

SCC-218 Alg. Avançados e Aplicações

Lista 4 - Programação Dinâmica

1. Você conhece a sequência de Fibonacci e muito provavelmente implemtou este algoritmo recursivamente. Faça uma versão geradora de uma sequência de Fibonacci de comprimento N sob o paradigma de Programação Dinâmica. Compare esta nova versão com a tradicional recursiva em termos de complexidade.
2. Dado um conjunto de inteiros, sua tarefa é agrupá-los em dois conjuntos $S1$ e $S2$ de tal forma que a diferença absoluta entre a soma dos elementos de ambos os conjuntos seja mínima. Se existe um conjunto S com n elementos, e assumindo que $S1$ terá m elementos, então $S2$ terá $n - m$ elementos. O valor de $\text{abs}(\text{sum}(S1) - \text{sum}(S2))$ deve ser mínimo.
3. Dada uma matriz $n \times n$ em que todos os valores são distintos, encontre a trilha de maior comprimento (iniciando em qualquer célula) tal que todas as células pertencentes à trilha estejam em ordem crescente com diferença de 1 unidade. Pode-se mover na matriz em 4 direções (cima, baixo, esquerda e direita) sob a condição de que elementos adjacentes tenham diferença de 1.

4. Dada uma sequência de matrizes, encontre a forma mais eficiente de multiplicá-las. O problema não é sobre como realizar a multiplicação, mas sim decidir a ordem em que devemos multiplicá-las (lembre-se de que a multiplicação de matrizes é associativa, portanto, não importa como estas estão parentizadas o resultado será o mesmo: $(ABC)D = (AB)(CD) = A(BCD)$).

Suponha que A seja 10×30 , B seja 30×5 e C seja 5×60 . Então,

$$(AB)C = (10 \times 30 \times 5) + (10 \times 5 \times 60) = 1500 + 3000 = 4500 \text{ operações}$$

$$A(BC) = (30 \times 5 \times 60) + (10 \times 30 \times 60) = 9000 + 18000 = 27000 \text{ operações.}$$

Claramente, a primeira parentização, requer menos operações.

5. Você quer cortar um bastão de madeira em pedaços. A empresa que cobra menos por esse serviço cobra de acordo com o comprimento do bastão a ser cortado. O procedimento dessa empresa requer que eles façam um corte por vez.

É simples verificar que diferentes ordens de corte resultam em diferentes preços. Por exemplo, um bastão de 10 metros deve ser cortado em 2, 4 e 7 metros a partir de um lado. Se você cortar primeiro em 2, depois em 4 e depois em 7 vai resultar em um preço de $10 + 8 + 6 = 24$. Isso ocorre porque o primeiro corte foi em um bastão de 10 metros, o segundo em um bastão de 8 metros e o terceiro em 6 metros. Outra possibilidade poderia ser cortar em 4, depois em 2 e por fim em 7. A segunda resultaria em um custo de $10 + 4 + 6 = 20$.

Faça um programa que calcule o custo mínimo de corte de um bastão dada uma lista de pontos de corte.

6. Responda com a relação de recorrência de programação dinâmica para cada um dos problemas abaixo:

- Existem n casas em uma rua. Um ladrão quer roubar as casas, sob a restrição que ele não pode roubar duas casas consecutivas. Dada uma lista $v1, v2, \dots, vn$ de valores não negativos guardados em cada casa, determine o máximo valor que pode ser roubado respeitando a restrição.
- Existe um grid G de tamanho $n \times m$. Um robô somente pode se mover em G para a direita ou para baixo. O robô sai da posição superior-esquerda $(1,1)$ e quer chegar na posição inferior-direita (n, m) . Quantos caminhos únicos existem?

7. Dado um vetor v no qual a posição i armazena o preço de uma ação na bolsa de valores no dia i . Projete um algoritmo para encontrar o lucro máximo. Você pode realizar um número ilimitado de operações de compra e venda com as seguintes restrições: i) Você não pode ter transações múltiplas ao mesmo tempo (ou seja, você tem que vender a ação antes de comprar novamente); ii) Após vender uma ação você não pode comprar no dia seguinte (ou seja, existe um dia de “resfriamento”).

Por exemplo, $v = [1, 2, 3, 0, 2]$, então o lucro máximo é 3 e as transações são [compra, venda, resfriamento, compra, venda].

- Qual é a relação de recorrência para esse problema?
- Qual é a matriz ou vetor de memorização para o exemplo $v = [1, 2, 3, 0, 2]$?
- Escreva um algoritmo eficiente iterativo que calcula o lucro máximo
- Escreva o algoritmo que fornece a resposta como uma sequência de compras, vendas e resfriamentos.