ICI 4242 - Autómatas y compiladores

Expresiones regulares

Rodrigo Olivares
Mg. en Ingeniería Informática
rodrigo.olivares@uv.cl

1er Semestre

Concepto

Definición

Objetivo

El objetivo de las expresiones regulares es representar todos los posibles lenguajes definidos sobre un alfabeto Σ, en base a una serie de lenguajes primitivos, y operadores de composición.

Concepto

Definición

Lenguajes primitivos

- El lenguaje vacío.
- El lenguaje formado por la palabra vacía.
- Los lenguajes correspondientes a los distintos símbolos del alfabeto.

Operadores de composición

- La unión
- La concatenación.
- La clausura o cierre.

Concepto

Definición

Ejemplo

1.- Lenguaje formado por las cadenas que terminan en 01:

$$\begin{aligned} \{0,1\}^*.\{01\} &= \\ &= (\{0\} \cup \{1\})^*.\{01\} \\ &= (0+1)^*01 \textit{ Expresión regular} \end{aligned}$$

2.- Lenguaje formado por palabras de longitud par sobre a's y b's:

$$\begin{aligned} \{aa, ab, ba, bb\}^* &= \\ &= (\{aa\} \cup \{ab\} \cup \{ba\} \cup \{bb\})^* \\ &= (aa+ab+ba+bb)^* \textit{ Expresión regular} \end{aligned}$$

Concepto

Definición

Definición

Dado un alfabeto Σ, las expresiones regulares sobre Σ se definen de forma recursiva por las siguientes reglas:

1.- Las siguientes expresiones son expresiones primitivas:

- $\emptyset$
- λ
- σ, siendo $\sigma \in \Sigma$

2.- Sean α y β expresiones regulares, entonces son expresiones regulares derivadas:

- $\alpha + \beta$ (unión)
- $\alpha.\beta$ (o simplemente $\alpha\beta$) (concatenación)
- α^* (cierre)
- (α)

No hay más expresiones regulares sobre Σ que las construidas mediante estas reglas.

Concepto

Definición

Precedencia de operadores

1.- ()

2.- * (cierre)

3.- . (concatenación)

4.- $+$ (unión)

Algunos ejemplos de expresiones regulares

- $(0+1)^*01$
- $(aa+ab+ba+bb)^*$
- $a^*(a+b)$
- $(aa)^*(bb)^*b$

Concepto

Lenguaje descrito

Lenguaje descrito - Definición

Sea **r** una expresión regular sobre σ. El **lenguaje descrito por r**, $L(r)$, se define recursivamente de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lllll}
1.- & \text{Si } \mathbf{r} = \emptyset & \Rightarrow & L(\emptyset) & = & \emptyset \\
2.- & \text{Si } \mathbf{r} = \lambda & \Rightarrow & L(\lambda) & = & \{\lambda\} \\
3.- & \text{Si } \mathbf{r} = a,\ a \in \Sigma & \Rightarrow & L(a) & = & \{a\} \\
4.- & \text{Si } \mathbf{r} = \alpha + \beta & \Rightarrow & L(\alpha + \beta) & = & L(\alpha) \cup L(\beta) \\
5.- & \text{Si } \mathbf{r} = \alpha.\beta & \Rightarrow & L(\alpha.\beta) & = & L(\alpha).L(\beta) \\
6.- & \text{Si } \mathbf{r} = \alpha^* & \Rightarrow & L(\alpha^*) & = & L(\alpha)^* \\
7.- & \text{Si } \mathbf{r} = (\alpha) & \Rightarrow & L((\alpha)) & = & L(\alpha)
\end{array}
$$

donde α y β son expresiones regulares.

Concepto

Lenguaje descrito

Ejemplo

Mostrar el lenguaje descrito por una ER mediante notación por comprensión (conjuntista):

$$\begin{aligned} L(a^*(a+b)) &= L(a^*)L((a+b)) \\ &= L(a)^*L(a+b) \\ &= L(a)^*(L(a) \cup L(b)) \\ &= \{a\}^*(\{a\} \cup \{b\}) \\ &= \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}\{a, b\} \\ &= \{a, aa, aaa, \ldots, b, ab, aab, aaab, \ldots\} \\ &= \{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n b \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

Concepto
Lenguaje descrito

Ejercicios

Mostrar el lenguaje descrito por una ER mediante notación por comprensión (conjuntista):

1.- $L((aa)^*(bb)^*b)$ ¿ $=$? $\{a^{2n}b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$.

2.- Si $\Sigma = \{a, b, c\} \Rightarrow L((a+b+c)^*)$ ¿ $=$? Σ^*.

3.- $L(a^*.(b+c))$.

4.- $L(0^*,1,0^*)$.

5.- $L((a+b+c+\cdots+z)^*.(a+b)^*)$.

Concepto

Propiedades

Definición - Equivalencia

Dos expresiones regulares r_1 y r_2 se dicen equivalentes, $r_1 = r_2$, si describen el mismo lenguaje, esto es, si $L(r_1) = L(r_2)$. En base a esta definición se pueden establecer las siguientes equivalencias y propiedades:

Concepto

Propiedades

Definición - Equivalencia

Respecto a las operaciones + (unión) y . (concatenación):

1.- Son asociativas:

$\rightarrow \ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$

$\rightarrow \ \alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma = \alpha.\beta.\gamma$

2.- $+$ es conmutativa e idempotente:

$\rightarrow \ \alpha + \beta = \beta + \alpha$

$\rightarrow \ \alpha + \alpha = \alpha$

3.- Distributividad:

$\rightarrow \ \alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$

$\rightarrow \ (\alpha + \beta).\gamma = \alpha.\gamma + \beta.\gamma$

Concepto

Propiedades

Definición - Equivalencia

Respecto a las operaciones + (unión) y . (concatenación):

4.- Elemento neutro:

- $\rightarrow \alpha.\lambda = \lambda.\alpha = \alpha$
- $\rightarrow \alpha + \emptyset = \emptyset + \alpha = \alpha$

5.- Lenguaje Vacío:

- $\rightarrow \emptyset.\alpha = \alpha.\emptyset = \emptyset$

6.- Unión vacía:

- $\rightarrow$ Si $\lambda \in L(\alpha)$, entonces $\alpha + \lambda = \alpha$

Concepto
Propiedades

Definición - Equivalencia

Respecto a la operación * (cierre o clausura):

7.- $\alpha^* = \lambda + \alpha.\alpha^*$
8.- $\lambda^* = \lambda$
9.- $\emptyset^* = \lambda$
10.- $\alpha^*.\alpha^* = \alpha^*$
11.- $\alpha.\alpha^* = \alpha^*.\alpha$
12.- $(\alpha^*)^* = \alpha^*$
13.- $(\alpha^* + \beta^*)^* = (\alpha^*.\beta^*)^* = (\alpha + \beta)^* = (\alpha^*.\beta)^*.\alpha^*$
14.- $(\alpha.\beta)^*.\alpha = \alpha.(\beta.\alpha)^*$

Concepto

Propiedades

Ejemplos

Para comprobar si dos expresiones son equivalentes se puede intentar transformarlos mediante estas reglas en una misma expresión.

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$$c^*.c + c^* \text{ ¿} = \text{? } c^*$$

$$\begin{aligned}
c^*.c + c^* &= c^*.c + c^* + \lambda && \text{(por 6)} \\
&= c.c^* + c^* + \lambda && \text{(por 11)} \\
&= \lambda + c.c^* + c^* && \text{(por 2)} \\
&= c^* + c^* && \text{(por 7)} \\
&= c^* && \text{(por 2)}
\end{aligned}$$

Concepto

Propiedades

Ejemplos

Para comprobar si dos expresiones son equivalentes se puede intentar transformarlos mediante estas reglas en una misma expresión.

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$$c + c^* \text{ ¿} = \text{? } c^*$$

$$\begin{aligned} c + c^* &= c + \lambda + c.c^* && \text{(por 7)} \\ &= \lambda + c + c.c^* && \text{(por 2)} \\ &= \lambda + c.\lambda + c.c^* && \text{(por 4)} \\ &= \lambda + c.(\lambda + c^*) && \text{(por 3)} \\ &= \lambda + c.c^* && \text{(por 6)} \\ &= c^* && \text{(por 7)} \end{aligned}$$

Concepto

Propiedades

Ejercicios

1.- $((c + b.a)^*.a^*)^*$ ¿ = ? $((c + b.a) + a)^*$

2.- Dado dos expresiones regulares $r = b.c + a.c^*.a.c + a.c^*.c + a$ y $s = (b + a.c^* a).c + a.c^*$. ¿Representan r y s el mismo lenguaje?

3.- Sea $r = (a^*.(b + c)^* + b^*)^*$ y $s = (a + b + c)^*$,, demuestre r ¿ = ? s.

Preguntas

Preguntas ?