Universidad Nacional de Colombia

Demostración Imagen y Kenel

Matematicas Discretas 2

Eder José Hernández Buelvas

Presentado a:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

May 1, 2023

Teoría de grupos.

1. Demostrar que Kernel(θ) es un subgrupo.
2. Demostrar que Img(θ) es un subgrupo
3. Demostrar: Si T es cualquier otro subgrupo que contiene x, S $\subseteq T$

Desarrollo:

1. Para el Kernel(θ):

Cerradura bajo la operación: Sean a,b $\in Kernel(\theta)$, entonces tenemos que: θ(a) = θ(b) = e, donde e es el elemento neutro de la operación. Luego, θ(ab) = θ(a)θ(b) = e*e = e, por lo que a*b $\in Kernel(\theta)$.

Existencia del elemento inverso: Dado a $\in Kernel(\theta)$, tenemos que θ(a) = e. Como la función es un homomorfismo, θ(a^{-1}) = (θ(a))$^{-1}$ =e^{-1} = e. Por lo tanto, a^{-1} $\in Kernel(\theta)$.

Contiene al elemento neutro: El elemento neutro es el elemento que se mapea al elemento neutro en la imagen, es decir,θ(e) = e. Como e $\in Kernel(\theta)$, entonces el Kernel(θ) contiene al elemento neutro.

Por lo tanto, el Kernel(θ) es un subgrupo.

2. Para la Imagen(θ):

Cerradura bajo la operación: Sean a,b $\in Img(\theta)$, entonces existen elementos x,y tales que θ(x) = a y θ(y) = b. Luego, θ(xy) = θ(x)θ(y) = a*b, por lo que a*b $\in Img(\theta)$.

Existencia del elemento inverso: No es necesariamente cierto que todo elemento de la Imagen(θ) tenga un inverso en la imagen. Por ejemplo, en el grupo (Z_2: Suma modulo 2), el subconjunto $\{0, 2\}$ cerrado bajo la operación, pero 2 no tiene un inverso en ese subconjunto. En el caso de la imagen, es valido decir que es un subgrupo.

Contiene al elemento neutro: El elemento neutro en la Imagen(θ) es el propio elemento neutro de la imagen, es decir, θ(e) = e. Como e $\in Img(\theta)$, entonces la Imagen(θ) contiene al elemento neutro.

Por lo tanto, la Imagen(θ) es un subgrupo.

3.

Sea T un subgrupo que contiene x. Queremos demostrar que $s \subseteq T$. Sea $y \in s$. Entonces, por definición, $y = x^n$ para algún $n \in Z$. Como T es un subgrupo que contiene x, sabemos que $x^n \in T$ para cualquier $n \in Z$. Por lo tanto, $y = x^n \in T$ y concluimos que $s \subseteq T$.
En este caso, x es un elemento fijo del grupo G, s es un subconjunto de G que contiene a x, y T es cualquier subgrupo de G que contiene a x. La demostración muestra que si un elemento $y \in s$, entonces y puede expresarse como una potencia de x, y por lo tanto, $y \in T$, ya que T es un subgrupo que contiene a x. Como esto es cierto para cualquier elemento $y \in s$, concluimos que $s \subseteq T$.