Notas para um Curso de Álgebra Linear

Heitor R. de Assis

8 de janeiro de 2026

Sumário

Capítulo 1

Sistemas Lineares e Matrizes

1.1 Sistemas Lineares

Sistemas lineares são conjuntos de equações (lineares, portanto o nome) que buscamos resolver simultaneamente. Sua origem é antiga e suas aplicações são as mais variadas, estando presentes em diversos campos da ciência. É a partir do seu estudo que a álgebra linear se formou e, reciprocamente, os sistemas lineares formam uma ferramente extremamente útil para esta teoria.

Os coeficientes presentes nas equações são elementos de um **corpo**. Até o ponto presente, o mais comum é trabalharmos com equações contendo *coeficientes reais.* Se faz importante, porém, equações com coeficientes no corpo dos complexos, $\mathbb{C}$. Pode-se pensar que perguntas sobre os números complexos só tem interesse abstrato, mas a variedade de instâncias onde encontramos números complexos já deve ser suficiente para considerá-los.

Definição 1.1.1. Um corpo $\mathbb{F}$ é um conjunto em que duas operações estão definidas: uma chamada de multiplicação $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ e outra chamada de adição $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Estas operações devem satisfazer:

1. $+$ é comutativa: $x + y = y + x$ para todos $x, y \in \mathbb{F}$.

2. $+$ é associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todos $x, y, z \in \mathbb{F}$.

3. Existe um único elemento neutro $0 \in \mathbb{F}$, chamado de zero, tal que $x + 0 = 0$ para todo $x \in \mathbb{F}$.

4. Para cada $x \in \mathbb{F}$, existe um único elemento $(-x) \in \mathbb{F}$ tal que $x + (-x) = 0$.

5. $\cdot$ é comutativa: $x \cdot y = y \cdot x$ para todos $x, y \in \mathbb{F}$.

6. $\cdot$ é associativa: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todos $x, y, z \in \mathbb{F}$.

7. Existe um único elemento diferente de zero e denotado por 1 que satisfaz $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$.

8. Para todo $x \in \mathbb{F}$ diferente de zero, existe um único elemento, denotado por x^{-1}, que satisfaz $x^{-1} \cdot x = 1$.

9. Vale a propriedade distributiva, ou seja, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.

Observação. Discorramos um pouco mais sobre esta definição, para se ter uma noção de sua significância. Raramente na matemática estuda-se um conjunto de elementos por si só, sendo muito mais comum o estudo de um conjunto de elementos juntamente com as operações que os relacionam. Como exemplo, considere os números reais. Quando falamos da reta real $\mathbb{R}$, não estamos apenas falando do conjunto de números que formam a reta real, $\mathbb{R} = \{1, 2, 3, \pi, -2, \sqrt{3}, \cdots\}$, mas também assumimos que $1+2 = 3$, $4\pi+2\pi = 6\pi$ e assim por diante. Da mesma forma, estamos convencionando que $1 \times x = x$, qualquer valor que $x \in \mathbb{R}$ possa ter, que $-1 \times 4 = -4$ e que daí $(-1 \times 4) + 4 = 0$. Infinitas outras operações entre elementos individuais de $\mathbb{R}$ estão de certa forma implícitas quando dizemos estudamos a reta real.

Acontece que é um objetivo do campo da matemática a abstração de conceitos conhecidos. Ao nos depararmos com um conjunto, munido de certas operações que julgamos interessantes, buscamos abstrair o máximo possível. Nos perguntamos, por exemplo: Qual é o conjunto minimal de propriedades que, por si só, são capazes de gerar todas outras? Quando um conjunto, qualquer que seja, satisfaz tais propriedades, quais afirmações podem ser feitas? Por exemplo, a afirmação de que qualquer número multiplicado por zero da zero não está entre as propriedades da Definição 1.1.1. Apesar disso, qualquer conjunto com estas propriedades satisfaz esta afirmação (consegue prová-la?). Esta é uma forma de diferenciarmos as proposições que são intrínsecas de uma certa estrutura daquelas que são específicas de cada modelo. A Definição 1.1.1, portanto, é o resultado da abstração das propriedades essenciais dos números reais.

Esta investigação é útil, inclusive, para testar se as mesmas operações podem ser assumidas sobre diferentes conjuntos. Como exemplo, considere o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Temos uma óbvia e bem estabelecida adição neste conjunto, a saber

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$

Podemos generalizar a operação de multiplicação que está presente em $\mathbb{R}$ para este novo conjunto? A primeira tentativa pode ser replicar o que foi feito para a adição, definindo

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 \times x_2, y_1 \times y_2)\,. \tag{1.1}$$

Existe alguma propriedade que valorizamos quando falamos de produtos, que $\mathbb{R}$ com a multiplicação usual possui, mas $\mathbb{R}^2$ com a multiplicação definida acima não satisfaz? A resposta é **sim**. Em $\mathbb{R}$, não existem dois números x e y *diferentes de zero* tais que $x \times y = 0$. Já em $\mathbb{R}^2$, é fácil ver que como definido acima, a multiplicação de duas duplas pode ser zero sem que qualquer uma delas seja zero. Por exemplo,

$$(x, 0) \times (0, y) = (0, 0)\,.$$

Acontece que esta é uma propriedade importante por alguns motivos diferentes e, portanto, a definição de produto como em (1.1) não nos é adequada. Podemos nos perguntar se existe alguma definição para o produto em $\mathbb{R}^2$ que funcione da mesma forma que a multiplicação em $\mathbb{R}$.

Os exemplos mais importantes de corpos são os já conhecidos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Estes não são os únicos, mas serão os únicos considerados aqui. Neste curso, portanto, $\mathbb{F}$ será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e sua utilização será principalmente a de um simplificador de notação. Na próxima definição, por exemplo, generalizamos o conceito de produto cartesiano de reais, considerando $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ ao mesmo tempo.

Definição 1.1.2. Seja $n \in \mathbb{N}$ um natural qualquer. O conjunto $\mathbb{F}^n$ é formado por todas as n-uplas de elementos do corpo $\mathbb{F}$, ou seja,

$$\mathbb{F}^n = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}\,.$$

Neste texto, as letras gregas α, β, γ, etc. serão utilizadas para representar elementos do corpo $\mathbb{F}$, seja ele $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.1.3. Um sistema linear é um conjunto de equações da forma

$$(S) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \end{cases}$$

em que $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ e $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{F}$ são constantes e $x_1, \ldots, x_n$ são as incógnitas, cujos valores queremos determinar.

Dizemos que o sistema linear (S) é **homogêneo** se $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. O conjunto dos elementos $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ que resolvem o sistema é chamado de **conjunto solução** do sistema, ou seja,

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}x_k = \beta_j \, , \, \forall \, j = 1, \cdots, m \right\} .$$

Quanto à possibilidade de solução, temos somente três casos:

- Um sistema (S) é **compatível determinado** se existe uma única solução, ou seja, se o conjunto solução possui uma única $n-$upla.
- Um sistema (S) é **compatível indeterminado** se existem infinitas soluções, ou seja, se o conjunto solução possui infinitas $n-$uplas.
- Um sistema (S) é **incompatível** se não possui solução, ou seja, se o conjunto solução é vazio.

Exemplo. Resolvemos o sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Utilizamos o método de eliminação de variáveis: Somando as duas equações, obtemos

$$2x = 8 \implies x = 4 \implies y = 6 \, .$$

O sistema (S) é portanto compatível determinado e seu conjunto solução é dado pela dupla $(4, 6)$, apenas.

Exemplo. Cada equação de um sistema linear de m variáveis é uma restrição que tem potencial, portanto, de condicionar uma variável as outras. Consideremos por exemplo o caso de um sistema com apenas uma equação.

$$(S) \qquad \{\alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n = \beta \ .$$

Neste caso podemos isolar qualquer uma das variáveis, colocando-a em função das demais. O conjunto solução deste sistema pode ser escrito, por exemplo, uma vez que escrevemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n \\ &= -\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_1}x_k \, . \end{aligned}$$

Logo, o conjunto de soluções de (S) é

$$\left\{ \left(-\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_1}x_k, x_2, \cdots, x_n \right) \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\} .$$

Como já dito, podemos isolar qualquer umas das variáveis, ou seja também podemos escrever

$$x_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1 - \sum_{k=3}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_2} x_k \,,$$

de forma que o conjunto solução de (S) pode ser reescrito como

$$\left\{ \left(x_1, -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1 - \sum_{k=3}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_2} x_k, x_3, \cdots, x_n \right) \mid x_1, x_3, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ambas as formas representam *o mesmo conjunto* de elementos, sendo apenas parametrizações diferentes do mesmo conjunto.

Exemplo. Considere o sistema linear

$$(S) \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \,, \\ -3x + 3y - 4z = 0 \,, \\ 4x - y + 3z = 3 \,. \end{cases}$$

Ao tentarmos o processo de eliminação de variáveis para resolver (S), encontramos o seguinte

$$(l.1) - (l.2) - (l.3) \implies 0 = -1 \,.$$

O que isso significa? Que se existir uma solução para este sistema, de modo que as três equações de (S) sejam verdadeiras, então obtemos que $0 = 1$, o que é um absurdo. Só nos resta afirmar que (S) não pode ser assumido verdadeiro, ou seja, não existe instância onde as três equações são simultaneamente satisfeitas.

Posto desta forma, talvez não fique claro o que há de errado com o sistema (S). Vejamos o seguinte: subtraindo a segunda equação da primeira, temos

$$4x - y + 3z = 2 \,.$$

Assim, uma solução de (S) é automaticamente uma solução de

$$(S) \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \,, \\ 4x - y + 3z = 2 \,, \\ 4x - y + 3z = 3 \,. \end{cases}$$

Desta forma, fica claro que não existe tripla que satisfaça as três equações simultaneamente, pois as duas últimas formam resultados incompatíveis.

O que pretendemos fazer neste capítulo obter um método para a resolução de qualquer sistema linear que tenhamos em mãos. Com isso, queremos dizer: (i) determinar se o sistema possui ou não soluções; (ii) Obter fórmulas que identifiquem todas as soluções existentes. Para a primeira tarefa, a relação entre sistemas lineares e matrizes é de fundamental importância, como veremos a frente.

1.2 Resolução de Sistemas Lineares

O estudo dos sistemas lineares já está completamente resolvido e classificado, ou seja, para qualquer sistema linear (S) podemos determinar se ele é compatível ou incompatível e, no primeiro caso, obter todas as soluções possíveis. A resolução é obtida com o método de escalonamento, que em linha gerais iguala (S) a um sistema linear (S') mais simples e que então podemos extrair as soluções. A noção de equivalência entre os dois sistemas lineares permite afirmar que as suas soluções são as mesmas. O processo é completamente análogo ao que fazemos para equações, sejam elas lineares ou não. Vejamos como exemplo uma equação quadrática. Para obtermos as soluções de uma equação genérica de segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{1.2}$$

argumentamos que qualquer solução de (1.2) é também uma solução de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\,.$$

Esta segunda igualdade é muito mais simples de ser resolvida e tem como solução

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}\,.$$

Portanto, equiparamos a equação (1.2) a uma equação

$$(x-\alpha)^2 = \beta\,, \tag{1.3}$$

que é evidente quanto a sua solubilidade e quanto a suas soluções. O escalonamento de um sistema linear (S) segue o mesmo princípio, sendo que devemos portanto achar quais são nossas *operações elementares*, ou seja que preservam as soluções, e quais são os sistemas mais simples possíveis. Estas serão as duas próximas definições.

Definição 1.2.1. Podemos definir três operações elementares sobre os sistemas lineares. Estas operações são:

1. Permutar duas equações do sistema.
2. Multiplicar uma das equações do sistema por um $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.
3. Substituir uma equação pela soma com outra equação.

Quando um sistema (S') é obtido através de (S) por operações elementares, dizemos que os dois sistemas são equivalentes e escrevemos $S \sim S'$.

A justificativa para considerarmos estas operações acima de quaisquer outras é que estas não alteram as soluções do sistema.

Proposição 1.2.2. *Se dois sistemas (S_1) e (S_2) são equivalentes, então eles possuem as mesmas soluções.*

Demonstração. Precisamos apenas provar que, ao realizar qualquer umas das três operações expostas na Def. 1.2.1 não alteramos as soluções. É evidente que permutar duas linhas e multiplicar uma linha por um escalar (não nulo) não irá trocar as soluções. Para a soma de duas equações, basta notar que qualquer solução de um par de equações

$$(S) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \end{cases}$$

vai satisfazer também a equação

$$(\alpha_{11} + \alpha_{12})x_1 + \cdots + (\alpha_{1n} + \alpha_{2n})x_n = \beta_1 + \beta_2\,.$$

Ou seja, satisfaz por exemplo

$$(S') \qquad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ (\alpha_{11} + \alpha_{12})x_1 + \cdots + (\alpha_{1n} + \alpha_{2n})x_n = \beta_1 + \beta_2. \end{cases}$$

Reciprocamente, se uma n-upla satisfaz (S'), então da mesma forma esta vai satisfazer também (S). Isso mostra que os dois sistemas compartilham o mesmo conjunto de soluções. $\square$

A seguir, temos resultados que justificam a nomenclatura 'sistemas equivalentes'.

Proposição 1.2.3. *A relação $\sim$ define uma relação de equivalência entre os sistemas, ou seja,*

1. $S \sim S$.
2. *Se* $S_1 \sim S_2$, *então* $S_2 \sim S_1$.
3. *Se* $S_1 \sim S_2$ *e* $S_2 \sim S_3$, *então* $S_1 \sim S_3$.

Agora passamos para a caracterização do que seriam nossos sistemas mais simples possíveis.

Definição 1.2.4. Um sistema linear de m equações e n incógnitas é escalonado se ele for da forma

$$\begin{cases} x_1 + \quad \cdots + \qquad + \cdots + \qquad + \cdots \quad + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\qquad x_{r_2} \quad + \cdots + \qquad + \cdots \quad + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{r_k} \quad + \cdots \quad + \alpha_{kn}x_n = \beta_k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0 \cdot x_n = \beta_{k+1}, \end{cases}$$

com $\alpha_{jr_j} \neq 0$ para todo j e $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq n$.

Vejamos uma caracterização posta em termos diferentes:

Definição 1.2.5. Um sistema linear (S) é escalonado se:

1. a primeira variável presente em uma linha estiver a direita da primeira variável da linha superior;
2. a primeira variável presente na equação de uma linha não estiver presente nas linhas acima;
3. a primeira varíavel de cada equação é seguida do coeficiente 1;
4. qualquer linha nula estiver abaixo de qualquer linha não nula.

Tendo em mãos os sistemas mais simples possíveis, devemos ser capazes de resolvê-los sem mais problemas, tal qual a equação quadrática na forma (1.3).

Proposição 1.2.6. *Se (S) é um sistema escalonado, então:*

1. *(S) é incompatível se possui uma linha da forma*

$$0 = \beta\,, \quad \beta \neq 0\,.$$

Caso, contrário, (S) é compatível.

2. *se (S) é compatível e possui mais variáveis do que equações não nulas, então (S) é compatível indeterminado. Caso contrário, (S) é compatível determinado.*

Por fim, resolvemos todos os sistemas possíveis mostrando que qualquer sistema (S) é equivalente a um sistema escalonado.

Teorema 1.2.7. *Todo sistema é equivalente a um sistema escalonado. A resolução do sistema é obtida então através da solubilidade do sistema escalonado equivalente.*

Demonstração. A prova é feita expondo o algoritmo para transformar um sistema qualquer, através de operações elementares, em um sistema escalonado. A ideia é sempre que possível deixar apenas uma linha para cada variável, sendo necessárias as operações elementares para zerarem a mesma variável nas demais equações.

Primeiramente, trocamos linhas se necessário para que a primeira equação tenha x_1. Uma vez feito isso (com *qualquer* equação com x_1 ocupando o lugar de primeira equação), zeramos os coeficientes de x_1 nas demais linhas. Para um par de linhas qualquer,

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + & \cdots + & \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{k1}x_1 + & \cdots + & \alpha_{kn}x_n = \beta_k, \end{cases}$$

fazemos $\alpha_{k1}(l.1) - \alpha_{11}(l.k) \to (l.k)$ e obtemos

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + & \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = & \beta_1, \\ & \gamma_{k2}x_2 + \cdots + \gamma_{kn}x_n = & \alpha_{k1}\beta_1 - \alpha_{11}\beta_k, \end{cases}$$

onde $\gamma_{kj} = \alpha_{k1}\alpha_{1j} - \alpha_{11}\alpha_{kj}$. Ao final deste processo, o sistema estará da seguinte forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + & \alpha_{12}x_2 + \cdots & +\alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ & \gamma_{22}x_2 + \cdots & +\gamma_{2n}x_n = \delta_2 \\ & \gamma_{32}x_2 + \cdots & +\gamma_{3n}x_n = \delta_2 \\ & & \vdots \\ & \gamma_{n2}x_2 + \cdots & +\gamma_{nn}x_n = \delta_2 \end{cases}$$

Em seguida, comparamos os coeficientes da próxima coluna (referente a variável x_2). Procuramos entre as linhas, excetuando a primeira, qual possui a variável x_2 e teremos dois resultados possíveis:

Caso 1: Existe um $\gamma_{k2} \neq 0$. Neste caso, colocamos a k-ésima equação na posição da segunda equação através de uma troca de linhas. Deste modo, podemos supor aqui que $\gamma_{22} \neq 0$. Zeramos o coeficiente da primeira equação através da operação elementar $\gamma_{22}(l.1) - \alpha_{12}(l.2) \to (l.1)$, enquanto que para as demais linhas zeramos fazendo $\gamma_{22}(l.k) - \gamma_{k2}(l.2) \to (l.k)$, da mesma forma como feito antes.

Caso 2: Não existe γ_{k2} diferente de zero. Neste caso, α_{21} deve ser não nulo e podemos simplesmente passar para a próxima variável.

É fácil ver que é possível prosseguir desta forma até obtermos um sistema que satisfaça as condições 1, 2 e 4 de um sistema escalonado. Para concluir, basta multiplicar cada linha pelo ionverso do coeficiente que segue cada primeira variável ($\alpha_{11}^{-1}, \gamma_{k2}^{-1}$, etc.). □

1.3 Matrizes sobre um corpo

Definição 1.3.1. Uma matriz $m \times n$ com coeficientes em $\mathbb{F}$ é uma função

$$\begin{array}{rccc} A\colon & \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} & \to & \mathbb{F} \\ & (i, j) & \to & A(i, j)\,. \end{array}$$

Denotaremos os elementos da imagem dessa função pela letra minúscula a_{ij}, ou seja, $A(i,j) = a_{ij}$. Com isso, por vezes escrevemos simplesmente $A = (a_{ij})$. Por fim, dada uma matriz cujos termos são a_{ij} podemos representá-la da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dizemos que a matriz tem m linhas e n colunas e que a_{ij} é o elemento da i-ésima linha e $j-$ésima coluna de A. O conjunto das matrizes $m \times n$ é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ou $M(m \times n, \mathbb{F})$. Se $m = n$, denotamos $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ apenas por $M_n(\mathbb{F})$ ou $M(n, \mathbb{F})$.

Definição 1.3.2. Dados quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, podemos definir duas operações sobre $M_{m\times n}(\mathbb{F})$:

1. Adição $(+)$: $M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ é dada por $(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
2. Multiplicação por um escalar $(\cdot)$: $\mathbb{F} \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ é dada por $(\lambda \cdot a)_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Estas operações já cobrem o básico para que possamos falar de resolução de sistemas lineares utilizando matrizes. Este conjunto, no entanto, possui outras possibilidades de operações, que adicionam estruturas interessantes.

Definição 1.3.3. Podemos definir também novas operações sobre o conjunto de **todas** as matrizes, independente do tamanho:

1. Multiplicação de matrizes $(\cdot)$: $M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{n\times p}(\mathbb{F}) \to M_{m\times p}(\mathbb{F})$ é dada por $(a \times b)_{ij} = (c_{ij})$, em que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
2. Transposta de matrizes $t : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{n\times m}(\mathbb{F})$ é dada por $(a^t)_{ij} = (a_{ji})$.

A próxima operação é característica de matrizes sobre o corpo dos complexos.

1. Adjunta de matrizes $* : M_{m\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times m}(\mathbb{C})$ é dada por $(a^*)_{ij} = (\overline{a_{ji}})$.

Note que todas as operações até agora definidas tem como subconjuntos invariantes as coleções de matrizes quadradas de um tamanho $n \in \mathbb{N}$ fixado. Estas matrizes, portanto, formam um subconjunto dotado de rica estrutura.

Observação. Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, definimos a somatória por $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \cdots + a_n$. Algumas propriedades da somatória:

1. $\alpha(\sum_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$.
3. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.
4. $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$.

Definição 1.3.4. A matriz identidade de $M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $n \times n$ dada por $I_n = (\delta_{ij})$, em que o delta de Kronecker δ_{ij} é o símbolo que significa

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j\,. \end{cases}$$

Esta matriz portanto é escrita como

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ colunas}} \quad \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ linhas}$$

A nomenclatura vem do fato de que I_n se comporta como a identidade de $\mathbb{R}$, ou seja o número 1. De fato, para qualquer $A \in M(n \times m, \mathbb{F})$, temos

$$B = I_n A \implies B \in M(n \times m, \mathbb{F}) , \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij} ,$$

ou seja

$$I_n A = A .$$

Não podemos, porém, fazer o produto AI_n se $m \neq n$. O caso em que $m \neq n$ é portanto especial, como veremos na Seção 1.4.

Proposição 1.3.5. *As operações de matrizes satisfazem as seguintes propriedades para $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$, $B' \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ e $C \in M_{p\times \ell}(\mathbb{F})$ (Para as propriedades envolvendo a operação adjunta, considere $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).*

1. $A(BC) = (AB)C$.
2. $(A + A')B = AB + A'B$ *e* $A(B + B') = AB + AB'$.
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
4. $(A + B)^t = A^t + B^t$ *e* $(A + B)^* = A^* + B^*$.
5. $(AB)^t = B^t A^t$ *e* $(AB)^* = B^* A^*$.
6. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ *e* $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
7. $(A^t)^t = A$ *e* $((A^*)^*) = A$.

Podemos definir três operações elementares sobre as matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, de forma a espelhar as operações sobre sistemas lineares que nos levam aos sistemas escalonados.

Definição 1.3.6. Chamamos de operações elementares sobre $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ as seguintes operações:

1. Permutar duas linhas da matriz.
2. Multiplicar uma das linhas da matriz por um $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.
3. Somar uma das linhas da matriz por um múltiplo de outra linha.

Proposição 1.3.7. *Sejam $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ as matrizes $m \times n$. Se uma matriz B é obtida de uma matriz A através de um conjunto de operações elementares dizemos que B é equivalente a A e denotamos $B \sim A$. $\sim$ define uma relação de equivalência entre as matrizes, ou seja:*

1. $A \sim A$.
2. *Se* $A \sim B$, *então* $B \sim A$.
3. *Se* $A \sim B$ *e* $B \sim C$, *então* $A \sim C$.

Demonstração. Veja o Exercício **??**. □

1.4 Matrizes quadradas

Dentre todas as matrizes possíveis, existem subconjuntos que são mais comportados - ou mais estruturados - que os demais. Estes são os conjuntos das matrizes quadradas, ou seja com o mesmo número de colunas e linhas. A unicidade destes subconjuntos está no fato de que podemos definir um **elemento neutro** para a multiplicação sem ambiguidade. De fato, para qualquer matriz $A \in M(n \times m, \mathbb{F})$, podemos achar matrizes I e I' tais que

$$IA = A = AI' \,.$$

Porém, pela definição da multiplicação de matrizes, I e I' devem ser diferentes (seus tamanhos não coincidem). Por exemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Para $A \in M(n \times m, \mathbb{F})$, portanto, o elemento neutro à direita é I_m, enquanto que o elemento neutro à esquerda é I_n. Em $M(n, \mathbb{F})$, portanto, ambos I e I' são o mesmo, o que caracteriz I_n como o elemento neutro da multiplicação em $M(n, \mathbb{F})$.

Proposição 1.4.1. *A matriz identidade $I_n \in M_n(\mathbb{F})$ é a única matriz tal que, para todo $A \in M_n(\mathbb{F})$,*

$$AI_n = I_nA = A.$$

Demonstração. Suponha que $B \in M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz tal que

$$AB = BA = A \,, \quad \forall\, A \in M_n(\mathbb{F}) \,.$$

Em particular, segue daí que

$$I_n = I_nB = B \,.$$

Logo, toda matriz B com esta característica deve ser igual à I_n, o que prova que a identidade é única. $\square$

A partir do momento em que temos uma multiplicação e um elemento neutro, podemos nos perguntar quais elementos podemos inverter, ou seja, para quais matrizes (quadradas) A, existe uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição 1.4.2. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é inversível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso B é denotado por A^{-1} e é chamado de inversa de A.

De uma maneira análoga à Proposição 1.4.1, é possível provar que a inversa de qualquer matriz é única.

> **Observação.** Há um nome especial para um conjunto munido das três operações vistas até aqui - soma, multiplicação por escalar e produto - para matrizes quadradas. Estes conjuntos são **algebras**. Vimos acima que qualquer outro $M(n \times m, \mathbb{F})$, com $m \neq n$, não é uma álgebra.

Estudemos agora a definição do determinante de uma matriz. Esta quantidade é definida apenas para matrizes quadradas e a sua definição deriva do seguinte desenvolvimento: Considere um sistema genérico com duas variáveis e duas equações,

$$(S_1) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \beta_2. \end{cases}$$

Podemos resolve-lo de maneira simples, substituindo uma das equações na restante. Por exemplo, a segunda equação nos diz que[1]

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_{21}}(\beta_2 - \alpha_{22}x_2)\,.$$

Substituindo esta igualdade na primeira equação, temos

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}(\beta_2 - \alpha_{22}x_2) + \alpha_{12}x_2 = \beta_1\,,$$

ou seja,

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})x_2 = \alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{11}\beta_1\,. \tag{1.4}$$

Portanto, se $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, obtemos a solução do sistema,

$$x_2 = \frac{\alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{11}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}\,, \quad x_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_{12}x_2}{\alpha_{11}}\,.$$

Por outro lado, se $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$, então ou o sistema (S_1) é incompatível (se o lado direito de (1.4) for diferente de zero) ou ele possui infinitas soluções (se o lado direito de (1.4) for igual a zero). Esta combinação, por ter este caráter definidor da solubilidade de (S_1), merece especial atenção e é ela que recebe o nome de determinante da matriz que define o sistema (a relação entre sistemas lineares e matrizes será vista na próxima seção). Podemos fazer o mesmo raciocínio para sistemas 3×3 e a quantidade que obtemos é o que definimos ser o determinante de uma matriz 3×3. O cálculo é um tanto trabalhoso, por isso não faremos ele aqui. Apenas apresentaremos a definição dos determinantes de matrizes quadradas de qualquer tamanho.

Definição 1.4.3. Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz quadrada de tamanho n. Então definimos o **determinante** de A por

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det A(1|i)\,,$$

onde $A(j|i)$ é a matriz de tamanho $n-1$ obtida de A retirando a $j-$ésima coluna e a $i-$ésima linha, ou seja

$$(A(j|i))_{lk} = \begin{cases} a_{lk}\,, & \text{se } l < j\,, k < i\,, \\ a_{(l+1)k}\,, & \text{se } l \geq j\,, k < i\,, \\ a_{l(k+1)}\,, & \text{se } l < j\,, k \geq i\,, \\ a_{(l+1)(k+1)}\,, & \text{se } l \geq j\,, k \geq i\,. \end{cases}$$

Observação. Para os tamanhos dois e três, podemos expandir a definição acima explicitamente. O primeiro caso retorna a quantidade que já encontramos,

$$A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{F}) \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,,$$

[1] Note que se $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, então ou o sistema só possui uma equação (se $\beta = 0$) ou o sistema é incompatível ($\beta \neq 0$). Estamos assumindo portanto, que α_{21} é diferente de zero.

enquanto que para o caso de tamanho três, podemos calcular com a Regra de Sarrus,

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{\text{somas das diagonais principais}} - \underbrace{\big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\big)}_{\text{somas das diagonais secundárias}} .$$

Se estudamos matrizes por conta própria, sem a motivação dos sistemas lineares, ainda assim o determinante é uma quantidade importante, pois nos dá a verificação de invertibilidade.

Teorema 1.4.4. *Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz quadrada de tamanho qualquer. Então, A é inversível se, e somente se,* $\det A \neq 0$.

Mais do que isso, podemos escrever quem será a matriz inversa, em termos do determinante. Para isso é necessário também a definição da matriz adjunta de uma matriz quadrada.

Definição 1.4.5. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, definimos a matriz adjunta de A por

$$\mathrm{Adj}(A) = \Delta^T ,$$

onde $\Delta = (\Delta_{ij})$ é a matriz dos cofatores de A, que foram apresentados na Def. 1.4.3,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j) .$$

Teorema 1.4.6. *Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz quadrada de tamanho n qualquer. Temos A é inversível se, e somente se,* $\det A \neq 0$. *No caso afirmativo, temos*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}(A) .$$

1.5 Matrizes e Sistemas Lineares

Agora que já vimos as definições e propriedades importantes do conjunto das matrizes, mostremos como elas se relacionam com a resolução de sistemas lineares.

Considere o sistema linear

$$(S) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \end{cases} .$$

O que podemos perceber é que cada uma das m equações de (S) pode ser vista como uma multiplicação de uma linha matricial com uma coluna matricial. O lado esquerdo da primeira, por exemplo, é simplesmente $\sum_j \alpha_{1j}x_j$ e ela pode ser vista como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta_1 .$$

Como isso vale para cada uma das equações de (S) e a matriz coluna é sempre a mesma, com elementos sendo as variáveis x_i, podemos reescrever todas as equações de uma forma concisa através de uma multiplicação de matrizes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{B} .$$

Podemos resolver um sistema linear, portanto, analisando as matrizes que o compõe, em particular a matrizes de coeficientes $A = (\alpha_{ij})$ e $B = (\beta_i)$. A matriz de variáveis, X, é secundária e tem um papel tal qual o argumento x de uma função $f : D \to CD$, de representar qual é a ação de f sobre o seu domínio D. De fato, note o seguinte: Se a matriz A de coeficientes é inversível, então podemos tomar $X = A^{-1}B$, de modo que

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B\,.$$

Desta forma, solucionamos (S) apenas olhando para a matriz A e nem mesmo B foi necessária. Chegamos portanto a uma primeira forma, por vezes falha pois nem toda matriz pe inversível, de se revolver um sistema (S) qualquer.

Proposição 1.5.1. *Considere um sistema (S) colocado em forma matricial $AX = B$, com A uma matriz quadrada de tamanho n. Se A é inversível, então (S) possui solução $X = A^{-1}B$, ou seja,*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\beta_j\,, \quad i = 1, \cdots, n\,,$$

onde $A^{-1} = (\gamma_{ij})$.

Note porém que a questão da solubilidade de um sistema (S) geral não depende de modo algum da inversa de uma matriz, inclusive pois na maioria dos sistemas, a matriz A de coeficientes não será quadrada e portanto não temos o que é a noção de uma inversa. Os sistemas quadrados são apenas um caso particular onde as propriedades de matrizes no ajudam a simplificar a resolução. O determinante de uma matriz é um quantificador importante para isso, pois o Teorema 1.4.6 nos diz que A possui inversa se e somente se seu determinante não é zero. O resultado que temos nos diz mais ainda.

Teorema 1.5.2. *Considere um sistema qualquer*

$$(S) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \end{cases}$$

e seja $A = (\alpha_{ij})$ a matriz dos coeficientes de (S). Então temos o seguinte:

1. *Se $\det A \neq 0$ então (S) possui uma única solução. Se $B = 0$, esta é a solução trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.*
2. *Se $\det A = 0$, então (S) é incompatível ou possui infinitas soluções. Se $B = 0$, então (S) necessariamente possui infinitas soluções.*

Podemos expressar este resultado no sentido contrário, olhando para uma matriz quadrada qualquer e tirando conclusões dos sistemas que ela pode formar.

Teorema 1.5.3. *Seja $A = (\alpha_{ij})$ uma matriz quadrada de tamanho n qualquer. Então temos o seguinte:*

1. *Se $\det A \neq 0$ então qualquer sistema (S) da forma $AX = B$ possui uma única solução. Para $B = 0$, a solução é trivial, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.*
2. *Se $\det A = 0$, então existe uma $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ tal que o sistema (S) da forma $AX = B$ é incompatível. Para $B = 0$, (S) possui infinitas soluções.*

Observação. Os resultados que obtivemos até aqui para sistemas quadrados através da analise dos determinantes são apenas de natureza classificatória, ou seja, não nos dão explicitamente as soluções procuradas a não ser em casos particulares como sistemas homogêneos. Como os determinantes também nos permitem calcular as inversas das matrizes (com a matriz adjunta entrando também na fórmula), eles podem também ser usado para a resolução completa dos sistemas lineares no caso em que existe uma inversa. Este método de cálculo da inversa, porém, costuma ser mais trabalhoso que o método de escalonamento e portanto não costuma valer a pena utilizá-lo.

Mesmo o método de escalonamento para a resolução de sistemas lineares é facilitado com a utilização da representação matricial. Para utilizarmos este, porém, precisamos primeiro definir o que é uma matriz escalonada, que espelha a definição para sistemas lineares. Antes disso, citamos que, para uma matriz qualquer, o primeiro termo não nulo de uma linha é chamado de **pivô**.

Definição 1.5.4. Uma matriz $A \in M(n \times m, \mathbb{F})$ está na forma escalonada se:

1. o pivô de uma linha estiver a direita do pivô da linha superior;
2. em cada coluna com um pivô, todas as demais entradas forem nulas;
3. o pivô de cada linha (quando houver) é 1;
4. qualquer linha nula estiver abaixo de qualquer linha não nula.

Lembremos, por outro lado, que as informaões de um sistema linear qualquer se encontram nos coeficientes que acompanham as variáveis e também nos coeficientes do lado esquerdo. Isso motiva a seguinte deifinição.

Definição 1.5.5. Seja (S) um sistema linear qualquer

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n. \end{cases}$$

Chamamos de matriz aumentada do sistema (S) a matriz dada por

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Diremos que uma matriz aumentada está na forma escalonada quando a matriz dada pelas primeiras n colunas estiver na forma escalonada. Ao realizarmos as operações elementares sobre a matriz aumentada de (S) e alcançarmos uma matriz escalonada, obteremos uma nova matriz que representa um sistema escalonado e que é equivalente ao sistema (S).

1.6 Algoritmo de inversão de matrizes

Suponha que queiramos achar a inversa de uma matriz quadrada $A \in M(n, \mathbb{F})$. Posto de outra forma, buscamos $B \in M(n, \mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Olhamos para a primeira identidade. A igualdade entre duas matrizes $n \times n$ é também a igualdade de n matrizes coluna, de modo que assumir $BA = I_n$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como os coeficientes a_{ij} já são conhecidos, o que estamos fazendo nada mais é do que resolvendo n sistemas lineares simultaneamente. Cada um dos sistemas nos dará uma das n colunas da matriz inversa B, se ela existir. Pelo Teorema 1.5.2, se $\det A \neq 0$, então todos estes sistemas serão solúveis. Mais do que isso, esta condição nos dá que A será equivalente à matriz identidade e, como o método de escalonamento com matrizes só depende da matriz dos coeficientes, podemos resolver todos os sistemas simultaneamente.

Teorema 1.6.1 (Algoritmo de inversão)**.** *Seja $A \in M(n, \mathbb{F})$ uma matriz quadrada, com $\det A \neq 0$. Formemos a matriz aumentada*

$$(A|I) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ao transformarmos esta matriz, através de operações elementares, até que tenhamos uma matriz da forma $(I|B)$, então B será a inversa de A.

Ainda por causa da estreita relação entre sistemas lineares e matrizes, o método de escalonamento (através de operações elementares e portanto matrizes equivalentes) nos dá mais um critério para invertibilidade.

Teorema 1.6.2. *Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz quadrada de tamanho qualquer. Então, A é inversível se, e somente se, $A \sim I_n$, ou seja, a identidade pode ser obtida de A através de operações elementares. Neste caso a mesma sequência de operações elementares que leva A à I_n, também leva I_n à A.*

Demonstração. Veja o Exercício **??**. □