra en la Figura 5.13. Es claro que no habr´a oscilaciones; se ha amortiguado tanto al peso*

*que ´este solo volver´a gradualmente a su posici´on de equilibrio, sin pasar por ´el.*

## Vibraciones forzadas

Hemos visto problemas u´nicamente de resortes donde se consideran fuerzas de restituci´on y amorti- guamiento; ahora trataremos casos en que pueden actuar otras fuerzas externas que dependen del tiempo. Estas fuerzas suelen presentarse, por ejemplo, cuando el resorte sube y baja de manera prescrita, como un movimiento peri´odico, o bien cuando se empuja ligeramente al peso cada vez que alcanza su posici´on m´as baja. Si designamos por *F* (*t*) la fuerza externa, fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, la ecuaci´on diferencial del movimiento del resorte es

*W d*2*x dx*

es decir

*g dt*2 = −*kx* − *c dt* + *F,*

*W d*2*x dx*

*g dt*2 + *c dt* + *kx* = *F* (*t*)*.*



Figura 5.14: Vibracciones forzadas.

**Ejemplo 5.3.1.** *Se coloca un peso de 3 kilogramos en un resorte al cual lo estira 153 mil´ımetros. Si se tira del peso hasta 10 cent´ımetros por debajo de su posici´on de equilibrio y luego se suelta. H´allese la posicio´n del peso en funci´on del tiempo, si existe una fuerza amortiguadora, la cual es 2,45 veces la velocidad y adem´as actu´a una fuerza peri´odica externa dada por F* (*t*) *igual a* 39*,* 2*cos*8*t.*

***Soluci´on:*** *La ecuacio´n diferencial que define el movimiento es*

3 *d*2*x dx*

*o equivalentemente*

9*,* 8 *dt*2 = −1*,* 96*x* − 2*,* 45 *dt* + 39*,* 2 cos 8*t,*

*d*2*x dx*

*dt*2 +8

*dt*

+ 64*x* = 128 cos 8*t.* (5.9)

*La cual es una ecuaci´on diferencial lineal no homog´enea de orden dos con coeficientes constantes, entonces su solucio´n general est´a dada por la suma de una soluci´on particular de (5.9) y la soluci´on general a la ecuaci´on homog´enea asociada de (5.9). La soluci´on de la ecuaci´on homog´enea asociada es*

*x*(*t*) = *e*−4*t*(*A* cos 4√3*t* + *B* sen 4√3*t*)*.*

*Supongamos que a* sin 8*t* + *b* cos 8*t, es soluci´on particular a la ecuaci´on no homog´enea, reemplazando esta soluci´on en la ecuaci´on diferencial d*√*ada tenemos* √*que a* = 2*, b* = 0*. Luego la solucio´n a la ecuaci´on*

*diferencial dada es x* = *e*−4*t*(*A* cos 4 3*t* + *B* sen 4 3*t*) + 2 sen 8*t. Podemos hallar el valor de A y B,*

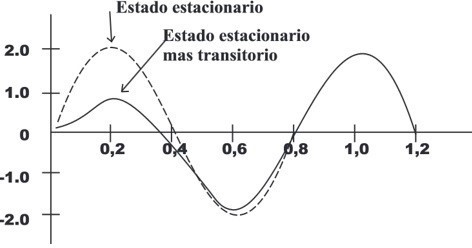
*empleando* √*las condiciones iniciales, las cual*√*es* *son x* =√0*,* 1*, v* =√0 *para t* = 0*, de donde tenemos A* = 0*,* 1*,*

*B* = −1*,* 33 3 *y por ende x* = 0*,* 1*e*−4*t*(cos 4 3*t* − 13*,* 3 3 sen 4 3*t*) + 2 sen 8*t cuya gr´afica se muestra en*

*la Figura 5.15.*

*En la u´ltima ecuaci´on observamos que los t´erminos que contienen e*−4*t se vuelven despreciables t es grande; estos t´erminos se llaman “T´erminos Transitorios” y s´olo son significativos cuando t es cercano a cero. Algunas veces, cuanto estos t´erminos transitorios de la solucio´n son significativos, reciben el nombre de “Soluci´on Transitoria”. El t´ermino* 2 sen 8*t permanece au´n cuando los t´erminos transitorios sean despreciables y se denomina “T´ermino de Estado Estacionario o Soluci´on de Estado Estacionario”, porque indica el comportamiento del sistema cuando se han estabilizado las condiciones de funcionamiento. Se ve que la soluci´on de estado estacionario (curva de trazos) es peri´odica y que tiene la misma frecuencia y periodo que la fuerza externa aplicada.*

**Ejemplo 5.3.2.** *Se encontr´o experimentalmente que un peso de 6 lb estira un resorte 6 pul. Si el peso se halla 4 pul por debajo de la posici´on de equilibrio y se suelta, encuentre la posici´on del peso como funci´on del tiempo si adicionalmente actu´a un fuerza amortiguadora, dada en libras num´ericamente igual a 1,5 veces la velocidad instant´anea en pies por segundo y una fuerza externa peri´odica dada por F* (*t*) = 24 cos 3*t.*



**Estado estacionario**

**2.0 Estado estacionario más transitorio**

**1.0**

**0**

**0,2**

**0,4**

**0,6**

**0,8**

**1,0 1,2**

**-1.0**

**-2.0**

Figura 5.15: Gr´afica de la soluci´on.

***Soluci´on:*** *La ecuacio´n diferencial es*

6 *d*2*x dx*

32 *dt*2 = −12*x* − 1*,* 5 *dt* + 24 cos 8*t.*

*De esta forma el problema de valor inicial es*

*d*2*x dx* 1 j

*dt*2 +8

+ 64*x* = 128 cos 8*t, x*(0) =

3

*dt*

*x* (0) = 0*.*

*La soluci´on*√*complementa*√*ria es xc*(*t*) = *e*−4*t*(*A* cos 4√3*t* + *B* sen 4√3*t*)*. La soluci´on general es x*(*t*) =

*e*−4*t*(*A* cos 4 3*t* + *B* sen 4 3*t*) + 2 sen 8*t. Usando las condiciones iniciales se obtiene*

*x*(*t*) =

*e*−4*t*

(3 cos 4

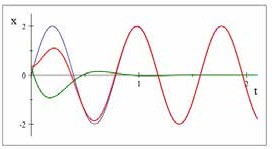
√

9

3*t* − 11√

1. sen 4

√3*t*) + 2 sen 8*t.*



**x**

**2**

**0**

**1**

**2 t**

**-2**

Figura 5.16: Gr´afica de la soluci´on.

## El fen´omeno de resonancia

Cuando la frecuencia de una fuerza externa peri´odica aplicada a un sistema se relaciona de una manera sencilla, que se describir´a, con la frecuencia natural del sistema, puede aparecer el feno´meno de resonancia, que aumenta la magnitud de las oscilaciones hasta valores tan grandes que el sistema llega a disgregarse. Es por ello que una compan˜´ıa de soldados que marche al paso sobre un puente puede provocar la ca´ıda del mismo, aun cuando ´este podr´ıa soportar mucho m´as soldados si no caminaran al paso. En forma similar puede ocurrir que una nota musical con una frecuencia caracter´ıstica adecuada rompa un cristal. El fen´omeno de resonancia es funesto en los casos mec´anicos mientras que en los sistemas el´ectricos sus

efectos son u´tiles. La radio, la televisi´on, el radar y las comunicaciones ser´ıan virtualmente imposibles sin la resonancia el´ectrica; en estos casos la corriente y, en consecuencia, la energ´ıa el´ectrica generada puede aumentarse hasta grandes intensidades que necesitan estos campos. El que podamos sintonizar nuestro radio a la frecuencia de la estaci´on radiotransmisora para conseguir una recepci´on clara se debe a la resonancia el´ectrica. El sguiente es un ejemplo de resonancia mec´anica.

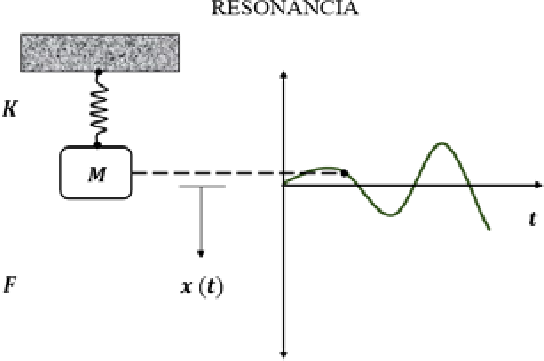


Figura 5.17: Fen´omeno de resonancia.

**Ejemplo 5.4.1.** *Dado un resorte al cual se le coloca un peso de 3 kilogramos que lo estira 153 mil´ımetros. Si se tira el peso hasta 10 cent´ımetros por debajo de su posici´on de equilibrio y luego se suelta. Hallar la ecuaci´on que describe el movimiento si se le aplica una fuerza externa dada por* 4*,* 9*cos*8*t.*

***Soluci´on:*** *La ecuaci´on diferencial es* 3 *d*2*x* = −19*,* 6*x* + 4*,* 9 cos 8*t, o sea d*2*x* + 64*x* = 16 cos 8*t. La*

9*,*8 *dt*2

*dt*2

*soluci´on general a la ecuaci´on homog´enea es x* = *Acos*8*t*+*B* sen 8*t. Supongamos que la soluci´on particular es xh* = *t*(*acos*8*t* + *bsen*8*t*) *sustituy´endola en la ecuaci´on diferencial, obtenemos a* = 0 *y b* = 1*. Luego la soluci´on general es x* = *A* cos 8*t* + *Bsen*8*t* + sen 8*t. Como las condiciones iniciales son x* = 0*,* 1 *v* = 0 *para t* = 0 *de donde obtneemos que x* = *t* sen 8*t, ya que A* = *B* = 0*. La gr´afica de esta u´ltima funci´on est´a comprendida entre las rectas x* = *t y x* = −*t, tal como aparece en la Figura 5.18. En esta gr´afica podemos observar que la magnitud de las oscilaciones aumentar´a ilimitadamente, naturalmente el resorte se romper´a al cabo de poco tiempo. Se observar´a que en este ejemplo se despreci´o el amortiguamiento y que la resonancia se produjo porque la frecuencia f de la fuerza externa aplicada era igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado, este es un principio general. En el caso de que haya amortiguamiento, las oscilaciones no aumentan ilimitadamente pero, no obstante, pueden hacerse muy grandes; en este caso, la resonancia se produce cuando la frecuencia de la fuerza externa aplicada es ligeramente menor que la frecuencia natural del sistema.*

**Ejemplo 5.4.2. *Ejemplo de movimiento forzado:*** *un resorte vertical con constante 8 Ib/pie tiene suspendido un peso de 16 Ib. Se aplica un fuerza externa dada por F* (*t*) = 16 sen 4*t. Se asume que actu´a una fuerza amortiguadora dada en libras num´ericamente igual a 4 veces la velocidad instant´anea en pies por segundo. Si se suelta el peso de su posici´on de equilibrio, determine la posici´on del peso en cualquier instante.*

***Soluci´on:*** *La ecuacio´n diferencial es*

16 *d*2*x dx*

32 *dt*2 = −8*x* − 4 *dt* + 16 sen 4*t.*

*De esta forma el problema de valor inicial es*

*d*2*x dx* j

*dt*

*dt*2 + 8 + 16*x* = 32 sen 4*t, x*(0) = 0*, x* (0) = 0*.*

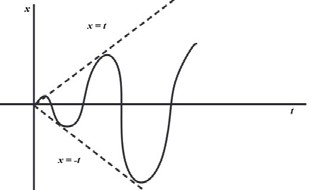


Figura 5.18: Gr´afica de la u´ltima funci´on comprendida entre las rectas *x* = *t* y *x* = −*t*.

*La soluci´on complementaria es xc*(*t*) = *e*−4*t*(*A* + *Bt*) − cos 4*t. La soluci´on general es x*(*t*) = *e*−4*t*(*A* +

*Bt*) − cos 4*t. Usando las condiciones iniciales se obtiene x*(*t*) = *e*−4*t*(1 + 4*t*) − cos 4*t.*

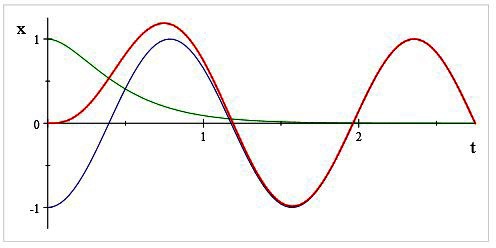
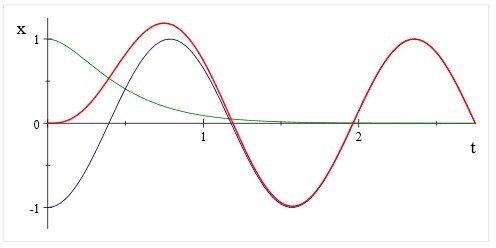


Figura 5.19: Gr´afica del ejemplo.

## Circuitos el´ectricos

En el cap´ıtulo anterior se estudiaron los circuitos el´ectricos *RL* y *RC* que conduc´ıa a ecuaciones diferenciales lineales, ahora estamos interesados en circuitos *RLC*, tal como en la figura 5.20. Entonces, segu´n la Ley de Kirchhoff,

*dl Q*

*L* + *RI* +

*dt C*

= *E*(*t*)*,* (5.10)

como *I* = *dQ* , la ecuaci´on (5.10) se transforma en

*dt*

*d*2*Q*

*dQ Q*

*L dt*2 + *R dt* + *C* = *E*(*t*)*.*

Si comparamos esta expresi´on con la ecuaci´on general de las vibraciones forzadas del numeral 8.3., obser- vamos una sorprendente analog´ıa entre las cantidades mec´anicas y las el´ectricas. La carga *Q* corresponde a la posici´on *x*. La inducci´on *L* corresponde a la masa *m*, o sea *W* . La resistencia *R* corresponde a la

*g*

constante de amortiguamiento *c*. La inversa de la capacidad 1 , corresponde a la constante del resorte *k*. La fuerza electromotriz *E*(*t*) corresponde a la fuerza externa aplicada *F* (*t*). La intensidad de la corriente *I* = *dQ* corresponde a la velocidad *v* = *dx* . Debido a la notable analog´ıa que existe entre estas cantidades

*c*

*dt dt*

mec´anicas y el´ectricas, la cual se verifica en los casos m´as complicados, la mayor´ıa de las conclusiones

que se dedujeron para los sistemas mec´anicos se aplican a los el´ectricos, e inversamente. Es m´as, en la industria se utiliza con frecuencia esta analog´ıa para estudiar sistemas mec´anicos donde la construcci´on de estos resultar´ıa muy cara o complicada, y cuando las consecuencias quiz´a pudieran ser muy peligrosas.

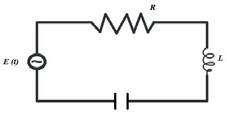


Figura 5.20: Circuitos.

**Ejemplo 5.5.1.** *se conectan en serie un inductor de 0,5 henrios, una resistencia de 6 ohmios, un condensador de 0,02 faradios, un generador que tiene un voltaje alterno dado por* 24*sen*10*t, para t mayor o igual a cero. Hallar la carga y la intensidad de la corriente en un tiempo t cualquier, si la carga existente en el condensador es nula para un tiempo t* = 0*.*

***Soluci´on:*** *De acuerdo a la Ley de Kirchhoff, tenemos*

*d*2*Q dQ*

*o sea*

0*,* 5 *dt*2 +6 *dt* + 50*Q* = 24 sen 10*t,*

*d*2*Q dQ*

*dt*2 + 12 *dt* + 100*Q* = 48 sen 10*t.*

*La soluci´on a la ecuaci´on homog´enea es Q* = *e*−6*t*(*A* cos 8*t*+*B* sen 8*t*)*. Supongamos que a* sen 10*t*+*b* cos 10*t, es soluci´on particular de la ecuaci´on no homog´enea dada, sustituy´endola en esta tenemos a* = 0 *y b* = − 2 *, luego la soluci´on general a la ecuaci´on no homog´enea es Q* = *e*−6*t*(*Acos*8*t* + *Bsen*8*t*) − 2 *cos*10*t, con las*

5

5

*condiciones iniciales Q* = 0*, I* = *dQ* = 0*, para t* = 0*. Obtenemos que A* = 2 *y, B* =  3 *, luego la soluci´on*

*dt* 5 10

*buscada es Q* = *e*−6*t*(0*,* 4 cos 8*t* + 0*,* 3 sen 8*t*) 0*,* 4 cos 10*t. Derivando tenemos I* = 5*e*−6*t* sen 8*t* + 4 sen 10*t. N´otese que el t´ermino con el factor e*−6*t es la soluci´on transitoria que pronto se hace despreciable. La soluci´on estacionaria la constituye para Q* = −0*,* 4*cos*10*t, y para I* = 4*sen*10*t; las cuales se conservan*

— −

*despu´es de que el t´ermino transitorio ha desaparecido virtualmente.*

## Flexi´on de vigas

Las vigas pueden ser isost´aticas o hiperest´aticas. Una viga hiperest´atica es aquella que tiene m´as condiciones de contorno, es decir, movimientos impedidos, de los que son estrictamente necesarios para su estabilidad. Por ello su c´alculo no se realiza con las ecuaciones de equilibrio, sino recurriendo a los esfuerzos y deformaciones a partir de las ecuaciones constitutivas del material. Son las vigas normalmente usadas en las estructuras de construcci´on, su uso es el m´as extendido. Otro tipo de viga hiperest´atica es aquella que tiene m´as de dos soportes y que se denomina Viga Continua.

###### Vigas Isost´aticas

Las estructuras isost´aticas son aquellas que sus reacciones pueden ser calculadas con las ecuaciones de la est´atica

Σ Σ

*F* = 0 *M* = 0*,*

es decir, la sumatoria de las fuerzas en los planos (*x, y, z*) es igual a cero y la sumatoria de los momentos en los planos (*x, y, z*) es igual a cero. De una forma un poco m´as t´ecnica se puede decir que una estructura isost´atica posee igual nu´mero de ecuaciones que de inc´ognitas, por lo cual, se puede resolver mediante un simple sistema de ecuaciones lineales Los apoyos de vigas, son los elementos que le proporcionan la estabilidad de la viga y por lo general, se encuentran en los extremos o cerca de ellos. Las fuerzas en los apoyos que se generan son productos de las cargas aplicadas y se llaman reacciones y equilibran las cargas



Figura 5.21: Soportes de vigas.

aplicadas. Anal´ıticamente estas reacciones representan las incognitas de un problema matem´atico. Las reacciones se pueden dividir en tres grupos que corresponden al tipo de apoyo que se est´a empleando. En la figura se muestra una secci´on de una viga flexionada de longitud L, homog´enea y que tiene secciones transversales uniformes a los largo de su longitud. En ausencia de carga en la viga, una curva que une los centroides de todas sus secciones transversales es una recta conocida como eje de simetr´ıa. Si se aplica una carga a la viga en un punto vertical que contiene al eje de simetr´ıa, la viga, experimenta una distorsi´on. Observe una secci´on transversal en figura 5.22, puede considerarse como compuesta de fibras tales como *F* j*F* , todas originalmente de longitud *s*. La superficie *P Q*, que contiene fibras cuyas longitudes no se alteran cuando se flexiona la viga, se llama superficie neutra, y la curva que conecta los centroides de las secciones transversales de estas fibras *B*j*B* se denomina curva de **deflexi´on** o **curva el´astica** de la viga. Las fibras debajo de la superficie neutra se alargan y las que est´an por encima se acortan cuando la viga se flexiona. Supongamos que la fibra *F* j*F* que est´a a una distancia *z* abajo de la superficie neutra, se alarga una distancia *e* por la fuerza *SdA*, donde *S*, es el esfuerzo por unidad de ´area transversal y *dA* es el ´area transversal de la fibra. Sea *R* la longitud de *BC* (radio de curvatura) y sea *Q*j*Q* perpendicular a *B*j*B* y *BC*. Por la Ley de Hooke, tenemos que el esfuerzo *S* por unidad de ´area es proporcional al alargamiento *e* por la longitud de la fibra *F* j*F* ; esto es

*s*

*S* = *E*

*e*

*,* (5.11)

*s*

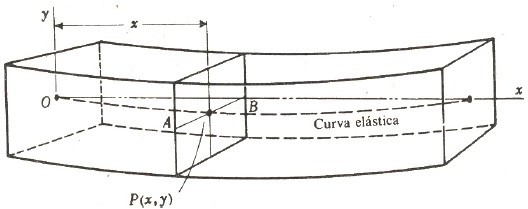


Figura 5.22: Secci´on transversal.

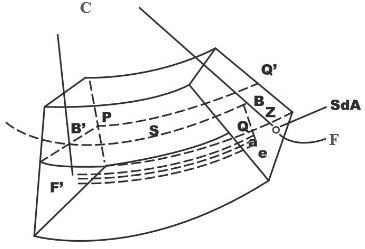


Figura 5.23: Curva el´astica de la viga.

donde la constante de proporcionalidad *E*, es el m´odulo de Young, o m´odulo de elasticidad. Adem´as se tiene que

Entonces de (5.11) y (5.12) tenemos

*e S*

= *.* (5.12)

*s R*

*Ez*

*S* = *. R*

El momento de la fuerza *SdA* con respecto al *QQ*j es

*zSdA* = *E z*2*dA.*

*R*

Integrando para toda la secci´on transversal de la viga se tiene el momento flexionante *M*

∫

*M* = *E z*2*dA.*

*R*

Pero

*z*2*dA* = *I,*

donde *I* es el momento de inercia del ´area transversal de la viga con respecto al eje *QQ*j luego *M* = *EI* . Ahora, se toma el eje *x* horizontal a trav´es de algu´n punto de la fibra *B*j*B*, tomada como el origen y el eje *y* positivo hacia arriba. La f´ormula para radio de curvatura es *R* = (1+*y*′2) pero para la flexi´on reducida,

*R*

′′*y*

≈ ≈

la pendiente *y*j 0, y *y*j2 puede despreciarse en comparaci´on con la unidad, y por tanto 1 + (*y*j)2 3 1, de manera que una aproximaci´on bastante precisa del radio de curvatura es *R* =  1 . Reemplazando esta

′′*y*

2

aproximaci´on en la u´ltima ecuaci´on tenemos

*M* = *EIy*jj*.*

Ahora suponga que el eje *x* coincide con el eje de simetr´ıa y que la deflexi´on *y*(*x*), medida desde este eje, es positiva si es hacia abajo. En la teor´ıa de la elasticidad se muestra que el momento de flexi´on *M* (*x*) en un punto *x* a lo largo de la viga se relaciona con la carga por unidad de longitud *w*(*x*) mediante la ecuaci´on

*d*2*M*

*dx*2 = *w*(*x*)*.*

Adem´as, el momento de flexi´on es proporcional a la curvatura *k* de la curva el´astica, *M* (*x*) = *EIk*, donde *E* es el m´odulo de Young de elasticidad del material de la viga e *I* es el momento de inercia de una secci´on transversal de la viga. El producto *EI* se llama rigidez flexional de la viga. Ahora

*y*jj

*K* = 3 *.*

[1 + (*y*j)2] 2

De la deducci´on anterior se obtiene que *y*(*x*) satisface la ecuaci´on diferencial de cuarto Orden

*d*4*y*

*EI dx*4 = *w*(*x*)*.*

## Condiciones de frontera

A continuaci´on se resumen algunas propiedades de las condiciones de frontera

*Extremos de la viga Condiciones de la frontera Empotrados y* = 0*, y*j = 0

*Libres y*jj = 0*, y*jjj = 0

*Apoyados y* = 0*, y*jj = 0

**Ejemplo 5.7.1.** *una viga horizontal de 21 metros de longitud est´a apoyada en sus extremos. Hallar la ecuaci´on de su curva ela´stica y su m´axima deformaci´on vertical cuando tiene una carga uniformemente distribuida de w kilogramos.*

**Soluci´on:** Tomamos 0 como origen en el extremo izquierdo como en la Figura 5.24. Luego la ecuaci´on diferencial asociada es

*d*2*y* 1

Luego

*EI dx*2 = *wlx* − *wx*( 2 *x*)*.*

1 3 1

4 1 3

*EIy* = *wlx*

6

y

* 24 *wx*

5*Wl*4

* 3 *wl x,*

*ymax* = 24*EI .*

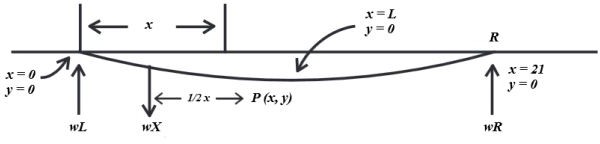


Figura 5.24: Gr´afica viga horizontal planteada en el Ejemplo 5.7.1.

## El cable suspendido

Supongamos que se tiene un cable de peso uniformemente distribuido *W* , suspendido entre dos soportes *A* y *B* como se muestra en la Figura 5.25. El cable se soltar´a y tendr´a su punto m´as bajo *V* . Deseamos determinar la curva formada por el cable suspendido. La curva se denomina catenaria. Tomando ejes de coordenadas como se muestra en Figura 5.26. Tomando *V* en eje vertical, sea *s* la longitud del cable desde *V* a un punto *P* de coordenadas (*x, y*). Entonces la porci´on del cable desde *V* hasta *P* est´a sujeto a fuerzas, una de ellas es la fuerza gravitacional *Ws* actuando hacia abajo a trav´es del centro de gravedad de la porci´on de cable desde *V* hasta *P* , otra fuerza es la tensi´on *T*1 actuando tangencialmente en P, y finalmente la tensi´on *T*2 actuando horizontalmente en *V* . La tensi´on *T*1 es variable y *T*2 es constante.

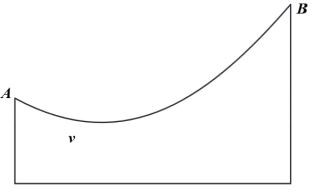


Figura 5.25: Cable suspendido entre dos soportes A y B.

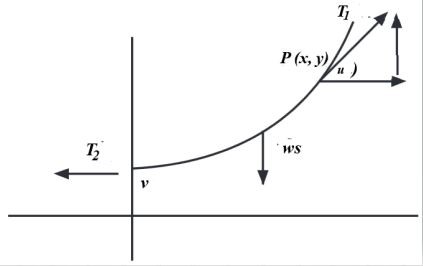


Figura 5.26: Curva catenaria.

Suponemos que el sistema *F* est´a en equilibrio

*T*1*senu* − *Ws* = 0

*T*1*cosu* − *T*2 = 0 (5.13)

Dividiendo la primera ecuaci´on de (5.13) entre la segunda ecuaci´on de (5.13) tenemos

*Ws*

Entonces

tan(*u*) = *. T*2

*dy Ws*

= *,*

*dx T*2

como *s* es la longitud del arco de la curva entonces derivando la u´ltima f´ormula tenemos

*d*2*y dx*2 =

*W ds*

*. .*

*T*2 *dx*

*ds* es constante, entonces la soluci´on a la ecuaci´on diferencial es

Si

*dx*

*Wx*2

*y* =

2*T*2

+ *b,*

donde *b* es una constante. En este caso el cable toma la forma de una par´abola. Si *ds*

no es constante,

como *ds* =

*dx*

1 + ( *dy* )2. Luego

*dx*

*d*2*y dx*2 =

*W* 1 + (

*T*2

*dx*

*dy* )2*. dx*

Ecuaci´on que podemos resolver transform´andola en una ecuaci´on de primer orden si definimos *h* = *dy* ,

*dx*

luego

*dh* = *W* √1 + *h*2*.*

La cual es una ecuaci´on de variables separables, al integrar tenemos

*dx*

*T*2

*h* + √*h*2 + 1 = *Ce Wx,*

*T*2

elevando al cuadrado tenemos

*p* = *dy* = 1 (*e Wx* − *e*− *Wx* )*.*

Integrando tenemos

*T*2 *T*2

*dx* 2

*y* = *T*2 (*e Wx* + *e*− *Wx* ) + *D,*

*T*2 *T*2

2*W*

donde *D* es una constante, si utilizamos funciones hiperb´olicas, tendremos

*y* = *T*2 *cosh Wx* + *D.*

*W T*2

La gr´afica de esta curva recibe el nombre de catenaria.

**Ejemplo 5.8.1.** *Un barril cil´ındrico de s pies de dia´metro y w lb de peso, est´a flotando en agua como se muestra en la Figura 5.27a. Despu´es de un hundimiento inicial el barril presenta un movimiento oscilatorio, hacia arriba y hacia abajo, a lo largo de la vertical. Utilizando la Figura 5.27b, defina una ecuaci´on diferencial para establecer el desplazamiento vertical y*(*t*)*, si se supone que el origen est´a en el eje vertical y en la superficie del agua cuando el barril est´a en reposo. Use el principio de Arqu´ımedes: la fuerza de flotaci´on o hacia arriba que ejerce el agua sobre el barril es igual al peso del agua desplazada. Suponga que la direcci´on hacia abajo es positiva, que la densidad de masa del agua es* 62*,* 5 *lb* 3 *y que no*

*pies*

*hay resistencia entre el barril y el agua.*

***Soluci´on:*** *Segu´n el Principio de Arqu´ımedes se tiene que la fuerza ascendente del agua sobre el barril*

*faa satisface*

*faa* = *Peso del agua desplazada*

= (62*,* 4)*x*(*volumen de agua desplazada*)

= (62*,* 4)*π s* 2 *y*

2

= 15*,* 6*πs*2*y.*

*Utilizando la segunda ley de Newton tenemos*

*w d*2*y* 2

*luego*

*g dt*2 = −15*,* 6*πs y,*

*d*2*y dt*2 +

15*,* 6*πs*2*gy*

= 0

*w*

*donde g* = 32 *pies*

*seg*2

*es la constante de gravedad y w* = *el/h es peso del barril en libras.*

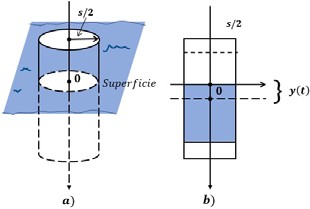


Figura 5.27: Barril cil´ındrico

## Romance de la derivada y el arco tangente

Veraneaba una derivada en´esima en un pequen˜o chalet situado en la recta del infinito del plano de Gauss, cuando conoci´o a un arco tangente simpatiqu´ısimo y de espl´endida representaci´on gr´afica, que adem´as pertenec´ıa a una de las mejores familias trigonom´etricas. Enseguida notaron que ten´ıan propie- dades comunes. Un d´ıa, en casa de una par´abola que hab´ıa ido a pasar all´ı una temporada con sus ramas alejadas, se encontraron en un punto aislado de ambiente muy ´ıntimo. Se dieron cuenta que converg´ıan hacia l´ımites cuya diferencia era tan pequen˜a como se quisiera. Hab´ıa nacido un romance. Acaramelados en un entorno de radio ´epsilon, se dijeron mil teoremas de amor. Cuando el verano pas´o, y las par´abo- las hab´ıan vuelto al origen, la derivada y el arco tangente eran novios. Entonces empezaron los largos paseos por las as´ıntotas siempre unidos por un punto comu´n, los interminables desarrollos en serie bajo los con´oides llorones del lago, las innumerables sesiones de proyecci´on ortogonal. Hasta fueron al circo, donde vieron a una troupe de funciones logar´ıtmicas dar saltos infinitos en sus discontinuidades. En fin, lo que eternamente hac´ıan los novios. Durante un baile organizado por unas cartesianas, primas del arco tangente, la pareja pudo tener el mismo radio de curvatura en varios puntos. Las series mel´odicas eran de ritmos uniformemente crecientes y la pareja giraba entrelazada alrededor de un mismo punto doble. Del amor hab´ıa nacido la pasi´on. Enamorados locamente, sus gr´aficas coincid´ıan en m´as y m´as puntos. Con el beneficio de las ventas de unas fincas que ten´ıa en el campo complejo, el arco tangente compr´o un recinto cerrado en el plano de Riemann. En la decoraci´on se gast´o hasta el u´ltimo infinit´esimo. Adorn´o las paredes con unas tablas de potencias de *e* preciosas, puso varios cuartos de divisiones del t´ermino independiente que costaron una burrada. Empapel´o las habitaciones con las gr´aficas de las funciones m´as conocidas, y puso varios paraboloides de revoluci´on chinos de los que surg´ıan desarrollos tangenciales en flor. Y Bernouilli le prest´o su lemn´ıscata para adornar su sal´on durante los primeros d´ıas. Cuando todo estuvo preparado, el arco tangente se traslad´o al punto impropio y contempl´o satisfecho su dominio de existencia. Varios d´ıas despu´es fue en busca de la derivada de orden n y cuando llevaban un rato charlando de variables arbitrarias, le espet´o, sin m´as:

* ¿Por qu´e no vamos a tomar unos neperianos a mi apartamento? De paso lo conocer´as, ha quedado mon´ısimo.

Ella, que le quedaba muy poco para anularse, tras una breve difusi´on del resultado, acept´o.

El novio le ensen˜´o su dominio y qued´o integrada. Los neperianos y una mu´sica arm´onica simple, hicieron que entre sus puntos existiera una correspondencia un´ıvoca. Unidos as´ı, miraron al espacio eucl´ıdeo. Los astroides rutilaban en la b´oveda de Vivian y... Eran felices!

* ¿No sientes calor? - dijo ella
* Yo s´ı. ¿Y tu´?
* Yo tambi´en.
* Ponte en forma can´onica, estar´as m´as c´omoda.

Entonces el le fue quitando constantes. Despu´es de artificiosas operaciones la puso en param´etricas racio- nales...

* ¿Qu´e haces? Me da vergu¨enza... - dijo ella
* ¡Te amo, yo estoy inverso por t´ı...! ¡D´ejame besarte la ordenada en el origen...! ¡No seas cruel...¡ven...! Dividamos por un momento la nomenclatura ordinaria y tendamos juntos hacia el infinito...

El acarici´o sus m´aximos y sus m´ınimos y ella se sinti´o descomponer en fracciones simples.

(Las siguientes operaciones quedan a la imaginaci´on del lector) Al cabo de algu´n tiempo la derivada en´esi- ma perdi´o su periodicidad. Posteriores an´alisis algebr´aicos demostraron que su variable hab´ıa quedado incrementada y su matriz era distinta de cero.

Ella le confes´o a ´el, sali´endole los colores:

* Voy a ser primitiva de otra funci´on. E´l respondi´o:
* Podr´ıamos eliminar el par´ametro elevando al cuadrado y restando. - Eso es que ya no me quieres!
* No seas irracional, claro que te quiero. Nuestras ecuaciones formar´an una superficie cerrada, conf´ıa en m´ı.

La boda se prepar´o en un tiempo diferencial de *t*, para no dar que hablar en el c´ırculo de los 9 puntos. Los padrinos fueron el padre de la novia, un polinomio lineal de exponente entero, y la madre del novio, una asiroide de noble as´ıntota. La novia luc´ıa coordenadas cil´ındricas de Satung y velo de puntos imaginarios. Ofici´o la ceremonia Cayley, auxiliado por Pascal y el nuncio S.S. monsen˜or Ricatti.

Hoy d´ıa el arcotangente tiene un buen puesto en una f´abrica de series de Fourier, y ella cuida en casa de 5 lindos t´erminos de menor grado, producto cartesiano de su amor.

Autor: Desconocido

## Ejercicios

### Movimiento armo´nico simple

* + - 1. Una masa *m* se une al extremo de un resorte cuya constante es *k*, despu´es de alcanzar el equilibrio, su soporte comienza a oscilar verticalmente a ambos lados de una l´ınea horizontal *L*, de acuerdo con una funci´on *h*(*t*). El valor de *h* representa la distancia en pies, a partir de *L*.
         1. Deduzca la ecuaci´on diferencial de movimiento si el sistema se mueve por un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento num´ericamente igual a *β*(*dx/dt*)*.*
         2. Resuelva la ecuaci´on diferencial en la parte *a*) si un contrapeso de 16 libras estira el resorte 4 pies y *β* = 2, *h*(*t*) = 5 cos *t*, *x*(0) = *x*j(0) = 0*.*
      2. Un resorte de 4 pies alcanza 8 pies al colgarle un co√ntrapeso de 8 lb. El medio a trav´es del cual se

mueve ofrece una resistencia num´ericamente igual a 2 veces de su velocidad instant´anea. Deduzca

la ecuaci´on de movimiento si el contrapeso se suelta de la posici´on de equilibrio con una velocidad de 5 pie/s hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posici´on de equilibrio. ¿Cu´al es su posici´on en ese instante?

* + - 1. En algunos casos, cuando dos resortes paralelos de constantes *k*1 y *k*2 sostienen un solo contrapeso *W* , la constante efectiva de resorte del sistema es *k* = 4*k*1*k*22*/*(*k*1 + *k*2). Un contrapeso de 20 Ib estira 6 in un resorte y 2 in otro. Estos resortes est´an fijos a un soporte r´ıgido comu´n por su parte superior y a una placa met´alica en su extremo inferior. El contrapeso de 20 *lb* est´a fijo al centro de la placa del sistema. Determine la constante efectiva de resorte de este sistema. Deduzca la ecuaci´on del movimiento, si el contrapeso parte de la posici´on de equilibrio, con una velocidad de 2 *ft/s* hacia abajo.
      2. Al fijar un contrapeso de 24 lb al extremo de un resorte, lo estira 4 pulg. Deduzca la ecuaci´on de movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que est´a 3 pulg arriba de la posici´on de equilibrio.
      3. Un resorte de 4 pies alcanza 8 pies al colgarle un co√ntrapeso de 8 lb. El medio a trav´es del cual se

mueve ofrece una resistencia num´ericamente igual 2 veces de su velocidad instant´anea. Deduzca

la ecuaci´on de movimiento si el contrapeso se suelta de la posici´on de equilibrio con una velocidad de 5 pie/s hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posici´on de equilibrio. ¿Cual es su posici´on en ese instante?

### Ejercicios Mixtos

* + - 1. En c´alculo diferencial, la curvatura de una curva representada por *y* = *f* (*x*) se define como sigue:

*y*jj

*κ* = *.*

[1 + (*y*j)2]3*/*2

Determine una funci´on, *y* = *f* (*x*) para la cual *κ* = 1.

**Cap´ıtulo 6**

# Series de Potencias

Hasta el momento hemos visto como solucionar la ecuaci´on

*E*−1 *n*

Σ

*S*(*E, n, d*) =

Σ*v*

(−1)*v*−*i*

*v* (1 + *id*)*E*

+ *n*

*E*!*dE* (6.1)

*v*=0

*v* +1

*i*

*i*=0

*E* +1

*E* ∈ N*,n* ∈ N*,n > E,d* ∈ R*E* ∈ N*,n* ∈ N*, n > E, d* ∈ R

*y*jj + *ay*j + *by* = *R,*

donde *a* y *b* son constantes y *R* es una funci´on continua en *I*. Ahora trataremos de solucionar la ecuaci´on

*P*2(*x*)*y*jj + *P*1(*x*)*y*j + *P*0(*x*)*y* = 0*,*

donde *P*1, *P*2, *P*0 son funciones anal´ıticas, es decir se pueden expresar como una serie de potencias. La soluci´on a esta ecuaci´on involucra series de potencias, es decir de la forma

∞

Σ *n*

*y*(*x*) = *an*(*x* − *x*0) *,*

*n*=0

o de una forma m´as general:

∞

*y*(*x*) = *an*(*x* − *x*0) *q*(*x*)*,*

Σ *n*

*n*=0

donde *q*(*x*) es una funci´on en *x*. Las mismas ideas se pueden aplicar a las ecuaciones de otros ´ordenes, y tambi´en directamente a ecuaciones no-homog´eneas. Antes de empezar este an´alisis, es necesario repasar las propiedades pertinentes de las series de potencias. Para cada serie de potencia *n*∞=0 *an*(*x* − *x*0)*n*,

Σ

existe un valor no negativo fijo *R* denominado radio de convergencia, tal que cuando |*x* − *x*0| *< R*, la serie

converge y cuando |*x* − *x*0| *> R*, ella diverge. Decimos que la serie converge absolutamente si la serie de valores absolutos converge, es decir *n*=0 |*an*(*x* − *x*0)| converge para el mismo radio. La convergencia absoluta siempre implica la convergencia ordinaria.

Σ∞ *n*

Las series de potencias son simplemente una generalizaci´on de los polinomios, y muchas veces se pueden manipular de manera an´aloga. Las series se pueden sumar, restar, multiplicar, y si el denominador no es igual a cero, dividir. La derivaci´on y la integraci´on de funciones representadas por series de potencias se permiten t´ermino a t´ermino dentro del radio de convergencia.

Anteriormente dijimos que los coeficientes de la ecuaci´on eran funciones anal´ıticas, es decir, de la forma

(*n*)

Σ∞*n*=0

*an*(*x* − *x*0)*n*, con un radio de convergencia *R*. En este caso es f´acil verificar que *an*

*f* (*x*)

= , y de

*n*!

hecho esta igualdad se puede utilizar para construir la serie ya que viene dada en base a las derivadas

de la funci´on que es anal´ıtica. Utilizaremos varios criterios para analizar la convergencia de nuestras

164

series de potencias. Los m´as importantes son los de la raz´on, de comparaci´on, y series geom´etricas. Se encuentran tambi´en los criterios de la ra´ız y de la integral. Nuestro inter´es es una ecuaci´on diferencial lineal homog´enea

*y*(*n*) + *P*1(*x*)*y*(*n*−1) + · ·· + *Pn*(*x*)*y* = 0*,*

donde *P*1, *P*2,.. ., *Pn*, son coeficientes anal´ıticos con radio de convergencia *R*, puede demostrarse que existen *n* soluciones linealmente independientes *u*1, *u*2,.. ., *un*, cada una de las cuales es anal´ıtica con el mismo radio de convergencia. Demostraremos este teorema para ecuaciones diferenciales de orden dos.

**Teorema 6.0.1.** *Sean P*1 *y P*2*, funciones anal´ıticas con un radio de convergencia R, tales como*

∞

Σ

*entonces la ecuaci´on diferencial*

*P*1(*x*) =

*P*2(*x*) =

*bn*(*x* − *x*0)*n*

*n*=0

∞

Σ *n*

*cn*(*x* − *x*0) *,*

*n*=0

*y*jj + *P*1(*x*)*y*j + *P*2(*x*)*y* = 0*,* (6.2)

*tiene dos soluciones linealmente independientes u*1 *y u*2 *que son anal´ıticas con el mismo radio de conver- gencia.*

Σ

*Demostraci´on.* Sea *y* = ∞*n*=0 *an*(*x* − *x*0)*n* soluci´on de la ecuaci´on (1), convergente dentro de un radio dado. Hallemos los coeficientes *an*, para que se satisfaga nuestra condici´on. Como *y* es soluci´on de la ecuaci´on, entonces la verifica, luego derivando una y dos veces tenemos

∞ ∞

*y*j = Σ *nan*(*x* − *x*0)*n*−1 = Σ(*n* + 1)*an*+1(*x* − *x*0)*n*

*n*=1

∞

*n*=0

∞

*y*jj = Σ *n*(*n* − 1)*an*(*x* − *x*0)*n*−2 = Σ(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2(*x* − *x*0)*n.*

*n*=2

*n*=0

Los productos *P*1(*x*)*y*j y *P*2(*x*)*y* vienen dados por las series de potencias:

*P*1(*x*)*y*j =

*P*2(*x*)*y* =

*n*Σ=0

Σ

∞

∞

*n*=0

Σ*n*

Σ*n*

*k*=0

*k*=0

(*k* + 1)*ak*+1*bn*−*k*

(*x* − *x*0)*n.*

*akcn*−*k*

(*x* − *x*0)*n*

Sustituyendo en la ecuaci´on (6.2), tenemos:

∞

*n*

Esto se tiene si

*n*Σ=0

(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 +

Σ*k*=0

[(*k* + 1)*ak*+1*bn*−*k* + *akcn*−*k*]

*n*

Σ

(*x* − *x*0)*n* = 0*.*

(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 = − [(*k* + 1)*ak*+1*bn*−*k* + *akcn*−*k*] *.*

*k*=0

Para *n* = 0*,* 1*,* 2*,. ..* , esta f´ormula expresa *an*+2 en funci´on de los coeficientes anteriores *a*0*, a*1*,. .., an*+1, y los coeficientes de las funciones dadas *P*1 y *P*2 convergen absolutamente para *x* = *x*1, los t´erminos de esas series est´an acotados, es decir

|*bk*| *tk* ≤ *M*1 *y* |*ck*| *tk* ≤ *M*2*.*

Para ciertos *M*1 y *M*2 positivos. Sea *M* el mayor entre *M*1 y *M*2 entonces

*M*1 *M*1

|*bk*|≤ *tk y* |*ck*|≤ *tk*+1

Luego de la f´ormula de recurrencia tenemos

Σ *M M*

*n*

(*n* + 2)(*n* + 1) |*an*+2|≤

*k*=0

(*k* + 1) |*ak*+1| *tn*−*k* + |*ak*| *tn*−*k*+1

*n*

Σ

*n*

*k*+1 *n*+1

*M*

= *tn*+1

(*k* + 1) |*ak*+1| *tk*+1 + Σ

|*ak*+1| *t* + |*a*0|− |*an*+1| *t*

*k*=0

Σ

*M n*

= *tn*+1

*k*=0

(*k* + 2) |*ak*+1| *tk*+1 + |*a*0|

*k*=0

*k*

*n*+1

Σ |

= *M* (*k* + 1) *a*

*tn*+1 *k*

*k*=0

| *t .*

Hagamos *A*0 = *a*0, *A*1 = *a*1 y definimos *A*2*, A*3*,. ..* , mediante la f´ormula de recurrencia

(*n* + 2)(*n* + 1)*An*+2

*n*+1

= *M* (*k* + 1)*A*

Σ

*tn*+1 *k*

*k*=0

*tk* para *n* ≥ 0 (6.3)

ΣEntonces |*an*| ≤ *An* para todo *n* mayor o igual a cero. Luego Σ∞*n*=0 *an* − (*x* − *x*0)*n* es menor que

∞*n*=0

De (6.3) tenemos que:

Σ

*An* |*x* − *x*0|*n*.

(*n* + 2)(*n* + 1)*An*+2

*n*+1

= *M* (*k* + 1)*A tk tn*+1 *k*

*k*=0

*n*

Σ

(6.4)

(*n* + 1)*nA*

*n*+1

= *M* (*k* + 1)*A tk*

*tn k*

*k*=0

*n*

Σ

*tn*−1(*n* + 1)*nAn*+1

De (6.4) restamos (6.5), y obtenemos:

= *M* (*k* + 1)*A*

*tn*+1 *k*

*k*=0

*tk.* (6.5)

Luego

(*n* + 2)(*n* + 1)*An*+2 − *t*−1*n*(*n* + 1)*An*+1 = *M* (*n* + 2)*An*+1*.*

(*n* + 1)*n* + (*n* + 2)*Mt*

Hallemos

*An*+2 = *An*+1

*.*

(*n* + 2)(*n* + 1)*t*

*An*+2 |*x* − *x*0|*n*+2

(*n* + 1)*n* + (*n* + 2)*Mt*

|*x* − *x*0|

*An*+1

*n*+1 =

|*x* − *x*0|

Este l´ımite es menor que 1 si |*x* − *x*0| *< t*, luego Σ*n*∞=0 *an*(*x* − *x*0)*n* converge si |*x* − *x*0Σ| *< t*. Pero como

(*n* + 2)(*n* + 1)*t* |*x* − *x*0|→

*t cuando n* →∞

converge para todo *x* en (*x*0 − *R, x*0 + *R*). Como los coeficientes de ∞*n*=0 *an*(*x* − *x*0)*n* aparecen en funci´on de *a*0 y *a*1, sea *u*1 la serie de potencias soluci´on tal que *a*0 = 1 y *a*1 = 0, entonces:

Σ

*t* = |*x*1 − *x*0|, y , *x*1 es un punto arbitrario del intervalo (*x*0 − *R, x*0 + *R*). Luego la serie

∞*n*=0 *an*(*x* − *x*0)*n*

*u*1(*x*0) = 1 *y u*j1(*x*0) = 0*.*

Dado que *u*2 una soluci´on con *a*0 = 0, y, *a*1 = 1 entonces

*u*2(*x*0) = 1 *y u*j2(*x*0) = 0*.*

Por lo tanto las soluciones *u*1 y *u*2 ser´ıan funciones anal´ıticas linealmente independientes.

**Ejemplo 6.0.1.** *Hallar la soluci´on de y*jj − *xy* = 0*.*

**Soluci´on:** Sea *y* = Σ∞*n*=0 *anxn* soluci´on a la ecuaci´on dada, en este caso tomamos *x*0 = 0. Entonces

∞ ∞

*y*jj = Σ *n*(*n* − 1)*anxn*−2 = Σ(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2*xn,*

*n*=2

y

*n*=0

∞ ∞

*xy* = Σ *anxn*+1 = Σ *an*−1*xn,*

luego

*n*=0

∞

Σ

*n*=0

∞

Σ

*y*jj − *xy* = (*n* + 2)(*n* + 1)*an*

*n*

*n*=0

∞

Σ

2*xn* − *a*

*n*=1

*n*−1*x*

lo cual es cierto si

Si *n* = 0*,* 1*,* 2*,. ..* , entonces

=2*a*2 + [(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 − *an*−1] *xn* = 0*,*

*n*=0

*a*2 = 0 *y* (*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 − *an*−1 = 0

*an*+2

= *an*−1

(*n* + 2)(*n* + 1)

*para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

De donde podemos deducir que:

*a*3*n*

*a*

*a*0

=

2 · 3 · 5 · 6 · ·· (3*n* − 1)3*n*

*a*

=

1

*para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

*para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

3*n*+1

3 · 4 · 6 · 7 · ·· (3*n*)(3*n* + 1)

*a*3*n*+2 = 0 *para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

De esta manera vemos que todos los coeficientes *an* est´an determinados en base a *a*0 y *a*1. Agrupando todos los t´erminos que contienen como factores a *a*0 y *a*1, obtenemos:

*x*3 *x*6 *x*4 *x*7

*y* = *a*0

1 + 3 · 2 + 6 · 5 · 3 · 2 + · ·· + *a*1 *x* + 4 · 3 + 7 · 6 · 4 · 3 + · ··

De donde podemos decir que

∞ 3*m*

*u* (*x*) = 1 + Σ *x*

1

*n*=1

∞

2 · 3 · 5 · 6 · ·· (3*n* − 1)3*n*

3*n*+1

*u* (*x*) = *x* + Σ *x .*

*n*=1

2

3 · 4 · 6 · 7 · ·· (3*n*)(3*n* + 1)

Veamos que *u*1 es convergente, empleando el criterio del cociente; si expresamos

∞

Σ

*u*1(*x*) = 1+ *dn*(*x*)*.*

*n*=1

Tenemos que:

*dn*1(*x*) = .

*x*3*n*+32*,*3*,*5*,*6 *. ..* (3*n* − 1)(3*n*) .

. *dn*(*x*) .

. .

. 2*,*3*,*5*,*6 *. ..* (3*n* − 1)(3*n*)(3*n* + 2)(3*n* + 3)*.x*3*n* .

= (3*n* + 2)(3*n* + 3) → 0 *si n* → ∞*,*

| 3*x*|

luego *u*1 converge para todo *x* real. Dejamos al lector la demostraci´on de la convergencia de *u*2 y el hecho que *u*1 y *u*2 son linealmente independientes.

## Ecuaci´on de Legendre

Algunas de las ecuaciones diferenciales importantes que surjan en problemas f´ısicos, son ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes anal´ıticos. Una de ellas es la ecuaci´on de Legendre

*L*(*y*) = (1 − *x*2)*y*jj − 2*xy*j + *a*(*a* + 1)*y* = 0*,* donde *a* es una constante. Si esta ecuaci´on la escribimos:

*y*jj − 2*x y*j + *a*(*a* + 1) *y* = 0*.*

1 − *x*2 1 − *x*2

Vemos que las funciones −2*x* y *a*(*a* + 1) son anal´ıticas en *x* = 0, ya que tienen un desarrollo en serie de

1 − *x*2 1 − *x*2

potencias y convergen para |*x*| *<* 1. Nuestro inter´es es hallar una base para las soluciones a esta ecuaci´on.

Sea

∞

Σ *n*

*y* = *anx ,*

*n*=0

luego

∞

Σ *n* 1

*y*j = *nanx* −

*n*=1

∞

Σ *n*

−2*xy*j = −2*nanx*

*n*=1

∞

Σ *n*

= −2*nanx*

*n*=0

∞

Σ *n* 2

*y*jj = *n*(*n* − 1)*anx* −

*n*=2

∞

Σ *n*

= (*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2*x*

*n*=0

∞

2 Σ *n*

−*x y* = *n*(*n* − 1)*anx .*

*n*=0

Entonces

*L*(*y*) =

=

∞

[(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 − *n*(*n* + 1)*an* − 2*nan* + *a*(*a* + 1)*an*] *x*

Σ *n*

*n*=0

∞

Σ *n*

[(*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 + (*a* + *n* + 1)(*a* − *n*)*an*] *x* = 0*.*

*n*=0

Luego los coeficientes de todas las potencias de *x*, deben ser iguales a cero, es decir (*n* + 2)(*n* + 1)*an*+2 + (*a* + *n* + 1)(*a* − 1)*an* = 0 *para n* = 0*,* 1*,. ..*

Por lo tanto

*an*+2

= (*a* + *n* + 1)(*a* − *n*) *a* (*n* + 2)(*n* + 1)

*para n* = 0*,* 1*,. ..*

*n*

Al desarrollar esta f´ormula recurrente, tenemos que

−

(−1)*n*(*a* + 2*n* − 1)(*a* + 2*n* − 3) *. ..* (*a* + 1)(*a*)(*a* − 2) *. ..* (*a* − 2*n* + 2)

*a*2*n* =

*a*2*n*+1 =

(2*n*) *a*0

(−1)*n*(*a* + 2*n*)(*a* + 2*n* − 2) *. ..* (*a* + 2)(*a* − 1)(*a* − 3) *. ..* (*a* − 2*n* + 1) (2*n* + 1)

*a*1

Todos los coeficientes pueden determinarse a partir de *a*0 y *a*1, entonces

*y*(*x*) = *a*0*u*1(*x*) + *a*1*u*2(*x*)*,*

donde

*u* (*x*) =1 − (*a* + 1) *x*2 + (*a* + 3)(*a* + 1)*a*(*a* − 2) *x*4 + − *. ..*

1 2 4

∞ *n*

Σ

=1 + (−1)

*n*=1

(*a* + 2*n* − 1)(*a* + 2*n* − 3) *. ..* (*a* + 1)(*a*)(*a* − 2) *. ..* (*a* − 2*n* + 2) *x*2*n*

2*n*

*u* (*x*) =*x* − (*a* + 1)(*a* − 1) *x*3 + (*a* + 4)(*a* + 2)(*a* − 1)(*a* − 3) *x*5 + −· ··

2 2 (5)

∞ *n*

Σ −*u* (*x*) =*x* +

( 1)

2

*n*=1

(*a* + 2*n*)(*a* + 2*n* − 2) *. ..* (*a* + 2)(*a* − 1)(*a* − 3) *. ..* (*a* − 2*n* + 1) *x*2*n*+1*,*

(2*n* + 1)

las series *u*1 y *u*2 son soluciones de la ecuaci´on de Legrende, que corresponden a las siguientes constantes:

*a*0 = 1 *a*1 = 0 *y*

*a*0 = 0 *a*1 = 1

Respectivamente, estas funciones forman una base para las soluciones, ya que

Luego

*u*1(0) = 1 *u*2(0) = 0

*u*j1(0) = 0 *u*j2(0) = 1*.*

*W* [*u*1*, u*2] /=*.* 0

Es importante notar que si *a* es un entero par no negativo, entonces *u*1 solamente tiene un nu´mero finito de t´erminos diferentes de cero. M´as au´n, en este caso *u*1 es un polinomio de grado *n* que contiene solamente potencias pares de *x*. Por ejemplo:

*u*1(*x*) =1 *para a* = 0

*u*1(*x*) =1 − 3*x*2 *para a* = 2

2 35 4

*u* (*x*) =1 − 10*x* + *x para a* = 4*,*

1

3

la soluci´on *u*2 no es un polinomio en este caso, ya que ninguno de sus coeficientes se anula. Ocurre una situaci´on similar cuando *a* es un entero impar no negativo. Se deja al lector la demostraci´on de que *u*1 y *u*2 son convergentes para |*x*| *<* 1.

## Ecuaciones lineales con puntos singulares regulares

Dada la ecuaci´on diferencial

*L*(*y*) = *P*0(*x*)*y*(*n*) + *P*1(*x*)*y*(*n*−1) + · ·· + *Pn*(*x*)*y* = 0*,*

donde *P*0*, P*1*, P*2*,. .., Pn* son anal´ıticos en algu´n punto *x*0, y vamos a examinar el caso en el cual *P*0(*x*0) = 0, dicho punto se llama un punto singular de la ecuaci´on diferencial dada; trataremos de resolver el problema alrededor de una vecindad de *x*0, entonces a dicho punto lo llamaremos punto singular regular. Ilustremos el m´etodo con un ejemplo.

**Ejemplo 6.2.1.** *Hallemos la soluci´on de L*(*y*) = *x*2*y*jj + 3 *xy*j + *xy* = 0*, la cual tiene un punto singular regular en el origen. Restringimos a x >* 0*, solamente.* ***Soluci´on:*** *Supongamos que la soluci´on a la ecuaci´on es de la forma*

2

∞

Σ*r n*

*y* = *x anx ,*

*n*=0

*Con a*0 =/0*. Esta idea es sencilla, hacemos formalmente las operaciones y buscamos las condiciones que deben ser satisfechas por r, a*0*, a*1*,. .. para que esta funci´on sea soluci´on a la ecuacio´n dada, tenemos que*

∞

Σ *n*+*r* 1

*y*j = (*n* + *r*)*anx* −

*n*=0

∞

Σ *n*+*r* 2

*y*jj = (*n* + *r*)(*n* + *r* − 1)*anx* −

*n*=0

∞

Σ2 *n*+*r*

*x y*jj = (*n* + *r*)(*n* + *r* − 1)*anx*

*n*=0

∞

3 *xy*j = Σ 3 (*n* + *r*)*a*

*xn*+*r*

2 2 *n n*=0

∞

Σ

*xy* = *anxn*+*r*+1*.*

*n*=0

*Reemplazando en la ecuaci´on original tenemos:*

∞

Σ

*L*(*y*) =

*n*=0

(*n* + *r*)(*n* + *r* −

3

1) + (*n* + *r*)

2

*xn*+*r* + *xn*+*r*+1 *an*

= *r*(*r* −

3

1) + *r*

2

*a*0*xr*

+

∞

Σ

*n*=1

(*n* + *r*)(*n* + *r* −

3

1) + (*n* + *r*)

2

*an* + *an*−1

*xn*+*r*

=*r*  *r* + 1 *a xr* + Σ∞

2

0

(*n* + *r*)(*n* + *r* + 2 )*an* + *an*−1

*n*=1

1 *xn*+*r* = 0*.*

*Luego*

*r r* + 1 = 0 *y* (*n* + *r*) *n* + *r* + 1 *a* + *a*

= 0 *para n* = 1*,* 2*,. ..*

2

*Sean*

2 *n n*−1

*q*(*r*) = *r r* + 1 *y q*(*r* + *n*) = (*n* + *r*) *n* + *r* + 1 *para n* = 1*,* 2*,. ..*

2 2

*Luego L*(*y*) = 0 *se verifica si*

*q*(*r*) = 0 *y q*(*n* + *r*)*an* + *an*−1 = 0 *para n* = 1*,* 2*,. ..*

*Al polinomio q se llama polinomio indicial de la ecuaci´on diferencial dada. Adem´as es el coeficiente de la m´ınima potencia de x que aparece en L*(*y*)*, y vemos que sus ra´ıces son los u´nicos valores posibles de r para los cuales existen soluciones de la forma*

∞

Σ*r n*

*y* = *x anx .*

*n*=0

*En nuestro caso las ra´ıces de q son r*1 = 0*, r*2 = 1 *. Como q*(*r* + *n*)*an* + *an*−1 = 0 *para n* = 1*,* 2*,. .. ,*

2

*entonces*

*si*

*a* = −*an*−1

*q*(*r* + *n*)

*n*

*para n* = 1*,* 2*,. ..*

*r*1 = 0*, q*(*r*1 + *n*) = *q*(*n*) /= 0 *para n* = 1*,* 2*,. ..*

*como la otra ra´ız de q es r*2 = − 1 *, en forma similar, tenemos*

2

1

*q*(*r*2 + *n*) = *q*(− 2 + *n*) /= 0 *para n* = 1*,* 2*,. ..*

*haciendo a*0 = 1 *y r* = *r*1 = 0 *tenemos a u*1 *de la forma*

∞ *n n*

*u* (*x*) = 1 + Σ (−1) *x ,*

*n*=1

1

*q*(*n*)*q*(*n* − 1) *.. . q*(1)

*y haciendo a*0 = 1 *y r* = *r*1 = − 1

2

*tenemos a u*2*, otra soluci´on*

1 1 ∞

*n*=1

2

2

2

(−1)*nxn*

*u*2(*x*) = *x*− 2 + *x*− 2 + Σ *q*(*n* − 1 )*q*(*n* − 3 ) *.. . q*( 1 ) *.*

Dejamos al lector la prueba de que *u*1 y *u*2 convergen para todo *x* real y que son linealmente independientes, es decir, forman una base del espacio soluci´on de la ecuaci´on

*x*2*y*jj +

3 *xy*j 2

+ *xy* = 0*.*

El siguiente teorema justifica el m´etodo utilizado anteriormente.

**Teorema 6.2.1.** *Consideremos la ecuaci´on*

*x*2*y*jj + *P*1(*x*)*xy*j + *P*2(*x*)*y* = 0*,* (6.6)

*donde P*1 *y P*2 *son funciones anal´ıticas, cuya series de potencia, tienen un radio de convergencia R. Sean*

*r*1 *y r*2 *las ra´ıces del polinomio indicial, tal que Re*(*r*1) ≥ *Re*(*r*2)*.*

*q*(*r*) = *r*(*r* − 1) + *P*1(0) + *P*2(0)*.*

*Para x R, existe una soluci´on u*1 *de la forma*

∞

Σ*r nu* (*x*) = *x a x* (*a* = 1)1 *n* 0

1

*n*=0

*Si r*1 − *r*2 *no es nulo, ni un entero positivo, entonces, existe una segunda soluci´on u*2*, para x R, de la forma*

Σ*r nu* (*x*) = *x a*ˆ *x* (*a*ˆ = 1)*,*2 *n* 0

∞

2

*n*=0

*donde ambas series convergen para x R. Los coeficientes an, a*ˆ*n pueden obtenerse, mediante sustituci´on de las soluciones en la ecuaci´on diferencial.*

*Demostraci´on.* Supongamos que existe una soluci´on *y* de la forma

∞

Σ*r n*

*y*(*x*) = *x anx* (*a*0 /= 0)*,*

*n*=0

Σ Σ

para la ecuaci´on *L*(*y*) = *x*2*y*jj + *P*1(*x*)*xy*j + *P*2(*x*)*y* = 0, donde *P*1(*x*) = *n*∞=0 *bnxn y P*2(*x*) =

∞*n*=0 *cnxn* para *x R*. Entonces

∞

Σ*r* 1 *n*

*y*j(*x*) = *x* − (*n* + *r*)*anx*

*n*=0

∞

Σ*r* 2 *n*

*y*jj(*x*) = *x* − (*n* + *r*)(*n* + *r* − 1)*anx*

*n*=0

y entonces los productos *P*1(*x*)*xy*j y *P*2(*x*)*y*, vienen dados por

*P*1(*x*)*xy*j = *xr*

*n*Σ=0

Σ

∞

∞

Σ*n*

Σ*n*

*k*=0

(*k* + *r*)*akbn*−*k x*

*n*

Ahora,

*P*2(*x*)*y* = *xr*

∞

Σ

*n*=0

*k*=0

*akcn*−*k*

*xn.*

*x*2*y*jj = *xr* (*n* + *r*)(*n* + *r* − 1)*anxn,*

*n*=0

luego

*L*(*y*) = *xr*

*n*Σ=0

(*n* + *r*)(*n* + *r* − 1)*an* +

Σ*k*=0

[(*k* + *r*)*akbn*−*k* + *akcn*−*k*]

*xm* = 0*.*

*n*

Luego debe cumplirse

∞

*n*

Σ

(*n* + *r*)(*n* + *r* − 1)*an* + [(*k* + *r*)*akbn*−*k* + *akcn*−*k*] = 0*,*

*k*=0

para *n* = 0*,* 1*,* 2*,. ..,* luego

*n*−1

Σ

[(*n* + *r*)(*n* + *r* − 1) + (*n* + *r*)*b*0 + *c*0] *an* + [(*k* + *r*)*bn*−*k* + *cn*−*k*] *ak* = 0*,*

*k*=0

y para *n* = 0 tenemos que *r*(*r* − 1) + *rb*0 + *c*0 = 0 ya que *a*0 /= 0. El polinomio *q* de segundo grado, dado por

*q*(*r*) = *r*(*r* − 1) + *rb*0 + *c*0*,*

se llama polinomio indicial de la ecuaci´on (6.6), y los u´nicos valores que puede tomar *r*, son las ra´ıces de

*q*, adem´as tenemos

donde

*q*(*r* + *n*)*an* + *dn* = 0*, para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..,*

*n*

Σ

*dn* = [(*n* + *r*)*bn*−*k* + *cn*−*k*] *ak para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

*k*=0

Notemos que *dn* es una combinaci´on lineal de *a*0*, a*1*,. .., a*(*n*−1) cuyos coeficientes involucran las funciones conocidas *P*1*, P*2*, r*. Definimos

*D*1(*r*) = (*rb*1 + *c*1)*a*0

*D*1(*r*)

*C* (*r*) = − *,*

y en general

1

*n*−1

Σ

*q*(*r* + 1)

*Dn*(*r*) =

[(*k* + *r*)*bn*−*k* + *cn*−*k*] *cn*(*r*)

*k*=0

*Dn*(*r*)

*Cn*(*r*) = − *q*(*r* + *n*)

*para n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

Los *Cn* as´ı definidos, son funciones racionales de *r* y en los u´nicos puntos donde no est´an definidos es en los puntos *r* para los cuales *q*(*r* + *n*) = 0, para algu´n *n* = 1*,* 2*,.*  De ´estos, solamente existen dos puntos

posibles. Definimos:

∞

Σ*r r n*

*F* (*x, r*) = *a*0*x* + *x cn*(*r*)*x ,*

*n*=1

si esta serie es convergente para 0 *x R*, entonces

*L* [*F* (*x, r*)] = *a*0*q*(*r*)*xr,*

hemos llegado a la situaci´on de que si la funci´on

∞

Σ

*y* = *xr anxn,*

*n*=0

es soluci´on de *x*2*y*jj + *P*1(*x*)*xy*j + *P*2(*x*)*y* = 0, entonces *r* debe ser una ra´ız del polinomio indicial *q*, y adem´as todos los *an*(*n* ≥ 1) est´an determinados un´ıvocamente en t´erminos de *a*0 y *r* para ser las *Cn*(*r*) siempre y cuando *q*(*r* + *n*) sea distinto de cero para *n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..* y rec´ıprocamente, si *r* es una ra´ız de *q*, y si las *Cn*(*r*) se pueden determinar, entonces la funci´on *y*(*x*) = *F* (*x, r*) es soluci´on de la ecuaci´on

*x*2*y*jj + *P*1(*x*)*xy*j + *P*2(*x*)*y* = 0*.*

Para toda selecci´on de *a*0, siempre y cuando pueda demostrarse que *F* (*x, r*) es convergente. Ejercicio que dejamos al lector, como tambi´en el hecho que las funciones *u*1 y *u*2 son linealmente independientes. Luego como las ra´ıces son *r*1 y *r*2 tales que *q*(*r*1 + *n*) = 0*, q*(*r*2 + *n*) /= 0 para todo *n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..* luego las soluciones son

∞

Σ*r n*

*u*1(*x*) = *x* 1 *cn*(*r*1)*x*

*n*=0

∞

Σ*r n*

*u*2(*x*) = *x* 2 *cn*(*r*2)*x .*

*n*=0

Siempre y cuando *r*1−*r*2 no sea un entero positivo y tampoco cero, ya que *q*(*r*2−*n*)

0, para *n* = 1*,* 2*,* 3*,. ..*

Si *r*1 = *r*2, o *r*1 − *r*2 es un entero positivo, podemos caracterizar las soluciones mediante el siguiente

teorema.

**Teorema 6.2.2.** *Consideremos la ecuaci´on:*

*x*2*y*jj + *P*1(*x*)*xy*j + *P*2(*x*)*y* = 0 *,*

*donde P*1 *y P*2 *tienen desarrollos en series de potencias, los cuales son convergentes para x* ∈ *R. Sean*

*r*1*, r*2 *(con Re*(*r*1) ≤ *Re*(*r*2)*) las ra´ıces del polinomio inicial*

*q*(*r*) = *r*(*r* − 1) + *P*1(0)*R* + *P*2(0) *.*

*Si r*1 = *r*2 *existen dos soluciones u*1*, u*2 *linealmente independientes para* |*x*| ≤ *R, las cuales tienen la forma de*

*u*1(*x*) = |*x*|*r*1+1 [*F*2(*x*)] + [log |*x*|] + *F*1(*x*) *,*

*donde F*1*, F*2 *pueden desarrollarse en series convergentes de potencias para* |*x*| ≤ *R y F*1(0) = 0*. Si r*1 − *r*2 *es un entero positivo, existen dos soluciones u*1*, u*2 *linealmente independientes y definidas para* |*x*| ≤ *R que tienen la forma*

*u*1(*x*) = |*x*|*r*1 [*F*1(*x*)]

*u*2(*x*) = |*x*|*r*2 [*F*2(*x*)] + *M* [log |*x*|] *F*1(*x*)*,*

*donde F*1 *y F*2 *vienen desarrollados en series de potencias convergentes para* |*x*| ≤ *R y adema´s F*1(0) /= 0*,*

*F*2(0) = 0*, M es una constante; puede suceder que M sea igual a cero. Demostraci´on.* Ten´ıamos en la demostraci´on anterior a la funci´on

Σ*r r n*

∞

*F* (*x, r*) = *a*0*x* + *x anx*

*n*=1

y,

*L* [*F* (*x, r*)] = *a*0*q*(*r*)*xr,*

adem´as, *cn*(*r*) se determina por recurrencia mediante las f´ormulas:

*c*0(*r*) = *a*0 = 0

*q*(*r* + *n*)*cn*(*r*) = −*Dn*(*r*)

*n*−1

Σ

*Dn*(*r*) = [(*k* + *r*)*bn*−*k* + *cn*−*k*] *ck*(*r*)*,*

*k*=0

para *n* = 1*,* 2*,* 3*,.* como *q*(*r*1) = 0, *q*j(*r*1) = 0, de donde

*∂* [*L* [*F* (*x, r*)]] = *L ∂F* (*x, r*)

*∂r*

*∂r*

= *a*0 *q*j(*r*) + [log(*x*)*q*(*x*)] *xr ,*

y si tenemos *r* = *r*1 = *r*2, *a*0 = 1, entonces

*∂F*

*u*2(*x*) = *∂r* [(*x, r*1)] *,*

la cual nos dar´ıa una soluci´on de la ecuaci´on, siempre y cuando la serie involucrada converja, entonces

∞ ∞

*u*2(*x*) = *xr*1 Σ *cn*j (*r*1)*xn* + [log(*x*)] *xr*1 Σ *cn*(*r*1)*xn,*

*n*=0

∞

Σ

*n*=0

= *xr*1 *c*j*n*(*r*1)*xn* + [log(*x*)] *u*1(*x*) *,*

*n*=0

donde *u*1 es la soluci´on que ya se hab´ıa obtenido

∞

Σ*r n*

*u*1(*x*) = *x* 1 *cn*(*r*1)*x .*

*n*=0

N´otese que *Cn*j (*r*1) existe para todo *n* = 0*,* 1*,* 2*,. ..* , ya que *cn* es una funci´on racional de *r*, cuyo deno- minador no se anula en *r* = *r*1. Tambi´en *c*0(*r*) = 1 implica que *co*j (*r*) = 0, y as´ı que la serie que en *u*2 multiplica a *xr*1 comienza con la primera potencia de *x*. Ahora supongamos que *r*1 = *r*2 + *m*, donde *m* es un entero positivo. Si *a*0 est´a dado,

*c*1(*r*2)*, c*2(*r*2)*,. .., cm*−1(*r*2) *,*

existen todos y tienen valores finitos, pero dado que

*q*(*r* + *m*)*cm*(*r*) = −*Dm*(*r*)*.*

Encontramos dificultad para calcular *cm*(*r*2); como

*q*(*r*) = (*r* − *r*1)(*r* − *r*2) *,*

luego

*q*(*r* + *m*) = (*r* − *r*2)(*r* + *m* − *r*2)*.*

Si *Dm*(*r*) tambi´en tiene a *r* − *r*2, como factor, esto implica que se puede cancelar el mismo factor en *q*(*r* + *m*), y *Cm*(*r*2) existe, lo cual implica que *Cm*+1(*r*2)*, Cm*+2(*r*2)*,. ..,* existen todos. M´as au´n tenemos *U*2 de la forma

∞

*r* Σ *n*

*u*2(*x*) = *x* 2 *cn*(*r*2)*x ,* [*c*0(*r*2) = 1] *.*

*n*=0

Siempre podremos arreglarla de tal manera que *Dm*(*r*2) = 0, para ello escogemos *C*0(*r*) = *r* − *r*2. Como *q*(*r* + *n*) = *Cn*(*r*) = −*Dn*(*r*). Vemos que *Dn*(*r*) es lineal homog´enea en *C*0(*r*)*, C*1(*r*)*,. .., Cn*−1(*r*) y por consiguiente *Dn*(*r*) tiene a *Cn*(*r*) = *r* − *r*2, como factor. As´ı *cm*(*r*2) existir´a en forma de nu´mero finito. Definimos

Σ*r n*

Encontramos que

∞

*G*(*x, r*) = *x cn*(*r*)*x* [*c*0(*r*) = *r* − *r*2] *.*

*n*=0

*L* [*G*(*x, r*)] = (*r* − *r*2)*q*(*r*)*xr.*

Haciendo *r* = *r*2, obtenemos entonces una soluci´on *g* dada por

*g*(*x*) = *G*(*x, r*2)*.*

Sin embargo,

*C*0(*r*2) = *C*1(*r*2) = · ·· = *Cm*−1(*r*2) = 0*.*

As´ı, la serie que define a *g* realmente comienza con la n-´esima potencia de *x* y entonces *g* tiene la forma:

*g*(*x*) = *xr*2+*m* [*F* (*x*)] = *xr*1 [*F* (*x*)] *,*

donde *F* es una serie de potencias. De donde concluimos que *g* es un mu´ltiplo constante de la soluci´on *u*1 que ya se hab´ıa obtenido. Lo cual nos lleva a obtener la soluci´on asociada con *r*2, derivamos a *L* [*G*(*x, r*)] con respecto a *r*, obteniendo:

*∂* [*L* [*G*(*x, r*)]] = *L* ( *∂G*)(*x, r*)

*∂r ∂r*

= *q*(*r*)*xr* + (*r* − *r*2) *q*j(*r*) + (log(*x*))*q*(*r*) *xr.*

Haciendo *r* = *r*2, hallamos que *u*2 dada por

*∂G*

*u*2(*x*) = *∂r* (*x, r*2)*.*

La cual es soluci´on, siempre y cuando las series involucradas sean convergentes, tiene la forma

∞ ∞

*u*2(*x*) = *xr*2 Σ *cn*j (*r*2)*xn* + (log(*x*))*xr*2 Σ *cn*(*r*2)*xn,*

donde *c*0(*r*) = *r* − *r*2. Dado que

*n*=0

*n*=0

o sea

donde *M* es una constante.

*c*0(*r*2) = *c*1(*r*2) = · ·· = *cm*−1(*r*2) = 0*,*

∞

Σ*r n*

*u*2(*x*) = *x* 2 *cn*j (*r*2)*x* + *M* (log(*x*))*u*1(*x*) *,*

*n*=0

El m´etodo empleado en esta secci´on para obtener soluciones alrededor de algu´n punto singular, se llama

*M´etodo de Frobenius*.

## Ecuaci´on de Bessel

Nuestro objetivo es solucionar la ecuaci´on

*x*2*y*jj + *xy*j + (*x*2 − *p*2)*y* = 0*.*

Utilizando la t´ecnica presentada anteriormente, o sea hallar una base del espacio soluci´on de la ecuaci´on citada, alrededor de cero, bajo la condici´on de que *p* es un real, como vimos anteriormente se denomina la ecuaci´on de Bessel de orden *p*. Tenemos que el polinomio indicial asociado a la ecuaci´on es

*r*2 − *p*2 = 0*,*

cuyas ra´ıces son ±*p*, de donde el Teorema 6.6 garantiza que la ecuaci´on de Bessel de orden *p* posee una soluci´on, v´alida para todo *x*, de la forma

∞

Σ*p n*

*u*1(*x*) = *x anx .*

*n*=0

Para hallar los *an*, observamos que

∞ ∞

(*x*2 − *p*2)*u*1(*x*) =*xp* Σ *an*−2*xn* − *xp* Σ *p*2*anxn*

*n*=2

∞

Σ*p n*

*xu*1j (*x*) =*x* (*n* + *p*)*anx*

*n*=0

∞

Σ

*n*=0

*x*2*u*jj(*x*) =*xp* (*n* + *p*)(*n* + *p* − 1)*anxn.*

*n*=0

Al reemplazar en la ecuaci´on original tenemos

∞ ∞

Σ (*n* + *p*)(*n* + *p* − 1)+ (*n* + *p*) − *p*2 *anxn* + Σ *an*−2*xn* = 0*,*

*n*=0

o

∞

Σ

*n*=2

y tenemos por tanto

(2*p* + 1)*a*1*x* + [*n*(2*p* + *n*)*an* + *an*−2] *xn* = 0 *,*

*n*=2

*a*1 = 0*, an*

= *an*−2 *,n* 2*. n*(2*p* + *n*)

De esto se sigue de inmediato que

— ≥

*a*1 =*a*3 = *a*5 = · ·· = 0

*a*0

*a*2 = − 2(2*p* + 2)

*a*0

*a*4 = *,*

2 · 4(2*p* + 2)(2*p* + 4)

y en general

*a*2*n*

=( 1)*n a*0

2 · 4 · 6 (2*n*) · (2*p* + 2) · (2*p* + 4) (2*p* + 2*n*)

−

=( 1)*n a*0 *,*

−

22*nn*!(*p* + 1)(*p* + 2) (*p* + *n*)

de donde

∞ *n*

Σ

*u*1(*x*) = *a*0

(−1) *x*2*n*+*p,* 22*nn*!(*p* + 1)(*p* + 2) *. ..* (*p* + *n*)

*n*=0

en donde *a*0

0 es una constante arbitrar´ıa. Por varias razones, resulta conveniente hacer

1

*a*0 = 2*p*Γ(*p* + 1) *.*

En donde denota la tan conocida funci´on gamma definida por

∫

Γ(*p*) = ∞ *e*−*ttp*−1*dt, p >* 0*,*

0

se puede demostrar que esta integral converge para todo *p >* 0, diverge hacia +∞ cuando *p* = 0 y tiene los valores

Γ(1) = 1*,* Γ(*p* + 1) = *p*Γ(*p*)*, p >* 0*.*

En particular, Γ(*n* + 1) = *n*! Siempre que *n* sea un entero positivo, y por esta raz´on a la funci´on gamma se le conoce tambi´en como la funci´on factorial generalizada. Volvemos ahora al hecho de que si hacemos

1

*a*0 = 2*p*Γ(*p* + 1) para obtener la primera de las dos soluciones particulares necesarias para resolver la

ecuaci´on de Bessel. Esta soluci´on se conoce como la funci´on de Bessel de orden *p* de primera clase, y se

presenta por *Jp*. Tenemos concretamente

∞ 2*n*+*p*

*J* (*x*) = Σ(−1)*n*  *x .*

*n*=0

*p*

22*n*+*pn*!(*p* + 1)(*p* + 2) *. ..* (*p* + *n*)Γ(*p* + 1)

Una expresi´on que puede volverse a escribir en la forma m´as sencilla como

*Jp*(*x*) = Σ

∞

(−1)*n*

Γ(*n* + 1)Γ(*p* + *n* + 1)

*x* 2*n*+*p .*

*n*=0

En particular, cuando *p* = 0, tenemos

Σ (−1)*n x* 2*n*

2

∞

*J*0(*x*) =

*n*=0

En general, cuando *p* es un entero no negativo *k*

2

(*n*!)2 2 *.*

*Jk*(*x*) = Σ

∞

(−1)*n*

(*n*!)2(*n* + *k*)!

*x* 2*n*+*k .*

*n*=0

La gr´afica de *J*0, *J*1 y *J*2 aparecen esbozadas en la Figura 6.1. Para completar el estudio de la ecuaci´on de Bessel, nos falta encontrar una segunda soluci´on linealmente independiente de *Jp*. Usamos de nuevo el Teorema 6.6, dividiendo nuestra argumentaci´on en casos dependientes del valor de *p*.

**Caso 1:** *p >* 0, 2*p* no es entero. En tal caso las ra´ıces de la ecuaci´on indicial no difieren en un entero, y se puede obtener una segunda soluci´on repitiendo el argumento anterior con −*p* en lugar de con *p*. Obviamente esto nos llevar´a a una serie cuyos coeficientes tendr´an la misma forma que anteriormente, y como la funci´on gamma est´a definida para valores negativos no enteros, de donde podemos escribir

2

*J*−*p*(*x*) = Σ

∞

*n*=0

(−1)*n*

Γ(*n* + 1)Γ(*n* − *p* + 1)

*x* 2*n*−*p ,*

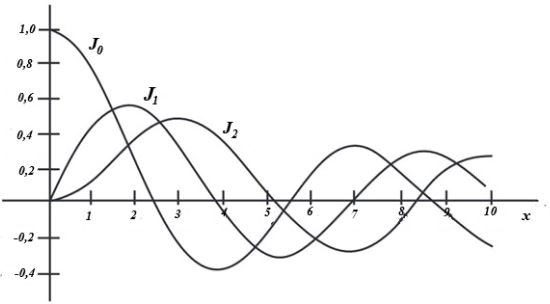


Figura 6.1: Gr´afica de *J*0, *J*1 y *J*2

para *x >* 0. Finalmente observamos que la funci´on est´a definida incluso cuando *p* es de la forma 1

*k* + , *k* un entero, y de nuevo da lugar a una soluci´on que es linealmente independiente de *Jp*. De

2

todo ello se concluye que siempre que *p* no es un entero, la soluci´on general de la ecuaci´on de Bessel

de orden *p* es

*y*(*x*) = *c*1*Jp*(*x*) + *c*2*J*−*p*(*x*)*.*

**Caso 2:** *p* = 0. Aqu´ı la ecuaci´on de Bessel toma la forma

*xy*jj + *y*j + *xy* = 0 *,*

y su polinomio indicial tiene a cero como ra´ız repetida. Por tanto, por el Teorema 6.6, podemos encontrar una segunda soluci´on de la forma

∞

Σ *n*

*u*0(*x*) = *bnx* + *J*0(*x*) ln(*x*)*,*

*n*=1

con *J*0 como anteriormente. Para hallar los valores de *bn*, tenemos que

∞

Σ *n* 1

*xu*0(*x*) = *bn*−2*x* − + *xJ*0(*x*)*ln*(*x*)

*n*=3

∞

*u*j (*x*) = Σ *nb xn*−1 + *J*j (*x*) ln(*x*) + *J*0(*x*)

0 *n* 0 *x*

*n*=1

∞

*xu*jj(*x*) = Σ *n*(*n* − 1)*b xn*−1 + *xJ*jj(*x*) ln(*x*) + 2*J*j (*x*) − *J*0(*x*) *.*

*n* 0 0 *x*

*n*=1

Al reemplazar en la ecuaci´on tenemos

∞

*b*1 + 4*b*2*x* + Σ *n*2*bn* + *bn*−2 *xn*−1 + *xJ*0jj + *J*0j (*x*) + *xJ*0(*x*) ln(*x*) + 2*J*0j (*x*) = 0*,*

*n*=3

y como

*xJ*0jj + *J*0j (*x*) + *xJ*0(*x*) = 0*,*

tenemos

como

∞

*b*1 + 4*b*2*x* + *n bn* + *bn*−2 *x* − = −2*J*0j (*x*)*,*

Σ 2 *n* 1

*n*=3

de donde

0

*n*=1

∞

*J*j (*x*) = Σ(−1)*n*  2*n* · *x*2*n*−1*,*

∞

Σ

22*n*(*n*!)2

∞

Σ − ·

*b*1 + 4*b*2*x* + *n*2*bn*

*n*=3

+ *bn*−2

*xn*−1 = ( 1)*n*+1 4*n x*2*n*−1*.*

22*n*(*n*!)2

*n*=1

Para facilitar la evaluaci´on de los *bn* multiplicamos ahora esta expresi´on por *x* y separamos la serie del primer miembro en sus partes par e impar para obtener

∞ ∞

*b*1*x* + Σ (2*n* + 1)2*b*2*n*+1 + *b*2*n*−1 *x*2*n*+1 + 4*b*2*x*2 + Σ (2*n*)2*b*2*n* + *b*2*n*−2 *x*2*n*

*n*=1

*n*=2

∞

Σ −

= *x*2 + ( 1)*n*+1 4*n x*2*n.*

22*n*(*n*!)2

*n*=2

Luego *b*1 = *b*3 = · ·· = 0, mientras que

4*b*2

= 1 *y* (2*n*)2*b*2*n*

+ *b*2*n*−2

= ( 1)*n*+1 4*n*

22*n*(*n*!)2

−

*n >* 1*,*

de donde

1

*b*2 = 22

*b* = − 1 1 + 1 = − 1 1 + 1

4 22*,*42 2

.

−

22*.*(2!)2 2

*b*2*n*

=( 1)*n*+1 1

22*n*(*n*!)2

1

1 + +

2

· ·· + 1 *,*

y de ello se sigue que

*n*

∞

Σ (−1)*n*+1 1

(*n*!)2

1 *x* 2*n*

2

En el trabajo te´orico con funciones de Bessel es pr´actica comu´n reemplazar *u*0 por una cierta combinaci´on de *J*0 y *u*0. La funci´on resultante se conoce como la funci´on de Bessel de orden cero de segunda clase, y se define por la f´ormula

*u*0(*x*) =

*n*=1

1 + 2 + · ·· + *n*

+ *J*0(*x*) ln(*x*)*.*

2 Σ (−1)*n* 1 1 *x* 2*n* 2 *x*

∞

*u*0(*x*) = − *π*

1 + 2 + · ·· + *n*

+ *π J*0(*x*)

ln + *γ* 2

*,*

*n*=1

(*n*!)2

2

en donde *γ* = 0*,* 57721566 *. ..* , y se conoce como la constante de Euler. La gr´afica de *u*0 la podemos observar en la Figura 6.2.

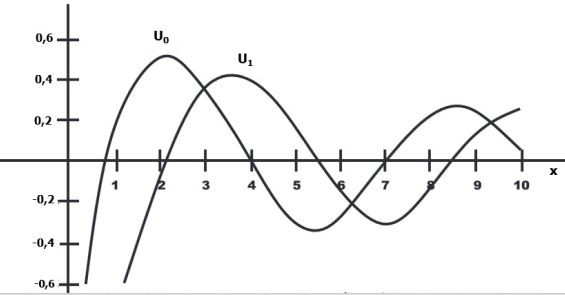


Figura 6.2: Gr´afica de *u*0

**Caso 3:** *p* = *n*, un entero. Esta vez las ra´ıces de la ecuaci´on indicial difieren en 2*n*, y el Teorema 6.2, afirma que la segunda soluci´on de la ecuaci´on de Bessel es de la forma

∞

Σ *k*+*r*

*un*(*x*) = *bkx* + *MJn*(*x*) ln(*x*)*,*

*k*=0

en donde *M* es una constante. Aqu´ı tambi´en podemos calcular los *bk* y *M* por el m´etodo de coefi- cientes indeterminados, similar al m´etodo empleado por el teorema, raz´on por la cual se omitir´a, de donde tenemos

*u* (*x*) = − 1 Σ

∞

*n*

2

(*n* − *k* − 1)! *x* 2*k*−*n* − *Hn x n*

*k*=1

1 Σ (−1)*k* [*Hk* + *Hn*+*k*] *x* 2*k*+*n*

∞

*n*!

2

2*n*!

2

en donde

= − 2

*k*=1

*k*!(*n* + *k*)!

1

2 + *Jn*(*x*) ln(*x*) *,*

1

*Hn* = 1+ 2 + · ·· + *n.*

Es importante notar que es habitual reemplazar *un* por una combinaci´on lineal de *Jn* y *un*, repre- sentada por *un*, que es denominada la funcio´n de Bessel de orden *n* de segunda clase. Se define por la f´ormula

*un*(*x*) = −

1 *n*Σ−1 (*n* − *k* − 1) *x*  2*k*−*n*

*Hn x*

( )

*n*

*π k*! 2

−

*k*=0

*π*(*n*)! 2

1 Σ (−1)*k* [*Hk* − *Hk*+*n*] *x* 2*k*+*n* 2 *x*

∞

= − *π*

+ *π Jn*(*x*)

ln + *γ* 2

*.*

*k*=1

*k*!(*n* + *k*)!

2

## Ejercicios

### Soluciones de ecuaciones cl´asicas

Hallar la soluci´on de

* + - 1. la Ecuaci´on Hipergeom´etrica de Gauss *x*(1 − *x*)*y*jj + [*c* − (*a* + *b* + 1)*x*] *y*j + *aby* = 0, donde *a*, *b* y *c*

son par´ametros fijos.

* + - 1. la Ecuaci´on de Laguerre *xy*jj + (1 − *x*)*y*j + *ay* = 0, donde *a* es un nu´mero real. Si *a* es un entero no negativo, una soluci´on de la ecuaci´on es un polinomio.
      2. la Ecuaci´on de Hermite *y*jj − 2*xy*j + 2*py* = 0, donde *p* es una constante.
      3. la Ecuaci´on de Chebyshev (1 − *x*2)*y*jj − *xy*j + *p*2*y* = 0, donde *p* es una constante.
      4. la Ecuaci´on de Bessel *x*2*y*jj + *xy*j + (*x*2 − *p*2)*y* = 0, donde *p* es un nu´mero real. Las soluciones de esta ecuaci´on se denominan funciones de Bessel.

### Mixtos

* + - 1. Compruebe por sustituci´on directa que la serie de potencias

∞ *n*+1

Σ

(−1) *xn*

*n*

*n*=1

es una soluci´on particular de la ecuaci´on diferencial

(*x* + 1)*y*jj + *y*j = 0

* + - 1. Hallar dos soluciones en series de potencias de la ecuaci´on diferencial

*x*2*y*jj + *xy*j + *x*2 − 1 *y* = 0*.* (6.7)

4

* + - 1. Hallar una soluci´on en series de potencias de la ecuaci´on diferencial

3*xy*jj + *y*j − *y* = 0

alrededor de *x* = 0.

* + - 1. Hallar la soluci´on general en series de potencias de la ecuaci´on diferencial

*y*jj − 2*xy*j + 2*p*2*y* = 0*,*

donde *p* es una constante.

**Cap´ıtulo 7**

# La transformada de Laplace

## Definiciones

Si *f* (*t*) es una funci´on definida para *t* ≥ 0, entonces la integral

∫

∫

*L* {*f* (*t*)} =

∞ *e*−*st*

0

*f* (*t*)*dt* = l´ım

*b*→∞

*b*

*e*−*st*

0

*f* (*t*)*dt* = *F* (*s*)*,*

se llama *Transformada de Laplace* de *f* . El dominio de la funci´on *F* (*s*) consta de aquellos valores de *s*

para los que el l´ımite anterior exista como nu´mero real. Adem´as n´otese que *L* es un operador lineal.

}

**Ejemplo 7.1.1.** *Calcular L e*−3*t*

**Soluci´on:** A partir de la definici´on se tiene que

*L e*−3*t*} = ∫ ∞ *e*−*ste*−3*tdt* = ∫ ∞ *e*−(*st*+3*t*)*dt* = ∫ ∞ *e*−*t*(*s*+3)*dt.* (7.1)

0 0 0

*du du*

Sea *u* = (*s* + 3)*t*, entonces

*dt*

definida en (7.1) se obtiene

*L e*−3*t*} = ∫ ∞ *e*−*u du* = 1 ∫ ∞ *e*−*udu* = − 1 *e*−*u* |∞= − 1 *e*−(*s*+3)∞ + 1 *e*(*s*+3)0*,*

= *s* + 3 o equivalentemente

*s* +3

= *dt.* Reemplazando en la integral

0

dado que

*s* +3

*s* +3 0

*s* +3 0

*s* +3

*s* +3

(7.2)

1 *e*−(*s*+3)∞ = l´ım *e*−(*s*+3)*t* = 0*,*

*s* +3

*t*→∞

para tado *s >* −3, entonces la taransformada definida en (7.2) se reduce a

*L* [*e*3*t*] = 1 *, s >* 3*.*

*s* +3

**Teorema 7.1.1.** *Para k constante se tiene*

1 *k*

*1. L* { 1} (*s*) = *s,s >* 0 *L* { *k*} (*s*) = *s,s >* 0

*2. L tn* (*s*) = *n*! *,s >* 0*,n* = 1*,* 2*,. ..*

{ }

*sn*+1

*3. L eat* (*s*) = 1 *, para s > a*

}

*s* − *a*

183

*k*

1. *L* { sen(*kt*)} (*s*) = *s*2 + *k*2 *, para s >* 0

*s*

1. *L* { cos(*kt*)} (*s*) = *s*2 + *k*2 *, para s >* 0

*s*

1. *L* { sen(*kt*)} (*s*) = *s*2 − *k*2 *, para s >* |*k*|

*k*

1. *L* { cos(*kt*)} (*s*) = *s*2 − *k*2 *, para s >* |*k*|

*8. L tneat* (*s*) = *n*! *, s > a, n* = 1*,* 2*,*

} · ··

(*s* − *a*)*n*+1

*Demostraci´on.* A continuaci´on verificaremos los dos primeros literales.

1. A partir de la definici´on se obtiene

.

*e*

(1)*dt* =

−*s* .

∫ ∞ −*st*

0

*e*−*st* ∞ 1

0

1. La demostraci´on se realiza por el m´etodo de inducci´on. Para ello supongamos que *s >* 0 y utilizamos el siguiente l´ımite

*L* { 1} (*s*) =

= *.*

*s*

. *tn* .

Para *n* = 1 se obtiene tiene

l´ım

*t*→∞

*ect* . = 0*,n* = 1*,* 2*,* · ··

*L* { *t*} (*s*) = ∫ ∞ *e*−*sttdt.* (7.3)

.

0

Resolveremos la integral definida en (7.3) por el m´etodo de integraci´on por partes. Sea *u* = *t* y

*dv* = *e*−*stdt* entonces se tiene *du* = *dt* y *v* = 1 *e*−*st* respectivamente. Luego,

−

*s*

*s* .0 *s* 0

−

*L* { *t*} (*s*) = *te*−*st* .∞ + 1 ∫ ∞ *e*−*stdt*

*s s*

1

0

= − (0 − 0) + 1 1 *e*−*st*.∞

1

= − *s*2 (0 − 1) = *s*2 *.*

Ahoram, supongamos que la hip´otesis se cumple para *n* − 1 y verifiquemos que tambi´en se satisface para *n*. En efecto, sea *u* = *tn* y *dv* = *e*−*stdt*, entonces *du* = *ntn*−1*dt* y *v* = 1 *e*−*st*, respectivamente.

−

*s*

Reemplazando en

se obtiene

*L* { *tn*} (*s*) = ∫ ∞ *e*−*sttndt,*

0

*L* { *tn*} (*s*) = − *tne*−*st* ∞ + *n* ∫ ∞ *e*−*sttn*−1*dt*

*s*

0

*s* 0

`

*L* (*tn*˛−¸1)(*s*) x

= −(0 − 0) + *n L tn*−1} (*s*)

*s*

= *n L tn*−1} (*s*)*.*

*s*

Pero por la hip´otesis de inducci´on

luego

*L tn*−1 (*s*) = (*n* − 1)! *,*

*sn*

}

*L* { *tn*} (*s*) = *n* (*n* − 1)! = *n*! *.*

*s sn*

De manera similar se verifican los literales restantes.

*sn*+1

Si *L* [*f* (*t*)] = *F* (*s*), se dice que *f* (*t*) es la *transformada inversa* de *F* (*s*) y se escribe

*f* (*t*) = *L* −1 {*F* (*s*)}

El siguiente teorema presenta algunas de sus propiedades

**Teorema 7.1.2.** *Para a y k constantes se tiene*

*1. L* −1 1 = 1*, y L* −1 *k* = *k, si s >* 0*.*

1. *L*

*s*

−1 *n*!

*sn*+1

= *tn*

*, y L*

*s*

−1 1

*sn*+1

*tn*

= *, si s >* 0*. n*!

1. *L* −1 1 = *eat, si s > a.*

*s* − *a*

*4. L* −1 *k* = sen(*kt*)*, y L* −1 1 = sen(*kt*) *, si s >* 0*.*

*s*2 + *k*2

*5. L* −1 *s* = cos(*kt*)*, si s >* 0*. s*2 + *k*2

*s*2 + *k*2 *k*

*6. L* −1 *k* = senh(*kt*) *y L* −1 1 = senh(*kt*) *, si s >* |*k*|*.*

*s*2 − *k*2 *s*2 − *k*2 *k*

| |

1. *L* −1 *s* = cosh(*kt*)*, si s > k .*

*s*2 − *k*2

1. *L*

−1 *n*!

(*s* − *a*)*n*+1

= *tn*

*eat*

*y, L*

−1 1

(*s* − *a*)*n*+1

*tneat*

= *, si s > a. n*!

**Ejemplo 7.1.2.** *Evaluar L* −1 3*s* + 1 *.*

(*s* − 3)(*s* + 2)(*s* − 1)

**Soluci´on:** Por medio de fraaciones parciales se obtiene

3*s* + 1

(*s* − 3)(*s* + 2)(*s* − 1)

*A*

= +

*s* − 3

*B*

+

*s* + 2

*C*

*s* − 1

*,* (7.4)

donde *A*, *B* y *C* son constantes. Luego, evaluando la transformada inverersa en la ecuaci´on (7.4) se obtiene

*L* −1 3*s* + 1 = *L* −1 *A* + *B* + *C*

(*s* − 3)(*s* + 2)(*s* − 1)

*s* − 3 *s* + 2 *s* − 1

= *AL* −1 1 + *BL* −1 1 + *CL* −1 1 *.*

*s* − 3

*s* + 2

*s* − 1

Por otro lado, aplicando el m´etodo de fracciones lineales en la ecuaci´on (7.4) obtenemos *A* = 1,

*B* = −1*/*3 y *C* = −2*/*3. Utilizando la tabla de transformadas tenemos

*L* −1 3*s* + 1 = *e*3*t* − 1 *e*−2*t* − 2 *et.*

(*s* − 3)(*s* + 2)(*s* − 1) 3 3

**Ejemplo 7.1.3.** *Con factores lineales repetidos*

*L* −1 *s* + 1 = *L* −1 *A* + *B* + *C* + *D* + *E*

*s*2(*s* + 2)3

*s*

*s*2

*s* +2

(*s* + 2)2

(*s* + 2)3

= *AL* −1 1 + *BL* −1 1 + *CL* −1 1 + *DL* −1 1

*s*

+ *EL* −1 1

(*s* + 2)3

−2*t*

*s*2

*te*−2*t*

*t*2*e*−2*t*

*s* +2

(*s* + 2)2

= *A* + *Bt* + *Ce*

+ *D* + *E .*

1! 2!

*Utilizando el m´etodo de las fracciones parciales tenemos*

1 1 1 1

*luego*

8

*A* = − 16 *, B* = 8 *, C* = 16 *, D* = 0*, E* = − 4 *,*

*L* −1 *s* + 1 = − 1 1

*s*2(*s* + 2)3

+ *t* +

16 8 16

1 *e*−2*t* − 1 *t*2*e*−2*t.*

## Propiedades y Teoremas

Para los teoremas y propiedades se asume que *L* [*f* (*t*)] = *F* (*s*) y *L* [*g*(*t*)] = *G*(*s*)*.*

**Teorema 7.2.1.** *Si f* (*t*) *es continua a trozos para t* ≥ 0 *y de orden exponencial para t > T* (*T* ∈ R*,T >* 0)*, entonces L* [*f* (*t*)] = *F* (*s*) *existe para s > c y para algu´n c* ∈ R*. Adem´as*

l´ım *L* [*f* (*t*)] = l´ım *F* (*s*) = 0*.*

*s*→∞

**Teorema 7.2.2.** *(Primer teorema de Traslaci´on) Si a es un nu´mero real cualquiera, entonces*

*s*→∞

*Equivalentemente, Demostraci´on.*

*L eatf* (*t*) = *F* (*s* − *a*) = *L* [*f* (*t*)]*s*→*s*−*a*

*eatf* (*t*) = *L* −1 [*F* (*s* − *a*)] = *L* [*f* (*s*)*s*→*s*−*a*] *.*

*L eatf* (*t*)} (*s*) = ∫ ∞ *e*−*steatf* (*t*)*dt* = ∫ ∞ *e*−(*s*−*a*)*tf* (*t*)*dt*

0

0

*L* { *f* (*t*)} (*s* − *a*) = *F* (*s* − *a*)*.*

**Nota 7.2.1.** *L* −1 { *F* (*s* − *a*)} = *eatf* (*t*)*. Para el segundo teorema de traslacio´n se usa la funci´on escal´on unitario, definida como sigue*

*a*

*u* (*t*) = 0*,* 0 ≤ *t < a*

1*, t* ≥ *a*

**Teorema 7.2.3.** *(Segundo teorema de Traslaci´on) Si a >* 0*, entonces*

*Equivalentemente,*

###### Corolario 7.2.1.

*L* [*ua*(*t*)*f* (*t* − *a*)] = *e*−*asL* [*f* (*t*)] = *e*−*asF* (*s*)*.*

*ua*(*t*)*f* (*t* − *a*) = *L* −1 *e*−*asF* (*s*) *.*

*L* [*ua*(*t*)*f* (*t*)] = *e*−*asL* [*f* (*t* + *a*)] *.*

**Teorema 7.2.4.** *(Derivadas de una transformada) Para n* = 1*,* 2*,* 3*, ...*

*Equivalentemente,*

*L* [*tn*

*f* (*t*)] = (−1)

1. *L n*

*L sn* {*L* [*f* (*t*)]} *.*

(−1)*n*

*f* (*t*) =

−1 *L n*

*Demostraci´on.* Por inducci´on sobre *n*, se tiene que para *n* = 1 se sigue

∫

*tn L*

*L sn* [*F* (*s*)]

*.*

*F* (*s*) = ∞ *e*−*stf* (*t*)*dt,*

0

luego derivando *F* (*s*) se tiene

*dF* (*s*) *d*

=

*ds*

*ds*

∫ ∞ *e*−*stf* (*t*)*dt*

0

= ∫ ∞ *∂* (*e*−*stf* (*t*))*dt*

= ∫ ∞ −*te*−*stf* (*t*)*dt* = − ∫ ∞ *e*−*st*(*tf* (*t*))*dt*

0

*∂s*

0 0

*def.c.*

entonces

Supongamos que se cumple para *n* = *k*

= −*L* { *tf* (*t*)} (*s*)*,*

*d*

*L* { *tf* (*t*)} (*s*) = − *ds F* (*s*)*.*

*L* , *tkf* (*t*), (*s*) = (−1)*k d*

*k*

*dsk F* (*s*)*.*

Veamos que se cumple para *n* = *k* +1

*L* , *tk*+1*f* (*t*), (*s*) =*L* , *ttkf* (*t*), (*s*)

*n*==1 − *d d* , *tkf* (*t*), (*s*)

*ds*

*n*=*k d*

= − *ds*

(−1)

*dsk F* (*s*)

*k dk*

=(−1)

*k*+1 *dk*+1

*dsk*+1 *F* (*s*)*.*

**Teorema 7.2.5.** *(Transformada de una Derivada)*

*Si f* (*t*)*,f* j(*t*)*,* · ·· *,f* (*n*−1)(*t*) *son continuas para t* ≥ 0 *y de orden exponencial, y si f* (*n*)(*t*) *es continua parte por parte para t* ≥ 0*, entonces,*

*L f* (*n*)(*t*) = *snF* (*s*) − *sn*−1*f* (0) − *sn*−2*f* j(0) − · ·· − *f* (*n*−1)(0)*.*

*Para el siguiente teorema es necesario el producto de convoluci´on de dos funciones, el cual se define como sigue:*

∫

*t*

(*f g*)(*t*) =

∗

0

*f* (*x*)*g*(*t* − *x*)*dx.*

**Teorema 7.2.6.** *(Teorema de Convoluci´on)*

*Si f* (*t*)*, g*(*t*) *son continuas parte por parte y de orden exponencial para t* ≥ 0*, entonces*

*L* [*f* ∗ *g*] = *F* (*s*)*G*(*s*)*.*

*Equivalentemente, En particular*

∫ *t*

*L*

0

*L* −1 [*F* (*s*)*G*(*s*)] = *f* ∗ *g.*

1

*f* (*x*)*dx*

= *L* [1 ∗ *f* (*t*)] = *s F* (*s*)*.*

*Que puede verse como la transformada de una integral.*

**Teorema 7.2.7.** *(Transformada de una Funci´on Peri´odica).*

*Si f* (*t*) *es continua parte por parte y de orden exponencial para t* ≥ 0*, y es peri´odica con periodo T (para*

*T >* 0*,f* (*t* + *T* ) = *f* (*t*)*), entonces*

1 *T*

∫

*L* [*f* (*t*)] = 1 − *e*−*sT*

0

*e*−*st*

*f* (*t*)*dt.*

*Para el u´ltimo teorema que vamos a enunciar es necesario conocer la funci´on Delta de Dirac, definida de la siguiente forma*

*donde,*

*δ*(*t t*0) = l´ım *δa*(*t t*0)*,*

*a*→0

— −

1 *, t*

*δa*(*t* − *t*0) =

2*a*

— *a < t < t* + *a*

0*, t* ≤ *t*0 − *a,* 0 *bien t* ≥ *t*0 + *a*

0

0

*δa*(*t* − *t*0) *es conocida como la funci´on impulso unitario y δ*(*t* − *t*0) *es la llamada* ***Funci´on Delta de Dirac*** *(que entre otras cosas realmente no es una funci´on en el sentido tradicional).*

**Teorema 7.2.8.** *(La transformada de la funci´on Delta).*

*L* [*δ*(*t* − *t*0)] = *e*−*st*0 *.*

*En particular*

*L* [*δ*(*t*)] = 1*.*

## Aplicaciones de la transformada a las Ecuaciones diferenciales

La Transformada de Laplace puede ser utilizada para resolver ecuaciones diferenciales con valores iniciales, ecuaciones integrales y ecuaciones integro diferenciales. Los dos u´ltimos tipos de ecuaciones son como se definen a continuaci´on:

∫

*t*

*f* (*t*) = *g*(*t*) +

0

*f* (*x*)*h*(*t* − *x*)*dx.*

Donde las funciones *g*, *h* son conocidas

j ∫ *t*

0

*f* (*t*) = *g*(*t*) +

*f* (*x*)*h*(*t* − *x*)*dx,* (*E. Integrodiferencial*)

donde las funciones *g*, *h* son conocidas. Para resolver cualquiera de estas ecuaciones se debe tomar trans- formada a ambos lados de la igualdad, resolver la ecuaci´on algebraica en *s* y luego tomar transformada inversa para hallar la soluci´on en *t*.

Pasos:

* Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuaci´on.
* Aplicar el teorema de la transformada de la derivada.

*L y*j} = *sY* (*s*) − *y*(0)

}jj 2 j*L y* = *s Y* (*s*) − *sy*(0) − *y* (0)*.*

**Nota 7.3.1.** *Cuando las condiciones iniciales no est´an dadas en t* = 0*, sino en t* = *a, se hace el cambio de variable τ* = *t* − *a, con este cambio de variable, la nueva E.D. tiene condiciones iniciales en τ* = 0

* + 1. *Conseguir una funci´on en s, es decir, despejar Y* (*s*)*.*
    2. *Hallar la transformada inversa: y*(*t*) = *L* −1 {*Y* (*s*)} *.*

**Ejemplo 7.3.1.** *Hallar la soluci´on del problema de valores iniciales definido por y*jj 6*y*j + 9*y* = *t*2*e*3*t, y*(0) = 2 *y y*j(0) = 6*.*

−

**Soluci´on:** Evaluando la transformada de Laplace en la ecuaci´on se obtiene la siguiente ecuaci´on

} } }

*L y*jj − 6*L y*j + 9*L* {*y*} = *L t*2*e*3*t .* (7.5)

Aplicando las propiedades de la transformada en la ecuaci´on (7.5) se obtiene

*s*2*Y* (*s*) *sy*(0) *y*j(0) 6(*sY* (*s*) *y*(0)) + 9*Y* (*s*) = 2! *.* (7.6)

— − − −

(*s* − 3)3

Reemplazando las condiciones inciales en la ecuaci´on (7.6) se obtiene

*s*2*Y* (*s*) *s*(2) 6 6(*sY* (*s*) 2) + 9*Y* (*s*) = 2! *.*

— − − −

(*s* − 3)3

o equivalentemente

*s*2*Y* (*s*) 6(*sY* (*s*)) + 9*Y* (*s*) = 2! + 2(*s* 3)*.* (7.7)

(*s* − 3)3

— −

A partir de de la ecuaci´on (7.7) se obtiene

2!

*Y* (*s*) = (*s* − 3)5

+ 2(*s* − 3) *.* (7.8)

(*s* − 3)2

Por lo tanto, evalaundo la transformada inversa en la ecuaci´on (7.8) obtenemos

*y*(*t*) = *L* −1

2!

{*Y* (*s*)} = 4! *L*

−1 4!

(*s* − 3)5

+ 2*L*

−1 1

(*s* − 3)

*t*4

= *e* + 2*e*3*t.*

3*t*

12

**Ejemplo 7.3.2.** *Resolver el problema de valores iniciales*

*d*3*Y*

*d*2*Y dY*

j jj

*dt*3 + 4 *dt*2 + 5 *dt* + 2*Y* = 10 cos(*t*)*, Y* (0) = 0*, Y* (0) = 0*, Y* (0) = 3*.*

**Paso 1.** *Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuaci´on diferencial*

*d*3*Y*

*L dt*3

+ 4*L*

*d*2*Y dt*2

*dY*

+ 5*L dt*

+ 2*L* { *Y* (*t*)} = 10*L* { cos(*t*)}

*Denotamos L* {*Y* (*t*)} *por y*(*s*)*, entonces las siguientes transformadas*

*d*3*Y*

*L dt*3

*d*2*Y*

*, L dt*2

*dY*

*y L dt ,*

*en funci´on de y*(*s*)*,Y* (0)*,Y* j(0)*,Y* jj(0)*. Se obtiene*

*d*3*Y* 3 2 j j

*L*

=*s y*(*s*) − *s Y* (0) − *sY*

(0) − *Y*

(0)*,*

*dt*3

*d*2*Y*

*L dt*2

=*s*2*y*(*s*) − *sY* (0) − *Y*

j(0)*,*

*L dY* =*sy*(*s*) − *Y* (0)*.*

*dt*

*Aplicando las condiciones iniciales se reducen a*

*d*3*Y* 3

*L dt*3

*d*2*Y*

*L dt*2

=*s y*(*s*) − 3*,*

=*s*2*y*(*s*)*,*

*L dY* =*sy*(*s*)*,*

*dt*

*Por tanto,*

*d*3*Y*

*L dt*3

+ 4*L*

*d*2*Y dt*2

+ 5*L*

*dY* + 2*L* {*Y* (*t*)} = *s*3*y*(*s*) − 3 + 4*s*2*y*(*s*) + 5*sy*(*s*) + 2*y*(*s*)

= *s*3 + 4*s*2 + 5*s* + 2 *y*(*s*) − 3*,*

*dt*

*donde utilizando la tabla de transformadas tenemos*

10*L* { cos(*t*)} =

10*s*

2 *.*

*s* + 1

*Por tanto, la ecuaci´on se reduce a*

(*s*3 + 4*s*2 + 5*s* + 2)*y*(*s*) 3 = 10*s ,*

−

*s*2 + 1

*con la inc´ognita y*(*s*)*.*

**Paso 2.** *Resolvemos ahora la ecuaci´on para y*(*s*)*. Tenemos*

(*s*3

*o*

+ 4*s*2

+ 5*s* + 2)*y*(*s*) − 3 =

3*s*2 + 10*s* +3

*s*2 +1 *,*

**Paso 3** *Determinamos*

3*s*2 + 10*s* +3

*y*(*s*) − 3 = (*s*2 + 1)(*s*3 + 4*s*2 + 5*s* + 2) *.*

3*s*2 + 10*s* +3

−1

*L* (*s*2 + 1)(*s*3 + 4*s*2 + 5*s* + 2) *.*

*Empleando el m´etodo de descomposici´on en fracciones simples y as´ı encontrar una forma de la expresi´on para y*(*s*)*, tenemos*

3*s*2 + 10*s* +3 3*s*2 + 10*s* +3

(*s*2 + 1)(*s*3 + 4*s*2 + 5*s* + 2) = (*s*2 + 1)(*s* + 1)2(*s* + 2)

*A B C Ds* + *E*

*A partir de aqu´ı hallamos*

= *S* +2 + *S* +1 + (*S* + 1)2 + *s*2 +1 *.*

3*s*2 + 10*s* +3 =*A*(*s* + 1)2(*s*2 + 1)+ *B*(*s* + 2)(*s* + 1)(*s*2 + 1)

+ *C*(*s* + 2)(*s*2 + 1)+ (*Ds* + *E*)(*s* + 2)(*s* + 1)2*,*

*o*

3*s*2 + 10*s* + 3 =(*A* + *B* + *D*)*s*4 + (2*A* + 3*B* + *C* + 4*D* + *E*)*s*3

+ (2*A* + 3*B* + 2*C* + 5*D* + 4*E*)*s*2

+ (2*A* + 3*B* + *C* + 2*D* + 5*E*)*s*

+ (*A* + 2*B* + 2*C* + 2*E*)

*Se obtiene as´ı el sistema de ecuaciones*

*A* + *B* + *D* =0*,* 2*A* + 3*B* + *C* + 4*D* + *E* =0*,*

2*A* + 3*B* + 2*C* + 5*D* + 4*E* =3*,*

2*A* + 3*B* + *C* + 2*D* + 5*E* =10*, A* + 2*B* + *C* + 2*E* =3*.*

*Haciendo s* = −1*, hallamos que C* = −2 *y haciendo s* = −2 *en esta misma ecuaci´on tenemos*

*A* = −1*. Utilizando estos valores de A y C el sistema nos da*

*B* = 2*,D* = −1*, y E* = 2

*Sustituyendo estos valores de A,B,C,D y E se obtiene*

3*s*2 + 10*s* +3

−1

*L* (*s*2 + 1)(*s*3 + 4*s*2 + 5*s* + 2)

= − *L*

−1 1

*s* +2

+ 2*L*

−1 1

*s* +1

— 2*L* −1 1 − *L* −1 *s*

*Utilizando la tabla de transformadas tenemos*

(*s* + 1)2

+ 2*L* −1 1 *.*

*s*2 +1

(*s*2 + 1)

*Y* (*t*) = −*e*−2*t* + 2*e*−*t* − 2*te*−*t* − cos(*t*) + 2 sin(*t*)*.*

## Solucio´n de sistemas lineales usando la transformacio´n de Laplace

Aplicamos el m´etodo de la transformaci´on de Laplace para hallar la soluci´on de un sistema de primer orden

*dX dY*

*a*1 *dt* + *a*2 *dt* + *a*3*x* + *a*4*Y* = *B*1(*t*)

*dX dY*

*b*1 *dt* + *b*2 *dt* − *b*3*x* + *b*4*Y* = *B*2(*t*)*,*

donde *a*1*, a*2*, a*3*, a*4*, b*1*, b*2*, b*3 y *b*4 son constantes y *B*1 y *B*2 son funciones conocidas que satisfacen las condiciones iniciales

*X*(0) = *c*1 *e Y* (0) = *c*2*,*

donde *c* y *c*2 son constantes. Supongamos que *x*(*s*) denota la transformada *L* { *X*(*t*)} e *y*(*s*) denota la transformada *L* { *Y* (*t*)}. Se procede entonces como sigue:

* + 1. Se toma la trasformada de Laplace en ambos miembros de cada una de las dos ecuaciones del siste- ma, se aplica el teorema y las condiciones iniciales; igualando los resultados se obtiene una ecuaci´on algebraica lineal en las dos inc´ognitas *x*(*s*) e *y*(*s*).
    2. Para determinar expl´ıcitamente *y*(*s*) y *x*(*s*) se resuelve el sistema lineal de dos ecuaciones algebrai- cas, obtenido en la etapa precedente.
    3. Una vez halladas *y*(*s*) y *x*(*s*), se emplea la tabla de transformadas para determinar la soluci´on

*X*(*t*) = *L* −1 { *x*(*s*)} e *Y* (*t*) = *L* −1 { *y*(*s*)} del problema de valores iniciales dado.

**Ejemplo 7.4.1.** *Usar la transformaci´on de Laplace para hallar la soluci´on del sistema.*

*dX t*

*dt* − 6*X* + 3*Y* = 8*e*

*dY t*

*dt* − 2*X* − *Y* = 4*e ,*

*que satisface las condiciones iniciales X*(0) = −1*, Y* (0) = 0*.*

**Paso 1.** *Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de cada una de las ecuaciones dife- renciales del sistema, tenemos*

*L dX* − 6*L* { *X*(*t*)} + 3*L* { *Y* (*t*)} *L d* 8*et*}

*dt*

*L dY* − 2*L* {*X*(*t*)}− *L* {*Y* (*t*)} = *L* 4*et*} *.*

*dt*

*Designemos L* { *X*(*t*)} *por x*(*s*) *y L* { *Y* (*t*)} *por y*(*s*)*. Aplicando entonces el teorema y las condi- ciones iniciales, tenemos*

*L dX* =*sx*(*s*) − *X*(0) = *sx*(*s*)+1

*dt*

*L dY* =*sy*(*s*) − *Y* (0) = *sy*(*s*)*.*

*dt*

*Usando la tabla de transformadas*

*L* 8*et* = 8

}

*s* − 1

*y L* 4*et* = 4 *.*

*s* − 1

}

*En consecuencia,*

8

*sx*(*s*) + 1 − 6*x*(*s*) + 3*y*(*s*) = *s* − 1

4

*sy*(*s*) − 2*x*(*s*) − *y*(*s*) = *s* − 1 *,*

*que al simplificarse quedan en la forma*

8

(*s* − 6)*x*(*s*) + 3*y*(*s*) = − 1

−

*s* 1

4

— −

2*x*(*s*) + (*s* 1)*y*(*s*) =

*s* − 1

(*s* − 6)*x*(*s*) + 3*y*(*s*) =−*s* + 9

*s* − 1

4

— −

2*x*(*s*) + (*s* 1)*y*(*s*) = *.*

*s* − 1

**Paso 2.** *Resolvemos el sistema lineal algebraico cuyas “inc´ognitas” son y*(*s*) *y x*(*s*)*. Obtenemos*

(*s* − 1)(*s* − 6)*x*(*s*) + 3(*s* − 1)*y*(*s*) = − *s* + 9

12

— −

*Restando queda*

*de donde hallamos*

6*x*(*s*) + 3(*s* 1)*y*(*s*) = *.*

*s* − 1

(*s*2 7*s* + 12)*x*(*s*) = *s* + 9 12 *,*

— − −

*s* − 1

*x*(*s*) =

*De igual modo encontramos*

−*s*2 + 10*s* − 21

(*s* − 1)(*s* − 3)(*s* − 4)

= −*s* + 7 *.* (*s* − 1)(*s* − 4)

*y*(*s*) = 2*s* − 6 = 2 *.*

(*s* − 1)(*s* − 3)(*s* − 4) (*s* − 1)(*s* − 4)

**Paso 3.** *Hemos de determinar ahora*

*X*(*t*) = *L* −1 *x*(*s*) = *L* −1 −*s* + 7

{ }

(*s* − 1)(*s* − 4)

*e*

{ }

*Y* (*t*) = *L* −1 *y*(*s*) = *L* −1 2 *.*

(*s* − 1)(*s* − 4)

*Hallamos primeramente X*(*s*)*. Usando fracciones simples escribimos*

−*s* + 7 = *A* + *B ,*

*y se encuentra*

(*s* − 1)(*s* − 4) *s* − 1 *s* − 4

*A* = −2 *y B* = 1*,*

*entonces*

*X*(*t*) = −2*L* −1 1 + *L* −1 1 *,*

*s* − 1

*y usando la tabla de transformadas, obtenemos*

*X*(*t*) = −2*et* + *e*4*t.*

*De igual modo hallamos Y* (*s*)*. Se obtiene as´ı*

*s* − 4

2 *t*

*Y* (*t*) = − 3 *e* +

2 *e*4*t.* 3

**Ejemplo 7.4.2.** *Una masa acoplada en el extremo inferior de un resorte vertical de constante k. En el tiempo t* = *t*0 *la masa es golpeada al aplicarle una fuerza hacia arriba durante un tiempo muy pequen˜o. Describe el movimiento subsecuente.*

***Soluci´on:*** *la ecuacio´n diferencial asociada con el problema es*

− *.*

*mx*jj + *kx* = *P*0*δ*(*t t*0) *x*(0) = 0*, x*j(0) = 0

*Utilizando transformada de Laplace, se tiene*

(*ms*2 + *k*)*X*(*s*) = *P*0*e*−*st*0 *.*

*E´sto implica que,*

*P*0*e*−*st*0

*P*0 *e*−*st*0 2 *k*

*X*(*s*) = *ms*2 + *k* =

*m* · *s*2 + *w*2 *,w* = *m.*

*Utilizando ahora la transformada inversa de Laplace, se obtiene*

*x*(*t*) = *d*

−1 *P*0

*m*

*e*−*st*0

*. s*2 + *w*2

= *P*0

*m*

1

*u*(*t* − *t*0) *w*

sen *w*(*t* − *t*0)

*P*0 *m k P*0 *k*

## Ejercicios

=

*m u*(*t* − *t*0)

sen

*k*

*m* (*t* − *t*0) = √*mku*(*t* − *t*0) sen

*m* (*t* − *t*0)*.*

#### Transformada de Laplace

Determinar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

* + - 1. *f* (*t*) = *te*2*t.*
      2. *f* (*t*) = *e*−*t* sen(2*t*)*.*
      3. *f* (*t*) = *te*−*t* cos(√2*t*)*.*

4. *f* (*t*) = *t*2 − 3*t* − 2*e*−*t* sen(3*t*)*.* 5. *f* (*t*) = (*et* + 1)2*.*

6. *f* (*t*) = 4*t*2 − 5 sin 3*t*.

7. *f* (*t*) = 4*et* − 5 cos 3*t*.

#### Transformada inversa de Laplace

Determinar la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

(*s*+2)(*s* +4) *.*

1. *F* (*s*) = 2

*s*

(*s*+1)(*s* +2) *.*

2. *F* (*s*) = 2

*s*

*s*

3. *F* (*s*) = (*s* + 1)(*s*2 + 4) *.*

#### Problemas de valores iniciales

Utilizar la transformada de Laplace para resolver cada uno de los problemas de valores iniciales 1. *y*jj + 6*y*j + 5*y* = 12*et*; *y*(0) = −1*, y*j(0) = 7*.*

2. *y*jj − 7*y*j + 10*y* = 39 cos(*t*) − 13 sen(*t*); *y*(0) = 7*, y*j(0) = 16*.*

3. *y*jjj − *y*jj + *y*j − *y* = 0; *y*(0) = 1*, y*j(0) = 1*, y*jj(0) = 3*.*

*dY*

−

4. *Y* = *e*3*t, Y* (0) = 2*.*

*dt*

*dY*

5. *dt* + *Y* = 2 sen(*t*)*, Y* (0) = −1*.*

*d*2*Y dY* j

6. *dt*2 − 5 *dt* + 6*Y* = 0*, Y* (0) = 1*,Y* (0) = 2*.*

*d*2*Y dY* j

7. *dt*2 + *dt* − 12*Y* = 0*, Y* (0) = 4*,Y* (0) = −1*.*

*d*2*Y dY* −*t* j

8. *dt*2 − *dt* − 2*Y* = 18*e* sen(3*t*)*, Y* (0) = 0*,Y* (0) = 3*.*

*d*2*Y dY*

−2*t* j

9. *dt*2 + 2 *dt* + *Y* = *te*

*, Y* (0) = 1*,Y* (0) = 0*.*

*d*3*Y*

*d*2*Y dY*

j jj

10.

*dt*3 − 5 *dt*2 + 7 *dt* − 3*Y* = 20 sen(*t*)*, Y* (0) = 0*,Y* (0) = 0*,Y*

(0) = −2*.*

*d*3*Y d*2*Y dY*

−4*t*

j jj

11.

*dt*3 − 6 *dt*2 + 11 *dt* − 6*Y* = *te*

*, Y* (0) = 1*,Y* (0) = 0*,Y*

(0) = −1*.*

1. Use la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales

*y*jj + *y* = *f* (*t*)*, y*(0) = 0*, y*j(0) = 1*,*

donde

 0*,* si; 0 ≤ *t < π*

*f* (*t*) =

1*,* si; *π* ≤ *t <* 2*π*

0*,* si; *t* ≥ 2*π.*



1. Use la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales

*y*jj + *y* = *f* (*t*)*, y*(0) = 0*, y*j(0) = 1*,*

donde

*f* (*t*) = 1*,* si; 0 ≤ *t <* 2*π*

0*,* si; *t* ≥ 2*π*

1. Use la transformada de Laplace para resolver el P.V.I

*y*jj − 5*y*j + 6*y* = *f* (*t*)*, y*(0) = 0*, y*j(0) = −1*,*

donde

*f* (*t*) = 1 si 0 ≤ *t <* 1

0 si *t* ≥ 1

1. La ecuaci´on diferencial para la corriente *i*(*t*) en un circuito LR en serie, con un solo bucle es

*di*

*L* + *Ri* = *E*(*t*)*,*

*dt*

donde *L* y *R* son constantes, adem´as *H* es una funci´on peri´odica de periodo *T* = 2 definida por

*H*(*t*) = 1*,* si; 0 ≤ *t <* 1*,*

0*,* si; 1 ≤ *t <* 2

Determine la corriente *i*(*t*) cuando *i*(0) = 0.

* + 1. **Sistemas lineales**

En cada uno de los siguientes ejercicios y usando la transformada de Laplace, hallar la soluci´on de los sistemas lineales dados que satisfacen las condiciones iniciales.

* + - 1. *dX* + *Y* = 3*e*2*t*

*dt dY*

+ *X* = 0

*dt*

*X*(0) = 3*,Y* (0) = 0*.*

*dX*

2. *dy* − 2*Y* = 0

*dY*

*dy* + *X* − 3*Y* = 2

*X*(0) = 3*,Y* (0) = 0*.*

*dX*

3. *dt* + 2*X* − 4*Y* = 0

*dY*

*dt* − 2*X* = *t*

*X*(0) = 3*,Y* (0) = 3*.*

1. *dX* + *X* 8*Y* = *et dt*

−

*dY*

*dt* − 2*X* + *Y* = 1

*X*(0) = 1*,Y* (0) = 2*.*

1. *dX* + *X* + *Y* = *e*−3*t dt*

*dY*

*dt* + *X* − 4*Y* = 1

*X*(0) = 1*,Y* (0) = 2*.*

*dX*

6. *dt* − 4*X* + 2*Y* = 2*t*

*dY*

*dt* − 8*X* + 4*Y* = 1*.*

Bibliografía

1. POWERS, M. Lanchester resurgent? The mathematics of terrorism risk, *The Journal of Risk Finance,*

Vol. 9 No. 3, 2008, pp. 225-231.

1. EZELL, B. *et al.* Probabilistic Risk Analysis and Terrorism Risk, *Risk Analysis,* Vol. 30 No. 4, 2010, pp. 575-589.
2. CONGRESS OF THE UNITED STATES. Federal Terrorism Reinsurance: An update, *Congresitional Budget Oce,* January 2005. Recuperado el día 05 de marzo del 2011 de: <http://www.cbo.gov/sites/default/> files/cbofiles
3. D. ZILL, M. Cullen. *Ecuaciones Diferenciales.* McGraw-Hill, 3a. edición, 2008 2.
4. E. CODDINGTON. *An Introduction to Ordinary Diff. Equations.* NY, Dover, 1989 3.
5. G. SIMMONS. *Ecuaciones Diferenciales.* McGraw-Hill, 2a. Edición, 1998.
6. G. SIMMONS, S. KRANTZ. *Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill, 2007 W. Boyce.
7. R. DI PRIMA. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*s, J. Wiley, 8a. edición, 2005.
8. MAJOR, J. Advanced Techniques for modeling Terrorism Risk, *The Journal of Risk Finance,* Fall 2002, pp. 15-24.
9. KUMAR, J. (agosto 2011). Insurance and Reinsurance of Terrorism Risk, *The Insurance Times*, Recu- perado el día 05 de marzo del 2012 de: <http://www.bimabazaar.com/index.php?option=com_content&-> view=article&id=185:insurance-and-reinsurance-of-terrorism-risk&catid=95:reinsurance-articles&Ite- mid=70

LOS AUTORES



###### Mawency Vergel Ortega

Nace en Bucaramanga, Santander, Colom- bia. Profesora Titular del Departamento de MatemÁticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander. Investigadora Senior de grupos de investigación Euler, Que- telet, Graunt, Zulima y Arquímedes, autor de libros de en áreas de educación matemática, matemática aplicada, educación matemática, así mismo es autora de capítulos de libro y ar- tículos en revistas indexadas de divulgación, nacionales e internacionales. Es Licenciada en Matemáticas y Física, Especialista en Es- tadística aplicada, especialista en Informáti- ca educativa, Magister en Educación mención Gerencia Educativa, Doctora en Educación, doctorando en estadística, Postdoctora en Ima- ginarios y representaciones sociales, postdoc- tora en Ciencias sociales, niñez y juventud del Cinde Universidad de Manizales-Red Clacso, doctorando en proyectos y estadística. Obtiene su primera patente en el año 2017. Ha desem- peñado cargos como consultor estadístico, di- rector departamento de Matemáticas y Esta- dística, Director de programa de licenciatura en matemáticas y computación, jefe de oficina de planeación, vicerrectora de Bienestar uni- versitario, representante de investigadores Facultad de ciencias Básicas en Comité central de investigación y extensión en la Universidad Francisco de Paula Santander, gestor revista eco matemático, par evaluador Minciencias y CNA, editor de la revista Covalente.

###### Olga Lucy Rincón Leal

Magister en Educación Matemática, especia- lista en Computación para la Docencia, licen- ciada en Matemáticas y Física; Investigador Junior, autora de artículos de investigación en revistas indexadas y libros resultados de investigación. Directora del Programa Acadé- mico de Licenciatura en Matemáticas, Editora de la Revista Eco Matemático (indexada Pu- blindex categoría C). Profesora Tiempo Com- pleto adscrita al Departamento de Matemáti- cas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander. Perteneciente al grupo de Investigación Euler y Graunt.



###### Eduardo Ibargüen Mondragón

Matemático y Magister en Ciencias Matemá- ticas de la Universidad del Valle (Colombia), Dr. en Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Profesor Titular del De- partamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, Investigador Senior de Minciencias, líder del Grupo de Investiga- ción en Biología Matemática y Matemática Aplicada- GIBIMMA, autor de artículos en re- vistas indexadas nacionales e internacionales en diferentes ramas de la biomatemática, ma- temática pura y/o aplicada, ciencias ambienta- les, así mismo es autor de capítulos de libro y libros.



Este libro surge de las observaciones realizadas por estudiantes del curso de Ecuaciones diferenciales ofrecido en la Universidad Francisco de Paula Santan- der y la Universidad de Nariño. El libro abarca de manera introductoria los temas básicos del curso de Ecuaciones diferenciales para ciencias básicas e Ingeniería. El principal aporte consiste ampliar el capítulo de ecuaciones dife- renciales de primer orden y el capítulo de aplicaciones de ecuaciones diferen- ciales de primer orden. En estos capítu- los abordamos métodos y aplicaciones que nosotros consideramos relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden, y que además no han llamado la atención de los textos clásicos.

El propósito de este libro es contribuir en los procesos que incluyen demostra- ciones, interpretaciones y soluciones de problemas, como también la búsqueda de nuevos modelos sin tener en cuenta los ya descritos en textos. No obstante, cuando la persona se enfren- ta a estos retos, se motiva y alcanza logros que le generan motivación y una mejor percepción de sí mismos. Por lo general, los procesos dinámicos que se involucran en el curso de ecuaciones diferenciales, permiten que un gran porcentaje de los estudiantes alcancen cierto tipo de resultados que fortalecen su formación integral.