

Segunda Lista de Exercícios - Álgebra Linear (verão 2026)

Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

Escolhidos para entrega: P.4 (b) (c), P.5 (a) (b), P.9, P.12, P.14, P.21, P.23 (c) (d), P.27, P.34.

1 Exercícios Práticos

P.1 Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Podemos definir de diversas maneiras as operações soma $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e multiplicação por escalar $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em V . Nos exemplos abaixo, diga por que as operações definidas em cada item não fazem de \mathbb{R}^2 um espaço vetorial.

(a)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, 0),$$
$$\lambda(x, y) \doteq (\lambda x, \lambda y).$$

(b)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x, y) \doteq (\lambda x, 0).$$

(c)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x, y) \doteq (x, \lambda y).$$

(d)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1, y_1),$$
$$\lambda(x, y) \doteq (\lambda x, \lambda y).$$

(e)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1),$$
$$\lambda(x, y) \doteq (3\lambda x, -\lambda x).$$

P.2 Considere o conjunto

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que \mathbb{R}^∞ , com as operações

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots),$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

P.3 Sabemos que $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ com as operações

$$(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x) \ (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\lambda f)(x) \doteq \lambda f(x) \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

é um espaço vetorial. Agora, mostre que:

- (a) o conjunto $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\} \subset V$ é um subespaço vetorial de V .
- (b) generalizando o item (a), o conjunto

$$C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ possui } k\text{-ésima derivada e } f^{(k)} \text{ é contínua}\} \subset V$$

é um subespaço vetorial de V .

- (c) o conjunto $P_n(\mathbb{F}) = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\} \subset V$ é um subespaço vetorial de V .
- (d) Obtenha um subconjunto de V que não é subespaço vetorial.

Note que o conjunto acima nada mais é também que o conjunto solução de um sistema linear. Ou seja, todo sistema linear define um hiper-plano e todo hiper-plano define um sistema linear.

P.4 Em cada um dos casos, verifique se o conjunto W contido no espaço vetorial V é um subespaço do espaço vetorial V . Lembre-se que \mathbb{F} é sempre \mathbb{R} ou \mathbb{C} , não havendo distinção entre os dois casos na resolução. Por isto denotamos os dois conjuntos pelas mesmas letras. O conjunto $P(\mathbb{F})$ é formado pelos polinômios (de qualquer grau) com coeficientes em \mathbb{F} .

- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \mid x = 0\}$, $V = \mathbb{F}^3$.
- (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $V = \mathbb{F}^3$.
- (c) $W = \{p(t) \in P_n(\mathbb{F}) \mid \text{grau}(p) \geq 2\}$, $V = P(\mathbb{F})$.
- (d) $W = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f(t) + f'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $V = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

P.5 Sabemos que $M(n, \mathbb{F})$, o conjunto das matrizes de ordem n com coeficientes em \mathbb{F} , é um espaço vetorial. Verifique se os seguintes subconjuntos de $M(n, \mathbb{F})$ são subespaços vetoriais.

- (a) $W_1 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid \text{tr } A \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0\}$.
- (b) $W_2 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid \det A = 0\}$.
- (c) $W_3 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0, \text{ se } i > j\}$, onde $i, j \in \{1, \dots, n\}$, o subconjunto das matrizes triangulares superior.
- (d) $W_5 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid A \text{ é inversível}\}$, $V = M(n, \mathbb{F})$.
- (e) $W_6 = \{A \in M(n, \mathbb{F}) \mid AB = BA\}$, $V = M(n, \mathbb{F})$, para uma matriz $B \in M(n, \mathbb{F})$ fixa.

P.6 Dados $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$, sejam W_1 e W_2 respectivamente as retas que passam pela origem de \mathbb{R}^2 e contêm u e v . Mostre que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

P.7 Sejam $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$ subespaços de $M(2, \mathbb{R})$. Obtenha $W_1 + W_2$ e responda se esta soma é direta.

P.8 (a) Verifique se os conjuntos abaixo são linearmente independentes:

$$S_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}, \quad S_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}.$$

(b) Para quais valores $m \in \mathbb{R}$ o conjunto $S = \{(1, 3, 5), (2, m+1, 10)\}$ é linearmente independente?

P.9 Ache a dimensão e uma base para os espaços solução dos sistemas lineares homogêneos.

(a)

$$\begin{cases} x + y + z + w - t = 0, \\ x - y - z + 2w - t = 0. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0, \\ x - y + 2z - t = 0. \end{cases}$$

P.10 Em $V = \mathbb{R}^4$, mostre que

$$S = \{(1, 1, 1, 0), (2, 0, -1, 0), (0, 4, -2, 1), (-1, 7, 3, 1)\}$$

é um conjunto L. D. Em seguida, obtenha quem é o subespaço vetorial $U = [S]$ e mostre que

$$S' = \{(1, 1, 1, 0), (2, 0, -1, 0), (0, 4, -2, 1)\}$$

gera U .

P.11 No Espaço Vetorial $V = M(2, \mathbb{R})$, considere os seguintes subespaços vetoriais de V

$$U = [S_1], \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W = [S_2], \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Indique se S_1 e S_2 são subconjuntos L.I. ou L.D. de V . e obtenha bases para U e W .

(b) Obtenha o subespaço vetorial $U \cap W$.

(c) Qual é a dimensão do subespaço $U + W$? É possível dizer disso qual subespaço é este?

P.12 Considere o subconjunto de \mathbb{R}^4

$$S = \{(3, 0, 2, 0), (-6, 3, -1, -1), (0, 1, 1, 1), (9, -3, 3, 1), (-9, 5, -1, 1)\}.$$

Obtenha uma base para $[S]$, o subespaço gerado por S . Mostre que $(12, 7, 15, 7)$ está contido em $[S]$.

P.13 Em $V = \mathbb{R}^3$, considere o subespaço dado pelo plano (o Exercício 4 nos diz que este é um subespaço de fato)

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}.$$

Obtenha um conjunto $S = \{v_1, v_2\} \subset V$ de dois vetores que gere π , i.e. $[S] = \pi$.

P.14 Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\},$$

subespaços de \mathbb{R}^4 .

- (a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base para este subespaço.
- (b) Determine $W_1 + W_2$.
- (c) A soma $W_1 + W_2$ é direta? Justifique.
- (d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$? Justifique.

P.15 Sejam

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = d \text{ e } b = c \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = c \text{ e } b = d \right\},$$

subespaços de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
- (b) Determine $W_1 + W_2$. A soma é direta?
- (c) $W_1 + W_2 = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$?

P.16 Seja $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e seja W o subespaço de V gerado por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Encontre uma base e a dimensão de W .

P.17 Seja W o subespaço (plano) de \mathbb{R}^3 formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $x - 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 tal que $u_1, u_2 \in W$.

P.18 Considere $V = \mathbb{C}^2$, um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

- (a) Mostre que

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$$

é uma base para V .

- (b) Se $v = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$ é um elemento qualquer de $V = \mathbb{C}^2$, quais são as coordenadas de v na base \mathcal{B} ?
- (c) Mostre que

$$\mathcal{C} = \{(1 + i, 0), (2 - i, 0), (0, 1), (0, -1 + i)\}$$

também é uma base para V .

- (d) Obtenha a matriz mudança de base $I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.
- (e) Obtenha as coordenadas de $v = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$ na base \mathcal{C} , utilizando a matriz obtida em (d).

P.19 Considere $V = M(2, \mathbb{C})$. Mostre que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço de V constituído das matrizes auto-adjuntas, isso é,

$$U = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^\dagger = A\}.$$

Aqui, $A^\dagger = \overline{A^T}$ é a matriz adjunta de A .

P.20 Considere o espaço vetorial sobre \mathbb{R} das matrizes de tamanho 2, $V = M(2, \mathbb{R})$. Sabemos que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma possível base (ordenada) para V .

(a) Mostre que

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é também uma base (ordenada) para V .

(b) Encontre a matriz mudança da base \mathcal{B} para a base \mathcal{C} .

(c) Encontre a matriz mudança da base \mathcal{C} para a base \mathcal{B} . Você pode fazer isso tanto pela definição, quanto invertendo a matriz obtida em (b).

(d) Se consideramos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}),$$

está claro que na base \mathcal{B} esta tem coordenadas

$$(A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Obtenha as coordenadas de A na base \mathcal{C} , isto é $(A)_{\mathcal{C}}$.

P.21 Em $V = P_2(\mathbb{R})$, o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois, considere as bases

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{1, x, x^2\}, & \mathcal{C} &= \{(x-1)^2, x+4, 3x\}, \\ \mathcal{D} &= \{1-x^2, x(x+1), x^2+1\}. \end{aligned}$$

(a) Para o polinômio $a(x) = (x+1)^2 \in V$, obtenha as coordenadas de $a(x)$ nas base \mathcal{B} .

(b) Obtenha as matrizes mudança de base: de \mathcal{C} para \mathcal{B} ; de \mathcal{D} para \mathcal{B}

(c) Obtenha do último item as coordenadas de $a(x)$ nas bases \mathcal{C} e \mathcal{D} .

P.22 Verifique se os mapas abaixo são transformações lineares:

- (a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x) = (x, 2)$.
- (b) $T : V \rightarrow V$ dado por $T(v) = \alpha v$, em que α é um escalar fixo, $\alpha \in \mathbb{F}$.
- (c) $T : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ dado por $T(X) = P^{-1}XP$, em que $P \in M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz inversível fixa.
- (d) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por $T(x, y, z, t) = (\cos(x), y, z, t)$.
- (e) $T : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ dado por $T(X) = XA - AX$, em que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz fixa.
- (f) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ dado por $T(f) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) + x^2f(x)$, onde $C^\infty(\mathbb{R})$ são as funções C^∞ de \mathbb{R} em \mathbb{R} .
- (g) $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $T(f) = \int_0^1 f(x) dx$, onde $C([0, 1], \mathbb{R})$ são as funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} .

P.23 Para cada uma das transformações lineares abaixo, determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $T(x, y, z) = x + y - z$.
- (b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x, x + y)$.
- (c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$.
- (d) $T : P_2(\mathbb{F}) \rightarrow P_2(\mathbb{F})$ dado por $T(f(t)) = t^2 f''(t)$.
- (e) $T : M_2(\mathbb{F}) \rightarrow M_2(\mathbb{F})$ dado por $T(X) = MX + X$, onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

P.24 Considere que \mathbb{F} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\},$$

$$M(n \times 1, \mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\},$$

$$M(1 \times n, \mathbb{F}) = \{(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\}$$

são isomorfos.

P.25 Considere, para $\alpha \in [0, 2\pi)$, o mapa $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T_\alpha(x, y) = (\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y).$$

- (a) Prove que T é uma transformação linear.
- (b) Para os valores de $\alpha = \pi$ e $\alpha = \pi/2$, obtenha quem é $T(e_1)$ e $T(e_2)$, onde e_1 e e_2 são, respectivamente, os vetores canônicos, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
- (c) Conclua de (b) que $T_{\pi/2}$ é uma rotação no plano \mathbb{R}^2 em 90 graus e que $T_\pi = -\mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é a transformação identidade em \mathbb{R}^2 .

P.26 Considere $V = M(2, \mathbb{R})$ e $P \in M(2, \mathbb{R})$ a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, seja $U \subset V$ o subespaço das matrizes diagonais, isto é,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c = b = 0 \right\}.$$

- (a) Mostre que P é invertível e obtenha P^{-1} .
- (b) Mostre que a transformação $T : V \rightarrow V$ dada por

$$T(A) = PAP^{-1}$$

é uma transformação linear.

- (c) Obtenha uma base para U e calcule os vetores resultantes da aplicação de T sobre esta base.
- (d) Obtenha a expressão para T para qualquer matriz diagonal, ou seja, obtenha

$$T \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$.

P.27 Seja $r \subset \mathbb{R}^3$ a reta definida por

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

Obtenha uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$r = \ker T.$$

Quem é a imagem de T ?

P.28 Verifique se os mapas abaixo são transformações lineares:

- (a) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x) = (x, 2)$.
- (b) $F : V \rightarrow V$ dado por $F(v) = \alpha v$, em que α é um escalar fixo, $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (c) $F : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ dado por $F(X) = P^{-1}XP$, em que $P \in M(n, \mathbb{K})$ é uma matriz inversível fixa.
- (d) $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por $F(x, y, z, t) = (\cos(x), y, z, t)$.
- (e) $F : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ dado por $F(X) = XA - AX$, em que $A \in M(n, \mathbb{K})$ é uma matriz fixa.
- (f) $F : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ dado por $F(f) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) + x^2f(x)$, onde $C^\infty(\mathbb{R})$ são as funções C^∞ (infinitamente diferenciáveis) de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

- (g) $F : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $F(f) = \int_0^1 f(x) dx$, onde $C([0, 1], \mathbb{R})$ são as funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} .

Observação: O exercício seguinte discute a seguinte questão: Vimos que a composição de dois isomorfismos (transformações lineares bijetoras) gera um novo isomorfismo. Agora, essa propriedade ainda é preservada pela multiplicação de operadores se apenas um dos dois é isomorfismo? *Veremos que a resposta é não.*

P.29 Para os itens abaixo, verifique se T_1 e T_2 são ou não injetoras e sobrejetoras, obtenha $T = T_2 \circ T_1$ e responda as mesmas perguntas para esta transformação. *Usar o Exercício anterior é um jeito de facilitar as verificações deste Exercício.*

(a)

$$\begin{array}{ccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto x + y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 2x \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto (-y, x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto x - y \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto (z, x, y) \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto (2x, 3y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto (x, x, y) \end{array}$$

P.30 Considere $V_1 = \mathbb{R}^2$, $V_2 = \mathbb{R}^3$ e $V_3 = \mathbb{R}^2$ e $T_1: V_1 \rightarrow V_2$, $T_2: V_2 \rightarrow V_3$ as transformações lineares

$$T_1(x, y) = (3x + 2y, x - 4y, 0), \quad T_2(x, y, z) = \left(2x + y, \frac{1}{2}(x - 3y)\right).$$

Faça o que se pede.

- (a) Mostre que T_1 é injetora mas não é sobrejetora.
- (b) Mostre que T_2 é sobrejetora, mas não é injetora.
- (c) Obtenha $T = T_2 \circ T_1$ e mostre que este é um isomorfismo.

P.31 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão n . Considere \mathbb{K} também como um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Seja então $F: V \rightarrow \mathbb{K}$ uma transformação linear.

- (a) Mostre que $\dim(\ker(F))$ ou é igual a n ou a $n - 1$.

- (b) Se $G : V \rightarrow \mathbb{K}$ é outra transformação linear e $\{F, G\}$ são transformações lineares não nulas, linearmente dependentes em $L(V, \mathbb{K})$, então mostre que $\ker(F) = \ker(G)$.

P.32 Considere o espaço das sequências em \mathbb{R} , denotado por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Lembramos que os elementos deste espaço vetorial são as sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{K}\}$ com as operações:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots), \\ \lambda(x_1, x_2, x_3, \dots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots).\end{aligned}$$

Neste espaço vetorial, mostre que:

- (a) O mapa $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dado por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ é uma transformação linear injetora, mas que não é sobrejetora.
- (b) O mapa $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dado por $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ é uma transformação linear sobrejetora, mas que não é injetora.
- (c) Encontre uma transformação linear $T : P(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ injetora, em que $P(\mathbb{K})$ é o conjunto dos polinômios com coeficientes em \mathbb{K} .

Observação: O que ocorre neste exercício é que o espaço das sequências não é um espaço vetorial finitamente gerado, ou seja, não tem dimensão finita. Logo, as equivalências entre transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras que são válidas para transformações lineares $T : V \rightarrow V$ quando V tem dimensão finita, não são verdadeiras nesses espaços.

P.33 Dado V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} , seja $F : V \rightarrow V$ uma transformação linear que satisfaz $F^2 = F$, ou seja, é tal que para todo $v \in V$ vale $F(F(v)) = F(v)$. Então:

- (a) Mostre que $v - F(v) \in \ker(F)$.
- (b) Usando $v = v - F(v) + F(v)$, mostre que $V = \ker(F) + \text{Im}(F)$.
- (c) Mostre que $\ker(F) \cap \text{Im}(F) = \{0\}$. Portanto, $V = \ker(F) \oplus \text{Im}(F)$.

P.34 Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ uma base ordenada de \mathbb{R}^3 e $\mathcal{C} = \{(1, 5), (2, -1)\}$ uma base ordenada de \mathbb{R}^2 . Ache a matriz $(F)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, associada à transformação linear F em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} .

P.35 Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\mathcal{C} = \{(1, 2), (1, -1)\}$ uma outra base ordenada de \mathbb{R}^2 .

- (a) Seja F a transformação linear sobre \mathbb{R}^2 , definida por $F(x, y) = (-y, x)$. Ache a matriz da transformação linear em relação à base canônica, $(F)_{\mathcal{B}}$.
- (b) Ache a matriz de mudança de base \mathcal{B} para \mathcal{C} , $I_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, e de mudança de base \mathcal{C} para \mathcal{B} , $I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.
- (c) Use as matrizes acima para determinar a matriz da transformação linear F em relação à base \mathcal{C} , $(F)_{\mathcal{C}}$.
- (d) Se u é um vetor com coordenadas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ em relação à base \mathcal{C} , quais são as coordenadas de $F(u)$ em relação à base \mathcal{C} ?

P.36 Considere a base

$$\mathcal{C} = \{(2, 0, 0, -1), (3, 2, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (-2, -5, 0, -5)\}$$

e definamos $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação cuja matriz associada, em relação à base \mathcal{C} seja

$$(T)_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Obtenha a matriz de T em relação à base canônica, $(T)_{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

(b) Considere agora a base

$$\mathcal{D} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 8, 4), (0, 1, 0, -5), (0, 0, 1, 1)\}.$$

Obtenha a matriz de T em relação à esta nova base \mathcal{D} .

P.37 Faça o que se pede. *O conceito de base dual foi apresentado no Exercício T.19.*

(a) Ache a base dual das bases:

(i) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (1, 2, 0), (3, 4, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 .

(ii) $\mathcal{C} = \{1, t, 1 - t^2\}$ de (\mathbb{R}) .

(b) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear $f(x, y, z) = x$. Quais são as coordenadas deste funcional em termos da base dual de \mathcal{B} ?

2 Exercícios Teóricos

T.1 Mostre que todo espaço vetorial sobre \mathbb{C} também é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

T.2 Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço vetorial das triplas de números reais, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Sabemos que um plano é qualquer subconjunto $\pi \subset V$ dado da seguinte forma

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d, x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

com a, b, c e d números reais fixados. Mostre que um plano $\pi \subset V$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $d = 0$.

Note que isso equivale a dizer que um plano $\pi \subset V$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, π passa pela origem.

T.3 Continuando do exercício anterior, uma reta é qualquer subconjunto $U \subset V$ dado pela interseção de dois planos e pode ser escrita portanto da seguinte forma

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \text{ e } a_2x + b_2y + c_2z = d_2\}.$$

Mostre que r é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $d_1 = d_2 = 0$.

T.4 Generalize os exercícios **T.2** e **T.3**, agora com $V = \mathbb{R}^n$ e U hiper-planos, que são dados da seguinte forma:

$$U = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ satisfaz simultaneamente } a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = d_i, i = 1, \dots, m\},$$

onde $m \geq 1$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

T.5 Seja V um Espaço vetorial e U, W subespaços vetoriais de V . Mostre que

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U, v \in W\}$$

é um subespaço vetorial de V . Mostre que o mesmo não ocorre para $U \cup W$, ou seja, obtenha um exemplo de V, U e W onde a união de U com W não é um subespaço vetorial de V .

T.6 Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W sobre F . Mostre que:

- (a) Se $U \subseteq V$, então $U + V = V$.
- (b) Se $U \subseteq V$, então $U \cap V = U$.
- (c) Se $U + V = U$, então $U \supseteq V$.
- (d) Se $U \cap V = U$, então $U \subseteq V$.

T.7 Seja V um espaço vetorial. Prove que, dado um conjunto $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, $[S]$ é o menor subespaço que contém S . Para isso, basta mostrar que, dado qualquer subespaço U de V contendo S , temos $[S] \subset U$.

T.8 Mostre que se S é um subconjunto L.D. de um espaço vetorial V , então existe $v \in S$ tal que

$$[S \setminus v] = [S].$$

T.9 Seja V um espaço vetorial e $S \subset V$ um subconjunto L.I. Mostre que se $v \notin [S]$, então $S \cup \{v\}$ também é L.I.

T.10 Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Considere $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto de V . Mostre que:

- (a) se $k < n$, então existe $v \in V$ tal que $v \notin [S]$;
- (b) se $k = n$, então S é L.I. se, e somente se, $[S] = V$;
- (c) se $k > n$, então S é L.D.

T.11 Dê exemplo de uma matriz 3×3 sobre \mathbb{R} cujos vetores-linha geram um subespaço de \mathbb{R}^3 diferente do espaço gerado pelos vetores-coluna.

T.12 Mostre que qualquer tripla de vetores em \mathbb{R}^2 formam um conjunto L.D. Generalize este resultado para qualquer conjunto de m vetores em \mathbb{R}^n , com $m > n$.

T.13 Pode-se obter uma base para $P_n(\mathbb{R})$ formada por $n + 1$ polinômios de grau n ?

T.14 Suponha que V é um espaço vetorial e que B, C e D são três bases ordenadas de V . Mostre que se P é a matriz mudança da base B para a base C e Q é a matriz mudança da base C para a base D , então a matriz mudança da base B para a base D é PQ . Conclua disso que toda matriz mudança de base é invertível.

T.15 Suponha que V é um espaço vetorial de dimensão n e que $B = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base ordenada de V . Seja $P = (\alpha_{ij})$ uma matriz $n \times n$ inversível. Mostre que

$$u_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} v_k \quad u_2 = \sum_{k=1}^n \alpha_{2k} v_k, \quad \dots, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{nk} v_k$$

é uma nova base de V . Considere $C = (u_1, \dots, u_n)$ a base ordenada como acima. Qual a matriz mudança da base B para a base C ?

T.16 Mostre que toda transformação linear $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é da forma

$$F(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z).$$

Para isso, prossiga nos seguintes passos

(a) Escreva qualquer vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores da base canônica,

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

(b) Em seguida, escreva

$$F(1, 0, 0) = (a_1, a_2), \quad F(0, 1, 0) = (b_1, b_2), \quad F(0, 0, 1) = (c_1, c_2)$$

e utilize o item (a), junto com a linearidade de F , para escrever $F(x, y, z)$.

T.17 Considere a afirmação nos dada pelo Teorema Núcleo-Imagem: Este diz que se $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear entre Espaços Vetoriais U e V , então

$$\dim U = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T).$$

Considere agora U e V espaços vetoriais com dimensão n e m , respectivamente. Mostre que

- (a) Se $n > m$, então T **não** pode ser injetora.
- (b) Se $m > n$, então T **não** pode ser sobrejetora.
- (c) Se $n = m$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

T.18 Seja $U \in M(n, \mathbb{K})$ uma matriz inversível. Mostre que o mapa $F: M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ dado por $F(X) = UXU^{-1}$ é um isomorfismo.

Definição: Dado um Espaço Vetorial V sobre o corpo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Chamamos de *espaço dual* o espaço vetorial $L(V, \mathbb{K})$, ou seja, o conjunto das transformações lineares de V para o corpo \mathbb{K} . Sabemos que este conjunto, que denotamos por V^* , é de fato um espaço vetorial, pois \mathbb{K} é um espaço vetorial.

T.19 Considere V um espaço vetorial de dimensão n e V^* o seu Espaço Dual. Tome $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Defina f_1, \dots, f_n os n elementos de V^* dados por

$$f_1\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \alpha_1,$$

$$f_2\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \alpha_2,$$

$$\vdots$$

$$f_n\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \alpha_n.$$

Mostre que $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base para V^* . Chamamos esta base de base dual à base \mathcal{B} .

T.20 Para um Espaço Vetorial V de dimensão n , mostre que V^* é isomorfo à \mathbb{K}^n , através da transformação linear

$$\begin{array}{ccc} \phi: & V^* & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ & T & \longmapsto (T(v_1), \dots, T(v_n)), \end{array}$$

onde $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base para V . Como sabemos que V é também isomorfo à \mathbb{K}^n (pois ambos tem dimensão n), concluímos que V^* e V são espaços isomorfos.