

## Übersichtsartikel / Review Article

# Das Strömungsfeld um eine rotierende Kugel<sup>1</sup>

Von

O. Sawatzki, Karlsruhe

Mit 51 Abbildungen

(Eingegangen am 21. Mai 1969)

### Zusammenfassung — Summary

**Das Strömungsfeld um eine rotierende Kugel.** Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen ist das Strömungsfeld in der Umgebung einer rotierenden Kugel. Diese soll in einer unendlich ausgedehnten, ruhenden viskosen Flüssigkeit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  um einen Durchmesser rotieren.

Das entstehende stationäre Strömungsfeld ist im allgemeinen rotationssymmetrisch und 3-dimensional, d. h. alle drei Komponenten der Geschwindigkeit sind vorhanden.

Die Untersuchungen erstrecken sich über einen Bereich von REYNOLDS-Zahlen von  $10^0 < Re < 10^7$ . Es sind darin alle unter den angegebenen Voraussetzungen möglichen Strömungsformen, von der sog. schleichenden Strömung ( $Re \rightarrow 0$ ) über die laminare Grenzschicht, den laminar-turbulenten Übergang, bis zur voll ausgebildeten turbulenten Grenzschicht ( $Re \rightarrow \infty$ ), enthalten.

Die Reibungszahl  $\xi_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \cdot \omega_0^2 \cdot R^5}$  wird im Bereich  $2 < Re < 1,5 \cdot 10^6$

experimentell ermittelt und die Geschwindigkeitsprofile der laminaren und turbulenten Grenzschicht gemessen. Mit diesen experimentell gewonnenen Ergebnissen werden die Ergebnisse theoretischer Rechnungen für die laminare Strömung, die laminare Grenzschicht aus der Literatur und einer eigenen ersten Rechnung für die turbulente Grenzschicht verglichen, ihre Genauigkeit überprüft und der Gültigkeitsbereich abgegrenzt. Besondere Aufmerksamkeit wurde der Untersuchung des laminar-turbulenten Übergangs gewidmet. An einer Versuchskugel mit  $D = 240$  mm werden die physikalischen Erscheinungen der gestörten laminaren Grenzschicht mit optischen und elektronischen Methoden studiert.

**Flow Field Around a Rotating Sphere.** The flow field in the vicinity of a rotating sphere is investigated. The sphere rotates with constant angular velocity about a diameter in an infinite viscous fluid at rest. The resulting stationary flow field has, in general, rotational symmetry and is 3-dimensional, i. e., all three velocity components are present.

The investigations cover a range of  $10^0 < Re < 10^7$  containing all possible forms of flow from creeping flow ( $Re \rightarrow 0$ ) to the laminar boundary layer, then through the laminar-turbulent transition regime up to the fully developed turbulent boundary layer ( $Re \rightarrow \infty$ ).

<sup>1</sup> Zur Erlangung der Venia Legendi an der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Universität Karlsruhe genehmigte Habilitationsschrift.

The friction number  $\zeta_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \cdot \omega_0^2 \cdot R^5}$  is determined experimentally in the

range  $2 < \text{Re} < 1,5 \cdot 10^6$ , and the velocity profiles of the laminar and turbulent boundary layer are measured. These experimental results are compared with the theory for laminar flow and laminar boundary layer taken from the literature, and with own first computations for the turbulent boundary layer. Range of validity and errors of the theory are determined. Particular attention is given to laminar-turbulent transition. Using a test sphere with  $D = 240 \text{ mm}$  physical phenomena in the disturbed laminar boundary layer are studied with the aid of optical and electronic methods.

### Formelzeichen

Kugelkoordinaten, zugehörige Geschwindigkeitskomponenten und Schwankungsgeschwindigkeiten.

$r, w, w'$

Radiale Richtung

$\varphi, v, v'$

Azimutale Richtung

$\vartheta, u, u'$

Meridiane Richtung

$c = \sqrt{w^2 + v^2 + u^2}$

Absolutgeschwindigkeit

$Tu = \frac{1}{c'} \sqrt{\frac{1}{3} (u'^2 + v'^2 + w'^2)}$

Turbulenzgrad

$a_0$

Schallgeschwindigkeit

$a, b, c, d, e$

Zahlenwerte bei der Rechnung für die turbulente Grenzschicht

$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + i c_i$

$c_r$

Phasengeschwindigkeit

$c_t$

Anfachungsgröße

$C'$

Störgröße, Schwankungsgröße

$c' = \sqrt{c^2 + w^2}$

Projektion der Absolutgeschwindigkeit in die Tangentialebene

$D$

Durchmesser

$F, G, H$

Dimensionslose Funktionen für die Geschwindigkeiten  $u, v, w$  in der laminaren Strömung

$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$

Dimensionslose Funktionen bei der Rechnung für die turbulente Grenzschicht

$\text{Gö} = \frac{U_\infty \delta_2}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_2}{R}}$

GÖRTLER-Zahl

$\text{Kn} = \frac{\lambda}{R}$

KNUDSEN-Zahl

$M$

Drehmoment

$\text{Ma} = \frac{c}{a_0}$

MACH-Zahl

$n$

Drehzahl der Kugel

$p, P, p'$

Druck, Schwankungsgröße des Druckes

$R$

Kugelradius, Krümmungsradius

$\text{Re} = \frac{R^2 \cdot \omega_0}{\nu}$

REYNOLDS-Zahl

$s = \frac{z}{\delta} = \frac{\zeta}{\lambda}$

Dimensionsloser Wandabstand

$s$	Spaltweite
$t$	Zeit
$Ta = \frac{R_i \omega_0 s}{\nu} \sqrt{\frac{s}{R_i}}$	TAYLOR-Zahl
$U$	Geschwindigkeit in $x$ -Richtung in der Grenzschicht
$U_\infty$	Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht
$U_{\max}$	Maximalgeschwindigkeit im Strömungsfeld
$V$	$y$ -Komponente der Geschwindigkeit
$\dot{V}$	Volumenstrom
$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$W$	$z$ -Komponente der Geschwindigkeit
$w_\delta$	Radialgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten
$z = r - R$	Radialer Abstand von der Kugeloberfläche
$Z, n$	Wirbelzahl
$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$	Maß für die Wellenlänge der Störung
$\alpha = \frac{u}{v}$	Geschwindigkeitsverhältnis
$\alpha = \frac{\tau_{0r\theta}}{\tau_{0r\varphi}}$	Verhältnis der Schubspannungen
$\alpha = \arctg \frac{w}{c'}$	Winkel zwischen der Projektion der Absolutgeschwindigkeit und der Radialkomponente
$\beta_r$	Kreisfrequenz der Störung
$\beta_i$	Anfachungsgröße
$\beta = \beta_r + i\beta_i$	
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\delta_1$	Verdrängungsdicke
$\delta_2$	Impulsverlustdicke
$\varepsilon$	Winkel zwischen Wirbelachse und Breitengrad $\vartheta$
$\zeta_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2} R^5 \omega_0^2}$	Reibungszahl
$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$	Dimensionsloser Wandabstand
$\mu$	Dynamische Viskosität
$\lambda$	Mittlere freie Weglänge der Moleküle
$\lambda = \delta \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$	Dimensionslose Grenzschichtdicke
$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$	Wellenlänge der Störung
$\lambda \text{ (Re)}$	Reibungszahl der Rohrströmung
$A = \frac{\delta_2}{\nu} \frac{dU_x}{dx}$	Formparameter
$\nu$	Kinematische Viskosität
$\varrho$	Dichte

$\sigma$	Dimensionslose Wirbelzahl
$\tau$	Schubspannung
$\tau_0$	Wandschubspannung
$\varphi(y)$	Amplitudenfunktion der Stör-Stromfunktion
$\Phi$	Winkel zwischen $c'$ und Breitengrad $\vartheta$
$\Phi$	Drehwinkel des Hitzdrahtes in einer Ebene $z = \text{const.}$
$\psi(x, y, t)$	Stromfunktion
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\omega_0$	Winkelgeschwindigkeit für $r = R$

## 1. Einleitung

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Strömungsfeld in der Umgebung einer Kugel, die in einer unendlich ausgedehnten, ruhenden viskosen Flüssigkeit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen Durchmesser rotiert.

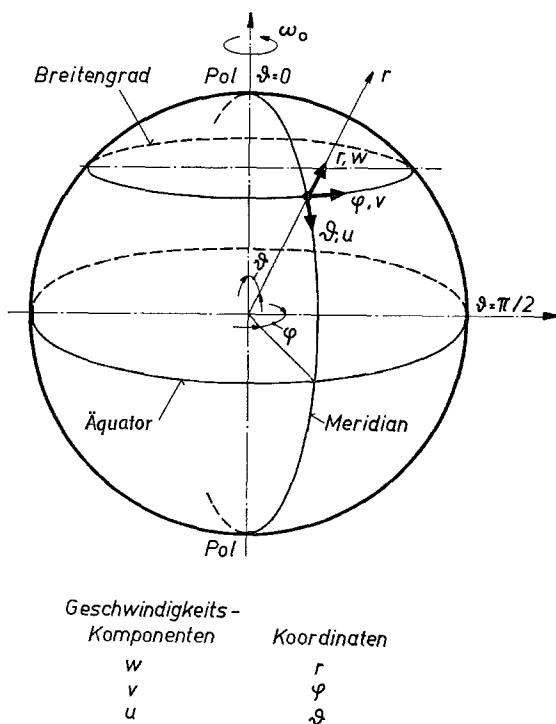


Abb. 1. Koordinaten und Geschwindigkeiten

In Abb. 1 sind die verwendeten Koordinaten angegeben.

Die folgenden Voraussetzungen sollen für alle Untersuchungen gelten:

1. Das Strömungsmedium ist inkompressibel ( $\rho = \text{const.}$ ,  $Ma \ll 1$ ).
2. Bei Gasen soll die mittlere freie Weglänge sehr klein gegen den Kugelradius sein ( $Kn = \lambda/R \ll 1$ ).

3. Die Viskosität ist konstant ( $\mu = \text{const.}$ ).
4. Es werden nur NEWTONsche Flüssigkeiten betrachtet mit  $\tau \sim \mu dv/dz$ .
5. Die Körperoberfläche ist glatt.
6. Die Winkelgeschwindigkeit der Kugel ist konstant ( $\omega_0 = \text{const.}$ ).
7. Die Strömung sei stationär ( $\partial/\partial t = 0$ ).
8. Das Strömungsfeld ist im allgemeinen rotationssymmetrisch ( $\partial/\partial \varphi = 0$ ).

Die Größen des Strömungsfeldes — Druck- und Geschwindigkeitsverteilung — und der Strömungsart — laminare oder turbulente Strömung und gestörte Laminarströmung — hängen unter den angegebenen Bedingungen nur noch von der REYNOLDS-Zahl ab, die hier wie folgt definiert ist:

$$\text{Re} = \frac{R^2 \omega_0}{\nu}.$$

Ziel der Arbeit war es, die Untersuchungen über einen so großen Bereich von Re-Zahlen zu erstrecken, daß alle unter den gemachten Voraussetzungen praktisch vorkommenden Strömungsformen darin enthalten sind.

### 1.1. Das Strömungsfeld

Läßt man die Versuchskugel ( $D = 240 \text{ mm}$ ) in Luft mit einer Drehzahl rotieren, die etwa einer Re-Zahl von  $\text{Re} = 10.000$  entspricht, und bringt

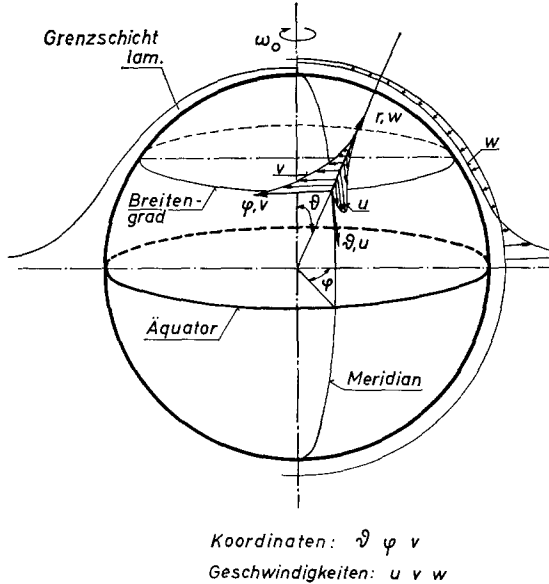


Abb. 2. Das Strömungsbild für  $\text{Re} \approx 10\,000$ .  
Grenzschichtdicke und Geschwindigkeitskomponenten sind nicht maßstäblich gezeichnet

vorsichtig in die Nähe der Oberfläche etwas Rauch, dann sieht man das Folgende: Die Luft, durch den Rauch sichtbar, bewegt sich zunächst auf

die Kugel zu, wird von der Kugeloberfläche mitgerissen und strömt in einer dünnen Schicht unter der Wirkung der Zentrifugalkraft in spiraligen Bahnen zum Äquator. In der Äquatorebene treffen die Luftschichten der beiden Kugelhemisphären aufeinander, werden umgelenkt und in Form eines flachen radialen Drallstrahles von der Kugeloberfläche abgeschleudert. Der abgeschleuderte Volumenstrom wird ersetzt durch einen radialen Zustrom, der auf der gesamten Kugeloberfläche, mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung des Äquators, stattfindet.

Wie schon STOKES andeutete, wirkt die Kugel wie ein „Zentrifugalventilator“.

Abb. 2 zeigt schematisch das Strömungsbild, das sich aus dem geschilderten Experiment ergibt.

Die folgenden Tatsachen lassen sich aus dem Versuch ablesen:

1. Das Strömungsfeld ist 3-dimensional, d. h. alle drei Komponenten der Geschwindigkeit sind vorhanden. Wegen der Rotationssymmetrie hängen alle Größen nur von zwei Koordinaten, nämlich  $r$  und  $\vartheta$ , ab.

2. Für die Re-Zahl von 10.000 ist die Dicke der mitgerissenen Luftschicht  $\delta$  sehr klein gegen den Kugelradius;  $\delta \ll R$ .

3. Der Rauch bleibt bis in die Nähe des Äquators in glatten, geschlossenen Fäden sichtbar. Die Strömung ist also laminar.

4. Das Ausströmen der Flüssigkeit beschränkt sich auf die unmittelbare Umgebung des Äquators.

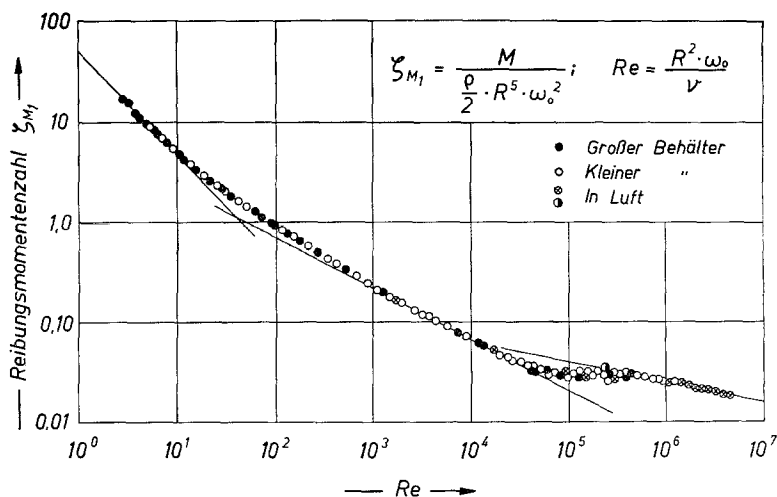


Abb. 3. Gemessene Reibungszahl  $\zeta_M$  (Re)

Bereiche von Re-Zahlen, in denen ähnliche Strömungsverhältnisse herrschen, kann man anschaulich abgrenzen, wenn man das Drehmoment dimensionslos in doppelt-logarithmischem Maßstab über der Re-Zahl aufträgt. Das Diagramm gestattet außerdem eine erste Beurteilung der Genauigkeit theoretischer Rechnungen und eine Abgrenzung ihres Gültigkeitsbereiches.

Die Untersuchungen begannen darum mit der Messung des Drehmomentes. Abb. 3 zeigt das Ergebnis der Messungen, die sich über einen Bereich von etwa sieben Zehnerpotenzen der Re-Zahl erstrecken.

Durch die Meßpunkte lassen sich in bestimmten Bereichen Geraden legen. Man liest ab:

1. Bis  $Re \approx 10$  ist  $\zeta_M \sim Re^{-1}$  (schleichende Strömung).
2. Im Bereich  $1.000 < Re < 40.000$  ist  $\zeta_M \sim Re^{-1/2}$  (laminare Grenzschicht).
3. Im Bereich  $400.000 < Re < 10^7$  ist  $\zeta_M \sim Re^{-1/5}$  (turbulente Grenzschicht).

①  $\rightarrow$  ② Für  $10 < Re < 1.000$  vollzieht sich der Übergang von der laminaren Strömung zur laminaren Grenzschichtströmung.

②  $\rightarrow$  ③ Für  $40.000 < Re < 400.000$  Übergang von der laminaren zur turbulenten Grenzschicht.

## 2. Bereich ①, $0 < Re \lesssim 10$

### 2.1. Schleichende Strömung, $Re \rightarrow 0$

Läßt man die Re-Zahl gegen Null gehen, kann man die Trägheitsglieder streichen. Mit  $Re \rightarrow 0$  wird dann auch  $u = w = 0$ . Weiter sei angenommen, daß der Druck im ganzen Strömungsraum konstant ( $p = \text{const.}$ ) und  $\omega$  nur eine Funktion des Radiusvektors allein ist ( $\omega = \omega(r)$ ).

Mit einem geeigneten Ansatz erhält LAMB [33] nach Einsetzen und Umformen aus den vollen NAVIER-STOKESSchen Gleichungen die folgende Differentialgleichung für  $\omega(r)$

$$r \frac{d\omega}{dr} + 3\omega = \text{konst.} \quad (2.1)$$

Die Lösung lautet

$$\omega = \frac{A}{r^3} + B. \quad (2.2)$$

Mit den Randbedingungen  $r \rightarrow \infty, \omega = 0$

$$r = R, \omega = \omega_0$$

wird

$$\omega = \omega_0 \frac{R^3}{r^3} \quad (2.3)$$

und

$$v = \omega_0 \frac{R^3}{r^2} \sin \vartheta, \quad (2.4)$$

wobei  $\omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit auf der Kugeloberfläche für  $r = R$  ist.

Die Stromlinien sind konzentrische Kreise um die Rotationsachse in Ebenen  $r \sin \vartheta = \text{const.}$  parallel zur Äquatorebene. Die Umfangsgeschwindigkeit ist proportional  $r^{-2}$ , also

$$v = \frac{\text{konst.}}{r^2}.$$

Sie fällt stärker ab als die Umfangsgeschwindigkeit des Potentialwirbels und der laminaren Strömung um den unendlich langen Kreiszylinder, der um seine Achse rotiert. Hier ist

$$v = \frac{\text{konst.}}{r}.$$

Das Reibungsmoment wird dann für die gesamte Kugeloberfläche

$$M = -4 \cdot \pi \cdot R^3 \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \tau_{0r\varphi} d\vartheta. \quad (2.5)$$

Mit

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (2.6)$$

wird

$$M = \frac{16}{3} \pi R^3 \mu [2\omega_0 + \omega_0] = \frac{16}{3} \pi R^3 \mu \cdot \omega_0 + \frac{8}{3} \pi R^3 \omega_0 \mu \quad (2.7)$$

oder die Reibungszahl

$$\zeta_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} R^5 \omega_0^2} = \frac{32}{3} \pi \text{Re}^{-1} + \frac{16}{3} \pi \text{Re}^{-1} \quad (2.8)$$

oder

$$\zeta_M = \frac{16\pi}{\text{Re}}. \quad (2.9)$$

## 2.2. Übergang ① → ②, $10 < \text{Re} < 1.000$

### *Übergang von der schleichenden Strömung zur laminaren Grenzschicht*

Mit wachsender Re-Zahl können die Trägheitsglieder nicht mehr vernachlässigt werden. Eine Integration der vollen NAVIER-STOKES-Gleichungen ist auch heute noch sehr schwierig.

Man kann jedoch die STOKESsche Lösung erweitern, wenn man nicht alle Trägheitsglieder streicht. Die Komponenten  $u$  und  $w$  sind dann auch nicht mehr als klein zu vernachlässigen. Die Kugel wirkt dann nach einer Bemerkung von STOKES wie ein Zentrifugalventilator, der am Pol Flüssigkeit ansaugt und am Äquator abschleudert, wie es anschaulich in der Einleitung gezeigt wurde.

KHAMRUI [11] erweitert die STOKES-Lösung und setzt die Komponenten der Geschwindigkeit wie folgt an:

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{\omega_0 R^4}{8 r^3} (3 \cos \vartheta - 1) \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 \text{Re} \\ u &= \frac{\omega_0 R^4}{4 r^3} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \text{Re} \\ v &= \frac{R^3 \omega_0}{r^2} \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

und ebenfalls  $p = \text{const.}$



In bezug auf das Reibungsmoment bringt diese Lösung keine Erweiterung, da die Umfangskomponente die gleiche ist wie bei LAMB.

Die Radialkomponente  $w$  hat einen Vorzeichenwechsel bei  $\vartheta = 54^\circ 45'$  durch das Glied  $(3 \cos^2 \vartheta - 1)$ .

THOMAS und WALTERS [25] geben für nicht-NEWTONSche Flüssigkeiten einer speziellen Klasse eine Lösung an, die ebenfalls alle Komponenten der Geschwindigkeit enthält und die Veränderlichkeit des Druckes berücksichtigt. Die Lösung für die NEWTONSche Flüssigkeit ist darin enthalten.

Für die Komponenten der Geschwindigkeit setzt er Potenzreihen in  $\text{Re}^2$  an und bricht nach dem 1. Glied ab.

Mit

$$U = \frac{\nu}{R} \cdot u, \quad W = \frac{\nu}{R} \cdot w, \quad V = R \cdot \omega_0 \cdot v, \quad p = \varrho \cdot g \cdot r \cos \vartheta + p^* \frac{\varrho \cdot \nu^2}{R^2}$$

$$r = R \cdot r_1$$

wird

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\nu}{R} [\text{Re}^2 \cdot w_1 + \text{Re}^4 \cdot w_2 + \dots] \\ U &= \frac{\nu}{R} [\text{Re}^2 \cdot u_1 + \text{Re}^4 \cdot u_2 + \dots] \\ V &= R \omega_0 \left[ \frac{\sin \vartheta}{r_1^2} + \text{Re}^2 \cdot v_1 + \text{Re}^4 \cdot v_2 + \dots \right] \\ p - \varrho \cdot g \cdot r \cos \vartheta &= \frac{\varrho \cdot \nu^2}{R^2} [\text{Re}^2 \cdot p_1^* + \text{Re}^4 p_2^* + \dots] \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Für die Reibungszahl erhalten sie den LAMBSchen Wert mit einem Korrekturglied:

$$\zeta_M = \frac{16 \pi}{\text{Re}} \left[ 1 + \frac{\text{Re}^2}{1200} \right]. \quad (2.12)$$

OVSEENKO [18] hat die Strömung im Zwischenraum zweier konzentrischer Kugeln behandelt, von denen die innere um einen Durchmesser rotiert. Für  $R_2 \rightarrow \infty$ , also die freie Kugel, erhält er durch Mitnahme von  $\text{Re}^4$  die folgende Reibungszahl:

$$\zeta_M = \frac{16 \pi}{\text{Re}} \left[ 1 + \frac{\text{Re}^2}{1200} - \frac{\text{Re}^4}{1326000} \right]. \quad (2.13)$$

Abb. 4 gestattet den Vergleich der drei theoretischen Lösungen mit den gemessenen Werten.

Die Lösung von LAMB, Kurve 1, für  $\text{Re} \rightarrow 0$ , mit der sehr einfachen Rechnung gewonnen, fällt praktisch bis  $\text{Re} \approx 10$  mit der gemessenen Kurve zusammen. Sie ist also viel weiter gültig als es die Vernachlässigungen erwarten lassen.

Die Ergebnisse von THOMAS und WALTERS [25], Kurve 2, und OVSEENKO [18], Kurve 3, mit sehr großem Aufwand erzielt, erweitern das Ergebnis in bezug auf das Reibungsmoment nur unwesentlich.

Sie geben aber die Möglichkeit, das Stromlinienbild zu berechnen. Abb. 5 zeigt die Projektion der Teilchenbahnen auf eine Ebene, die die Rotationsachse enthält (nach der Rechnung von THOMAS und WALTERS [25]).

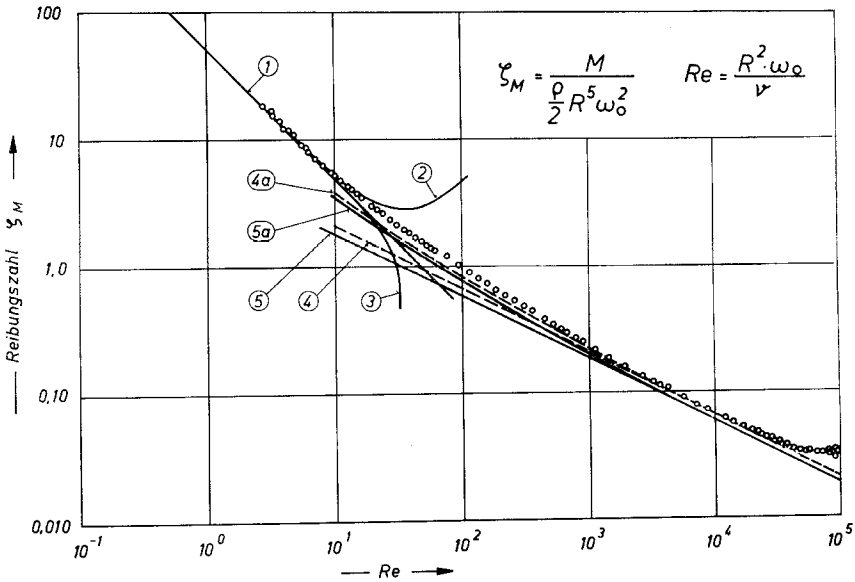


Abb. 4.  $\zeta_M(Re)$  für die laminare Strömung

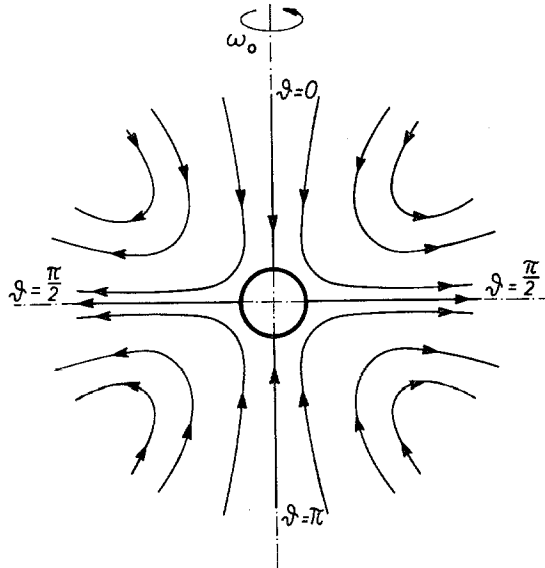


Abb. 5. Stromlinien um die rotierende Kugel nach [25]

Die Projektionen der Teilchenbahnen oder Stromlinien in Ebenen parallel zur Äquatorebene sind jetzt nicht mehr konzentrische Kreise, sondern Spiralen.

### 3. Bereich ②, $1.000 < \text{Re} < 40.000$

#### Laminare Grenzschicht

Die angegebenen Ergebnisse theoretischer Rechnungen für kleine Re-Zahlen haben gezeigt, daß das Übergangsgebiet  $1 \rightarrow 2$ , also für  $\text{Re} > 10$ , nur durch eine vollständige Lösung der NAVIER-STOKESschen Gleichungen beschrieben werden kann. Darum soll versucht werden, von größeren Re-Zahlen in dieses Gebiet einzudringen, d. h. es sollen die Rechnungen für die laminare Grenzschicht angegeben werden, und es soll untersucht werden, bis zu welchen kleinen Re-Zahlen die Ergebnisse gelten.

Mit den Bedingungen

$$\text{Re} \gg 1 \text{ und } \delta \ll R \text{ und } p = \text{const.}$$

kann man eine Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Glieder der NAVIER-STOKES-Gleichungen durchführen. Es wird dann nach HOWARTH [9]

$$w \sim 0(\delta), \quad u \sim 0(1), \quad v \sim 0(1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r} \sim (\delta^{-1}).$$

Es ergeben sich die folgenden Grenzschichtgleichungen als System partieller Differentialgleichungen (quadratisch und 2. Ordnung):

$$\begin{aligned} \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{R} \text{ctg } \vartheta &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \\ \frac{u}{R} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{R} \text{ctg } \vartheta &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{R} \text{ctg } \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Randbedingungen sind gegeben durch das Haften der Flüssigkeit an der Wand und das Verschwinden aller Störungen im Unendlichen.

Für

$$\begin{aligned} r = R \quad u = 0 \quad w = 0 \quad v &= R \omega_0 \sin \vartheta \\ r = \infty \quad u = 0 \quad v &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Abgesehen von den Termen, die von der Krümmung der Oberfläche herühren, sind es die gewöhnlichen 2-dimensionalen Grenzschichtgleichungen für  $u$  und  $w$ .  $v$  ist bestimmt durch eine Konvektionsgleichung. Es sei angemerkt, daß der Term  $v^2/R \cotg \vartheta$  in 3.1 in Wirklichkeit einen beachtlichen Druckgradienten darstellt, der auf die Grenzschicht im wesentlichen beschleunigend wirkt, da er im Bereich  $0 < \vartheta < \pi/2$  positiv ist.

Es ist anzunehmen und durch das geschilderte Strömungsbild einleuchtend, daß die angegebenen Gleichungen das Strömungsfeld von  $\vartheta = 0$  bis in die unmittelbare Nähe des Äquators zu beschreiben vermögen, im Gebiet um den Äquator, das durch das Zusammentreffen der Grenzschichten beider Hemisphären charakterisiert ist, werden sie versagen, da hier die Voraussetzungen für die Anwendung der Grenzschicht-Theorie

nicht mehr erfüllt sind. Im Experiment wird gezeigt, daß das in Form eines drallbehafteten ebenen Radialstrahles (ebene Wirbelquelle) abströmende Flüssigkeitsvolumen eine Schichtdicke von nicht mehr als zwei Grenzschichtdicken besitzt.

Um das Gleichungssystem 3.1 zu lösen, kann man folgende Potenzreihen für die Geschwindigkeitskomponenten ansetzen: Mit  $z = r - R$  und  $\zeta = z \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$  sollen sein

$$\begin{aligned} u &= R \cdot \omega_0 \cdot \cos \vartheta [\sin \vartheta F_1(\zeta) + \sin^3 \vartheta F_3(\zeta) + \dots], \\ v &= R \cdot \omega_0 [\sin \vartheta G_1(\zeta) + \sin^3 \vartheta G_3(\zeta) + \dots], \\ w &= \sqrt{\nu \cdot \omega_0} [H_1 + \sin^2 \vartheta H_3(\zeta) + \sin^4 \vartheta H_5(\zeta) + \dots]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

HOWARTH [9] benutzt zur Lösung der Grenzschichtgleichungen die Integralbedingung für den Impuls (v. KÁRMÁN, POHLHAUSEN).

Durch Integration der beiden ersten Gleichungen von 3.1 in den Grenzen 0 und  $\delta$  unter Benutzung der Kontinuitätsbedingung und Beachtung, daß für

$$z = 0 \quad \text{auch} \quad u = w = 0$$

und

$$z = \delta \quad u = v = 0$$

ist, wird daraus das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \int_0^\delta u^2 dz + \int_0^\delta (u^2 - v^2) \operatorname{ctg} \vartheta dz &= -R \cdot \nu \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}, \\ \frac{d}{d\vartheta} \int_0^\delta u \cdot v \cdot dz + 2 \int_0^\delta u \cdot v \cdot \operatorname{ctg} \vartheta dz &= -R \cdot \nu \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten setzt er Polynome in  $s = z/\delta = \zeta/\lambda$  wie v. KÁRMÁN im Falle der Scheibe an, mit  $\lambda = \delta \sqrt{\omega_0/\nu}$ .

Da aber auch dieses Gleichungssystem nicht geschlossen lösbar ist, muß er, um zu einer Lösung zu gelangen, das System entkoppeln. Mit der Annahme, die bei der rotierenden Scheibe in etwa berechtigt ist, daß

$$\int_0^\delta u^2 dz \ll \int_0^\delta v^2 dz,$$

können die Glieder mit  $u^2$  gestrichen werden.

Für die dimensionslose Grenzschichtdicke  $\lambda$  ergibt sich durch eine geschlossene Lösung

$$\lambda^4 = \frac{231,5}{\sin^{16/3} \vartheta \cos^{4/3} \vartheta} \int_0^\vartheta \sin^{13/3} \vartheta \cos^{1/3} \vartheta d\vartheta. \quad (3.8)$$

Die Ausrechnung zeigt Abb. 6.

Für  $\vartheta = 0$  beginnt  $\lambda$  mit waagrecht Tangente, da  $d\lambda/d\vartheta|_{\vartheta=0} = 0$  ist, mit dem Wert 2,57, bei  $\vartheta = \pi/2$  geht  $\lambda \rightarrow \infty$ . Eine Nachrechnung zeigt, daß hier die Vernachlässigung von

$$\frac{d}{d\vartheta} \int_0^{\delta} u^2 dz$$

nicht mehr gerechtfertigt ist. Eine vollständige Lösung des Gleichungssystems (3.7) für den Fall der turbulenten Grenzschicht zeigt, daß  $\lambda$  bei  $\pi/2$  gegen einen endlichen Wert strebt.

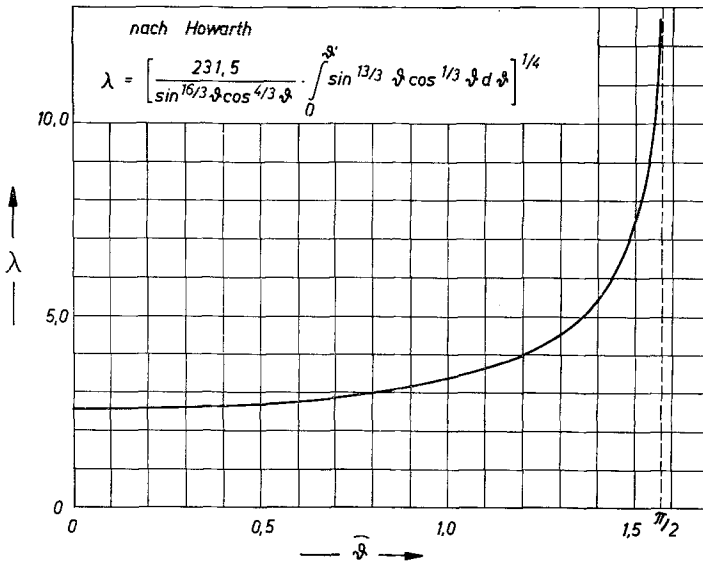


Abb. 6. Dimensionslose Grenzschichtdicke über dem Breitengrad  $\vartheta$

Für kleine Winkel  $\vartheta$  läßt sich ein Vergleich mit den Ergebnissen an der Scheibe führen. Es ist

	$\lambda$	$\frac{\partial u}{\partial z} \Big _0$	$\frac{\partial v}{\partial z} \Big _0$
HOWARTH .....	2,57	0,61	— 0,58
BANKS .....	~ 5,2		
RAJESWARI .....	4,58	0,44	— 0,6
v. KÁRMÁN .....	2,79	0,54	— 0,54
COCHRAN .....	~ 5,2	0,51	— 0,62

Die Profile sind für alle  $\vartheta$  ähnlich. Aus der Kontinuitätsbedingung und dem Ausdruck für  $u$  wird die Radialgeschwindigkeit  $w_\delta$  am Rande der Grenzschicht bestimmt. Es ist

$$w_\delta = -0,0184 \sqrt{\nu \cdot \omega_0} \left[ \frac{173,6 - 2 \cos^2 \vartheta \cdot \lambda^4}{\lambda} \right]. \quad (3.9)$$

Sie ist negativ für alle Winkel  $\vartheta$ , d. h. es findet ein Zustrom auf der ganzen Oberfläche statt.

Obgleich für  $\vartheta = \pi/2$   $u = 0$  wird, hat das Integral  $\int_0^\delta u \, dz$  für  $\vartheta = 2/\pi$  einen endlichen Wert, und zwar

$$\int_0^\delta u \, dz = 0,497 \sqrt{\omega_0 \cdot \nu} \cdot R.$$

Aus Kontinuitätsgründen muß sein

$$\begin{aligned} V = 2 \pi \cdot R \int_0^\delta u \, dz \Big|_{\vartheta=\pi/2} &= - 2 \pi \cdot R^2 \int_0^{\pi/2} w_\delta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &0,497 \sqrt{\nu \cdot \omega_0} \cdot R^2 \cdot 2 \pi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da HOWARTH [9] das Drehmoment nicht explizit angibt, wurde es, wie in der Grenzschichttheorie üblich, wie folgt errechnet. Nach Gl. (2.5) ist

$$M = - 4 \pi \cdot R^3 \mu \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot \tau_{0z\varphi} \cdot d\vartheta \quad (3.11)$$

mit

$$\tau_{0z\varphi} = \mu \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Damit wird

$$\zeta_M = \frac{M}{R^3 \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{\varrho}{2}} = \frac{5,95}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (3.12)$$

Dieser Wert ist als Kurve 5 in Abb. 4 eingetragen.

Die Abweichung von der gemessenen Kurve mit

$$\zeta_M \cong \frac{6,8}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (3.13)$$

beträgt im Bereich 2, also für  $\text{Re} \geq 3.000$ , etwa 13%.

Bei  $\text{Re} = 100$  ist der gemessene Wert  $\zeta_M = 0,95$  und der Wert nach HOWARTH  $\zeta_M = 0,595$ . Der Fehler beträgt  $\approx 40\%$ .

Einen besseren Wert und damit einen guten Anschluß an die Werte von LAMB und WALTER [25] erhält man für das Übergangsgebiet, wenn man, trotz der Rechnung mit den Grenzschichtvereinfachungen, zur Berechnung des Drehmomentes die Schubspannung nach dem exakten Ausdruck aus dem Spannungstensor benutzt. Es wird dann nach Gl. (2.6) der Ausdruck für die Wandschubspannung

$$\tau_{0z\varphi} = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{z} \right]_{z=0} \quad (3.14)$$

und die Reibungszahl

$$\zeta_M = \frac{5,95}{\sqrt{\text{Re}}} + \frac{16}{3} \pi \cdot \frac{1}{\text{Re}}. \quad (3.15)$$

Der zweite Summand ist natürlich der gleiche wie bei LAMB, da die Geschwindigkeit an der Wand immer  $v = R \cdot \omega_0 \sin \vartheta$  ist. Der Ausdruck ist ebenfalls in Abb. 4 als Kurve 5a eingetragen.

Für  $\text{Re} = 100$  ist  $\zeta_{M\text{gem}} = 0,95$  und der neue Wert  $\zeta_M = 0,763$ , und damit der Fehler  $\sim 20\%$ .

RAJESWARI [19] hat für die Geschwindigkeitskomponenten etwas geänderte Ansätze gewählt. Zur Lösung des Gleichungssystems 3.1—3.3 benutzt sie für jede Ordnung  $n$  das Verfahren von POHLHAUSEN. Für die Funktionen  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $H_1$  bekommt sie bessere Werte als HOWARTH (für die Lösung für kleine  $\vartheta$ ). Die Grenzschichtdicke ist auf der gesamten Kugeloberfläche konstant, was nicht der Wirklichkeit entspricht (Kurve 2 in Abb. 7).

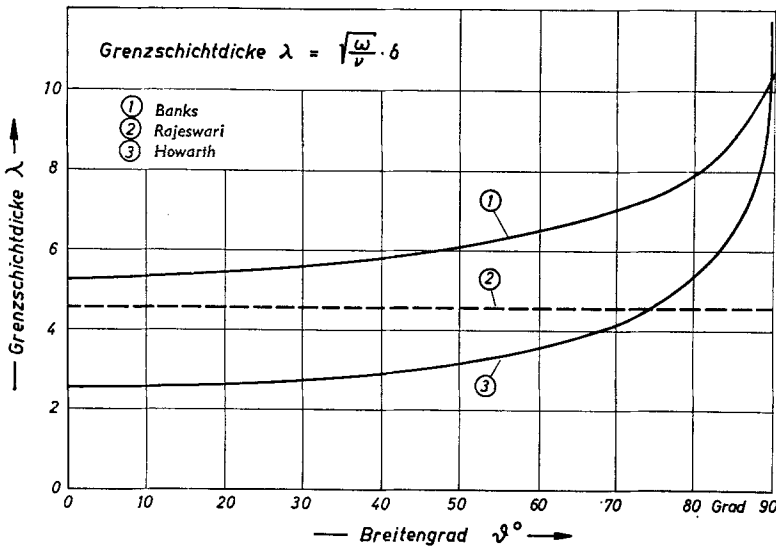


Abb. 7. Grenzschichtdicke in Abhängigkeit von  $\vartheta$

BANKS hat in seiner Dissertation [1] das Gleichungssystem 3.1—3.3 durch Reihenentwicklung und numerische Integration gelöst, und zwar bis zur Ordnungszahl  $n = 7$ . Für die Reibungszahl erhält er

$$\zeta_M = \frac{6,54}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (3.16)$$

Sie ist in Abb. 4, die das laminare Gebiet vergrößert wiedergibt, als Kurve 4 eingetragen und wiederum als Kurve 4a der Wert

$$\zeta_M = \frac{6,54}{\sqrt{\text{Re}}} + \frac{16}{3} \pi \cdot \frac{1}{\text{Re}}. \quad (3.17)$$

Die Abweichung von der gemessenen Kurve beträgt im Grenzschichtbereich für  $Re \geq 3.000$  nur noch 4%. Bei  $Re \approx 100$  beträgt die Abweichung  $\approx 13\%$ , während die Grenzschichtdicke hier etwa  $\delta = 0,5 R$  beträgt.

In Abb. 7 sind die Kurven für die Grenzschichtdicke  $\delta$  der verschiedenen Autoren eingetragen und mit den Meßwerten verglichen. Zur Definition der Grenzschichtdicke ist zu bemerken, daß für die Lösungen, die bis ins Unendliche integriert werden, der Wert für  $\delta$  genommen wird an der Stelle, an der  $v$  weniger als 1% von der ungestörten Strömung abweicht.

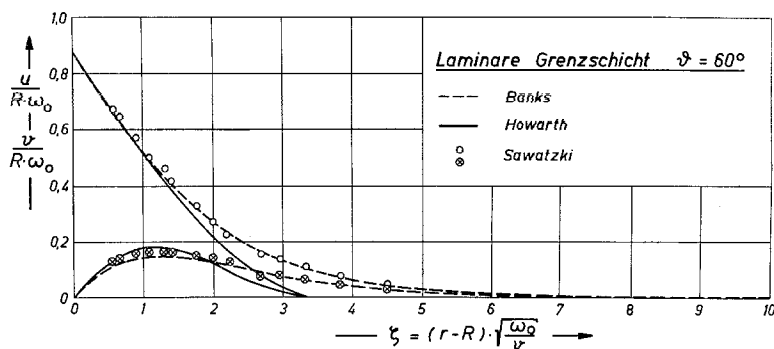


Abb. 8. Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht für  $\vartheta = 60^\circ$

Man sieht, daß die Werte von BANKS im ganzen Kugelbereich gut mit den Messungen übereinstimmen, für kleine Werte  $\vartheta$  zeigt RAJESWARI ebenfalls eine gute Übereinstimmung. Die Kurve von HOWARTH ist der Tendenz nach gut, gibt aber genau wie im Falle der Scheibe die Lösung von v. KÁRMÁN zu kleine Werte für die Grenzschichtdicke  $\delta$  an.

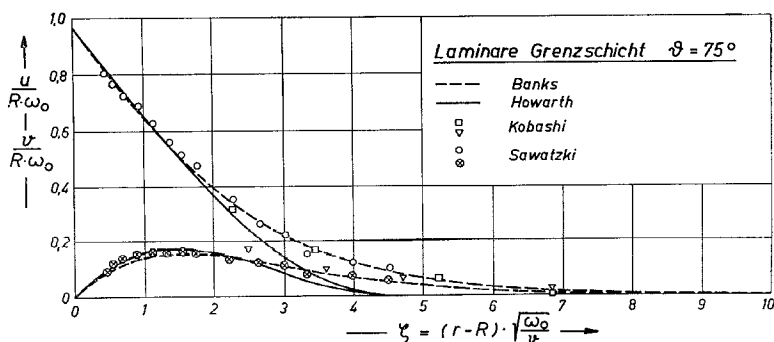


Abb. 9. Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht für  $\vartheta = 75^\circ$

Das gleiche gilt für die in Abb. 8 und 9 verglichenen Geschwindigkeitsverteilungen als Funktion des dimensionslosen Kugelabstandes.

Die Ergebnisse von BANKS zeigen eine überraschend gute Übereinstimmung mit den Meßwerten.



#### 4. Bereich ② → ③, $40.000 < Re < 400.000$

Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömungsform

Abb. 10 zeigt die Reibungszahl  $\zeta_M(Re)$  im Übergangsgebiet.

Bei  $Re = 40.000$  verlassen die Meßpunkte deutlich sichtbar die Gerade für die laminare Grenzschicht mit der Steigung  $1/\sqrt{Re}$ . Bei  $Re \approx 400.000$  ordnen sich die Meßpunkte wieder sehr gut auf der Geraden für die turbulente Grenzschicht mit der Steigung  $1/\sqrt[5]{Re}$ .

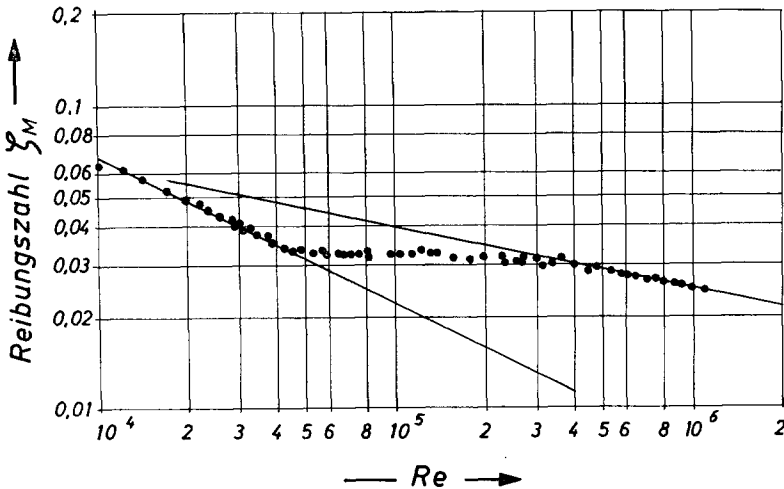


Abb. 10. Die Reibungszahl  $\zeta_M(Re)$  im Übergangsgebiet laminar-turbulent

In diesem Bereich,  $40.000 < Re < 400.000$ , vollzieht sich auf der Kugeloberfläche der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömungsform in der Grenzschicht.

Dieses Übergangsgebiet ist sowohl in theoretischer als auch experimenteller Hinsicht eines der interessantesten, aber auch schwierigsten Probleme der Strömungslehre. Es stellt sich als Stabilitätsproblem der laminaren Strömungsform dar. Für eine einfache 2-dimensionale Strömung ist es gelungen, mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen eine vom Experiment gut bestätigte Stabilitätstheorie aufzubauen.

Die im folgenden beschriebenen Untersuchungen an der rotierenden Kugel sollen einen Beitrag liefern zur Klärung der Frage nach möglichen Formen der Instabilität einer 3-dimensionalen laminaren Strömung.

##### 4.1. Lage der instabilen Zone

Bringt man die Versuchskugel auf eine Drehzahl, die einer  $Re$ -Zahl im Übergangsgebiet entspricht, etwa  $n = 2.000$  U/min, und bewegt einen Hitzdrahtgeber längs eines Meridians in einem kleinen Abstand  $z$  von der Kugeloberfläche von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = 90^\circ$ , also vom Pol zum Äquator, dann lassen sich drei relativ scharf begrenzte Bereiche angeben. Gibt

man das Signal des Hitzdrahtes auf einen Lautsprecher und einen Oszillographen, dann erscheint das Folgende:

1. Von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta \approx 53^\circ$  hört man nichts; auf dem Schirm des Oszillographen sieht man eine gerade Linie, Abb. 11.

2. Beim Überschreiten des Breitengrades  $\vartheta = 53^\circ$  erscheint auf dem Oszillographen eine fast reine Sinusschwingung (oder eine modulierte Form), im Lautsprecher hört man einen fast reinen Ton von konstanter Frequenz, dessen Amplitude ebenso wie die Sinusschwingung bis zum Breitengrad  $\vartheta = 64^\circ$  ansteigt, ohne daß die Frequenz sich ändert, Abb. 11 und 12.

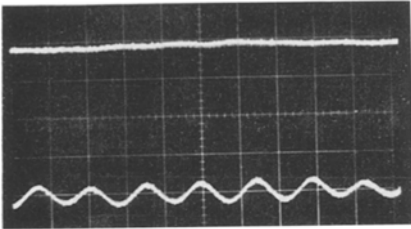


Abb. 11. Laminare Strömung und Beginn des Überganges

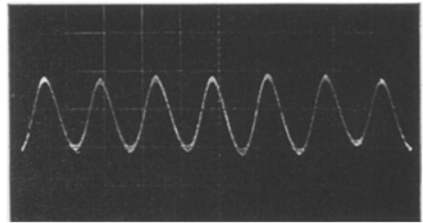


Abb. 12. Übergang

3. Von  $\vartheta \approx 64^\circ$  an brechen im Oszillogramm die periodischen Schwingungen plötzlich in die hochfrequenten, unregelmäßigen Schwankungen eines weißen Rauschens auf. Im Lautsprecher ertönt das typische Donnergeräusch (turbulent roar) einer turbulenten Strömung, Abb. 13.

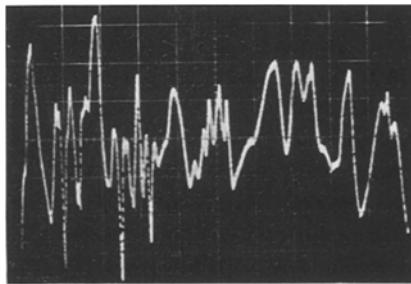


Abb. 13. Turbulente Strömung

Führt man diesen Vorgang für alle Re-Zahlen des Übergangsgebietes durch, dann erhält man eine Art Stabilitätsdiagramm für die Versuchskugel nach Abb. 14.

Über der Drehzahl, oder allgemeiner über der Re-Zahl, ist jeweils der Winkel  $\vartheta$  des Beginns des instabilen und des turbulenten Gebietes aufgetragen.

Die Punkte sind durch Kurvenzüge verbunden, welche die drei Bereiche voneinander trennen.

Bei Extrapolation zu kleineren und größeren Re-Zahlen erkennt man

folgendes: Für  $Re < 40.000$  ist die Strömung auf der ganzen Oberfläche laminar.

Die Kurve des Umschlags hat bei  $Re = 65.000$  den Äquator erreicht. Für große  $Re$ -Zahlen geht sie asymptotisch gegen den Breitengrad  $\vartheta \approx 36^\circ$  und die Kurve des Beginns der Instabilität gegen den Breiten-grad  $\vartheta \approx 32^\circ$ . Unterhalb dieses Breitengrades scheint die Strömung auch für sehr große  $Re$ -Zahlen laminar zu bleiben.

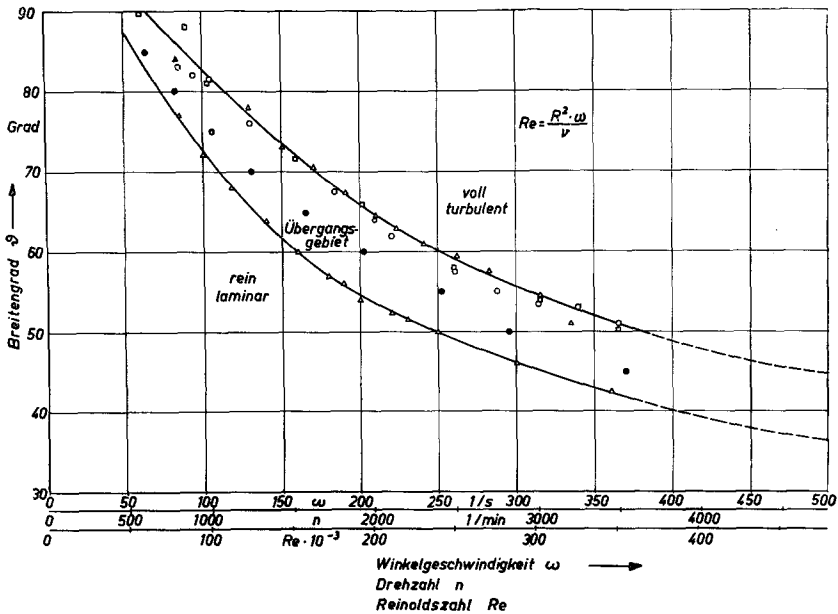


Abb. 14. Stabilitätsdiagramm der Versuchskugel

#### 4.2. Reibungszahl im Übergangsgebiet

Das Stabilitätsdiagramm, Abb. 14, gestattet eine Interpretation der Reibungszahl im Übergangsgebiet und damit eine Abschätzung des Energiebedarfs zum Aufbau des Störungssystems im instabilen Bereich, wenn man die theoretisch ermittelten Reibungszahlen für die laminare und turbulente Grenzschicht hinzunimmt. Ein Beispiel soll diese Behauptung veranschaulichen.

Für  $Re = 65.000$  ist  $\zeta_M = 0,0325$ , wäre die Strömung bis zum Äquator laminar, würde sein  $\zeta_{M_{lam}} = 0,0275$ .

Nach Abb. 14 liegt bei  $Re = 65.000$  der Beginn des instabilen Gebietes bei  $\vartheta = 81^\circ$  und erstreckt sich bis theoretisch  $90^\circ$ . Das Störungssystem in diesem Gebiet erhöht also das dimensionslose Drehmoment von  $\zeta_{M_{lam}} = 0,0275$  auf  $\zeta_M = 0,0325$  um  $\zeta_{M_{inst}} = 0,005$ ; das ist eine um  $\approx 16\%$  größere Reibungszahl.

Für eine größere  $Re$ -Zahl benutzt man die beiden Diagramme Abb. 15 und 16. Hier ist in 15 aus der vollständigen Lösung für die turbulente Grenzschicht des nächsten Abschnittes durch graphische Integration der

Wert des dimensionslosen Momentes von  $\vartheta = 90^\circ$  bis zu  $\vartheta$  integriert und über dem Breitengrad aufgetragen.

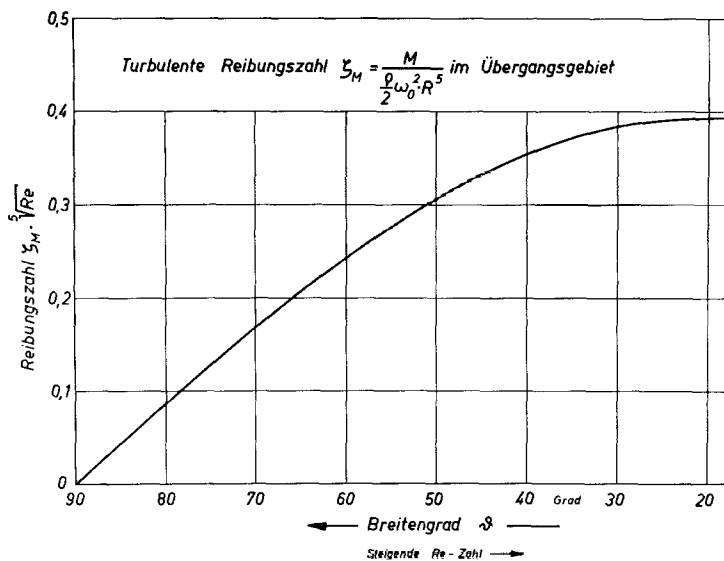


Abb. 15. Die Reibungszahl der turbulenten Grenzschicht integriert von  $\vartheta = 90^\circ$  bis  $\vartheta$

In Abb. 16 ist für die laminare Grenzschicht aufgrund der Lösung von BANKS [1] der Wert für  $\zeta_M$  von  $\vartheta = 0$  zu größeren Werten  $\vartheta$  aufgetragen. Für eine Re-Zahl von  $Re = 80.000$  liest man aus Abb. 14 ab.

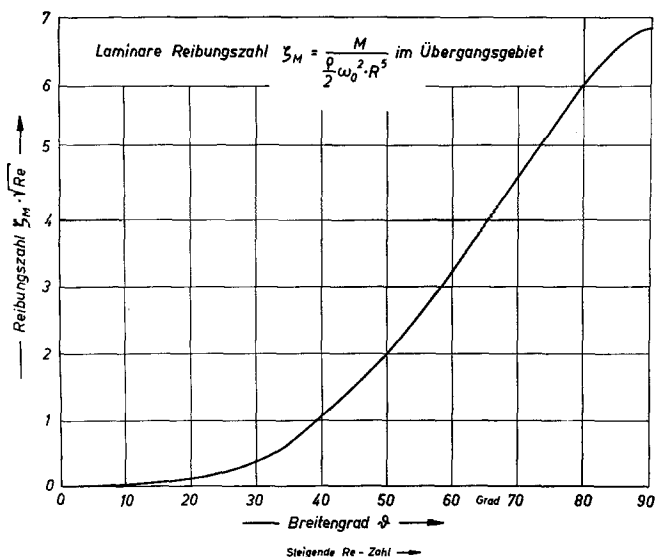


Abb. 16. Die Reibungszahl der laminaren Grenzschicht integriert von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta$

Beginn der instabilen Zone und Ende der laminaren Grenzschicht,  $\vartheta \approx 77,5^\circ$ .

Ende der instabilen Zone und Beginn der turbulenten Grenzschicht,  $\vartheta \approx 86^\circ$ .

Für  $\vartheta = 90^\circ$  bis  $\vartheta = 86^\circ$  ist  $\zeta_{M_{\text{turb}}} = 0,003$  (Abb. 15).

Für  $\vartheta = 0^\circ$  bis  $\vartheta = 86^\circ$  ist  $\zeta_{M_{\text{lam}}} = 0,025$  (Abb. 16).

Da der gemessene Wert  $\zeta_M = 0,0315$  beträgt, wird durch Energieübertragung von der laminaren Hauptströmung auf die Störbewegung die Reibungszahl um  $\zeta_M = 0,0026$  vergrößert. Dieser Wert ist kleiner als der Wert für  $Re = 65.000$ , da die Reibungskraft in Umfangsrichtung mit einem kleineren Hebelarm multipliziert wird.

### 4.3. 3-dimensionale Grundströmung

Ergebnisse über Stabilitätsuntersuchungen einer 3-dimensionalen Grundströmung sind nur sehr spärlich vorhanden. Es ist im wesentlichen eine Arbeit, die vor allem in bezug auf die vorliegende Untersuchung bemerkenswert ist. Es ist die sowohl experimentelle als auch theoretische Arbeit von GREGORY, STUART und WALKER [7] die über Stabilität der Strömung, wie sie sich in der Umgebung der rotierenden Scheibe einstellt. Dieses 3-dimensionale Strömungsfeld hat einige Besonderheiten gegenüber dem der rotierenden Kugel, die eine Erleichterung bei der theoretischen Behandlung versprechen:

1. Die rotierende Wand ist eben.
2. Grenzschichtdicke und Geschwindigkeitsprofil sind für konstantes  $\sqrt{\nu/\omega}$  auf der ganzen Scheibe konstant, also unabhängig vom Radius.
3. Es existiert eine exakte Lösung der NAVIER-STOKESschen Gleichungen.

Die mit Hilfe der China-Clay-Methode (siehe Kapitel 4.4.5) gewonnenen Fotos zeigen auf der Scheibe wie bei der Kugel drei gut abgegrenzte Bereiche. Das Übergangsgebiet beginnt bei  $r_{1\text{kr}}$ . Die zugehörige Re-Zahl  $Re = r_{1\text{kr}}^2 \omega / \nu$  ist für alle Geschwindigkeiten konstant und beträgt im Mittel  $Re_{1\text{kr}} = 182.000$ . Der Umschlag liegt bei  $r_{2\text{kr}}$  und ergibt wieder eine kritische Re-Zahl, die für alle Drehzahlen konstant etwa  $Re_{2\text{kr}} = 282.000$  beträgt.

Im Übergangsgebiet zwischen den Radien  $r_{1\text{kr}}$  und  $r_{2\text{kr}}$  zeigen sich in der Oberfläche Spuren in der Aluminiumoxid-Schicht in der Form logarithmischer Spiralen, deren Radiusvektor in Drehrichtung abnimmt nach der Gleichung

$$r = A e^{-\Phi/\vartheta}.$$

Der Winkel mit der Umfangsrichtung  $\varepsilon$  beträgt etwa  $\varepsilon \approx 14^\circ$ . Entlang den angedeuteten Spuren muß die Schubspannung sehr viel höher sein als im übrigen Gebiet (siehe Abb. 19). Aus Versuchen mit GÖRTLER-Wirbeln kann man schließen, daß diese Spuren die axiale Richtung eines Wirbelsystems angeben, das relativ zur bewegten Oberfläche in Ruhe ist. Die Zahl der Wirbel am Umfang scheint ebenfalls konstant zu sein und beträgt im Rahmen der möglichen Genauigkeit im Mittel 30 (28–31).

Die Frequenzanalyse des Signals eines innerhalb der Grenzschicht

raumfest angeordneten Mikrofons zeigt, daß neben einem scharfen Maximum ein Bereich von Amplituden verschiedener Frequenzen existiert. Einige Frequenzen werden festen Wirbeln zugeschrieben, während andere zu Wellen gehören sollen, die zur Oberfläche eine Relativgeschwindigkeit besitzen.

STUART zeigt theoretisch, daß in einer 3-dimensionalen Strömung Störungen möglich sind, die den fortschreitenden Wellen nach SCHLICHTING-TOLLMIESEN ähneln und, aber in geringerem Maße, den stationären Wirbeln nach TAYLOR-GÖRTLER.

Er zeigt weiter, daß in begrenzten Bereichen einer 3-dimensionalen Strömung im Rahmen gewisser Näherungen die Geschwindigkeitskomponente in Fortschrittsrichtung der Störung zu Stabilitätsbetrachtungen als eine 2-dimensionale Strömung angesehen werden kann. Es existiert hier eine ganze Klasse von Geschwindigkeitsprofilen in verschiedenen Richtungen, die Instabilität hervorrufen können. Für diese Profile wird die reibungslose Störungsgleichung diskutiert.

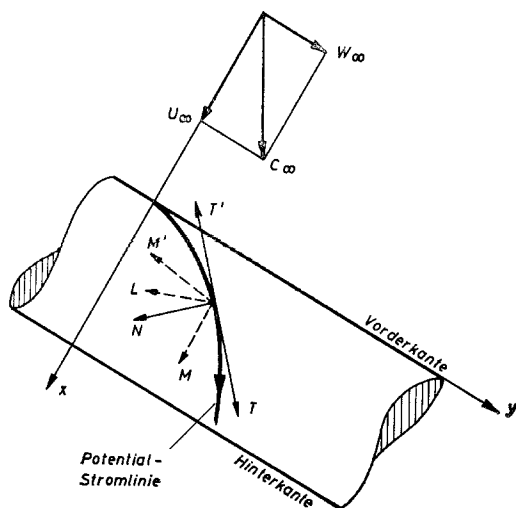


Abb. 17. Der schiebende unendlich lange Zylinder

Das Wendepunkt-Kriterium wird auf Profile mit zwei kritischen Punkten erweitert. Es zeigt sich, daß eine neutrale Störung stationär zur Wand erzeugt werden kann von einem Profil mit Vorzeichenwechsel und Wendepunkt in der kritischen Schicht, für die die örtliche Geschwindigkeit und die Fortschrittsgeschwindigkeit der Störung gleich sind, in diesem Falle also  $U = 0$  und  $c_r = 0$ .

Diese Vorstellung möge an einem Beispiel erläutert werden, und zwar an der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht eines schiebenden, unendlich langen Zylinders. Die Grenzschicht gehört also zu einer Potentialströmung mit einer konstanten Geschwindigkeitskomponente parallel zur Vorderkante und einer senkrecht dazu, die mit dem Abstand linear anwächst. In irgendeinem Punkt des Feldes mögen diese in eine Kompo-

nente  $T$  parallel und eine Komponente  $N$  senkrecht zur Potentialstromlinie außerhalb der Grenzschicht zerlegt werden. Die Tangentialkomponente  $T$  hat dann die gewöhnliche Form eines Grenzschichtprofils, während die Normalkomponente  $N$  an der Wand und am Rande der Grenzschicht zu Null wird. Für irgendeine andere Richtung ist das Geschwindigkeitsprofil eine Kombination der beiden Extremfälle. Abb. 17 zeigt das passende Koordinatensystem.

$T$  gibt die positive tangentielle Richtung an,  $T'$  die dazu entgegengesetzte,  $N$  die Normalenrichtung.  $M$  bedeutet ein Profil zwischen  $T$  und  $N$  und  $M'$  eines zwischen  $T'$  und  $N$ .

Abb. 18 gibt eine Auswahl charakteristischer Profile zwischen  $T$  und  $T'$ .  $I$  kennzeichnet den Wendepunkt. Das Profil mit Wendepunkt für  $U = 0$  wird mit  $L$  bezeichnet.

Ein Teil der Profile wechselt das Vorzeichen.

Für den Fall der rotierenden Scheibe ist es sinnvoll, die Relativgeschwindigkeit zu betrachten. Die Profile  $T$  und  $N$  behalten dann ihren Charakter, d. h.  $T$  hat wieder die Form des gewöhnlichen Grenzschichtprofils, während das Profil in Richtung  $N$ , das hier die radiale Richtung angibt, wieder an der Wand und am Rande der Grenzschicht zu Null wird.

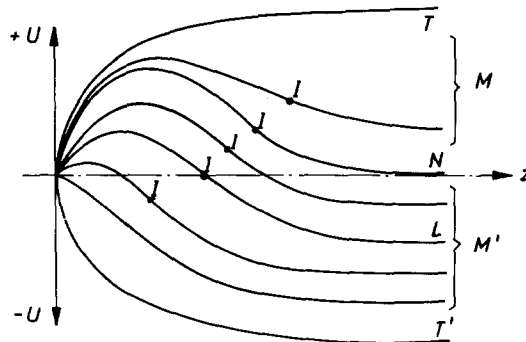


Abb. 18. Geschwindigkeitsprofile zwischen  $T$  und  $T'$

Das Profil  $L$  wird dann, Reibungsfreiheit vorausgesetzt, eine neutrale Störung hervorrufen, die relativ zur Wand in Ruhe ist.

Da das Geschwindigkeitsfeld der Scheibe durch die Rechnung von COCHRAN [3] bekannt ist, läßt sich eine Komponente der Relativgeschwindigkeit finden, die die für das Auftreten von neutralen stationären Störungen notwendigen Merkmale besitzt, also einen Wendepunkt bei  $U = 0$ , also mit Vorzeichenwechsel. Da das Geschwindigkeitsfeld überall auf der Scheibe ähnlich ist, wird so ein Profil überall auftreten, d. h. die Achsen der Störungen müssen logarithmische Spiralen sein nach

$$r = A e^{-\Phi \operatorname{tg} \varepsilon}, \quad (4.1)$$

und das dimensionslose Profil muß den folgenden Ausdruck annehmen:

$$U = F - (1 - G) \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{F}{\sin \varepsilon} - (1 - G) \frac{1}{\cos \varepsilon}. \quad (4.2)$$

Der Winkel  $\varepsilon$  ergibt sich mit dieser Bedingung aus der Rechnung von COCHRAN [3] in guter Übereinstimmung mit dem Experiment zu  $\varepsilon = 13^\circ 18'$ .

Die Zahl der Wirbel am Umfang ermittelt er mit 113 bis 140, etwa viermal so hoch wie im Experiment.

Der numerische Vergleich zwischen den theoretischen Ergebnissen an der rotierenden Scheibe mit und ohne Absaugung zeigt, daß beide Lösungen im wesentlichen identisch sind, wenn der Abstand von der Scheibe auf die Verdrängungsdicke  $\delta_1$  bezogen wird. Darum läßt sich aus der exakten Lösung für die rotierende Scheibe mit starker Absaugung das Stromlinienbild der gestörten Strömung für die Scheibe ohne Absaugung ermitteln, das eine Entscheidung darüber erlaubt, ob ein Streifen der China-Clay-Fotos einer einzigen Wellenlänge zugeordnet werden muß.

Im Falle der 3-dimensionalen Grenzschicht der rotierenden Scheibe ergeben sich aus dieser Theorie zwei Wirbelreihen nach Abb. 19. Beide Wirbelreihen rotieren entgegengesetzt, die Wirbel einer Reihe aber gleichsinnig. Eine experimentelle Bestätigung der Ergebnisse steht noch aus.

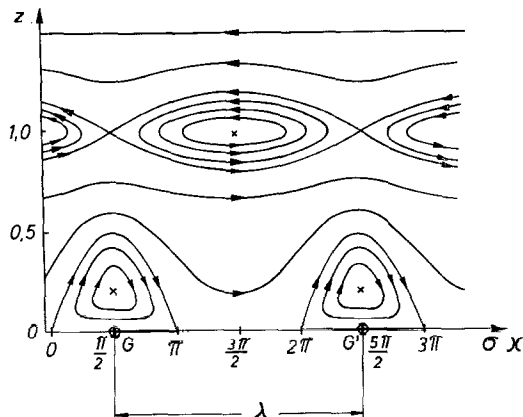


Abb. 19. Wirbelsystem der gestörten Grenzschicht einer rotierenden Scheibe mit starker Absaugung nach STUART [24]

Mit Hilfe der Lösung für die rotierende Scheibe mit starker Absaugung läßt sich für das instabile Gebiet mit den Störwirbeln nach Abb. 19 die Wandschubspannung  $\partial u / \partial z|_{z=0}$  und  $\partial v / \partial z|_{z=0}$  berechnen.

Der Ort maximaler Wandschubspannung liegt unter den Wirbelachsen der wandnahen Wirbelreihe für  $\sigma x = \pi/2, 5/2\pi, 9/2\pi$  usw., wobei  $\sigma$  die dimensionslose Wellenzahl einer neutralen Störung ist. Das bedeutet, für einen Wirbel erscheint in der Kaolinschicht ein Streifen.

Die gleiche Rechnung macht STUART für die Strömung an einer konkaven Wand, die durch GÖRTLER-Wirbel gestört ist. Hier ergibt die Rechnung den Ort maximaler Wandschubspannung zwischen zwei Wirbeln, und zwar dort, wo die Umfangskomponente der Wirbel auf die Wand hin gerichtet ist (Abb. 20).



Die Wirbelachsen liegen bei  $\pi/2$ ,  $3/2\pi$ ,  $5/2\pi$  und der Ort maximaler Wandschubspannung bei  $\sigma x = \pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$ . Man erhält also für je zwei Wirbel eine Linie in der Kaolinschicht, wenn man das instabile Gebiet mit der China-Clay-Methode sichtbar macht. Auf diese Tatsache sei besonders hingewiesen.

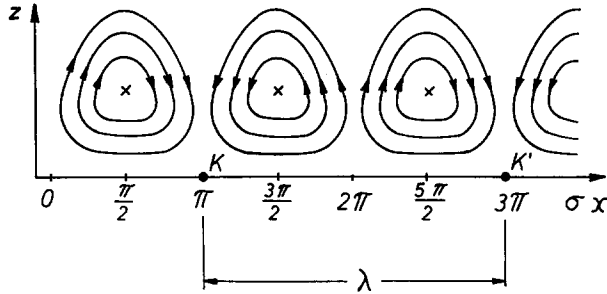


Abb. 20. Wirbelsystem in einer laminaren Grenzschicht an einer konkaven Wand nach GÖRTLER [5]

#### 4.4. Experimentelle Untersuchung des instabilen Bereiches

An den Anfang mögen einige Bemerkungen gestellt werden, die für die experimentellen Stabilitätsuntersuchungen wichtig sind.

Die Kugeloberfläche ist im Rahmen des technisch Möglichen glatt, die Kugel rotiert in ruhender und damit turbulenzarmer Luft, größere Wirbel und Unruhe wie sie normalerweise in einem Raum vorhanden sind, in dem gemessen wird, haben kaum einen Einfluß auf die sehr dünne Grenzschicht. Man kann also annehmen, daß die Instabilität durch kleine, zufällige Störungen hervorgerufen und der Umschlag laminar-turbulent durch Anfachung dieser Störungen eingeleitet wird.

Im Normalfall wird die Grenzschicht an einer ruhenden Wand untersucht. Die kritische Re-Zahl hängt sehr stark vom Turbulenzgrad der Außenströmung ab. Wie im letzten Abschnitt erwähnt, muß der Turbulenzgrad der Außenströmung kleiner als 0,0003 sein, wenn man die Stabilitätstheorie der kleinen Schwingungen überprüfen will. Die Herstellung solcher turbulenzarmer Luftströme ist naturgemäß mit großem Aufwand verbunden. Der Vorteil der Untersuchungen an der rotierenden Kugel ist aber nur dann ein wirklicher Vorteil, wenn die Kugel absolut ruhig läuft.

##### 4.4.1. Kritische REYNOLDS-Zahlen

Ohne zunächst auf die Natur der Störungen einzugehen, sollen zum Vergleich mit Stabilitätsuntersuchungen bei anderen Strömungsproblemen die folgenden kritischen Re-Zahlen aus 4.1 ermittelt werden:

$$\text{Re}_{1 \text{ krit}} = \frac{R^2 \cdot \omega_0}{\nu};$$

$$\text{Re}_{2 \text{ krit}} = \frac{R^2 \cdot \omega_0 \sin^2 \theta}{\nu};$$

$$\begin{aligned} \text{Re}_{3\text{krit}} &= \frac{R \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta}{\nu}; & \delta &= \text{Grenzschichtdicke} \\ \text{Re}_{4\text{krit}} &= \frac{R \cdot \delta_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta}{\nu}; & \delta_1 &= \text{Verdrängungsdicke} \\ \text{Re}_{5\text{krit}} &= \frac{R \cdot \delta_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta}{\nu}; & \delta_2 &= \text{Impulsverlustdicke.} \end{aligned}$$

Die Grenzschichtgrößen für die Kugel sind mit Geschwindigkeitsprofilen berechnet, wie sie BANKS [1] ermittelt hat. Für die Scheibe sind die Rechnungen von COCHRAN benützt worden. Es ist

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^1 G(z) \cdot dz, \\ \delta_2 &= \int_0^1 G(s) [1 - G(s)] ds. \end{aligned}$$

		Re <sub>Kr 2</sub>	Re <sub>Kr 3</sub>	Re <sub>Kr 4</sub>	Re <sub>Kr 5</sub>	Gö
Indifferenz-Punkt	Scheibe	180 000	1 700	538	254	9,6
	Kugel	$\vartheta = 40^\circ$	158 000	1 625	515	238
		$\vartheta = 85^\circ$	52 400	2 060	652	303
	Platte	60 000	1 220	420	162	≈ 0,5
Umschlag-Punkt	Scheibe	282 000	2 120	673	317	10,75
	Kugel	$\vartheta = 40^\circ$	232 000	1 970	625	290
		$\vartheta = 85^\circ$	83 600	2 660	842	392
	Platte	2 800 000	8 300	2 500	1 120	7 ÷ 9

Abb. 21. Tabelle der kritischen Werte

Die Tabelle Abb. 21 zeigt die errechneten Werte.

Die Werte für die ebene Platte sind bei sehr kleinen Turbulenzgraden der Außenströmung ermittelt.

#### 4.4.2. Versuchsplan und Meßmethoden

Die Oszillogramme der Hitzdrahtsignale im instabilen Gebiet zeigen, daß der Grundströmung periodische Störungen überlagert sind. Die folgenden Untersuchungen sollen soweit wie möglich Aufschluß geben über die physikalische Natur dieser periodischen Störungen. Es wurden im wesentlichen die folgenden Parameter untersucht:

1. Zahl der Störungen pro Umfang am Breitengrad  $z(\vartheta)$ .
2. Richtung der Störungsfront  $\varepsilon(\vartheta)$
3. und damit die Wellenlänge der Störung  $\lambda(\vartheta)$ .
4. Phasengeschwindigkeit der Störung  $c_r$ .

5. Anfachung in Richtung fortschreitender Re-Zahl  $c_i$ .
6. Zusammensetzung der Störung.
7. Art der Störung: Welle oder diskreter Wirbel.
8. STUART-Wirbel oder GÖRTLER-Wirbel.
9. Detaillierte Hitzdrahtmessungen.

Die verwendeten Meßverfahren gestatten meist eine Aussage über mehrere der angegebenen Parameter, und einige Fragen werden durch verschiedene Verfahren beantwortet, so daß die Ergebnisse eine höhere Genauigkeit und Sicherheit erhalten. Es sei darum gestattet, die Meßtechnik etwas eingehender zu behandeln, und zwar in der folgenden Weise: Es werden die Meßverfahren beschrieben und ein Ergebnis als Beispiel angegeben. Danach werden die Ergebnisse aller Experimente zusammenfassend angegeben und, soweit möglich, gedeutet.

#### 4.4.3. Lage und Zahl der Störungen

Zur Bestimmung der Lage der Störungsfronten und Zahl der Perioden wurde eine Meßeinrichtung benutzt, die es gestattet, zu einem festgehaltenen Hitzdrahtgeber einen zweiten in zwei Koordinaten parallel zur Kugeloberfläche zu bewegen. Gibt man beide Signale auf einen Zwei-Strahl-Oszillographen, dann kann man alle Stellungen der Hitzdrahtgeber zueinander angeben, für die beide Schwingungsbilder in Phase sind. Abb. 46 zeigt das Foto der Meßeinrichtung.

Abb. 22 zeigt ein Oszillogramm.

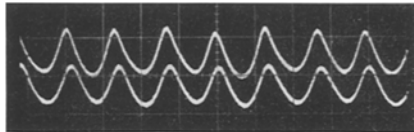


Abb. 22. Oszillogramm, mit der Meßeinrichtung aus Abb. 46 gewonnen

Die Darstellung der Ergebnisse geschieht mit Hilfe der LAMBERTSchen Schnittkegelprojektion, die innerhalb eines bestimmten Bereiches als maßstabs- und winkeltreu angenommen werden kann.

Das Diagramm Abb. 23 zeigt die Ergebnisse für einige Breitengrade  $\vartheta$ . Es zeigt die Störungsfronten in der Umgebung der Breitengrade  $\vartheta = 65^\circ$  und  $\vartheta = 70^\circ$ . Eingetragen ist ebenfalls die Richtung der Absolutstromlinie für einen dimensionslosen Wandabstand von  $z/\delta \approx 0,15$ .

Die Störfronten haben die Form räumlicher Spiralen, deren Radiusvektor in Drehrichtung abnimmt. Der Winkel  $\varepsilon$  der Fronten mit dem Breitengrad wächst mit abnehmendem Breitengrad. Die Zahl der Perioden wächst ebenfalls mit abnehmendem Breitengrad.

#### 4.4.4. Zahl der Störperioden und Phasengeschwindigkeit

Wie mit einer raumfest angeordneten Sonde die Phasengeschwindigkeit relativ zur bewegten Wand und einfacher als im vorhergehenden Artikel

die Zahl der Perioden ermittelt werden kann, zeigt die nächste Meßmethode.

Triggert man den Oszillographen mit der Drehzahl der Kugel, dann erscheinen auf dem Schirm des Oszillographen zwei Zeitmarken, die gerade die Umlaufzeit eines Kugelumfanges angeben. Die Zeitmarken geben immer die gleiche Stelle auf dem Kugelumfang wieder.

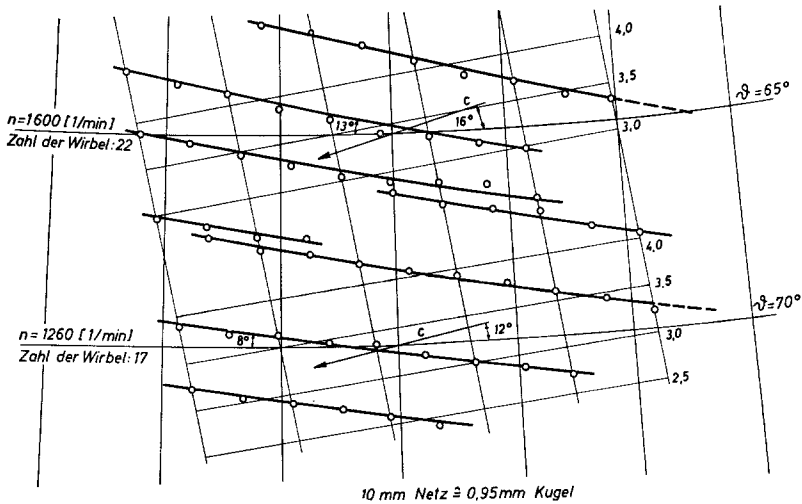


Abb. 23. Lage und Zahl der Störfronten am Breitengrad  $\theta = 65^\circ$  und  $\theta = 70^\circ$

Den Zeitmarken wird das Schwingungsbild der Störungen überlagert. Man kann bequem die Maxima oder Minima zwischen den beiden Zeitmarken auszählen, wenn man das Schwingungsbild mit einem Speicher-oszillographen festhält.

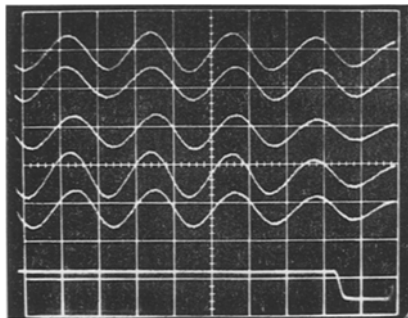


Abb. 24. Bestimmung der relativen Phasengeschwindigkeit  $\theta = 54^\circ$ ,  $c_r = 0$

Die Frage nach der Phasengeschwindigkeit der Störung läßt sich in dem Sinne beantworten, daß man entscheiden kann, ob die Störungen relativ zur bewegten Kugeloberfläche in Ruhe sind oder nicht.

Man benutzt wieder einen Speicheroszillographen und hält das Schwingungsbild mit den Zeitmarken mehrmals blind in unregelmäßigen Zeitabständen fest, und zwar untereinander nach Abb. 24. Der Hitzdrahtgeber befand sich bei  $\vartheta = 54^\circ$ .

Für diesen Winkel  $\vartheta$  ist die relative Phasengeschwindigkeit  $c_r = 0$ . Das Schwingungsbild beginnt immer mit der gleichen Phase.

Mit größer werdendem Winkel  $\vartheta$  wird die Lage der Störungen relativ zur Oberfläche instabil.

Abb. 25 zeigt für  $\vartheta = 74^\circ$  eine relative Phasengeschwindigkeit.

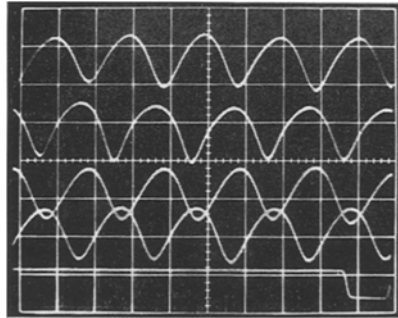


Abb. 25. Bestimmung der relativen Phasengeschwindigkeit  $\vartheta = 74^\circ$ ,  $c_r \neq 0$

#### 4.4.5. Optische Methoden

Einen tieferen Einblick in die Struktur der gestörten Laminarströmung erhält man, wenn es gelingt, die Störungen selbst oder ihre Auswirkung sichtbar zu machen. Das wurde bei den folgenden Methoden angewandt:

1. Man bläst Rauch in die laminare Grenzschicht und verfolgt die Entwicklung der Absolutstromlinie im instabilen Bereich.

2. Mit Hilfe der China-Clay-Methode werden Orte unterschiedlicher Wandschubspannung auf der Kugeloberfläche sichtbar gemacht.

Bläst man einen intensiv weißen, kalten Rauch in dünnen Fäden in Polnähe in die Grenzschicht, und zwar so langsam, daß keine zusätzlichen Störungen entstehen, und blitzt die Kugel mit einem Lichtblitzstroboskop mit der Drehzahlfrequenz an, dann erhält man das stehende Bild der Kugel mit dem Bild des Wirbelsystems, das bei kleinem  $\vartheta$  ebenfalls in Ruhe ist. Die Störungen sind hier also relativ zur bewegten Kugeloberfläche in Ruhe. Das heißt, die Umfangskomponente der Störwirbel ist die gleiche wie die Umfangsgeschwindigkeit der Kugel  $R \omega_0 \sin \vartheta$ , also der maximalen Umfangsgeschwindigkeit in der Grenzschicht. Die Abb. 26 zeigt ein typisches Bild dieser Art, das mit einem Einzelblitz großer Intensität und extrem kurzer Blitzdauer von  $10^{-7}$  sec gewonnen wurde.

Es wurde eine große Anzahl solcher Photos bei Variation der Drehzahl im Übergangsbereich gemacht und ausgewertet. Diese Photos gaben eine Fülle quantitativer und qualitativer Informationen. Man sieht die drei

Bereiche, das plötzliche Anwachsen der Grenzschicht beim Übergang zur turbulenten Strömungsform, die Zahl und Lage der Wirbelachsen usw.

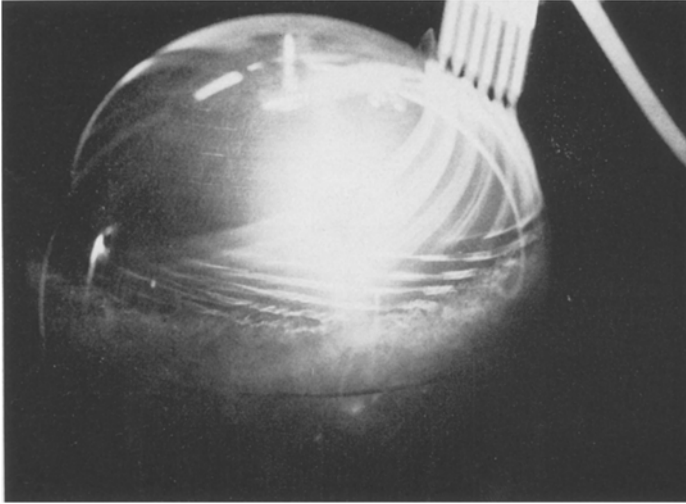


Abb. 26. Wirbelsystem des instabilen Bereiches auf der rotierenden Kugel

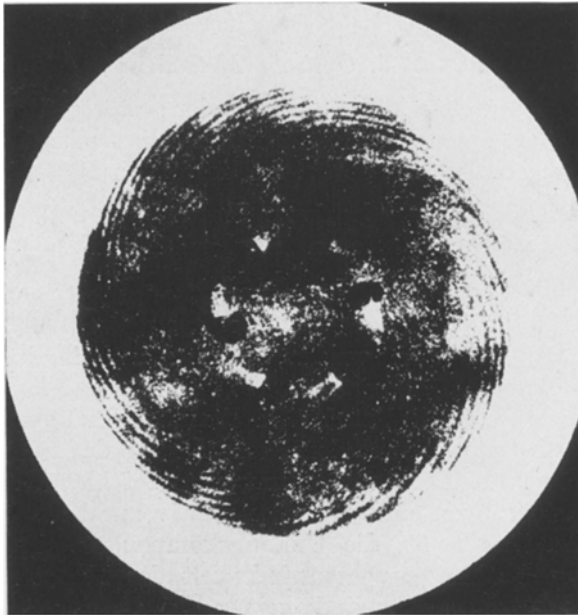


Abb. 27. Photo der Kaolin-Methode auf der rotierenden Scheibe nach [24]

Um noch detailliertere Kenntnisse zu erhalten, wurde ein Zeitlupenfilm mit etwa 2000 Bildern pro Sekunde gedreht. Man verfolgt mit Hilfe dieses Filmes einen Rauchfaden bis ins instabile Gebiet hinein.

Die Anwendung der Kaolin-Methode verläuft in folgender Weise: Die Kugel wird durch Aufsprühen einer Mischung von Kaolin, Wasser und Wasserglas mit einem dünnen Überzug versehen, der nach dem Trocknen weiß wird. Besprüht man die Oberfläche mit Methylsalizylat, dann wird das Kaolin durchsichtig. Läßt man die Kugel jetzt rotieren, dann wird an Stellen größerer Wandschubspannung das Methylsalizylat schneller verdunsten, und das Kaolin wird an diesen Stellen wieder weiß und undurchsichtig (Abb. 27).

Die hellen Linien sind die Orte großer Wandschubspannung und nach Kapitel 4.3.2 vermutlich die Längsachsen von Störwirbeln.

#### 4.4.6. Konstanz der Wirbelzahlen

Die Konstanz der Wirbelzahl läßt sich mit folgendem Versuch bestimmen. Gibt man das Hitzdrahtsignal und die Drehzahlimpulse auf ein Rechengerät und dividiert beide durcheinander, dann erhält man die Zahl der Störungen pro Umfang und sieht, daß diese nur für wenige Drehzahlen konstant ist. Im allgemeinen verändert sich die Zahl der Störungen unstetig und laufend.

#### 4.4.7. Zusammensetzung der Störung

Die Frage nach der Zusammensetzung der Störung (ein Teil der Oszillogramme weist auf eine zusammengesetzte Schwingung hin) kann durch eine Frequenzanalyse des Signals beantwortet werden.

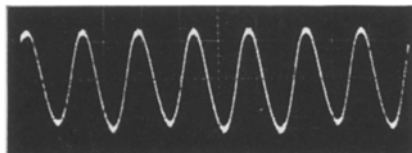


Abb. 28. Oszillogramm des Hitzdrahtgebers für  $n = 600$ ,  $\vartheta = 82,5$

Abb. 28 zeigt das Oszillogramm eines Hitzdrahtsignals für die Drehzahl  $n = 600$  U/min und  $\vartheta = 82,5$ . Es deutet auf eine fast reine Sinusschwingung hin.

Die Frequenzanalyse Abb. 29 hat bei der gemessenen Wirbelzahl von  $z = 14$  ein scharfes Maximum und ein um eine Kugeldrehzahl nach links verschobenes kleines Nebenmaximum.

Das Maximum bei 50 Hz rührt von der Netzfrequenz her.

#### 4.4.8. Amplitude der Störungen

Beim Durchgang durch das instabile Gebiet längs eines Meridians bei konstanter Drehzahl wurde für mehrere Drehzahlen der Turbulenzgrad für die Stellung des Hitzdrahtes senkrecht zur Strömungsrichtung ermittelt. Für jeden Winkel  $\vartheta$  wurde der Turbulenzgrad in Abhängigkeit vom Kugelabstand  $z$  gemessen und das Maximum über dem Winkel  $\vartheta$  aufgetragen.

#### 4.4.9. Tiefere Analyse der Hitzdrahtsignale

Die Anzeige des Hitzdrahtgebers hängt stark von der Lage des Drahtes zur Strömungsrichtung ab. Diese Tatsache wurde benutzt, um die 3-dimensionale Grenzschicht an der Kugel auszumessen (Kapitel 6).

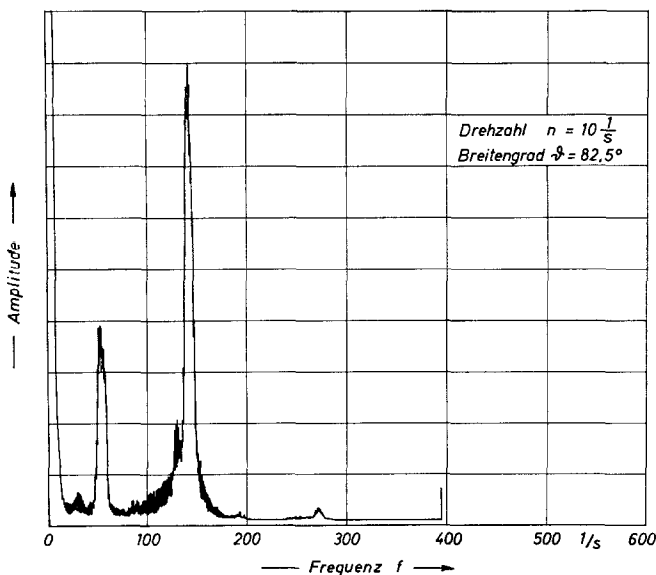


Abb. 29. Frequenzanalyse der Schwingung Abb. 28

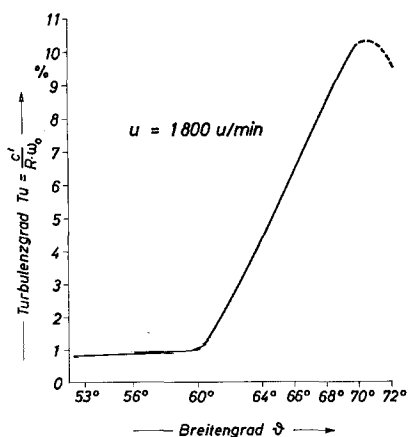


Abb. 30. Turbulenzgrad  $Tu_{\max}$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  für konstante Drehzahl

Die zeitlich veränderlichen Geschwindigkeitsschwankungen, die der mittleren Strömungsgeschwindigkeit überlagert sind, ändern ihr Schwingungsbild (falls sie periodisch sind) ebenfalls mit der Stellung des Hitzdrahtes. Der Draht liegt in einer Ebene  $z = \text{const.}$  Bei konstanten



Breiten  $\vartheta$  und konstanter Drehzahl wird der Draht um seine Schaftachse, die in Richtung des Kugelradius zeigt, um den Winkel  $\Phi$  gedreht (Abb. 31).

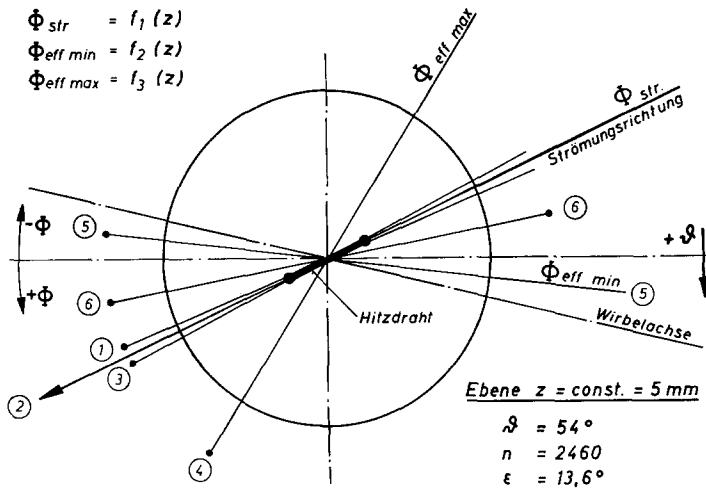


Abb. 31. Charakteristische Stellungen des Hitzdrahtes in einer Ebene  $z = \text{const.}$

Für  $\Phi = 0$  liegt der Hitzdraht parallel zum Breitengrad  $\vartheta$ . Man kann dann die folgenden Winkel festlegen, die zu einem charakteristischen Schwingungsbild gehören (Abb. 32a—f).

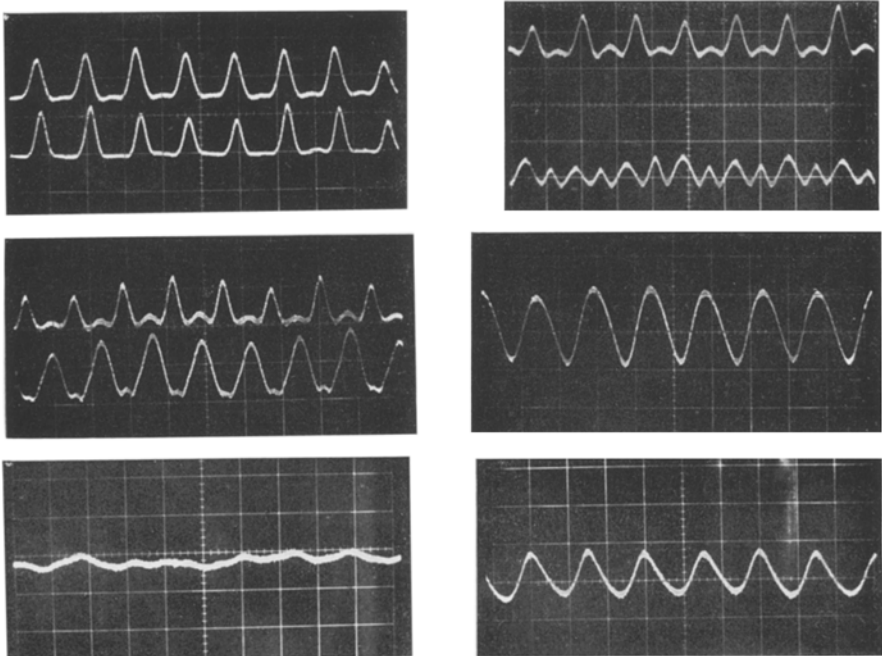


Abb. 32a—f. Oszillogramme bei veränderlichem Anströmwinkel des Hitzdrahtes

Es wurden, wenn notwendig, zwei Hitzdrahtgeber gleichzeitig benutzt. Der obere möge mit 1, der untere mit 2 bezeichnet werden.

- Beide Geber stehen in Stellung 1. Der Winkel  $\Phi$  ist kleiner als der Winkel der Strömungsrichtung  $\Phi_{\text{Str}}$ .
- Hitzdraht 2 hat jetzt die Richtung  $\Phi_{\text{Str}}$ . Die Amplitude ist kleiner, und die Frequenz hat sich verdoppelt.
- Hitzdraht 2 ist um einen kleinen Winkel über  $\Phi_{\text{Str}}$  in Stellung 3 verdreht. Die Schwingungsbilder sind wieder gleich, nur die Phase hat sich um  $180^\circ$  verschoben.
- Der Hitzdraht steht in Stellung 4 bei  $\Phi_{\text{eff min}}$ . Hier etwa hat die Amplitude der Schwingung ihr Maximum.
- In Stellung 5 bei  $\Phi_{\text{eff min}}$  hat die Amplitude ein eindeutiges Minimum.
- Dieses Bild zeigt ein Schwingungsbild zwischen  $\Phi_{\text{Str}}$  und  $\Phi_{\text{eff min}}$  als 1 und 5.

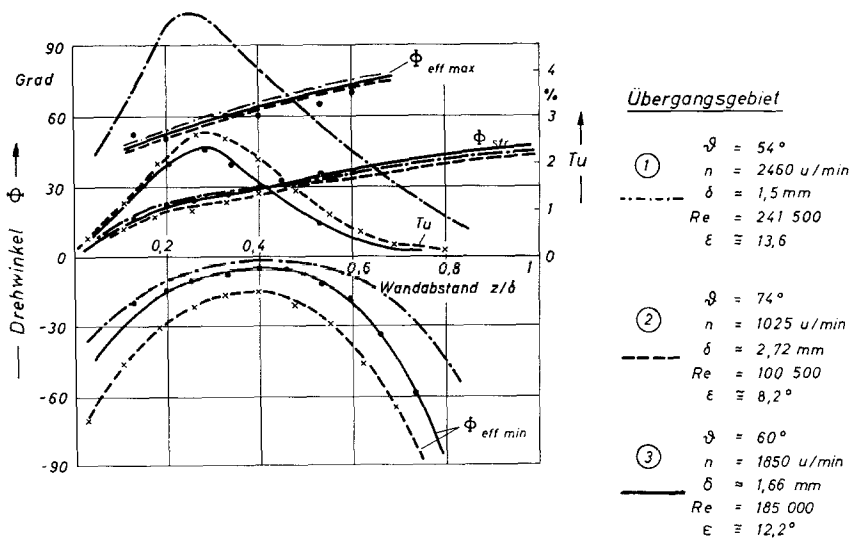


Abb. 33. Charakteristische Winkel  $\Phi$  über  $z/\delta$

In Abb. 33 sind für einige Breitengrade und Drehzahlen die Winkel  $\Phi_{\text{Str}}$ ,  $\Phi_{\text{eff min}}$  und  $\Phi_{\text{eff max}}$  über den mit der Grenzschichtdicke dimensionslos gemachten Wandabstand  $z/\delta$  aufgetragen, ferner der Turbulenzgrad für die Stellung des Drahtes senkrecht zur Strömungsrichtung.

Eine Interpretation dieser Signale ist für die 3-dimensionale Strömung an der Kugel bei noch unbekannter Struktur der Störwirbel recht schwierig. Für eine KÄRMÄNSche Wirbelstraße hinter einem langen Kreiszylinder, also im ebenen Fall, kann man eindeutig das Schwingungsbild des Hitzdrahtsignals einer Stellung des Drahtes zur Wirbelachse zuordnen. Es gelingt sogar, die Geschwindigkeitsverteilung des Wirbels so zu bestimmen.

Als Ergänzung zur Bestimmung der charakteristischen Winkel  $\Phi$  wurde rein formal der Effektivwert des Hitzdrahtsignals in Abhängigkeit vom Drehwinkel  $\Phi$  für konstante  $z$  und  $\vartheta$  gemessen und damit der Turbulenzgrad in der üblichen Weise berechnet und mit dem Verhältnis  $c/R\omega_0$  multipliziert. Ein Ergebnis zeigt Abb. 34.

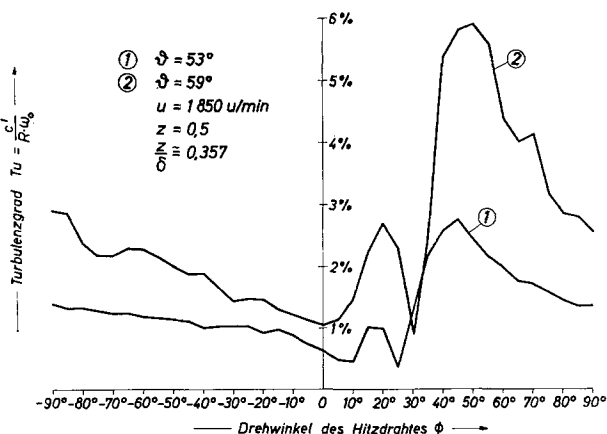


Abb. 34. Turbulenzgrad in Abhängigkeit vom Drehwinkel  $\Phi$  für  $z = \vartheta = \text{const.}$

## 5. Zusammenfassung und Interpretation der Meßergebnisse im instabilen Bereich

Die Aussagen und Überlegungen des folgenden Abschnittes sollen als Fazit der bisher durchgeführten experimentellen Untersuchungen klären, ob es bereits möglich ist, ein vollständiges und endgültiges physikalisches Bild der gestörten Zone in der laminaren Grenzschicht der rotierenden Kugel zu zeichnen.

Sie sollen im einzelnen zeigen, welche der untersuchten Parameter eindeutig bestimmt und welche Ergebnisse mit Unsicherheit behaftet sind, die eine Fortsetzung der Untersuchungen notwendig machen. Es wird sich zeigen, daß einige Meßergebnisse sich noch nicht in das angenommene Bild einordnen lassen oder sich zur Zeit noch ganz einer plausiblen Interpretation entziehen und darum weitere eingehende Untersuchungen erfordern.

Abb. 35 zeigt in schematischer Darstellung die gestörte Zone für eine mittlere Re-Zahl im Übergangsbereich. Sie erstreckt sich zwischen zwei kritischen Breitengraden mit einer Ausdehnung von etwa  $\vartheta = 10^\circ$ .

Unterhalb von  $\vartheta_{1kr}$ , also zum Pol hin, ist die Strömung laminar, oberhalb  $\vartheta_{2kr}$  ist sie turbulent. Der Übergang zum instabilen Bereich ist nicht scharf begrenzt, vor  $\vartheta_{1kr}$  treten am Umfang kleine Gruppen von Störungen auf, die bis zu  $\vartheta_{1kr}$  zusammenwachsen und den ganzen Umfang ausfüllen. Der Übergang zur turbulenten Strömung ist zwar schärfer begrenzt, zeigt aber auch vor  $\vartheta_{2kr}$  kleine Gebiete turbulenter Formen.

Bei  $Re \approx 65$  liegt der Umschlag theoretisch am Äquator und die Indifferenzlinien bei  $\vartheta \approx 81^\circ$ . Mit wachsender Re-Zahl oder bei der Versuchskugel mit konstantem Durchmesser bei wachsender Drehzahl wandert das instabile Gebiet ohne sein Aussehen wesentlich zu verändern zum Pol. Die Art des Überganges ist grundsätzlich verschieden von der einer Strömung im Zwischenraum zweier zentraler Kugeln, von denen die innere rotiert.

Wird die Re-Zahl sehr groß, scheint sich das instabile Gebiet asymptotisch einer Endlage zwischen den Breitengraden  $\vartheta = 30^\circ$  und  $\vartheta = 40^\circ$  zu nähern, d. h. unterhalb von  $\vartheta = 30^\circ$  ist die Strömung auch für sehr große Re-Zahlen laminar.

Die auf die örtliche Umfangsgeschwindigkeit  $R \omega_0 \sin \vartheta$  bezogene Re-Zahl für den Beginn des Überganges wächst von  $Re \approx 50.000$  bei  $\vartheta = 85^\circ$  bis auf  $Re = 160.000$  bei  $\vartheta = 40^\circ$ . Bei der Scheibe beträgt sie konstant  $Re = 180.000$  (Tabelle Abb. 21). Die auf die Verdrängungsdicke  $\delta_1$  bezogene Re-Zahl steigt vom Pol zum Äquator von  $Re = 515$  bis  $Re = 615$ . Bei der geraden Platte beträgt sie theoretisch  $Re_{\delta_1} = 420$ .

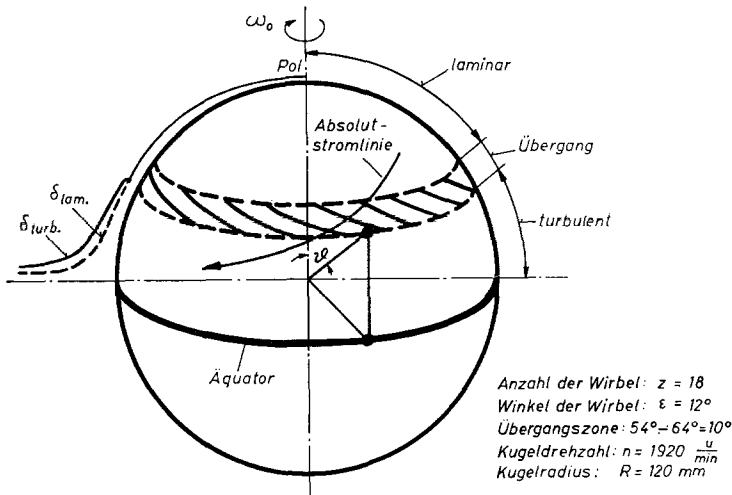


Abb. 35. Lage der gestörten Zone für  $n = \text{const.}$

Die Zahlenwerte der Tabelle zeigen, daß zu anderen Strömungsproblemen gewisse Unterschiede bestehen, sowohl für die Wellenstörung als auch für die Störung durch GÖRTLER-Wirbel.

Die Amplitude der Störung wächst bei konstanter Drehzahl stetig von  $\vartheta_{1kr}$  bis  $\vartheta_{2kr}$ . Abb. 30 zeigt als Maß für die Amplitude den dort definierten Turbulenzgrad.

Die Hitzdrahtsignale im instabilen Gebiet zeigen, daß die Störungen periodischer Natur sind (Abb. 11 und 12).

Mit der 2-Hitzdraht-Methode lassen sich die Orte gleicher Phasenlage der Schwingungsbilder beider Hitzdrahtsignale ermitteln. Die Orte gleicher Phasenlage durch einen Kurvenzug miteinander verbunden, können als

Wellenfront oder Wirbelachse identifiziert werden. Die Kurven sind räumliche Spiralen mit nicht ganz konstanter Steigung. Der Radiusvektor der Spiralen nimmt in Drehrichtung ab. Das bedeutet, daß sie in Richtung der Relativstromlinien verlaufen. Eine Nachrechnung mit Hilfe der Geschwindigkeitsprofile zeigt, daß die Spiralen gerade in Richtung der Relativgeschwindigkeit für einen dimensionslosen Kugelabstand von  $z/\delta \approx 0,35 - 0,4$  liegen. Die Störungslinien sind bei kleinen Winkeln  $\vartheta$  relativ zur Kugeloberfläche in Ruhe, d. h. sie laufen mit der Kugeldrehzahl um, Abb. 24. Bei großen Winkeln  $\vartheta$ , also in Äquatornähe, hat das Schwingungsbild eine Phasengeschwindigkeit relativ zur Kugel. Ob das real ist, wird noch geprüft.

Die Zahl der Störperioden ist nicht für alle  $\vartheta$  konstant. In Polnähe zählt man am Umfang im Mittel  $z \approx 26$  (Scheibe konstant  $z \approx 28-31$ ). Mit Annäherung auf den Äquator fällt sie auf  $z \approx 10$ .

Die Wellenlänge der Störung läßt sich jetzt ausrechnen. Die folgende Tabelle, Abb. 36, gibt die Mittelwerte für  $z$ ,  $\varepsilon$  und  $b/\delta$ ,  $b/\delta_1$  an, also die auf die Grenzschicht- und Verdrängungsdicke bezogene Wellenlänge.  $b$  ist dabei der senkrechte Abstand zweier Störlinien und  $a$  der Abstand der Schnittpunkte zweier Störlinien mit dem Breitengrad.

$u/\text{min}$ $n$	$\vartheta_0$	$\varepsilon^\circ$	$z$	mm $a$	mm $b$	$b/\delta$	$a/\delta$	$b/\delta_1$	$a/\delta_1$
480	86	8	12	64,2	8,95	1,9	13,66	6,0	43,2
1 000	75	8,2	14	53,6	7,6	3,09	21,8	9,75	68,8
1 260	70	9,5	16	45,4	7,45	3,55	21,6	11,18	68,2
1 600	65	10,4	18	38,5	6,93	4,0	22,2	12,6	69,8
1 920	60	12,0	20	34,4	7,15	5,0	23,3	15,7	73,4
2 400	55	13,6	20	30,2	6,74	5,35	24,0	16,9	75,8
2 800	50	14,3	21	26,2	6,73	6,47	25,0	20,4	78,8
3,500	45	15,0	24	22,1	6,17	6,73	24,3	21,2	75,6
3 820	40	15,5	26						
Scheibe		14				5,06	23	15,95	73,0

Abb. 36. Tabelle der Störgrößen

Für die ebene Platte ist die Wellenlänge der theoretisch ermittelten kleinsten neutralen Störung  $\lambda \approx 6\delta$ . Im Falle der GÖRTLER-Wirbel beträgt sie  $\lambda/2 \approx 2,5\delta$ .

Die Richtung der Spiralen wird durch beide optischen Methoden bestätigt. Die China-Clay-Methode gibt eine Aussage für die Wandnähe  $z \rightarrow 0$ . Die Rauchmethode zeigt die Spiralen in einem kleinen Abstand von der Oberfläche, der durch Beobachtung auf  $z/\delta \approx 0,35$  geschätzt wird.

Beide Methoden identifizieren die Störungen als Wirbel. Aus Versuchen mit GÖRTLER-Wirbeln weiß man, daß sich die Spuren in der China-Clay-Schicht als Längsachsen von Zellularwirbeln deuten lassen. Ferner ist die Ausbildung einer sichtbaren Spurlinie nur möglich, wenn die Wirbel relativ zur bewegten Kugeloberfläche in Ruhe sind. Die Tatsache, daß bei der Rauchmethode die Störlinien sichtbar werden, deutet ebenfalls auf die Existenz von Wirbeln hin, denn im Unterdruckgebiet der Wirbelachsen kann sich der Rauch eine gewisse Zeit halten.

Weiter läßt sich entscheiden, ob es gleichsinnig drehende Wirbel nach STUART oder paarweise entgegengesetzt drehende nach GÖRTLER sind (für die wandnahe Wirbelreihe). Abb. 19 ergibt für jeden Wirbel eine Spurlinie in der Kaolinschicht. Im Falle von GÖRTLER-Wirbeln (Abb. 20) erscheint für je zwei Wirbel eine Linie. Da die Zahl der Wirbelachsen bei der Rauchmethode, die jeden Wirbel anzeigt, mit der Zahl der China-Clay-Aufnahme übereinstimmt, wird es sich um gleichsinnig drehende STUART-Wirbel handeln.

Die Entscheidung, ob die sichtbaren oder sichtbar gemachten Störwirbel die einzigen periodischen Störungen sind, oder ob noch andere Anteile mit verschiedener Frequenz und Amplitude vorhanden sind, brachte auch die eingehende Frequenzanalyse nicht.

In Äquatornähe scheint der Wirbel die einzige Störung zu sein (Abb. 28 und 29). Für kleine Winkel  $\vartheta$  zeigt jedoch sowohl die Schwingungsform wie ihre Analyse das Bild einer modulierten Schwingung (Abb. 12). Ein Teil der Modulation konnte auch auf den unrunder Lauf der Kugel in Resonanzgebieten zurückgeführt werden.

Zur Klärung dieser Frage werden Versuche mit rotierenden Druckgebern vorbereitet.

In Kapitel 4.4.9 sollte durch eine vertiefte Analyse der Hitzdrahtsignale weiterer Aufschluß über Einzelheiten der Struktur des Störwirbels gewonnen werden.

Der Versuch einer Auswertung stieß aber auf große Schwierigkeiten. Zur Deutung der Hitzdrahtsignale wurden darum Versuche an definierten Wirbelreihen begonnen. Um eine ähnliche Konfiguration zu bekommen, wurde eine ebene KÄRMÁNSche Wirbelstraße durch Einschieben einer Trennwand in zwei gleichsinnig drehende Wirbelreihen in der Nähe einer Wand aufgespalten. Die Versuche sind noch nicht abgeschlossen.

Aus den Versuchen des Kapitels 4.4.9 läßt sich zunächst lediglich die folgende Aussage begründen: Abb. 34 zeigt, daß bei dimensionsloser Auftragung über  $z/\delta$  der Verlauf der Kurven für alle ähnlich ist. Der Turbulenzgrad hat bei  $z/\delta \approx 0,35$  ein Maximum.

Abb. 33 bestätigt im wesentlichen die Aussagen von Abb. 34. Die Amplituden des Hitzdrahtsignals auf dem Oszillographen und die Höhe des Turbulenzgrades sind ähnlich.

Eine Frequenzanalyse für verschiedene Stellungen  $\Phi$  des Hitzdrahtes zeigt ebenfalls ein ähnliches Verhalten, darüber hinaus zeigt sie, daß das Bild der Frequenzanteile für alle Winkel  $\vartheta$  ähnlich ist.

Die Untersuchung muß nun in ein zweites Stadium treten, mit dem Ziel, weitere Einzelheiten über die Struktur der Störwirbel zu gewinnen und einen Teil der gewonnenen Meßergebnisse richtig zu deuten.

## 6. Bereich ③

### Turbulente Grenzschicht

Die turbulente Grenzschicht kann im allgemeinen nur mit Hilfe von Näherungsverfahren berechnet werden. Da es noch keinen analytischen Ausdruck für die sogenannte turbulente Scheinreibung gibt, benötigt man neben einer plausiblen Annahme für das Geschwindigkeitsprofil ein Gesetz für die Wandschubspannung  $\tau_0$ , das nur durch das Experiment gefunden werden kann.

Im nächsten Abschnitt soll ein erster Versuch gemacht werden, die 3-dimensionale turbulente Grenzschicht an der rotierenden Kugel zu berechnen. Damit der Rechnungsgang überschaubar bleibt, soll mit einem möglichst einfachen Ansatz sowohl für die Geschwindigkeitsverteilung als auch für die Wandschubspannung gearbeitet werden. Diese Bedingung erfüllen Gesetzmäßigkeiten, die bei der Rohrströmung gefunden und bei verschiedenen Grenzschichtproblemen mit gutem Erfolg benutzt wurden.

Das Geschwindigkeitsprofil der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung kann in der folgenden Form als Potenzgesetz geschrieben werden:

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{r}{R} \right)^{1/n} \quad (6.1)$$

wobei  $n$  mit steigender Re-Zahl von 6 bis 10 anwächst. Im Bereich, in dem das Reibungsmoment der Kugel gemessen wurde, kann  $n = 7$  gesetzt werden. Hier gilt das sogenannte BLASIUSsche Widerstandsgesetz

$$\lambda = 0,3164 \left( \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (6.2)$$

$$\text{mit } \tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \bar{u}^2, \quad U = \frac{\bar{u}}{0,8}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$$

und  $d = 2 R$

$$\text{und } v_* = 0,15 \cdot u^{7/8} \cdot \left( \frac{\nu}{R} \right)^{1/8}$$

und

$$\tau_0 = v_*^2 \cdot \varrho = 0,0225 \cdot \varrho \cdot U^{7/4} \cdot \left( \frac{\nu}{R} \right)^{1/4}. \quad (6.3)$$

Die Frage, ob es sinnvoll ist, diese Ansätze für ein von der Rohrströmung doch sehr verschiedenes Strömungsproblem zu benutzen, wird durch die Ergebnisse der folgenden Untersuchung mit gewissen Vorbehalten beantwortet. In [20] wurde eine dimensionslose Reibungszahl definiert, die für eine große Anzahl verschiedener Rotationskörper den gleichen Zahlenwert der Konstanten ergibt. Es ist die Reibungszahl

$$\zeta_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2} \cdot \omega_0^2 \cdot R \int_{(0)} a^2 df} \cong \frac{0,0465}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (6.4)$$

$R$  ist der maximale Radius senkrecht zur Rotationsachse und  $a$  der Abstand des Flächenelementes  $df$  von der Rotationsachse.

Die Tatsache, daß solch eine Reibungszahl existiert, bedeutet offenbar, daß die Wandschubspannung für alle diese Körper nicht sehr verschieden voneinander sein kann, denn die Grenzschicht dieser Körper ist mit Hilfe der gleichen Annahmen berechnet worden.

Für das Geschwindigkeitsprofil der Meridiankomponenten  $u$  sollen zwei Ausdrücke benutzt werden, die im folgenden mit Profil  $a$  und Profil  $b$  bezeichnet werden mögen. Der Rechengang wird mit Profil  $a$  erläutert, die Ergebnisse jedoch immer für beide angegeben.

$$\begin{aligned} a \quad u &= R \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \alpha \left[ 1 - \left( \frac{z}{\delta} \right) \right] \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \\ b \quad u &= R \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \alpha \left[ 1 - \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \right] \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \\ v &= R \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Es bedeuten  $\delta$  die Grenzschichtdicke und  $z = (r - R)$  den radialen Abstand von der Kugeloberfläche.

In Wandnähe, also für  $z/\delta \rightarrow 0$ , werden die Geschwindigkeitskomponenten relativ zur bewegten Oberfläche

$$\begin{aligned} \frac{u}{R \cdot \omega_0 \sin \vartheta} &= \alpha \cos \vartheta \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/7}, \\ \frac{v - R \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta}{R \cdot \omega_0 \sin \vartheta} &= - \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/7}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Das Verhältnis der beiden Geschwindigkeitskomponenten wird dann hier

$$- \frac{u}{v - R \cdot \omega_0 \sin \vartheta} = \alpha \cdot \cos \vartheta. \quad (6.7)$$

Es wurde nun angenommen, daß das Verhältnis der Wandschubspannungen das gleiche ist,

$$- \frac{\tau_{0r\vartheta}}{\tau_{0r\varphi}} = \alpha \cdot \cos \vartheta. \quad (6.8)$$

Mit  $U$ , der Absolutgeschwindigkeit relativ zur Wand, und  $\delta = R$  und  $e = 0,0225$  wird

$$\tau_0 = e \cdot \varrho \cdot v^{1/4} \cdot \delta^{-1/4} (R \cdot \omega_0 \cdot \sin \vartheta)^{7/4} \cdot [1 + \alpha^2 \cdot \cos^2 \vartheta]^{7/8}, \quad (6.9)$$

und die Komponenten der Wandschubspannung

$$\tau_{0r\vartheta} = \frac{\alpha \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{1 + \alpha^2 \cdot \cos^2 \vartheta}} \cdot \tau_0; \quad \tau_{0r\varphi} = - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \cdot \cos^2 \vartheta}} \cdot \tau_0.$$

Zur Integration der Grenzschichtgleichungen soll die Integralbedingung für den Impuls benutzt werden. Die Impulsgleichungen lauten für die turbulente Strömung



$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\vartheta} \int_0^\delta u^2 dz + \int_0^\delta (u^2 - v^2) \operatorname{ctg} \vartheta \cdot dz &= -R \frac{\tau_{or\vartheta}}{\varrho}, \\
\frac{d}{d\vartheta} \int_0^\delta u \cdot v \cdot dz + 2 \int_0^\delta u \cdot v \cdot \operatorname{ctg} \vartheta dz &= -R \frac{\tau_{or\varphi}}{\varrho}.
\end{aligned}
\tag{6.10}$$

Mit den Ausdrücken für die Geschwindigkeitsprofile können die Integrale berechnet werden, die Ausdrücke für die Wandschubspannung eingesetzt und nach Differenzieren und Ordnen erhält man die beiden gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit  $\delta = R/\sqrt[5]{\operatorname{Re}} \cdot \lambda$  und  $\operatorname{Re} = R^2 \omega_0/\nu$  zu

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{d\vartheta} &= -5\lambda \cdot \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{\lambda}{\alpha^2} \cdot \frac{b}{a} \frac{1}{\cos \vartheta \sin \vartheta} + \\
&+ \frac{1}{\lambda^{1/4}} \cdot \frac{2}{\alpha} \frac{(1 + \alpha^2 \cos^2 \vartheta)^{3/8}}{\sin^{1/4} \vartheta \cos \vartheta} \left[ \frac{e}{2a} + \frac{e}{c} \right], \\
\frac{d\alpha}{d\vartheta} &= \alpha [\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta] + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{b}{a} \frac{1}{\cos \vartheta \cdot \sin \vartheta} - \\
&- \frac{1}{\lambda^{5/4}} \cdot \frac{(1 + \alpha^2 \cdot \cos^2 \vartheta)^{3/8}}{\sin^{1/4} \cdot \cos \vartheta} \left[ \frac{e}{a} + \frac{e}{c} \right].
\end{aligned}
\tag{6.11}$$

Die Konstanten  $a$ ,  $c$ ,  $b$  ergeben sich aus der Integration der Geschwindigkeitsprofile. Da eine allgemeine Lösung dieses Systems aussichtslos ist, soll versucht werden, eine der Impulsgleichungen soweit zu vereinfachen, daß eine Entkopplung möglich ist.

Sowohl bei der rotierenden Scheibe als auch bei der rotierenden Kugel im laminaren Fall ist die Radial- bzw. Meridiankomponente der Geschwindigkeit kleiner als die Umfangskomponente. Wenn also  $u < v$ , dann ist  $u^2 \ll v^2$ , und damit kann der Ausdruck  $[1 + \alpha^2 \cos^2 \vartheta]^{3/8} \approx 1$  gesetzt werden.

Für die Scheibe ist

$$a \quad \alpha = 0,162, \text{ damit wird } [1 + \alpha^2 \cos^2 \vartheta]^{3/8} \approx 1,01.$$

$$b \quad \alpha = 0,445 \quad [1 + \alpha^2 \cos^2 \vartheta]^{3/8} \approx 1,07.$$

Da  $u^2 \ll v^2$  sein soll, werden in der 1. Impulsgleichung alle Terme mit  $u^2$  gestrichen. Für die Scheibe ist

$$a \quad \frac{\int_0^\delta v^2 dz}{\int_0^\delta v^2 dz} \approx 0,19.$$

$$b \quad \frac{\int_0^\delta v^2 dz}{\int_0^\delta v^2 dz} \approx 0,1.$$

Wird die Streichung durchgeführt, dann vereinfacht sich die 1. Impuls-gleichung zu

$$- \int_0^\vartheta v^2 dz \cdot \operatorname{ctg} \vartheta = - R \frac{\tau_{or} \vartheta}{\varrho}. \quad (6.12)$$

Wir setzen

$$\delta = \lambda \cdot \frac{R}{\sqrt[5]{\operatorname{Re}}}$$

und erhalten nach Ausrechnung des Integrals

$$\alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{\lambda^{5/4}}{\sin^{3/4} \vartheta}. \quad (6.13)$$

Eingesetzt in die 2. Impulsgleichung ergibt sich

$$\lambda^{3/2} \cdot \frac{d\lambda}{d\vartheta} + \lambda^{5/2} \left[ \frac{13}{9} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{4}{9} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \right] = \frac{4}{9} \cdot \frac{e^2}{b \cdot c} \cdot \frac{\sin^{1/4} \vartheta}{\cos \vartheta}. \quad (6.14)$$

Durch Substitution

$$x = \lambda^{5/2}, \quad dx = \frac{5}{2} \cdot \lambda^{3/2} \cdot d\lambda$$

läßt sich die gewöhnliche Differentialgleichung integrieren. Man erhält nach Resubstitution und Bestimmung der Konstanten

$$\lambda = \left[ \frac{20}{18} \cdot \frac{e^2}{b \cdot c} \right]^{2/5} \underbrace{\left[ \frac{1}{\sin^{65/18} \vartheta \cdot \cos^{20/18} \vartheta} \int_0^\vartheta \sin^{74/18} \vartheta \cdot \cos^{2/18} \vartheta d\vartheta \right]^{2/5}}_{F_1(\vartheta)}. \quad (6.15)$$

Die Grenzschichtdicke wird dann

$$\delta = \frac{R}{\sqrt[5]{\operatorname{Re}}} \left[ \frac{20}{18} \cdot \frac{e^2}{b \cdot c} \right] \cdot F_1(\vartheta)^{2/5}. \quad (6.16)$$

Diese beginnt mit vertikaler Tangente bei

$$\vartheta = 0, \quad \frac{dF_1}{d\vartheta} \rightarrow \infty$$

$$\vartheta = \pi/2, \quad F_1(\vartheta) \rightarrow \infty$$

und geht bei  $\vartheta = \pi/2$  gegen Unendlich, was natürlich nicht reell sein kann. Für  $\vartheta = \pi/2$  sind die Streichungen nicht zulässig.

Da aber  $F_1$  mit  $\operatorname{const.}/\cos^{1/2} \vartheta$  gegen Unendlich geht, kann erwartet werden, daß das Versagen der Lösung auf die unmittelbare Umgebung des Äquators beschränkt bleibt. Für die Größe  $\alpha$  ergibt sich die folgende Lösung

$$\alpha = \frac{b}{c} \cdot \frac{\lambda^{5/4}}{\sin^{3/4} \vartheta}, \quad (6.17)$$

$$\alpha = \left[ \frac{20}{18} \cdot \frac{b}{c} \right]^{1/2} \cdot F_2(\vartheta)^{1/2} \quad (6.18)$$

mit

$$F_2(\vartheta) = \frac{1}{\sin^{92/18} \vartheta \cdot \cos^{20/18} \vartheta} \int_0^{\vartheta} \sin^{74/18} \vartheta \cdot \cos^{2/18} \vartheta \cdot d\vartheta. \quad (6.19)$$

Beim Grenzübergang  $\vartheta \rightarrow 0$  erhält man

$$\vartheta \rightarrow 0, \quad F_2^{1/2} \rightarrow 0,4425, \quad \frac{dF_2}{d\vartheta} = 0$$

$$\vartheta \rightarrow \pi/2, \quad F_2^{1/2} \rightarrow \infty.$$

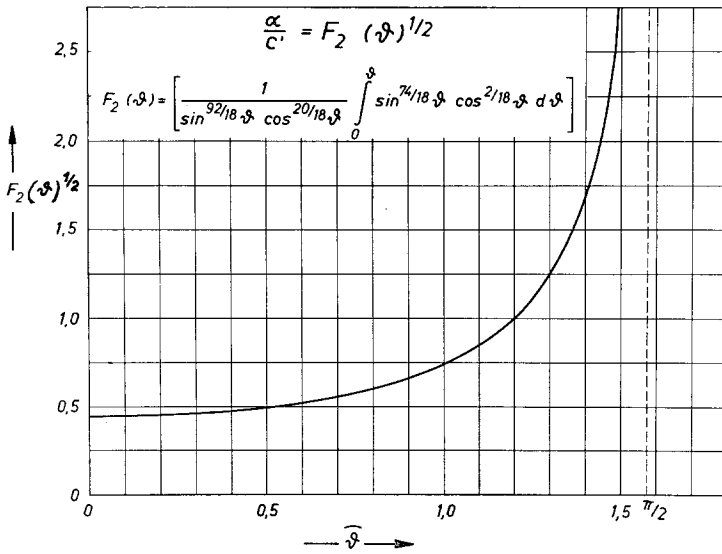


Abb. 37. Funktion  $F_2(\vartheta)^{1/2}$

Die Abb. 37 zeigt den Verlauf der Funktion  $F_2(\vartheta)^{1/2}$ . Das Reibungsmoment wird für beide Kugelhälften

$$M = -4\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \tau_{0r\vartheta} d\vartheta.$$

Den Ausdruck für die Wandschubspannung eingesetzt, ausgerechnet und dimensionslos gemacht, erhält man die Reibungszahl

$$a \quad \zeta_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \omega_0^2 R^5} = \frac{0,378}{5 \sqrt{\text{Re}}},$$

$$b \quad \zeta_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \omega_0^2 R^5} = \frac{0,334}{5 \sqrt{\text{Re}}}.$$

Aus der Kontinuitätsbedingung läßt sich die Radialgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht ermitteln:

$$w_\delta = -\frac{1}{R} \left[ \frac{d}{d\vartheta} \int_0^\delta u \, dz + \int_0^\delta u \operatorname{ctg} \vartheta \, dz \right]. \quad (6.20)$$

Mit dem Ausdruck für  $u$  und unter Zuhilfenahme der Differentialgleichung für  $\delta$  wurde nach Umformen

$$w_\delta = -\frac{R \cdot \omega_0}{\sqrt[5]{Re}} \cdot C \cdot F_4(\vartheta) \left[ 1 - \frac{20}{9} F_5(\vartheta) \right] \quad (6.21)$$

mit

$$F_4(\vartheta) = \frac{\cos^{16/18} \vartheta}{\sin^{92/18} \vartheta} \int_0^\vartheta \sin^{74/18} \vartheta \cos^{2/18} \vartheta \, d\vartheta, \quad (6.22)$$

$$F_5(\vartheta) = \frac{\sin^{20/18} \vartheta \cdot \cos^{21/18} \vartheta}{\left[ \int_0^\vartheta \sin^{74/18} \vartheta \cdot \cos^{2/18} \vartheta \right]^{1/10}}. \quad (6.23)$$

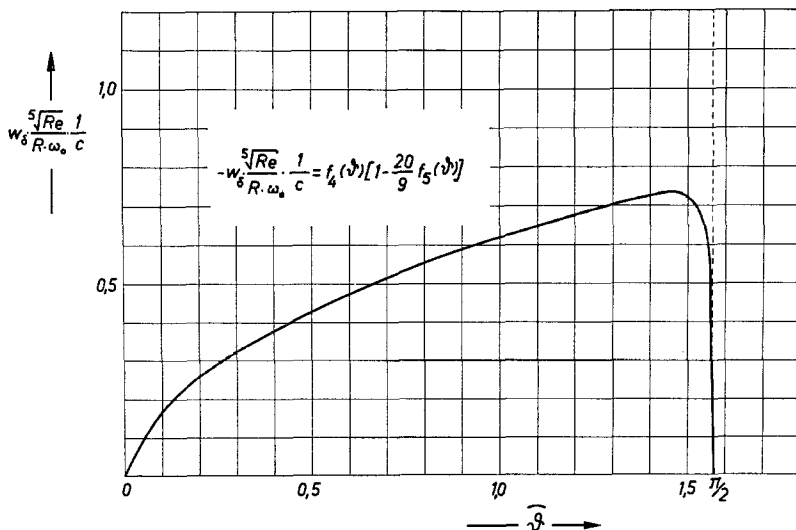


Abb. 38. Radialgeschwindigkeit  $w_\delta$

Da für

$$\vartheta \rightarrow 0 \quad F_5(\vartheta) \rightarrow 0,195$$

und für

$$\vartheta \rightarrow \pi/2 \quad F_5(\vartheta) \rightarrow 0,$$

ist  $w_\delta$  immer negativ, d. h. es strömt auf der ganzen Kugeloberfläche Flüssigkeit in die Grenzschicht ein. Den Verlauf der dimensionslosen Radialgeschwindigkeit zeigt Abb. 38.

In der Äquatorebene muß aus Symmetriegründen die eingeströmte Flüssigkeit wieder ausströmen. Es muß also sein

$$4 \pi \cdot R \int_0^{\delta} u dz \big|_{\vartheta = \pi/2} = 4 \pi \cdot R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta w_{\delta} \cdot d\vartheta. \quad (6.24)$$

Wenn die Vernachlässigungen den Charakter der Gleichungen nicht grundsätzlich geändert haben, muß für kleine Winkel  $\vartheta$  die Lösung für die rotierende Scheibe herauskommen.

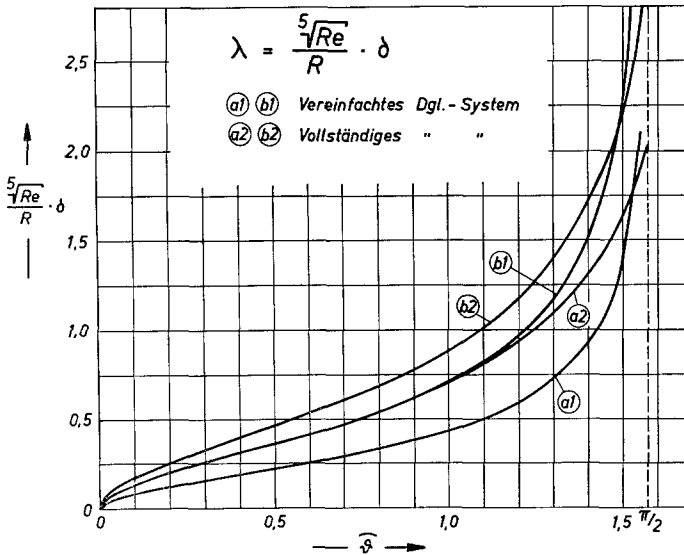


Abb. 39. Dimensionslose Grenzschichtdicke  $\lambda(\vartheta)$ .

Bei der Scheibe ist

$$\delta = \beta \cdot r^{3/5}, \quad \text{mit} \quad \beta = 0,525 \left( \frac{\nu}{\omega_0} \right)^{1/5}$$

$$\text{wird} \quad \delta = \frac{0,525 \cdot r}{\sqrt[5]{Re}}.$$

Bei der Kugel ist

$$\delta = \frac{R}{\sqrt[5]{Re}} \cdot C' F_1(\vartheta)^{2/5}.$$

Für kleine Werte ist  $\sin \vartheta \approx \vartheta$  und  $\cos \vartheta \approx 1$ .

Aus  $F_1(\vartheta)$  wird dann

$$\left[ \frac{1}{\vartheta^{65/18}} \cdot \int_0^{\vartheta} \vartheta^{74/18} \cdot d\vartheta \right]^{2/5} = \left( \frac{18}{92} \right)^{2/5} \cdot \vartheta^{3/5},$$

und mit  $R \cdot \vartheta = r$  wird

$$\delta = \frac{r}{5 \sqrt{\text{Re}}} \cdot \text{konst.}$$

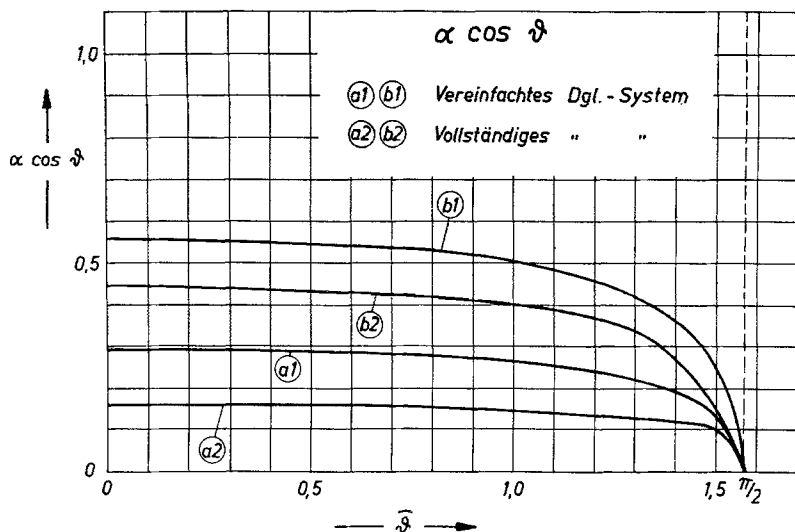


Abb. 40. Verhältnis der Komponenten der Geschwindigkeit und der Wandschubspannung  $\alpha \cos \vartheta$

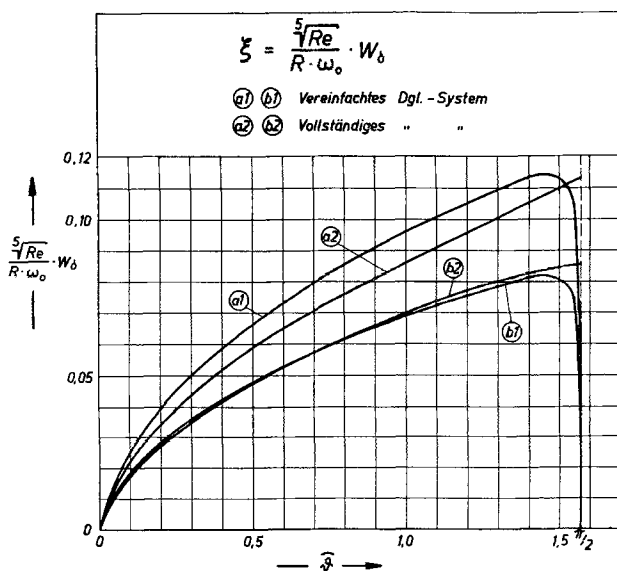


Abb. 41. Radialgeschwindigkeit  $w_\delta$

Die Abhängigkeit ist die gleiche geblieben, während die Konstante sich geändert hat. Die Werte der Konstanten für  $\delta$  und  $\alpha$  sind der Tabelle Abb. 42 zu entnehmen.

Das Gleichungssystem (6.11) ist zum Vergleich mit den verkürzten Lösungen nach einem numerischen Verfahren (RUNGE-KUTTA) auf dem Elektronenrechner integriert worden. Dabei wurde in der Umgebung des Nullpunktes die v. KÁRMÁNSche Lösung für die rotierende Scheibe benutzt, um die Rechnung in Gang zu bringen.

Die Ergebnisse für die Grenzschichtdicke zeigt die Abb. 39.

Die Turbulente Grenzschicht

	$\delta \cdot \frac{\sqrt[5]{Re}}{\nu}$	$\alpha$	$\zeta_M \sqrt[5]{Re}$	$V_{1/2} \cdot \frac{\sqrt[5]{Re}}{R^3 \cdot \omega}$	$\Phi^\circ = \arctg \frac{u}{v}$
Experiment-Kugel			$\sim 0,400$	0,437	
Verkürzte Rechnung	a		0,378	0,576	
Genauere Rechnung			0,397	0,520	
Verkürzte Rechnung	b		0,335	0,413	
Genauere Rechnung			0,397	0,425	
Scheibe	a	0,525	0,162	0,146	48° 36'
Kugel ( $\vartheta \rightarrow 0$ )		0,321	0,293		
Scheibe	b	0,669	0,445	0,146	24°
Kugel ( $\vartheta \rightarrow 0$ )		0,529	0,556		
Experiment-Scheibe			$\sim 0,146$	$\sim 0,132$	18°

Abb. 42. Zusammenstellung gemessener und berechneter Werte

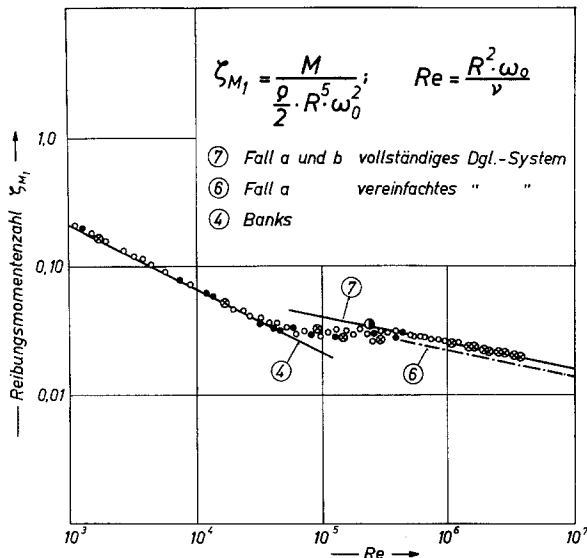


Abb. 43. Reibungszahl im turbulenten Bereich

Die Tendenz ist für alle Lösungen die gleiche, jedoch streben die „exakten“ Lösungen für  $\vartheta = \pi/2$  gegen einen endlichen Wert. Den Wert  $\propto \cos \vartheta$  zeigt die Abb. 40.

In Abb. 41 ist die Radialgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht aufgetragen.

Für das dimensionslose Drehmoment errechnete sich für beide  $U$ -Profile bis auf die 3. Dezimale der gleiche Wert der Konstanten.

Der ermittelte Volumenstrom für beide Profile ist ebenfalls in der Zusammenstellung, Abb. 42, eingetragen.

Abb. 43 zeigt den Vergleich aller errechneten Reibungszahlen mit den gemessenen Werten. Für beide  $U$ -Profile ergab sich der gleiche Wert der Reibungszahl bei der genauen Rechnung, die Übereinstimmung dieses Wertes mit der gemessenen Reibungszahl ist sehr gut.

Das Ergebnis der verkürzten Rechnungen zeigt eine geringe Abweichung vom Meßwert.

### Experimentelle Ermittlung der Geschwindigkeitsprofile

An der bereits beschriebenen Versuchskugel wurden die Geschwindigkeitsverteilungen für die  $u$ - und  $v$ -Komponente gemessen und in die Diagramme für die berechneten Profile eingetragen. Es wurde an drei Breitengraden gemessen:  $\vartheta = 60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ . Die folgenden Abbildungen zeigen das Ergebnis für  $\vartheta = 70^\circ$ . Abb. 44.

## 7. Schlußbetrachtung

Den Abschluß des Berichtes über die Untersuchungen am Strömungsfeld der rotierenden Kugel soll eine Bemerkung zum Reibungsmoment bilden: Die Abb. 45 gibt den gesamten gemessenen Bereich der Reibungszahlen in Abhängigkeit von der Re-Zahl wieder. Eingetragen sind ebenfalls die Ergebnisse verschiedener theoretischer Rechnungen. Sie zeigt, daß die Theorie jetzt in der Lage ist, eine Reibungszahl zu liefern, die im ganzen Bereich keine größere Abweichung aufweist als 4%, bis auf einen kleinen Bereich mittlerer Re-Zahlen.

## 8. Der Versuchsaufbau

### Drehmoment

Methode und experimentelle Einrichtungen zur Messung des Drehmomentes in Abhängigkeit von der Re-Zahl, Abb. 45, werden in [20] eingehend beschrieben.

### Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht

Die hochglanzpolierte Versuchskugel von  $D = 240$  mm ist mit einem Kugeldrehapparat bei einer Genauigkeit von  $1/100$  mm aus Walz-aluminium gedreht. Sie ist fliegend auf einer vertikalen Welle befestigt, damit eine Kugelhälfte frei von störenden Teilen bleibt. Die Welle wird über einen Keilriemen von einem Gleichstrommotor angetrieben, dessen



Drehzahl mit einem LEONARD-Satz stufenlos regelbar ist. Die Sondenhalterung ist auf einer konzentrisch zur Kugel ausgerichteten Kreisbogen-schiene spielfrei so verschiebbar, daß die Meßsonde immer radial gerichtet

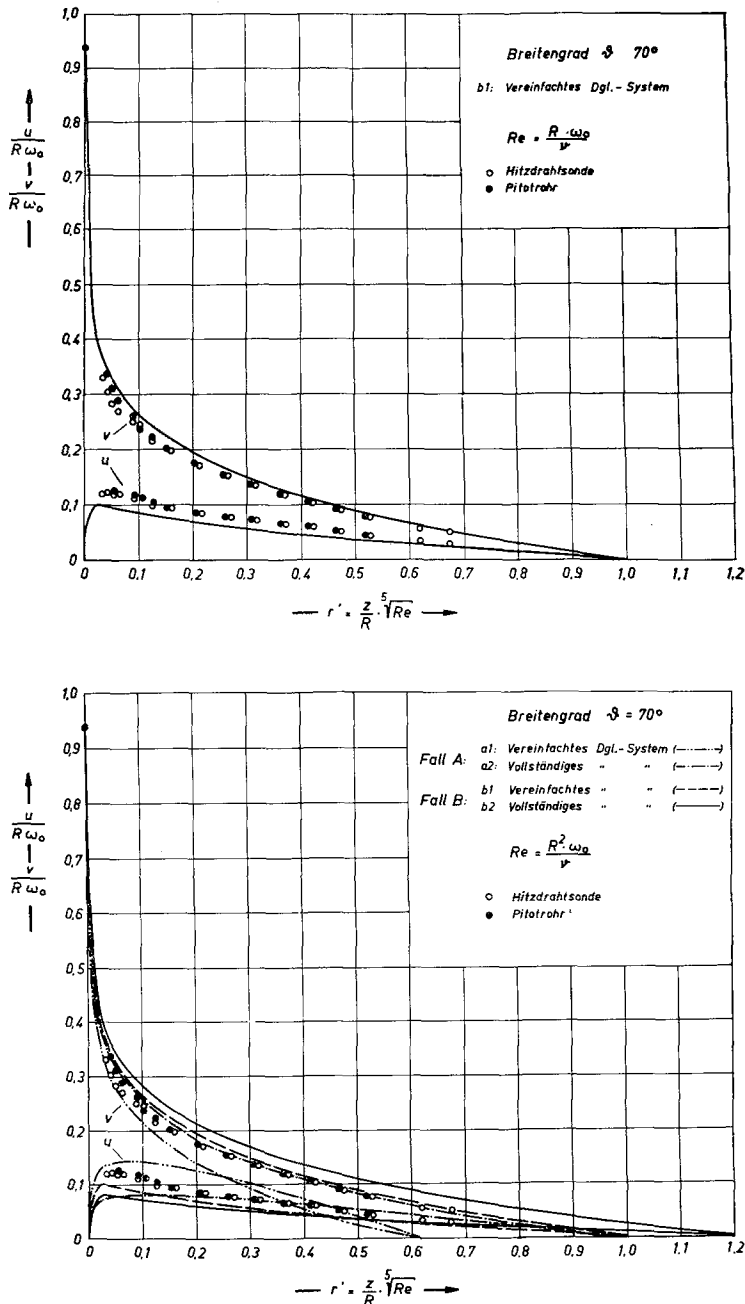


Abb. 44. Geschwindigkeitsprofile der turbulenten Grenzschicht für  $\vartheta = 70^\circ$

ist. Der Drehwinkel  $\Phi$  der Sonde um den Radius wird auf  $1/4$  Grad abgelesen. Der Abstand  $z$  von der Kugeloberfläche wird mit einer Mikrometerschraube auf  $1/100$  mm eingestellt.

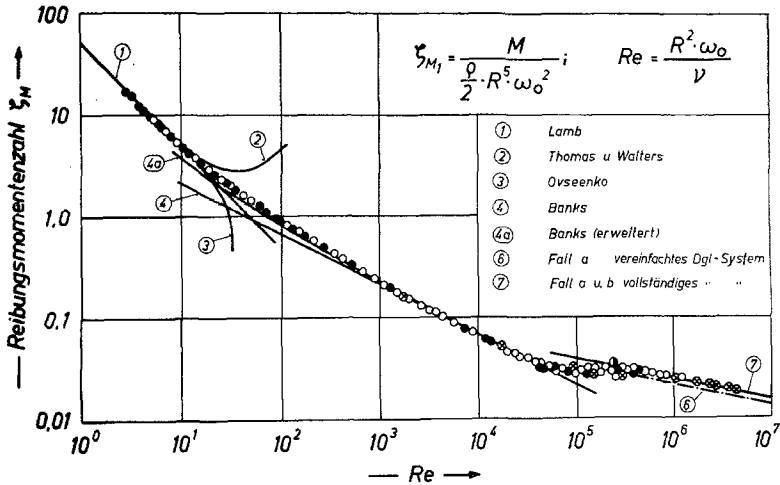


Abb. 45. Reibungszahl  $\zeta_M$  (Re) der rotierenden Kugel

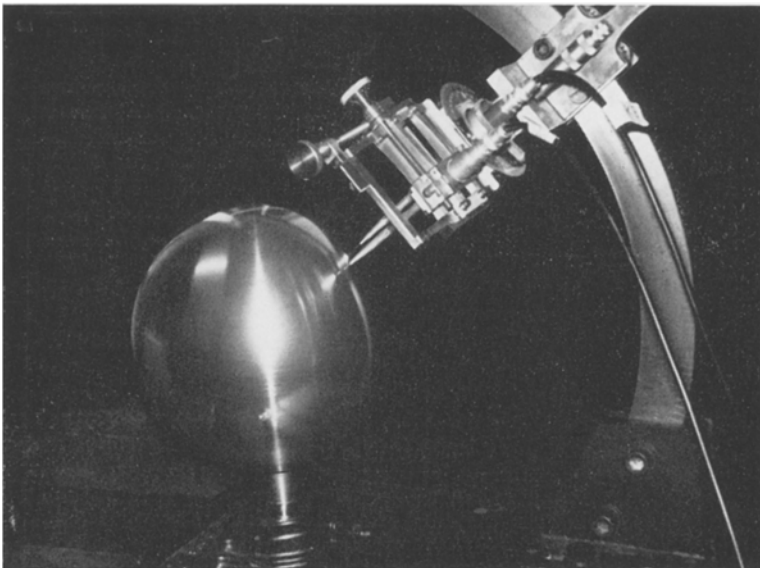


Abb. 46. Versuchsanordnung für die 2-Hitzdraht-Methode

Versuchskugel und Sondenhalterung sind auf getrennten Gestellen befestigt, damit eine Übertragung von Motorschwingungen auf die Sonde vermieden wird.

Strömungsbilder, mit einer Ruß-Petroleum-Mischung gewonnen, zeigen, daß die Strömung zur Äquatorebene symmetrisch ist, d. h. es ist kein

Einfluß der Kugelhälfte, die die Welle trägt, auf die freie Kugelhälfte zu beobachten (Abb. 47).

Die Abb. 46 zeigt die Versuchsanordnung.

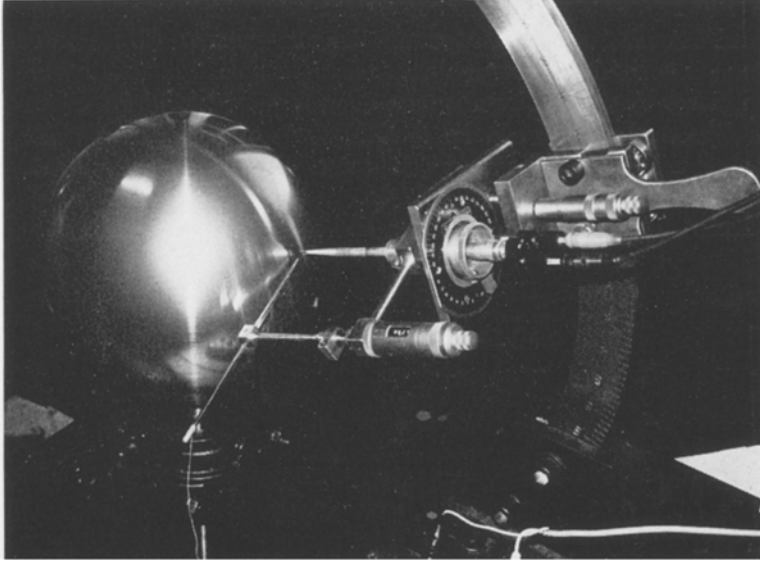


Abb. 47. Versuchsanordnung mit Thermoelement

### Drehzahl

Die Drehzahl wird digital über einen Impulsgeber mit hoher Genauigkeit gemessen und konstant gehalten.

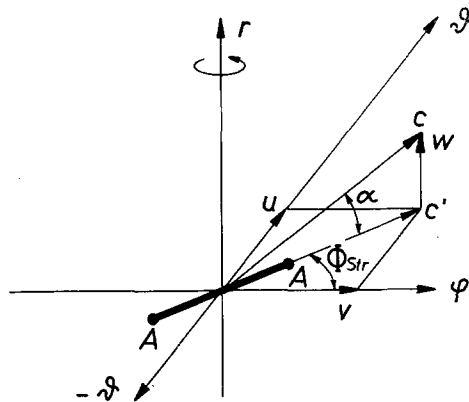


Abb. 48. Anordnung des Hitzdrahtes und Koordinaten

### Größe und Richtung der Geschwindigkeit

Im allgemeinen wurde die Richtung und Größe der Geschwindigkeit, der Turbulenzgrad und das Signal der Störungen im laminar-turbulenten

Übergangsgebiet mit einem Hitzdrahtanemometer der Firma DISA-Elektronik, Kopenhagen, Type 55 A 01, gemessen. Das Gerät arbeitet nach der Konstant-Temperatur-Methode. Einzelheiten sind der Spezialliteratur zu entnehmen.

Eine Linearisierungseinrichtung war nicht eingebaut. Die Methode, mit einem Einzeldraht drei Komponenten einer Geschwindigkeit zu messen, soll etwas eingehender erläutert werden.

Ein anderes Verfahren kam wegen der geringen Dicke der Grenzschicht nicht in Frage. Der eigentliche Meßdraht hat einen Durchmesser von  $5 \cdot 10^{-3}$  mm und eine Länge von 1 oder 0,5 mm. Die Halterung des Drahtes hat eine entsprechende Größe.

Die Koordinaten und Anordnung des Drahtes zeigt Abb. 48.

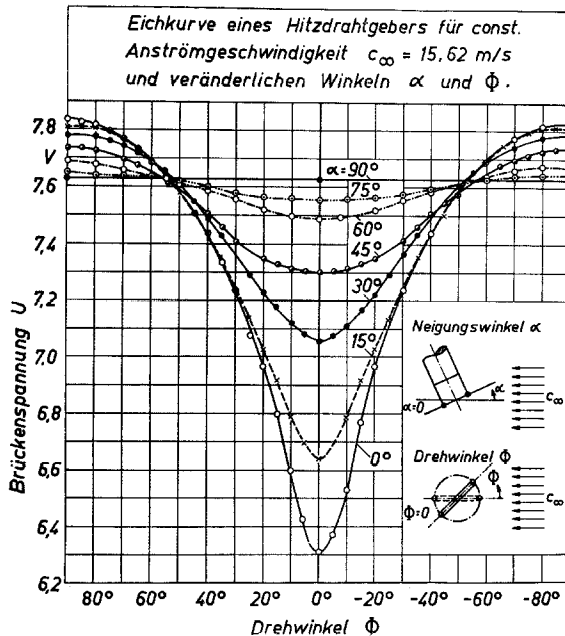


Abb. 49. Eichkurve des Hitzdrahtes für eine 3-dimensionale Messung

Der Hitzdraht  $AA$  ist in der Ebene  $\varphi - \vartheta$  um  $r$  drehbar. Die Strömung sei parallel zur  $\varphi - \vartheta$ -Ebene um den Winkel  $\Phi_{\text{Str}}$  zur Achse  $\varphi$  gerichtet. Ist der Draht parallel zur Strömung gerichtet,  $\Phi_{\text{So}} = \Phi_{\text{Str}}$ , dann zeigt das Gerät die kleinste Anzeige:  $V_{\text{min}}$ . Steht der Draht senkrecht zur Strömungsrichtung  $\Phi_{\text{S}} = 90 + \Phi_{\text{Str}}$ , dann hat die Anzeige ein Maximum  $V_{\text{max}}$ . Besitzt die Strömung noch eine Komponente  $W$ , d. h. ist sie um einen Winkel  $\alpha$  gegen die  $\vartheta - \varphi$ -Ebene geneigt, dann ändert sich das Verhältnis  $V_{\text{max}}/V_{\text{min}}$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$ . Die Abb. 49 zeigt eine Eichkurve für eine konstante Geschwindigkeit bei veränderlichen Winkeln  $\Phi$  und  $\alpha$ . Die Eichkurve demonstriert, daß die Stellung parallel zur Strömung wegen der Schärfe des Minimums zur Bestimmung der

Strömungsrichtung geeignet ist und die Stellung senkrecht zur Strömungsrichtung wegen des sehr flachen Maximums zur Bestimmung der Größe der Absolutgeschwindigkeit.

Man kann also mit Hilfe solcher Eichkurven die drei Komponenten der Geschwindigkeit bestimmen, bis auf das Vorzeichen von  $\alpha$  und  $w$ . Dazu wurde eine Hilfseinrichtung benutzt, das Foto Abb. 47 zeigt diese.

Hinter dem Hitzdraht wurde, bei Stellung senkrecht zur Strömungsrichtung, in einem kleinen Abstand  $a$  ein sehr kleines Thermoelement angeordnet, und zwar durch ein Mikrometer in Richtung  $r$  verschieblich. Mit dem Thermoelement wurde die Temperaturerhöhung beim Durchgang durch den aufgeheizten Nachlauf des Hitzdrahtes gemessen und so die Höhe  $\Delta l$  bestimmt (siehe Skizze Abb. 50). Aus  $a$  und  $\Delta l$  wird der Winkel  $\alpha$  errechnet. Daß diese Anordnung zur Messung des Winkels  $\alpha$  geeignet ist, zeigt die Eichkurve (Abb. 51).

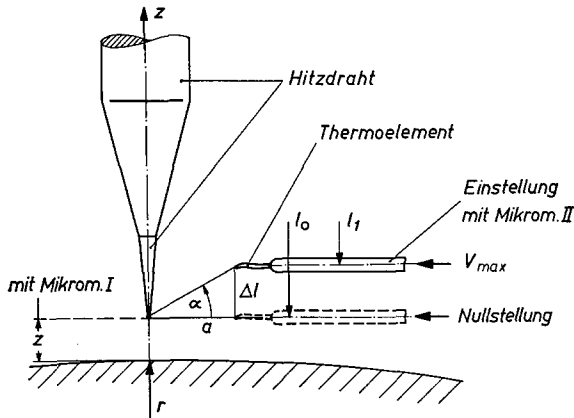


Abb. 50. Skizze zur Bestimmung des Winkels  $\alpha$  und seines Vorzeichens

Bei vorgegebenem Breitengrad  $\vartheta$  und Abstand  $z$  ( $z = 0$  wird mit Hilfe eines Modells des Hitzdrahtgebers festgelegt) wurde der Winkel  $\Phi$  durch  $V_{\min}$  und die Größe der Absolutgeschwindigkeit  $c$  durch  $V_{\max}$  bestimmt, der Winkel  $\alpha$  durch das Verhältnis  $V_{\min}/V_{\max}$  und sein Vorzeichen durch das Thermoelement.

Die Komponenten von  $c$  in Richtung  $r$ ,  $\varphi$  und  $\vartheta$  errechnen sich dann wie folgt:

$$c' = c \cdot \cos \alpha,$$

$$w = c \cdot \sin \alpha,$$

$$v = c' \cdot \cos \Phi = c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \Phi,$$

$$u = c' \cdot \sin \Phi = c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \Phi.$$

Zu der beschriebenen Methode sind die folgenden Bemerkungen notwendig: Die Bestimmung von  $\alpha$  und damit  $c$  war durch die Eichung  $V_{\min}/V_{\max} = f(\alpha)$  nur möglich bei laminarer Strömung.

Bei turbulenter Strömung ist das Verhältnis  $V_{\min}/V_{\max}$  nicht nur eine Funktion von  $\alpha$ , sondern zusätzlich abhängig vom Turbulenzgrad. Da der Turbulenzgrad sich mit dem Abstand  $z$  ändert, ist eine Eichung in bezug auf diesen Parameter kaum möglich. Der Winkel  $\alpha$  wurde darum im turbulenten Fall nur mit der Methode „Thermoelement“ bestimmt.

Ferner wird in großer Wandnähe mit einem Hitzdraht, d. h. für  $z < 0,8$  mm, für die Geschwindigkeit ein zu kleiner Wert ermittelt, im Gegensatz zu Strömungen an einer ruhenden Wand, wo ein zu hoher Wert herauskommt. Dieser Wandeinfluß wird vernachlässigbar bei turbulenter Strömungsform. Das Phänomen wird zur Zeit näher untersucht.

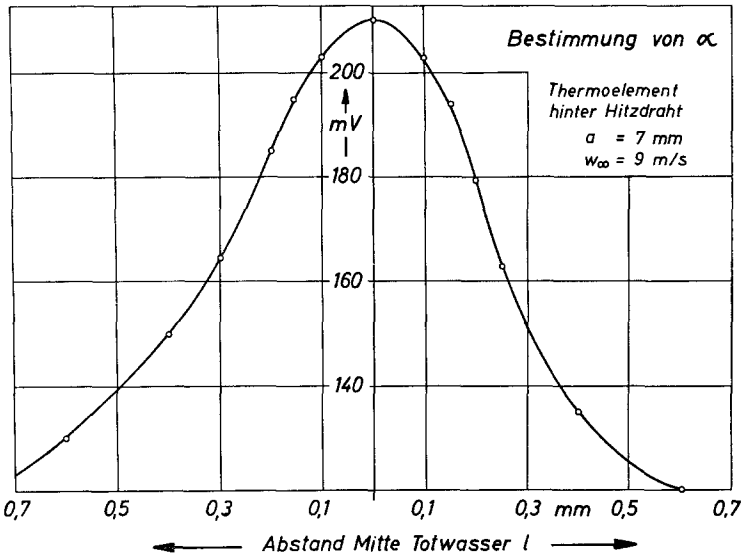


Abb. 51. Eichkurve des Thermoelementes im Nachlauf des Hitzdrahtes

Zur Kontrolle wurden deshalb Messungen mit normalen Strömungs-sonden durchgeführt, und zwar mit Pitotrohr und Richtungs-sonde, bestehend aus zwei angeschärften und zusammengelöteten Pitotrohren und einer Sonde zur Messung des statischen Druckes.

Die Sonden sind aus Stahlröhrchen (med. Kanülen) mit einem Außendurchmesser von  $\approx 0,4$  mm gefertigt. Durch Zusammendrücken der Spitzen wurde aus dem Kreis eine Ellipse. Die Kleine Achse betrug nunmehr nur noch  $\approx 0,3$  mm. Die Bohrung für den statischen Druck hatte einen Durchmesser von 0,1 mm. Damit gelang es, den Fehler durch den Wandeinfluß bei der Hitzdrahtsonde zu korrigieren. Um die Einstellzeit bei diesen Drucksonden klein zu halten, wird ein spezielles Mikromanometer verwendet.

Die Meßmethoden im Übergangsbereich laminar-turbulent werden zur besseren Deutung des Meßergebnisses daselbst erwähnt und beschrieben. Die Meßgeräte, die benutzt wurden, sind im folgenden angegeben.

## Messungen im instabilen Gebiet

Für die Messungen des Übergangsbereiches laminar-turbulent wurden

1. Druckgeber nach RÜCKAUER,
2. das bereits angegebene Hitzdrahtanemometer,
3. Oszillographen (Speicheroszillograph mit Polaroidkamera),
4. Frequenzanalysator,
5. Impulsgeber,
6. Optische Methoden, Ruß-Petroleum, China-Clay, Rauch verwendet.
7. Der Versuchsstand ist der gleiche wie der bei den Messungen der Geschwindigkeitsverteilung.

## Literatur

- [1] BANKS, W. H. H.: The three-dimensional laminar boundary layer on a rotating sphere and other topics. Dissertation, University of Bristol, 1963.
- [2] BURGERS, J. M.: Hitzdrahtmessungen. Handbuch der Experimentalphysik von WIEN-HARMS IV, 1. Teil, S. 637—667.
- [3] COCHRAN, W. G.: The flow due to a rotating disc. Proc. Cambridge Phil. Soc. A 1934, S. 365—375.
- [4] GÖRTLER, H.: Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. ZAMM 20, 138—147 (1940).
- [5] GÖRTLER, H.: Über eine drei-dimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., Neue Folge I, 2, 1—26 (1940).
- [6] GÖRTLER, H. und H. WITTING: Theorie der sekundären Instabilität laminarer Grenzschichten. Boundary Layer Research, IUTAM-Symposium Freiburg i. Br. Berlin, Göttingen und Heidelberg: Springer, 1958, S. 110—125.
- [7] GREGORY, N., J. T. STUART und W. S. WALKER: On the Stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disc. Phil. Trans. Roy. Soc. A 248, 155—199 (1955).
- [8] HÄMMERLIN, G.: Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. J. Rat. Mech. Analysis 4, 279—321 (1955).
- [9] HOWARTH, L.: Note on the boundary layer on a rotating sphere. Phil. Mag. 42, 1308—1315 (1951).
- [10] v. KÁRMÁN, TH.: Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233—252 (1921).
- [11] KHAMRUI, S. R.: On the slow steady rotation of a sphere in a viscous liquid. Bull. Soc. Calcutta Math. 48, Nr. 4, 159—161 (1956).
- [12] KIRCHGÄSSNER, K.: Beiträge zur hydrodynamischen Stabilitätstheorie. Dissertation Universität Freiburg i. Br. 1951.
- [13] KOBASHI, Y.: Measurements of boundary layers of a rotating sphere. J. Sci. of the Hiroshima Univ., Japan, Ser. A 20, Nr. 3 (1957).
- [14] KOVASZNEY, S. G.: Development of turbulence measuring equipment. NACA, TN 2839 (1953).
- [15] LIEPMANN, H. W.: Investigation on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries. NACA Wartime Report 1943 (W-107).
- [16] LORD RAYLEIGH: Sci. Papers I 474—487 (1880); III 17 (1887); IV 197 (1913).
- [17] LUDWIG, H.: Stabilität der Strömung in einem zylindrischen Ringraum. ZfW 8 135—140 (1960). Ergänzung dazu Z. Flugwiss. 9, 361—362 (1961).
- [18] OVSEENKO, JU. G.: Über die Bewegung einer viskosen Flüssigkeit zwischen zwei rotierenden Kugelflächen. Izvestija VUZ Matematika 1963, H. 4, S. 129.
- [19] RAJESWARI, G. K.: Laminar boundary layer on a rotating sphere and spheroids in non-Newtonian fluids. ZAMP 13, 442 (1962).

- [20] SAWATZKI, O.: Reibungsmoment rotierender Ellipsoide. Sonderdruck aus Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen, Heft 2, November 1965. Mitteilungen des Instituts für Strömungslehre und Strömungsmaschinen, Technische Hochschule Karlsruhe.
- [21] STEWARTSON, K.: On rotating laminar boundary layers. 50 Jahre Grenzschichtforschung 1955, Freiburg i. Br.
- [22] SQUIRE, H. B.: On the stability of threedimensional distribution of viscous fluid between parallel walls. Proc. Roy. Soc. London A **142**, 621—628 (1933).
- [23] STUART, J. T.: On the effects of Reynold stress on hydrodyn. stability. ZAMM Sonderheft S. 32—38 (1956).
- [24] STUART, J. T.: On the non-linear mechanics of hydro-dynamic stability. J. Fluid Mech. **4**, 1—21 (1958).
- [25] THOMAS, R. H. und K. WALTERS: The motion of an elasto-viscous liquid due to a sphere rotating about its diameter. Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. XVII (1964).
- [26] TOLLMIEEN, W.: Über die Entstehung der Turbulenz. 1. Mitt. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Kl. **21**—44 (1929).
- [27] TOLLMIEEN, W.: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., Fachgr. I, **1** (1935) S. 79—114.
- [28] WEHRMANN, O.: Methoden und Anwendungen der Hitzdraht-Meßtechnik für Strömungsvorgänge. Konstruktion **10**, H. 8, 299 (1958).
- [29] WEHRMANN, O.: Hitzdrahtmessungen an einer aufgespaltenen KÁRMÁNSchen Wirbelstraße. DVL-Bericht Nr. 43, 1957.

#### Lehrbücher und Übersichten

- [30] COOKE, J. C. und M. G. HALL: Boundary layers in three dimensions. Advances in Appl. Mechanics, Vol. **4**, Academic Press 1956.
- [31] DORFMAN, L. A.: Hydrodynamic resistance and the heatloss of rotating solids. Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1963.
- [32] GÖRTLER, H.: Einige neuere Ergebnisse zur hydrodyn. Stabilitätstheorie. Z. Flugwiss. 1960, 8. Jahrgang, H. **1**, S. 1.
- [33] LAMB, H.: Lehrbuch der Hydrodynamik. 2. Aufl., Teubner, Leipzig und Berlin 1931, S. 665—666.
- [34] MOORE, F. K.: Three-dimensional boundary layer theory. Advances in Appl. Mechanics, Vol. **4**, Academic Press 1956.
- [35] SCHLICHTING, H.: Grenzschichttheorie. 5. Aufl., Karlsruhe 1965.

*Dozent Dr.-Ing. Otto Sawatzki*  
*Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen*  
*Universität Karlsruhe*  
*D-75 Karlsruhe, Kaiserstraße 12*