

## PRIMEIRA PROVA - ÁLGEBRA LINEAR TURMA 1.

A prova é individual, porém o uso de referências, como livros e cadernos, é livre. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Não use determinantes, produtos internos e etc. para resolver os exercícios. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Como na aula  $\mathbb{F}$  é sempre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $M_n(\mathbb{F})$  são as matrizes quadradas  $n \times n$  em  $\mathbb{F}$  e  $P_n(\mathbb{F})$  são os polinômios de grau menor ou igual a  $n$ .

**Boa Prova!**

### (2 PONTOS) EXERCÍCIO 1

Determine os valores de  $a$  para os quais o sistema abaixo é incompatível (não tem solução), compatível determinado (tem solução única) e compatível indeterminado (tem infinitas soluções). Ache as soluções do sistema para os casos em que elas existam.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y - az = a \end{cases}$$

### EXERCÍCIO 2

No espaço vetorial  $P_3(\mathbb{F})$  dos polinômios de grau menor ou igual a 3, considere as seguintes bases ordenadas:  $B = (1, t, t^2, t^3)$  e  $C = (1, 1+t, 1+t^2, t^3)$ .

(1,5 ponto) a) Escreva os elementos da base ordenada  $C$  em função dos elementos da base ordenada  $B$ . Determine  $I_{CB}$ , a matriz de mudança de base de  $B$  para  $C$ .

(1 ponto) b) Determine  $I_{BC}$ , a matriz de mudança de base de  $C$  para  $B$ .

(1 ponto) c) Se um polinômio  $p$  tem coordenadas  $(1, 1, 1, 1)$  na base canônica, ou seja, na base  $B$ , quais são as suas coordenadas na base ordenada  $C$ ?

(0,5 ponto) d)  $P_3(\mathbb{F})$  é isomorfo a  $M_2(\mathbb{F})$ ? Justifique.

### EXERCÍCIO 3

Seja  $P_2(\mathbb{F})$  o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

(1 ponto) a) Sabendo que a base canônica deste espaço é  $\{1, t, t^2\}$ , determine a sua dimensão.

(1 ponto) b) Mostre que  $B' = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + t + t^2\}$  é base de  $P_2(\mathbb{F})$ .

### EXERCÍCIO 4

Seja  $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear dada por  $F(p(t)) = tp'(t)$ .

(1 ponto) a) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de  $F$ .

(1 ponto) b) Escreva a matriz de  $F$  em relação à base ordenada  $B = (1, t, t^2)$ , ou seja,  $F_B$ . Se  $p \in P_2(\mathbb{R})$  é um polinômio com coordenadas  $(0, 0, 1)$  na base ordenada  $B$ , ou seja,  $p(t) = t^2$ , quais são as coordenadas de  $F(p)$  na base ordenada  $B$ ?