



**Universidad
de Valparaíso**
CHILE

Escuela de Ingeniería Civil Informática
Facultad de Ingeniería

Estructuras de datos

Capítulo IV: Hashing

Fabián Riquelme Csori

fabian.riquelme@uv.cl

2017-II

Index

Tablas Hash

Preliminares

Colisiones

Análisis

Ejemplos

Arreglo asociativo

associative array

Collection of (key, value) pairs, such that each possible key appears at most once in the collection.

operations

add(key,value)

Add a new pair to the collection.

remove(key)

Remove the pair from the collection associated to the key.

reassign(key,value)

Replace the value of an existing pair associated to the key.

lookup(key)

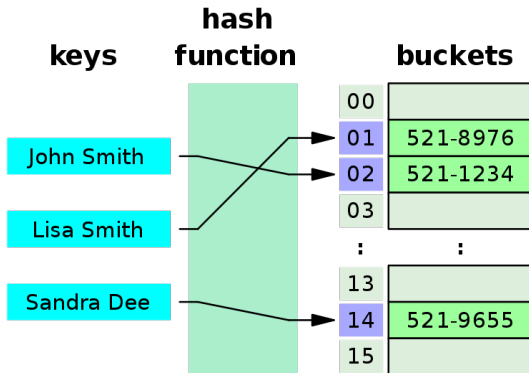
Find the value of the pair associated with a given key.

- ▶ Los arreglos asociativos también se conocen como **vectores asociativos**, **mapas**, **tablas de símbolos** o **diccionarios**.
- ▶ Las estructuras de datos más comunes que se implementan para manipularlos son las **tablas hash** y los **árboles de búsqueda**.

Arreglo asociativo: implementación

		Hash table	Self-balancing binary search tree
add	average	$O(1)$	$O(\log n)$
	worst case	$O(n)$	$O(\log n)$
remove	average	$O(1)$	$O(\log n)$
	worst case	$O(n)$	$O(\log n)$
lookup	average	$O(1)$	$O(\log n)$
	worst case	$O(n)$	$O(\log n)$

Tablas Hash



[Jorge Stolfi, Wikipedia]

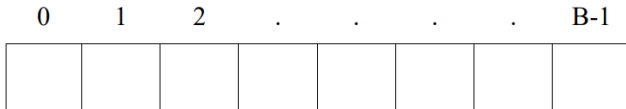
- ▶ Si la función de hash es **inyectiva** se habla de **hashing perfecto**.
- ▶ Usualmente la tabla hash debe lidiar con **colisiones**.

Tablas Hash: Aplicaciones

- ▶ El **hashing** se usa para almacenar muchos datos sobre los que se realizarán operaciones de búsqueda e inserción.
Ej: diccionarios, indexación de BDs, conjuntos, cachés, criptografía, etc.
- ▶ Los datos se almacenan en posiciones pseudo-aleatorias, no están ordenados (a diferencia de los árboles), y recorrerlos por orden es lento (e inservible).
- ▶ Es una estructura de datos tan usada que varios lenguajes la incluyen como tipos básicos o librerías estándar.
- ▶ <http://www.sha1-online.com/>

Tablas Hash: Estructura

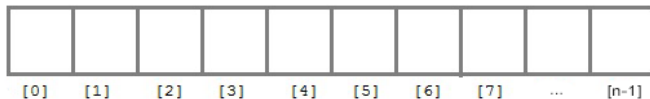
- ▶ Se representa mediante un array con B posiciones $(0, \dots, B-1)$.
 - ▶ $h(x) = \text{posición dentro de } (0, \dots, B-1)$.
- ▶ El elemento (x, v) se inserta en esta posición



Tablas Hash: Estructura

- ▶ Para buscar el elemento con clave x , aplicar la función $h(x)$ y buscar la posición correspondiente. Ejemplo
 - ▶ Si x es de tipo entero $\Rightarrow h(x) = x \text{Módulo } B$
 - ▶ Si x es de tipo cadena (string) $\Rightarrow h(x) = \left(\sum_{i=1}^n \text{ascii}(x_i) \right) \text{Módulo } B$
 - ▶ El elemento (x, v) se inserta en esta posición

Ejemplo



- ▶ Considere una función de hash tal que $\text{value} = \text{table}[\text{key} \% n]$.
 - ▶ Si $n = 10$, ¿qué pasa con 143,674 y 645,394?
- ▶ Alternativa: suma de dígitos
 - ▶ $143,674 = 1 + 4 + 3 + 6 + 7 + 4 = 25$
 - ▶ $645,394 = 6 + 4 + 5 + 3 + 9 + 4 = 31$
 - ▶ ...¿problemas?
- ▶ Hashing doble:
 - ▶ $25 = 2 + 5 = 7$
 - ▶ $31 = 3 + 1 = 4$
- ▶ El problema de **colisiones** se mantiene... ¿soluciones?

Corrección de colisiones: hashing cerrado

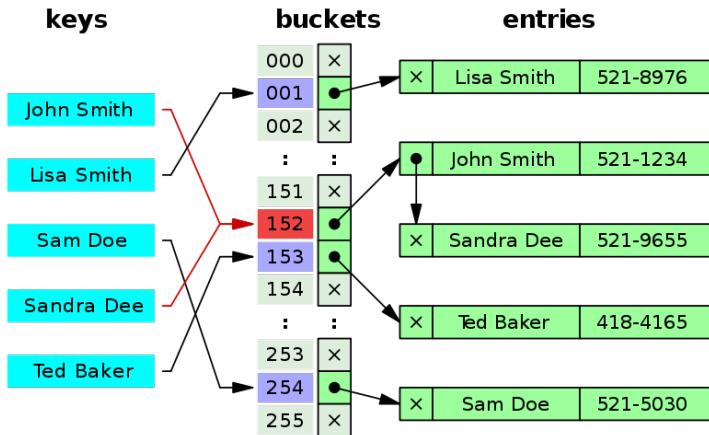
- ▶ **Linear probing**: Si la posición está ocupada, se ocupa la siguiente vacía.

- ▶ Ejemplo:

key	hash	index	lin.prob
1	$1 \% 20 = 1$	1	1
2	$2 \% 20 = 2$	2	2
42	$42 \% 20 = 2$	2	3
4	$4 \% 20 = 4$	4	4
12	$12 \% 20 = 12$	12	12
14	$14 \% 20 = 14$	14	14
17	$17 \% 20 = 17$	17	17
13	$13 \% 20 = 13$	13	13
37	$37 \% 20 = 17$	17	18

- ▶ ¿Problemas? Arruina la eficiencia: $O(1) \rightarrow O(n)$
- ▶ Variaciones: **quadratic overflow**, etc.

Corrección de colisiones: hashing abierto



Buenas prácticas

Función de hash

- ▶ Debe ser lo más simple posible: $O(1)$
- ▶ Para un gran número de claves, debe disponer los valores lo más distantes posible.

Tabla de hash

- ▶ Si es muy pequeña, aumentará el número de colisiones.
 - ▶ o bien el uso de listas enlazadas aumentará la complejidad.
- ▶ Si es muy grande, aumentará innecesariamente el uso de memoria.

Buenas alternativas son las llamadas **funciones hash criptográficas**.

Ventajas/Desventajas

Ventajas

- ▶ No necesita almacenamiento adicional (índice).
- ▶ Facilita la inserción y eliminación rápida de registros.
- ▶ Encuentra registros con muy pocos accesos en promedio al disco.
- ▶ La idea general de hashing es colocar, en la forma menos relacionada posible la información facilitando la eficiencia en el acceso.

Desventajas

- ▶ No se pueden usar registros de longitud variable.
- ▶ No se pueden aplicar ordenamientos a la información contenida dentro de la tabla.
- ▶ No permite llaves duplicadas.

Ejercicios (1)

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, 17, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado : 7

Función hash: $h(7) + 0 = 7 \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	null	null	null	7	null	null

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 17

Función hash: $h(17) + 0 = 7 \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(17) + 1 = 8 \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	null	null	null	7	17	null

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 18

Función hash: $h(18) + 0 = 8 \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(18) + 1 = 9 \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	null	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~{7, 17, 18, 4}~~, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 4

Función hash: $h(4) + 0 = 4 \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, 40, 1, 19, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 29

Función hash: $h(29) + 0 = 9 \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(29) + 1 = 10$ (vuelve a 0) \Rightarrow no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	null	null	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, 1, 19, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 40

Función hash: $h(40) + 0 = 4 \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(40) + 1 = 1 \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	null	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, ~~1~~, 19, 8, 2

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 1

Función hash: $h(1) + 0 = 1 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(1) + 1 = 2 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, ~~1~~, ~~19~~, 8, 2}

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 19

Función hash: $h(19) + 0 = 9 \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(19) + 1 = 10 (0) \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(19) + 2 = 11 (1) \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(19) + 3 = 12 (2) \Rightarrow$ hay conflicto

Función hash: $h(19) + 4 = 13 (3) \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	19	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~{7, 17, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}~~

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 8

Función hash: $h(8) + 0 = 8 \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 1 = 9 \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 2 = 10 (0) \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 3 = 11 (1) \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 4 = 12 (2) \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 5 = 13 (3) \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 6 = 14 (4) \Rightarrow$ conflicto

Función hash: $h(8) + 7 = 15 (5) \Rightarrow$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	19	4	8	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Lineal

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, ~~1~~, ~~19~~, ~~8~~, ~~2~~

Hash lineal: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 0, 1, \dots$

Número Insertado: 2

Función hash: $h(2) + 0 = 2 \implies$ conflicto

Función hash: $h(2) + 1 = 2 \implies$ conflicto

Función hash: $h(2) + 2 = 4 \implies$ conflicto

Función hash: $h(2) + 3 = 5 \implies$ conflicto

Función hash: $h(2) + 4 = 6 \implies$ no conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	19	4	8	2	7	17	18

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~7~~, 17, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado : 7

Función hash: $h(7) + 02 = 7 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	null	null	null	7	null	null

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~7~~, ~~17~~, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 17

Función hash: $h(17) + 02 = 7 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(17) + 12 = 8 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	null	null	null	7	17	null

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 18

Función hash: $h(18) + 02 = 8 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(18) + 12 = 9 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	null	null	null	7	17	18

Ejercicios 1 - Cuadrático

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 4

Función hash: $h(4) + 02 = 4 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	null	null	null	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, 40, 1, 19, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 29

Función hash: $h(29) + 02 = 9 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(29) + 1 = 10$ (vuelve a 0) \implies no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	null	null	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, 1, 19, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 40

Función hash: $h(40) + 02 = 4 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(40) + 12 = 1 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	null	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~{7, 17, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}~~

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 1

Función hash: $h(1) + 02 = 1 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(1) + 12 = 2 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	null	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~1~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, ~~1~~, ~~19~~, 8, 2}

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 19

Función hash: $h(19) + 02 = 9 \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(19) + 12 = 10 (0) \implies$ hay conflicto

Función hash: $h(19) + 22 = 13 (3) \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	19	4	null	null	7	17	18

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~{7, 17, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}~~

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 8

Función hash: $h(8) + 02 = 8 \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 12 = 9 \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 22 = 12 (2) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 32 = 17 (7) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 42 = 24 (4) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 52 = 33 (3) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 62 = 44 (4) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 72 = 57 (7) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 82 = 72 (2) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 92 = 89 (9) \implies$ conflicto

Función hash: $h(8) + 102 = 108 (8) \implies$ conflicto

¡No importa cuánto
tiempo se busque,
no se encontrará un
lugar!

Ejercicios 2 - Cuadrático

~~7~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~4~~, ~~29~~, ~~40~~, ~~1~~, ~~19~~, ~~8~~, ~~2~~

Método cuadrático: $h(x) = x \bmod 10 + i$; $i = 02, 12, 22, 32 \dots$

Número Insertado: 2

Función hash: $h(2) + 02 = 2 \implies$ conflicto

Función hash: $h(2) + 12 = 3 \implies$ conflicto

Función hash: $h(2) + 22 = 6 \implies$ no hay conflicto

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	29	40	1	19	4	null	2	7	17	18

Total Número de Pruebas: 18 (excluyendo la búsqueda fallada para el 8)

Cuando se insertó el 8, nunca se examinaron las dos celdas disponibles, 5 y 6.

Nota: para que toda la tabla sea investigada el factor de carga tiene que ser mayor que 5, y el tamaño de la tabla tiene que ser primero.

Ejercicios 3 - Encadenado

{7, 17, 18, 4, 29, 40, 1, 19, 8, 2}

Hash encadenado separado:

- La tabla de encadenamiento separada agrega a una lista enlazada cuando ocurre una colisión.
- El resultado final se parece a :

índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor	40	1	2	null	4	null	null	7->17	17->18	29->19

Ejercicios (2)

Dadas las siguientes claves:

12, 44, 13, 88, 23, 94, 11, 39, 20, 16, 5

y la función de hash $h(i) = (2i + 5) \bmod 11$.

- ▶ Dibuje una tabla hash de 11 posiciones de memoria que represente el hashing con un manejo de colisiones usando listas enlazadas.
- ▶ Repita el ejercicio anterior, pero usando linear probing.
- ▶ Repita el ejercicio anterior, pero usando quadratic probing.
- ▶ Implemente cada una de las soluciones.

Ejercicios (3)

Busque y responda:

- ▶ ¿Qué se entiende por *rehashing* y cuando se aplica?
- ▶ ¿Qué es el *load factor*?
- ▶ Como formas de manejo de colisiones hemos visto *linear probing*, *quadratic probing* y uso de listas enlazadas.
¿En qué consiste el *double hashing*?

Bibliografía recomendada

- ▶ Weiss, M., Estructura de datos y algoritmos, Addison-Wesley, 1995.
- ▶ Aho, Hopcroft y Ullman, Estructuras de datos y algoritmos, Addison-Wesley, 1988.

Recursos

- ▶ Wikimedia Commons.