Universidad Mariano Gálvez
Ingeniaría en Sistemas
Catedrático: Lic. Oseas Paredes

Lenguajes Formales y Teoría de Autómatas (0901-028)
TEORÍA PARA LA HOJA DE TRABAJO 6

INSTRUCCIONES: Agregue a su cuaderno las siguientes definiciones y teoremas. Imprima esta hoja y téngala a mano a fin de resolver la hoja de trabajo adjunta.

Lenguajes, Autómatas y Gramáticas Capítulo 3

21. AFABETO, PALABRAS Y SEMIGRUPO LIBRE

Escolio: En este capítulo se estudian tres temas que tienen una estrecha relación entre sí: *lenguajes*, *autómatas* y *gramáticas*. En los lenguajes que se usan aquí se utilizan las letras a, b, . . . para codificar los datos, a diferencia de los dígitos 0 y 1 que se usan en otros textos.

—**Definición 42 (Palabras de un Alfabeto):** Sea $A \neq \emptyset$, el cual llamaremos *alfabeto*.

(i) $palabra_A(x, n) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x: \{1, \dots, n\} \longrightarrow A$, para algún $n \geq 1$.

(ii) $palabra_A(\lambda, 0) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \lambda: \emptyset \longrightarrow A \Leftrightarrow \lambda = \emptyset$ (por teorema 55(v))

(iii) $x_n \triangleq x(n)$, si $palabra_A(x, n)$, para algún $n \geq 1$.

(iv) $x_{A,n} \triangleq x_1 x_2 \dots x_n \triangleq x$, si $palabra_A(x, n)$, para algún $n \geq 1$.

(v) Se usarán u, v, w, x, y, z como metavariables que toman valores a partir de las palabras de un alfabeto dado.

Escolio: Es decir, una *palabra* o *cadena (de longitud n)*, $w_{A,n}$, sobre la clase A es una sucesión finita de elementos de A. A dicha clase A se le llama *alfabeto*.

Ejemplo: Sea el alfabeto $A = \{a, b, c\}$. Entonces las siguientes sucesiones son palabras sobre dicho alfabeto A.

$$u_{A,5} = ababb$$
$$v_{A,7} = accbaaa$$

—**Definición 43 (Letra):** $letra_A(a) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} a \in A$, si $A \neq \emptyset$.
Escolio: Sea el alfabeto $A \neq \emptyset$. A los elementos de A se les denomina *letras*.

—**Definición 44 (Notación):** Sea el alfabeto $A \neq \emptyset$. Denotaremos por λ (o bien por ε) a la sucesión vacía de letras y se le denominará *palabra vacía*. Formalmente,

(i) $a^0 \triangleq \lambda \triangleq \varepsilon \triangleq \emptyset$, si a es una letra de A.
(ii) $a^1 \triangleq a$, si a es una letra de A.
(iii) $a^{n+1} \triangleq a^n a, \forall n \geq 0$, si a es una letra de A.

—**Teorema 60:** $a^n = aa \ldots a, n - veces$, es una palabra de A, si a es una letra del alfabeto $A \neq \emptyset$.
Demostración (por inducción finita sobre *n*):
Sea a es una letra del alfabeto $A \neq \emptyset$.
Si $n = 0$ entonces $a^n = a^0 = \lambda$ (por hipótesis y la definición 44(i)) es una palabra vacía de A (por definición 44).
Si $a^n = aa \ldots a, n - veces$, es una palabra de A, entonces

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^n a && \textit{por definición 44(iii)} \\ &= \underbrace{aa \ldots a}_{n-veces}\, a, n + 1 - veces && \textit{por hipótesis de inducción} \end{aligned}$$

La cual, a su vez, es una palabra sobre A.■
Escolio: En base al teorema anterior se abrevia la notación y se escribe a^2 en lugar de aa, a^3 por aaa, etc. de modo que las palabras del ejemplo anterior se pueden reescribir como:

$$u_{A,5} = ababb = abab^2$$
$$v_{A,7} = accbaaa = ac^2ba^3$$

—**Definición 45 (La Clase Estrella):**
$A^* \triangleq \{x|(\forall n)palabra_A(x,n)\} = \{x_{A,n}|(\forall n)palabra_A(x_{A,n},n)\}$, si $A \neq \emptyset$.
Escolio: A la clase de todas las palabras (de distinta longitud) sobre A se denota por A^*.

—**Definición 46 (La Longitud de una Palabra):**
(i) $l(x_{A,n}) \triangleq n$, si $palabra_A(x,n)$, para algún $n \geq 1$.
(ii) $l(\lambda) \triangleq 0$
Ejemplos: $l(abab^2) = 5$, $l(ac^2ba^3) = 7$.

—**Definición 47 (Concatenación de Palabras):**
(i) $x_{A,m}y_{A,n} \triangleq c(x_{A,m} \quad y_{A,n})$, si $c: (A^*)^2 \longrightarrow A^*$
(ii) $x_{A,m}^0 \triangleq \lambda$
(iii) $x_{A,m}^1 \triangleq x_{A,m}$
(iv) $x_{A,m}^{n+1} \triangleq x_{A,m}^n x_{A,m}$

—**Teorema 61:** Sea el alfabeto $A \neq \emptyset$.
(i) $\mathcal{oper}_{A^*}(c)$
(ii) $(x_{A,m}y_{A,n})z_{A,k} = x_{A,m}(y_{A,n}z_{A,k}), \forall x_{A,m}, y_{A,n}, z_{A,k} \in A^*$
(iii) $\lambda \in A^*$
(iv) $x_{A,m}^n = x_{A,m}x_{A,m} \ldots x_{A,m}, n - veces$, es una palabra de longitud $m \times n$ sobre el alfabeto $A \neq \emptyset$.
(i) **Demostración:**
Ya que $c: (A^*)^2 \longrightarrow A^*$ (definición 47(i)), se sigue que $\mathcal{oper}_{A^*}(c)$, a partir de la definición 32(i).
(ii) **Demostración:**

Sean $x_{A,m}, y_{A,n}, z_{A,k} \in A^*$ tales que, a partir de la definición 42(iii), son posibles de reescribir como:

$$x_{A,m} = x_1 x_2 \dots x_m \quad (1)$$
$$y_{A,n} = y_1 y_2 \dots y_n \quad (2)$$
$$z_{A,n} = z_1 z_2 \dots z_k \quad (3)$$

Entonces:

$(x_{A,m} y_{A,n}) z_{A,k} = (x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n) z_1 z_2 \dots z_k$ *a partir de* (1), (2) *y* (3)

$= x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n z_1 z_2 \dots z_k$ *por definición 47(i)*

$= x_{A,m}(y_{A,n} z_{A,k})$ *por la misma razón*

(iii) Demostración:

$\because palabra_A(\lambda, 0)$ *por definición 42(ii)*

$\therefore \lambda \in A^*$ *por definiciones 45, 5(i)*

(iv) Demostración (por inducción finita sobre *n*):

Sea $x_{A,m} \in A^*$.

Si $n = 0$ entonces $x_{A,m}^n = x_{A,m}^0 = \lambda$ (por hipótesis y la definición 47(ii)) es una palabra vacía de *A* de longitud $0 = m \times 0 = m \times n$ (por definición 44).

Si $x_{A,m}^n = x_{A,m} x_{A,m} \dots x_{A,m}, n - veces$, es una palabra de longitud $m \times n$ sobre *A*, entonces

$x_{A,m}^{n+1} = x_{A,m}^n x_{A,m}$ *por definición 47(iv)*

$= \underbrace{x_{A,m} x_{A,m} \dots x_{A,m}}_{n-veces} x_{A,m}, n + 1 - veces$ *por hipótesis de inducción*

La cual, a su vez, es una palabra sobre *A* de longitud $m \times (n + 1)$.■

Ejemplo: la *concatenación* de $u_{A,5}$ y $v_{A,7}$, por ejemplo, se escribe

$$u_{A,5} v_{A,7} = abab^2ac^2ba^3$$

Además,

$$v_{A,7} u_{A,5} = ac^2ba^3abab^2 = ac^2ba^4bab^2$$

Puede notarse que la operación concatenación NO es conmutativa.

Escolio: En este caso, como ocurre con las letras, para cualquier palabra $u_{A,n}$, a partir del teorema 61(ii) se tiene que $u_{A,n}^2 = u_{A,n} u_{A,n}$, $u_{A,n}^3 = u_{A,n} u_{A,n} u_{A,n}$, etc.

Resulta evidente, además, que para palabras arbitrarias $u_{A,m}, v_{A,n}, w_{A,k}$ las palabras $(u_{A,m} v_{A,n}) w_{A,k}$ y $u_{A,m}(v_{A,m} w_{A,n})$ son idénticas, ya que sólo consta de las letras de $u_{A,m}, v_{A,n}, w_{A,k}$ escritas una después de la otra.

También, al adjuntar una palabra vacía antes o después de una palabra $u_{A,m}$ no se modifica la palabra. Es decir,

—**Teorema 62:** $Semigr(A^*,\ c,\ \lambda)$, si $A \neq \emptyset$.

Demostración:

Claramente, a partir de la definición 33,

$$mon(A^*, c) \qquad (a)$$

ya que $\mathscr{oper}_{A^*}(c)$ (por teorema 61(i)) y $(x_{A,m} y_{A,n}) z_{A,k} = x_{A,m}(y_{A,n} z_{A,k}), \forall x_{A,m}, y_{A,n}, z_{A,k} \in A^*$ (por el teorema 61(ii).

Por otro lado, siendo $\lambda \in A^*$ (por teorema 61(iii)

$\lambda x_{A,m} = x_{A,m} \lambda = x_{A,m}, \forall x_{A,m} \in A^* \qquad (b) \qquad$ (a partir de la definición 44 (i))

De *(a)* y *(b)* se sigue la tesis (a partir de la definición 34). ■
Escolio: la clase de todas las palabras de A inclusive la palabra vacía λ, A^*, es llamado también *semigrupo libre (sobre A).*

—Corolario 1.62: $mon(A^* - \{\lambda\},\ c)$, si $A \neq \emptyset$.
Escolio: la clase de todas las palabras no vacías de A, $A^* - \{\lambda\}$, es llamado también *monoide libre (sobre A o generado por A)*. Resulta fácil demostrar que $A^* - \{\lambda\}$ satisface las leyes de cancelación por la izquierda y por la derecha, a pesar de que (como ya se vio anteriormente) no es conmutativo cuando $A^* - \{\lambda\}$ posee más de un elemento.

—Corolario 2.62 (Leyes de Cancelación): Si $A \neq \emptyset$,

(i) $x_{A,m}y_{A,n} = z_{A,m}y_{A,n} \Longrightarrow x_{A,m} = z_{A,m}, \forall x_{A,m}, y_{A,n}, z_{A,k} \in A^*$

(ii) $y_{A,n}x_{A,m} = y_{A,n}z_{A,m} \Longrightarrow x_{A,m} = z_{A,m}, \forall x_{A,m}, y_{A,n}, z_{A,k} \in A^*$

—Definición 48 (Subpalabras):

(i) $subpalabra_{x_{A,n}}(y_{A,k-j+1}) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x = y \wedge 1 \leq j \leq k \leq n,$ si $A \neq \emptyset$

(ii) $subpalabra_{x_{A,n}}(\lambda), \forall x_{A,n},$ si $A \neq \emptyset$

Escolio: es decir, cualquier sucesión de la forma $w_{A,k-j+1} = a_j a_{j+1} \ldots a_k$ es una *subpalabra* de $v_{A,n} = a_1 a_2 \ldots a_n$ ssi $1 \leq j \leq k \leq n$. En otras palabras, *w* es una subpalabra de *u* ssi es de la forma *u* = $v_1 w v_2$. Observe que ambas λ y *u* son subpalabras de *uv* puesto que *u* = λu.
Ejemplo: considere la palabra $u_{A,4} = abca$. Las subpalabras de $u_{A,4}$ son las siguientes: $\lambda, a, b, c, ab, bc, ca, abc, bca, u_{A,4}$ (10 subpalabras).

—Definición 49 (Segmentos iniciales):

(i) $segmentoinicial_{x_{A,n}}(y_{A,k}) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x = y \wedge x_1 = y_1 \wedge 1 \leq k \leq n,$ si $A \neq \emptyset$

(ii) $segmentoinicial_{x_{A,n}}(\lambda), \forall x_{A,n},$ si $A \neq \emptyset$

Escolio: es decir, cualquier sucesión de la forma $w_{A,k} = a_1 a_2 \ldots a_k$ es un segmento inicial de $v_{A,n} = a_1 a_2 \ldots a_n$ ssi $1 \leq k \leq n$. En otras palabras, *w* es un segmento inicial de *u* ssi *u* = *wv*. Note que todo segmento inicial es una subpalabra.
Ejemplo: considere la palabra $u_{A,4} = abca$. Los segmentos iniciales de $u_{A,4}$ son los siguientes: $\lambda, a, ab, abc, u_{A,4}$ (5 subpalabras).

—Teorema 63: $segmentoinicial_{x_{A,n}}(y_{A,k}) \Longrightarrow subpalabra_{x_{A,n}}(y_{A,k-j+1})$, si $A \neq \emptyset$
Escolio: Es decir, todo segmento inicial es una subpalabra.

22. LENGUAJES

—Definición 50 (Lenguajes): $lenguaje_A(L) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} L \subseteq A^*$, si $A \neq \emptyset$.
Escolio: un lenguaje L sobre un alfabeto A es una colección de palabras sobre A. Como A^* denota el conjunto de todas las palabras sobre A, se sigue que un lenguaje L no es más que una subclase de A^*.

Ejemplo: Sea $A = \{a, b\}$. Algunos lenguajes sobre A son los siguientes:

(i) $L_1 = \{a, ab, ab^2, ...\} = \{ab^n | n \geq 0\}$ (L_1 consta de todas las palabras que empiezan con una *a* seguidas de cero o más *b*. No incluye la palabra vacía).

(ii) $L_2 = \{a^m b^n | m > 0 \wedge n > 0\}$ (L_2 consta de todas las palabras que empiezan con una o más *a* seguidas de una o más *b*. No incluye la palabra vacía).

(iii) $L_3 = \{a^m b^m | m > 0\}$ (L_3 consta de todas las palabras que empiezan con una o más *a* seguidas por el mismo número de *b*. No incluye la palabra vacía).

(iv) $L_4 = \{b^m a b^n | m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$ (L_3 consta de todas las palabras que empiezan con una o más *a* seguidas por el mismo número de *b*. No incluye la palabra vacía).

—Teorema 64: $lenguaje_A(L) \Leftrightarrow L \in \mathcal{P}(A^*)$, si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$.

Demostración:

Si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} L \in \mathcal{P}(A^*) &\Leftrightarrow L \subseteq A^* && \textit{por definiciones 12, 5(i)} \\ &\Leftrightarrow lenguaje_A(L) && \textit{por definición 50} \end{aligned}$$

La tesis se sigue de la simetría de la equivalencia (corolario II.XXIII). ■

—Definición 51 (Operación sobre los Lenguajes: la Concatenación de Lenguajes): Si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$, entonces

(i) $con(L \quad M) \triangleq LM \triangleq \{x_{A,m} y_{A,n} | (\forall m, n)[x_{A,m} \in L \wedge y_{A,n} \in M]\}, \forall L, M \in \mathcal{P}(A^*)$, donde $con: \mathcal{P}^2(A^*) \longrightarrow \mathcal{P}(A^*)$

(ii) $L^0 \triangleq \{\lambda\} = \{\emptyset\} = 1, \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$

(iii) $L^1 \triangleq L, \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$

(iv) $L^{n+1} \triangleq L^n L, \forall L \in \mathcal{P}(A^*), \forall n \geq 1$

Escolio: la anterior definición establece que si *L* y *M* son lenguajes sobre un alfabeto *A*, entonces la "concatenación" de *L* y *M*, que se denota por *LM*, es el nuevo lenguaje definido como sigue:

$$LM = \{uv \mid u \in L \wedge v \in V\}$$

Es decir, *LM* denota el conjunto de todas las palabras que provienen de la concatenación de una palabra de *L* con otra de *M*.

En general, a L^n se le llama usualmente *la potencia de un lenguaje*.

Ejemplo: suponga que

$$L_1 = \{a, b^2\}, L_2 = \{a^2, ab, b^3\}, L_3 = \{a^2, a^4, a^6, \ldots\}$$

Entonces:

$$L_1L_1 = \{a^2, ab^2, b^2a, b^4\}, L_1L_2 = \{a^3, a^2b, ab^3, b^2a^2, b^2ab, b^5\},$$

$$L_1L_3 = \{a^3, a^5, a^7, \ldots, b^2a^2, b^2a^4, b^2a^6, \ldots\}$$

Además, ya que, $L_2L_1 = \{a^3, aba, b^3a, a^2 b^2, a b^3, b^5\}$ se sigue que, en general

$$LM \neq ML$$

Sin embargo, ya que la concatenación de palabras es asociativa, resulta evidente que la concatenación de lenguajes es asociativa.

—**Teorema 65:** Si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$,

(i) $\mathscr{oper}_{\mathcal{P}(A^*)}(con)$

(ii) $(LM)N = L(MN), \forall L, M, N \in \mathcal{P}(A^*)$

(iii) $L^0 \in \mathcal{P}(A^*)$

(iv) $L^n = LL \ldots L, n - veces, \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$.

—**Teorema 66:** $Semigr(\mathcal{P}(A^*),\ con,\ \{\lambda\})$, si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$.

—**Definición 52 (La Cerradura de Kleene):**

(i) $L^* \triangleq \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k \triangleq \bigcup\{L^k | L \in \mathcal{P}(A^*) \wedge n \geq 0\}$, si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$.

(ii) $L^+ \triangleq \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k \triangleq \bigcup\{L^k | L \in \mathcal{P}(A^*) \wedge n \geq 1\}$, si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$.

Escolio: La operación unaria L^* (que se lee "L estrella") de un lenguaje L, que se denomina *cerradura de Kleene* de L se define como la unión infinita:

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k = L^0 \cup L \cup L^2 \cup \ldots$$

La definición de L^* coincide con la notación A^*, que consta de todas las palabras sobre A. L^+ se define como la unión de L^1, L^2, . . . es decir, L^+ es lo mismo que L^*, aunque sin la palabra vacía λ.

23. EXPRESIONES REGULARES, LENGUAJES REGULARES

Escolio: En esta sección se definen una expresión regular r sobre A y un lenguaje $L(r)$ sobre A en asociación con la expresión regular r. La expresión r y su lenguaje correspondiente $L(r)$ se definen inductivamente como sigue.

—**Definición 53 (Expresiones Regulares de un Alfabeto):** Si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$, entonces

(i) λ (la palabra vacía) y ( ) (la expresión vacía) son *expresiones regulares* (*de (el alfabeto) A*).

(ii) $a \in A$ es una *expresión regular* (*de A*). Es decir, toda letra en A es una expresión regular.

(iii) Si r es una expresión regular entonces (r^*) es una expresión regular (de A).

(iv) Si r_1 y r_2 son expresiones regulares entonces $(r_1 \vee r_2)$ es una expresión regular (de A).

(v) Si r_1 y r_2 son expresiones regulares entonces $(r_1 r_2)$ es una expresión regular (de A).

(vi) r es una expresión regular (de A) ssi se obtiene a partir de los incisos (i)–(v), anteriores.

Escolio: Observe que una expresión regular r es un tipo especial de palabra (cadena) que usa las letras de A y los cinco símbolos:

$$(\ )\ *\ \vee\ \lambda$$

Se recalca que ningún otro símbolo se usa para las expresiones regulares.

—**Definición 54 (Lenguaje Regular sobre una Expresión Regular de un Alfabeto):** Si $\mathcal{M}(A) \wedge A \neq \emptyset$, entonces

(i) $L(\lambda) \triangleq \{\lambda\} = \{\emptyset\} = 1, \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$

(ii) $L\big((\quad)\big) \triangleq \emptyset = 0, \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$

(iii) $L(a) \triangleq \{a\}, \forall L \in \mathcal{P}(A^*), \forall a \in A$

(iv) $L(r^*) \triangleq L(r)^*, \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$, si r es una expresión regular de A.

(v) $L(r_1 \vee r_2) \triangleq L(r_1) \cup L(r_2), \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$, si r_1 y r_2 son expresiones regulares de A.

(vi) $L(r_1 r_2) \triangleq L(r_1)L(r_2), \forall L \in \mathcal{P}(A^*)$, si r_1 y r_2 son expresiones regulares de A.

(vii) *L es un lenguaje regular sobre r*, una expresión regular, el cual denotaremos por $L(r)$, ssi se obtiene a partir de alguno de los incisos (i)–(vi), anteriores.

Escolio: En la anterior definición $L(r)^*$ denota la cerradura de Kleene para $L(r)$. Además, $L(r_1)L(r_2)$ denota la concatenación de lenguajes. Cuando es posible, en las expresiones regulares se omiten los paréntesis. Puesto que la concatenación de lenguajes y la unión de lenguajes son asociativas, es posible omitir muchos de los paréntesis. También, al adoptar la convención de que "*" tiene precedencia sobre la concatenación y ésta a su vez tiene precedencia sobre "$\vee$," es posible omitir otros paréntesis.

Ejemplo 1: Sea $A = \{a, b\}$. Cada una de las siguientes es una expresión r y su lenguaje correspondiente es $L(r)$:

a) Sea $r = a^*$. Entonces $L(r)$ consta de todas las potencias de a incluso la palabra vacía λ.

b) Sea $r = aa^*$. Entonces $L(r)$ consta de todas las potencias positivas de a excepto la palabra vacía λ.

c) Sea $r = a \vee b^*$. Entonces $L(r)$ consta de a o de cualquier palabra en b; es decir,

$$L(r) = \{a, \lambda, b, b^2, \cdots\}.$$

d) Sea $r = (a \vee b)^*$. Observe que $L(a \vee b) = \{a\} \cup \{b\} = A$; por tanto, $L(r) = A^*$, todas las palabras sobre A.

e) Sea $r = (a \vee b)^*bb$. Entonces $L(r)$ consta de la concatenación de cualquier palabra en A con bb; es decir, todas las palabras que terminan en b^2.

f) Sea $r = a \wedge b^*$. $L(r)$ no existe puesto que r no es una expresión regular. (En este caso $\wedge$ no es uno de los símbolos que se usan para expresiones regulares.)

Ejemplo 2: Considere los siguientes lenguajes sobre $A = \{a, b\}$.

a) $L_1 = \{a^m b^n \mid m > 0, n > 0\}$; *b*) $L_2 = \{b^m a b^n \mid m > 0, n > 0\}$; *c*) $L_3 = \{a^m b^m \mid m > 0\}$.

Encontrar una expresión regular r sobre $A = \{a, b\}$ tal que $L_i = L(r)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

a) L_1 consta de aquellas palabras que empiezan con una o más a seguidas por una o más b. Por tanto, $r = aa^*bb^*$. Observe que r NO es única; por ejemplo, $r = a^*abb^*$ es otra solución.

b) L_2 consta de todas las palabras que empiezan con una o más *b* seguidas por una sola *a* que luego es seguida por una o más *b*; es decir, todas las palabras que contienen exactamente una *a* que no es la primera o la última letra. Por tanto, $r = bb^*abb^*$ es una solución.

c) L_3 consta de todas las palabras que empiezan con una o más *a* seguidas por el mismo número de *b*. No existe ninguna expresión regular *r* tal que $L_3 = L(r)$; es decir, L_3 *no es un lenguaje regular*. La demostración de este hecho se deja en la hoja de trabajo adjunta.