Universidad Mariano Gálvez
Ingeniaría en Sistemas
Catedrático: Lic. Oseas Paredes

Lenguajes Formales y Teoría de Autómatas (0901-028)

CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS DE CANTOR EN LA VERSIÓN DE ZERMELO–FRAENKEL (ZF)

TEORÍA PARA LA HOJA DE TRABAJO 5

INSTRUCCIONES: Agregue a su cuaderno las siguientes definiciones y teoremas. Imprima esta hoja y téngala a mano a fin de resolver la hoja de trabajo adjunta.

18. RELACIÓNES Y FUNCIONES.

—Definición 25 (Convenio):

(i) $A\cup B\cup C\overset{\Delta}{=}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(ii) $A\cap B\cap C\overset{\Delta}{=}(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

Escolio: Gracias al conjunto de los números naturales podemos generalizar de manera natural las definiciones anteriores, en particular, la definición 8(iv).

—Definición 26 (Clase Finita): $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\overset{\Delta}{=}\{x|x=a_1\vee x=a_2\vee\ldots\vee x=a_n\}$

Escolio: Llamaremos clase finita a cualquier clase con un número (natural) definido de elementos. Ejemplos de tales clases son $\{a, b, c, d\}$ (que tiene 4 elementos).

Un resultado inmediato, a partir del uso del nuevo método de demostración (inducción finita), es el siguiente:

—Lema 1.50:

(i) $\{a, b\}=\{a\}\cup\{b\}$

(ii) $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\cup\{a_{n+1}\}\cup\{a_{n+2}\}$

—Teorema 50:

(i) $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\cup\{a_{n+1}\}$, si $n\geq 1$

(ii) $\mathrm{M}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\})$

—Definición L (Notación Informal):

(i) $\varphi, \forall x \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall x, \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)\varphi$

(ii) $\Phi, \forall x \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall x, \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)\Phi$

(iii) $\varphi, \forall x, \forall y \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall x, \forall y, \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)(\forall y)\varphi$

(iv) $\Phi, \forall x, \forall y \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall x, \forall y, \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)(\forall y)\Phi$

(v) $\exists x_{\ni} \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists x)\varphi$

(vi) $\exists x_{\ni} \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists x)\Phi$

(vii) $\varphi, \forall \psi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall \psi, \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall \psi)\varphi$, si en ψ no ocurre cuantificador alguno.

(viii) $\Phi, \forall \Psi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall \Psi, \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall \Psi)\Phi$, si en Ψ no ocurre cuantificador alguno.

(ix) $\exists \psi_{\ni} \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists \psi)\varphi$, si en ψ no ocurre cuantificador alguno.

(x) $\exists \Psi_{\ni} \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists \Psi)\Phi$, si en Ψ no ocurre cuantificador alguno.

(xi) $\nexists x_{\ni} \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \widetilde{(\exists x)}\varphi$

(xii) $\nexists x_{\ni} \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \widetilde{(\exists x)}\Phi$

(xiii) $\nexists \psi_{\ni} \varphi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \widetilde{(\exists \psi)}\varphi$, si en ψ no ocurre cuantificador alguno.

(xiv) $\nexists \Psi_{\ni} \Phi \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \widetilde{(\exists \Psi)}\Phi$, si en Ψ no ocurre cuantificador alguno.

—Definición 27 (Pareja Ordenada y *n*–ada Ordenada):

(i) $(a \quad b) \triangleq \{x | x=\{a\} \vee x=\{a, b\}\}$

(ii) $(a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_n \quad a_{n+1}) \triangleq ((a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_n) \quad a_{n+1}), \forall n \geq 3$

—Teorema 51 (Pareja Ordenada):

(i) $(a \quad b) = \{\{a\}, \ \{a, b\}\}$

(ii) $(a \quad a) = \{\{a\}\}$

(iii) $(a \quad b) \neq 0, \forall a, \forall b$

(iv) $M((a \quad b))$

(v) $(a \quad b) = (c \quad d) \Leftrightarrow [a = c \wedge b = d]$

(vi) $(a \quad b) \neq (b \quad a)$, si $a \neq b$

(vii) $M((a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_n \quad a_{n+1}))$

(viii) $((a_1 \quad a_2) \quad a_3) \neq (a_1 \quad (a_2 \quad a_3))$

—Definición 28 (Producto Cartesiano entre Clases):

(i) $A \times B \triangleq \{x | (\exists a \in A)(\exists b \in B)[x = (a \quad b)]\}$

(ii) $A^0 \triangleq \{0\} = 1$

(iii) $A^1 \triangleq A$

(iv) $A^{n+1} \triangleq A^n \times A, \forall n \geq 1$

(v) $I_A \triangleq \{x | (\exists a \in A)[x = (a \quad a)]\}$ (grafo, relación y función *identidad* o *diagonal*)

(vi) $A^{-1} \triangleq \{(x \quad y) | (x \quad y) \in A\}$ (inversa de una clase)

—Teorema 52 (Producto Cartesiano):

(i) $I_A = \{(a \quad a) | a \in A\}$

(ii) $A^n = A \times A \times \ldots \times A \ (n - veces)$

(iii)$A \times B = \{(a \quad b) | a \in A \wedge b \in B\}$
(iv)$A \times 0 = 0 \times A = 0$
(v) $A \times B \neq B \times A$, si $A \neq B \wedge A \neq 0 \wedge B \neq 0$
(vi)$M(a \times b), \forall a, \forall b$
(vii) $\mathcal{U}^2 \subset \mathcal{U}$
(viii) $A \times B \subseteq \mathcal{U}^2$
(ix)$(A^{-1})^{-1} \subseteq A$
(x) $(A \times B) \bigcap (C \times D) = (A \bigcap C) \times (B \bigcap D)$

—Definición 29 (Relación y Función):

(i) $\mathcal{R}e\ell(A) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} A \subseteq \mathcal{U}^2$ (*A* es una relación o grafo)

(ii) $\mathcal{U}n(A) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall u)(\forall v)(\forall w)\big[[(u \quad v) \in A \wedge (u \quad w) \in A] \Longrightarrow v = w\big]$ (*A* es una clase univaluada)

(iii) $\mathcal{U}n_2(A) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathcal{U}n(A) \wedge \mathcal{U}n(A^{-1})$ (*A* es una clase uno–a–uno (clase inyectiva))

(iv) $\mathcal{F}nc(A) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathcal{R}e\ell(A) \wedge \mathcal{U}n(A)$ (*A* es una función)

(v) $\mathcal{F}nc_2(A) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathcal{R}e\ell(A) \wedge \mathcal{U}n_2(A)$ (*A* es una función inyectiva (función uno–a–uno))

—Definición 30 (Dominio e Imagen de una Clase):

(i) $Dom(A) \triangleq \{x | (\exists y)[(x \quad y) \in A]\}$ (el dominio de una clase *A*)

(ii) $Im(A) \triangleq \{y | (\exists y)[(x \quad y) \in A]\}$ (la imagen (rango) de una clase *A*)

(iii) $A|_B \triangleq A \bigcap (B \times \mathcal{U})$ (la clase *A* restringida a *B*)

(iv) $A[B] \triangleq Im(A|_B)$ (la imagen de *A* restringida a *B*)

(v) $A \circ B \triangleq \{(x \quad y) | (\exists z)[(x \quad z) \in B \wedge (z \quad y) \in A]\}$ (composición de clases: *A* compuesta con *B*)

—Teorema 53 (Relaciones y Funciones):

(i) $(A^{-1})^{-1} = A \Leftrightarrow \mathcal{R}e\ell(A)$

(ii) $[\mathcal{R}e\ell(A) \wedge \mathcal{R}e\ell(B)] \Longrightarrow \mathcal{R}e\ell(A \bigcup B)$

(iii) $(\forall x \in A)\mathcal{R}e\ell(x) \Longrightarrow \mathcal{R}e\ell(\bigcup A)$

(iv) $\mathcal{U}n_2(A) \Longrightarrow (\forall w)(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[[(w \quad x) \in A \wedge (z \quad y) \in A] \Longrightarrow [w = z \Leftrightarrow x = y]\big]$

(v) $\mathcal{F}nc_2(A) \Longrightarrow [\mathcal{F}nc(A) \wedge \mathcal{F}nc(A^{-1})]$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow Dom(A) \subseteq Dom(B)$

(vii) $A \subseteq B \Longrightarrow Im(A) \subseteq Im(B)$

(viii) $\mathcal{R}e\ell(A|_B)$

(ix) $(x \quad y) \in A|_B \Leftrightarrow [(x \quad y) \in A \wedge x \in B]$

(x) $Dom(A|_B) = B \bigcap Dom(A)$

(xi) $A|_B \subseteq A$

(xii) $A = A|_{Dom(A)} \Leftrightarrow \mathcal{R}e\ell(A)$

(xiii) $B \subseteq C \Longrightarrow (A|_C)|_B = A|_B$

(xiv) $\mathcal{U}n(A) \Longrightarrow \mathcal{U}n(A|_B)$

(xv) $b \in A[B] \Leftrightarrow (\exists a)[(a \quad b) \in A \wedge a \in B]$

—Definición 30 (Notación para la Imagen de una Función):
$A(b) \triangleq \{x|(\exists y)[x \in y \wedge (b \quad y) \in A] \wedge (\exists! \, y)[(b \quad y) \in A]\}$
(el valor de *A* en *b* ("*A* de *b*"))

—Teorema 54 (Notación para la Imagen de una Función):

(i) $\big[(b \quad y) \in A \wedge (\exists! \, y)[(b \quad y) \in A]\big] \Longrightarrow A(b) = y$
(ii) $\overline{(\exists! \, y)[(b \quad y) \in A]} \Longrightarrow A(b) = \emptyset$

—Corolario 1.54 (Notación para la Imagen de una Función): $M\big(A(b)\big)$

—Definición 31 (Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas):

(i) $A\mathcal{F}nB \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}nc(A) \wedge Dom(A) = B$ (*A* es una función de dominio *B*)
(ii) $A\mathcal{F}n_2B \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}nc_2(A) \wedge Dom(A) = B$ (*A* es una función inyectiva de dominio *B*)
(iii) $F: A \longrightarrow B \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} F\mathcal{F}nA \wedge Im(A) \subseteq B$ (*F* es una función de dominio *A* y contradominio *B*)
(iv) $F: A \underset{sobre}{\longrightarrow} B \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} F\mathcal{F}nA \wedge Im(A) = B$ (*F* es una función *sobreyectiva* de dominio *A* y contradominio *B*)
(v) $F: A \xrightarrow{1-1} B \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} F\mathcal{F}n_2A \wedge Im(A) \subseteq B$ (*F* es una función *inyectiva* de dominio *A* y contradominio *B*)
(vi) $F: A \xrightarrow[sobre]{1-1} B \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} F\mathcal{F}n_2A \wedge Im(A) = B$ (*F* es una función *biyectiva* de dominio *A* y contradominio *B*)

—Teorema 55:

(i) $A\mathcal{F}na \Longrightarrow M(A)$
(ii) $A\mathcal{F}n_2a \Longrightarrow M(A)$
(iii) $\mathcal{U}n(A) \Longrightarrow M(A)$
(iv) $A\mathcal{F}n\emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$
(v) $\emptyset: \emptyset \xrightarrow{1-1} B$

—Definición 32 (Operación):

(i) $\mathcal{oper}_A(*) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} *: A^2 \longrightarrow A$ (* es una operación sobre *A*)
(ii) $x * y \triangleq * (x \quad y), \forall x, y \in A$ ssi $\mathcal{oper}_A(*)$

—Teorema 56:

(i) $\mathcal{oper}_A(*) \Longleftrightarrow (\forall x, y \in A)[x * y \in A]$ (*propiedad de cerradura* de toda operación)
(ii) $\mathcal{oper}_\emptyset(\emptyset)$

—Definición 33 (Monoide):
$mon(A,\ *) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathscr{oper}_A(*) \wedge (\forall x,y,z \in A)[(x*y)*z = x*(y*z)]$ (A bajo la operación $*$ es un *monoide* ssi ($*$ es cerrada y…) satisface la propiedad *asociativa* de $*$)

—Teorema 57: $mon(\emptyset,\ \emptyset)$

—Definición 34 (Semigrupo):
$Semigr(A,\ *,\ e) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} mon(A,\ *) \wedge (\forall x \in A)[x*e = e*x = x]$, si $e \in A$
(A bajo la operación $*$ con elemento neutro e es un *semigrupo* ssi es un monoide bajo la misma operación y $*$ satisface la propiedad de *la existencia del elemento neutro* $e \in A$)

—Definición 35 (Grupo):

(i) $gr(A,\ *,\ e) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} Semigr(A,\ *,\ e) \wedge (\forall x \in A)(\exists \bar{x}_* \in A)[x*\bar{x}_* = \bar{x}_* * x = e]$, si $e \in A$
(A bajo la operación $*$ con elemento neutro e es un *grupo* ssi es un semigrupo, bajo la misma operación *, con elemento neutro e y * satisface *la propiedad de la existencia del elemento inverso (para cada elemento de A)*)

(ii) $grd_a(A,\ *,\ e) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} Semigr(A,\ *,\ e) \wedge (\forall x \in A-\{a\})(\exists \bar{x}_* \in A)[x*\bar{x}_* = \bar{x}_* * x = e]$, si $a, e \in A$
(A bajo la operación $*$ con elemento neutro e es un *grupo débil respecto de* $a \in A$ ssi es un semigrupo, bajo la misma operación $*$ con elemento neutro e y $*$ satisface la propiedad de *la existencia del elemento inverso* para todo elemento de A, *con excepción* de $a \in A$)

—Definición 36 (Grupo Abeliano o Conmutativo):

(i) $gra(A,\ *,\ e) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} gr(A,\ *,\ e) \wedge (\forall x,y \in A)[x*y = y*x]$, si $e \in A$
(A bajo la operación $*$ con elemento neutro e es un *grupo abeliano* ssi es un grupo, bajo la misma operación *, con elemento neutro e y * satisface la propiedad conmutativa)

(ii) $grad_a(A,\ *,\ e) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} grd_a(A,\ *,\ e) \wedge (\forall x,y \in A)[x*y = y*x]$, si $a, e \in A$
(A bajo la operación $*$ con elemento neutro e es un *grupo abeliano débil respecto de* $a \in A$ ssi es un grupo débil respecto de $a \in A$, bajo la misma operación $*$, con elemento neutro e y $*$ satisface *la propiedad conmutativa*)

—Definición 37 (Cuerpo y Campo):

(i) $cuerpo(A,\ *,\ \circ,\ e,\ i) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} gra(A,\ *,\ e) \wedge gra(A,\ \circ,\ i) \wedge$
$\wedge (\forall x,y,z \in A)[x \circ (y*z) = (x \circ y)*(x \circ z)]$, si $e, i \in A$
(A bajo las operaciones $*$ y $\circ$ con elementos neutros respectivos e e i *es un cuerpo* ssi es un grupo abeliano, bajo la primera operación $*$ con elemento neutro e, y también un grupo abeliano bajo la segunda operación $\circ$ con elemento neutro i cumpliéndose, además, que satisface la propiedad de enlace de ambas operaciones: *la propiedad distributiva de la segunda operación*, $\circ$, *respecto de la primera operación*, $*$)

(ii) $campo(A,\ *,\ \circ,\ e,\ i) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} gra(A,\ *,\ e) \wedge grad_e(A,\ \circ,\ i) \wedge$
$\wedge\ (\forall x, y, z \in A)[x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)]$, si $e, i \in A$
(A bajo las operaciones $*$ y $\circ$ con elementos neutros respectivos *e* e *i es un campo* ssi es un grupo abeliano, bajo la primera operación $*$ con elemento neutro *e*, y también un grupo abeliano bajo la segunda operación $\circ$ con elemento neutro *i* cumpliéndose, además, que satisface la propiedad de enlace de ambas operaciones: *la propiedad distributiva de la segunda operación,* $\circ$*, respecto de la primera operación,* $*$)

—**Definición 38 (Notación para Sumatorias y Productorias sobre un Campo):** Si $campo(b, +,\ \cdot, 0, 1) \wedge a\colon b \longrightarrow b_{\ni} a_j \triangleq a(j) \in b$

(i) $\sum_{k=m}^{m} a_k \triangleq a_m$
(ii) $\sum_{k=m}^{n+1} a_k \triangleq \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}$, si $n \geq m$
(iii) $\prod_{k=m}^{m} a_k \triangleq a_m$
(iv) $\prod_{k=m}^{n+1} a_k \triangleq \prod_{k=m}^{n} a_k \cdot a_{n+1}$, si $n \geq m$

—**Definición 39 (Equipotencia entre Conjuntos):** $a \simeq b \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists f)\left[f\colon a \xrightarrow[sobre]{1-1} b\right]$

—**Teorema 58:**

(i) $a \simeq a$
(ii) $a \simeq b \Longrightarrow b \simeq a$
(iii) $[a \simeq b \wedge b \simeq c] \Longrightarrow a \simeq c$

—**Definición 40 (Clase Ordinal y la clase de todos los conjuntos Ordinales):**

(i) $Ord(A) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathcal{Tr}(A) \wedge (\forall x, y \in A)[x \in y \vee x = y \vee y \in x]$ (A es una clase ordinal)
(ii) $On \triangleq \{x | Ord(x)\}$ (la clase de todos los conjuntos ordinales)
(iii) $\Phi(\alpha) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} [Ord(x) \Longrightarrow \Phi(x)]$

Escolio: a los elementos de On los llamaremos *números ordinales* y, según la definición 40(iii), los denotaremos por las letras del alfabeto griego: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

—**Definición 41 (Ínfimo de una Clase y la Cardinalidad de un Conjunto):**

(i) $Inf(A) \triangleq \bigcap(A \cap On)$, si $A \cap On \neq 0$
(ii) $Inf(A) \triangleq 0$, si $A \cap On = 0$
(iii) $\mu_\alpha\big(\Phi(\alpha)\big) \triangleq Inf(\{\alpha | \Phi(\alpha)\}) = \bigcap\{\alpha | \Phi(\alpha)\}$ (el mínimo ordinal α que satisface Φ)
(iv) $\#\, a \triangleq \mu_\alpha(a \simeq \alpha)$ (la cardinalidad de un conjunto *a*)

—**Axioma 8** (Axioma de Elección, versión débil):**

$$(\exists f)(\forall x \in a)[x \neq 0 \Longrightarrow f(x) \in x]$$

—**Teorema 59** (La Cardinalidad de un Conjunto):**

(i) $\#\, \emptyset = 0$
(ii) $(\exists \alpha)[a \simeq \alpha]$
(iii) $\#\, a < \#\, b \Leftrightarrow (\exists f)\left[f\colon a \xrightarrow{1-1} b\right]$
(iv) $\#\, a = \#\, b \Leftrightarrow (\exists f)\left[f\colon a \xrightarrow[sobre]{1-1} b\right]$