

Diagrama de Voronoi y Triangulación de Delaunay

Diagrama de Voronoi

El diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos, llamados sitios, es una partición del plano en regiones, una para cada sitio. La región de un sitio, o celda de Voronoi, contiene todos los puntos del plano que están más cerca de ese sitio que de cualquier otro sitio.

El diagrama de Voronoi tiene aplicaciones en física, astronomía, robótica y muchos otros campos. También está estrechamente relacionado con la triangulación de Delaunay.

Parábolas y el Foco en Diagramas de Voronoi

El algoritmo de línea de barrido, también conocido como el algoritmo de Fortune, se puede utilizar para calcular el diagrama de Voronoi. El algoritmo funciona moviendo una línea de barrido horizontal de arriba a abajo sobre el plano. A medida que la línea de barrido se mueve, mantiene información sobre la parte del diagrama de Voronoi de los sitios por encima de la línea de barrido que no puede ser cambiada por los sitios por debajo de ella.

Esta información se mantiene en una estructura de datos llamada línea de playa. La línea de playa es una curva x-monótona (cada línea vertical la corta exactamente en un punto) definida por una serie de arcos parabólicos.

Cada sitio por encima de la línea de barrido define una parábola. El foco de la parábola es el sitio, y la directriz es la línea de barrido. La línea de playa es la función que, para cada coordenada x, pasa por el punto más bajo de todas las parábolas.

Los puntos de ruptura entre los diferentes arcos parabólicos que forman la línea de playa se encuentran en los bordes del diagrama de Voronoi. De hecho, los puntos de ruptura trazan exactamente el diagrama de Voronoi a medida que la línea de barrido se mueve de arriba a abajo.

Triangulación de Delaunay

La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos en el plano es una triangulación tal que el círculo circunscrito de cualquier triángulo no contiene ningún punto del conjunto en su interior.

La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos se puede obtener a partir del diagrama de Voronoi del conjunto. Los vértices de la triangulación de Delaunay son los sitios del diagrama de Voronoi. Dos sitios están conectados por un borde en la triangulación de Delaunay si y solo si sus celdas de Voronoi comparten un borde.

La triangulación de Delaunay es una triangulación "óptima en ángulo" en el sentido de que maximiza el ángulo mínimo sobre todas las triangulaciones del conjunto de puntos. Esta propiedad hace que la triangulación de Delaunay sea útil para la interpolación de altura y otras aplicaciones.

Cálculo de la Triangulación de Delaunay

1. Paso Inicial:

- **Eligiendo un punto principal:**
Se selecciona el punto más alto en el conjunto de puntos, llamémoslo p_0 .
- **Añadiendo dos puntos auxiliares:**
Luego, se eligen dos puntos extra p_1 y p_2 , que se colocan muy lejos de todos los demás puntos. Estos tres puntos forman un gran triángulo que rodea todos los demás.
- **Primera triangulación:**
Con estos tres puntos p_0, p_1, p_2 , tenemos una triangulación inicial, que es solo este gran triángulo.

2. Agregando puntos paso a paso:

- **Reordenar los puntos aleatoriamente:**
Tomamos los demás puntos y los mezclamos en un orden al azar.
- **Insertar los puntos en la triangulación:**
Para cada punto nuevo, buscamos el triángulo que lo contiene. Luego, conectamos este punto con los tres vértices del triángulo, dividiéndolo en tres triángulos más pequeños.

3. Ajustando las aristas (bordes):

- **¿Qué pasa con las aristas ilegales?**
A veces, después de agregar un punto, las nuevas conexiones pueden no ser las mejores posibles (pueden crear triángulos con ángulos demasiado pequeños). En estos casos, se vuelven "ilegales".
- **Corrigiendo las aristas ilegales:**
Para arreglar esto, se verifica cada nueva arista. Si una es ilegal, se "voltea", es decir, se cambia por una línea alternativa que conecte otros dos puntos. Esto se repite hasta que todas las conexiones sean correctas.

4. Finalización:

- **Remover los puntos auxiliares:**
Al final, se eliminan los puntos auxiliares p_1 y p_2 , junto con las aristas conectadas a ellos, ya que solo se usaron para construir el triángulo inicial.
-

De la Triangulación de Delaunay al Diagrama de Voronoi

Dualidad entre Delaunay y Voronoi:

La triangulación de Delaunay y el diagrama de Voronoi son estructuras duales. Esto significa que existe una correspondencia entre ambos:

- Cada vértice de la triangulación de Delaunay corresponde a una **región** en el diagrama de Voronoi.
- Cada **arista** en la triangulación de Delaunay corresponde a una arista en el diagrama de Voronoi.

Construcción del Diagrama de Voronoi:

1. Cálculo de circuncentros:

Para cada triángulo en la triangulación de Delaunay, se calcula su **circuncentro** (el centro del círculo que pasa por sus tres vértices).

2. Conexión de circuncentros:

Los circuncentros de triángulos adyacentes se conectan para formar las aristas del diagrama de Voronoi. Cada región del diagrama se delimita por estas conexiones, y su centro corresponde a un vértice de la triangulación de Delaunay.

Este proceso es directo porque la triangulación de Delaunay garantiza que los circuncentros no se cruzan, lo que asegura que el diagrama de Voronoi sea un diagrama válido y no degenerado.