Universidad Nacional de Colombia

Tarea 1

Matematicas Discretas 2

Eder José Hernández Buelvas

Presentado a:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

February 15, 2023

1 Introduction

En el presente documento se llevarán a cabo las demostraciones correspondientes a los ejercicios expuestos en clase, con el objetivo de corroborar los conceptos de "Operación binaria asociativa" y "grupo".

2 Punto A

Se debe partir de la suposción de que el conjunto de elementos $G = \{a, b, c, d\}$ es un grupo, cuyas caracteristicas son: Ser un conjunto con una operación binaria asociativa, la existencia de un elemento neutro, el resultado de las operaciones esté dentro del mismo conjunto y de la existencia de elementos inversos. Las operaciones al ser una combinación finita se puede expresar mediante la siguiente tabla:

*	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	d

Para comprobar si el conjunto en cuestión es en realidad un grupo, se optará por comprobar el atributo "asociativo" de la operación binaria anteriormente mencionada, para esto, se usará una de las operaciones dispuestas en la tabla especificamente, la siguiente:

$$c * (a * b) = (c * a) * b$$

Remplazamos:

$$c * b = a * c$$

$$b = c$$

Sin embargo:

$$b \neq c$$

Por lo tanto, al encontrar un contraejemplo. Podemos decir que al no cumplirse la propiedad asociativa en todos los casos, se puede rechazar la hipotesis inicial. Es decir, que la operación definida en el conjunto G, no es asociativa.

3 Punto B

Se debe partir de la suposición de que el producto de las matrices 2x2 es un grupo. Teniendo el cuenta que el conjunto sobre el cual se va a operar es el conjunto de matrices 2x2 y la operacíon es el producto entre matrices. Se quiere demostrar que la operación producto entre matrices 2x2 es una operación binaria asociativa:

Para esto se va a definir A, B y C, como matrices 2x2, que se van a operar de la siguiente manera:

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$

(1)

Se parte de:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \tag{2}$$

Se opera el producto:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e*i+f*k & e*j+f*l \\ g*i+h*k & g*j+h*l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*e+b*g & a*f+b*h \\ c*e+d*g & c*f+d*h \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \tag{3}$$

Por ultimo:

$$\begin{bmatrix} a*e*i+a*f*k+b*g*i+b*h*k & a*e*j+a*f*l+b*g*j+b*h*l \\ c*e*i+c*f*k+d*g*i+d*h*k & c*e*j+c*f*l+d*g*j+d*h*l \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{bmatrix} a*e*i+a*f*k+b*g*i+b*h*k & a*e*j+a*f*l+b*g*j+b*h*l \\ c*e*i+c*f*k+d*g*i+d*h*k & c*e*j+c*f*l+d*g*j+d*h*l \end{bmatrix} \tag{4}$$

Por lo tanto, queda demostrado que el producto en el conjunto de matrices 2x2 cumple con la propiedad asociativa, al reducirse a operaciones de multiplicacion y suma de numeros reales, las cuales estaban anteriormente definidas como operaciones binarias asociativa, siendo así, una operación binaria asociativa.

4 Punto C

En este ejercicio se quiere demostrar que el producto de numeros complejos de la forma:

$$a + bi, con\ a, b \in R \wedge i \in C$$

es una operación binaria asociativa, para esto se debe comprobar que:

$$(a + bi) * ((c + di) * (e + fi)) = ((a + bi) * (c + di)) * (e + fi)$$

Lado Izquierdo:

$$(a + bi) * ((c + di) * (e + fi))$$

$$=$$

$$(a+bi)*((ec-df)+i\,(ed+cf))$$

Entonces:

$$= eac - adf + iacf + iead - (eac + iead - adf + iacf)$$

Lado derecho:

$$((a+bi)*(c+di))*(e+fi)$$

$$=$$

$$((ac-bd)+i\,(ad+bc))*(e+fi)$$

Entonces:

$$= eac + iead - adf + iacf - (eac + iead - adf + iacf)$$

Por lo tanto, se demuestra que el producto dentro del conjunto de numeros complejos es una operación binaria asociativa.

Ahora, se procederá a demostrar la existencia del elemento neutro, que satisface la propiedad de que al ser operado con otro elemento del conjunto, tenga como resultado el mismo elemento. Además de la existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto de los numeros complejos, cuya operación binaria asociativa tiene como resultado el elemento neutro.

$$(1)\ (a+bi)*(1+0i) = (a+bi)\ \forall_{a,b \in R\ \wedge\ i \in C}$$

$$(2)\ \forall_{a,b \in R\ \wedge\ i \in C}\ existe\ un\ \frac{1}{(a+bi)}\ tal\ que\ \frac{1}{(a+bi)}*(a+bi) = 1$$

Para probar el primer inciso, usaremos la operación definida anteriormente en un elemento especifico del conjunto de los numeros complejos para probar la existencia del elemento neutro:

$$1+0i$$

$$probando\ así:\ (1+0i)*(a+bi) = (a1-b0)+(b1+a0)i = a+bi$$

Una vez definido el elemento neutro, es fundamental determinar la existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto:

$$\frac{1}{(a+bi)}$$

$$probando\ así:\ \frac{1}{(a+bi)}*(a+bi) = \frac{(a+bi)}{(a+bi)} = 1$$

Teniendo en cuenta todas las propiedades que cumple la operación producto, dentro del conjunto de los numeros complejos, podemos afirmar que se trata de un grupo.