UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

TAREA 3

Matematicas Discretas 2

Eder José Hernández Buelvas

Presentado a:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

February 27, 2023

Autobahn: Automorphism-based Graph Neural Nets

1. ¿Qué es una Autobahn y para qué sirve?
2. ¿Por qué los autores proponen utilizar los automorfismos de grafos para reflejar las simetrías internas de un grafo?
3. Pruebe los isomorfismos sugeridos por la (Figura 2.1 panel a)
4. Explique en que consiste la Figura 2.1 panel b. ¿Cuál es su relación con el grupo de automorfismos de D_6?

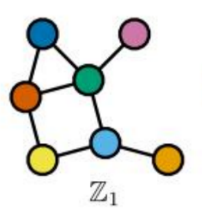
Desarrollo:

1. Una Autobahn es una red neuronal basada en automorfismos: Son un modelo de aprendizaje automatico que utiliza simetrías: Esto quiere decir que funcionan utilizando isomorfismos de un sistema complejo sobre el mismo para aprovechar la simetría del sistema, con el objetivo de convertirlo en uno más sencillo de analizar y utilizar. Este tipo de modelo identifica isomorfismos que preserven la estructura del sistema, para usarlos como automorfismos, creando un conjunto más simple de caracteristicas que puede aprender una red neuronal.

2. Teniendo en cuenta que los automorfismos de un grafo son todas esas permutaciones que mantienen la estructura del grafo inicial, esto representa esencialmente las simetrías internas del mismo grafo. Los autores proponen el uso de automorfismos porque si algo es generalmente aplicable en un isomosfirmo más "sencillo" proveniente de un sistema que se considere "complejo", también será aplicable en el sistema que se considere "complejo". Es decir, el uso de estas simetrias internas puede simplificar la representación y el aprendizaje de las redes neuronales.

3.

CASO 1



Simetria internas del grafo:

Se entiende como simetrías internas del grafo, aquellas transformaciones que mantienen la misma estructura del grafo:

La unica permutacion que mantiene la estructura del grafo es:

- La identidad(No se cambia ningún vertice)
En cualquier otra permutación, el grafo deja de tener su estructura inicial. Por tal razón el conjunto de de permutaciones encontrado es: $\{id\}$.
Para verificar que es un grupo, debemos verificar la asociación mediante la composición de la permutación encontrada, la existencia de la inversa para el unico elemento y la existencia del elemento neutro:

*	**id**
id	id

Por la naturaleza de la tabla de Caley se puede denotar el grupo $G = \{id\}$, como grupo de simetrias del grafo en cuestión. Ahora, el grupo a comparar es el grupo Z_1, denotado como $Z_1 = \{0\}$. Es decir, el grupo ciclico de orden 1, que consta de solo un elemento cuya operacion binaria es la suma modular, siendo un grupo trivial con la siguiente tabla de Caley:

+	**0**
0	0

Podemos hacer la siguiente relación:

x	**id**
θ	0

Probando así, que ambos grupos son isomorfos.

CASO 2

Las permutaciones permitidas para este grafo son las siguientes:

- La identidad(No se cambia ningún vertice)
- Todas las permutaciones de los vertices (a excepción del vertice central).

En cualquier otra permutación, el grafo deja de tener su estructura inicial. Por tal razón el conjunto de de permutaciones encontrado es:
{ todas las permutaciones permitidas de los 9 vertices}.

Al ser un grupo tan grande, expresarlo por medio de un tabla no será algo viable en este articulo pero funciona expresando que es un grupo al presentar una operación binaria asociativa, que es la composición de permutaciones, presenta un elemento neutro que al ser operado regresa la misma permutación, la cual es no permutar los elementos de ninguna forma y presenta un elemento inverso para cada permutación que regresa el elemento neutro, además cada operación tiene como resultado una permutación de 9 elementos.

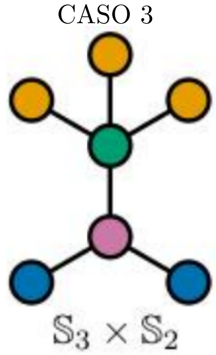
Se puede denotar el grupo $G = \{$ todas las permutaciones permitidas de los 9 vertices $\}$, como grupo de simetrias del grafo en cuestión. Ahora, el grupo a comparar es el grupo S_9, denotado como el grupo de todas las permutaciones de un conjunto de 9 elementos. El cual contiene todas las propiedades del grupo de simetrias del grafo en cuestión.

Podemos hacer la siguiente relación:

x	**id**	P_1	P_2	P_n
θ	G_0	G_1	G_2	G_n

Con n como el limite de permutaciones posibles con 9 elementos.
Probando así, que ambos grupos son isomorfos.

CASO 3



Las permutaciones permitidas para este grafo son las siguientes:

- La identidad(No se cambia ningún vertice)

- Todas las permutaciones de los 3 vertices superiories. Es decir 3!, $\{ P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 \}$
-Todas las permutaciones de los 2 vertices inferiores, es decir 2!, $\{ G_0,G_1\}$

En cualquier otra permutación, el grafo deja de tener su estructura inicial. Por tal razón el conjunto de de permutaciones encontrado es:
$\{ G_0P_0,G_0P_1,G_0P_2,G_0P_3,G_0P_4,G_0P_5,G_1P_0,G_1P_1,G_1P_2,G_1P_3,G_1P_4,G_1P_5 \}$.

Al ser un grupo tan grande, expresarlo por medio de un tabla no será algo viable en este articulo pero funciona expresando que es un grupo al presentar una operación binaria asociativa, que es la composición de permutaciones, presenta un elemento neutro que al ser operado regresa la misma permutación, la cual es no permutar los elementos de ninguna forma y presenta un elemento inverso para cada permutación que regresa el elemento neutro, además cada operación tiene como resultado un elemento del producto cartesiano entre las permutaciones de 3 elmentos y 2 elementos.

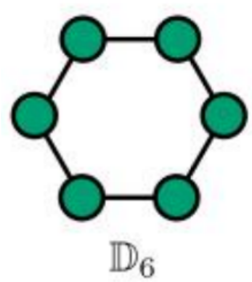
Se puede denotar el grupo $G = \{ G_0P_0,G_0P_1,G_0P_2,G_0P_3,G_0P_4G_0P_5,G_1P_0, G_1P_1,G_1P_2,G_1P_3,G_1P_4,G_1P_5 \}$, como grupo de simetrias del grafo en cuestión. Ahora, el grupo a comparar es el grupo S_3XS_2, denotado como el grupo resultante del producto cartesiano entre el grupo de simetrias S_3 y el grupo de simetrias S_2. El cual contiene todas las propiedades del grupo de simetrias del grafo en cuestión.

Podemos hacer la siguiente relación:
Con $x \in S_3XS_2$

x	x_0	x_1	x_2	x_n
θ	G_0P_0	G_0P_1	G_0P_2	G_nP_n

Con G_n entre 0 y 1. Y P_n entre 0 y 5. Para cubrir todos los automorfismos del grafo. Probando así, que ambos grupos son isomorfos.

CASO 4



Teniendo en cuenta lo siguiente:

R_n: Todas las rotaciones que puede hacer el hexagono. Más especificamente cada 60 grados, debido a la división de 360° grados entre 6 vertices. Lo cual da un total de 6 rotaciones. Incluyendo la rotación R_0 que se expresa como rotar 0° grados, se entiende como el elemento neutro denominado "e", que deja de la misma manera, cualquier rotación que se le anexe.

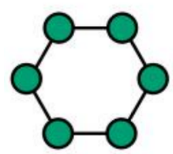
r_n: Todas las reflexiones que puede hacer el hexagono. Más especificamente reflejar en el eje x, en el eje y, en la rexta x=y, x=-y, -x=y y -x=-y. Lo cual da un total de 6 reflexiones.

Operación binaria asociativa: La operación binaria asociativa "*" se entiende como adicionar reflexiones y/o rotaciones a los estados declarados anteriormente. Lo cual nos da como resultado otro estado declarado, lo cual lo convierte en un grupo cerrado.

Elemento neutro: Se entiende como rotar 0 grados

Elemento inverso: Para todos los elementos en el grupo de transformaciones de un hexagono regular que conserva su estructura, existe un elemento que recupera el elemento neutro.

Esto hace que la siguiente tabla exprese el grupo de simetrias del grafo del hexagono regular.



$\mathbb{D}_6$

*****	**e**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**r0**	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**r5**
e	e	R1	R2	R3	R4	R5	r0	r1	r2	r3	r4	r5
R1	R1	R2	R3	R4	R5	e	r1	r2	r3	r4	r5	r0
R2	R2	R3	R4	R5	e	R1	r2	r3	r4	r5	r0	r1
R3	R3	R4	R5	e	R1	R2	r3	r4	r5	r0	r1	r2
R4	R4	R5	e	R1	R2	R3	r4	r5	r0	r1	r2	r3
R5	R5	e	R1	R2	R3	R4	r5	r0	r1	r2	r3	r4
r0	r0	r5	r4	r3	r2	r1	e	R5	R4	R3	R2	R1
r1	r1	r0	r5	r4	r3	r2	R1	e	R5	R4	R3	R2
r2	r2	r1	r0	r5	r4	r3	R2	R1	e	R5	R4	R3
r3	r3	r2	r1	r0	r5	r4	R3	R2	R1	e	R5	R4
r4	r4	r3	r2	r1	r0	r5	R4	R3	R2	R1	e	R5
r5	r5	r4	r3	r2	r1	r0	R5	R4	R3	R2	R1	e

El grupo a comparar es el grupo D_6: El grupo diédrico o dihedral de orden 6, denotado por D6, es el grupo de simetría del hexágono regular. Este grupo está compuesto por 12 elementos, incluyendo rotaciones y reflexiones, y se puede representar de la siguiente manera:

Seis rotaciones R0, R60, R120, R180, R240 y R300, donde R0 es la rotación identidad. Seis reflexiones F1, F2, F3, F4, F5 y F6, donde F1 es la reflexión horizontal.

Por lo cual, ambos grupos representan las simetrias internas del grafo y las simetrias de un hexagono regular. Por lo que se daría la siguiente relación:

x	e	R1	R2	R3	R4	R5	r0	r1	r2	r3	r4	r5
θ	R0	R60	R120	R180	R240	R300	F1	F2	F3	F4	F5	F6

Demostrando así, que los grupos son isomorfos.

4.
El panel B de la figura 2.1 consiste en la transformación de un grafo ciclico a una neurona computacional por medio del uso de automorfismos del grafo en cuestión. En el proceso de transformación se hace un aso de coincidencia el cual solo se puede lograr al encontrar la similitud total con un elemento del grupo de automorofismos del grupo ciclico de orden 6, C_6. Expresando así, el concepto de Autobanh, del cual se trata el texto. Al usar los automorfismos de un grafo para construir una neurona computacional. Además el grupo cíclico de orden 6 es un subgrupo normal de D_6 y está contenido en el conjunto de rotaciones de D6. Por lo tanto, el grupo cíclico de orden 6 y el subgrupo de rotaciones de D_6 son isomorfos. Sin embargo, D_6 también contiene reflexiones que no están presentes en C_6, lo que hace que D_6 sea un grupo más grande y complejo que C_6.