

# Segunda Lista de Exercícios – Álgebra Linear (verão 2026)

## Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

**Escolhidos para entrega:** P.4 (b) (c), P.5 (a) (b), P.9, P.12, P.14, P.21, P.23 (c) (d), P.27, P.34.

### 1 Exercícios Práticos

**P.1** Seja  $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Podemos definir de diversas maneiras as operações soma  $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e multiplicação por escalar  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em  $V$ . Nos exemplos abaixo, diga por que as operações definidas em cada item não fazem de  $\mathbb{R}^2$  um espaço vetorial.

(a)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, 0), \\ \lambda(x, y) \doteq (\lambda x, \lambda y).$$

(b)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \lambda(x, y) \doteq (\lambda x, 0).$$

(c)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \lambda(x, y) \doteq (x, \lambda y).$$

(d)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1, y_1), \\ \lambda(x, y) \doteq (\lambda x, \lambda y).$$

(e)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1), \\ \lambda(x, y) \doteq (3\lambda x, -\lambda x).$$

**P.2** Considere o conjunto

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que  $\mathbb{R}^\infty$ , com as operações

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots), \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**P.3** Sabemos que  $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  com as operações

$$(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x) (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\lambda f)(x) \doteq \lambda f(x) (\forall x \in \mathbb{R})$$

é um espaço vetorial. Agora, mostre que:

- (a) o conjunto  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\} \subset V$  é um subespaço vetorial de  $V$ .
- (b) generalizando o item (a), o conjunto

$$C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ possui } k\text{-ésima derivada e } f^{(k)} \text{ é contínua}\} \subset V$$

é um subespaço vetorial de  $V$ .

- (c) o conjunto  $P_n(\mathbb{F}) = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\} \subset V$  é um subespaço vetorial de  $V$ .
- (d) Obtenha um subconjunto de  $V$  que não é subespaço vetorial.

Note que o conjunto acima nada mais é também que o conjunto solução de um sistema linear. Ou seja, todo sistema linear define um hiper-plano e todo hiper-plano define um sistema linear.

**P.4** Em cada um dos casos, verifique se o conjunto  $W$  contido no espaço vetorial  $V$  é um subespaço do espaço vetorial  $V$ . Lembre-se que  $\mathbb{F}$  é sempre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , não havendo distinção entre os dois casos na resolução. Por isto denotamos os dois conjuntos pelas mesmas letras. O conjunto  $P(\mathbb{F})$  é formado pelos polinômios (de qualquer grau) com coeficientes em  $\mathbb{F}$ .

- (a)  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \mid x = 0\}, V = \mathbb{F}^3$ .
- (b)  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}, V = \mathbb{F}^3$ .
- (c)  $W = \{p(t) \in P_n(\mathbb{F}) \mid \text{grau}(p) \geq 2\}, V = P(\mathbb{F})$ .
- (d)  $W = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f(t) + f'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}, V = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**P.5** Sabemos que  $M(n, \mathbb{F})$ , o conjunto das matrizes de ordem  $n$  com coeficientes em  $\mathbb{F}$ , é um espaço vetorial. Verifique se os seguintes subconjuntos de  $M(n, \mathbb{F})$  são subespaços vetoriais.

- (a)  $W_1 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid \text{tr } A \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0\}$ .
- (b)  $W_2 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid \det A = 0\}$ .
- (c)  $W_3 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0, \text{ se } i > j\}$ , onde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , o subconjunto das matrizes triangulares superior.
- (d)  $W_5 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid A \text{ é inversível}\}, V = M(n, \mathbb{F})$ .
- (e)  $W_6 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid AB = BA\}, V = M(n, \mathbb{F})$ , para uma matriz  $B \in M(n, \mathbb{F})$  fixa.

**P.6** Dados  $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$  e  $v = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ , sejam  $W_1$  e  $W_2$  respectivamente as retas que passam pela origem de  $\mathbb{R}^2$  e contêm  $u$  e  $v$ . Mostre que  $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ .

**P.7** Sejam  $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$  e  $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$  subespaços de  $M(2, \mathbb{R})$ . Obtenha  $W_1 + W_2$  e responda se esta soma é direta.

**P.8** (a) Verifique se os conjuntos abaixo são linearmente independentes:

$$S_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}, \quad S_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}.$$

(b) Para quais valores  $m \in \mathbb{R}$  o conjunto  $S = \{(1, 3, 5), (2, m+1, 10)\}$  é linearmente independente?

**P.9** Ache a dimensão e uma base para os espaços solução dos sistemas lineares homogêneos.

(a)

$$\begin{cases} x + y + z + w - t = 0, \\ x - y - z + 2w - t = 0. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0, \\ x - y + 2z - t = 0. \end{cases}$$

**P.10** Em  $V = \mathbb{R}^4$ , mostre que

$$S = \{(1, 1, 1, 0), (2, 0, -1, 0), (0, 4, -2, 1), (-1, 7, 3, 1)\}$$

é um conjunto L. D. Em seguida, obtenha quem é o subespaço vetorial  $U = [S]$  e mostre que

$$S' = \{(1, 1, 1, 0), (2, 0, -1, 0), (0, 4, -2, 1)\}$$

gera  $U$ .

**P.11** No Espaço Vetorial  $V = M(2, \mathbb{R})$ , considere os seguintes subespaços vetoriais de  $V$

$$U = [S_1], \quad S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W = [S_2], \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Indique se  $S_1$  e  $S_2$  são subconjuntos L.I. ou L.D. de  $V$ . e obtenha bases para  $U$  e  $W$ .

(b) Obtenha o subespaço vetorial  $U \cap W$ .

(c) Qual é a dimensão do subespaço  $U + W$ ? É possível dizer disso qual subespaço é este?

**P.12** Considere o subconjunto de  $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(3, 0, 2, 0), (-6, 3, -1, -1), (0, 1, 1, 1), (9, -3, 3, 1), (-9, 5, -1, 1)\}.$$

Obtenha uma base para  $[S]$ , o subespaço gerado por  $S$ . Mostre que  $(12, 7, 15, 7)$  está contido em  $[S]$ .

**P.13** Em  $V = \mathbb{R}^3$ , considere o subespaço dado pelo plano (o Exercício 4 nos diz que este é um subespaço de fato)

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}.$$

Obtenha um conjunto  $S = \{v_1, v_2\} \subset V$  de dois vetores que gere  $\pi$ , i.e.  $[S] = \pi$ .

**P.14** Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\},$$

subespaços de  $\mathbb{R}^4$ .

- (a) Determine  $W_1 \cap W_2$  e exiba uma base para este subespaço.
- (b) Determine  $W_1 + W_2$ .
- (c) A soma  $W_1 + W_2$  é direta? Justifique.
- (d)  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ ? Justifique.

**P.15** Sejam

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = d \text{ e } b = c \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = c \text{ e } b = d \right\},$$

subespaços de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

- (a) Determine  $W_1 \cap W_2$  e exiba uma base.
- (b) Determine  $W_1 + W_2$ . A soma é direta?
- (c)  $W_1 + W_2 = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ?

**P.16** Seja  $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e seja  $W$  o subespaço de  $V$  gerado por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Encontre uma base e a dimensão de  $W$ .

**P.17** Seja  $W$  o subespaço (plano) de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos vetores  $v = (x, y, z)$  tais que  $x - 2y + 4z = 0$ . Obtenha uma base  $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $u_1, u_2 \in W$ .

**P.18** Considere  $V = \mathbb{C}^2$ , um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

- (a) Mostre que

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$$

é uma base para  $V$ .

- (b) Se  $v = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$  é um elemento qualquer de  $V = \mathbb{C}^2$ , quais são as coordenadas de  $v$  na base  $\mathcal{B}$ ?

- (c) Mostre que

$$\mathcal{C} = \{(1 + i, 0), (2 - i, 0), (0, 1), (0, -1 + i)\}$$

também é uma base para  $V$ .

- (d) Obtenha a matriz mudança de base  $I_{\mathcal{BC}}$ .

- (e) Obtenha as coordenadas de  $v = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$  na base  $\mathcal{C}$ , utilizando a matriz obtida em (d).

**P.19** Considere  $V = M(2, \mathbb{C})$ . Mostre que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço de  $V$  constituído das matrizes auto-adjuntas, isso é,

$$U = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^\dagger = A\}.$$

Aqui,  $A^\dagger = \overline{A^T}$  é a matriz adjunta de  $A$ .

**P.20** Considere o espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  das matrizes de tamanho 2,  $V = M(2, \mathbb{R})$ . Sabemos que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma possível base (ordenada) para  $V$ .

(a) Mostre que

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é também uma base (ordenada) para  $V$ .

(b) Encontre a matriz mudança da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{C}$ .

(c) Encontre a matriz mudança da base  $\mathcal{C}$  para a base  $\mathcal{B}$ . Você pode fazer isso tanto pela definição, quanto invertendo a matriz obtida em (b).

(d) Se consideramos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}),$$

está claro que na base  $\mathcal{B}$  esta tem coordenadas

$$(A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Obtenha as coordenadas de  $A$  na base  $\mathcal{C}$ , isto é  $(A)_{\mathcal{C}}$ .

**P.21** Em  $V = P_2(\mathbb{R})$ , o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois, considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(x-1)^2, x+4, 3x\},$$

$$\mathcal{D} = \{1-x^2, x(x+1), x^2+1\}.$$

- (a) Para o polinômio  $a(x) = (x+1)^2 \in V$ , obtenha as coordenadas de  $a(x)$  nas base  $\mathcal{B}$ .
- (b) Obtenha as matrizes mudança de base: de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{B}$ ; de  $\mathcal{D}$  para  $\mathcal{B}$
- (c) Obtenha do último item as coordenadas de  $a(x)$  nas bases  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ .

**P.22** Verifique se os mapas abaixo são transformações lineares:

- (a)  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $T(x) = (x, 2)$ .
- (b)  $T : V \rightarrow V$  dado por  $T(v) = \alpha v$ , em que  $\alpha$  é um escalar fixo,  $\alpha \in \mathbb{F}$ .
- (c)  $T : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$  dado por  $T(X) = P^{-1}XP$ , em que  $P \in M_n(\mathbb{F})$  é uma matriz inversível fixa.
- (d)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dado por  $T(x, y, z, t) = (\cos(x), y, z, t)$ .
- (e)  $T : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$  dado por  $T(X) = XA - AX$ , em que  $A \in M_n(\mathbb{F})$  é uma matriz fixa.
- (f)  $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  dado por  $T(f) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) + x^2f(x)$ , onde  $C^\infty(\mathbb{R})$  são as funções  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .
- (g)  $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $T(f) = \int_0^1 f(x) dx$ , onde  $C([0, 1], \mathbb{R})$  são as funções contínuas de  $[0, 1]$  em  $\mathbb{R}$ .

**P.23** Para cada uma das transformações lineares abaixo, determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.

- (a)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $T(x, y, z) = x + y - z$ .
- (b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (2x, x + y)$ .
- (c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ .
- (d)  $T : P_2(\mathbb{F}) \rightarrow P_2(\mathbb{F})$  dado por  $T(f(t)) = t^2f''(t)$ .
- (e)  $T : M_2(\mathbb{F}) \rightarrow M_2(\mathbb{F})$  dado por  $T(X) = MX + X$ , onde  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

**P.24** Considere que  $\mathbb{F}$  é  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Mostre que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\}, \\ M(n \times 1, \mathbb{F}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\}, \\ M(1 \times n, \mathbb{F}) &= \{(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

são isomorfos.

**P.25** Considere, para  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , o mapa  $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$T_\alpha(x, y) = (\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y).$$

- (a) Prove que  $T$  é uma transformação linear.
- (b) Para os valores de  $\alpha = \pi$  e  $\alpha = \pi/2$ , obtenha quem é  $T(e_1)$  e  $T(e_2)$ , onde  $e_1$  e  $e_2$  são, respectivamente, os vetores canônicos,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .
- (c) Conclua de (b) que  $T_{\pi/2}$  é uma rotação no plano  $\mathbb{R}^2$  em 90 graus e que  $T_\pi = -\mathbb{I}$ , onde  $\mathbb{I}$  é a transformação identidade em  $\mathbb{R}^2$ .

**P.26** Considere  $V = M(2, \mathbb{R})$  e  $P \in M(2, \mathbb{R})$  a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, seja  $U \subset V$  o subespaço das matrizes diagonais, isto é,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c = b = 0 \right\}.$$

- (a) Mostre que  $P$  é invertível e obtenha  $P^{-1}$ .
- (b) Mostre que a transformação  $T : V \rightarrow V$  dada por

$$T(A) = PAP^{-1}$$

é uma transformação linear.

- (c) Obtenha uma base para  $U$  e calcule os vetores resultantes da aplicação de  $T$  sobre esta base.
- (d) Obtenha a expressão para  $T$  para qualquer matriz diagonal, ou seja, obtenha

$$T \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

para qualquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**P.27** Seja  $r \subset \mathbb{R}^3$  a reta definida por

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

Obtenha uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$r = \ker T.$$

Quem é a imagem de  $T$ ?

**P.28** Verifique se os mapas abaixo são transformações lineares:

- (a)  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x) = (x, 2)$ .
- (b)  $F : V \rightarrow V$  dado por  $F(v) = \alpha v$ , em que  $\alpha$  é um escalar fixo,  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (c)  $F : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$  dado por  $F(X) = P^{-1}XP$ , em que  $P \in M(n, \mathbb{K})$  é uma matriz inversível fixa.
- (d)  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dado por  $F(x, y, z, t) = (\cos(x), y, z, t)$ .
- (e)  $F : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$  dado por  $F(X) = XA - AX$ , em que  $A \in M(n, \mathbb{K})$  é uma matriz fixa.
- (f)  $F : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  dado por  $F(f) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) + x^2f(x)$ , onde  $C^\infty(\mathbb{R})$  são as funções  $C^\infty$  (infinitamente diferenciáveis) de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

- (g)  $F : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $F(f) = \int_0^1 f(x) dx$ , onde  $C([0, 1], \mathbb{R})$  são as funções contínuas de  $[0, 1]$  em  $\mathbb{R}$ .

**Observação:** O exercício seguinte discute a seguinte questão: Vimos que a composição de dois isomorfismos (transformações lineares bijetoras) gera um novo isomorfismo. Agora, essa propriedade ainda é preservada pela multiplicação de operadores se apenas um dos dois é isomorfismo? *Veremos que a resposta é não.*

- P.29** Para os itens abaixo, verifique se  $T_1$  e  $T_2$  são ou não injetoras e sobrejetoras, obtenha  $T = T_2 \circ T_1$  e responda as mesmas perguntas para esta transformação. *Usar o Exercício anterior é um jeito de facilitar as verificações deste Exercício.*

(a)

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (-y, x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (z, x, y) \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (2x, 3y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, x, y) \end{array}$$

- P.30** Considere  $V_1 = \mathbb{R}^2$ ,  $V_2 = \mathbb{R}^3$  e  $V_3 = \mathbb{R}^2$  e  $T_1: V_1 \rightarrow V_2$ ,  $T_2: V_2 \rightarrow V_3$  as transformações lineares

$$T_1(x, y) = (3x + 2y, x - 4y, 0), \quad T_2(x, y, z) = \left(2x + y, \frac{1}{2}(x - 3y)\right).$$

Faça o que se pede.

- (a) Mostre que  $T_1$  é injetora mas não é sobrejetora.
- (b) Mostre que  $T_2$  é sobrejetora, mas não é injetora.
- (c) Obtenha  $T = T_2 \circ T_1$  e mostre que este é um isomorfismo.

- P.31** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n$ . Considere  $\mathbb{K}$  também como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Seja então  $F: V \rightarrow \mathbb{K}$  uma transformação linear.

- (a) Mostre que  $\dim(\ker(F))$  ou é igual a  $n$  ou a  $n - 1$ .

- (b) Se  $G : V \rightarrow \mathbb{K}$  é outra transformação linear e  $\{F, G\}$  são transformações lineares não nulas, linearmente dependentes em  $L(V, \mathbb{K})$ , então mostre que  $\ker(F) = \ker(G)$ .

**P.32** Considere o espaço das sequências em  $\mathbb{R}$ , denotado por  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Lembramos que os elementos deste espaço vetorial são as sequências  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{K}\}$  com as operações:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots), \\ \lambda(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots).$$

Neste espaço vetorial, mostre que:

- (a) O mapa  $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dado por  $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$  é uma transformação linear injetora, mas que não é sobrejetora.
- (b) O mapa  $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dado por  $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$  é uma transformação linear sobrejetora, mas que não é injetora.
- (c) Encontre uma transformação linear  $T : P(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  injetora, em que  $P(\mathbb{R})$  é o conjunto dos polinômios com coeficientes em  $\mathbb{K}$ .

**Observação:** O que ocorre neste exercício é que o espaço das sequências não é um espaço vetorial finitamente gerado, ou seja, não tem dimensão finita. Logo, as equivalências entre transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras que são válidas para transformações lineares  $T : V \rightarrow V$  quando  $V$  tem dimensão finita, não são verdadeiras nesses espaços.

**P.33** Dado  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , seja  $F : V \rightarrow V$  uma transformação linear que satisfaz  $F^2 = F$ , ou seja, é tal que para todo  $v \in V$  vale  $F(F(v)) = F(v)$ . Então:

- (a) Mostre que  $v - F(v) \in \ker(F)$ .
- (b) Usando  $v = v - F(v) + F(v)$ , mostre que  $V = \ker(F) + \text{Im}(F)$ .
- (c) Mostre que  $\ker(F) \cap \text{Im}(F) = \{0\}$ . Portanto,  $V = \ker(F) \oplus \text{Im}(F)$ .

**P.34** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear dada por  $F(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$ . Sejam  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$  uma base ordenada de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{C} = \{(1, 5), (2, -1)\}$  uma base ordenada de  $\mathbb{R}^2$ . Ache a matriz  $(F)_{\mathcal{BC}}$ , associada à transformação linear  $F$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ .

**P.35** Seja  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{C} = \{(1, 2), (1, -1)\}$  uma outra base ordenada de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Seja  $F$  a transformação linear sobre  $\mathbb{R}^2$ , definida por  $F(x, y) = (-y, x)$ . Ache a matriz da transformação linear em relação à base canônica,  $(F)_{\mathcal{B}}$ .
- (b) Ache a matriz de mudança de base  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{C}$ ,  $I_{\mathcal{CB}}$ , e de mudança de base  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{B}$ ,  $I_{\mathcal{BC}}$ .
- (c) Use as matrizes acima para determinar a matriz da transformação linear  $F$  em relação à base  $\mathcal{C}$ ,  $(F)_{\mathcal{C}}$ .
- (d) Se  $u$  é um vetor com coordenadas  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  em relação à base  $\mathcal{C}$ , quais são as coordenadas de  $F(u)$  em relação à base  $\mathcal{C}$ ?

**P.36** Considere a base

$$\mathcal{C} = \{(2, 0, 0, -1), (3, 2, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (-2, -5, 0, -5)\}$$

e definamos  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  a transformação cuja matriz associada, em relação à base  $\mathcal{C}$  seja

$$(T)_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Obtenha a matriz de  $T$  em relação à base canônica,  $(T)_{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

(b) Considere agora a base

$$\mathcal{D} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 8, 4), (0, 1, 0, -5), (0, 0, 1, 1)\}.$$

Obtenha a matriz de  $T$  em relação à esta nova base  $\mathcal{D}$ .

**P.37** Faça o que se pede. O conceito de base dual foi apresentado no Exercício **T.19**.

(a) Ache a base dual das bases:

- (i)  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (1, 2, 0), (3, 4, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii)  $\mathcal{C} = \{1, t, 1 - t^2\}$  de  $(\mathbb{R})$ .

(b) Seja  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcional linear  $f(x, y, z) = x$ . Quais são as coordenadas deste funcional em termos da base dual de  $\mathcal{B}$ ?

## 2 Exercícios Teóricos

**T.1** Mostre que todo espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  também é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**T.2** Seja  $V = \mathbb{R}^3$  o espaço vetorial das triplas de números reais, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Sabemos que um plano é qualquer subconjunto  $\pi \subset V$  dado da seguinte forma

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d, x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

com  $a, b, c$  e  $d$  números reais fixados. Mostre que um plano  $\pi \subset V$  é um subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se,  $d = 0$ .

Note que isso equivale a dizer que um plano  $\pi \subset V$  é um subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se,  $\pi$  passa pela origem.

**T.3** Continuando do exercício anterior, uma reta é qualquer subconjunto  $U \subset V$  dado pela interseção de dois planos e pode ser escrita portanto da seguinte forma

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \text{ e } a_2x + b_2y + c_2z = d_2\}.$$

Mostre que  $r$  é um subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se,  $d_1 = d_2 = 0$ .

**T.4** Generalize os exercícios **T.2** e **T.3**, agora com  $V = \mathbb{R}^n$  e  $U$  hiper-planos, que são dados da seguinte forma:

$$U = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ satisfaz simultaneamente } a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = d_i, i = 1, \dots, m\},$$

onde  $m \geq 1$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

**T.5** Seja  $V$  um Espaço vetorial e  $U, W$  subespaços vetoriais de  $V$ . Mostre que

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U, v \in W\}$$

é um subespaço vetorial de  $V$ . Mostre que o mesmo não ocorre para  $U \cup W$ , ou seja, obtenha um exemplo de  $V, U$  e  $W$  onde a união de  $U$  com  $W$  não é um subespaço vetorial de  $V$ .

**T.6** Sejam  $U$  e  $V$  subespaços vetoriais de um espaço vetorial  $W$  sobre  $F$ . Mostre que:

- (a) Se  $U \subseteq V$ , então  $U + V = V$ .
- (b) Se  $U \subseteq V$ , então  $U \cap V = U$ .
- (c) Se  $U + V = U$ , então  $U \supseteq V$ .
- (d) Se  $U \cap V = U$ , então  $U \subseteq V$ .

**T.7** Seja  $V$  um espaço vetorial. Prove que, dado um conjunto  $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ ,  $[S]$  é o menor subespaço que contém  $[S]$ . Para isso, basta mostrar que, dado qualquer subespaço  $U$  de  $V$  contendo  $S$ , temos  $[S] \subset U$ .

**T.8** Mostre que se  $S$  é um subconjunto L.D. de um espaço vetorial  $V$ , então existe  $v \in S$  tal que

$$[S \setminus v] = [S].$$

**T.9** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $S \subset V$  um subconjunto L.I. Mostre que se  $v \notin [S]$ , então  $S \cup \{v\}$  também é L.I.

**T.10** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Considere  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto de  $V$ . Mostre que:

- (a) se  $k < n$ , então existe  $v \in V$  tal que  $v \notin [S]$ ;
- (b) se  $k = n$ , então  $S$  é L.I. se, e somente se,  $[S] = V$ ;
- (c) se  $k > n$ , então  $S$  é L.D.

**T.11** Dê exemplo de uma matriz  $3 \times 3$  sobre  $\mathbb{R}$  cujos vetores-linha geram um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  diferente do espaço gerado pelos vetores-coluna.

**T.12** Mostre que qualquer tripla de vetores em  $\mathbb{R}^2$  formam um conjunto L.D. Generalize este resultado para qualquer conjunto de  $m$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ , com  $m > n$ .

**T.13** Pode-se obter uma base para  $P_n(\mathbb{R})$  formada por  $n+1$  polinômios de grau  $n$ ?

**T.14** Suponha que  $V$  é um espaço vetorial e que  $B, C$  e  $D$  são três bases ordenadas de  $V$ . Mostre que se  $P$  é a matriz mudança da base  $B$  para a base  $C$  e  $Q$  é a matriz mudança da base  $C$  para a base  $D$ , então a matriz mudança da base  $B$  para a base  $D$  é  $PQ$ . Conclua disso que toda matriz mudança de base é invertível.

**T.15** Suponha que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$  e que  $B = (v_1, \dots, v_n)$  é uma base ordenada de  $V$ . Seja  $P = (\alpha_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  inversível. Mostre que

$$u_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} v_k \quad u_2 = \sum_{k=1}^n \alpha_{2k} v_k, \quad \dots, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{nk} v_k$$

é uma nova base de  $V$ . Considere  $C = (u_1, \dots, u_n)$  a base ordenada como acima. Qual a matriz mudança da base  $B$  para a base  $C$ ?

**T.16** Mostre que toda transformação linear  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é da forma

$$F(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z).$$

Para isso, prossiga nos seguintes passos

- (a) Escreva qualquer vetor  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  como combinação linear dos vetores da base canônica,

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

- (b) Em seguida, escreva

$$F(1, 0, 0) = (a_1, a_2), \quad F(0, 1, 0) = (b_1, b_2), \quad F(0, 0, 1) = (c_1, c_2)$$

e utilize o item (a), junto com a linearidade de  $F$ , para escrever  $F(x, y, z)$ .

**T.17** Considere a afirmação nos dada pelo Teorema Núcleo-Imagem: Este diz que se  $T: U \rightarrow V$  é uma transformação linear entre Espaços Vetoriais  $U$  e  $V$ , então

$$\dim U = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T).$$

Considere agora  $U$  e  $V$  espaços vetoriais com dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente. Mostre que

- (a) Se  $n > m$ , então  $T$  **não** pode ser injetora.
- (b) Se  $m > n$ , então  $T$  **não** pode ser sobrejetora.
- (c) Se  $n = m$ , então  $T$  é injetora se, e somente se,  $T$  é sobrejetora.

**T.18** Seja  $U \in M(n, \mathbb{K})$  uma matriz inversível. Mostre que o mapa  $F: M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$  dado por  $F(X) = UXU^{-1}$  é um isomorfismo.

**Definição:** Dado um Espaço Vetorial  $V$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Chamamos de *espaço dual* o espaço vetorial  $L(V, \mathbb{K})$ , ou seja, o conjunto das transformações lineares de  $V$  para o corpo  $\mathbb{K}$ . Sabemos que este conjunto, que denotamos por  $V^*$ , é de fato um espaço vetorial, pois  $\mathbb{K}$  é um espaço vetorial.

**T.19** Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $V^*$  o seu Espaço Dual. Tome  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Defina  $f_1, \dots, f_n$  os  $n$  elementos de  $V^*$  dados por

$$f_1\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \alpha_1,$$

$$f_2\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \alpha_2,$$

⋮

$$f_n\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \alpha_n.$$

Mostre que  $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  é uma base para  $V^*$ . *Chamamos esta base de base dual à base  $\mathcal{B}$ .*

**T.20** Para um Espaço Vetorial  $V$  de dimensão  $n$ , mostre que  $V^*$  é isomorfo à  $\mathbb{K}^n$ , através da transformação linear

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V^* & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & T & \longmapsto & (T(v_1), \dots, T(v_n)), \end{array}$$

onde  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base para  $V$ . *Como sabemos que  $V$  é também isomorfo à  $\mathbb{K}^n$  (pois ambos tem dimensão  $n$ ), concluímos que  $V^*$  e  $V$  são espaços isomorfos.*