Primeira Prova - Álgebra Linear (Verão 2025)

A prova é individual e sem consulta, com duração de duas horas. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração

Questão 1. Faça o que se pede.

(a) Discuta a solução do seguinte sistema linear:

$$S = \begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3, \\ x + y + 4z - w = -6, \\ 2y + 2z + w = 5. \end{cases}$$

(b) Acrescente ao sistema S a equação $2z + kw = 9$ e encontre um valor de k que torne o sistema impossível.

Questão 2. Para os dois subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ que seguem, obtenha um conjunto de vetores geradores.

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

(c) Em seguida, calcule os subespaços $U \cap V$ e $U + V$, obtenado bases para os mesmos. Esta última soma é direta?

Questão 3. Considere o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das matrizes quadradas de tamanho 2, $V = M(2, \mathbb{R})$. Sabemos que

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma possível base (ordenada) para V.

(a) Mostre que

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é também uma base (ordenada) para V.

(b) Encontre a matriz mudança da base $\mathscr{B}$ para a base $\mathscr{C}$.

(c) Encontre a matriz mudança da base $\mathscr{C}$ para a base $\mathscr{B}$. Você pode fazer isso tanto pela definição, quanto invertendo a matriz obtida em (b).

(d) Se consideramos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}),$$

está claro que na base $\mathscr{B}$ esta tem coordenadas

$$(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Obtenha as coordenadas de A na base $\mathscr{C}$, isto é $(A)_{\mathscr{C}}$.

Questão 4. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $F(1,0) = (2,1)$ e $F(0,1) = (1,4)$.

(a) Determine $F(2,4)$.

(b) Determine o vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y) = (2,3)$.

(c) Obtenha $\ker(F)$, o núcleo de F. Este mapa é um isomorfismo (transformação linear bijetora)?