

Primeira Lista de Exercícios - Álgebra Linear (verão 2025)

Sistemas Lineares e Matrizes

Escolhidos para entrega: P.1 (e) (g) (i) (n); P.6; P.11; P.12; P.17.

1 Exercícios Práticos

P.1 Resolva os seguintes sistemas lineares, utilizando o método de escalonamento:

(a)

$$S = \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - 3y = 6. \end{cases}$$

(b)

$$S = \begin{cases} \sqrt{3}x - iy = 0, \\ x - y = -3 + i\sqrt{3}. \end{cases}$$

(c)

$$S = \begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + 5y + 6z = 0. \end{cases}$$

(d)

$$S = \begin{cases} 2x - y + 3z = 11, \\ 4x - 3y + 2z = 0, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$$

(e)

$$S = \begin{cases} ix + z = 2i, \\ 2x - iz = 4, \\ -ix + z = -i. \end{cases}$$

(f)

$$S = \begin{cases} y + 3z = -2, \\ 2x + y - 4z = 3, \\ 2x + 3y + 2z = -1. \end{cases}$$

(g)

$$S = \begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

(h)

$$S = \begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 2x + z = 3, \\ 5x + y - z = 0. \end{cases}$$

(i)

$$S = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

(j)

$$S = \begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ -2x + 3y - 3z = -1, \\ 2x - 9y + z = 5. \end{cases}$$

(k)

$$S = \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 - 4i, \\ -ix + 2y + z = 8, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

(l)

$$S = \begin{cases} 2x - i\sqrt{2}y = 0, \\ ix + y = 0. \end{cases}$$

(m)

$$S = \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$$

(n)

$$S = \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 5y - 2z = 3, \\ x + 7y - 7z = 5. \end{cases}$$

(o)

(p)

$$S = \begin{cases} x + y + z + w = 0, \\ x + y + z - w = 4, \\ x + y - z + w = -4, \\ x - y + z + w = 2. \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 2y + 2z = 0, \\ x + y + 3z = 0, \\ 3x - 4y + 2z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases} \quad (\text{q})$$

$$S = \begin{cases} -2x + y + 5z = 0, \\ x - 2y - 4z = -3i, \\ x - y - 3z = -i. \end{cases}$$

P.2 Determine k para que o sistema abaixo admita solução (e exiba a solução):

$$S = \begin{cases} -4x + 3y = 2, \\ 5x - 4y = 0, \\ 2x - y = k. \end{cases}$$

P.3 Determine k para que o sistema homogêneo abaixo admita solução não trivial (e exiba-a):

$$S = \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 2x + kz = 0. \end{cases}$$

P.4 Descreva todas as possíveis matrizes 2×2 , 2×3 e 3×3 que estão na forma escalonada (ou linha-reduzida à forma escada).

P.5 Discuta a solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3, \\ x + y + 4z - w = -6, \\ 2y + 2z + w = 5. \end{cases}$$

(a) Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema e encontre um valor de k que torne o sistema impossível.

P.6 Determine os valores de k (se houver) de modo que o sistema abaixo tenha:

$$\begin{cases} x + y + kz = 2, \\ 3x + 4y + 2z = k, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

- (a) Solução única.
- (b) Infinitas soluções.
- (c) Nenhuma solução.

P.7 Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - 2y + z = y_1, \\ 2x + 4y + z = y_2, \\ 5y - z = y_3 - 1. \end{cases}$$

- (a) Quais as condições (se houver) sobre y_1 , y_2 e y_3 para que o sistema acima tenha solução?
- (b) Cite uma tripla (y_1, y_2, y_3) tal que o sistema acima tenha solução.
- (c) Apresente a solução correspondente à tripla achada em (b).

P.8 Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

prove que $AB \neq BA$.

P.9 Em $M(2, \mathbb{R})$, obtenha as soluções da equação (matricial)

$$X^2 + I_2 = 0.$$

P.10 Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Obtenha os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$.
- (b) Conclua, com uma justificativa, que os dois sistemas abaixo possuem solução. Obtenha-as.

$$S_1 = \begin{cases} 3x - 3y - 3z + 2w = 2, \\ -5x + 6y + 6z - 4w = -1, \\ 4x - 5y - 4z + 3w = 3, \\ x - y - z + w = 1. \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - z + w = 1, \\ y + z + w = -2, \\ -x + 3w = 0. \end{cases}$$

- (c) Verifique as soluções obtidas.

P.11 Identifique quais matrizes, entre as dadas abaixo, são invertíveis. Obtenha as inversas (caso sejam invertíveis) e verifique as inversas.

- (a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (b)

$$B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 + 2i & -3 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

P.12 Obtenha x, y, z e w tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P.13 Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mostre que $AB = AC$.

P.14 Determine uma matriz $A \in M(2, \mathbb{R})$ tal que $A \neq 0$ e $A^2 = 0$.

P.15 Mostre que a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ e que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

P.16 Os seguintes dois sistemas de equações lineares são equivalentes? Se sim, expresse cada equação de um sistema como uma combinação linear das equações do outro sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

P.17 Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

obtenha a matriz $B \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$ tal que

$$A \cdot B = C,$$

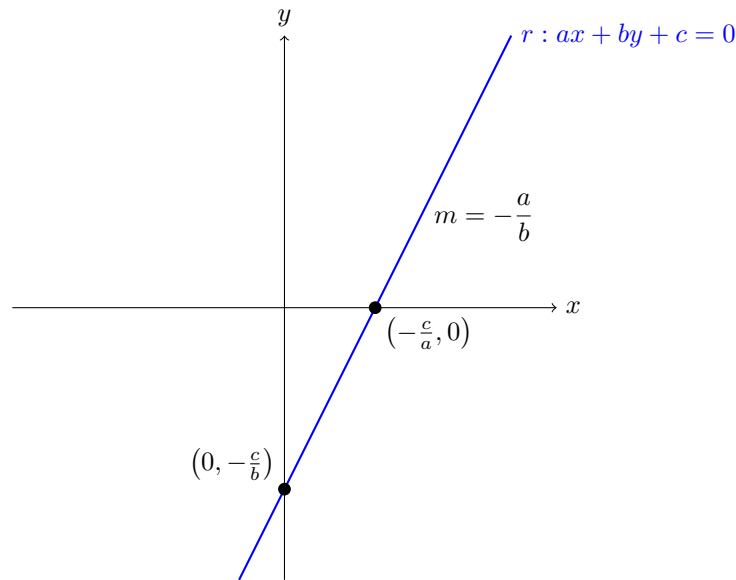
onde

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & -2 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Dica: Este problema nada mais é do que dois sistemas lineares. Você pode tanto fazê-los separadamente ou fazer um escalonamento simultâneo.

2 Exercícios Teóricos

- T.1** Mostrar que se um sistema linear homogêneo possui uma solução não nula, então ele possui infinitas soluções. Por que isso não ocorre para sistemas não homogêneos? Mostre que se um sistema não homogêneo possui duas soluções, então a diferença delas é uma solução do sistema homogêneo correspondente.
- T.2** Mostre que qualquer matriz quadrada de ordem 2, i.e. $A \in M(2, \mathbb{R})$, é equivalente à uma matriz escalonada. A cargo de remover exemplos triviais, suponha que nenhuma coluna é composta toda por zeros, como é o caso para qualquer matriz advinda de um sistema linear. Prove que obtemos a matriz identidade se $\det A \neq 0$.
- T.3** Em \mathbb{R}^2 , equações lineares em x e y são retas, onde os coeficientes constantes determinam a inclinação e os pontos de encontro com os eixos x e y .



Portanto, quando resolvemos um sistema linear em duas variáveis, nada mais estamos fazendo do que achar os pontos de interseção de múltiplas retas em \mathbb{R}^2 . É de se esperar, portanto, que o paralelismo entre duas retas esteja relacionado com a não existência de solução do sistema composto por elas, enquanto que a coincidência de retas esteja relacionada com a existência de infinitas soluções do sistema.

É mais fácil de ver que duas retas são paralelas quando reescrevemos¹ a equação $ax + by + c = 0$ em termos da inclinação e de um ponto qualquer,

$$ax + by + c = 0 \iff y = mx + y_0.$$

Neste caso, duas retas

$$r_1 : y = m_1x + y_1 \quad , \quad r_2 : y = m_2x + y_2$$

¹Estamos aqui excluindo o caso de retas verticais, para os quais deveríamos colocar x em função de y .

são paralelas quando $m_1 = m_2$ e são coincidentes quando são paralelas e $y_1 = y_2$.

Mostre que o sistema formado pelas equações de duas retas possui:

- (a) solução única quando as retas não são paralelas;
- (b) infinitas soluções quando as retas são coincidentes;
- (c) nenhuma solução quando as retas são paralelas e não coincidentes.

T.4 Mostrar que, dadas três matrizes $n \times n$, chamemos A, B e C , temos

$$A(BC) = (AB)C.$$

Dica: mostre a igualdade entrada a entrada, utilizando a fórmula para a multiplicação de matrizes.

T.5 Prove, utilizando a definição das entradas da matriz produto AB , que $(AB)^T = B^T A^T$.

T.6 Mostre que, se A e B são duas matrizes $n \times n$ tais que $A \cdot B = I_{n \times n}$, então $B \cdot A = I_{n \times n}$ (ou seja, na definição de matriz invertível, basta que um dos produtos seja verificado). Prossiga da seguinte forma:

- (a) Mostre que o sistema homogêneo $BX = 0$ só admite a solução trivial.
- (b) Conclua que cada sistema $BX = Y$ admite uma única solução. *Dica: Lembre-se do Exercício T.1.*
- (c) Mostre, do resultado (b), que existe uma matriz C tal que $B \cdot C = I_n$. Conclua que $C = A$ obrigatoriamente e, portanto, $B \cdot A = I_n$.

T.7 Dadas $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, com $n \in \mathbb{N}$ qualquer, não temos em geral que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Por que isso ocorre? Dê um contra-exemplo. Existe algum n para que a igualdade acima seja sempre satisfeita?

T.8 Se $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ são duas matrizes tais que $AB = 0$, então também temos $BA = 0$? Prove ou dê um contra-exemplo. Existe algum n para que esta implicação seja sempre verdadeira?

T.9 Prove que, se dois sistemas homogêneos de duas equações lineares em duas incógnitas têm as mesmas soluções, então eles são equivalentes. *Dica: Lembre-se dos Exercícios T.2 e P.4.*

T.10 Mostrar que se B é uma matriz obtida de A através de operações elementares, então podemos aplicar operações elementares sobre B para retornar a A . *Note que você pode primeiro considerar que A e B diferem por apenas uma operação elementar e depois passar para o caso geral.*

T.11 Reveja a definição das operações elementares sobre matrizes.

- (a) Mostre que, considerando o conjunto de matrizes $M(m \times n, \mathbb{F})$, para cada operação elementar sobre A existe uma matriz $E \in M(n, \mathbb{F})$ tal que EA é a matriz resultante.
- (b) Mostre a partir disso que, para qualquer par A, B de matrizes equivalentes, existe uma matriz $E \in M(n, \mathbb{F})$ tal que $B = EA$. Mostre que E é inversível.
- (c) Prove que a relação $A \sim B$ definida pelas operações elementares é uma relação de equivalência.

(d) Prove que uma matriz A é invertível se, e somente se, $A \sim I_n$.

T.12 Mostre que se $A_1, A_2, \dots, A_k \in M(n, \mathbb{F})$ são matrizes invertíveis, então $A = A_1 \cdots A_k$ é invertível. Reciprocamente, mostre que se A não é invertível, então existe ao menos um $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que A_j não é invertível. *Dica: você pode usar o Exercício T.11*