

实验三 二维离散傅里叶变换性质和频域滤波

一、实验目的

- 1、了解图像傅里叶变换的物理意义；
- 2、通过实验了解二维频谱的分布特点；
- 3、熟练掌握 FFT 的变换方法及应用；
- 4、熟悉傅里叶变换的基本性质；
- 5、掌握频域滤波原理；

二、实验平台

计算机和 Matlab 语言环境

三、实验内容

- 1、数字图像二维离散傅里叶变换和二维离散傅里叶逆变换
- 2、二维离散傅里叶变换的性质
- 3、频域滤波

四、实验原理

- 1、当数字图像 $f(x, y)$ 为 $N \times N$ 个像素时，其对应的二维离散傅里叶变换为

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[\frac{-j2\pi(ux + vy)}{N} \right]$$

$$u, v = 0, 1, \dots, N-1$$

从图像的二维离散傅里叶变换幅度谱中可见：一般图像的频谱大部分集中在直流和低频区域，而高频成分相对分量较低，高频信息对应着图像的细节或边界或突变地方或噪声；图像低频信息对应着变化缓慢区域。在数字图像中，相位信息非常重要，因为相位信息中携带着图像的边界位置等结构信息。

二维离散傅里叶**逆变换**为

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[\frac{j2\pi(ux + vy)}{N} \right]$$

$$x, y = 0, 1, \dots, N-1$$

- 2、二维离散傅里叶变换的性质

若傅里叶变换对表示如下： $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$

(1) 二维离散傅里叶变换的可分离性

二维 DFT 的实现可先采用 y 方向的一维 DFT，接着采用 x 方向的一维 DFT 从而实现二维 DFT。

(2) 平移性质

对 $f(x, y)$ 进行平移，平移后图像的傅里叶幅度谱与原图像的傅里叶变换的幅度谱一样，而相位谱产生与位移量成正比的线性相移。

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N]$$

(3) 旋转性质

$f(x, y)$ 在空间域旋转角度 θ_0 ，旋转后图像的频谱是原图像频谱 $F(u, v)$ 在频域中旋转相同角度 θ_0 而得到。

(4) 共轭对称性

实值图像 $f(x, y)$ 的频谱 $F(u, v)$ 具有共轭对称性，即

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

(5) 卷积定理

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

3、频域滤波的基本概念和步骤

频率域滤波过程为：

图像 $f(x, y)$ 经过二维 DFT 后变换为其频谱 $F(u, v)$ ；将频谱 $F(u, v)$ 乘以滤波器的频率传递函数 $H(u, v)$ ；将 $F(u, v)H(u, v)$ 进行二维逆 DFT 变换到空间域得到滤波后的输出图像 $g(x, y)$ 。

(1) 理想低通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

D_0 为截止频率， $D(u, v)$ 是频率点 (u, v) 到 $u-v$ 平面坐标原点的距离。

理想低通滤波在降噪的同时会使得图像变模糊，且出现明显的振铃效应。

(2) 巴特沃思低通滤波器的频域滤波函数为：

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

D_0 为截止频率， $D(u,v)$ 是频率点 (u,v) 到 $u-v$ 平面坐标原点的距离， n 是巴特沃思低通滤波器的阶数。

2 阶巴特沃思低通滤波器在降噪的同时会使得图像变模糊，不会出现振铃效应。

(3) 二维高斯低通滤波器的函数为：

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

D_0 为截止频率，也是高斯函数的标准差，即 $\sigma = D_0$ ， $D(u,v)$ 是频率点 (u,v) 到 $u-v$ 平面坐标原点的距离，高斯低通滤波在降噪的同时会使得图像变模糊，没有振铃效应。

(4) 频域高通滤波器

给定一个频域低通滤波器的传递函数 $H_{lp}(u,v)$ ，可以获得相应高通滤波器的传递函数：

$$H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

可以实现相应的频域理想高通滤波、频域巴特沃思高通滤波、频域高斯高通滤波。

频域理想高通滤波可锐化图像边界，但会引起图像的振铃效应；

频域 2 阶巴特沃思高通滤波可锐化图像边界，不会引起图像的振铃效应；

频域高斯高通滤波可锐化图像边界，不会引起图像的振铃效应。

五、实验步骤

1、图像的二维离散傅里叶变换与二维离散傅里叶逆变换

(1) 显示图像的离散傅里叶变换谱

```
clear all;

clc;

I=imread('cameraman1.tif'); % 读取图像

J=fftshift(fft2(I)); % 求图像的傅里叶变换谱并进行频谱中心化

imshow(I,title('原始图像'));
```

```
figure,imshow(log(1+abs(J)),[]);title('原始图像的幅度谱') %采用对数方法显示原图的幅度谱
```

(2) 显示图像的离散傅里叶变换的幅度谱和相位谱

```
clear all;  
clc;  
I=imread('lena.tif'); %读取图像  
J=fftshift(fft2(I)); %求图像的傅里叶变换谱并进行频谱中心化  
subplot(1,2,1),imshow(log(1+abs(J)),[]);title('原图像的幅度谱') %对数方法显示原图的幅度谱  
subplot(1,2,2),imshow(angle(J),[]);title('原图像相位谱'); %显示原图的相位谱
```

(3) 显示高斯低通滤波输出图的幅度谱

```
clear all;  
clc;  
I=imread('cameraman1.tif'); %读取图像  
J=fftshift(fft2(I)); %求图像的傅里叶变换谱并进行频谱中心化  
h=fspecial('gaussian',21,2);  
K=imfilter(I,h); %求图像的高斯低通滤波  
L=fftshift(fft2(K));  
subplot(1,2,1),imshow(log(1+abs(J)),[]);title('原始图像的幅度谱') %对数方法显示原图幅度谱  
subplot(1,2,2),imshow(log(1+abs(L)),[]);title('高斯低通滤波输出图的幅度谱')  
%采用对数方法显示高斯低通滤波输出图的幅度谱
```

(4) 二维离散傅里叶逆变换

```
clear all;  
clc;  
I=imread('lena.tif'); %读取图像  
J=fft2(I); %求图像的傅里叶变换谱  
K=ifft2(J); %采用二维离散傅里叶逆变换重构图像  
subplot(1,2,1),imshow(I);title('原始图像');  
subplot(1,2,2),imshow(real(K),[]);title('傅里叶变换谱的重构图') %傅里叶变换谱的重构图
```

(5) 傅里叶变换谱实部的二维离散傅里叶逆变换

```
clear all;

clc;

I=imread('lena.tif'); % 读取图像

J=real(fft2(I)); % 求图像傅里叶变换谱的实部

K=ifft2(J);

subplot(1,2,1),imshow(I);title('原始图像');

subplot(1,2,2),imshow(real(K),[]);title('傅里叶变换谱实部的重构图')

% 显示傅里叶变换谱实部的重构图
```

(6) 傅里叶变换相位信息的二维离散傅里叶逆变换

```
clear all;

clc;

I=imread('lena.tif'); % 读取图像

J=fft2(I)./abs(fft2(I));

K=ifft2(J);

subplot(1,2,1),imshow(I);title('原始图像');

subplot(1,2,2),imshow(real(K),[]);title('傅里叶变换相位信息的重构图')

% 显示傅里叶变换相位信息的重构图
```

2、图像二维离散傅里叶变换的性质

(1) 二维离散傅里叶变换的可分离性

```
clear all;

clc;

I=imread('lena.tif'); % 读取图像

[M,N]=size(I);

J=zeros(M,N);

K=zeros(M,N);

for i=1:M

    J(i,:)=fft(I(i,:)); % 先执行行方向一维 FFT
```

```

end

for j=1:N

    K(:,j)=fft(J(:,j));%接着执行列方向的一维 FFT

end

H=ifft2(K); %对图像的傅里叶变换谱执行二维离散傅里叶逆变换

subplot(1,2,1),imshow(log(1+abs(fftshift(K))),[]);title('原始图像的幅度谱')

subplot(1,2,2),imshow(real(H),[]);title('傅里叶变换谱的重构图')

```

（2）二维离散傅里叶变换的旋转性质

```

clear all;

clc;

I=imread('boat.bmp ');

J= imrotate(I,90);

K=fftshift(fft2(I));

L=fftshift(fft2(J));

subplot(1,2,1),imshow(log(1+abs(K)),[]);title('原始图像的幅度谱')

subplot(1,2,2),imshow(log(1+abs(L)),[]);title('图像旋转 90 度后的幅度谱')

```

（3）二维离散傅里叶变换的共轭对称性质

```

clear all;

clc;

I=imread('lena.tif'); %读取图像

J=fft2(I);

K=conj(J); %对傅里叶变换谱求共轭

H=ifft2(K);

imshow(real(H),[]);title('傅里叶变换谱求共轭后的重构图')

```

（4）二维离散傅里叶变换的平移性质

```

I=imread('cameraman1.tif');

J=fftshift(I); %对图像 I 进行循环移位

```

```

K=fftshift(fft2(I));    %求原图像的傅里叶变换谱并进行频谱中心化
L=fftshift(fft2(J));    %求平移后图像的傅里叶变换谱并进行频谱中心化
subplot(1,2,1),imshow(log(1+abs(K)),[]);title('原始图像的幅度谱')
subplot(1,2,2),imshow(log(1+abs(L)),[]);title('图像平移后的幅度谱')

```

(5) 二维离散傅里叶变换的卷积定理和相关定理

```

%基于相关运算，通过模板匹配检测文本图像中的字符 a,
clear all;
clc;
textimage = imread('text1.png');
a = textimage(32:45,88:98);    %字符 a 的模板图像
imshow(textimage);
figure, imshow(a);
C = real(ifft2(fft2(textimage) .* fft2(rot90(a,2),256,256))));
figure, imshow(C,[])
thresh = 60;    % 设置相关峰的检测阈值
figure, imshow(C > thresh);    % 检测大于阈值的相关峰，则对应的位置为字符 a

```

3、频域滤波

(1) 频域理想低通滤波

```

clear all;
clc;
f = imread('boat.bmp'); % 读取图像
F=fft2(f);
Fc=fftshift(F);
[M N]=size(f);    %取图像大小
HLPF= zeros(M,N);
d0=50;
for i=1:M

```

```

        for j=1:N
            d=sqrt((i-M/2)^2+(j-N/2)^2);
            if d<=d0
                HLPF(i,j) = 1; %理想低通滤波器传递函数
            end
        end
    end

end

Fc1=Fc.*HLPF; %频域理想低通滤波器
F1=fftshift(Fc1);
J=ifft2(F1); %理想低通滤波后采用二维离散傅里叶逆变换输出空域图像
imshow(real(J),[]);title('频域理想低通滤波后的图像')
figure,imshow(HLPF);title('频域理想低通滤波的传递函数')

```

(2) 巴特沃斯低通滤波

```

%2 阶巴特沃斯低通滤波
clear all;
clc;
f = imread('boat.bmp'); %读取图像
F=fft2(f);
Fc=fftshift(F);
[M N]=size(f); %取图像大小
HBLPF= zeros(M,N);
d0=50;
n=2;
for i=1:M
    for j=1:N
        d=sqrt((i-M/2)^2+(j-N/2)^2);
        HBLPF(i,j)=1./(1+(d/d0).^(2*n)); %2 阶巴特沃斯低通滤波传递函数
    end
end
end

```



```

Fc1=Fc.*HBLPF;    %2 阶巴特沃斯低通滤波
F1=ifftshift(Fc1);
J=ifft2(F1);    %2 阶巴特沃斯低通滤波后的二维离散傅里叶逆变换
imshow(real(J,[]);title('2 阶巴特沃斯低通滤波后的图像')
figure,imshow(HBLPF);title('2 阶巴特沃斯低通滤波的传递函数')

```

(3) 频域高斯低通滤波

```

%频域高斯低通滤波
clear all;
clc;
f = imread('boat.bmp'); % 读取图像
F=fft2(f);
Fc=fftshift(F);
[M N]=size(f); % 取图像大小
HGLPF= zeros(M,N);
d0=50;
for i=1:M
    for j=1:N
        d=sqrt((i-M/2)^2+(j-N/2)^2);
        HGLPF(i,j)=exp(-(d.^2)/(2*d0.^2)); % 高斯低通滤波器传递函数
    end
end
Fc1=Fc.*HGLPF; % 频域高斯低通滤波
F1=ifftshift(Fc1);
J=ifft2(F1); % 频域高斯低通滤波后的二维离散傅里叶逆变换
imshow(real(J,[]);title('频域高斯低通滤波后的图像')
figure,imshow(HGLPF);title('频域高斯低通滤波的传递函数')

```

(4) 频域理想高通滤波

```
%理想高通滤波器处理
clear all;
clc;
f = imread('boat.bmp');    %读取图像
F=fft2(f);
Fc=fftshift(F);
[M N]=size(f);    %取图像大小
HLPF= zeros(M,N);
d0=50;
for i=1:M
    for j=1:N
        d=sqrt((i-M/2)^2+(j-N/2)^2);    %理想低通滤波器传递函数
        if d<=d0
            HLPF(i,j) = 1;
        end
    end
end
end
HHPF=1-HLPF;    %理想高通滤波器传递函数
Fc1=Fc.*HHPF;    %理想高通滤波
F1=ifftshift(Fc1);
J=ifft2(F1);    %理想高通滤波后的二维离散傅里叶逆变换
imshow(real(J),[]);title('频域理想高通滤波后的图像')
figure,imshow(HHPF);title('频域理想高通滤波的传递函数')
```

(5) 巴特沃斯高通滤波

```
%2 阶巴特沃斯高通滤波
clear all;
clc;
f = imread('boat.bmp');    %读取图像
```

```

F=fft2(f);

Fc=fftshift(F);

[M N]=size(f);    %取图像大小

HBLPF= zeros(M,N);

d0=50;

n=2;

for i=1:M

    for j=1:N

        d=sqrt((i-M/2)^2+(j-N/2)^2);

        HBLPF(i,j)=1./(1+(d/d0).^(2*n));    %2 阶巴特沃斯低通滤波传递函数

    end

end

HBHPF=1-HBLPF;    %2 阶巴特沃斯高通滤波传递函数

Fc1=Fc.*HBHPF;    %2 阶巴特沃斯高通滤波

F1=ifftshift(Fc1);

J=ifft2(F1);    %2 阶巴特沃斯高通滤波后二维离散傅里叶逆变换

imshow(real(J),[]);title('2 阶巴特沃斯高通滤波后的图像')

figure,imshow(HBHPF);title('2 阶巴特沃斯高通滤波的传递函数')

```

（6）频域高斯高通滤波

```

% 频域高斯高通滤波

clear all;

clc;

f = imread('boat.bmp'); % 读取图像

F=fft2(f);

Fc=fftshift(F);

[M N]=size(f);    %取图像大小

HGLPF= zeros(M,N);

d0=50;

```

```

for i=1:M
    for j=1:N
        d=sqrt((i-M/2)^2+(j-N/2)^2);
        HGLPF(i,j)=exp(-(d.^2)/(2*d0.^2)); % 频域高斯低通滤波器传递函数
    end
end

HGHPF=1-HGLPF; % 频域高斯高通滤波器传递函数

Fc1=Fc.*HGHPF; % 频域高斯高通滤波

F1=fftshift(Fc1);

J=ifft2(F1); % 频域高斯高通滤波后二维离散傅里叶逆变换

imshow(real(J),[]);title('频域高斯高通滤波后的图像')

figure,imshow(HGHPF);title('频域高斯高通滤波的传递函数')

```

六、思考题

1. 二维离散傅里叶的可分离性有什么意义？
2. 对图像旋转某个角度，其二维离散傅里叶变换谱有什么变化？
3. 对图像的二维离散傅里叶变换的相位信息，进行二维离散傅里叶逆变换，其结果怎样？解释其原因；对图像的二维离散傅里叶变换谱的实部进行二维离散傅里叶逆变换，其结果怎样？解释其原因。
4. 频域理想低通滤波和频域巴特沃斯低通滤波的图像处理效果有什么不同？解释其原因。

七、实验报告要求

- 1、写出二维离散傅里叶变换的公式，并解释其含义。
- 2、写出 FFT 算法的思想。
- 3、回答思考题。