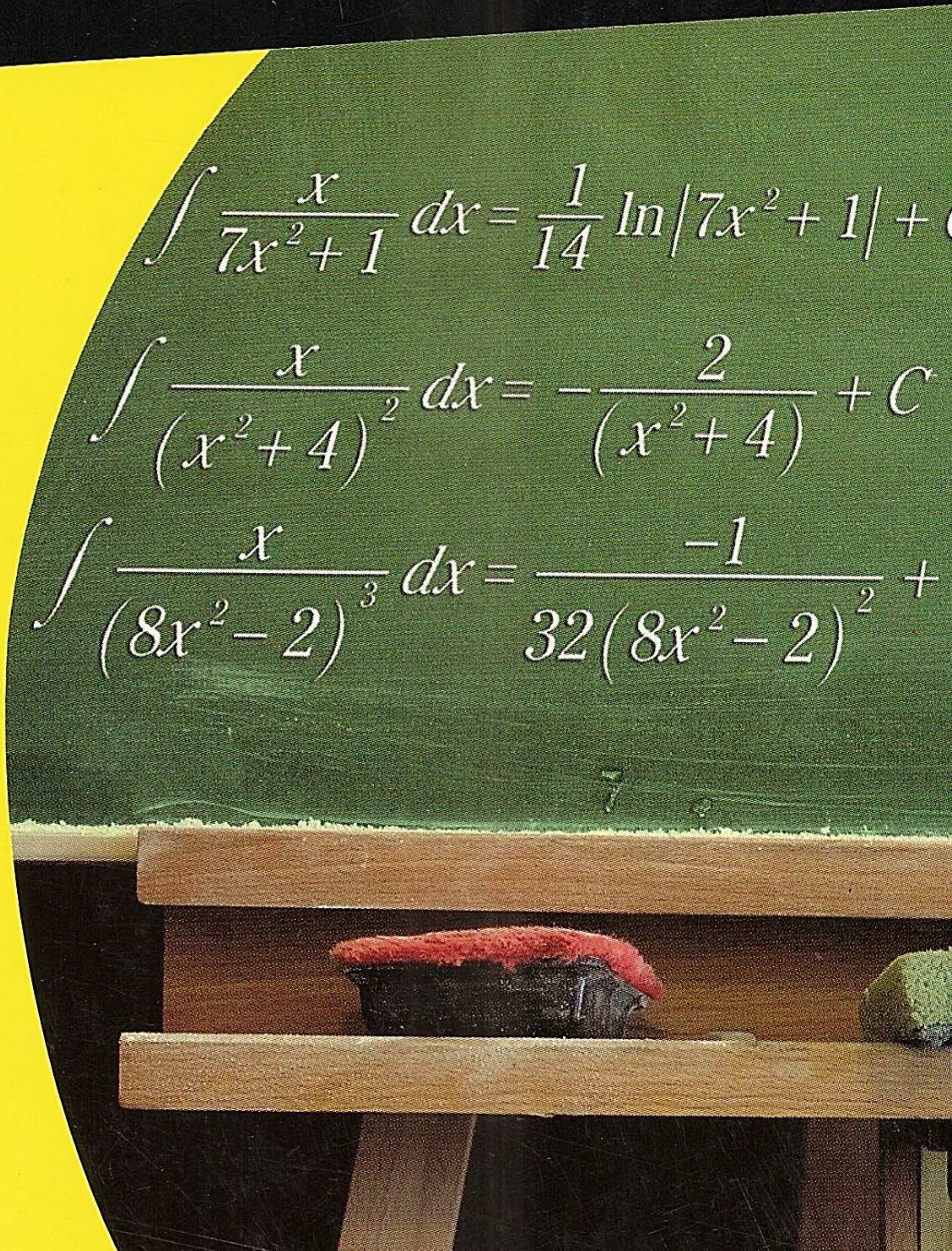
Confuso com curvas? Perplexo com polinômios?
Este guia de fácil entendimento o levará a outro nível

Cálculo II

PARA LEIGOS®

FOR DUMMIES®



Aprenda a:

- **Substituir variáveis**
- **Distinguir sequências e séries**
- **Integrar por partes**
- **Compreender notações para sequências infinitas**
- **Trabalhar com convergência e divergência**

Tornando tudo mais fácil!

Mark Zegarelli
Autor de Lógica Para Leigos®

Cálculo II Para Leigos®

Folha de Cola

A Fórmula da Soma de Riemann para a Integral Definida

A Fórmula da Soma de Riemann fornece uma definição precisa da integral como o limite de uma série infinita.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Três Regras Importantes de Integração

As Regras de Soma da Integração dizem que está tudo ok para integrar longas expressões termo por termo. Aqui é formalmente:

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx =$$

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

A Regra da Integração de Múltiplo Constante diz que está tudo ok para mover uma constante para fora de uma integral antes de integrar. Aqui se expressa em símbolos:

$$\int nf(x)\,dx = n\int f(x)\,dx$$

A Regra de expoente para a Integração permite integrar qualquer expoente real (exceto -1). Aqui está a Regra do Expoente expressada formalmente:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ onde } n \neq -1$$

As 17 Bases Integrais com Base em Antiderivados

As 17 Bases Integrais (Antiderivada)

Derivada	*Integral (Antiderivada)*
$\frac{d}{dx}\, n = 0$	$\int 0\,dx = C$
$\frac{d}{dx}\, x = 1$	$\int 1\,dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\, e^x = e^x$	$\int e^x = e^x + C$
$\frac{d}{dx}\ln n = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$
$\frac{d}{dx}\, n^x = n^x \ln n$	$\int n^x\,dx = \frac{n^x}{\ln n} + C$
$\frac{d}{dx}\,\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \tan x \sec x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \cot x \csc x\,dx = -\csc x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$
$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$
$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int -\frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccot} x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec} x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccsc} x + C$

Resolvendo Integrais com Substituição de Variáveis

Avalie uma integral usando a substituição de variáveis, seguindo estes passos:

1. **Declare uma variável *u* e a defina igual a uma expressão algébrica que aparece na integral, e então substitua *u* por essa expressão na integral.**
2. **Diferencie *u* para encontrar $\frac{du}{dx}$ e isole todas as variáveis *x* em um lado do sinal de igual.**
3. **Faça outra substituição para mudar *dx* e todas as ocorrências de *x* na integral para uma expressão que inclui *du*.**
4. **Integre usando *u* como sua nova variável.**
5. **Expresse essa resposta em termos de *x*.**

Para Leigos®: a série de livros para iniciantes que mais vende no mundo.

Cálculo II Para Leigos®

Folha de Cola

Dois Atalhos de Substituição

Algumas integrais de funções compostas $f(g(x))$ são fáceis de fazer rapidamente. Reconheça esses dois tipos de integrais.

Funções compostas onde a função interna é ax

Este atalho funciona para as composições de funções $f(g(x))$ para as quais:

- Você sabe como integrar a função exterior f.
- A função interna $g(x)$ é da forma ax — ou seja, ela diferencia uma constante.

Por exemplo:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$$

$$\int \tan 4x\,dx = \frac{1}{4}\sec^2 4x + C$$

Funções compostas onde a função interna é ax+b

Esse atalho funciona para as composições de funções $f(g(x))$ para os quais:

- Você sabe como integrar a função exterior f.
- A função interna $g(x)$ é da forma $ax + b$ — ou seja, ela diferencia uma constante.

Por exemplo:

$$\int \ln|2x+5|\,dx = \frac{1}{2|2x+5|} + C$$

$$\int \operatorname{sen}(3x-2) = \frac{1}{3}\cos(3x-2) + C$$

$$\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + C$$

Integração por Partes

Avalie uma integral usando a integração por partes, seguindo estes passos:

1. **Decompor a integral inteira (incluindo o dx) em dois fatores.**
2. **Deixe o fator sem o dx igual a u e o fator com o dx igual ao dv.**
3. **Diferencie u para achar du, e integre dv para achar v.**
4. **Use a fórmula $\int u\,du = uv - \int v\,du$.**
5. **Avalie o lado direito da equação para resolver a integral.**

Integração usando Partes com o Método DI-agônico

Integração por partes é útil para a integração de funções que são produtos de duas funções menores. (Veja o capítulo 6 para mais informações sobre a integração por partes.) Lembre-se destas tabela básica para a integração por partes usando o Método DI-agônico.

	I
D	
+	
–	

Sobre o Autor

Mark Zegarelli é o autor de *Lógica Para Leigos®*, *Matemática Básica e Pré-Algebra Para Leigos®*, e de vários livros de atividades de lógica. É formado em Inglês e em Matemática pela Universidade de Rutgers, e vive entre Long Branch, em Nova Jersey, e San Francisco, na Califórnia.

Dedicatória

Para minha linda e brilhante irmã, Tami. Você é a minha inspiração.

Agradecimentos

Muito obrigado pelo aconselhamento editorial e pela sabedoria de Lindsay Lefevere, Stephen Clark e Sarah Faulkner da Editora Wiley. Obrigado também ao Editor Técnico, Jeffrey A. Oaks, PhD. Obrigado especialmente ao meu amigo David Nacin, PhD, por seu aconselhamento sensato e sua assistência técnica.

Um grande abraço e meu muito obrigado para minha família: Dr. Anthony e Christine Zegarelli, Mary Lou e Alan Cary, Joe e Jasmine Cianflone, e Deseret Moctezuma-Rackham e Janet Rackham. O Dia de Ação de Graças será em minha casa este ano!

E, como sempre, um obrigado ao meu companheiro, Mark Dembrowski, por seu constante suporte, sua sabedoria e seu amor.

Sumário Resumido

Sumário

Introdução

O cálculo é o Monte Everest da Matemática. A maior parte do mundo se contenta em olhá-lo de baixo para cima em respeito. Mas apenas uns poucos bravos tentaram escalá-lo.

Ou talvez não.

Nos anos recentes, o cálculo se tornou um curso exigido não só para as graduações em matemática, engenharia ou física, mas também para estudantes de biologia, economia, psicologia, enfermagem e administração. As universidades e programas de MBA recebem de braços abertos os estudantes de cálculo, pois requer disciplina e clareza de pensamento. Mais e mais universidades estão encorajando os estudantes a estudar cálculo para se preparar para os exames finais.

Então, cálculo talvez seja mais parecido com uma montanha em Vermont, com muitas trilhas e locais para acampar, e também com uma grande cabana de esqui no alto. Você pode precisar de força extra para conquistá-la, mas com o guia certo (este livro, por exemplo!), provavelmente você não será engolido por uma tempestade de neve, faltando meio quilômetro para o pico.

Sobre Este Livro

Você também pode aprender cálculo. É sobre isso que este livro trata. Na verdade, conforme você lê estas palavras, você pode muito bem já ser um vencedor, tendo cursado Cálculo I. Caso afirmativo, então parabéns e uns tapinhas nas costas são merecidos.

Dito isso, quero discutir alguns boatos que você pode ter ouvido sobre Cálculo II:

- Cálculo II é mais difícil que Cálculo I.
- Cálculo II é mais difícil até que Cálculo III e equações diferenciais.
- Cálculo II é mais assustador que ter sua casa invadida por zumbis no meio da noite, resultando em um trauma emocional que exigirá anos de custosa psicoterapia para curar.

Agora, admito que Cálculo II é mais difícil que Cálculo I. Também, posso até dizer que muitos — mas não todos — estudantes de matemática o consideram mais difícil que os dois semestres de matemática seguintes. (Falando pessoalmente, eu acho Cálculo II mais fácil que equações diferenciais.) Mas eu garanto que os efeitos psicológicos de longa duração resultantes de um ataque de zumbis são muito maiores do que aqueles que o esperam em um curso de matemática de um semestre.

Os dois principais tópicos de Cálculo II são integração e séries infinitas. *Integração* é o inverso de diferenciação, o que você estudou em Cálculo I. (Por razões práticas, integração é um método para encontrar a área de uma forma geométrica incomum.) Uma *série infinita* é a soma dos números que continua para sempre, como $1 + 2 + 3 + \ldots$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$. Resumindo, a maioria dos professores se concentra em integração nos primeiros dois terços do semestre e nas séries infinitas no terço final.

Este livro oferece a você uma introdução sólida ao que é abordado em um curso superior em Cálculo II. Você pode utilizá-lo tanto para o próprio estudo ou juntamente com um curso de Cálculo II.

Então, sinta-se livre para escolher. Sempre que abordo um tópico que requer informações anteriores do livro, faço uma referência àquela seção para o caso de você desejar relembrar o básico.

Eis dois conselhos para os estudantes de matemática — lembre-se deles ao ler o livro:

- **Estude um pouco todo dia.** Eu sei que os estudantes encaram a grande tentação de deixar o livro encostado na prateleira até a noite anterior à prova. Esse é um método particularmente ruim para Cálculo II. A matemática, como a água, tende a se infiltrar lentamente no pântano dos descuidados!

  Então, quando você receber uma tarefa para casa, leia cada problema o mais cedo possível e tente resolver os mais fáceis. Volte para os problemas difíceis todos os dias, mesmo que seja só para lê-los novamente e pensar a seu respeito. Você provavelmente descobrirá que, com o tempo, até o problema mais sem graça começa a fazer sentido.

- **Utilize problemas práticos para treinar.** Depois de ler um exemplo e pensar que entendeu, copie-o em um papel, feche o livro e tente resolvê-lo. Se você conseguir isso, do início ao fim, você está pronto para continuar. Se não, vá em frente e espie — mas então tente resolver o problema depois, sem espiar. (Lembre, nos exames, não vale colar!)

Convenções Utilizadas Neste Livro

Por todo o livro, utilizei as seguintes convenções:

- Texto em *itálico* destaca novas palavras e termos definidos.
- Texto em **negrito** indica palavras-chave ou listas com indicadores e a parte de atividade em enumerações passo a passo.
- Texto em `monofont` destaca endereços da Web.
- Os ângulos são medidos em radianos em vez de graus, a menos que eu especificamente expresse o contrário. Veja no Capítulo 2 uma discussão sobre as vantagens de utilizar radianos para medir ângulos.

Só um Detalhe

Todos os autores acreditam que cada palavra que escrevem é ouro puro, mas você não tem de ler cada palavra neste livro a menos que você realmente queira. Você pode pular os boxes (aqueles quadros sombreados em cinza), onde trato de um assunto secundário, exceto no caso de achar o assunto interessante. Também sinta-se livre para passar pelos parágrafos indicados pelo ícone "Papo de Especialista".

Se você não está participando de uma turma onde será testado e receberá nota, você pode pular os parágrafos indicados pelo ícone "Dica" e passar por cima dos extensos exemplos passo a passo. Contudo, se você está em uma turma, leia esse material com cuidado e pratique tentando resolver os exemplos por conta própria.

Penso que...

Não é surpresa que grande parte de Cálculo II é construída sobre os tópicos introduzidos em Cálculo I e Pré-Cálculo. Então, eis algumas suposições tolas que fiz sobre você enquanto começa a ler este livro:

- Se você é um estudante do curso de Cálculo II, presumo que você passou por Cálculo I (mesmo que tenha tirado nota baixa, seu professor de Cálculo I e eu concordamos que você está pronto!)
- Se você está estudando sozinho, eu presumo que você está pelo menos razoavelmente familiarizado com o básico de Cálculo I.

Espero que você conheça algumas coisas de Cálculo I, mas eu não o atirarei na parte mais funda da piscina para ver se você nada ou afunda. O Capítulo 2 contém uma tonelada de pequenos temas úteis de matemática que você pode não ter aprendido antes. E por todo o livro, sempre que introduzo um tópico que pede um conhecimento anterior, eu indico para você o capítulo ou seção em que ele está, de forma que você possa revisar.

Como Este Livro Está Organizado

Este livro está organizado em seis partes, começando pelo início de Cálculo II, levando você por todo o curso e finalizando com uma olhada em alguns tópicos avançados que esperam por você em seus estudos matemáticos futuros.

Parte I: Introdução à Integração

Na Parte I, ofereço uma visão geral de Cálculo II, além de uma revisão de conceitos matemáticos mais fundamentais.

O Capítulo 1 introduzirá a integral definida, uma expressão matemática relacionada à área. Mostrarei como formular e pensar a respeito de um problema de área utilizando a notação do cálculo. Também apresentarei a equação de Soma de Riemann a fim de encontrar a integral, o que dá a definição da integral definida como um limite. Além disso, há uma visão geral do livro inteiro.

O Capítulo 2 traz uma revisão daquilo que se precisa saber sobre Pré-Cálculo e Cálculo I.

O Capítulo 3 introduzirá a integral indefinida como uma forma mais geral e frequente de pensar sobre a integral definida.

Parte II: Integrais Indefinidas

A Parte II foca em uma variedade de formas para encontrar integrais indefinidas.

O Capítulo 4 demonstrará como você encontra um conjunto limitado de integrais definidas utilizando a antidiferenciação — isso mesmo, revertendo o processo de diferenciação. Apresentarei 17 integrais básicas, que refletem as 17 derivadas básicas de Cálculo I. Também mostrarei um conjunto de regras importantes sobre integração.

O Capítulo 5 abordará a substituição de variáveis, o que estende enormemente a utilidade da antidiferenciação. Você descobrirá como mudar a variável de uma função que você está tentando integrar, a fim de manuseá-la mais facilmente utilizando os métodos de integração do Capítulo 4.

O Capítulo 6 introduzirá a integração aos poucos, o que lhe permite integrar funções ao dividi-las em dois fatores distintos. Mostrarei a você um método prático — o Método da Diagonal — para integrar por partes de forma rápida e fácil.

No Capítulo 7, colocarei você em ação para fazer a integração de um grupo de funções trigonométricas. Demonstrarei como integrar potências de senos e cossenos, e então tangentes e secantes e, finalmente, cotangentes e cossecantes. Então, você utiliza esses métodos na substituição trigonométrica.

No Capítulo 8, mostrarei como utilizar as frações parciais como forma de integrar funções racionais complexas. Assim como os outros métodos dessa parte do livro, utilizar frações parciais lhe dará uma forma de ajustar funções, que você não sabe como integrar, em formatos mais manuseáveis.

Parte III: Tópicos Intermediários Sobre Integração

A Parte III discute uma variedade de tópicos intermediários, depois de você ter dominado o básico sobre integração.

O Capítulo 9 traz uma variedade de pontos importantes para ajudá-lo a resolver problemas mais complexos sobre área. Você descobrirá como encontrar áreas incomuns ao reunir uma ou mais integrais. Mostrarei como avaliar integrais impróprias — isto é, integrais que se estendem infinitamente em uma direção. Você saberá como encontrar o valor médio de uma função sem um intervalo. Além disso, oferecerei uma fórmula para encontrar o comprimento de um arco, que é a medida de comprimento encontrada ao longo de uma curva.

O Capítulo 10 adiciona mais uma dimensão, mostrando como utilizar a integração para encontrar a superfície da área e o volume de sólidos. Falarei sobre o método de fatiamento e o método da concha para encontrar sólidos. Mostrarei como encontrar o volume e a superfície de uma revolução. Demonstrarei como ajustar mais de uma integral para calcular volumes mais complicados.

Parte IV: Séries Infinitas

Na Parte IV, introduzirei as séries infinitas — isto é, a soma de um número infinito de termos.

O Capítulo 11 coloca você para trabalhar com alguns tipos básicos de séries infinitas. Começo por discutir sequências infinitas. Então, introduzirei as séries infinitas, fazendo você trabalhar para expressar uma série utilizando tanto a notação sigma como a notação expandida. Então, mostrarei como cada série tem duas sequências associadas. Para finalizar, introduzirei dois tipos comuns de séries — a série geométrica e as séries *P* — ensinando você a reconhecê-las e, quando possível, avaliá-las.

No Capítulo 12, mostrarei uma quantidade de testes para determinar se uma série é convergente ou divergente. Para começar, explicarei o simples, mas útil, teste do n-ésimo termo para divergência. Então, farei dois testes de comparação — a prova de comparação direta e a prova de comparação limite. Depois disso, introduzirei testes mais complicados sobre integrais, razões e raízes. Finalmente, teço uma discussão sobre séries alternadas, mostrando como fazer a prova da convergência absoluta e condicional.

No Capítulo 13, o foco se dá em um tipo particularmente útil e expressivo de séries infinitas, chamado de séries de Taylor. Primeiro, introduzirei as séries de potência. Então, mostrarei como um tipo específico de séries de potência — as séries de Maclaurin — pode ser útil ao expressar funções. Finalmente, discuto como as séries de Taylor são uma forma mais genérica das séries de Maclaurin. Para terminar, mostro como calcular as margens de erro para os polinômios de Taylor.

Parte V: Tópicos Avançados

Na Parte V, pego minha bola de cristal e mostro a você o que o futuro guarda caso continue seus estudos matemáticos.

No Capítulo 14, promovo uma visão geral de Cálculo III, também conhecido como cálculo multivariável, o estudo do cálculo em três ou mais dimensões. Primeiro, discuto vetores e mostro alguns poucos cálculos de vetores. Depois, apresento a você os três diferentes sistemas de coordenadas tridimensionais (3D): coordenadas cartesianas 3D, coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas. Então, falo de funções de diversas variáveis e como calcular derivadas parciais e integrais múltiplas dessas funções.

O Capítulo 15 foca nas equações diferenciais — isto é, equações com derivadas mistas como variáveis. Faço uma distinção entre equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais, e mostro como reconhecer a ordem de uma equação diferencial. Lanço uma discussão sobre como as equações diferenciais surgiram na ciência. Finalmente, mostro como resolver equações diferenciais separáveis e como resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Parte VI: A Parte dos Dez

Só como diversão, a Parte VI inclui algumas listas das dez mais sobre uma variedade de tópicos relativos ao cálculo.

O Capítulo 16 mostra dez temas de Cálculo II. Esses temas fornecem uma visão geral do livro e seus conceitos mais importantes.

O Capítulo 17 traz dez dicas úteis para usar em testes. Algumas dessas dicas são específicas para Cálculo II, mas muitas são úteis para qualquer teste que você tenha de fazer.

Ícones Utilizados Neste Livro

Por todo o livro, utilizarei quatro ícones para destacar o que merece mais atenção.

Este ícone indica ideias centrais que você precisa saber. Assegure-se de que você compreende essas ideias antes de continuar a leitura.

As dicas são conselhos úteis que mostram uma forma fácil de fazer as coisas. Teste-as, especialmente se você está em algum curso de matemática.

Os avisos de cuidado marcam erros comuns que você gostaria de evitar. Perceba onde essas pequenas armadilhas se escondem para não cair nelas.

Este ícone indica questões interessantes que você pode ler ou pular de acordo com sua vontade.

De Lá para Cá, Daqui para Lá

Você pode utilizar este livro tanto para estudo pessoal como para ajudá-lo a sobreviver e se sair bem em um curso de Cálculo II.

Se você está em um curso de Cálculo II, você pode se sentir pressionado para completar uma tarefa de casa ou o estudo para um exame. Neste caso, fique à vontade para ir direto ao tópico em que necessita de ajuda. Cada seção é tematicamente limitada, então você pode pular direto para onde quer e utilizar o livro como uma referência prática. E quando me refiro a informações que discuti anteriormente no livro, dou uma breve revisão e aponto para o capítulo ou a seção onde você pode extrair mais informações, caso precise.

Se você está estudando por conta própria, recomendo que comece pelo Capítulo 1, onde dou uma visão geral do livro inteiro, e leia os capítulos do começo ao fim. Pule o Capítulo 2 se você está seguro em relação a sua base em Cálculo I e Pré-Cálculo. E, é claro, se você está doido para ler um tópico que está mais adiante no livro, vá em frente! Você sempre pode voltar para um capítulo mais fácil, caso se perca.

Parte I
Introdução à Integração

A 5ª Onda Por Rich Tennant

Nesta parte...

Será oferecida uma visão geral de Cálculo II, mais uma revisão de Pré-Cálculo e Cálculo I. Você descobrirá como medir as áreas de formas estranhas utilizando uma nova ferramenta: a integral definida. Mostraremos as conexões entre diferenciação, que você conhece de Cálculo I, e integração. Você também verá como essa conexão oferece uma forma prática para resolver problemas de área.

Capítulo 1

Visão Aérea de um Problema de Área

Neste Capítulo

- Medida da área de formas utilizando a geometria clássica e a analítica
- Compreensão da integração como a solução para um problema de área
- Construção de uma fórmula para calcular integrais definidas utilizando a soma de Riemann
- Aplicação da integração no mundo real
- Consideração de sequências e séries
- Adiantando um pouco de matemática avançada

Os humanos têm medido a área das formas há milhares de anos. Uma utilidade prática para essa habilidade é a de medir a área de um pedaço de terra. Medir a área de um quadrado ou um retângulo é simples, então as terras tendem a ser divididas nesses formatos.

Descobrir a área de um triângulo, círculo ou polígono também é fácil, mas à medida que as formas ficam mais diferentes, medi-las vai ficando complicado. Embora os gregos estivessem familiarizados com as seções cônicas — parábolas, elipses e hipérboles — eles não podiam medir com precisão formas com extremidades baseadas nessas figuras.

A invenção de Descartes, a geometria analítica — o estudo das linhas e curvas como equações representadas em um gráfico — trouxe grande compreensão das relações entre as seções cônicas. Mas até mesmo a geometria analítica não responde à questão de como medir a área dentro de uma forma que inclui uma curva.

Neste capítulo, mostraremos como o *cálculo integral* (*integração*, abreviando) se desenvolveu a partir das tentativas de responder a essa questão básica, chamada de *problema de área*. Com essa introdução à integral definida, você estará pronto para ver as praticidades de medir uma área. A chave para aproximar uma área que você não sabe como medir é dividi-la em formas que você sabe como medir (retângulos, por exemplo).

Dividir as coisas é o básico da soma de Riemann, a qual permite que se realize uma sequência de aproximações cada vez maiores de dada área até um limite que lhe dará a área exata que está procurando. Guiamos você passo a passo no processo que mostra exatamente como o delineamento de uma integral definida surge intuitivamente conforme você começa a dividir formas não calculáveis em retângulos mais fáceis e simples.

Confira a Área

Encontrar a área de alguma forma básica — quadrados, retângulos, triângulos e círculos — é fácil. Mas um método confiável para encontrar a área de formas contendo curvas mais esotéricas que confundiu os matemáticos durante séculos. Nesta seção, forneceremos o básico sobre como esse problema, chamado problema de área, é formulado em termos de um novo conceito, de integral definida.

A *integral definida* representa a área de um gráfico ligado a uma função, o eixo x, e a duas linhas verticais chamadas de *limites de integração*. Sem se aprofundar demais nos métodos de cálculo da integração, ofereceremos o básico sobre como expressar um problema de área formalmente, em termos de uma integral definida.

Comparação entre geometria clássica e analítica

Na geometria clássica, você descobre uma variedade de fórmulas simples para encontrar a área de formas diferentes. Por exemplo, a Figura 1-1 exibe as fórmulas para a área de um retângulo, um triângulo e um círculo.

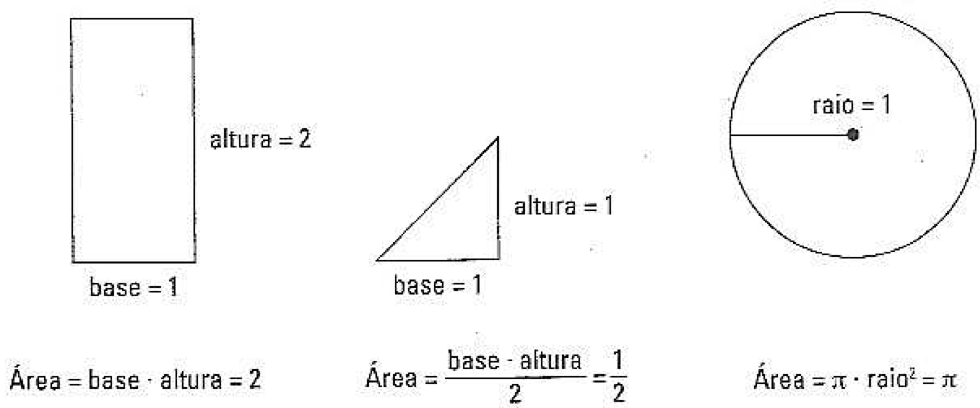


Figura 1-1: Fórmulas para a área de um retângulo, de um triângulo e de um círculo.

Sabedoria dos antigos

Muito antes de o cálculo ser inventado, o antigo matemático grego Arquimedes usou seu *método da exaustão* para calcular a área exata de um segmento de parábola. Matemáticos indianos também desenvolveram métodos de *quadratura* para algumas formas complicadas, antes de os europeus começarem suas investigações no século XVII.

Esses métodos anteciparam algumas das fórmulas de cálculo. Mas antes do cálculo, nenhuma teoria única podia medir uma área com curvas arbitrárias.

Quando você avança para a geometria analítica — geometria no gráfico cartesiano — ganha uma nova perspectiva da geometria clássica. A geometria analítica fornece uma conexão entre a álgebra e a geometria clássica. Você aprende que círculos, quadrados e triângulos — e muitas outras figuras — podem ser representados por equações ou conjuntos de equações, como demonstrado na Figura 1-2.

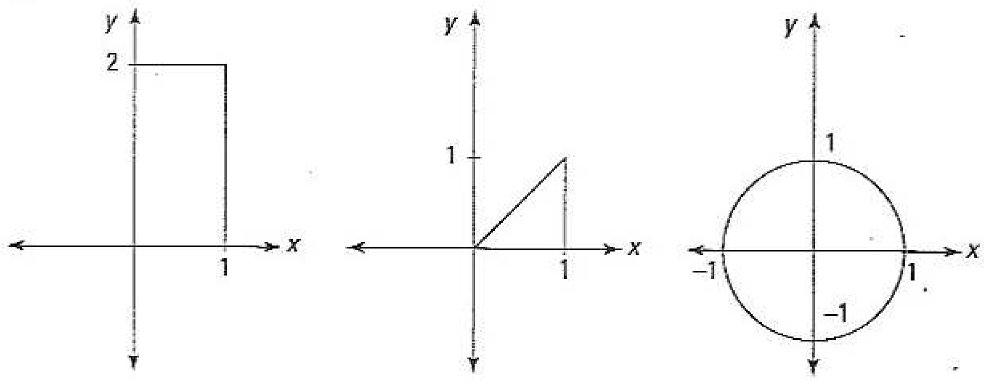


Figura 1-2: Um retângulo, um triângulo e um círculo representados em um gráfico.

Você ainda pode utilizar os antigos métodos confiáveis da geometria clássica para encontrar as áreas dessas figuras. Mas a geometria analítica abre maiores possibilidades — e mais problemas.

Descubra uma nova área de estudo

A Figura 1-3 ilustra três curvas que são muito mais fáceis de estudar com a geometria analítica do que com a geometria clássica: uma parábola, uma elipse e uma hipérbole.

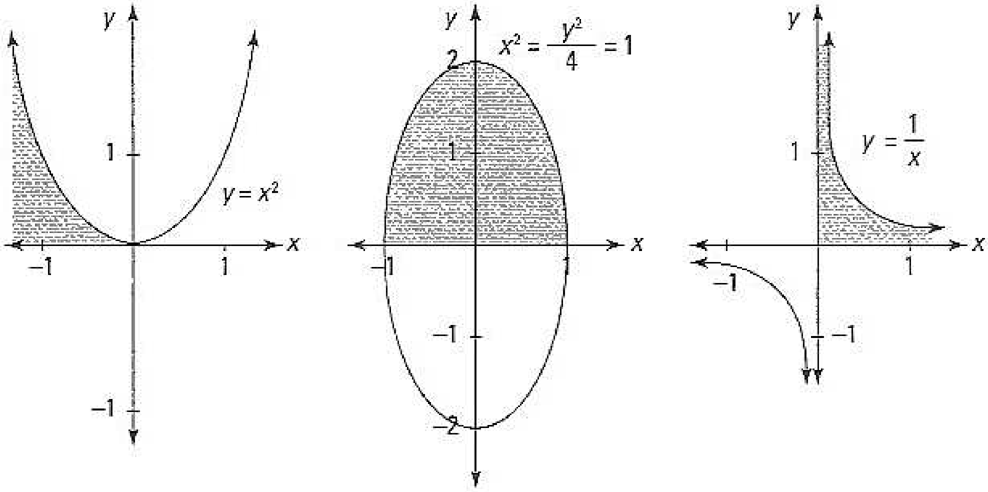


Figura 1-3: Uma parábola, uma elipse e uma hipérbole representadas em um gráfico.

A geometria analítica oferece informações bem detalhadas da conexão entre equações algébricas e curvas em um gráfico. No entanto, não diz como encontrar as áreas sombreadas exibidas na Figura 1-3.

Similarmente, a Figura 1-4 mostra mais três equações representadas no gráfico: uma curva senoidal, uma curva exponencial e uma curva logarítmica.

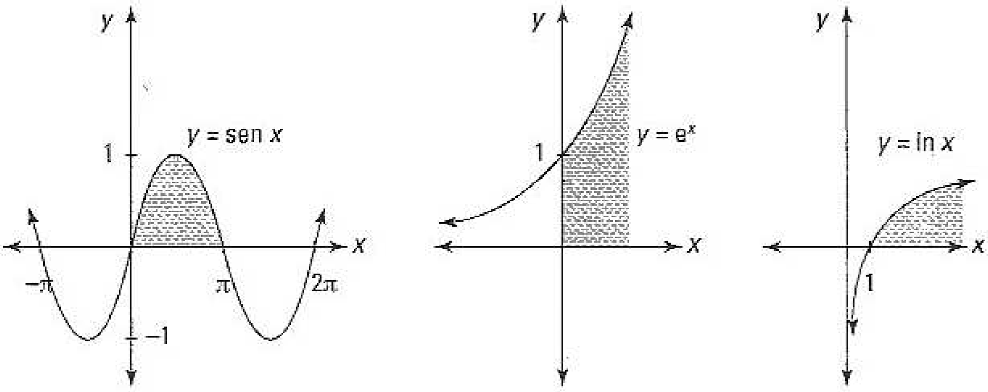


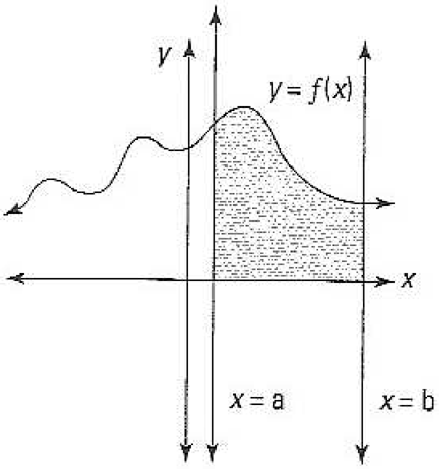
Figura 1-4: Uma curva senoidal, uma curva exponencial e uma curva logarítmica representadas em um gráfico.

Novamente, a geometria analítica dá a conexão entre essas equações e como elas aparecem como curvas no gráfico, mas não informa como encontrar qualquer uma das áreas sombreadas na Figura 1-4.

Generalize o problema de área

Perceba que em todos os exemplos da seção anterior, cada área foi sombreada de uma forma específica. Acima, a área está limitada por uma função. Abaixo, está limitada pelo *eixo x*. Nos lados esquerdo e direito, a área está limitada pelas linhas verticais (embora em alguns casos você possa não perceber essas linhas porque a função cruza o *eixo x* nesse ponto).

Você pode generalizar esse problema para estudar qualquer função contínua. Para ilustrar isso, a região sombreada na Figura 1-5 mostra a área sob a função $f(x)$ entre as linhas verticais $x = a$ e $x = b$.



$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Figura1-5: Um problema típico de área.

O problema de área diz respeito a encontrar a área sob uma função contínua entre dois valores de x, que são chamados de *limites de integração*, normalmente denotados como a e b.

CUIDADO!

Os limites de integração não são *limites* no sentido que você aprendeu em Cálculo I. Eles são simples constantes que indicam a largura da área que você está tentando medir.

De certa forma, essa fórmula para a área sombreada não é muito diferente daquelas que fornecemos anteriormente neste capítulo. É apenas uma fórmula, o que significa que se você ajustar os números corretos e calcular, obterá a resposta certa.

A pegadinha, contudo, é a palavra *calcular*. Quão precisamente você calcula utilizando o novo símbolo $\int$? Como você já pode ter descoberto, a resposta está no título deste livro: *Cálculo*. Para ser mais específico, *cálculo integral* ou *integração*.

Os cursos mais comuns de Cálculo II da escola ou da universidade focam na integração — o estudo de como resolver o problema de área. Quando Cálculo II começar a ficar confuso (e, para ser honesto, você provavelmente ficará confuso em algum momento), tente relacionar aquilo que está fazendo com esta questão central: "Como a maneira que estou trabalhando me permite encontrar a área sob a função?"

Encontre respostas definitivas com a integral definida

Você pode estar surpreso por descobrir que há anos você sabe como integrar algumas funções e nem tinha conhecimento disso. (Sim, você pode saber algo sem saber que sabe.)

Por exemplo, encontre a área retangular sob a função $y = 2$ entre $x = 1$ e $x = 4$, como exibido na Figura 1-6.

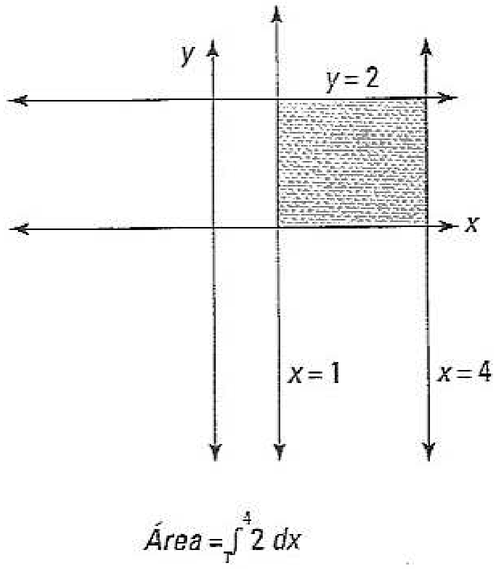


Figura 1-6: A área retangular sob a função $y = 2$ entre $x = 1$ e $x = 4$.

Isso é só um retângulo com base 3 e altura 2. Então sua área é, obviamente, 6. Mas esse também é um problema de área que pode ser expresso em termos de uma integração, como a seguir:

$$\textit{Área: } \int_1^4 2\,dx = 6$$

Como você pode ver, a função que está sendo integrada aqui é $f(x) = 2$. Os limites de integração são 1 e 4 (perceba que o valor maior vai no alto). Você já sabe que a área é 6, então já pode resolver esse problema de cálculo sem lançar mão de qualquer método assustador ou complicado. Mas, ainda assim, está *integrando*, então, por favor, parabenize-se, pois não podemos fazer isso daqui.

A seguinte expressão é chamada de integral definida:

$$\int_1^4 2\,dx$$

Por enquanto, não gaste muito tempo se preocupando em aprofundar o significado do símbolo $\int$ ou de dx (que você pode trazer de suas belas memórias da diferenciação que realizou em Cálculo I). Apenas pense que $\int$ e dx são notações que se relacionam com uma função — notação que significa *área*.

O que é tão definido sobre a integral definida? Duas coisas, na verdade:

- **Você definitivamente conhece os limites da integração** (nesse caso, 1 e 4). Sua presença distingue uma *integral definida* de uma integral indefinida, sobre a qual aprenderá mais no Capítulo 3. Integrais definidas sempre incluem os limites de integração; integrais indefinidas nunca os incluem.
- **Uma integral definida decididamente se iguala a um número** (presumindo que seus limites de integração também são números). Esse número pode ser fácil de encontrar ou difícil o suficiente para exigir uma sala repleta de professores de matemática rabiscando na lousa. Mas, no final das contas, um número é só um número e, devido ao fato de uma integral definida ser uma medida de área, você deveria esperar que a resposta fosse um número.

Quando os limites de integração não são números, uma integral definida não é necessariamente igual a um número. Por exemplo, uma integral definida cujos limites de integração fossem k e $2k$ provavelmente seria igual a uma expressão algébrica que incluiria k. De forma semelhante, uma integral definida cujos limites de integração fossem sen θ e 2 sen θ muito provavelmente se igualaria a uma expressão trigonométrica que incluísse θ. Além disso, já que a integral definida representa uma área, ela sempre equivalerá a um número — embora você possa ou não ser capaz de calculá-lo.

Como outro exemplo, encontre a área triangular sob a função $y = x$ entre $x = 0$ e $x = 8$, como exibido na Figura 1-7.

Agora, a forma da área sombreada é a de um triângulo com base 8 e com altura 8, então a área é 32 (porque a área de um triângulo é metade da base vezes a sua altura). Mas, novamente, esse é um problema de área que pode ser expresso nos termos de uma integração, como a seguir:

$$\textit{Área: } \int_0^8 x\,dx = 32$$

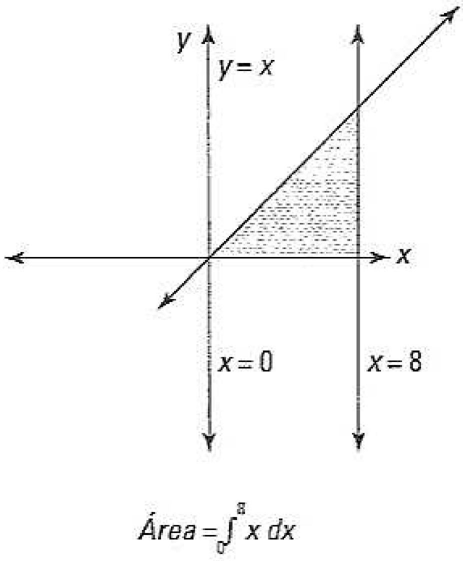


Figura 1-7: A área triangular sob a função $y = x$, no intervalo $x = 0$ e $x = 8$.

A função que está sendo integrada aqui é $f(x) = x$ e os limites de integração são 0 e 8. Novamente, você pode calcular essa integral com métodos da geometria clássica e da analítica. E, novamente, a integral definida resultará em um número, o qual é a área sob a função e acima do eixo x, no intervalo $x = 0$ e $x = 8$.

Como exemplo final, encontre a área semicircular entre $x = -4$ e $x = 4$, como mostra a Figura 1-8.

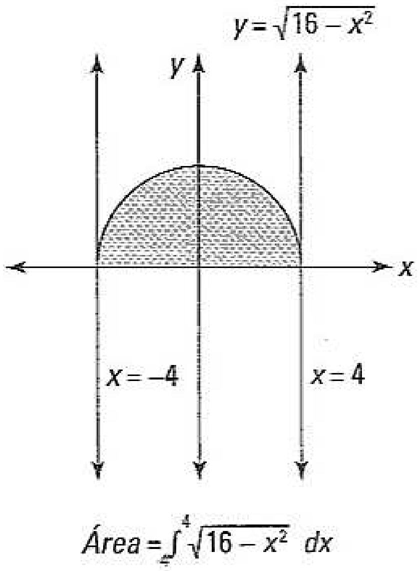


Figura 1-8: A área semicircular no intervalo de $x = -4$ e $x = 4$.

Antes de tudo, relembre do pré-cálculo como expressar a área de um círculo com raio 4:

$$x^2 + y^2 = 16$$

Agora, resolva esta equação para encontrar y:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

Um pouco de geometria básica nos diz que a área do círculo inteiro é de 16π, então a área do semicírculo sombreado é 8π. Mesmo que um círculo não seja uma função (e lembre-se de que a integração lida exclusivamente com funções contínuas!), a área sombreada neste caso está abaixo da porção superior do círculo. A equação dessa curva é a seguinte função:

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Então, você pode representar essa área sombreada como uma integral definida:

$$\text{Área} = \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8\pi$$

Novamente, a integral definida resulta em um número, que é a área sobre a função entre os limites de integração.

Divida as Tarefas

Uma boa maneira de abordar uma tarefa complicada — desde planejar um casamento até escalar o Monte Everest — é dividi-la em pedaços pequenos e manejáveis.

Nesta seção, mostraremos o básico sobre como o matemático Bernhard Riemann utilizou esse mesmo tipo de abordagem para calcular a integral definida, que introduzimos na seção anterior "Confira a Área". Nesta seção utilizamos o exemplo da área sob a função $y = x^2$, entre $x = 1$ e $x = 5$. Você pode visualizar isso na Figura 1-9.

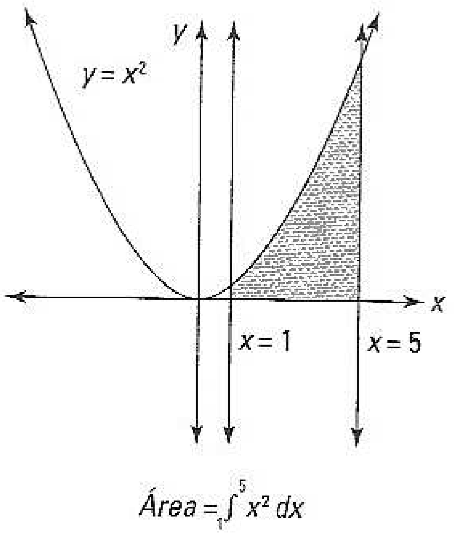


Figura 1-9: A área sob a função $y = x^2$, no intervalo $x = 1$ e $x = 5$.

Utilize retângulos para descomplicar problemas

A seção anterior "Confira a Área" ensina como expressar a integral definida que representa a área da região sombreada na Figura 1-9:

$$\int_1^5 x^2\,dx$$

Infelizmente, essa integral definida — diferentemente das anteriores neste capítulo — não funciona com os métodos de geometria clássica e analítica que utilizamos para resolver anteriormente o problema neste capítulo. (Se funcionasse, integrar seria muito mais fácil e este livro seria menos extenso!)

Mesmo que você não possa resolver essa integral definida diretamente (por enquanto), pode aproximá-la, ao dividir a região sombreada em dois pedaços, como demonstrado na Figura 1-10.

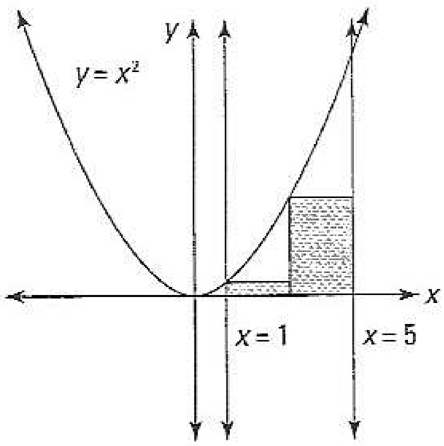


Figura 1-10: Área aproximada com dois retângulos.

Obviamente, a região que está sombreada agora — parece grosseiramente com dois degraus levando para lugar algum — é menor do que a área que você está tentando encontrar. Felizmente, esses dois degraus levam para algum lugar, pois calcular a área deles é bem fácil.

Cada retângulo tem uma largura 2. A parte de cima dos dois retângulos corta o ponto onde a função x^2 encontra $x = 1$ e $x = 3$, então suas alturas são 1 e 9, respectivamente. Logo, a área total dentro dos dois retângulos é 20, pois

$$2\,(1) + 2\,(9) = 2\,(1 + 9) = 2\,(10) = 20$$

Com essa aproximação da área da região sombreada original, eis a conclusão que pode ser tirada:

$$\int_1^5 x^2\,dx \approx 20$$

Claro, isso é uma aproximação grosseira com a área real. Mas até mesmo uma aproximação grosseira é melhor que nenhuma. Para se obter uma aproximação melhor, tente cortar a figura que você está medindo em pedaços menores, como exibido na Figura 1-11.

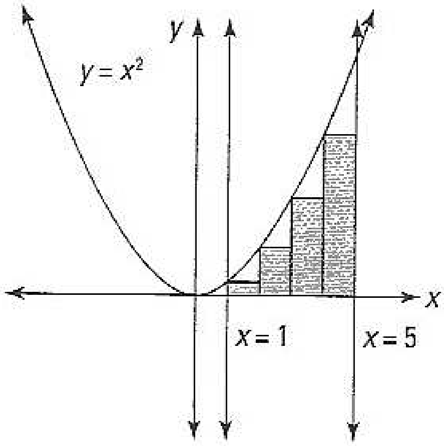


Figura 1-11: Uma aproximação mais precisa; a área é aproximada por quatro retângulos.

Novamente, essa aproximação será menor do que a área real que você está buscando. Dessa vez, cada retângulo tem largura 1. A parte de cima dos quatro retângulos corta o gráfico onde a função x^2 encontra $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$, então suas alturas são 1, 4, 9 e 16, respectivamente. Então, a área total dos quatro retângulos é 30, pois

$$1\,(1) + 1\,(4) + 1\,(9) + 1\,(16) = 1\,(1 + 4 + 9 + 16) = 1\,(30) = 30$$

Portanto, eis uma segunda aproximação da área sombreada que você procura:

$$\int_1^5 x^2\,dx \approx 30$$

Sua intuição provavelmente diz para você que a segunda aproximação é melhor do que a primeira, pois dividir os retângulos em pedaços mais finos permite uma representação mais aproximada da função. Você pode confirmar essa intuição ao perceber que tanto 20 como 30 são menores do que a área real, então, qualquer que seja a área, 30 deve ser mais próximo.

Qual é a altura?

Quando você está dividindo uma forma estranha em retângulos, encontrar a largura de cada um deles é fácil, pois todos têm a mesma largura. Você apenas divide a largura total da área que está medindo pelo número de retângulos.

Encontrar a altura de cada retângulo individual, contudo, requer um pouco mais de trabalho. Comece por traçar os topos horizontais de todos os retângulos que irá usar. Então, para cada retângulo:

1. **Veja onde o topo do retângulo encontra a função.**
2. **Encontre o valor de x naquele ponto observando o eixo x diretamente abaixo desse ponto.**
3. **Obtenha a altura do retângulo ao substituir o valor de x na função.**

Você deve imaginar que se dividir a área em mais retângulos (digamos 10, ou 100 ou 1 milhão) você obterá estimativas cada vez melhores. E, novamente, sua intuição está correta. Conforme o número de divisões aumenta, o resultado se aproxima de 41,3333...

Na verdade, você pode muito bem decidir escrever:

$$\int_1^5 x^2\, dx = 41.\overline{33}$$

Essa, na realidade, é a resposta correta. Mas para justificar essa conclusão você precisa ser um pouco mais exigente.

Construa uma fórmula para encontrar a área

Na seção anterior, você calculou as áreas de dois e quatro retângulos, respectivamente, como segue:

$$2\,(1) + 2\,(9) = 2\,(1 + 9) = 20$$

$$1\,(1) + 1\,(4) + 1\,(9) + 1\,(16) = 1\,(1 + 4 + 9 + 16) = 30$$

Então você divide cada vez mais a área que está tentando medir em retângulos com a mesma largura. Então, você multiplica essa largura pela soma das alturas de *todos* os retângulos. O resultado é a área da região sombreada.

De forma geral, então, a fórmula para calcular uma área dividida em n retângulos é:

$$\text{Área dos retângulos} = bh_1 + bh_2 + \ldots + bh_n$$

Nessa fórmula, b é a largura de cada retângulo e h_1, h_2, ..., h_n, e assim por diante, são as várias alturas dos retângulos. A base de todos os retângulos é a mesma, então você pode simplificar essa fórmula como a seguir:

$$\text{Área dos retângulos} = b\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

Lembre-se de que conforme n aumenta — quer dizer, quanto mais retângulos criar — a área total dos retângulos aproxima-se da área da forma que você está tentando medir.

Esperamos que você concorde que não há um truque terrível nessa fórmula. É apenas geometria básica, medindo a área dos retângulos multiplicando sua base por sua altura. Ainda assim, no resto desta seção, transformamos essa simples fórmula na seguinte, chamada de *fórmula da soma de Riemann* para encontrar a integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Não há dúvidas, essa fórmula impressiona. Por isso a construímos passo a passo, começando com a fórmula simples da área. Assim, você compreende inteiramente como essa notação pomposa é apenas uma extensão daquilo que você consegue ver sozinho.

Caso esteja com dúvida em relação a algum desses símbolos — como Σ e o limite — continue lendo, pois explicaremos mais adiante. (Para uma revisão mais completa desses símbolos, veja o Capítulo 2.)

Aproximação da integral definida

Anteriormente neste capítulo, dissemos que a integral definida significa área. Então, ao transformar a simples fórmula

$$\text{Área dos retângulos} = b\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

o primeiro passo é simplesmente introduzir a integral definida:

$$\int_a^b (x)\,dx \approx b\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

Como você pode ver, o = foi alterado para ≈, isto é, a equação foi rebaixada para uma aproximação. Isso muda sua propriedade — a integral definida é a área exata dentro dos limites especificados, ao qual as áreas dos retângulos apenas se aproximam.

Limite a margem de erro

Conforme n aumenta — isto é, quanto mais retângulos você cria —, sua aproximação fica maior e maior. Em outras palavras, conforme

n se aproxima do infinito, a área dos retângulos que está medindo se aproxima da área que deseja encontrar.

Então, você pode não estar surpreso por descobrir que quando expressa essa aproximação nos termos de um limite, remove a margem de erro e restaura a aproximação ao *status* de uma equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} w\left(h_1 + h_2 + \ldots + h_n\right)$$

Esse limite simplesmente expressa matematicamente aquilo que dissemos na seção anterior: conforme n se aproxima do infinito, a área de todos os retângulos se aproxima da área exata que a integral definida representa.

Aumente sua compreensão da largura

O próximo passo é substituir a variável b, que significa a base de cada retângulo, por uma expressão que seja mais prática.

Lembre-se de que os limites de integração revelam a largura da área que você está tentando medir, com a como o menor valor e b como o maior. Então você pode expressar a largura da área inteira como $b - a$. E quando você divide essa área em n retângulos, cada retângulo tem a seguinte largura:

$$Base = \frac{b-a}{n}$$

Substituindo essa expressão na aproximação, temos o seguinte resultado:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n}\left(h_1 + h_2 + \ldots + h_n\right)$$

Como você pode ver, tudo que estamos fazendo aqui é expressar a variável b em termos de a, b e n.

Some com a notação sigma

Você pode lembrar que a notação sigma — o símbolo grego Σ usado nas equações — permite que você simplifique equações que tenham longas cadeias de números somados. O Capítulo 2 faz uma revisão da notação sigma, então leia-o caso precise revisar.

A expressão $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ é uma grande candidata para a notação sigma:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$$

Então, na equação com a qual você está trabalhando, poderá fazer uma simples substituição, como segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i$$

Agora, ajustamos essa equação ao colocar $\frac{b-a}{n}$ dentro da expressão sigma (esse é um reajuste válido, conforme explicamos no Capítulo 2):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Aumente a funcionalidade da altura

Lembre-se de que a variável h_i representa a altura de algum retângulo que você está medindo. (A notação sigma ocupa-se de adicionar essas alturas). O último passo é substituir h_i por algo mais funcional. E *funcional* é a palavra certa, pois a *função* determina a altura de cada retângulo.

Leia a explicação que esclareço mais adiante: a altura de cada retângulo individual é determinada por um valor da função em algum valor de x situado em algum lugar daquele retângulo, então:

$$h_i = f(x_i^*)$$

A notação x_i^*, que explicaremos mais adiante em "Mova para esquerda, direita ou centro", significa algo como "um valor apropriado para x_i". Quer dizer, para cada h_i, em suma (h_1, h_2, e assim por diante), você pode substituir a variável h_i na equação pelo valor apropriado da função. Fica desta forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Essa é a soma de Riemann na integralidade para a integral definida, então, de certa forma, terminamos. Mas ainda devemos uma explicação completa para essa última substituição, então aí vai ela.

Mova para esquerda, direita ou centro

Volte para o exemplo que usamos ao começar, e olhe novamente para a forma como dividimos a área sombreada em quatro retângulos, na Figura 1-12.

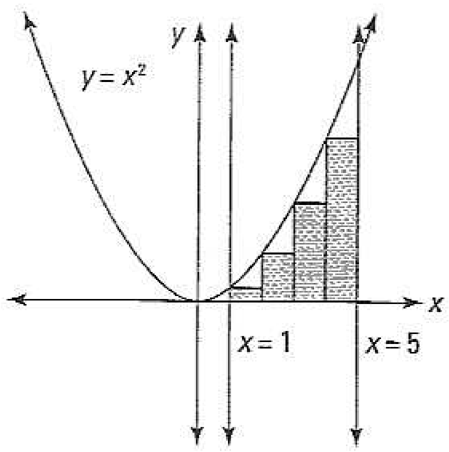


Figura 1-12: Aproximação das áreas com retângulos esquerdos.

Como você pode ver, as alturas dos quatro retângulos são determinadas pelos valores de $f(x)$ quando x é igual a 1, 2, 3 e 4, respectivamente — isto é, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$. Perceba que o canto superior esquerdo de cada retângulo toca a função e determina a altura de cada retângulo.

Contudo, suponha que desenhemos os retângulos como aparecem na Figura 1-13.

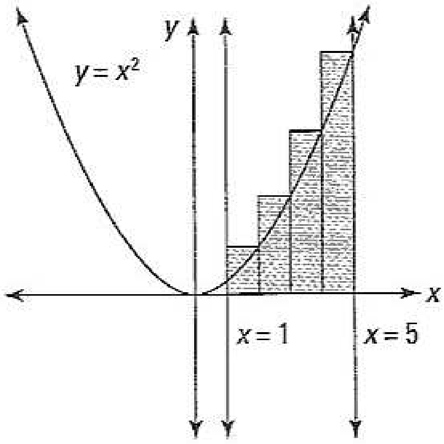


Figura 1-13: Aproximação da área com retângulos direitos.

Neste caso, o canto superior direito toca a função, então as alturas dos quatro retângulos são $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$.

Agora, suponha que desenhemos os retângulos como os exibidos na Figura 1-14.

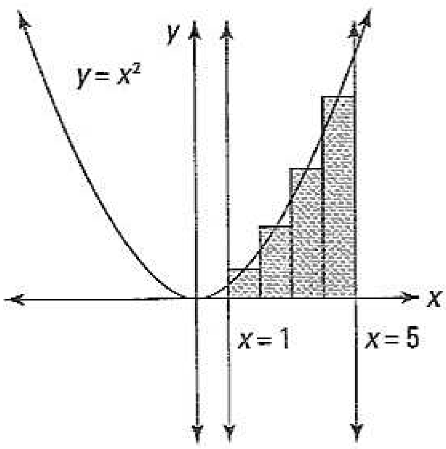


Figura 1-14: Aproximação da área com retângulos centrais.

Dessa vez, o ponto médio, no limite superior de cada retângulo, toca a função, então as alturas dos retângulos são $f(1,5)$, $f(2,5)$, $f(3,5)$ e $f(4,5)$.

Aparentemente podemos desenhar retângulos de, pelo menos, três formas diferentes para aproximar a área que estamos tentando medir. Todos eles levam a aproximações diferentes, então qual deles leva à resposta correta? A resposta é: *todos eles*.

Essa resposta surpreendente resulta do fato de que a equação para integral definida inclui um limite. Não importa como você desenha os retângulos, contanto que o topo de cada retângulo coincida com a função em um ponto (pelo menos), o limite diminui qualquer discrepância conforme n aproxima-se do infinito. Esse pedaço da equação aparece como o * na expressão $f(x_i^*)$.

Por exemplo, no exemplo que usamos quatro retângulos, o primeiro está entre $x = 1$ até $x = 2$, então

$$1 \le x_1^* \le 2 \qquad \text{portanto} \qquad 1 \le f(x_1^*) \le 4$$

A Tabela 1-2 mostra a variedade de valores permitidos para x_i ao aproximar essa área com quatro retângulos. Em cada caso, você pode estipular a altura do retângulo em uma gama de valores diferentes para x.

Tabela 1-2 — Valores Possíveis para x_i^* Quando $n = 4$

Valor de i	*Localização do Retângulo*	*Valor permitido Para x_i^**	*Valor mais Baixo para $f(x_i^*)$*	*Valor mais Alto para $f(x_i^*)$*
$i = 1$	$x = 1$ à $x = 2$	$1 \le x_1^* \le 2$	$f(1) = 1$	$f(2) = 4$
$i = 2$	$x = 2$ à $x = 3$	$2 \le x_2^* \le 3$	$f(2) = 4$	$f(3) = 9$
$i = 3$	$x = 3$ à $x = 4$	$3 \le x_3^* \le 4$	$f(3) = 9$	$f(4) = 16$
$i = 4$	$x = 4$ à $x = 5$	$4 \le x_1^* \le 5$	$f(4) = 16$	$f(5) = 25$

No Capítulo 3, discutiremos essa ideia — além de muito mais sobre os pontos-chave da integral definida — em mais detalhes.

Defina o Indefinido

A fórmula da soma de Riemann para a integral definida, que discutimos na seção anterior, permite que você calcule áreas que não pode calcular utilizando a geometria clássica ou analítica. O lado ruim dessa fórmula é que ela é bem complicada. No Capítulo 3, mostraremos como utilizá-la para calcular a área, mas a maioria dos estudantes leva as mãos à cabeça e diz: "Deve haver uma maneira melhor!"

A maneira melhor é chamada de *integral indefinida*. A integral indefinida parece muito com a integral definida. Compare:

Integrais definidas	***Integrais indefinidas***
$\int_1^5 x^2\,dx$	$\int x^2\,dx$
$\int_0^\pi \operatorname{sen}x\,dx$	$\int \operatorname{sen}x\,dx$
$\int_{-1}^1 e^x\,dx$	$\int e^x\,dx$

Como a integral definida, a integral indefinida é uma ferramenta para medir a área sob uma função. Diferentemente dela, contudo, a integral indefinida não tem limites de integração, então seu cálculo não resulta em um número. Em vez disso, quando você desenvolve uma integral indefinida, o resultado é uma *função* que você pode usar para obter todas as integrais definidas relacionadas. O Capítulo 3 fornecerá os detalhes sobre como as integrais definidas e indefinidas estão relacionadas.

As integrais indefinidas fornecem uma forma conveniente de calcular as integrais definidas. Na verdade, a integral indefinida é o *inverso* da derivada, que você conhece de Cálculo I. (Não se preocupe caso não lembre das derivadas — no Capítulo 2 há uma revisão completa.) Com inverso, queremos dizer que a integral indefinida de uma função realmente é a *antiderivada* daquela função. Essa ligação entre a integração e a diferenciação não é apenas uma coincidência: ela é conhecida como o *Teorema Fundamental do Cálculo* (TFC).

Por exemplo, você sabe que a derivada de x^2 é $2x$. Então, você espera que a antiderivada — quer dizer, a integral indefinida — de $2x$ seja x^2. Isso está fundamentalmente correto, com um pequeno ajuste, que explicaremos no Capítulo 3.

Entender a integração como antidiferenciação permite que você resolva toneladas de integrais sem ter de lançar mão da fórmula da soma de Riemann (falaremos sobre isso no Capítulo 4). Mas a integração ainda pode ser desagradável, dependendo da função que você está tentando integrar. Os matemáticos desenvolveram uma ampla variedade de técnicas para calcular integrais. Alguns desses métodos são a substituição de variáveis (veja o Capítulo 5), integração por partes (veja o Capítulo 6), substituição trigonométrica (veja o Capítulo 7) e integração por frações parciais (veja o Capítulo 8).

Resolva Problemas com Integração

Depois de entender como descrever um problema de área utilizando a integral definida (Parte I), e como calcular as integrais (Parte II), você está pronto para entrar em ação resolvendo uma grande variedade de problemas.

Alguns desses problemas sabem seu lugar e permanecem em duas dimensões. Outros aumentam de tamanho e criam uma revolução em três dimensões. Nesta seção, damos uma prova desses tipos de problemas, com um convite para verificar a Parte III deste livro para uma compreensão maior.

Os três tipos de problemas que vocês quase certamente encontrarão em uma prova envolvem achar a área entre curvas, o comprimento da curva e o volume dessa revolução. Focaremos nesses tipos de problema e em muitos outros nos Capítulos 9 e 10.

Podemos resolver: encontre a várea entre curvas

Quando você sabe que a integral definida representa a área sob uma curva, encontrar a área entre as curvas não é muito difícil. Apenas descubra como quebrar o problema em vários pedaços menores, versões do problema básico de área. Por exemplo, suponha que você deseja encontrar a área entre a função y = sen x e $y = \cos x$, no intervalo $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{4}$, quer dizer, a área sombreada A na Figura 1-15.

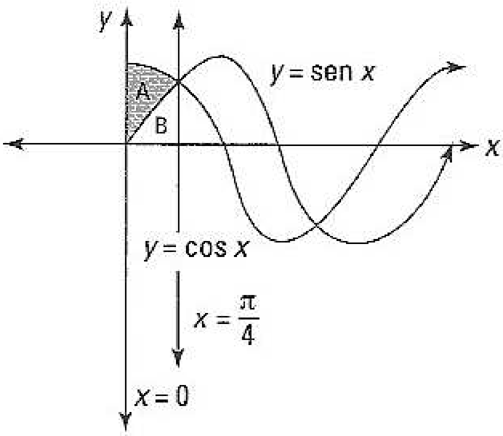


Figura 1-15: A área entre a função y = sen x e $y = \cos x$, no intervalo x = 0 à $x = \frac{\pi}{4}$

Nesse caso, integrar $y = \cos x$ permite que encontre a área total de A + B, e a integração de y = sen x fornece a área de B. Então, você pode subtrair A + B — B para encontrar a área de A.

Para mais informações sobre como encontrar a área entre as curvas, vá até o Capítulo 9.

Percorra a longa e sinuosa estrada

Medir um segmento de linha reta ou uma seção de um círculo é mais simples quando utilizamos a geometria clássica e analítica. Mas como você mede o comprimento ao longo de uma curva incomum produzida por uma equação trigonométrica, polinomial ou exponencial?

Por exemplo, qual a distância entre o ponto A e o ponto B ao longo da curva exibida na Figura 1-16?

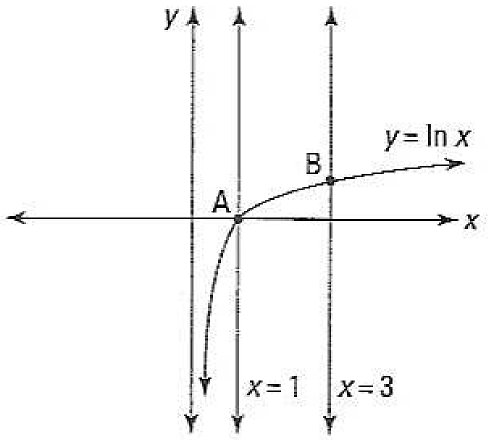


Figura 1-16: A distância entre o ponto A e o ponto B ao longo da função $y = \ln x$.

Novamente, a integração é sua amiga. No Capítulo 9, mostraremos como a utilização da integração fornece a fórmula que permite que você meça o comprimento do arco.

Você diz que deseja uma revolução

O cálculo permite que você encontre o volume de uma forma incomum. Na maioria dos casos, calcular o volume envolve um salto dimensional para o *cálculo multivariável*, um tópico de Cálculo III, que abordaremos no Capítulo 14. Mas, em umas poucas situações, ajustar uma integral da forma correta permite que você calcule o volume pela integração sobre uma única variável — quer dizer, utilizando os métodos que você descobriu em Cálculo II.

Entre as coisas mais escorregadias desses problemas está o *sólido de revolução* de uma curva. Em tais problemas, é dada uma região sob uma curva. Então, imagine o sólido que resulta quando você gira essa região ao redor de seu eixo, e calcula o volume desse sólido, como na Figura 1-17.

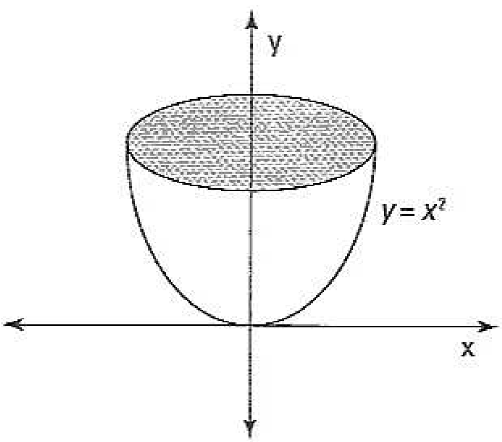


Figura 1-17: Um sólido de revolução, produzido pelo giro da função $y = x^2$ ao redor do eixo $x = 0$.

Obviamente, você precisa de cálculo para encontrar a área dessa região. Então precisa de mais cálculo e um plano de ataque claro para encontrar o volume. Falaremos sobre tudo isso e muito mais no Capítulo 10.

Compreenda as Séries Infinitas

O terço final de um curso típico de Cálculo II — aproximadamente cinco semanas — normalmente foca o tópico das séries infinitas. Cobrimos esse tópico em detalhes na Parte IV. Eis uma visão geral de algumas ideias que você encontrará por aí.

Diferencie sequências e séries

Uma *sequência* é uma cadeia de números em determinada ordem. Por exemplo:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

As sequências podem ser finitas ou infinitas, mas o cálculo lida bem com infinito, então não deveria ser surpresa que o cálculo se ocupasse apenas das *sequências infinitas*.

Você pode transformar uma sequência infinita em uma *série infinita* ao trocar as vírgulas por sinais de mais:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

A notação sigma, que discutiremos mais profundamente no Capítulo 2, é útil para expressar séries infinitas de forma mais sucinta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Resolução de séries

Calcular uma série infinita é, com frequência, possível. Isto é, você pode descobrir até onde aqueles números todos estão somando. Por exemplo, eis uma solução que deveria surgir sem surpresa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots = \infty$$

Uma forma prática para facilitar algumas séries é criar uma *sequência de somas parciais* relacionada — quer dizer, uma sequência que inclui o primeiro termo, a soma dos dois primeiros termos, a soma do primeiro e do terceiro termo, e assim por diante. Por exemplo, eis uma sequência de somas parciais para a segunda série exibida anteriormente:

$$1 = \mathbf{1}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \mathbf{1\frac{1}{2}}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \mathbf{1\frac{3}{4}}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{1\frac{7}{8}}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \mathbf{1\frac{15}{16}}$$

A sequência de somas parciais resultante fornece uma forte evidência dessa conclusão:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots 1$$

Identificação de séries convergentes e divergentes

Quando uma série resulta em um número — como no caso de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ — ela é chamada de *série convergente*. Contudo, quando uma série resulta no infinito — como é o caso de $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$ — ela é chamada de *série divergente*.

Identificar se uma série é convergente ou divergente nem sempre é simples. Por exemplo, olhe novamente as três séries que introduzimos anteriormente nesta seção:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = ?$$

Essa é chamada de *série harmônica*, mas você pode adivinhar só de olhar se ela é convergente ou divergente? (Antes de começar a adicionar frações, avisamos que a soma parcial dos primeiros 10 mil números é menor do que 10.)

Um problema constante que surge conforme você estuda séries infinitas é decidir se determinada série é convergente ou divergente. O Capítulo 13 fornece uma série de testes para você resolver.

Avance na Matemática Avançada

Embora seja um pouco mais além do que muitas pessoas sonham em chegar na matemática, o cálculo não é um fim, mas um começo. Esteja você matriculado em uma turma de Cálculo II ou esteja aprendendo sozinho, eis uma visão geral de algumas áreas da matemática que estão além da integração.

Cálculo de várias variáveis

O cálculo de várias variáveis generaliza a diferenciação e a integração em três dimensões ou mais. A diferenciação em mais de duas dimensões requer *derivadas parciais*. A integração em mais de duas dimensões utiliza *integrais múltiplas*.

Na prática, o cálculo de várias variáveis, como é ensinado na maioria das turmas de Cálculo III, está restrito a três dimensões, utilizando três conjuntos de eixos e três variáveis, x, y e z. Discutimos o cálculo multivariável com mais detalhes no Capítulo 14.

Derivadas parciais

Como você conhece do Cálculo I, uma *derivada* é a inclinação de uma curva em determinado ponto do gráfico. Quando você estende a ideia da inclinação para três dimensões, surge um novo conjunto de questões que precisam ser resolvidas.

Por exemplo, suponha que você está parado ao lado de uma colina que se inclina para cima. Se você desenhar uma linha para cima e para baixo da colina a partir do ponto em que você está, a inclinação dessa linha será acentuada. Mas se traçar uma linha atravessando a colina pelo mesmo ponto, essa linha terá pouca ou nenhuma inclinação. (Por esse motivo, as estradas nas montanhas tendem a ser lentamente construídas lateralmente, fazendo curvas até o topo, em vez de irem direto para cima ou para baixo.)

Então, quando você mede a inclinação de uma superfície curvada em três dimensões, você precisa levar em consideração não apenas o *ponto* de onde está medindo a inclinação, mas também a *direção* em que você está medindo. As derivadas parciais permitem que você incorpore essa informação adicional.

Integrais múltiplas

Anteriormente neste capítulo, você descobriu que a integração permite que você meça a área sob uma curva. Em três dimensões, algo análogo é encontrar o volume sob uma superfície curvada. As *inte-*

grais múltiplas (integrais inseridas em outras integrais) permitem que você calcule tal volume.

Equações diferenciais

Depois do cálculo de várias variáveis, o próximo tópico que a maioria dos estudantes aprende em sua precipitada jornada matemática é o das *equações diferenciais*.

As equações diferenciais surgem em muitas áreas da ciência, incluindo a física, onde os conceitos-chave, como velocidade e aceleração de um objeto, são calculados como primeira e segunda derivadas. As equações resultantes contêm combinações complicadas de derivadas que são confusas e difíceis de resolver. Por exemplo:

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Além das equações diferenciais ordinárias, que incluem apenas derivadas ordinárias, as *equações diferenciais parciais* — como a equação do calor ou Equação de Laplace — incluem derivadas parciais. Por exemplo:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Passamos pelas equações diferenciais parciais e ordinárias no Capítulo 15.

Análise de Fourier

Tanto da física se expressa com equações diferenciais, que encontrar métodos confiáveis para resolver essas equações tornou-se uma necessidade urgente dos cientistas do século XIX. O matemático Joseph Fourier conseguiu isso com o maior sucesso.

Fourier desenvolveu um método para expressar cada função como a função de uma série infinita de senos e cossenos. Devido ao fato de as funções trigonométricas serem contínuas e infinitamente diferenciáveis, a Análise de Fourier faz uma abordagem unificada para resolver grandes famílias de equações diferenciais que, anteriormente, eram incalculáveis.

Análise numérica

Grande parte da matemática é teórica e ideal: a busca pelas respostas exatas sem se preocupar com considerações práticas tais como "Quanto tempo leva para resolver esse problema?" (Se você já ficou sem tempo em uma prova de matemática, você provavelmente sabe do que estamos falando!)

Em contraste, a *análise numérica* é a busca por uma resposta aproximada o suficiente em uma quantidade de tempo razoável.

Por exemplo, eis uma integral que não pode ser calculada:

$$\int e^{x^2}\,dx$$

Mesmo que você não possa resolver essa integral, poderá *aproximar* sua solução com qualquer grau de precisão que desejar. E para aplicações práticas, uma boa aproximação frequentemente é aceitável, contanto que você (ou, mais provavelmente, um computador) possa calculá-la em um tempo razoável. Esse procedimento de aproximar uma solução de um problema é chamado de *algoritmo*.

A análise numérica examina algoritmos por qualidades como a *precisão* (a margem de erro de uma aproximação) e a *resolubilidade* (quanto tempo leva o cálculo para atingir um nível específico de precisão).

Capítulo 2

Exorcizando os Fantasmas do Passado: Uma Revisão de Pré-Cálculo e de Cálculo I

Neste Capítulo

- Entenda os expoentes com 0, os números negativos e as frações
- Faça o gráfico de funções contínuas e suas transformações
- Relembre identidades trigonométricas e notação sigma
- Compreenda e avalie os limites
- Diferencie utilizando todas as suas regras preferidas
- Avalie formas indeterminadas de limites com a Regra de L'Hospital

Lembra-se de *Um conto de natal*, de Charles Dickens? Você sabe, Scrooge e aqueles fantasmas do passado. A matemática pode ser exatamente assim: todas as coisas que você pensou que estavam mortas e enterradas durante anos, de repente fazem uma visita assustadora quando menos se espera.

Esta rápida revisão serve para salvá-lo de desnecessárias noites sem dormir. Antes de continuar em sua busca pelo cálculo, assegure-se de que conhece bem as informações deste capítulo.

Primeiro cobriremos todo o Pré-Cálculo que você "se esqueceu" de lembrar: os polinômios, os expoentes, os gráficos de funções e suas transformações, as identidades trigonométricas e a notação sigma. Então faremos uma breve revisão de Cálculo I, que se concentrará nos limites e nas derivadas. Concluiremos o capítulo com um tópico com o que você pode ou não saber sobre Cálculo I: a Regra de L'Hospital para calcular formas indeterminadas de limites.

Caso ainda se sinta confuso quando terminar este capítulo, recomendamos que leia o livro *Pré-Cálculo Para Leigos®* de Deborah Rumsey, PhD, ou *Cálculo Para Leigos®*, de Mark Ryan, para uma revisão mais profunda.

Esquecidos, mas Não Falecidos: Uma Revisão de Pré-Cálculo

Esta é uma história verídica: Quando voltei à universidade para estudar matemática, tendo feito anteriormente minha primeira graduação em Inglês, havia muitos anos desde a última vez que estudei matemática. Não mencionarei quantos anos, mas quando confidenciei esse número para minha primeira professora de Cálculo, ela desmaiou e foi acordada com sais (certo, estou exagerando um pouquinho), e então ela perguntou, com um olhar preocupado em seu rosto: "Tem certeza de que está pronto para isso?".

Não estava nem um pouco certo, mas continuei lá. Ao longo do caminho, continuei refinando uma pilha de notas com o nome "Pura Memorização" — basicamente, o que você encontrará nesta seção. O que aprendi naquele semestre: tenha passado um ou vinte anos desde que tenha visto Pré-Cálculo, assegure-se de estar familiarizado com essas informações.

Conheça os fatos sobre os fatoriais

O *fatorial* de um inteiro positivo, representado pelo símbolo !, é aquele número multiplicado por cada inteiro positivo, menor que ele mesmo. Por exemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Perceba que o fatorial de cada número positivo é igual àquele número multiplicado pelo próximo fatorial menor. Por exemplo:

$$6! = 6\,(5!)$$

Falando de forma geral, então, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$(x + 1)! = (x + 1)\,x!$$

Essa equação explica a razão da estranha convenção de que $0! = 1$:

$$(0 + 1)! = (0 + 1)\,0!$$

$$1! = (1)\,0!$$

$$1 = 0!$$

Quando os fatoriais aparecem em frações (como veremos nos Capítulos 12 e 13), normalmente você pode fazer vários cortes para simplificar seu trabalho. Por exemplo:

$$\frac{3!}{5!} = \frac{(3 \cdot 2 \cdot 1)}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{1}{(5 \cdot 4)} = \frac{1}{20}$$

Até mesmo quando uma fração inclui fatoriais com variáveis, você normalmente pode simplificá-lo. Por exemplo:

$$\frac{(x+1)!}{x!} = \frac{(x+1)\,x!}{x!} = x + 1$$

Polir polinômios

Um polinômio é qualquer função na seguinte forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

Note que cada termo em um polinômio é um x elevado à potência de um inteiro não negativo, multiplicado por um coeficiente com número real. Veja alguns exemplos de polinômios:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 5$$

$$f(x) = x^{12} - \frac{3}{4}x^7 + 100x - \pi$$

$$f(x) = (x^2 + 8)(x - 6)^3$$

Perceba que no último exemplo, multiplicar o lado direito da equação irá mudar o polinômio para uma forma mais reconhecível.

Os polinômios gozam de um *status* especial na matemática porque eles são particularmente fáceis de trabalhar. Por exemplo, você pode encontrar o valor de $f(x)$ para qualquer valor de x ao substituir esse valor no polinômio. Além disso, os polinômios são também fáceis de diferenciar e integrar. Saber como reconhecer polinômios quando os vê torna sua vida em qualquer curso de matemática muito mais fácil.

Fortaleça a força (potência e expoentes)

Você se lembra de quando descobriu que qualquer número (exceto 0) elevado à potência 0 é igual a 1? Isto é:

$$n^0 = 1 \text{ (para cada } n \neq 0)$$

Pareceu estranho? Mas quando perguntou o motivo a seu professor, provavelmente obteve uma resposta mais ou menos como: "É porque a matemática simplesmente define assim". Não é uma resposta muito esclarecedora, não é?

Contudo, se está curioso para saber o porquê (ou pelo menos um pouco curioso sobre isso), a resposta está em padrões de números.

Para começar, suponha que $n = 2$. A Tabela 2-1 é uma representação que engloba informações que você já conhece.

Tabela 2-1 Inteiros Positivos Expoentes de 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8
2^x	2	4	8	16	32	64	128	256

Como você pode ver, conforme x aumenta em 1, 2^x dobra. Então, quando x diminui 1, 2^x é divido por 2. Você não precisa ser um cientista da NASA para descobrir o que acontece quando $x = 0$. A Tabela 2-2 mostra o que acontece:

Tabela 2-2 Inteiros Não Negativos Expoentes de 2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^x	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Essa tabela fornece a simples razão do porquê $2^0 = 1$. A mesma razão funciona para todos os outros valores reais de n (exceto 0). Além disso, a Tabela 2-3 mostra o que acontece quando continua com o padrão até os valores negativos de x.

Tabela 2-3 Inteiros Positivos e Negativos Expoentes de 2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
n^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Conforme mostra a tabela, $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$. Esse padrão também se mantém para valores reais, não zero, de n, então

$$n^{-x} = \frac{1}{n^x}$$

Perceba que, de acordo com essa tabela, a seguinte regra diz:

$$n^a n^b = n^{a+b}$$

Por exemplo:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

Essa regra permite que você calcule expoentes fracionais como raízes. Por exemplo:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = 2^1 = 2 \quad \text{então} \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Você pode generalizar essa regra para todas as bases e os expoentes fracionais, como a seguir:

$$n^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{n^a}$$

Substituir esses valores para x e $f(x) = 2^x$ em um gráfico oferece uma compreensão ainda mais ampla (Veja a Figura 2-1):

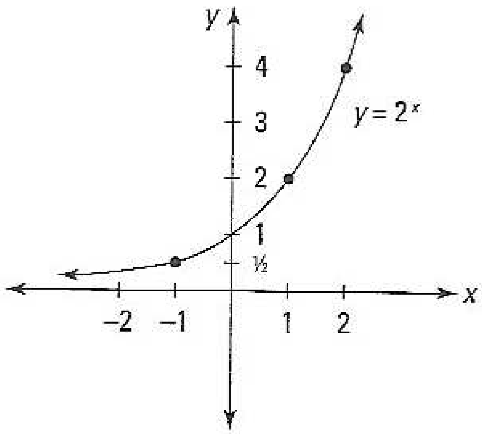


Figura 2-1: Gráfico da função $y = 2^x$.

Na verdade, presumindo a continuidade da curva exponencial se chega a uma razão (ou, pensamos, a uma *falta de razão*) para o cálculo de um número elevado a um expoente irracional. Esse cálculo está fora da abrangência deste livro, mas é um problema de análise numérica, um tópico que já discutimos brevemente no Capítulo 1.

Note a notação trigonométrica

A trigonometria é uma matéria grande e importante de Cálculo II. Não pode-mos abordar tudo o que você precisa saber sobre trigonometria aqui. Para uma informação mais detalhada sobre ela, veja *Trigonometria Para Leigos®*, de Mary Jane Sterling. Mas queremos gastar um minuto com um aspecto da notação trigonométrica para esclarecer qualquer dúvida que você possa ter.

Quando você vir a notação

$$2 \cos x$$

lembre-se de que isso significa $2 (\cos x)$. Então, para calcular essa função quando $x = \pi$, calcule a função interna de $\cos x$ primeiro, e então multiplique o resultado por 2:

$$2 \cos \pi = 2 \cdot -1 = -2$$

Por outro lado, a notação

$$\cos 2x$$

significa cos $(2x)$. Por exemplo, para calcular essa função quando $x = 0$, primeiro calcule a função interna $2x$, e depois extraia o cosseno do resultado:

$$\cos (2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$$

Finalmente (e assegure-se de que você vai compreender isto), a notação

$$\cos^2 x$$

significa $(\cos x)^2$. Em outras palavras, para calcular essa função quando $x = \pi$, calcule a função interna cos x primeiro, e então eleve ao quadrado o resultado:

$$\cos^2 \pi = (\cos \pi)^2 = (-1)^2 = 1$$

Saber como calcular funções trigonométricas realmente é importante quando você está aplicando a Regra da Cadeia (que discutiremos mais adiante, neste capítulo) e ao integrar funções trigonométricas (que abordaremos no Capítulo 7).

Descubra os ângulos com radianos

Quando você vê trigonometria pela primeira vez, provavelmente utiliza os graus, pois estava familiarizado com eles na geometria. Durante o caminho, foi introduzido aos radianos e forçado a fazer um monte de conversões entre graus e radianos, e então no capítulo seguinte voltou a utilizar os graus.

Graus são ótimos para certos usos na trigonometria, como em cálculo de terrenos. Mas para a matemática, os radianos são a ferramenta certa para o trabalho, ao contrário dos graus.

Por exemplo, considere a expressão seno 1.260°. Você provavelmente não pode dizer, só de olhar para essa expressão, que o resultado é 0, pois 1.260° é um múltiplo de 180°.

Em contraste, você pode dizer imediatamente que a expressão equivalente de sen7π é um múltiplo de π. E, como bônus, quando se trabalha com radianos, o número tende a ser menor e você não tem de adicionar o símbolo do grau (°).

Você não precisa se preocupar em calcular conversões entre graus e radianos. Apenas assegure-se de conhecer os ângulos mais comuns tanto em graus quanto em radianos. A Figura 2-2 mostra a você alguns ângulos comuns.

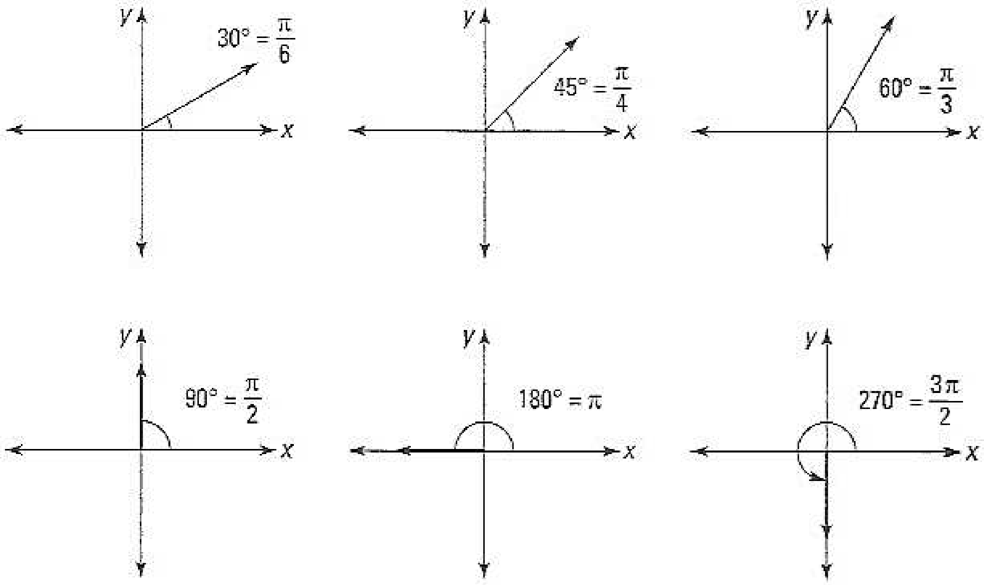


Figura 2-2: Alguns ângulos comuns em graus e radianos.

Os radianos são a base das coordenadas polares, as quais discutiremos mais adiante nesta seção.

Faça o gráfico de funções comuns

Você deveria estar familiarizado com a forma como certas funções comuns são representadas em um gráfico. Nesta seção, mostro a você os gráficos mais comuns de funções. Essas funções são todas contínuas, então elas são integráveis em todos os valores reais de x.

Funções lineares e polinomiais

A Figura 2-3 mostra três funções simples.

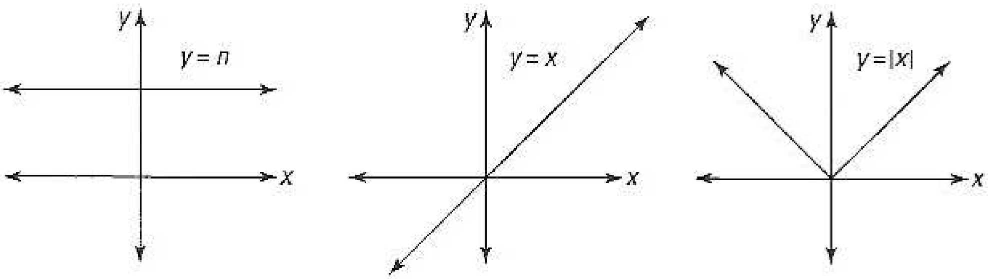


Figura 2-3: Gráficos de duas funções lineares $y = n$ e $y = x$ e a função do valor absoluto de $y = |x|$.

A figura 2-4 inclui algumas funções polinomiais básicas.

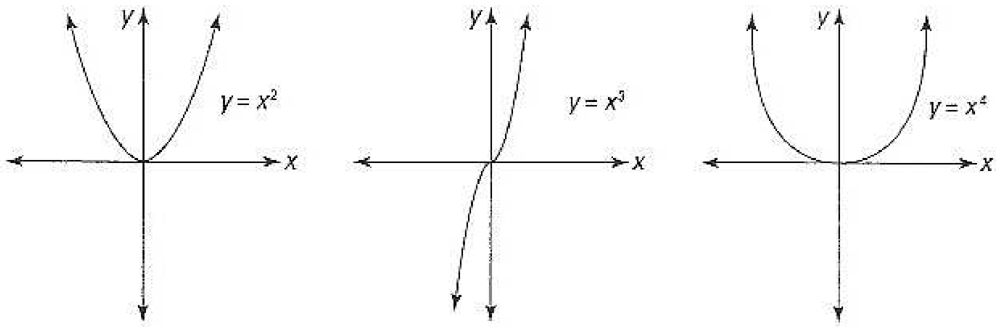


Figura 2-4: Gráficos de três funções polinomiais $y = x^2$, $y = x^3$, e $y = x^4$.

Funções exponenciais e logarítmicas

Veja algumas *funções exponenciais* com números inteiros como bases:

$y = 2^x$

$y = 3^x$

$y = 10^x$

Observe que para cada base positiva, a função exponencial:

- Cruza o eixo y em $x = 1$
- Chega ao infinito conforme o x aumenta (isto é, tem um valor y ilimitado)
- Aproxima-se de $y = 0$ conforme x diminui (isto é, na direção negativa o eixo x é uma assíntota)

A função exponencial mais importante é e^x. Veja na Figura 2-5 o gráfico dessa função.

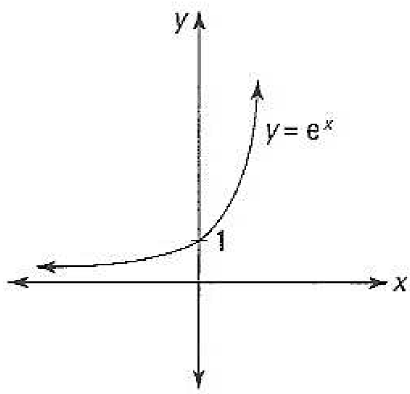


Figura 2-5: Gráfico da função exponencial $y = e^x$.

A característica única dessa função exponencial é que para cada valor de x, sua inclinação é e^x. Ou seja, essa função é sua própria derivada. (Veja "Memórias recentes: uma revisão de Cálculo I", mais adiante neste capítulo, para saber mais sobre as derivadas.)

Outra função importante é a *função logarítmica* (também chamada de função logarítmica natural). A Figura 2-6 é o gráfico da função logarítmica $y = \ln x$.

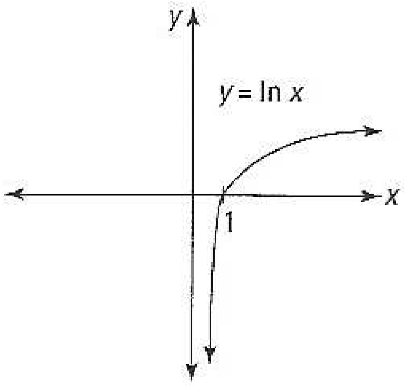


Figura 2-6: Gráfico da função logarítmica $y = \ln x$.

Perceba que essa função é o reflexo de e^x ao longo da linha diagonal $y = x$. Então, a função logarítmica se comporta assim:

- Cruza o eixo x em $x = 1$
- Segue ao infinito conforme x aumenta (isto é, tem um valor ilimitado para y), embora de forma mais lenta do que as outras funções exponenciais
- Produz um valor de y que se aproxima de $-\infty$ conforme x se aproxima de 0 pela direita

Além disso, o domínio das funções logarítmicas inclui apenas valores positivos. Quer dizer, atribuir um valor não positivo à função logarítmica é altamente proibido, assim como colocar 0 no denominador de uma fração ou um valor negativo dentro de uma raiz quadrada.

Em razão disso, as funções inseridas dentro da função logarítmica com frequência são "tratadas com antecedência" com o operador de valor absoluto. Por exemplo:

$$y = \ln |x^3|$$

DICA

Você pode levar o expoente para fora de um logaritmo natural e torná-lo um coeficiente, como a seguir:

$$\ln (a^b) = b \ln a$$

Funções trigonométricas

Os dois gráficos mais importantes das funções trigonométricas são o seno e o cosseno. Veja na figura 2-7 os gráficos dessas funções.

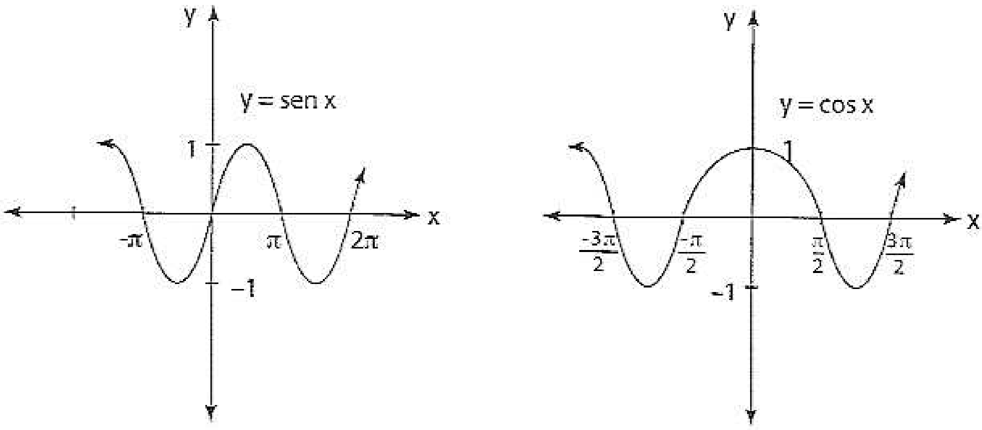


Figura 2-7: Gráficos das funções trigonométricas y = sen x e $y = \cos x$.

Perceba que os valores de x nesses dois gráficos são tipicamente determinados em múltiplos de π. Cada uma dessas funções tem um período de 2π. Em outras palavras, ela repete seus valores após 2π unidades. E cada uma tem um valor máximo de 1 e um valor mínimo de -1.

Lembre-se de que a função seno

- Cruza a origem
- Alcança um valor de 1 em $x = \frac{\pi}{2}$
- Cruza o eixo x em todos os múltiplos de π

Lembre-se de que a função cosseno

- Tem um valor de 1 em $x = 0$
- Cai ao valor de 0 em $x = \frac{\pi}{2}$
- Cruza o eixo x em $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, e assim por diante

Também é importante conhecer os gráficos de outras funções trigonométricas. A Figura 2-8 mostra os gráficos das funções trigonométricas $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, e $y = \csc x$.

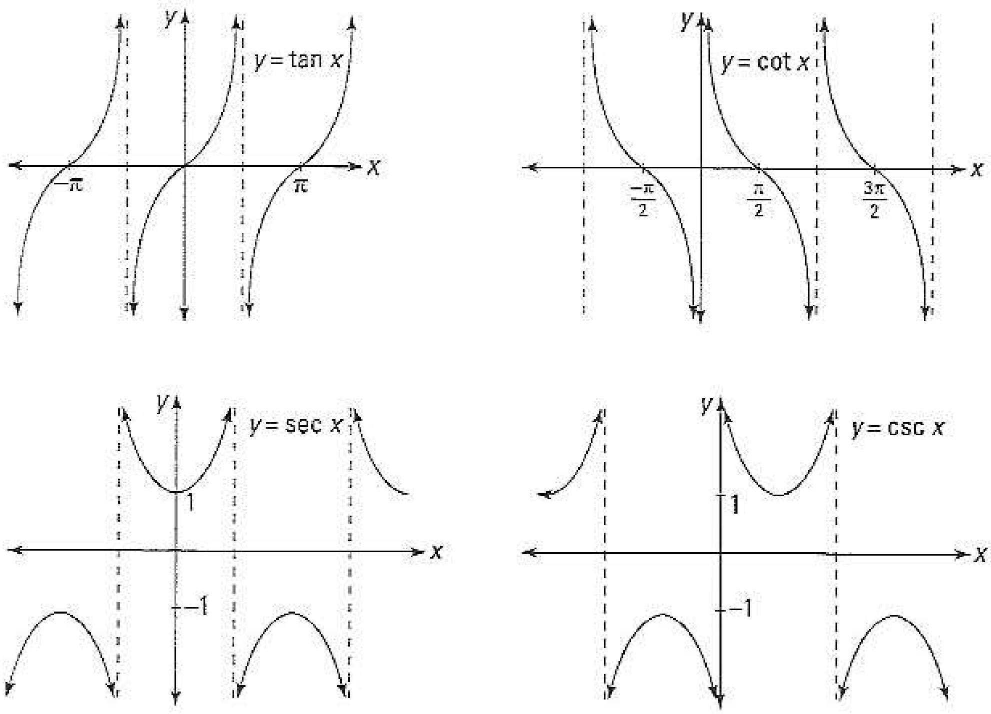


Figura 2-8: Gráficos das funções trigonométricas $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, e $y = \csc x$.

Assíntotas

Uma assíntota é qualquer linha reta no gráfico da qual a curva se aproxima, mas não toca. Normalmente é representada no gráfico como uma linha pontilhada. Por exemplo, todos os quatro gráficos da Figura 2-8 têm assíntotas verticais.

Dependendo da curva, uma assíntota pode estar em qualquer direção, até mesmo na diagonal. Quando você está trabalhando com funções, contudo, assíntotas horizontais e verticais são mais comuns.

Transformação de funções contínuas

Caso saiba como fazer o gráfico das funções mais comuns, poderá transformá-las utilizando alguns truques simples, como demonstraremos na Tabela 2-4.

Tabela 2-4 Cinco Transformações Verticais e Cinco Transformações Horizontais das Funções

Eixo	*Direção*	*Transformação*	*Exemplo*
eixo y (vertical)	Desloca para Cima	$y = f(x) + n$	$y = e^x + 1$
	Desloca para Baixo	$y = f(x) - n$	$y = x^3 - 2$
	Expande	$y = nf(x)$	$y = 5 \sec x$
	Contrai	$y = \frac{f(x)}{n}$	$y = \frac{\text{sen } x}{10}$
	Reflete	$y = -f(x)$	$y = -(\ln x)$
eixo x (horizontal)	Desloca para Direita	$y = f(x - n)$	$y = e^{x-2}$
	Desloca para Esquerda	$y = f(x + n)$	$y = (x + 4)^3$
	Expande	$y = f\left(\frac{x}{n}\right)$	$y = \sec \frac{x}{3}$
	Contrai	$y = f(nx)$	$y = \text{sen } (\pi x)$
	Reflete	$y = f(-x)$	$y = e^{-x}$

As transformações verticais são intuitivas — isto é, elas colocam as funções na posição que você provavelmente esperava. Por exemplo, adicionar uma constante desloca a função para cima e subtrair uma constante desloca-a para baixo.

Em contraste, as transformações horizontais são contraintuitivas — quer dizer, elas levam a função na direção que você provavelmente não esperava. Por exemplo, adicionar uma constante desloca a função para a esquerda e subtrair uma constante desloca-a para a direita.

Reconheça algumas identidades trigonométricas importantes

Memorizar identidades trigonométricas é como arrumar a mochila para um acampamento.

Quando você está se preparando para o mundo selvagem, há um limite daquilo que pode confortavelmente carregar, então provavelmente deverá deixar seu pula-pula e seus pesos de dez quilos em casa. Ao mesmo tempo, você não quer estar há quilômetros de distância da civilização sem comida, sem uma barraca e sem um kit de primeiros socorros.

Sabemos que memorizar identidades trigonométricas está, na escala de diversão, entre colocar seus temperos em ordem alfabética e limpar o filtro de sua secadora. Mas conhecer algumas identidades

Como evitar uma crise de identidade

A maioria dos estudantes se lembra da primeira identidade quadrática sem problema:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Se você está preocupado em esquecer as outras duas identidades quadráticas exatamente quando mais precisar delas, não entre em pânico. Uma forma fácil de lembrá-las é dividir cada termo da primeira identidade quadrática pelo $\text{sen}^2 x$ e o $\cos^2 x$.

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

Agora, simplifique essas equações utilizando as cinco identidades trigonométricas básicas:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

trigonométricas pode ser um salva-vidas quando você está perdido nas trilhas nebulosas do cálculo, então recomendamos que você tenha algumas à mão sempre com você. (É legal quando a metáfora faz sentido, não?)

Para começar, aqui estão as três *identidades inversas*, que você provavelmente já conhece:

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{\csc x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}$$

Você também precisa destas duas importantes identidades:

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$$

Chamamos essas de as Cinco Identidades Trigonométricas Básicas. Ao utilizá-las, você pode expressar *qualquer* expressão trigonométrica em termos de senos e cossenos. Menos obviamente, você também pode expressar qualquer expressão trigonométrica em termos de tangentes e secantes (tente!). Ambos os fatos serão úteis no Capítulo 7, quando discutiremos a integração trigonométrica.

Igualmente indispensáveis são as três *identidades quadradas*. A maioria dos estudantes se lembra da primeira e esquece as outras duas, mas você precisa saber todas:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Você também não desejaria ser visto em público sem saber as duas *identidades de meio-ângulo*:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Finalmente, você não pode viver sem as *identidades de ângulo duplo para os senos*:

$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$

Além dessas, se você tem algum tempo livre, pode incluir essas *identidades de ângulo duplo para cossenos e tangentes*:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Coordenadas polares

Coordenadas polares são uma alternativa para o sistema Cartesiano de coordenadas. Assim como nas coordenadas cartesianas, as coordenadas polares indicam um par ordenado de valores para cada ponto no plano. Diferentemente das coordenadas cartesianas, contudo, esses valores não são (x, y), mas sim (r, θ).

- O valor r é a distância até a origem.
- O valor θ é a distância angular do eixo polar, que corresponde ao eixo x positivo das coordenadas cartesianas (a distância angular é sempre medida no sentido anti-horário).

A Figura 2-9 mostra como traçar pontos em coordenadas polares. Por exemplo:

- Para estabelecer o ponto $(3, \frac{\pi}{4})$, ande três unidades da origem no eixo polar, e então faça um arco de $\frac{\pi}{4}$ (equivalente a 45°) no sentido anti-horário.
- Para estabelecer $(4, \frac{5\pi}{6})$, ande quatro unidades a partir da origem no eixo polar, e então faça um arco de $\frac{5\pi}{6}$ unidades (equivalente a 150°) no sentido anti-horário.
- Para estabelecer o ponto $(2, \frac{3\pi}{2})$, ande duas unidades a partir da origem no eixo polar, e então faça um arco de $\frac{3\pi}{2}$ unidades (equivalente a 270°) no sentido anti-horário.

As coordenadas polares permitem que você represente certas formas em um gráfico de forma mais simples do que a das coordenadas cartesianas. Por exemplo, eis uma equação para um círculo de três unidades com o centro na origem, em ambas, as coordenadas cartesianas e polares:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 9} \qquad r = 3$$

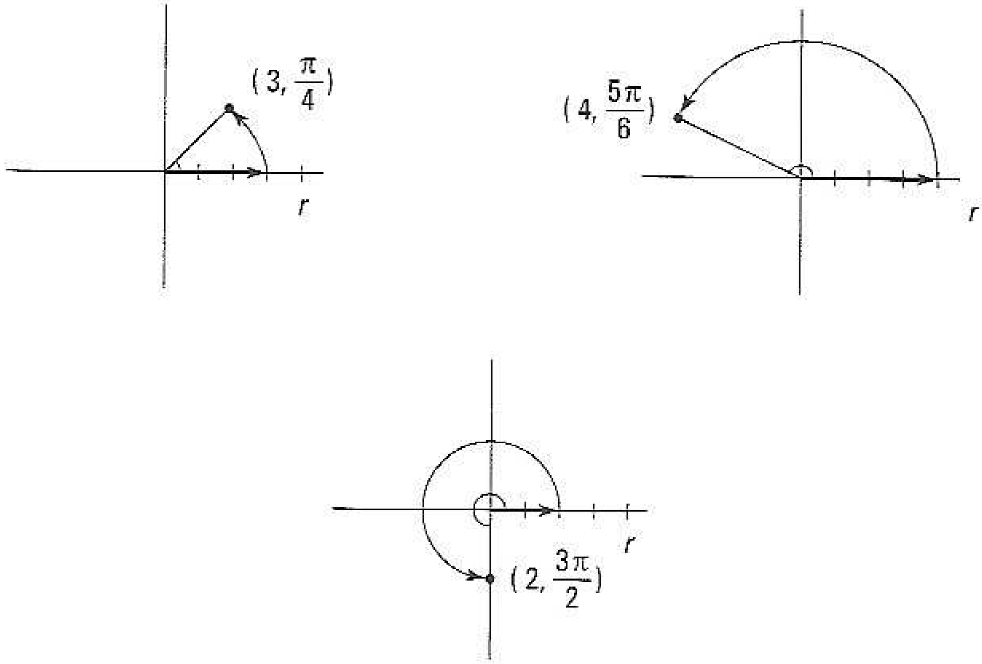


Figura 2-9: Representação de pontos nas coordenadas polares.

Alguns problemas que seriam difíceis de resolver se fossem expressos em termos de variáveis cartesianas (x e y) tornam-se muito mais fáceis quando expressos em termos de variáveis polares (r e θ). Para converter as variáveis cartesianas em polares, utilize as seguintes fórmulas:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen} 0$$

Para converter variáveis polares em cartesianas, utilize esta fórmula:

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

As coordenadas polares são a base de dois sistemas de coordenadas 3-D alternativos: coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas. Veja no Capítulo 14 mais sobre esses dois sistemas.

Soma com notação sigma

Os matemáticos simplesmente amam a notação sigma (Σ) por duas razões. Primeiro, porque ela fornece uma forma conveniente de expressar uma série longa ou até mesmo infinita. Segundo, e mais importante, porque ela parece realmente legal e assustadora; o que assusta os não matemáticos fazendo com que os matemáticos sejam reverenciados e recebam mais dinheiro.

Contudo, quando você chega a seu cerne, Σ é apenas uma notação extravagante para a adição. Se nem mesmo seu irmão menor tem medo de adição, então por que você teria?

Por exemplo, suponha que você deseje somar os números pares de 2 até 10. É claro, você pode escrever essa expressão e resolvê-la desta forma:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

Ou você pode escrever a mesma expressão utilizando a notação sigma:

$$\sum_{n=1}^{5} 2n$$

Aqui, n é a *variável da soma* — quer dizer, a variável que você substitui por valores e então os soma. Abaixo de Σ, é dado o valor inicial de n (1) e acima o valor final (5). Então, veja como você expande a notação:

$$\sum_{n=1}^{5} 2n = 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5) = 30$$

Você também pode utilizar a notação sigma para representar a soma de um número infinito de valores — isto é, uma *série infinita*. Por exemplo, veja como somar todos os quadrados dos números positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

Essa expressão compacta pode ser expandida da seguinte forma:

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... = 1 + 4 + 9 + 16 + ...$$

Essa soma é, obviamente, infinita. Mas nem todas as séries infinitas se comportam dessa forma. Em alguns casos, uma série infinita é igual a um número. Por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Essa série se expande e resulta no seguinte:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2$$

Quando uma série resulta em um número, a série é *convergente*. Quando uma série não é convergente, ela é *divergente*. Você verá tudo sobre séries divergentes e convergentes no Capítulo 12.

Memórias Recentes: Uma Revisão de Cálculo I

A integração é o estudo sobre como resolver determinado problema — o problema de área. Similarmente, a diferenciação, que é o foco de Cálculo I, é o estudo sobre como resolver o *problema da tangente*: como encontrar a inclinação de uma linha tangente em qualquer ponto de uma curva. Nesta seção, revisaremos os destaques de Cálculo I. Para uma revisão mais completa, por favor leia *Cálculo Para Leigos*®, de Mark Ryan.

Conheça seus limites

Um fio importante da teia de Cálculo I é o conceito de *limite*. Os limites também são importantes em Cálculo II. Nesta seção, realizaremos uma revisão de tudo que você precisa relembrar, e que pode ter esquecido, sobre os limites.

Informe separadamente as funções e os limites

Uma função fornece uma ligação entre duas variáveis: a variável independente (normalmente x) e a variável dependente (normalmente y). Uma função indica a você o valor de y quando x assume um valor específico. Por exemplo, eis uma função:

$$y = x^2$$

Nesse caso, quando x assume o valor de 2, o valor de y é 4.

Em contraste, um limite indica a você o que acontece com y quando x se aproxima de determinado número sem realmente alcançá-lo. Por exemplo, suponha que você esteja trabalhando com a função $y = x^2$ e deseje saber o limite dessa função conforme x se aproxima de 2. A notação para expressar essa ideia é a seguinte:

$$\lim_{x \to 2} x^2$$

Você pode obter uma noção de qual é esse limite ao substituir aproximações sucessivamente mais próximas de 2 na função (veja a Tabela 2-5).

Tabela 2-5 Aproximação de $\lim_{x \to 2} x^2$

x	1.7	1.8	1.9	1.99	1.999	1.9999
y	2.69	3.24	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001

Essa tabela fornece fortes evidências de que o limite resultará em 4. Quer dizer:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Lembre-se de que esse limite não indica nada a respeito do resultado da equação quando $x = 2$. Diz apenas que conforme x se aproxima de 2, o valor da função se aproxima cada vez mais e mais de 4. Nesse caso, devido ao fato de a função e o limite serem iguais, a função é contínua nesse ponto.

Calcule limites

Calcular um limite significa encontrar o valor do limite ou demonstrar que o limite não existe.

Você pode calcular muitos limites ao substituir a variável do limite pelo número que ela aproxima. Por exemplo:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2}{2x} = \frac{4^2}{2 \cdot 4} = \frac{16}{8} = 2$$

Algumas vezes, essa substituição quer mostrar a você que o limite não existe. Por exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Quando você descobre que um limite parece se igualar ao ∞ ou -∞, o limite *não existe (NE)*. NE é uma forma perfeitamente adequada de completar o cálculo de um limite.

Algumas substituições levam a situações aparentemente isolúveis, como uma divisão por zero. Por exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0}$$

Isso parece um beco sem saída, pois a divisão por zero é indefinida. Mas, na verdade, você realmente pode obter uma resposta para esse problema. Lembre-se de que esse limite não indica nada a respeito do que acontece quando x de fato se iguala a 0, apenas indica o que acontece quando x *se aproxima* de 0: o denominador diminui para 0, enquanto o numerador nunca cai abaixo de 1, então o valor da fração se torna indefinidamente maior. Portanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x} \quad \text{Não Existe (NE)}$$

Veja outro exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1{,}000{,}000}{x} = \frac{1{,}000{,}000}{\infty}$$

Esse é outro beco sem saída aparente, pois ∞ não é exatamente um número, então como pode ser o denominador de uma fração? Novamente, o limite salva o dia. Ele não indica a você o que acontece quando x realmente se iguala ao ∞ (como se isso fosse possível), indica apenas o que acontece quando x *se aproxima* do ∞. Nesse caso, o denominador se torna indefinidamente maior enquanto o numerador permanece constante, então:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1.000.000}{x} = 0$$

LEMBRE-SE

Alguns limites são mais difíceis de encontrar, pois eles são uma das várias *formas indeterminadas*. A melhor forma de resolvê-los é utilizar a Regra de L'Hospital, que discutiremos em detalhe no final deste capítulo.

Acertar as inclinações com as derivadas

A *derivada* em determinado ponto de uma função é a inclinação de uma linha tangente àquela função naquele ponto. A derivada de uma função fornece um "mapa de inclinação" daquela função.

A melhor forma de comparar uma função com sua derivada é alinhá-las verticalmente (veja o exemplo da Figura 2-10).

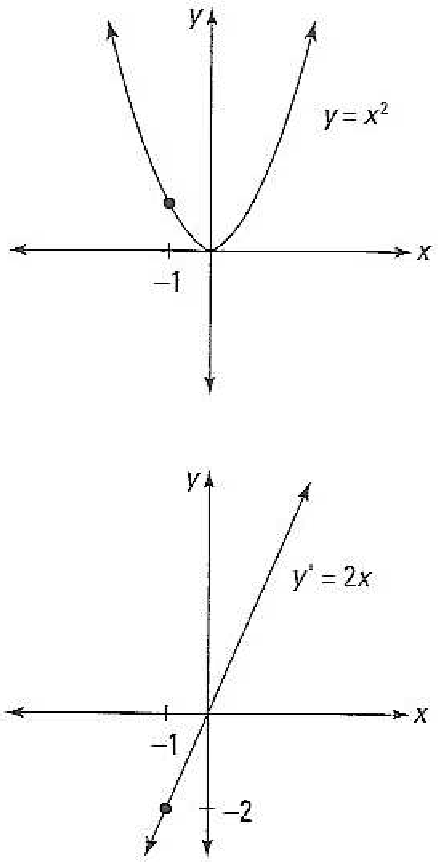


Figura 2-10: Comparação entre um gráfico da função $y = x^2$ e o gráfico de sua função derivada $y' = 2x$.

Ao olhar para o gráfico de cima, você pode ver que quando $x = 0$, a inclinação da função $y = x^2$ é 0 — quer dizer, não há inclinação. O gráfico de baixo verifica isso, pois em $x = 0$, a função derivada $y = 2x$ também é 0.

Você provavelmente não pode dizer, contudo, qual é a inclinação do gráfico de cima quando $x = -1$. Para descobrir, você teria de ver o gráfico de baixo e perceber que em $x = -1$, a função derivada se iguala a -2, então o número -2 é a inclinação do gráfico de cima nesse ponto. Similarmente, a função derivada indica a inclinação em cada ponto da função original.

Revisão da fórmula do limite para as derivadas

Em Cálculo I, você desenvolveu duas fórmulas para a derivada de uma função. Essas fórmulas são ambas baseadas nos limites, e ambas são igualmente válidas:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h-0}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Você provavelmente não precisará voltar a essas fórmulas conforme estudar Cálculo II. Ainda assim, por favor, mantenha em mente que a definição oficial de uma função derivada sempre se dá em termos de limites.

Para uma visão mais detalhada sobre como essas formas foram desenvolvidas, leia *Cálculo Para Leigos®*, de Mark Ryan.

Conheça duas notações para as derivadas

Os estudantes frequentemente acham a notação das derivadas — especialmente a notação de Leibniz $\frac{d}{dx}$ — confusa. Para simplificar as coisas, pense nessa notação como um *operador unário* que funciona de forma similar a um sinal de menos.

Um sinal de menos ligado ao início de uma expressão, muda o valor daquela expressão para seu negativo. Calcular o efeito desse sinal na expressão se chama distribuição, o que produz uma expressão nova, porém equivalente. Por exemplo:

$$-(x^2 + 4x - 5) = -x^2 - 4x + 5$$

Similarmente, a noção $\frac{d}{dx}$ colocada na frente de uma expressão, muda o valor dessa expressão para sua *derivada*. Calcular o efeito dessa notação na expressão chama-se *diferenciação*, o que produz uma expressão nova, porém equivalente. Por exemplo:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4x - 5) = 2x + 4$$

A notação básica continua igual, mesmo quando uma expressão é reformulada como uma função. Por exemplo, dada a função $y = f(x) = x^2 + 4x - 5$, veja como diferenciar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = 2x + 4$$

A notação $\frac{dy}{dx}$, que significa "a mudança em y conforme x muda", foi usada pela primeira vez por Gottfried Leibniz, um dos inventores do Cálculo (o outro inventor foi Isaac Newton). Uma vantagem da notação de Leibniz é que ela indica explicitamente a variável sobre a qual você está diferenciando — neste caso, x. Quando essa informação é facilmente compreendida em contexto, a notação mais curta também está disponível:

$$y' = f'(x) = 2x + 4$$

Você deveria estar confortável com ambas as formas de notação. Iremos utilizá-las alternadamente em todo este livro.

Compreenda a diferenciação

A diferenciação — o cálculo das derivadas — é o tópico central de Cálculo I e reaparece em Cálculo II.

Nesta seção, faremos uma revisão sobre alguns tópicos importantes da diferenciação. Em particular, 17 derivadas que você precisa saber estão aqui e, para sua comodidade, na Lista de Fórmulas, bem no começo deste livro. E se você está inseguro com a Regra da Cadeia, daremos uma explicação clara para atualizá-lo.

Memorize as principais derivadas

A derivada de qualquer constante sempre é 0:

$$\frac{dn}{dx} = 0$$

A derivada de uma variável pela qual você está diferenciando (na maioria dos casos, x) é 1:

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

Veja mais três derivadas importantes:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}n^x = n^x \ln n$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

É preciso conhecer cada uma dessas derivadas conforme você avança em seu estudo de cálculo.

Derivadas de funções trigonométricas

As derivadas das seis funções trigonométricas são as seguintes:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

Você precisa conhecer todas elas de cor.

Derivadas do inverso das funções trigonométricas

Duas notações são comumente utilizadas para o inverso das funções trigonométricas. Uma é a adição de $^{-1}$ à função: sen^{-1}, $\cos^{-1}$, e assim por diante. A segunda forma é a adição do *arc* à função: arcsen, arccos, e assim por diante. Ambas significam a mesma coisa, mas preferimos a notação do *arc*, pois ela é menos provável de ser confundida com um expoente.

Sabemos que pedir para você memorizar essas funções parece uma piada de mau gosto. Mas você realmente precisará delas quando chegar em substituição trigonométrica, no Capítulo 7, então pelo menos dê uma olhada:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Perceba que as derivadas das três "cofunções" são apenas negações das três outras funções, então isso diminui seu trabalho pela metade.

A Regra da Soma

Nos livros, a definição da Regra da Soma com frequência é apenas uma frase: a derivada da soma das funções equivale à soma das derivadas dessas funções:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Simplificando, a Regra da Soma diz a você que diferenciar expressões longas termo a termo está correto. Por exemplo, suponha que você deseje calcular o seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + x^4 - \ln x)$$

A expressão que você está diferenciando tem três termos, então pela Regra da Soma, você pode dividi-la em três derivadas e resolvê-las separadamente:

$$= \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}\ln x$$
$$= \cos x + 4x^3 - \frac{1}{x}$$

Observe que a Regra da Soma também se aplica às expressões com mais de dois termos, independentemente de o termo ser positivo ou negativo. Alguns livros chamam essa variação de Regra da Diferença, mas você já pegou a ideia.

A Regra do Múltiplo Constante

Um livro típico dá esse tipo de definição para a Regra do Múltiplo Constante: a derivada de uma constante multiplicada por uma função é igual ao produto daquela constante pela derivada daquela função:

$$\frac{d}{dx}nf(x) = n\frac{d}{dx}f(x)$$

Em português claro, essa regra indica que mover uma constante para fora de uma derivada antes de diferenciar está certo. Por exemplo:

$$\frac{d}{dx}5\tan x$$

Para resolver isso, mova o 5 para fora da derivada, e então diferencie:

$$= 5\frac{d}{dx}\tan x$$
$$= 5\sec^2 x$$

A Regra da Potência

A Regra da Potência indica que para encontrar a derivada de x elevado a qualquer potência, é necessário baixar o expoente como um coeficiente de x e então subtrair 1 do expoente e usar isso como um novo expoente. Veja a fórmula geral:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Alguns outros exemplos:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^{10} = 10x^9$$

Quando a função que você está diferenciando já possui um coeficiente, multiplique o expoente por ele. Por exemplo:

$$\frac{d}{dx}2x^4 = 8x^3$$

$$\frac{d}{dx}7x^6 = 42x^5$$

$$\frac{d}{dx}4x^{100} = 400x^{99}$$

A Regra da Potência também se estende aos expoentes negativos, o que lhe permite diferenciar muitas frações. Por exemplo:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^5}$$

$$= \frac{d}{dx}x^{-5}$$

$$= -5x^{-6}$$

$$= -\frac{5}{x^6}$$

Ela também se estende aos expoentes fracionários, o que lhe permite diferenciar raízes quadradas e outras raízes:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

A Regra do Produto

A derivada do produto de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é igual à derivada de $f(x)$ multiplicada por $g(x)$ mais a derivada de $g(x)$ multiplicada por $f(x)$. Quer dizer:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)]$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Pratique repetindo a Regra do Produto desta forma: "A derivada da primeira função vezes a segunda *mais* a derivada da segunda vezes a primeira". Isso engloba a Regra do Produto e o ajuda a lembrar a Regra do Quociente (veja a seção seguinte).

Por exemplo, suponha que queira diferenciar e^x sen x. Comece dividindo o problema como a seguir:

$$\frac{d}{dx} e^x \operatorname{sen} x = \left(\frac{d}{dx} e^x\right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x\right) e^x$$

Agora você pode calcular ambas as derivadas, que fique claro, sem muita confusão.

$$= e^x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot e^x$$

Você pode limpar um pouco assim:

$$= e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

A Regra do Quociente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$$

Pratique repetindo a Regra do Quociente desta forma: "A derivada da função superior vezes a inferior *menos* a derivada da inferior vezes a superior, sobre a inferior ao quadrado". Isso é bem parecido com a Regra do Produto, lembra?

Por exemplo, suponha que queira diferenciar o seguinte:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{\tan x}\right)$$

Da mesma forma que você fez com o exemplo da Regra do Produto, comece dividindo o problema como a seguir:

$$=\frac{\left(\frac{d}{dx}x^4\right)\cdot\tan x-\left(\frac{d}{dx}\tan x\right)\cdot x^4}{\tan^2 x}$$

Agora, descubra as duas derivadas:

$$=\frac{4x^3\cdot\tan x-\sec^2 x\cdot x^4}{\tan^2 x}$$

A resposta está certa, mas você pode simplificar um pouco utilizando alguma álgebra com as cinco identidades trigonométricas básicas do começo deste capítulo. (Não se preocupe demais com esses passos, a menos que seu professor seja particularmente exigente.)

$$=\frac{4x^3\tan x}{\tan^2 x}-(x^4\sec^2 x\cot^2 x)$$

$$=\frac{4x^3}{\tan x}-x^4\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$$

$$=4x^3\cot x-x^4\csc^2 x$$

$$=x^3(4\cot x-x\csc^2 x)$$

A Regra da Cadeia

Estamos conscientes de que a Regra da Cadeia é considerada o ponto mais escorregadio de Cálculo I, então reservamos um tempo para revisá-la. (A propósito, ao contrário da crença popular, a Regra da Cadeia não é "se você não seguir as *regras* em sua aula de Cálculo, o professor o mandará para a *cadeia*". Esse método de ensino hoje é considerado questionável e está fora de uso há muito, muito tempo.)

A Regra da Cadeia permite que você diferencie funções internalizadas — quer dizer, funções dentro de funções. Ela não estipula limites da profundidade dessas "internalizações". Nesta seção, mostraremos uma forma fácil de pensar a respeito de funções internalizadas, e como aplicar a Regra da Cadeia de forma simples.

Resolução de funções de dentro para fora

Quando está desenvolvendo uma função internalizada, você começa pela função *interna* e avança *para fora*. Por exemplo:

$$f(x)=e^{2x}$$

Nesse caso, $2x$ é a função interna. Para entender por que, suponha que você deseje encontrar $f(x)$ para determinado valor de x. Para manter as coisas simples, digamos que $x = 0$. Depois de substituir 0 por x, seu primeiro passo será desenvolver a função interna, que enfatizaremos:

Passo 1: $e^{\underline{2(0)}} = e^0$

Seu próximo passo é resolver a função externa:

Passo 2: $\underline{e}^{0} = 1$

Os termos *função interna* e *função externa* são determinados pela ordem em que as funções são resolvidas. Isso é verdadeiro não importando o quanto essas funções estão internalizadas. Por exemplo:

$$g(x) = \left(\ln\sqrt{e^{3x-6}}\right)^3$$

Suponha que você deseja encontra $g(x)$. Para manter os números simples, dessa vez façamos $x = 2$. Depois de substituir x por 2, veja a ordem de resolução, da função mais interna até a mais externa:

Passo 1: $\left(\ln\sqrt{e^{3(2)-6}}\right)^3 = \left(\ln\sqrt{e^0}\right)^3$

Passo 2: $\left(\ln\sqrt{e^0}\right)^3 = \left(\ln\sqrt{1}\right)^3$

Passo 3: $\left(\ln\sqrt{1}\right)^3 = (\ln 1)^3$

Passo 4: $(\ln 1)^3 = 0^3$

Passo 5: $0^3 = 0$

O processo de resolução claramente escalona cinco funções internalizadas de $g(x)$, da mais interna até a mais externa.

Diferenciação de funções de fora para dentro

Em contraste com a resolução, a diferenciação de uma função, utilizando a Regra da Cadeia, força você a começar pela função *externa* e avançar *para dentro*.

Veja a Regra da Cadeia básica, na forma que encontrará nos livros:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Para diferenciar funções internalizadas utilizando a Regra da Cadeia, escreva a derivada da função externa, copiando tudo que está dentro dela e multiplicando esse resultado pela derivada da próxima função mais interna.

Essa explicação parece um pouco confusa, mas é muito mais fácil quando você sabe como encontrar a função externa, o que explicamos na seção anterior, "Resolução de funções de dentro para fora". Alguns exemplos podem ajudar.

Por exemplo, suponha que você deseje diferenciar a função internalizada sen $2x$. A função externa é a parte do seno, então é aí que você começa:

$$\frac{d}{dx} \text{sen } 2x = \cos 2x \cdot \frac{d}{dx} 2x$$

Para finalizar, você ainda precisa diferenciar a porção destacada, $2x$:

$$= \cos 2x \cdot 2$$

Rearranje essa solução para torná-la mais apresentável e obtenha a resposta final:

$$= 2 \cos 2x$$

Quando você diferencia mais de duas funções internalizadas, a Regra da Cadeia realmente faz *"jus"* ao nome: conforme você quebra o problema em passos, você cria uma *cadeia* de expressões multiplicadas.

Por exemplo, suponha que queira diferenciar $\text{sen}^3 e^x$. Lembre-se da seção anterior, "Observe a notação trigonométrica", que a notação $\text{sen}^3 e^x$ realmente significa $(\text{sen } e^x)^3$. Esse rearranjo torna claro que a função externa é a potência de 3, então comece a diferenciar com esta função:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } e^x)^3 = 3(\text{sen } e^x)^2 \cdot \frac{d}{dx}(\text{sen } e^x)$$

Agora, você tem uma função menor para diferenciar, a qual destacamos:

$$= 3(\text{sen } e^x)^2 \cdot \cos e^x \cdot \frac{d}{dx} e^x$$

Falta apenas mais uma derivada:

$$= 3(\text{sen } e^x)^2 \cdot \cos e^x \cdot e^x$$

Novamente, rearranjar sua resposta é um hábito:

$$= 3e^x \cos e^x \, \text{sen}^2 e^x$$

Encontre Limites Utilizando a Regra de L'Hospital

A Regra de L'Hospital diz respeito aos limites e às derivadas, então ela se encaixa melhor em Cálculo I do que em Cálculo II. Mas algumas faculdades deixam esse tópico para o Cálculo II.

Então, embora estejamos nos referindo a ela como um tópico de revisão, não tema: aqui, oferecemos a história completa da Regra de L'Hospital, começando pela pronúncia de L'Hospital ("loos-pi-tau").

A Regra de L'Hospital fornece um método para resolver certas *formas indeterminadas* de limites. Primeiro, mostraremos a você como se parece uma forma indeterminada de limite, com uma lista de todas as formas indeterminadas comuns. A seguir, ensinamos a utilizar a Regra de L'Hospital para resolver algumas dessas formas. E, finalmente, mostraremos como trabalhar com as outras formas indeterminadas, para que possa resolvê-las.

Compreenda formas determinadas e indeterminadas de limites

Como você já descobriu anteriormente neste capítulo, em "Conheça seus limites", você pode encontrar muitos limites simplesmente substituindo a variável do limite pelo número que ela aproxima. Em alguns casos, essa substituição resulta em um número, então esse número é o valor do limite que você está procurando. Em outros casos, essa substituição dá um valor infinito (seja $+\infty$ ou $-\infty$), então o limite não existe (NE).

A Tabela 2-6 exibe uma lista de algumas funções que frequentemente causam confusão.

Tabela 2-6 Limites de Algumas Funções Comuns

Caso	*f(x) =*	*g(x) =*	*Função*	*Limite*
#1	0	∞	$\frac{f(x)}{g(x)}$	0
#2	0	∞	$f(x)^{g(x)}$	0
#3	$C \neq 0$	0	$\frac{f(x)}{g(x)}$	NE
#4	$\pm\infty$	0	$\frac{f(x)}{g(x)}$	NE

Para compreender como pensar a respeito desses quatro casos, lembre-se de que um limite descreve o comportamento de uma função quando muito próxima de um, mas não exatamente no, valor de x.

No primeiro e segundo casos, $f(x)$ se aproxima muito de 0 e $g(x)$ vai até o infinito, então ambos $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $f(x)^{g(x)}$ se aproximam de 0. No terceiro caso, $f(x)$ é uma constante c diferente de 0 e $g(x)$ se aproxima de 0, então a fração $\frac{f(x)}{g(x)}$ vai até o infinito. E no quarto caso, $f(x)$ vai ao infinito e $g(x)$ se aproxima de 0, então a fração $\frac{f(x)}{g(x)}$ vai ao infinito.

Em cada um dos três casos, você tem a resposta que está buscando — quer dizer, você sabe se o limite existe e, caso exista, qual seu valor — então eles são chamados de *formas determinadas* de limites.

Porém, às vezes, quando você tenta encontrar um limite pela substituição, o resultado é uma *forma indeterminada* de limite. A Tabela 2-7 inclui duas formas indeterminadas comuns.

Tabela 2-7 Duas Formas Indeterminadas de Limites

Caso	*f(x) =*	*g(x) =*	*Função*	*Limite*
#1	0	0	$\frac{f(x)}{g(x)}$	Indeterminado
#2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	Indeterminado

Nesses casos, o limite se torna uma corrida entre o numerador e o denominador da função fracionária. Por exemplo, pense a respeito do segundo exemplo da tabela, se $f(x)$ vai em direção de ∞ enquanto $g(x)$ se aproxima de lá, a fração fica mais alta embaixo e o limite é 0.

Mas se $f(x)$ se aproxima de ∞ enquanto $g(x)$ vai nessa direção, a fração é mais alta em cima e o limite é ∞ — quer dizer, NE. E se ambas as funções se movem em direção a 0 proporcionalmente, essa proporção se torna o valor desse limite.

Quando, ao tentar encontrar um limite pela substituição, você encontrar uma dessas formas, é porque precisa trabalhar mais. Aplicar a Regra de L'Hospital é a forma mais confiável de obter a resposta que está procurando.

Introdução à Regra de L'Hospital

LEMBRE-SE

Suponha que você esteja tentando encontrar o limite de uma função da forma $\frac{f(x)}{g(x)}$. Ao substituir a variável do limite pelo número que ela se aproxima resulta em $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, a Regra de L'Hospital indica a você que a seguinte equação é verdadeira:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Perceba que c pode ser qualquer número real, assim como ∞ ou $-\infty$.

Como exemplo, suponha que queira encontrar o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x}$$

Substituir x por 0 na função leva ao seguinte resultado:

$$\frac{0^3}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0}$$

Essa é uma das duas formas indeterminadas às quais a Regra de L'Hospital se aplica, então você pode extrair a seguinte conclusão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^3)'}{(\operatorname{sen} x)'}$$

A seguir, resolva as duas derivadas:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\cos x}$$

Agora, use essa nova função para tentar outra substituição de x por 0 e veja o que acontece:

$$\frac{3(0^2)}{\cos 0} = \frac{0}{1}$$

Dessa vez, o resultado é uma forma determinada, então você pode resolver o limite original como a seguir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x} = 0$$

Em alguns casos, você pode precisar aplicar a Regra de L'Hospital mais de uma vez para obter a resposta. Por exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^5}$$

A substituição de x por ∞ resulta na forma indeterminada de $\frac{\infty}{\infty}$, então você pode utilizar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^5} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{5x^4}$$

Nesse caso, a nova função dá a mesma forma indeterminada, então utilize novamente a Regra de L'Hospital:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{20x^3}$$

O mesmo problema surge, e novamente poderá utilizar a Regra de L'Hospital. Provavelmente você já percebeu para onde esse problema está caminhando, então vou avançar:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{60x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{120x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{120}$$

CUIDADO!

Quando você aplicar a Regra de L'Hospital repetidamente em um problema, certifique-se de que cada passo no caminho do resultado é uma das duas formas indeterminadas às quais a regra se aplica.

Finalmente o processo chega a uma função com forma determinada:

$$\frac{e^\infty}{120} = \frac{\infty}{120} = \infty$$

Portanto, o limite não existe.

Formas indeterminadas alternativas

A regra de L'Hospital se aplica apenas às duas formas indeterminadas de $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Mas os limites podem resultar em uma variedade de outras formas indeterminadas às quais a Regra de L'Hospital não se aplica. A Tabela 2-8 é uma lista de formas indeterminadas que você provavelmente encontrará.

Tabela 2-8 Cinco Casos de Formas Indeterminadas às Que Você não Pode Aplicar a Regra de L'Hospital Diretamente

Caso	*f(x) =*	*g(x) =*	*Função*	*Forma*
#1	0	∞	$f(x) \cdot g(x)$	Indeterminado
#2	∞	∞	$f(x) - g(x)$	Indeterminado
#3	0	0	$f(x)^{g(x)}$	Indeterminado
#4	∞	0	$f(x)^{g(x)}$	Indeterminado
#5	1	∞	$f(x)^{g(x)}$	Indeterminado

CUIDADO!

Devido à Regra de L'Hospital não se aplicar a essas formas indeterminadas, aplicá-la diretamente lhe dará a resposta errada.

Essas formas indeterminadas requerem uma atenção especial. Nesta seção, mostraremos como reescrever essas funções de forma que você possa, então, aplicar a Regra de L'Hospital.

Caso #1: $0 \cdot \infty$

Quando $f(x) = 0$ e $g(x) = \infty$, o limite de $f(x) \cdot g(x)$ é a forma indeterminada $0 \cdot \infty$, o que não permite o uso da Regra de L'Hospital. Para encontrar esse limite, reescreva a função como a seguir:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

O limite dessa nova função é a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, que permite a utilização da Regra de L'Hospital. Por exemplo, suponha que queira encontrar o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cot x$$

Substituir x por 0 dá a você a forma indeterminada $0 \cdot \infty$, então reescreva o limite como a seguir:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\left(\frac{1}{\cot x}\right)}$$

Isso pode ser simplificado com a utilização do inverso da identidade trigonométrica para a cot x:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\tan x}$$

Agora, substituir x por 0 resulta na indeterminada para $\frac{0}{0}$, então aplique a Regra de L'Hospital.

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(x)'}{(\tan x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x}$$

Nesse ponto, você pode resolver o limite diretamente substituindo x por 0:

$$= \frac{1}{1} = 1$$

Portanto, o limite resulta em 1.

Caso #2: $\infty - \infty$

Quando $f(x) = \infty$ e $g(x) = \infty$, o limite de $f(x) - g(x)$ é a forma indeterminada de $\infty - \infty$, que não permite o uso da Regra de L'Hospital. Para encontrar esse limite, tente achar um denominador comum que transforme a subtração em uma fração. Por exemplo:

$$\lim_{x \to 0^+} \cot x - \csc x$$

Nesse caso, substituir x por 0 resulta na forma indeterminada $\infty - \infty$. Um pouco de ajuste com as cinco identidades trigonométricas básicas (veja "Reconheça algumas identidades trigonométricas importantes", anteriormente neste capítulo) é o truque:

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}$$

Agora, substituir x por 0 resulta na forma indeterminada $\frac{0}{0}$, então poderá utilizar a Regra de L'Hospital:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\cos x - 1)'}{(\operatorname{sen} x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Finalmente, você poderá encontrar o limite diretamente substituindo x por 0.

$$= \frac{0}{1} = 0$$

Portanto, o limite resulta em 0.

Casos #3, #4, e #5: 0^0, ∞^0, e 1^∞

Nos três casos seguintes, o limite de $f(x)^{g(x)}$ é uma forma indeterminada que não permite a utilização da Regra de L'Hospital:

- Quando $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$
- Quando $f(x) = \infty$ e $g(x) = 0$
- Quando $f(x) = 1$ e $g(x) = \infty$

CUIDADO!

Essa forma indeterminada de 1^∞ é fácil de esquecer, pois ela parece estranha. Afinal, $1^x = 1$ para cada número real, então por que 1^∞ seria diferente? Nesse caso, o infinito prega uma de suas diversas peças nos matemáticos. Você pode saber mais sobre alguns desses truques no Capítulo 16.

Por exemplo, suponha que queira encontrar o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} x^x$$

Nesse formato, esse limite está na forma indeterminada de 0^0.

Felizmente, podemos ensinar a você um truque para lidar com esses três casos. Assim como muitas coisas matemáticas, meros mortais como nós provavelmente não descobririam esse truque sem estar em uma ilha deserta, sem nada para fazer senão resolver problemas matemáticos e comer cocos. Contudo, alguém já fez o trabalho duro. Lembrar a seguinte receita é um pequeno preço a se pagar:

1. **Iguale o limite à y.**

   $y = \lim_{x \to 0} x^x$

2. **Extraia o logaritmo natural de ambos os lados, então faça algumas *mudanças nos logaritmos*:**

   $\ln y = \ln \lim_{x \to 0} x^x$

   Eis os dois passos de mudanças nos logaritmos:

   - Primeiro, *mude* o logaritmo para dentro do limite:

     $= \lim_{x \to 0} \ln x^x$

     Esse passo é válido, pois o limite de um logaritmo é igual ao logaritmo de um limite (sabemos que essas palavras enrolam a língua).

   - A seguir, *mude* o expoente para frente do logaritmo:

     $= \lim_{x \to 0} x \ln x$

     Esse passo também é válido, como mostramos a você anteriormente, neste capítulo, ao discutir a função logarítmica em "Faça o gráfico de funções comuns".

3. **Desenvolva esse limite como demonstramos em "Caso #1: $0 \cdot \infty$"**

   Comece mudando o limite para uma forma determinada:

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

   Finalmente, você pode aplicar a Regra de L'Hospital:

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)^1}{\left(\frac{1}{x}\right)^1}$$

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

   Agora, encontrar o limite não é tão ruim:

   $$= \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{x}$$

   $$= \lim_{x \to 0} -x = 0$$

   Espere! Lembre-se de que lá no passo 2 você igualou esse limite a In y. Então você tem mais um passo!

4. **Encontre y.**

$$\ln y = 0$$

$$y = 1$$

Sim, essa é sua resposta final, então $\lim_{x \to 0} x^x = 1$.

Essa receita funciona com todas as três formas indeterminadas sobre as quais falamos no começo desta seção. Apenas assegure-se de que você fique ajustando o limite até obter uma das duas formas que são compatíveis com a Regra de L'Hospital.

Capítulo 3

De Definida para Indefinida: A Integral Indefinida

Neste Capítulo

- Aproximação da área com cinco maneiras diferentes
- Cálculo da soma e das integrais definidas
- O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)
- Entenda como a integral indefinida é o inverso da derivada
- Esclareça as diferenças entre integrais definidas e indefinidas

O primeiro passo para resolver um problema de área — isto é, encontrar a área de uma forma complexa ou incomum no gráfico — é expressá-la como uma integral definida. Fazendo isso, você pode calcular uma integral definida utilizando uma fórmula baseada no limite da Soma de Riemann (como mostramos no Capítulo 1).

Neste capítulo, você coloca a mão na massa calculando integrais definidas. Primeiro, mostraremos uma variedade de formas diferentes para estimar a área. Todos esses métodos levam a uma maior compreensão da fórmula da Soma de Riemann para a integral definida. A seguir, você utilizará essa fórmula para encontrar áreas exatas. Esse método particularmente complicado de calcular integrais definidas prepara a busca por uma forma melhor.

Essa forma melhor é a integral indefinida. Mostraremos como as integrais indefinidas fornecem uma maneira muito mais simples de calcular a área. Além disso, você encontrará uma ligação surpreendente entre diferenciação (que é o foco de Cálculo I) e integração. Essa ligação, chamada de Teorema Fundamental do Cálculo, mostra que a integral indefinida é, na verdade, uma *antiderivada* (o inverso da derivada).

Para terminar, mostraremos como usar uma integral indefinida para encontrar o resultado de uma integral definida dentro da área delimitada. Também esclareceremos as diferenças entre integrais definidas e indefinidas, de forma que não as confunda. No fim deste capítulo, você estará pronto para a Parte II, onde focaremos a quantidade de métodos para calcular a integral indefinida.

Integração Aproximada

Encontrar a área *exata* sob uma curva — quer dizer, resolver um problema de área (veja o Capítulo 1) — foi uma das principais razões para o surgimento da integração. Mas você pode aproximar a área utilizando uma variedade de métodos. Aproximar a área é o primeiro passo em direção à compreensão do funcionamento da integração.

Nesta seção, mostraremos cinco métodos diferentes para aproximar a solução de um problema de área. Introduzimos esses métodos em grau de dificuldade e eficiência crescentes. Os três primeiros envolvem a manipulação de retângulos.

- Os dois primeiros métodos — retângulos de direita e de esquerda — são os mais fáceis de utilizar, mas eles normalmente oferecem a maior margem de erro.
- A Regra do Ponto Médio (divisão de retângulos) é um pouco mais difícil, mas normalmente oferece uma estimativa um pouco melhor.
- A Regra do Trapezoide requer mais cálculos, mas fornece uma estimativa ainda melhor.
- A Regra de Simpson é a mais difícil, mas fornece a melhor aproximação e, em alguns casos, fornece medida exata da área.

Três formas de aproximar a área com retângulos

Dividir uma forma irregular em retângulos é a abordagem mais comum na aproximação de sua área (veja o Capítulo 1 para saber mais sobre essa técnica). Nesta seção, mostraremos três técnicas diferentes para a aproximação da área com retângulos.

Utilização de retângulos voltados para a esquerda

Você pode utilizar retângulos voltados para a esquerda para aproximar a solução de um problema de área (veja o Capítulo 1). Por exemplo, suponha que queira aproximar a área sombreada na Figura 3-1 utilizando quatro retângulos voltados para a esquerda.

Para traçar esses quatro retângulos, comece fazendo uma linha vertical desde a função até o eixo x no limite de integração do *lado esquerdo* — quer dizer, $x = 0$. Então, trace mais três linhas verticais da função até o eixo x em $x = 2$, 4, e 6. A seguir, nos quatro pontos em que essas linhas cruzam a função, desenhe linhas horizontais da *esquerda para a direita* para fazer o topo desses quatro retângulos. As bordas esquerdas e superiores definem o tamanho e a forma de cada retângulo.

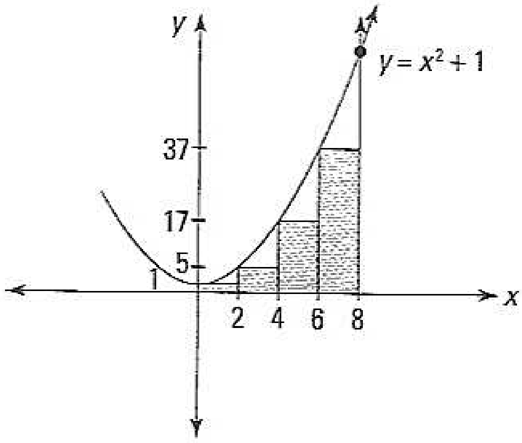


Figura 3-1: Aproximação de $\int_0^8 (x^2 + 1)\,dx$ com o uso de quatro retângulos voltados para a esquerda.

Para medir as áreas desses quatro retângulos, você precisa conhecer a base e a altura de cada um. A base de cada retângulo obviamente é 2. A altura e a área de cada um são determinadas pelo valor da função em sua borda *esquerda*, como exibido na Tabela 3-1.

Tabela 3-1 Aproximação da Área com o Uso de Retângulos Voltados para a Esquerda

Retângulo	*Base*	*Altura*	*Área*
#1	2	$0^2 + 1 = 1$	2
#2	2	$2^2 + 1 = 5$	10
#3	2	$4^2 + 1 = 17$	34
#4	2	$6^2 + 1 = 37$	74

Para aproximar a área sombreada, some as áreas desses quatro retângulos:

$$\int_0^8 (x^2 + 1)\,dx \approx 2 + 10 + 34 + 74 = 120$$

Utilização de retângulos voltados para a direita

Utilizar retângulos voltados para a direita para aproximar a solução de um problema de área é virtualmente o mesmo que utilizar retângulos voltados para a direita. Por exemplo, suponha que você use seis retângulos direitos para aproximar a área sombreada da Figura 3-2.

Para traçar esses retângulos, comece desenhando uma linha vertical da função até o eixo x no limite de integração do *lado direito* — quer dizer, $x = 3$. A seguir, trace mais cinco linhas verticais da função ao eixo x em $x = 0{,}5$; 1; 1,5; 2 e 2,5. Então, nos seis pontos em que essas linhas cruzam a função, trace linhas horizontais *da direita para a esquerda* para fazer a borda superior desses seis retângulos. As bordas da direita e a superior definem o tamanho e a forma de cada retângulo.

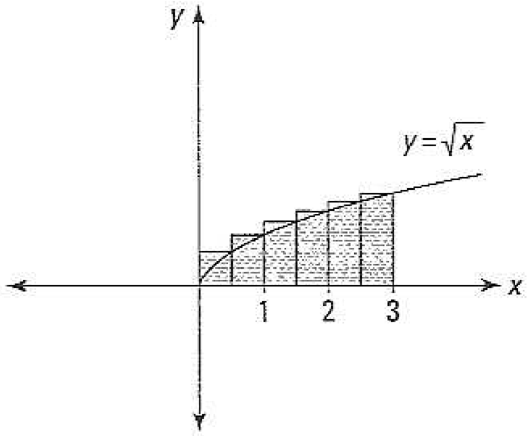


Figura 3-2: Aproximação de $\int_0^3 \sqrt{x}\, dx$ com o uso de seis retângulos voltados para a direita.

Para medir as áreas desses seis retângulos, você precisa conhecer a base e a altura de cada um. A base de cada retângulo é 0,5. Sua altura e área são determinadas pelo valor da função em sua borda *direita*, como exibido na Tabela 3-2.

Tabela 3-2 Aproximação da Área com o Uso de Retângulos Votados para a Direita

Retângulos	*Base*	*Altura*	*Área*
#1	0.5	$\sqrt{0.5} \approx 0.707$	0.354
#2	0.5	$\sqrt{1} = 1$	0.5
#3	0.5	$\sqrt{1.5} \approx 1.225$	0.613
#4	0.5	$\sqrt{2} \approx 1.414$	0.707
#5	0.5	$\sqrt{2.5} \approx 1.581$	0.791
#6	0.5	$\sqrt{3} \approx 1.732$	0.866

Para aproximar a área sombreada, some as áreas desses seis retângulos:

$$\int_0^3 \sqrt{x}\, dx \approx 0.354 + 0.5 + 0.613 + 0.707 + 0.791 + 0.866 = 3.831$$

Encontre o meio termo: a Regra do Ponto Médio

Tanto os retângulos voltados para a esquerda quanto os voltados para a direita oferecem uma aproximação decente da área. Então, é razoável que dividir uma área verticalmente e medir a altura de cada retângulo a partir do *ponto médio* de cada fatia fornecerá uma aproximação um pouco melhor da área.

Por exemplo, suponha que você deseje utilizar retângulos de ponto médio para aproximar a área sombreada da Figura 3-3.

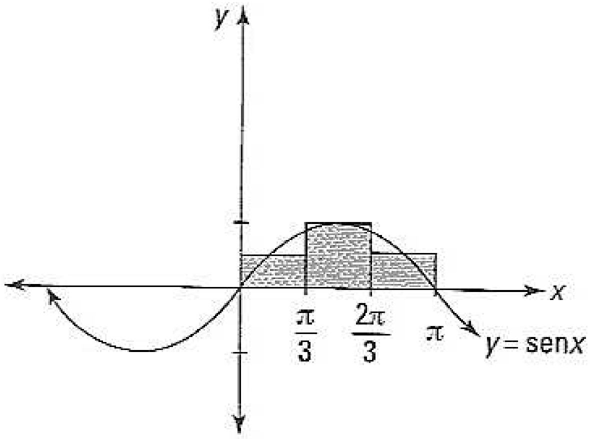


Figura 3-3: Aproximação de $\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx$ com o uso de três retângulos de pontos médios.

Para desenhar esses três retângulos, comece traçando linhas verticais que interceptam tanto a função quanto o eixo x em $x = 0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e π. Em seguida, encontre o local em que os pontos médios dessas três regiões — quer dizer, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{6}$ — intersectam a função. Agora, trace linhas horizontais por meio desses três pontos para fazer a borda superior desses três retângulos.

Para medir os três retângulos, você precisa conhecer a base e a altura de cada um para calcular a área. A base de cada retângulo é $\frac{\pi}{3}$, e a altura é dada na Tabela 3-3.

Tabela 3-3 — Aproximação da Área com o Uso da Regra do Ponto Médio

Retângulos	*Base*	*Altura*	*Área*
#1	$\frac{\pi}{3}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
#2	$\frac{\pi}{3}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$	$\frac{\pi}{3}$
#3	$\frac{\pi}{3}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

Para aproximar a área sombreada, some as áreas destes três retângulos:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}x\, dx \approx \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

O fator de folga

A fórmula para a integral definida é baseada na soma de Riemann (veja o Capítulo 1). Essa fórmula permite que você inclua na área infinitos pequenos retângulos a fim de encontrar a solução exata para um problema de área.

E aqui está a parte estranha: dentro de certos parâmetros, a fórmula da soma de Riemann não se importa com a forma como você divide. Todos os três métodos de divisão que discutimos na seção anterior funcionam igualmente bem. Quer dizer, embora cada método forneça uma área *aproximada* diferente para determinado número *finito* de fatias, todas essas diferenças são atenuadas quando o limite é aplicado. Em outras palavras, os três métodos trabalham para fornecer a área *exata* para um número *infinito* de divisões.

Chamamos essa característica da medição de retângulos de *fator de folga*. Compreender o fator ajuda a entender o porquê de usar retângulos traçados com o ponto à direita, à esquerda ou no meio sempre que levam ao mesmo valor *exato* da área: à medida que você mede fatias cada vez menores, o fator de folga nunca aumenta e tende a diminuir. Conforme o número de divisões se aproxima do ∞, a base de cada pedaço se aproxima de 0, então o fator de folga também se aproxima de 0.

A Figura 3-4 exibe o tamanho dessa folga ao escolher um retângulo. Neste exemplo, para encontrar a área sob $f(x)$, é preciso medir um retângulo dentro de determinado pedaço. A altura desse retângulo deve estar incluída entre p e q, o local máximo e mínimo de $f(x)$. Dentro desses parâmetros, portanto, você pode medir *qualquer* retângulo.

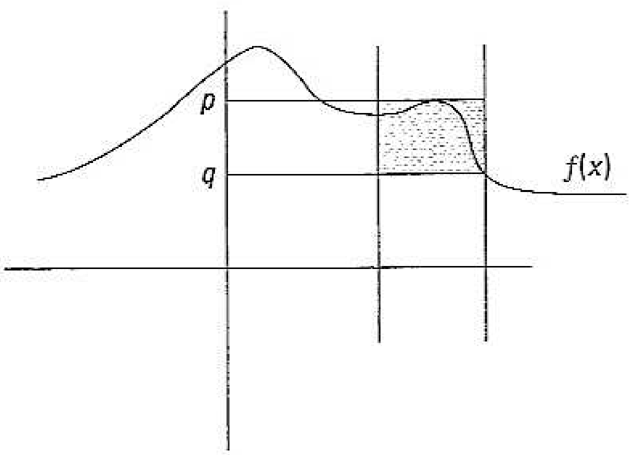


Figura 3-4: Para cada pedaço que medir, você poderá utilizar *qualquer* retângulo que atravesse a função em um ou mais pontos.

Outras duas formas de aproximar a área

Embora dividir uma região em retângulos seja a forma mais simples para aproximar sua área, o retângulo não é o único formato que você pode usar. Para encontrar muitas áreas, outros formatos podem atingir uma aproximação melhor em menos pedaços.

Nesta seção, mostraremos a você duas alternativas comuns aos pedaços retangulares: a Regra do Trapezoide (que, sem surpresa alguma, utiliza trapezoides) e a Regra de Simpson (que utiliza retângulos com parábolas no topo).

Está sem saída? Experimente a Regra do Trapezoide

Caso você se sinta sem saída — enquadrado, digamos? — ao estimar áreas somente com retângulos, você pode obter aproximações ainda mais precisas ao traçar trapezoides, em vez de retângulos.

Por exemplo, imagine que queira usar seis trapezoides para estimar esta área:

$$\int_{-3}^{3} 9 - x^2\, dx$$

Você provavelmente pode dizer, só de olhar para o gráfico na Figura 3-5, que usar trapezoides fornece uma aproximação mais precisa do que retângulos. Na verdade, a área de um trapezoide traçado em qualquer porção de uma função será a média das áreas dos retângulos esquerdo e direito traçados naquela porção.

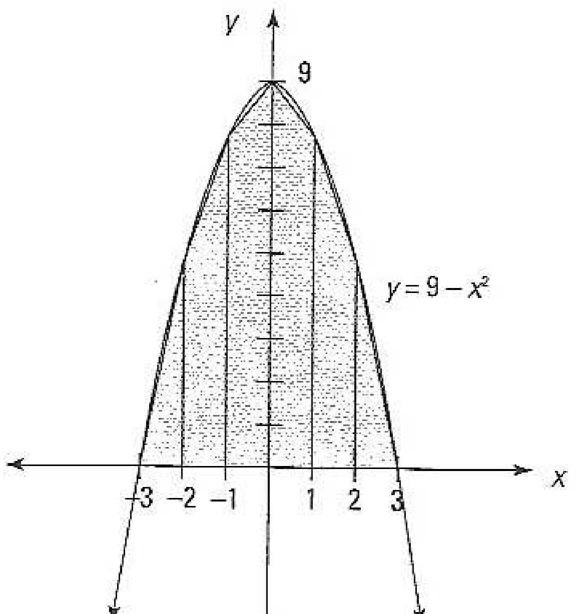


Figura 3-5: Aproximação de $\int_{3}^{3} 9 - x^2\, dx$ com o uso de seis trapezoides.

Para desenhar esses seis trapezoides, primeiro trace pontos ao longo da função em x = -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. Em seguida, conecte os pontos adjacentes para fazer as bordas superiores dos trapezoides. Ao fim, trace linhas verticais atravessando esses pontos.

CUIDADO!

Dois dos seis "trapezoides" são, na realidade, triângulos. Esse fato não influencia o cálculo; apenas pense nos dois triângulos como trapezoides com um lado de altura zero.

Para encontrar a área desses seis trapezoides utilize a fórmula da área do trapezoide, que você conhece da geometria: $\frac{h\,(b_1 + b_2)}{2}$. Nesse caso, contudo, as duas bases — quer dizer, os lados paralelos do trapezoide — são as alturas dos lados esquerdo e direito. Como de costume, a largura é fácil de calcular — neste caso, é 1. A Tabela 3-4 exibe o resto das informações para calcular a área de cada trapezoide.

Tabela 3-4 Aproximação da Área com o Uso dos Trapezoides

Trapezoide	*Largura*	*Altura da Esquerda*	*Altura da Direita*	*Área*
#1	1	$9-(-3)^2=0$	$9-(-2)^2=5$	$\frac{1\,(0+5)}{2}=2.5$
#2	1	$9-(-2)^2=5$	$9-(-1)^2=8$	$\frac{1\,(5+8)}{2}=6.5$
#3	1	$9-(-1)^2=8$	$9-(0)^2=9$	$\frac{1\,(8+9)}{2}=8.5$
#4	1	$9-(0)^2=9$	$9-(1)^2=8$	$\frac{1\,(9+8)}{2}=8.5$
#5	1	$9-(1)^2=8$	$9-(2)^2=5$	$\frac{1\,(8+5)}{2}=6.5$
#6	1	$9-(2)^2=5$	$9-(3)^2=0$	$\frac{1\,(5+0)}{2}=2.5$

Para aproximar a área sombreada, encontre a soma das seis áreas dos trapezoides:

$$\int_{-3}^{3} 9 - x^2\,dx \approx 2.5 + 6.5 + 8.5 + 8.5 + 6.5 + 2.5 = 35$$

Não se desespere! Conheça a Regra de Simpson

Lembre da geometria que você pode traçar um círculo exato por meio de quaisquer três pontos não lineares. Talvez você não se lembre, contudo, de que isso também é verdadeiro para parábolas: apenas três pontos não lineares determinam uma parábola.

A Regra de Simpson baseia-se nesse teorema geométrico. Quando utilizar essa regra, você estará usando pontos de contato esquerdos e direitos, assim como pontos médios, no lugar desses três pontos para cada porção.

1. **Comece a dividir a área que você deseja aproximar em tiras que intersectam a função.**
2. **Marque o ponto de contato esquerdo, o médio e o direito de cada tira.**
3. **Ajuste o topo de cada tira com a seção da parábola que atravessa esses três pontos.**
4. **Some as áreas dessas tiras com o topo nas parábolas.**

À primeira vista, a Regra de Simpson parece um tanto circular. Você está tentando aproximar a área sob uma curva, mas esse método o força a medir a área dentro de uma região que inclui uma curva. Felizmente, Thomas Simpson, o inventor dessa regra, estava preparado para isso. Seu método permite que você meça essas regiões com formatos estranhos sem muita dificuldade.

Sem rodeios, eis a Regra de Simpson:

Dado que n é um número par,

$\int f(x)\,dx \infty f(x)\,dx$

$$\approx \frac{(b-a)}{3n}[f(x_0) + (4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_0) + \ldots + 4f(x_3) + 2f(x_0) + 4f(x_0) + f(x_0)]$$

O que isso tudo significa? Da mesma forma que ocorre com cada método de aproximação que você encontrou, a chave da Regra de Simpson é medir a largura e a altura de cada uma dessas regiões (com alguns ajustes):

- A largura é representada por $\frac{(b-a)}{n}$, mas a Regra de Simpson ajusta isso para $\frac{(b-a)}{3n}$.
- As alturas são representadas por $f(x)$ tomados em vários valores de x, mas a Regra de Simpson multiplica alguns deles por um coeficiente de 4 ou de 2. (Essas escolhas de coeficientes são baseadas no resultado conhecido da área sob uma parábola — e não escolhidos aleatoriamente!)

A melhor forma de mostrar como essa regra funciona é com um exemplo. Digamos que você queira utilizar a Regra de Simpson para aproximar o que vem a seguir:

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$$

Primeiro, divida a área que você quer aproximar em um número *par* de regiões — oito, digamos — ao traçar nove linhas verticais de $x = 1$ até $x = 5$. Agora ajuste o topo dessas regiões com as parábolas, como demonstramos na Figura 3-6.

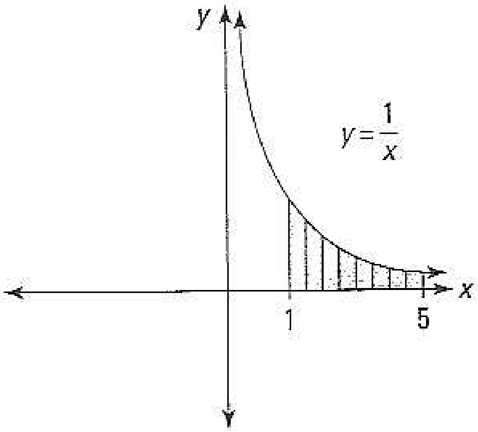


Figura 3-6: Aproximação de $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ com a utilização da Regra de Simpson.

A base de cada região é 0,5; então ajuste isso dividindo por 3:

$$\frac{(b-a)}{3n} = \frac{0.5}{3} \approx 0.167$$

Indo para as alturas, encontre $f(x)$ quando $x = 1$; 1,5; 2; ...; 4,5 e 5 (veja a segunda coluna da Tabela 3-5). Ajuste todos esses valores, com exceção do primeiro e do último, multiplicando por 4 ou 2, alternativamente.

Tabela 3-5 Aproximação da Área Utilizando a Regra de Simpson

n	$f(x_n)$	*Coeficiente*	*Total*
0	$f(1) = 1$	1	$f(1) = 1$
1	$f(1.5) = 0.667$	4	$4f(1.5) = 2.668$
2	$f(2) = 0.5$	2	$2f(2) = 1$
3	$f(2.5) = 0.4$	4	$4f(2.5) = 1.6$
4	$f(3) = 0.333$	2	$2f(3) = 0.666$
5	$f(3.5) = 0.290$	4	$4f(3.5) = 1.160$
6	$f(4) = 0.25$	2	$2f(4) = 0.5$
7	$f(4.5) = 0.222$	4	$4f(4.5) = 0.888$
8	$f(5) = 0.2$	1	$f(5) = 0.2$

Agora aplique a Regra de Simpson, como a seguir:

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$$

$$\approx 0.167\,(1 + 2.668 + 1 + 1.6 + 0.666 + 1.16 + 0.5 + 0.888 + 0.2)$$

$$= 0.167\,(9.682) \approx 1.617$$

Então, a Regra de Simpson aproxima a área da região sombreada na Figura 3-6 em 1,617. (A área real, em três casas decimais, é aproximadamente 1,609 — então a Regra de Simpson fornece uma estimativa muito boa.)

PAPO DE ESPECIALISTA

Na verdade, a Regra de Simpson fornece, com frequência, uma estimativa ainda melhor que esse exemplo, pois muito da imprecisão surge do arredondamento dos decimais. Nesse caso, quando você realiza os cálculos com precisão suficiente, a Regra de Simpson fornece a área correta em até três casas decimais!

Saiba Mais sobre as Fórmulas de Soma

No Capítulo 1, introduzimos a Soma de Riemann para a integral definida. Essa fórmula inclui a soma utilizando a notação sigma (Σ). (Releia o Capítulo 2 caso necessite revisar esse tópico.)

Na prática, encontrar uma soma pode ser um pouco difícil. Felizmente, existem três importantes fórmulas de soma para ajudá-lo. Nesta seção, introduziremos essas fórmulas e ensinaremos como utilizá-las. Na seção seguinte, vamos mostrar como e quando aplicá-las ao utilizar a fórmula da Soma de Riemann para resolver um problema de área.

A fórmula da soma para contar números

A fórmula da soma para contar números oferece uma forma fácil para encontrar a soma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, para qualquer valor de n:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Para ver como essa fórmula funciona, considere que $n = 9$:

$$\sum_{i=1}^{9} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

A fórmula da soma para contar números também produz este resultado:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{9(10)}{2} = 45$$

De acordo com uma história popular, o matemático Kark Friedrich Gauss descobriu essa fórmula quando estava na escola, quando seu professor passou à classe a entediante tarefa de somar todos os números de 1 a 100, para que ele (o professor) pudesse dormir em seu gabinete. Dentro de minutos, Gauss chegou à resposta correta, 5.050, perturbando a hora da soneca de seu professor e fazendo história na matemática.

A fórmula da soma para números quadrados

A fórmula da soma para números quadrados oferece uma maneira rápida de somar $1 + 4 + 9 + ... + n^2$, para qualquer valor de n.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Por exemplo, suponha que $n = 7$:

$$\sum_{i=1}^{7} i^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$$

A fórmula da soma para números quadrados fornece a mesma resposta:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{7(8)(15)}{6} = 140$$

A fórmula da soma para números cúbicos

A fórmula da soma para números cúbicos oferece uma maneira rápida de somar $1 + 8 + 27 + ... + n^3$, para qualquer valor de n:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Por exemplo, suponha que $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^{5} i^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

A fórmula da soma para os números cúbicos produz o mesmo resultado:

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{5(6)}{2}\right]^2 = 15^2 = 225$$

Pior Impossível: Cálculo de Integrais Definidas com o Uso da Fórmula da Soma de Riemann

No Capítulo 1, introduzimos você a esta equação complicada para o cálculo da integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

Você pode estar se perguntando qual é a praticidade dessa pequena joia na hora de calcular a área. Essa é uma preocupação válida. A notícia ruim é que essa fórmula é, de fato, complicada, e você precisará compreender como utilizá-la para passar em seu primeiro exame de Cálculo II.

Mas temos boas notícias também. No começo de Cálculo I, você trabalha com uma equação igualmente complicada para o cálculo de derivadas (veja o Capítulo 2 para relembrar). Felizmente, mais adiante, você encontrará maneiras mais fáceis de calcular as derivadas.

Essas boas novas se aplicam às integrações também. Mais adiante neste capítulo, mostraremos a você como tornar mais fácil sua vida. Nesta seção, contudo, focamos em como utilizar a fórmula da Soma de Riemann para calcular a integral definida.

Antes de começar, dê uma nova olhada na fórmula da Soma de Riemann e perceba que o lado direito dessa equação se divide em quatro "pedaços" separados:

- O limite: $\lim_{n \to \infty}$
- A soma: $\sum_{i=1}^{n}$
- A função: $f(x_i^*)$
- Os limites da integração: $\frac{b-a}{n}$

Para resolver uma integral utilizando essa fórmula, trabalhe de trás para frente, passo a passo, como a seguir:

1. **Substitua os limites de integração na fórmula.**
2. **Reescreva a função $f(x^*_i)$ como uma soma em termos de i e n.**
3. **Calcule a soma.**
4. **Encontre o limite.**

Substitua nos limites de integração

Nesta seção, mostramos a você como calcular a seguinte integral:

$$\int_0^4 x^2\,dx$$

Esse passo é automático: apenas substitua os limites de integração — quer dizer, os valores de a e b — na fórmula:

$$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i^*\right)\left(\frac{4-0}{n}\right)\right]$$

Antes de continuar, sabemos que você não conseguirá continuar vivendo antes de simplificar 4 - 0:

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i^*\right)\frac{4}{n}\right]$$

É isso!

Expressão da função como uma soma em termos de *i* e *n*

Essa é uma área um pouco escorregadia. É mais uma arte do que uma ciência, então se você é um artista que está fazendo curso de Cálculo, esse pode ser seu dia de sorte (ou talvez não).

Para começar, pense sobre como você estimaria $\int_0^4 x^2\,dx$ usando retângulos direitos, como explicamos anteriormente neste capítulo. A Tabela 3-6 mostra a você como fazer isso, usando um, dois, quatro e oito retângulos.

Tabela 3-6 Utilização de Retângulos Voltados para a Direita Para Estimar $\int_0^4 x^2\,dx$

n	*Altura*	*Largura*	*Expressão*
1	4^2	4	$\sum_{i=1}^{1}(4i)^2(4)$
2	$2^2 + 4^2$	2	$\sum_{i=1}^{2}(2i)^2(2)$
4	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$	1	$\sum_{i=1}^{4} i^2(1)$
8	$0.5^2 + 1^2 + 1.5^2 + 2^2 + 2.5^2 + 3^2 + 3.5^2 + 4^2$	0.5	$\sum_{i=1}^{8}(0.5i)^2(0.5)$

Seu objetivo é encontrar uma expressão *geral* da forma $\sum_{i=1}^{n}$ que trabalha com cada valor de n. Na última seção, você verá que $\frac{4}{n}$ gera a largura correta. Então, eis a expressão geral que você está buscando:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right)$$

Assegure-se de compreender por que essa expressão funciona para todos os valores de n antes de continuar. A primeira fração representa a altura dos retângulos e a segunda fração representa a base, expressa como $\frac{b-a}{n}$.

Essa expressão poderá ser simplificada da seguinte forma:

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{64i^2}{n^3}$$

Não se esqueça de que, antes de prosseguir, a expressão inteira é um limite conforme n se aproxima do infinito:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{64i^2}{n^3}$$

DICA

Nesse ponto do problema, você tem uma expressão que está baseada em duas variáveis: i e n. Lembre-se de que as duas variáveis i e n estão na soma, enquanto a variável x já deveria ter saído.

Cálculo de soma

Agora você precisa de alguns truques para calcular a porção de soma desta expressão:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{64i^2}{n^3}$$

Você pode ignorar o limite nesta seção — ele está só de passagem. Você pode mover a constante para fora da soma sem mudar o valor daquela expressão:

$$= \lim_{n \to \infty} 64 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

Nesse ponto, apenas as variáveis i e n são deixadas dentro da soma.

DICA

Lembre-se de que i está para *incômoda* e n está para *notável*. A variável n é notável porque você pode movê-la para fora da soma como se fosse uma constante:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Resolução do problema com a fórmula da soma

Para lidar com a variável incômoda, i, você vai precisar de ajuda. Anteriormente neste capítulo, em "Saiba mais sobre as fórmulas de soma", oferecemos algumas fórmulas importantes para lidar com essa soma e com outras parecidas.

Voltando ao exemplo, onde o deixamos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Para calcular a soma $\sum_{i=1}^{n} i^2$, use a fórmula da soma para os números quadrados:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Um pouco de álgebra — o que omitimos, pois sabemos que você consegue — faz o problema ficar assim:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{64}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}$$

Você está pronto para o passo final — e mais fácil.

Calcule o limite

Nesse ponto, o limite que você provavelmente veio temendo durante todo esse tempo acaba sendo a parte mais simples do problema. Conforme n se aproxima do infinito, os dois termos com n no denominador se aproximam de 0, então eles caem fora:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{64}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} = \frac{64}{3}$$

Sim, essa é a resposta final! Observe que, devido ao fato de você ter utilizado a fórmula da Soma de Riemann, essa *não é uma aproximação*, mas sim a área exata sob a curva $y = x^2$ entre 0 a 4.

A Luz no Fim do Túnel: O Teorema Fundamental do Cálculo

Encontrar a área sob uma curva — isto é, resolver um problema de área — pode ser formalizado com o uso da integral definida (como você descobriu no Capítulo 1). E a integral definida, por sua vez, é definida nos termos da fórmula da Soma de Riemann. Mas, como você descobriu anteriormente neste capítulo, a fórmula da Soma de Riemann normalmente resulta em cálculos compridos e complicados.

Tem de existir um método melhor! E, na verdade, existe.

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) fornece a ligação entre derivadas e integrais. À primeira vista, essas duas ideias parecem inteiramente desconexas, da mesma forma que a TFC parece um pouco como magia negra matemática. Em um exame mais próximo, contudo, a ligação entre a derivada de uma função (sua inclinação) e sua integral (a área sob ela) torna-se mais clara.

Nesta seção, mostramos a você a conexão entre inclinação e área. Depois de ver isso, a TFC fará mais sentido intuitivamente. Neste ponto, introduzimos o teorema exato e mostramos como você o utiliza para calcular integrais como antiderivadas — isto é, ao compreender integração como o inverso da diferenciação.

Sem mais confusão, eis o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) em sua forma mais comum:

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$

A mola propulsora dessa igualdade é a ligação entre f e sua função derivada f'. Para resolver uma integral, você precisa ser capaz de desfazer a diferenciação e encontrar a função f original.

Muitos livros de matemática usam a seguinte notação para o TFC:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{onde} \quad F'(x) = f(x)$$

Ambas as notações são igualmente válidas, mas consideramos essa versão um pouco menos intuitiva do que a versão que fornecemos a você.

O TFC faz do cálculo das integrais algo muito mais fácil. Por exemplo, suponha que você queira calcular o seguinte:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

Essa é a função que você viu na Figura 3-3. O TFC permite que você resolva esse problema ao pensar sobre ele a partir de outro ângulo. Primeiro perceba que a seguinte afirmação é verdadeira:

$$f(x) = -\cos x \rightarrow f'(x) = \operatorname{sen} x$$

Então o TFC permite que você chegue a esta conclusão:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos\pi) - (-\cos 0)$$

Agora você pode resolver esse problema utilizando a simples trigonometria:

$$= 1 + 1 = 2$$

Então, a área sombreada *exata* (não a aproximada) da Figura 3-3 é 2 — tudo isso sem desenhar retângulos! A aproximação utilizando a Regra do Ponto Médio (veja "Encontre o meio termo: a Regra do Ponto Médio" anteriormente neste capítulo) é 2,0944.

Veja neste outro exemplo, uma integral que, anteriormente neste capítulo, você resolveu utilizando a fórmula da Soma de Riemann:

$$\int_0^4 x^2\,dx$$

Comece percebendo que a seguinte afirmativa é verdadeira:

$$f(x)\ \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f'(x) = x^2$$

Agora use o TFC para expressar esta equação:

$$\int_0^4 x^2 dx = \left(\frac{1}{3}\,4^3\right) - \left(\frac{1}{3}\,0^3\right)$$

Neste ponto, a solução se torna uma questão de aritmética:

$$\frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$$

Em apenas três simples passos, a integral definida está resolvida sem ter de lançar mão da complicada fórmula da Soma de Riemann!

Compreenda o Teorema Fundamental do Cálculo

Na seção anterior, mostramos o quanto o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) pode ser útil para encontrar o valor exato de uma integral definida sem utilizar a fórmula da Soma de Riemann. Mas, *por que* esse teorema funciona?

O TFC implica uma conexão entre as derivadas e as integrais que não é intuitivamente óbvia. Na verdade, ele implica que as derivadas e as integrais são operações inversas. É fácil de entender porque outros pares de operações — como adição e subtração — são inversas. Mas como você enxerga essa mesma conexão entre derivadas e integrais?

Nesta seção, mostramos algumas maneiras para que você compreenda melhor essa conexão.

Resolução de um problema de 200 anos

A ligação entre as derivadas e as integrais, como operações inversas, foi notada pela primeira vez por Isaac Barrow (o professor de Isaac Newton) no século XVII. Newton e Gottfried Leibniz (os dois principais inventores do cálculo) utilizaram isso como uma conjectura — quer dizer, uma afirmação matemática que se suspeita ser verdadeira, mas que ainda não foi comprovada. Mas o TFC não foi oficialmente comprovado em toda sua glória até seu velho amigo Bernhard Riemann demonstrá-lo no século XIX. Durante esse intervalo de 200 anos, muita matemática — mais notavelmente, a análise real — teve de ser inventada para que Riemann pudesse provar que integral e derivada são operações inversas.

Onde entra a inclinação nisso?

A ideia de que as derivadas e as integrais estão ligadas — quer dizer, a inclinação de uma curva e a área sob ela estão matematicamente ligadas — parece estranha, até que você passe um tempo pensando a respeito.

Se você tem tino para os negócios, eis uma forma prática de entender a conexão. Imagine que você seja dono de uma empresa. Pense em um gráfico com uma linha sendo sua entrada (o dinheiro entrando) e a área sob o gráfico como sendo suas economias (o dinheiro guardado no banco). Para simplificar, imagine por um momento que este é um mundo feliz, onde você *não tem* despesa alguma sugando dinheiro de sua poupança.

Quando a linha no gráfico é horizontal, sua entrada continua a mesma, com o dinheiro entrando em uma taxa estável — isto é, seu contracheque todo mês é o mesmo. Então, sua conta bancária (a área sob a linha) cresce em uma taxa estável com o passar do tempo — quer dizer, conforme seu valor de x se move para a direita.

Mas suponha que aquele negócio comece a se expandir. À medida que a linha do gráfico começa a subir, seu salário aumenta proporcionalmente. Então, sua conta no banco começa a crescer em uma taxa maior.

Agora considere que o negócio esfrie. Conforme a linha do gráfico começa a cair, seus contracheques caem proporcionalmente. Então, sua conta bancária ainda cresce, mas em uma taxa bem mais lenta. Mas, cuidado: se o negócio decaiu tanto a ponto de não conseguir mais se sustentar, você pode acabar descobrindo que está usando suas economias para sustentá-lo, então, pela primeira vez, suas economias diminuem.

Nessa analogia, cada *contracheque* é como a área dentro de uma fatia de uma unidade de largura no gráfico. E a *conta bancária* em um dia específico é como a área total entre o eixo y e aquele dia, como exibido no gráfico.

Então, quando você pensa nisso, seria difícil imaginar como a área e a inclinação poderiam *não* estar ligadas. O Teorema Fundamental do Cálculo é apenas a representação matemática exata dessa ligação.

Introdução à função da área

Essa conexão entre entrada (o tamanho de seu contracheque) e suas economias (quantidade de dinheiro no banco) é a analogia perfeita para duas ideias importantes interligadas. Esse gráfico de entrada representa a função $f(x)$ e o gráfico de economias representa a função da área dessa função $A(x)$.

A Figura 3-7 ilustra essa conexão entre $f(x)$ e $A(x)$. Essa figura representa a situação de *entrada constante* que descrevemos na seção anterior. Escolhemos $f(x) = 1$ para representar a entrada. O gráfico das economias resultantes é $A(x) = x$, e cresce de forma constante.

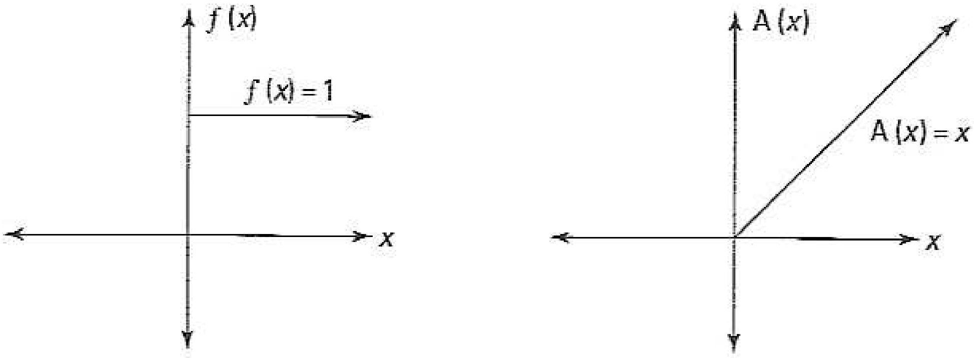


Figura 3-7: A função $f(x) = 1$ produz uma função da área $A(x) = x$.

Em comparação, veja a Figura 3-8, que representa o *aumento da entrada*. Dessa vez, escolhemos $f(x) = x$ para representar a entrada de dinheiro. Essa função produz uma função da área $A(x) = \frac{1}{2}x^2$, que aumenta em uma taxa crescente.

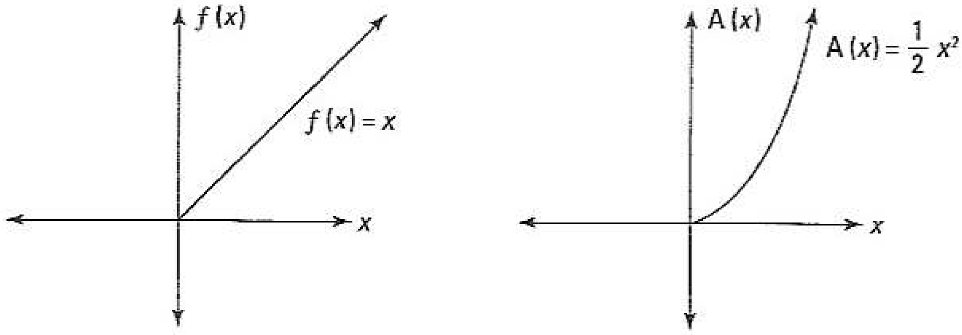


Figura 3-8: A função $f(x) = x$ produz uma função da área $A(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Finalmente, dê uma olhada na Figura 3-9, que representa a *diminuição na entrada*. Nesse caso, usamos $f(x) = 2 - x$ para representar a entrada. Essa função resulta na função da área $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$, que progride de forma decrescente, até a função original alcançar abaixo de 0, e então começa a cair.

Pense um pouco sobre esses três exemplos. Assegure-se de que você compreende como, de uma forma muito prática, a inclinação e a área estão ligadas: em outras palavras, a inclinação de uma função é o fator qualitativo que governa o modo como a função da área irá parecer.

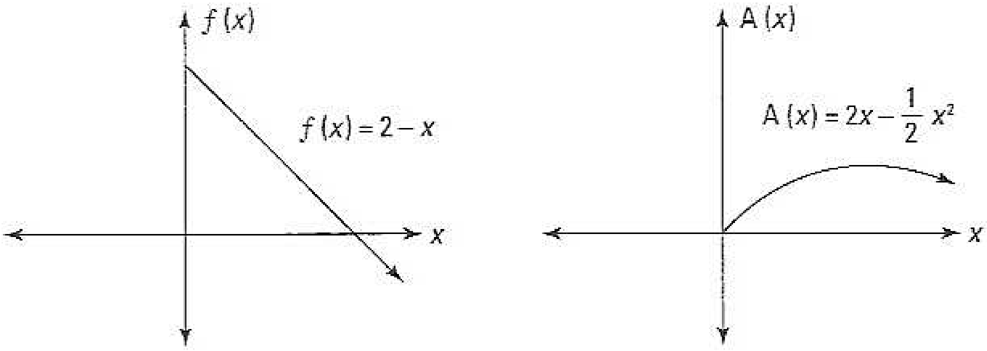


Figura 3-9: A função $f(x) = 2 - x$ produz uma função da área $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$.

Conexão matemática entre a inclinação e a área

Na seção anterior, discutimos três funções $f(x)$ e suas funções de área $A(x)$ relacionadas. A Tabela 3-7 resume essa informação.

Tabela 3-7 Uma Análise Mais Próxima nas Funções e Suas Funções de Área

Descrição da Função	*Equação da Função*	*Descrição da Função da Área*	*Equação da Função da Área*	*Derivada da Função da Área*
Constante	$f(x) = 1$	Crescimento estável	$A(x) = x$	$A'(x) = 1$
Subindo	$f(x) = x$	Crescimento em taxa crescente	$A(x) = \frac{1}{2}x^2$	$A'(x) = x$
Caindo	$f(x) = 2 - x$	Crescimento em taxa decrescente, e então caindo quando $f(x) < 0$	$A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$	$A'(x) = 2 - x$

Nesse ponto, a grande conexão está a apenas um passo. Perceba que cada função é a *derivada* de sua função da área.

$$A'(x) = f(x)$$

Isso é apenas coincidência? Absolutamente não. A Tabela 3-7 apenas adiciona precisão matemática à ideia intuitiva de que a inclinação de uma função (quer dizer, sua derivada) está relacionada com a área sob ela.

Por essa área ser matematicamente descrita pela integral definida, já discutida no Capítulo 1, essa ligação entre a diferenciação e a integração faz muito mais sentido. É por isso que encontrar a área sob uma função — isto é, *integração* — é, essencialmente, *desfazer* a derivada, ou seja, *antidiferenciação*.

O lado negro do TFC

Anteriormente, neste capítulo, mostramos esse pedaço do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$

Agora que você compreende a conexão entre uma função $f(x)$ e sua função de área $A(x)$, eis outro pedaço do TFC:

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)\,dt$$

Essa parte do teorema é geralmente considerada menos útil do que a primeira parte, e é mais difícil de lidar por causa de todas as variáveis adicionais. Não entraremos em muitos detalhes, mas veja alguns pontos que podem ajudá-lo a compreender melhor:

- A variável s — o limite inferior de integração — é um ponto inicial arbitrário onde a função da área é igual a zero. Em nossos exemplos da seção anterior, começamos a função da área na origem, então $s = 0$. Esse ponto representa o dia em que você abriu sua conta no banco, antes de depositar qualquer quantia.
- A variável x — o limite superior da integração — representa qualquer momento após a abertura de sua conta no banco. É também a variável independentemente da função da área.
- A variável t é a variável da função. Caso queira fazer um gráfico, t seria a variável independente e $f(t)$ a variável dependente.

Resumindo, não se preocupe demais com essa versão do TFC. O mais importante é se lembrar da primeira versão e saber utilizá-la. Outra coisa importante é compreender como a inclinação e a área — quer dizer, as derivadas e as integrais — estão intimamente relacionadas.

Sua Nova Melhor Amiga: A Integral Indefinida

O Teorema Fundamental do Cálculo dá uma visão ampla da conexão entre a inclinação de uma função e a área sob ela — quer dizer, entre a diferenciação e a integração.

Em termos práticos, o TFC oferece uma forma mais fácil de integrar, sem lançar mão da fórmula da soma de Riemann. Essa forma mais fácil é chamada de *antidiferenciação* — em outras palavras, desfazer a diferenciação. A antidiferenciação é o método que você utilizará para integrar até o fim de Cálculo II. Ele leva rapidamente a um novo conceito-chave: a *integral indefinida*.

Nesta seção, mostramos passo a passo como utilizar a integral indefinida para resolver integrais definidas, e introduzimos o importante conceito de área com sinal. Para finalizar o capítulo, assegure-se de que compreendeu as importantes distinções entre integrais definidas e indefinidas.

Introdução à antiderivação

A integração sem o uso da fórmula da Soma de Riemann depende do desfazimento da diferenciação (antidiferenciação). Anteriormente neste capítulo, em "A Luz no Fim do Túnel: o Teorema Fundamental do Cálculo", calculamos algumas áreas, informalmente, pela reversão de algumas fórmulas de diferenciação que você conhecia de Cálculo I. Mas a antidiferenciação é tão importante que merece sua própria notação: a integral indefinida.

Uma *integral indefinida* é simplesmente a notação que representa o inverso da função derivada:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

CUIDADO!

Tenha cuidado para não confundir a integral indefinida com a integral definida. Por enquanto, note que a integral indefinida *não tem limites de integração*. Mais adiante neste capítulo, em "Diferenças entre integrais definidas e indefinidas", destacaremos algumas diferenças entre esses dois tipos de integrais.

Eis alguns poucos exemplos que ligam informalmente as derivadas que você conhece com as integrais indefinidas que você deseja resolver:

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,x = \cos x \rightarrow \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x$$

$$\frac{d}{dx}\,e^x = e^x \rightarrow \int e^x\,dx = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

Há um pequeno, mas importante, truque nessa análise informal; perceba que as seguintes três afirmativas são todas verdadeiras:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x + 1) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x - 100) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x + 1{,}000{,}000) = \cos x$$

Sabendo que qualquer constante diferencia em 0, você precisa contar com a possibilidade da presença de uma constante ao integrar. Então, veja as fórmulas mais precisas das integrais indefinidas que acabamos de introduzir:

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$$

LEMBRE-SE

A solução formada de cada integral indefinida é uma antiderivada com a adição de uma constante *C*, que é chamada de *constante de integração*. Então, anexe mecanicamente um + *C* sempre que você desenvolver uma integral indefinida.

Resolução de problemas de área sem a fórmula Soma de Riemann

Depois de resolver uma integral indefinida utilizando a antidiferenciação (como explicado na seção anterior), você tem à sua disposição um método muito útil para resolver problemas de área. Essa notícia deveria vir com um grande alívio, especialmente depois de ler a seção anterior "Pior impossível: cálculo de integrais definidas com o uso da fórmula da Soma de Riemann".

Veja como você resolve um problema de área utilizando integrais indefinidas — quer dizer, *sem* o uso da fórmula da Soma de Riemann:

1. **Formule o problema de área como uma integral definida (como mostramos no Capítulo 1).**
2. **Resolva a integral definida como uma integral indefinida, desenvolvida entre os limites determinados da integração.**
3. **Substitua os limites de integração nessa expressão e simplifique para encontrar a área.**

Esse método, na verdade, é aquele que você utilizará para resolver problemas de área até o final de Cálculo II. Por exemplo, considere encontrar a área sombreada da Figura 3-10.

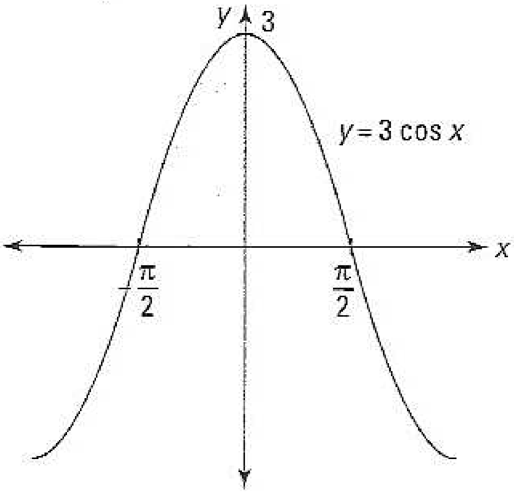


Figura 3-10: A área sombreada $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\, dx$.

Faça da seguinte maneira:

1. **Formule o problema de área como uma integral definida:**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\, dx$$

2. **Resolva essa integral definida como uma integral indefinida:**

$$= 3\,\text{sen}\,x \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

Substituímos a integral pela expressão 3 sen x, pois $\frac{d}{dx} 3\,\text{sen}\,x = 3\cos x$. Também introduzimos a notação $\Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}$. Você pode ler isso como *desenvolvida entre* $x = -\frac{\pi}{2}$ *até x igual* $\frac{\pi}{2}$. Essa notação é comumente usada, então você poderá mostrar para seu professor que sabe como integrar e adiar a preocupação com os limites da integração para o próximo passo.

3. **Substitua esses limites de integração na expressão e simplifique:**

$$= 3\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - 3\,\text{sen}\,-\frac{\pi}{2}$$

Como você pode ver, esse passo vem diretamente do TFC, subtraindo $f(b) - f(a)$. Agora, apenas simplificamos essa expressão para encontrar a área:

$$= 3 - (-3) = 6$$

Então, a área da região sombreada na Figura 3-10 é igual a 6.

Sem *C*, sem problema!

Você pode estar se questionando o porquê de a constante de integração *C* — que é tão importante ao se desenvolver uma integral indefinida — ser abandonada quando se está resolvendo uma integral definida. Essa é fácil de explicar.

Lembre-se de que cada integral definida é expressa como a diferença entre a função desenvolvida em um ponto e a *mesma função* desenvolvida em outro ponto. Se essa função incluir uma constante *C*, um *C* cancela o outro.

Por exemplo, pegue a integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx$. Tecnicamente falando, essa integral se desenvolve da seguinte forma:

$$\operatorname{sen} x + C \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + C\right) - (\operatorname{sen} 0 + C)$$

$$= \frac{1}{2} + C - 0 - C = \frac{1}{2}$$

Como pode observar, os dois *C*s se cancelam, então não há problema em cortá-los no início do desenvolvimento em vez de deixar isso para o final.

Compreenda a área com sinal

No mundo real, a menor área possível é 0, então a área sempre é um número não negativo. No gráfico, contudo, a área pode ser positiva ou negativa.

Essa ideia de área negativa se relaciona com a discussão do começo deste capítulo, em "Introdução à função da área", onde falamos sobre o que acontece quando uma função está abaixo do eixo x.

Para usar a analogia da entrada e das economias, esse é o momento em que sua entrada de dinheiro seca e o dinheiro começa a sair. Em outras palavras, você está gastando suas economias, então o equilíbrio de sua poupança começa a cair.

Assim, a área acima do eixo x é positiva, mas a área abaixo do eixo x é medida como uma área negativa.

A integral definida leva em conta essa importante distinção. Ela fornece não apenas a área, mas também a *área com sinal* da região no gráfico. Por exemplo, considere medir a área sombreada na Figura 3-11.

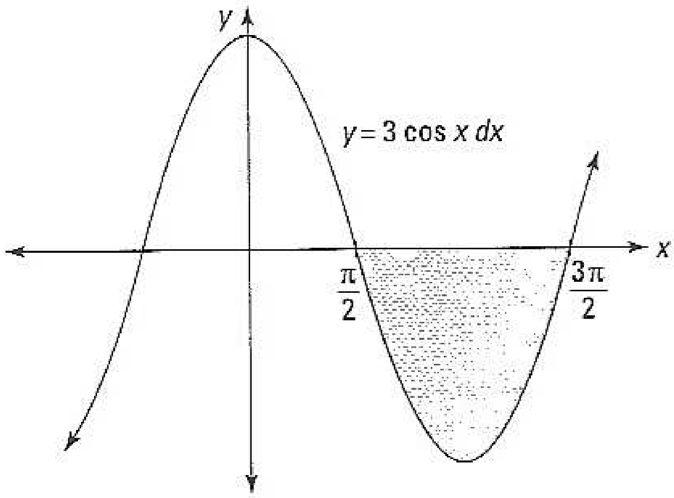


Figura 3-11: Medindo a área com sinal no gráfico $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x\, dx$.

Veja como você realizará isso utilizando os passos que destacamos na seção anterior:

1. **Formule o problema de área como uma integral definida:**

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x\, dx$$

2. **Resolva essa integral definida como uma integral indefinida:**

$$= 3\operatorname{sen} x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}}$$

3. **Substitua esses limites de integração na expressão e simplifique:**

$$= 3\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$
$$= -3 - 3 = -6$$

Então, a área com sinal na região sombreada, na Figura 3-11, é igual a -6. Como você pode ver, o método de cálculo para resolver a integral definida fornece a área com sinal automaticamente.

Vejamos outro exemplo, em que você deseja encontrar a área total das duas regiões sombreadas na Figura 3-10 e da Figura 3-11. Faça isso utilizando os passos que destacamos na seção anterior:

1. **Formule o problema de área como uma integral definida:**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx$$

2. **Resolva essa integral definida como uma integral indefinida:**

$$= 3 \operatorname{sen} x \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}}$$

3. **Substitua esses limites de integração na expressão e simplifique:**

$$= -3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$
$$= 3 - 3 = 0$$

Dessa vez, a área com sinal na região sombreada é 0. Essa resposta faz sentido, pois a área sem sinal acima do eixo x é igual à área sem sinal abaixo dele, então essas duas áreas cancelam-se entre si.

Diferenças entre integrais definidas e indefinidas

Não confunda integrais definidas com indefinidas. Aqui estão as principais diferenças entre elas:

Uma integral definida

- Inclui limites de integração (a e b)
- Representa a área exata de um conjunto específico de pontos em um gráfico
- Resulta em um número

Uma integral indefinida

- Não inclui limites de integração
- Pode ser usada para resultar em um número infinito de integrais definidas relacionadas
- Resulta em uma função

Por exemplo, eis uma integral *definida*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$$

Como você pode ver, inclui limites de integração (0 e $\frac{\pi}{4}$), então pode-se criar um gráfico da área que a representa e usar uma variedade de métodos para desenvolver essa integral em um *número*. Esse número é igual à área com sinal entre a função e o eixo x dentro dos limites de integração, como discutimos anteriormente em "Compreenda a área com sinal".

Em contraste, eis uma integral *indefinida*:

$$\int \sec^2 x \, dx$$

Dessa vez, a integral não inclui limites de integração, então ela não representa uma área específica. Além disso, ela não resulta em um número, mas em uma função:

$$= \tan x + C$$

Você pode usar essa função para resolver qualquer integral definida. Por exemplo, esta é a forma de utilizá-la para encontrar a integral definida que passamos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$$

$$= \tan x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Então, a área da região sombreada no gráfico é 1.

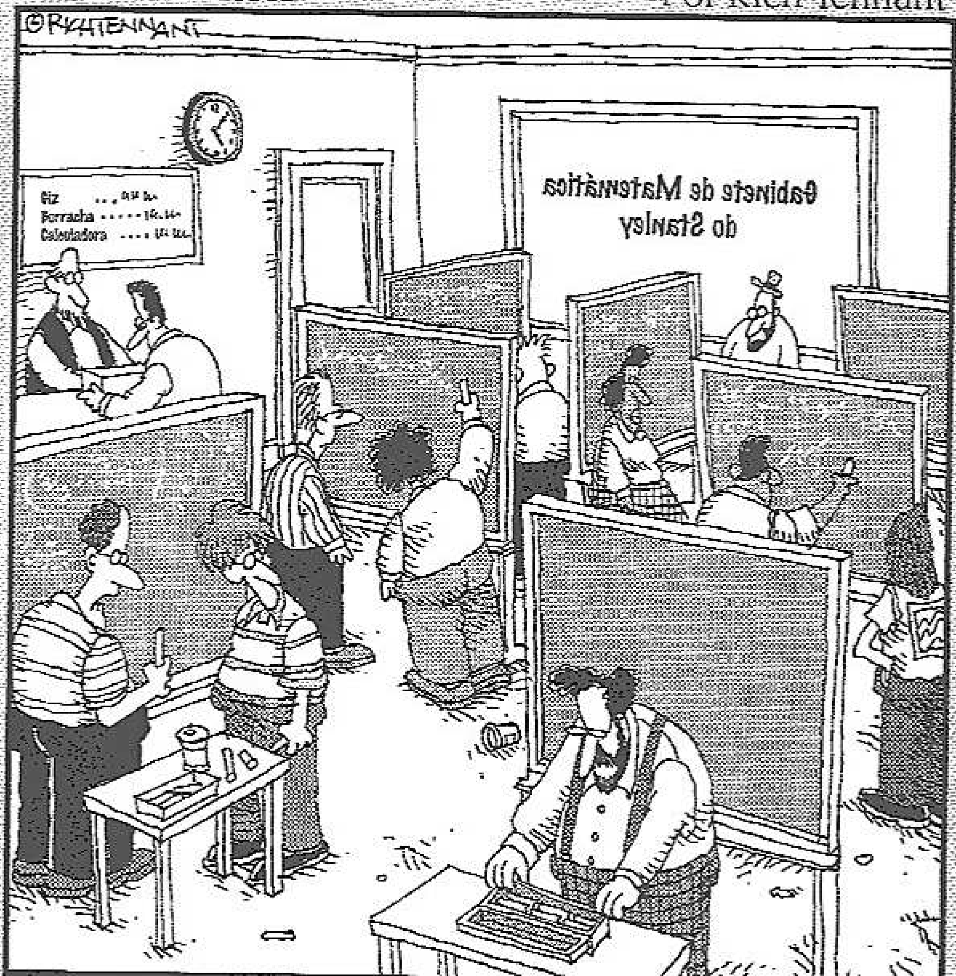
Notamos que a integral indefinida engloba um número infinito de integrais definidas relacionadas, também fornece um meio prático para desenvolver integrais definidas. Não é por acaso que grande parte de Cálculo II se foca no cálculo de integrais indefinidas. Na Parte II, ofereceremos uma abordagem ordenada para encontrar integrais indefinidas.

Parte II

Integrais Indefinidas

A 5ª Onda

Por Rich Tennant



"Ele é o 'Fast Herschel Fenniman', o mais notório competidor matemático de todos os tempos. Se ele perguntar se você gostaria de resolver algumas integrais trigonométricas com ele, se afaste."

Nesta parte...

Você começa calculando a integral indefinida como uma antiderivada — quer dizer, o inverso de uma derivada. Na prática, essa forma é mais fácil para algumas funções que para outras. Então, mostro a você quatro truques importantes — substituição de variáveis, integração por partes, substituição trigonométrica e integração com frações parciais — para transformar uma função que você não sabe como integrar em uma função que você saiba.

Capítulo 4

Integração Instantânea: Apenas Adicione Água (e C)

Neste Capítulo

- Cálculo de integrais simples como antiderivadas
- Utilização de 17 fórmulas de integrais e três regras de integração
- Integração de funções mais complicadas utilizando mais de uma ferramenta de integração
- Esclarecimento das diferenças entre funções integráveis e não integráveis

Primeiro as boas notícias: devido ao fato de a integração ser o inverso da diferenciação, você já sabe como resolver muitas integrais básicas.

Agora as notícias ruins: na prática, a integração é, com frequência, muito mais escorregadia do que a diferenciação. Estou dizendo isso antecipadamente porque: a) é verdade; b) eu acredito na honestidade; e c) você deveria se preparar antes de seu primeiro exame. (Comprar e ler este livro, a propósito, é um grande primeiro passo!)

Neste capítulo — e também nos capítulos 5 ao 8 — iremos focar exclusivamente nesta questão: como você integra cada função existente no planeta? Certo, estamos exagerando, mas não muito. Oferecemos um conjunto manejável de técnicas de integração de forma que você possa colocar em prática com lápis e papel; e caso saiba quando e como aplicá-las, você será capaz de integrar tudo, menos a pia da cozinha.

Primeiro, ensinaremos você a integrar pensando na integração como uma antidiferenciação — quer dizer, como o inverso de uma diferenciação. Ofereceremos uma lista não muito longa das integrais básicas que se espelha na lista das derivadas básicas do Capítulo 2. Também iremos mostrar algumas regras para quebrar funções em pedaços manejáveis que posteriormente serão mais fáceis de integrar.

Depois disso, exemplificaremos algumas técnicas para ajustar as funções, tornando-as parecidas com as funções que você já sabe como integrar. Ao final deste capítulo, você terá as ferramentas para integrar dezenas de funções de maneira rápida e fácil.

Desenvolvimento de Integrais Básicas

Em Cálculo I (abordado no Capítulo 2), você descobriu que uns poucos algoritmos — como a Regra do Produto, a Regra do Quociente e a Regra da Cadeia — fornecem as ferramentas para diferenciar praticamente todas as funções que seu professor poderia ter apresentado a você. Em Cálculo II, os estudantes frequentemente recebem bem animados a boa notícia de que "não existe Regra da Cadeia na integração". E na metade do semestre eles normalmente mudam de opinião.

Utilização das 17 antiderivadas básicas na integração

No Capítulo 2, oferecemos uma lista de 17 derivadas para conhecer, apreciar e, acima de tudo, *memorizar* (sim, eu disse *memorizar*). A leitura dessa lista pode levá-lo a acreditar que eu sou um daqueles caras *nerds* exigentes da matemática que sentem prazer nas atividades curriculares incomuns e cruéis.

Mas a matemática é como um fantasma dos natais passados — aquilo que você pensou que já estava morto e enterrado volta para assombrá-lo de repente. E é isso que acontece com as derivadas. Se você já as conhece, achará esta seção bem fácil.

O Teorema Fundamental do Cálculo prova que a integração é o contrário da diferenciação com uma constante C. Esse teorema-chave gera uma forma de começar a integrar. Na Tabela 4-1, mostramos como integrar uma variedade de funções comuns ao identificá-las como derivadas de funções já conhecidas.

Tabela 4-1 As 17 Integrais Básicas (Antiderivadas)

Derivadas	*Integrais (Antiderivadas)*
$\frac{d}{dx} n = 0$	$\int 0\,dx = C$
$\frac{d}{dx} x = 1$	$\int 1\,dx = x + C$
$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\int e^x = e^x + C$
$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$
$\frac{d}{dx} n^x = n^x \ln n$	$\int n^x\,dx = \frac{n^x}{\ln n} + C$
$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Derivadas	*Integrais (Antiderivadas)*
$\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}\,x$	$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\frac{d}{dx}\text{arcsen}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen}\,x + C$
$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$
$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
$\frac{d}{dx}\text{arccot}\,x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int -\frac{1}{1+x}\,dx = \text{arccot}\,x + C$
$\frac{d}{dx}\text{arcsec}\,x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arcsec}\,x + C$
$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\,x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arccsc}\,x + C$

Conforme discutimos no Capítulo 3, você precisa adicionar a constante de integração C, porque as constantes se diferenciam em 0. Por exemplo:

$$\frac{d}{dx}\text{sen}\,x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x + 1) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x - 100) = \cos x$$

Então, quando você integra usando a antidiferenciação, você precisa contar com a potencial presença desta constante:

$$\int \cos x\;dx = \text{sen}\,x + C$$

Três importantes regras de integração

Depois de aprender a integrar utilizando as 17 antiderivadas básicas na Tabela 4-1, você poderá expandir seu repertório com três regras de integração adicionais: a Regra da Soma, a Regra do Múltiplo Constante e a Regra da Potência. Essas três espelham aquelas regras já conhecidas na diferenciação.

A Regra da Soma na integração

A Regra da Soma na integração indica que integrar longas expressões termo a termo está correto. Eis a regra formalmente:

$$\int \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Por exemplo:

$$\int \left(\cos x + x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \int \cos x\,dx + \int x^2\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

Perceba que a Regra da Soma também se aplica às expressões de mais de dois termos. Ela também se aplica independentemente de o termo ser positivo ou negativo. (Alguns livros chamam essa variação de a Regra da Diferença.) Dividir essa integral em outras três partes permite que você integre cada uma separadamente utilizando uma regra diferente de antidiferenciação:

$$= \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^3 - \ln x + C$$

Perceba que adicionamos apenas um C ao final. Tecnicamente falando, você deveria adicionar uma variável de integração (digamos, C_1, C_2, e C_3) para cada integral que desenvolver. Mas, no fim, você ainda pode definir a variável $C = C_1 + C_2 + C_3$ para consolidar todas essas variáveis. Na maioria dos casos, quando utiliza a Regra da Soma, você pode pular esse passo e colocar um C ao final da resposta.

A Regra do Múltiplo Constante para a integração

A Regra do Múltiplo constante indica que você pode mover uma constante para fora da derivada antes de integrar. Eis a regra expressa em símbolos:

$$\int nf(x)\,dx = n\int f(x)\,dx$$

Por exemplo:

$$\int 3\tan x \sec x\,dx = 3\int \tan x \sec x\,dx$$

Como você pode ver, essa regra reflete a Regra do Múltiplo Constante da diferenciação. Com a constante fora do caminho, integrar fica mais fácil agora com o uso da regra de antidiferenciação:

$$= 3\sec x + C$$

A Regra da Potência para a integração

A Regra da Potência para integração permite que se integre qualquer potência real de x (exceto –1). Assim fica a Regra da Potência expressa:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Por exemplo:

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int x^{100}\,dx = \frac{1}{101}x^{101} + C$$

DICA

A Regra da Potência funciona bem para as potências negativas de x, que são as potências de x no denominador. Por exemplo:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int x^{-2}\,dx$$

$$= -x^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C$$

DICA

A Regra da Potência também funciona para as potências racionais de x, que são as raízes de x. Por exemplo:

$$\int \sqrt{x^3}\,dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

DICA

A *única* potência de número real com a qual a Regra da Potência não funciona é –1. Felizmente, existe uma regra de antidiferenciação para lidar com esse caso:

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int x^{-1}\,dx$$

$$= \ln|x| + C$$

O que aconteceu com as outras regras?

A integração contém fórmulas que espelham a Regra da Soma, a Regra do Múltiplo Constante e a Regra da Potência para a diferenciação. Mas faltam fórmulas que se pareçam com a Regra do Produto, a Regra do Quociente e a Regra da Cadeia. Esse fato pode parecer uma boa notícia, mas a falta dessas fórmulas faz da integração algo muito mais escorregadio na prática do que é a diferenciação.

Na verdade, do Capítulo 5 até o Capítulo 8 focaremos em uma quantidade de métodos que os matemáticos encontraram para lidar com essa dificuldade. O Capítulo 5 se concentrará na substituição de variáveis, que é a forma limitada da Regra da Cadeia. E no Capítulo 6, mostraremos a integração em partes, que é uma adaptação da Regra do Produto.

Resolução de Integrais Mais Complicadas

As regras de antidiferenciação para a integração, já explicadas neste capítulo, limitam muito a quantidade de integrais que você pode calcular facilmente. Em muitos casos, contudo, você pode ajustar a função para torná-la mais fácil de integrar.

Nesta seção, ensinaremos você a integrar certas frações e raízes utilizando a Regra da Potência. Também o ensinaremos a usar as identidades trigonométricas do Capítulo 2 a fim de aumentar sua capacidade de integrar funções trigonométricas.

Integração de polinômios

Você pode integrar *qualquer* polinômio em três passos, com as regras desta seção:

1. **Utilize a Regra da Soma para quebrar o polinômio em seus termos e integrar cada um deles separadamente.**
2. **Utilize a Regra do Múltiplo Constante para mover o coeficiente de cada termo para fora de sua respectiva integral.**
3. **Utilize a Regra da Potência para resolver cada integral. (Você só precisa adicionar um único *C* ao final da expressão resultante.)**

Por exemplo, suponha que você deseje resolver a seguinte integral:

$$\int (10x^6 - 3x^3 + 2x - 5)\, dx$$

1. **Quebre a expressão em quatro integrais separadas:**

   $$= \int 10x^6\,dx - \int 3x^3\,dx + \int 2x\,dx - \int 5\,dx$$

2. **Mova cada um dos quatro coeficientes para fora de sua respectiva integral:**

   $$= 10\int x^6\,dx - 3\int x^3\,dx + 2\int x\,dx - 5\int dx$$

3. **Integre cada termo separadamente utilizando a Regra da Potência:**

   $$= \frac{10}{7}x^7 - \frac{3}{4}x^4 + x^2 - 5x + C$$

Você pode integrar *qualquer* polinômio utilizando esse método. Muitos métodos de integração que introduziremos mais adiante neste livro dependem desse fato. Então, pratique a integração de polinômios até você se sentir seguro a ponto de conseguir fazer isso dormindo.

Integração de expressões racionais

Em muitos casos, você poderá resolver expressões racionais complicadas e integrá-las utilizando as regras de antidiferenciação, além das outras três regras deste capítulo.

Por exemplo, eis uma integral que parece ser difícil:

$$\int \frac{(x^2+5)(x-3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

Você pode separar a função em várias frações, mas sem a Regra do Produto ou a Regra do Quociente, você fica encurralado. Expanda o numerador e coloque o denominador na forma exponencial:

$$= \int \frac{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 30x + 45}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

A seguir, divida a expressão em cinco termos:

$$= \int \left(x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + 14x^{\frac{3}{2}} - 30x^{\frac{1}{2}} + 45x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

Então, use a Regra da Soma para separar a integral em cinco integrais diferentes e a Regra do Múltiplo Constante para mover o coeficiente para fora da integral em cada caso:

$$= \int x^{\frac{7}{2}}\,dx - 6\int x^{\frac{5}{2}}\,dx + 14\int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 30\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 45\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Agora, integre cada termo separadamente utilizando a Regra da Potência:

$$= \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{28}{5}x^{\frac{5}{2}} - 20x^{\frac{3}{2}} + 90x^{\frac{1}{2}} + C$$

Utilização de identidades para integrar funções trigonométricas

À primeira vista, alguns produtos dos quocientes de funções trigonométricas podem parecer impossíveis de integrar com o uso das fórmulas que oferecemos no começo deste capítulo. Mas você se surpreenderá com o enorme progresso que pode obter, com frequência, quando é capaz de integrar uma função trigonométrica não familiar se primeiro ajustá-la utilizando as Cinco Identidades Trigonométricas Básicas que listamos no Capítulo 2.

A força invisível dessas identidades está no fato de que elas permitem que você expresse *qualquer* combinação de funções trigonométricas em uma combinação de senos e cossenos. Falando claramente, o truque é simplificar uma função trigonométrica desconhecida e transformá-la em algo que você saiba como integrar.

DICA

Quando você se deparar com um produto ou um quociente desconhecido de funções trigonométricas, siga estes passos:

1. **Utilize identidades trigonométricas para transformar todos os fatores em senos e cossenos.**
2. **Cancele os fatores sempre que possível.**
3. **Se necessário, utilize identidades trigonométricas para eliminar todas as frações.**

Por exemplo:

$$\int \text{sen}^2 x \cot x \sec x \, dx$$

Se em seu formato atual, você não é capaz de integrar essa expressão utilizando as regras deste capítulo, então siga os próximos passos para transformá-la em uma expressão que você possa integrar:

1. **Utilize as identidades $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$:**

$$= \int \text{sen}^2 x \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx$$

2. **Cancele $\text{sen}\, x$ e $\cos x$ no numerador e denominador:**

$$= \int \text{sen} x \, dx$$

Nesse exemplo, mesmo sem o passo 3, você tem uma função que pode integrar.

$$= -\cos x + C$$

Eis outro exemplo:

$$\int \tan x \sec x \csc x \, dx$$

Novamente, essa integral parece um beco sem saída, antes de se aplicar as cinco identidades trigonométricas básicas nela:

1. **Transforme todos os três fatores em senos e cossenos:**

$$= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx$$

2. **Cancele o sen x no numerador e no denominador:**

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

3. **Utilize a identidade $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ para eliminar a fração:**

$$= \int \sec^2 x\, dx$$

$$= \tan x + C$$

Finalmente você transformou uma função desconhecida em uma das dez funções trigonométricas que você sabe como integrar.

Ensinaremos muito mais truques para integrar funções trigonométricas no Capítulo 7.

Compreenda a Integrabilidade

Agora, você provavelmente já descobriu que, na prática, a integração é mais difícil que a diferenciação. A falta de qualquer conjunto de regras para a integração de produtos, quocientes e composição de funções faz da integração algo mais parecido com a arte do que com a ciência.

Então, você poderá pensar que um grande número de funções é diferenciável, sendo uma pequena parte delas, integráveis. Acontece que essa conclusão é falsa. Na verdade, o conjunto de funções integráveis é maior, com uma pequena parcela sendo diferenciável. Para entender isso, você precisa ter certeza do que as palavras *integrável* e *diferenciável* realmente significam.

Nesta seção, damos uma luz sobre dois enganos comuns que os estudantes cometem ao tentar compreender sobre o que se trata a integrabilidade. Depois disso, discutimos o que significa uma função ser integrável, e mostramos por que muitas funções que são integráveis não são diferenciáveis.

Compreenda as duas distrações da integrabilidade

Para entender o que faz uma função ser integrável, primeiro você precisa conhecer estas duas questões: as dificuldades em *calcular integrais* e *em representar integrais como funções*. Essas questões são válidas, mas não afetam diretamente a integrabilidade de uma função.

Cálculo de integrais

Para muitas funções dadas, as integrais são mais complicadas de computar do que as derivadas. Por exemplo, suponha que você deseje diferenciar e integrar a seguinte função:

$$y = 3x^5e^{2x}$$

Você pode diferenciar essa função facilmente com o uso da Regra do Produto (colocamos um passo adicional para simplificar a resposta):

$$\frac{dy}{dx} = 3\left[\frac{d}{dx}(x^5)e^{2x} + \frac{d}{dx}(e^{2x})x^5\right]$$

$$= 3(5x^4e^{2x} + 2e^{2x}x^5)$$

$$= 3x^4e^{2x}(2x + 5)$$

Em razão de não existir semelhante regra para a integração, neste exemplo você é forçado a procurar outro método. (Veja esse método no Capítulo 6, onde será discutida a integração por partes.)

Encontrar solução para as integrais pode ser um negócio complicado. Em comparação, encontrar derivadas é mais simples — você já aprendeu a maior parte do que precisa saber em Cálculo I.

Representação de integrais como funções

Além das dificuldades no cálculo, as integrais de certas funções simplesmente não podem ser representadas pelas funções que você está acostumado.

Mais precisamente, algumas integrais não podem ser representadas como *funções elementares* — quer dizer, como combinações de funções que você conhecia de Pré-Cálculo. (Veja o Capítulo 14 para uma visão mais aprofundada das funções elementares.)

Por exemplo, observe a seguinte função:

$$y = e^{x^2}$$

Você pode encontrar a derivada da função facilmente, utilizando a Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}e^{x^2}$$
$$=e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}x^2\right)$$
$$=e^{x^2}(2x)$$
$$=2xe^{x^2}$$

Contudo, a integração da mesma função, e^{x^2}, não pode ser expressa como uma função — pelo menos não como uma função que você conheça.

Em vez disso, você pode expressar essa integração ou de forma *exata* — como uma série infinita — ou de forma *aproximada* — como uma função que aproxima a integral com certo nível de precisão. (Veja a Parte IV para saber mais sobre as séries infinitas.) Alternativamente, você pode simplesmente deixá-la como uma integral, que também é uma boa expressão em alguns casos.

Compreenda o que integrável realmente quer dizer

Quando os matemáticos discutem sobre a integrabilidade de uma função, eles não estão falando sobre a dificuldade de calcular aquela integral — ou mesmo se um método foi descoberto. Todo ano, os matemáticos encontram novas formas de integrar classes de funções. Contudo, isso não quer dizer que funções anteriormente não integráveis são agora integráveis.

Similarmente, a integração de uma função também não se refere à capacidade de sua integral ser facilmente representada como outra função, sem lançar mão das séries infinitas.

Na verdade, quando os matemáticos dizem que uma função é integrável, eles querem dizer apenas que aquela integral é *bem definida* — quer dizer, que ela faz sentido matemático.

Em termos práticos, a integrabilidade diz respeito à continuidade: se uma função é contínua em dado intervalo, ela é integrável naquele intervalo. Adicionalmente, se uma função tem apenas um número finito de descontinuidades em um intervalo, ela também é integrável naquele intervalo.

Você provavelmente se lembra de Cálculo I, quando muitas funções — como aquelas com descontinuidades, curvas pontiagudas e inclinações verticais — são não diferenciáveis. As funções descontínuas também são não integráveis. Contudo, funções com curvas pontiagudas e inclinações verticais são integráveis.

Por exemplo, a função $y = |x|$ contém uma ponta em $x = 0$, então a função não é diferenciável nesse ponto. Porém, a mesma função é integrável para todos os valores de x. Esse é só um dos vários exemplos de uma função que é integrável, mas não diferenciável no conjunto total de números reais.

Então, surpreendentemente, o conjunto de funções diferenciáveis é, na verdade, um subconjunto do conjunto de funções integráveis. Na prática, contudo, calcular a integração da maioria das funções é mais difícil do que calcular a derivada.

Capítulo 5

Uma Rápida Mudança: Substituição de Variável

Neste Capítulo

- Compreenda como a substituição de variáveis funciona
- Reconheça quando a substituição de variáveis pode ajudá-lo
- Conheça um atalho no uso da substituição por integrais definidas

Ao contrário da diferenciação, a integração não tem uma Regra da Cadeia. Esse fato faz a integração de *composições de funções* (funções dentro de funções) ficar um tanto escorregadia. O truque mais útil para integrar certas composições comuns de funções utiliza a substituição de variáveis.

Com a *substituição de variáveis*, você iguala uma variável (normalmente u) a uma parte da função que você está tentando integrar. O resultado é uma função simplificada que você pode integrar usando as fórmulas de antidiferenciação e as três regras básicas da integração (a Regra da Soma, a Regra do Múltiplo Constante e a Regra da Potência — todas discutidas no Capítulo 4).

Neste capítulo, mostraremos a você como usar a substituição de variáveis. Ensinaremos como identificar algumas situações comuns em que a substituição de variáveis é útil. Assim que você se acostumar com o processo, ofereceremos uma forma rápida de integrar só olhando o problema e escrevendo a resposta. Ao final, mostraremos a você como pular um passo utilizando a substituição de variáveis para resolver integrais definidas.

Saiba Utilizar a Substituição de Variáveis

As fórmulas de antidiferenciação mais a Regra da Soma, a Regra do Múltiplo Constante e a Regra da Potência (todas discutidas no Capítulo 4) permitem que você integre uma variedade de funções comuns. Mas quando as funções começam a ficar um pouco mais complexas, esses métodos se tornam insuficientes. Por exemplo, esses métodos não funcionam no caso a seguir:

$$\int \text{sen}2x\ dx$$

Para calcular essa integral, você precisa de paciência extra. O ponto complicado aqui é a presença da constante 2 dentro da função seno. Você tem uma regra de antidiferenciação para integrar o seno de uma variável, mas como você integra o seno de uma variável vezes uma constante?

A resposta é substituição de variável, um processo de cinco passos que lhe permite integrar onde nenhum integral jamais esteve:

1. **Pegue uma variável u e a iguale a uma expressão algébrica que aparece na integral, então substitua u por sua expressão na integral.**
2. **Diferencie u para encontrar $\frac{du}{dx}$, então isole todas as variáveis x de um lado do sinal de igual.**
3. **Faça outra substituição para transformar dx, e todas as outras ocorrências de x na integral, em uma expressão que inclua du.**
4. **Integre usando u como sua nova variável de integração.**
5. **Expresse essa resposta em termos de x.**

Não esperamos que esses passos façam muito sentido até que você veja como eles funcionam na prática. No restante desta seção, mostraremos a você como utilizar a substituição de variáveis para resolver problemas que você não seria capaz de integrar de outra maneira.

Encontre a integral de funções internalizadas

Suponha que você deseje integrar o seguinte:

$$\int \text{sen}2x\ dx$$

A dificuldade aqui está no fato de que essa função é a composição de duas funções: a função $2x$ inserida em uma função seno. Se estivesse diferenciando, você poderia usar a Regra da Cadeia. Infelizmente, não existe uma Regra da Cadeia para a integração.

Felizmente, essa função é uma boa candidata para a substituição de variáveis. Siga os cinco passos informados na seção anterior:

1. **Estabeleça uma nova variável u, como a seguir, e substitua-a na integral:**

   Sendo $u = 2x$

   Agora, substitua u por $2x$ como segue:

   $$\int \operatorname{sen} 2x \, dx = \int \operatorname{sen} u \, dx$$

   Isso pode parecer como a resposta para todos os seus problemas, mas você tem mais um problema para resolver. Da forma como está, o símbolo dx indica que a variável de integração ainda é x.

   Para integrar corretamente, você precisa encontrar o caminho para mudar dx para uma expressão contendo du. São os passos 2 e 3.

2. **Diferencie a função $u = 2x$ e isole os termos x em um dos lados do sinal de igual:**

   $$\frac{du}{dx} = 2$$

   Agora, trate o símbolo $\frac{du}{dx}$ como se fosse uma fração, e isole os termos x de um dos lados do sinal de igual. Faça isso em dois passos:

   $$du = 2\,dx$$

   $$\frac{1}{2}\,du = dx$$

3. **Substitua $\frac{1}{2}\,du$ por dx na integral:**

   $$\int \operatorname{sen} u \left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

   Você pode tratar o $\frac{1}{2}$ somente como um coeficiente qualquer e usar a Regra da Constante Múltipla para resolver a integral:

   $$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \, du$$

4. **Neste ponto, você tem uma expressão que sabe como resolver:**

   $$= -\frac{1}{2}\cos u + C$$

A dificuldade aqui está no fato de que essa função é a composição de duas funções: a função $2x$ inserida em uma função seno. Se estivesse diferenciando, você poderia usar a Regra da Cadeia. Infelizmente, não existe uma Regra da Cadeia para a integração.

Felizmente, essa função é uma boa candidata para a substituição de variáveis. Siga os cinco passos informados na seção anterior:

1. **Estabeleça uma nova variável u, como a seguir, e substitua-a na integral:**

   Sendo $u = 2x$

   Agora, substitua u por $2x$ como segue:

   $$\int \operatorname{sen} 2x\, dx = \int \operatorname{sen} u\, dx$$

   Isso pode parecer como a resposta para todos os seus problemas, mas você tem mais um problema para resolver. Da forma como está, o símbolo dx indica que a variável de integração ainda é x.

   Para integrar corretamente, você precisa encontrar o caminho para mudar dx para uma expressão contendo du. São os passos 2 e 3.

2. **Diferencie a função $u = 2x$ e isole os termos x em um dos lados do sinal de igual:**

   $$\frac{du}{dx} = 2$$

   Agora, trate o símbolo $\frac{du}{dx}$ como se fosse uma fração, e isole os termos x de um dos lados do sinal de igual. Faça isso em dois passos:

   $$du = 2\, dx$$

   $$\frac{1}{2}\, du = dx$$

3. **Substitua $\frac{1}{2}\, du$ por dx na integral:**

   $$\int \operatorname{sen} u \left(\frac{1}{2}\, du\right)$$

   Você pode tratar o $\frac{1}{2}$ somente como um coeficiente qualquer e usar a Regra da Constante Múltipla para resolver a integral:

   $$= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} u\, du$$

4. **Neste ponto, você tem uma expressão que sabe como resolver:**

   $$= -\frac{1}{2} \cos u + C$$

5. Agora que a integração está feita, o último passo é substituir *u* por 2*x*:

$$-\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Você pode conferir essa solução diferenciando com o uso da Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{d}{dx}C$$

$$= -\frac{1}{2}(-\text{sen}2x)(2) + 0$$

$$= \text{sen}2x$$

Encontre a integral de um produto

Imagine que você se deparou com esta integral:

$$\int \text{sen}^3 x \cos x \, dx$$

O problema nesse caso é que a função que você está tentando integrar é o produto de duas funções — $\text{sen}^3 x$ e $\cos x$. Isso seria simples de diferenciar com a Regra do Produto, mas a integração não tem uma Regra do Produto. Novamente, a substituição de variáveis vem para salvá-lo:

1. Estabeleça uma variável como a seguir e substitua-a na integral:

Sendo $u = \text{sen}\, x$

Você deve estar se perguntando como estabelecer que u é igual a $\text{sen}\, x$ (em vez disso, digamos $\text{sen}^3 x$ ou $\cos x$). Responderemos a essa questão mais adiante neste capítulo. Por ora, apenas continue e aprenda o funcionamento da substituição de variáveis.

Você pode substituir essa variável na expressão que você deseja integrar, como a seguir:

$$\int \text{sen}^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \cos x \, dx$$

Perceba que a expressão $\cos x \, dx$ ainda permanece e precisa ser expressa em termos de u.

2. Diferencie a função $u = \text{sen}\, x$ e isole as variáveis x de um lado do sinal de igual:

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

Isole as variáveis x de um dos lados do sinal de igual:

$$du = \cos x \, dx$$

3. **Substitua du por $\cos x\, dx$ na integral:**

$$\int u^3\, du$$

4. **Agora você tem uma expressão que pode integrar:**

$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$

5. **Substitua u por $\operatorname{sen} x$:**

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C$$

E, novamente, você pode conferir essa resposta diferenciando com a Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\,\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + \frac{d}{dx}\,C$$

$$= \frac{1}{4}\,(4\operatorname{sen}^3 x)\,(\cos x) + 0$$

$$= \operatorname{sen}^3 x \cos x$$

Essa derivada é igual à função original, então a integração está correta.

Integração de uma função multiplicada por um conjunto de funções internalizadas

Suponha que você deseje integrar o seguinte:

$$\int x\sqrt{3x^2 + 7}\, dx$$

Desta vez, você está tentando integrar o produto de uma função (x) e uma composição de funções (a função $3x^2 + 7$ inserida dentro de uma função de raiz quadrada). Se você estivesse diferenciando, poderia usar uma combinação da Regra do Produto com a Regra da Cadeia, mas essas opções não estão disponíveis para a integração. É assim que você integra, passo a passo, com o uso da substituição de variáveis:

1. **Estabeleça uma variável u como a seguir e substitua-a na integral:**

   Sendo $u = 3x^2 + 7$

   Aqui, você deve se perguntar como saber que valor determinar para u. Eis a resposta rápida: u é a função interna, como você teria identificado se estivesse utilizando a Regra da Cadeia. (Veja no Capítulo 2 uma revisão da Regra da Cadeia.) Explicamos isso em mais detalhes posteriormente, em "Reconheça quando utilizar a substituição".

   Agora, substitua u na integral:

$$\int x\sqrt{3x^2 + 7}\, dx = \int x\sqrt{u}\, dx$$

Faça mais um pequeno ajuste para colocar os demais termos x juntos:

$$= \int \sqrt{u}\, x\, dx$$

Esse rearranjo torna claro que ainda temos de encontrar uma substituição para $x\, dx$.

2. **Agora diferencie a função $u = 3x^2 + 7$:**

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

Do Passo 1, sabemos que temos de substituir $x\, dx$ na integral:

$$du = 6x\, dx$$

$$\frac{1}{6}\, du = x\, dx$$

3. **Substitua $\frac{du}{6}$ por $x\, dx$:**

$$= \int \sqrt{u}\left(\frac{1}{6}\, du\right)$$

Você pode mover a fração $\frac{1}{6}$ para fora da integral:

$$= \frac{1}{6}\int \sqrt{u}\, du$$

4. **Agora você tem uma integral que sabe como resolver:**

Realizamos um passo extra, colocando a raiz quadrada na forma exponencial, para garantir que você perceba como fazer isto:

$$= \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

5. **Para finalizar, substitua u por $3x^2 + 7$:**

$$= \frac{1}{9}(3x^2 + 7)^{\frac{3}{2}} + C$$

Assim como nos dois primeiros exemplos deste capítulo, você sempre pode conferir a integração diferenciando o resultado:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}(3x^2 + 7)^{\frac{3}{2}} + C\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{9}(3x^2 + 7)^{\frac{3}{2}} + \frac{d}{dx}C$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)(3x^2 + 7)^{\frac{1}{2}}(6x) + 0$$

$$= x\sqrt{3x^2 + 7}$$

Como que por mágica, a derivada o traz de volta para a função com que começou.

Reconheça Quando Utilizar a Substituição

Na seção anterior, mostramos a você o funcionamento da substituição de variáveis — quer dizer, *como* realizar uma substituição de variável. Nesta seção, esclarecemos *quando* utilizá-la.

Você pode conseguir usar a substituição de variáveis em três situações comuns. Nessas situações, a expressão que você quer calcular é uma das seguintes:

- Uma composição de funções — isto é, uma função internalizada em outra função
- Uma função multiplicada por uma função
- Uma função multiplicada por uma composição de funções

Integração de funções internalizadas

Composições de funções — quer dizer, uma função aninhada dentro da outra — são da forma $f(g(x))$. Você pode integrá-las substituindo $u = g(x)$ quando:

- Você sabe como integrar a função f externa.
- A função interna $g(x)$ se diferencia em uma constante — quer dizer, está na forma ax ou $ax + b$.

Exemplo #1

Eis um exemplo. Suponha que você deseje integrar a função

$$\csc^2 (4x + 1)\, dx$$

Novamente, essa é uma composição de duas funções:

- A função externa f é a função $\csc^2$, a qual você sabe como integrar.
- A função interna é $g(x) = 4x + 1$, que se diferencia na constante 4.

Dessa vez, a composição fica unida pela igualdade $u = 4x + 1$. Isto é, as duas funções básicas $f(u) = \csc^2 u$ e $g(x) = 4x + 1$ são compostas pela igualdade $u = 4x + 1$ para produzir a função $f(g(x)) = \csc^2 (4x + 1)$.

Ambos os critérios são satisfeitos, então esta integral é outra candidata à substituição usando $u = 4x + 1$. Aqui está como você faz isso:

1. **Estabeleça a variável u e substitua-a na integral:**

   Sendo $u = 4x + 1$

   $\int \csc^2 (4x + 1)\, dx = \int \csc^2 u\, dx$

2. **Diferencie $u = 4x + 1$ e isole os termos x:**

$$\frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{du}{4} = dx$$

3. **Substitua dx por $\frac{du}{4}$ na integral:**

$$\int \csc^2 u \left(\frac{1}{4}\, du\right)$$

$$= \frac{1}{4} \int \csc^2 u\, du$$

4. **Resolva a integral:**

$$= -\frac{1}{4} \cot u + C$$

5. **Substitua de volta o u por $4x + 1$:**

$$= -\frac{1}{4} \cot (4x + 1) + C$$

Exemplo #2

Mais um exemplo. Suponha que você deseje desenvolver a seguinte integral:

$$\int \frac{1}{x-3}\, dx$$

Novamente, essa é uma composição de duas funções:

- A função externa f é uma fração — tecnicamente, um expoente de -1 — que você sabe como integrar.
- A função interna é $g(x) = x - 3$, que se diferencia em 1.

Aqui, a composição é mantida unida pela igualdade $u = x - 3$. Quer dizer, as duas funções básicas $f(u) = \frac{1}{u}$ e $g(x) = x - 3$ são ligadas pela igualdade $u = x - 3$ para produzir a função $f(g(x)) = \frac{1}{x-3}$. Os critérios foram verificados, então você pode integrar utilizando a igualdade $u = x - 3$.

1. **Estabeleça a variável u e substitua-a na integral:**

Sendo $u = x - 3$

$$\int \frac{1}{x-3}\, dx = \int \frac{1}{u}\, dx$$

2. **Diferencie $u = x - 3$ e isole o termo x:**

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

3. **Substitua du por dx na integral:**

   $\int \frac{1}{u}\,du$

4. **Desenvolva a integral:**

   $= \ln |u| + C$

5. **Substitua de volta u por $x - 3$:**

   $= \ln |x-3| + C$

Conheça um atalho para as funções internalizadas

Depois de passar pelos exemplos da substituição de variáveis, você pode começar a perceber certos padrões emergindo. Conforme você se sinta mais confortável com esse conceito, você pode utilizar um atalho para integrar composições de funções — quer dizer, funções internalizadas no formato $f(g(x))$. Tecnicamente, você está utilizando a substituição da variável $u = g(x)$, mas você pode pular esse passo e ainda obter a resposta certa.

Esse atalho funciona para composições de funções $f(g(x))$ em que:

- Você sabe como integrar a função externa f.
- A função interna $g(x)$ está na forma ax ou $ax + b$ — quer dizer, se diferencia em uma constante.

Quando essas condições forem verificadas, você pode integrar $f(g(x))$ usando os três passos seguintes:

1. **Escreva a recíproca do coeficiente de x.**
2. **Multiplique pela integral da função externa, copiando a função interna como você faria ao utilizar a Regra da Cadeia na diferenciação.**
3. **Adicione C.**

Exemplo #1

Por exemplo:

$$\int \cos 4x\,dx$$

Perceba que essa é uma função aninhada dentro de uma função, onde o seguinte é verdadeiro:

- A função externa f é a função cosseno, que você sabe como integrar.
- A função interna é $g(x) = 4x$, que está na forma ax.

Então, você pode integrar essa função rapidamente, assim:

1. **Escreva a recíproca de 4 — isto é, $\frac{1}{4}$:**

   $$\frac{1}{4}$$

2. **Multiplique essa recíproca pela integral da função externa, copiando a função interna:**

   $$\frac{1}{4}\text{ sen } 4x$$

3. **Adicione *C*:**

   $$\frac{1}{4}\text{sen } 4x + C$$

Pronto! Você pode verificar isso facilmente diferenciando com o uso da Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\text{ sen } 4x + C\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos 4x\,(4)$$
$$= \cos 4x$$

Exemplo #2

Eis outro exemplo:

$$\int \sec^2 10x\, dx$$

Ao começar, lembre que $\sec^2 10x\, dx$ é a notação curta para $[\sec(10x)]^2$. Então, a função externa f é a função $\sec^2$ e a função interna é $g(x) = 10x$. (Veja o Capítulo 2 para saber mais sobre as particularidades da notação trigonométrica.)

1. **Escreva a recíproca de 10 — isto é, $\frac{1}{10}$:**

   $$\frac{1}{10}$$

2. **Multiplique essa recíproca pela integral da função externa, copiando a função interna:**

   $$\frac{1}{10}\tan 10x$$

3. **Adicione *C*:**

   $$\frac{1}{10}\tan 10x + C$$

Aqui está a verificação:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}\tan 10x + C\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{10}\tan 10x + \frac{d}{dx}C$$
$$= \frac{1}{10}\sec^2 10x\,(10) + 0$$
$$= \sec^2 10x$$

Exemplo #3

Outro exemplo:

$$\int \frac{1}{7x+2}\,dx$$

Nesse caso, a função externa é de divisão, o que vale como uma função, como explicamos anteriormente em "Reconheça quando utilizar a substituição". A função interna é $7x + 2$. Ambas satisfazem os critérios, então é assim que você realiza essa integração:

1. **Escreva a recíproca do coeficiente 7 — isto é, $\frac{1}{7}$:**

   $$\frac{1}{7}$$

2. **Multiplique essa recíproca pela integral da função externa, copiando a função interna:**

   $$\frac{1}{7}\ln|7x+2|$$

3. **Adicione C:**

   $$\frac{1}{7}\ln|7x+2| + C$$

Pronto! Como sempre, você pode conferir seu resultado com a diferenciação, utilizando a Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{7}\ln|7x+2| + C\right)$$
$$= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7x+2}\right)(7)$$
$$= \frac{1}{7x+2}$$

Exemplo #4

Eis outro exemplo:

$$\int \sqrt{12x-5}\,dx$$

Dessa vez, a função externa *f* é uma raiz quadrada — isto é, um expoente de $\frac{1}{2}$ — e $g(x) = 12x - 5$, então você pode utilizar uma rápida substituição:

1. **Escreva a recíproca de 12 — isto é, $\frac{1}{12}$:**

   $$\frac{1}{12}$$

2. **Multiplique a integral da função externa, copiando a função interna:**

   $$\frac{1}{12}\frac{2}{3}(12x-5)^{\frac{3}{2}}$$

   $$=\frac{1}{18}(12x-5)^{\frac{3}{2}}$$

3. **Adicione C:**

   $$\frac{1}{18}(12x-5)^{\frac{3}{2}}+C$$

A Tabela 5-1 exibe uma variedade de integrais nessa forma. Conforme observar essa tabela, tente enxergar o padrão, de forma que você possa reconhecê-lo quando tiver uma oportunidade e integrar rapidamente.

Tabela 5-1 Uso do Atalho para Integrar Funções Internalizadas

Integral	*Resolução*
$\int e^{5x}\,dx$	$\frac{1}{5}e^{5x}+C$
$\int \operatorname{sen} 7x\,dx$	$-\frac{1}{7}\cos 7x + C$
$\int \sec^2 \frac{x}{3}\,dx$	$3\tan\frac{x}{3}+C$
$\int \tan 8x \sec 8x\,dx$	$\frac{1}{8}\sec 8x + C$
$\int e^{5x+2}\,dx$	$\frac{1}{5}e^{5x+2}+C$
$\int \cos(x-4)\,dx$	$\operatorname{sen}(x-4)+C$

Substituição quando uma parte de uma função se diferencia da outra parte

Quando $g'(x) = f(x)$, você pode utilizar a substituição $u = g(x)$ para integrar o seguinte:

- Expressões na forma $f(x) \cdot g(x)$.
- Expressões na forma $f(x) \cdot h(g(x))$, contanto que h seja uma função que você já saiba como integrar.

Não se preocupe se você não compreender todo esse "matematiquês". Nas seções seguintes, ensinaremos a reconhecer e integrar esses dois casos. Como sempre, a substituição de variáveis ajuda a preencher as lacunas deixadas pela ausência de uma Regra do Produto e uma Regra da Cadeia para a integração.

Expressões na forma $f(x) \cdot g(x)$

Alguns produtos de funções se ajustam muito bem à substituição de variáveis. Procure expressões no formato $f(x) \cdot g(x)$ nas quais:

- Você saiba como integrar $g(x)$.
- A função $f(x)$ é uma derivada de $g(x)$.

Por exemplo:

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx$$

O principal aspecto a ser notado aqui é que a derivada de $\tan x$ é $\sec^2 x$. Essa é uma grande oportunidade para utilizar a substituição de variáveis:

1. **Estabeleça u e substitua-o na integral:**

   Sendo $u = \tan x$

   $$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \int u \sec^2 x \, dx$$

2. **Diferencie como planejado:**

   $$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$
   $$du = \sec^2 x \, dx$$

3. **Realize outra substituição:**

   $$= \int u \, du$$

4. **Esta integração não poderia ser mais fácil:**

$$= \frac{1}{2}u^2 + C$$

5. **Substitua de volta *u* por tan *x*:**

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

Expressões no formato $f(x) \cdot h(g(x))$

Eis uma integral aparentemente complicada que, na verdade, responde bem à substituição:

$$\int \frac{(2x+1)}{(x^2+x-5)^{\frac{4}{3}}}\,dx$$

O ponto-chave aqui é que o numerador dessa fração é a derivada da função interna no denominador. Observe como isso funciona nesta substituição:

1. **Determine *u* igual ao denominador e faça a substituição:**

   Sendo $u = x^2 + x - 5$

   Assim fica a substituição:

   $$= \int \frac{2x+1}{u^{\frac{4}{3}}}\,dx$$

2. **Diferencie *u*:**

   $$\frac{du}{dx} = 2x + 1$$

   $$du = (2x + 1)\,dx$$

3. **A segunda parte da substituição fica mais clara agora:**

   $$= \int \frac{1}{u^{\frac{4}{3}}}\,du$$

   Perceba como essa substituição depende do fato de que o numerador é a derivada do denominador. (Você pode pensar que isso é uma grande coincidência, mas coincidências como essas acontecem o tempo todo em provas!)

4. **A integração está bem encaminhada agora:**

   Daremos um passo extra para remover a fração antes de integrar:

   $$= \int u^{-\frac{4}{3}}\,du$$

   $$= -3u^{-\frac{1}{3}} + C$$

5. **Substitua de volta *u* por $x^2 + x - 5$:**

   $$= -3(x^2 + x - 5)^{-\frac{1}{3}} + C$$

Verificar a resposta diferenciando com a Regra da Cadeia revela como esse problema estava no começo:

$$\frac{d}{dx}\left[-3(x^2+x-5)^{-\frac{1}{3}}+C\right]$$
$$=(x^2+x-5)^{-\frac{4}{3}}(2x+1)$$
$$=\frac{2x+1}{(x^2+x-5)^{\frac{4}{3}}}$$

Agora, se você trabalhou com os exemplos deste capítulo, você provavelmente está vendo oportunidade para fazer substituições de variáveis. Por exemplo:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx$$

Observe que a derivada de $x^4 - 1$ é x^3, com um fator constante a menos. Então, eis a declaração, seguida da diferenciação:

$$\text{Sendo } u = x^4 - 1$$
$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$
$$\frac{du}{4} = x^3\,dx$$

Agora você apenas faz as duas substituições de uma vez:

$$\int \sqrt{u}\cdot\left(\frac{1}{4}du\right)$$
$$=\frac{1}{4}\int \sqrt{u}\,du$$

Neste ponto, você pode resolver a integral de forma simples — deixaremos isso como um exercício para você!

Similarmente, eis outro exemplo:

$$\int \csc^2 x\, e^{\cot x}\,dx$$

À primeira vista, essa integral parece completamente terrível. Mas, em uma inspeção mais detalhada, perceba que a derivada de $\cot x$ é $-\csc^2 x$, então essa parece outra boa candidata:

$$\text{Sendo } u = \cot x$$
$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$
$$-du = \csc^2 x\,dx$$

Isso resulta na seguinte substituição:

$$= \int e^u(-du)$$

$$= -\int e^u\,du$$

Novamente, essa é outra integral que você pode resolver.

Uso da Substituição para Resolver Integrais Definidas

Nas duas primeiras seções deste capítulo, abordamos como e quando desenvolver uma integral indefinida pela substituição de variáveis. Toda essa informação também se aplica para a resolução de integrais definidas, mas também temos um truque para poupar tempo que você deveria conhecer.

Ao utilizar a substituição de variáveis para desenvolver uma integral definida, você pode se poupar de algum trabalho ao final do problema. Especificamente, você pode deixar a solução em termos de *u* ao mudar os limites de integração.

Por exemplo, suponha que você está desenvolvendo a seguinte integral definida:

$$\int_{x=0}^{x=1} x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Perceba que estabelecemos os limites de integração em $x = 0$ e $x = 1$. Essa é só uma mudança de notação para lembrar-lhe de que os limites de integração são valores de x. Esse fato será importante mais adiante no problema.

Você pode resolver essa equação de forma simples, utilizando a substituição de variáveis.

Se você não está seguro sobre o porquê da substituição funcionar aqui, leia a seção "Reconheça quando utilizar a substituição" anteriormente neste capítulo. Siga os passos de 1 até 3 da substituição de variável:

Sendo $u = x^2 + 1$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=2} \sqrt{u}\,du$$

Se essa fosse uma integral indefinida, você estaria pronto para integrar. Mas, por ser uma integral definida, você ainda precisa expressar os limites de integração em termos de u em vez de x. Faça isso substituindo os valores 0 e 1 por x na equação de substituição $u = x^2 + 1$:

$$u = 1^2 + 1 = 2$$

$$u = 0^2 + 1 = 1$$

Agora, use esses valores de u como seus novos limites de integração:

$$= \frac{1}{2} \int_{u=1}^{u=2} \sqrt{u}\, du$$

Nesse momento, você está pronto para integrar:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{u=1}^{u=2}$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{u=1}^{u=2}$$

Por você ter mudado os limites de integração, pode agora encontrar a resposta sem ter de mudar a variável de volta para x:

$$= \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}$$

Capítulo 6

Integração por Partes

Neste Capítulo

- Fazer a ligação entre a Regra do Produto e a integração por partes
- Saber como e quando a integração por partes funciona
- Integrar por partes utilizando o Método da Diagonal
- Praticando o Método da Diagonal nos quatro produtos de função mais comuns

Em Cálculo I, você descobriu que a Regra do Produto permite encontrar a derivada de quaisquer duas funções que se multiplicam entre si. (Revisamos isso no Capítulo 2, caso você precise relembrar.) Mas integrar o produto de duas funções não é tão simples. Infelizmente, nenhuma fórmula permite integrar o produto de quaisquer duas funções. Como resultado, uma variedade de técnicas foram desenvolvidas para lidar com os produtos das funções com base em cada caso.

Neste capítulo, mostramos a você a técnica mais amplamente aplicável para integrar produtos, chamada de *integração por partes*. Primeiro, demonstramos como a fórmula para a integração por partes segue a Regra do Produto. Então, ensinamos a você como a fórmula funciona na prática. Depois disso, oferecemos uma lista de produtos de funções que são passíveis de utilizar esse método.

Depois que você entender o princípio por trás da integração por partes, ofereceremos a você um método — chamado de *Método da Diagonal* — para realizar esse cálculo de forma eficiente e sem erros. Então, mostraremos exemplos de como usar esse método para integrar os quatro produtos de função mais comuns.

Introdução à Integração por Partes

A integração por partes é uma feliz consequência da Regra do Produto (discutida no Capítulo 2). Nesta seção, mostraremos a você como ajustar a Regra do Produto, a fim de derivar na fórmula para a integração por partes. Ensinaremos a você duas versões dessa fórmula — uma versão complicada e uma mais simples — e então recomendaremos que você memorize a segunda. Mostraremos como utilizar essa fórmula e saber quando a integração por partes deve funcionar melhor.

Reversão da regra do produto

A Regra do Produto (veja o Capítulo 2) permite diferenciar o produto de duas funções:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Devido a uma série de reviravoltas matemáticas, você pode transformar essa equação em uma fórmula que seja útil para a integração. Não há dificuldade em derivá-la, mas a notação ao longo do caminho é de confundir a cabeça, então não se preocupe caso tenha problemas em acompanhar. Saber como derivar a fórmula para a integração por partes é menos importante do que saber quando e como utilizá-la, que é o foco do resto do capítulo.

O primeiro passo é simples: apenas rearranje os dois produtos do lado direito da equação:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

A seguir, rearranje os termos da equação:

$$f(x) \cdot g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] - g(x) \cdot f'(x)$$

Agora, integre ambos os lados desta equação:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \left\{\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] - g(x)f'(x)\right\}dx$$

Use a Regra da Soma para dividir a integral da esquerda em duas:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx - \int g(x)f'(x)\,dx$$

A primeira dessas duas integrais desfaz a derivada:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

Essa é a fórmula para a integração por partes. Mas, por parecer tão complicada, a seguinte substituição é utilizada para simplificá-la:

Sendo $u = f(x)$	Sendo $v = g(x)$
$du = f'(x)\,dx$	$dv = g'(x)\,dx$

LEMBRE-SE

Eis a versão mais amigável da mesma fórmula, que você deveria *memorizar*:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Saiba como integrar por partes

A fórmula para a integração por partes lhe dá a opção de quebrar o produto de duas funções em seus fatores e integrá-los de uma forma alternada.

Para integrar por partes:

1. **Decomponha toda a integral (incluindo dx) em dois fatores.**
2. **Iguale o fator sem dx a u e iguale o fator com dx a dv.**
3. **Diferencie u para encontrar du, e integre dv para encontrar v.**
4. **Use a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.**
5. **Desenvolva o lado direito dessa equação para calcular a integral.**

Por exemplo, suponha que você deseje resolver a seguinte integral:

$$\int x \ln x \, dx$$

Em seu formato atual, você não pode realizar esse cálculo, então integre por partes:

1. **Decomponha a integral em $\ln x$ e $x\,dx$.**
2. **Sendo $u = \ln x$ e $dv = x\,dx$.**
3. **Diferencie $\ln x$ para encontrar du e integre $x\,dx$ para encontrar v:**

Sendo $u = \ln x$	Sendo $dv = x\,dx$
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$	$\int dv = \int x\,dx$
$du = \frac{1}{x}\,dx$	$v = \frac{1}{2}x^2$

4. **Utilizando esses valores para u, du, v e dv, você pode usar a fórmula da integração por partes para reescrever a integral como a seguir:**

   $$\int x \ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

   Neste ponto, a álgebra é útil para simplificar o lado direito da equação:

   $$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

5. **Desenvolva a integral na direita:**

   $$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + C$$

   Você pode simplificar um pouco a resposta:

   $$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Portanto, $\int x\ln x\,dx$. Verifique essa resposta diferenciando-a com o uso da Regra do Produto:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{dx}x^2\right)\ln x+\left(\frac{d}{dx}\ln x\right)x^2\right]-\frac{1}{4}2x$$

$$=\frac{1}{2}\left[2x\ln x+\left(\frac{1}{x}\cdot x^2\right)\right]-\frac{1}{2}x$$

Agora simplifique esse resultado para demonstrar que é equivalente à função com que você começou:

$$=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$$

Saiba quando integrar por partes

Depois de conhecer o funcionamento básico da integração por partes, como mostramos a você na seção anterior, é importante reconhecer quando integrar por partes é útil.

Para começar, eis dois importantes casos em que a integração por partes definitivamente é a forma de resolver:

- A função logarítmica ln x.
- A primeira das quatro funções trigonométricas inversas (arcsen x, arccos x, arctan x, e arccot x).

Além desses casos, a integração por partes é útil ao integrar o produto de mais de uma função. Por exemplo:

- $x \ln x$
- x arcsec x
- x^2 sen x
- $e^x \cos x$

Perceba que em cada caso, você pode reconhecer o produto das funções, pois a variável x aparece mais de uma vez na função.

DICA

Sempre que você se deparar com a integração do produto de funções, pense na substituição de variáveis (que discutimos no Capítulo 5) antes de pensar na integração por partes. Por exemplo, $x \cos(x)^2$ é um trabalho para a substituição de variáveis e não para a integração por partes. (Para ver o porquê, volte ao Capítulo 5.)

Quando você decide usar a integração por partes, sua próxima pergunta é como dividir a função e determinar as variáveis u e dv. Felizmente, um útil recurso mnemônico existe para tomar essa decisão: Lindas Integrais Ajeitam Tudo, que estão para Logarítmica, Inversa trigonométrica, Algébrica e Trigonométrica. (Se você preferir, pode usar as iniciais de Loucas Integrais Adoram Tripudiar.) Sempre escolha a primeira função na lista como o fator para igualar a u, e então ajuste o resto do produto (incluindo dx) igual a dv.

Você pode utilizar a integração por partes para integrar qualquer função listada na Tabela 6-1.

Tabela 6-1 Quando Você Pode Integrar por Partes

Função	*Exemplo*	*Diferencie u para Encontrar du*	*Integre dv para Encontrar v*
Função logarítmica	$\int \ln x\,dx$	$\ln x$	dx
Logarítmica vezes algébrica	$\int x^4 \ln x\,dx$	$\ln x$	$x^4\,dx$
Logarítmica composta com algébrica	$\int \ln x^3\,dx$	$\ln x^3$	dx
Formas trigonométricas inversas	$\int \text{arcsen} x\,dx$	$\text{arcsen} x$	dx
Algébrica vezes seno	$\int x^2 \text{sen} x\,dx$	x^2	$\text{sen} x\,dx$
Algébrica vezes cosseno	$\int 3x^5 \cos x\,dx$	$3x^5$	$\text{sen} x\,dx$
Algébrica vezes exponencial	$\int \frac{1}{2} x^2 e^{3x}\,dx$	$\frac{1}{2} x^2$	$e^3\,dx$
Seno vezes exponencial	$\int e^{\frac{x}{2}} \text{sen} x\,dx$	$e^{\frac{x}{2}}$	$\text{sen} x\,dx$
Cosseno vezes exponencial	$\int e^x \cos x\,dx$	e^x	$\cos x\,dx$

DICA

Quando você está integrando por partes, esta é a regra mais básica para decidir qual termo integrar e qual termo diferenciar: se você só sabe integrar um dos dois termos, esse é o que você vai integrar!

Integração por Partes com o Método da Diagonal

O Método da Diagonal é basicamente a integração por partes com uma tabela que ajuda a organizar a informação. Esse método é especialmente útil quando você precisa integrar por partes mais de uma vez para resolver um problema. Nesta seção, mostraremos a você como utilizar o Método da Diagonal para resolver uma variedade de integrais.

Veja o gráfico da Diagonal

O Método da Diagonal evita o uso de u e dv, que são facilmente confundidos (especialmente se você escreve as letras u e v de forma tão desastrada quanto eu). Em vez disso, é utilizada uma coluna para *diferenciação* no lugar de u, e uma coluna para *integração* substitui dv.

Utilize a seguinte tabela para o Método da Diagonal:

	I
D	
+	
−	

Como você pode ver, a tabela contém duas colunas: a coluna D para a *diferenciação*, que tem um sinal de mais e um sinal de menos, e a coluna I para *integração*. Você pode também ter percebido que D e I são colocados *diagonalmente* na tabela — sim, o nome *Método da Diagonal* funciona em dois níveis (digamos assim).

Use o Método da Diagonal

Anteriormente neste capítulo, oferecemos uma lista de funções que você pode integrar por partes. O Método da Diagonal funciona para todas essas funções. Também oferecemos o truque de memória Lindas Integrais Ajeitam Tudo (que estão para Logarítmica, Inversa trigonométrica, Algébrica e Trigonométrica) para ajudá-lo a lembrar como determinar valores para u e dv — quer dizer, o que diferenciar e o que integrar.

Para usar o Método da Diagonal:

1. **Escreva o valor para diferenciar no quadro abaixo de *D* e o valor para integrar (omitindo o *dx*) no quadro abaixo de *I*.**
2. **Diferencie a coluna *D* e integre a coluna *I*.**
3. **Some os produtos de todas as linhas *inteiras* como se fossem termos.**

   Explicaremos esse passo com maior profundidade no exemplo que segue.
4. **Some a integral do produto dois quadros inferiores diagonalmente adjacentes.**

   Também explicamos esse passo com mais detalhes nos exemplos.

Não perca muito tempo tentando adivinhar. Os exemplos a seguir mostram a você como isso é feito e oferecem bastante prática. Ensinamos a você como utilizar o Método da Diagonal para integrar produtos que incluem funções logarítmicas, trigonométricas inversas, algébricas e trigonométricas.

L para Logaritmo

Você pode usar o Método da Diagonal para calcular o produto de uma função logarítmica e uma função algébrica. Por exemplo, suponha que você deseja calcular a seguinte integral:

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

DICA

Sempre que você integrar um produto que inclua uma função logarítmica, a função logarítmica sempre fica na coluna *D*.

1. **Escreva a função logarítmica no quadro abaixo de *D* e o resto do valor da função (omitindo *dx*) no quadro abaixo de *I*.**

	I
D	x^2
+ $\ln x$	
–	

2. **Diferencie $\ln x$ e coloque a resposta na coluna *D*.**

   Perceba que nesse passo o sinal de menos já está no quadro ligado a $\frac{1}{x}$.

	I
D	x^2
$+\ \ln x$	
$-\ \frac{1}{x}$	

3. **Integre x^2 e coloque a resposta na coluna *I*.**

	I
D	x^2
$+\ \ln x$	$\frac{1}{3}x^3$
$-\ \frac{1}{x}$	

4. **Some o produto da linha inteira que está circulada.**

	I
D	x^2
$+\ \ln x$	$\frac{1}{3}x^3$
$-\ \frac{1}{x}$	

Escreva isto:

$$+\ln x\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

5. **Some a *integral* dos dois quadros inferiores diagonalmente adjacentes que estão circulados.**

	I
D	x^2
$+\ \ln x$	$\frac{1}{3}x^3$
$-\ \frac{1}{x}$	

Escreva o seguinte:

$$(+\ln x)\left(\frac{1}{3}x^3\right)+\int\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{3}x^3\right)dx$$

Nesse ponto, você pode simplificar o primeiro termo e integrar o segundo termo:

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x^3\right)+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

Você pode conferir essa resposta diferenciando e utilizando a Regra do Produto:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x^2\ln x+\frac{1}{x}\cdot x^3\right)-\frac{1}{3}x^2$$

$$=x^2\ln x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x^2$$

$$=x^2\ln x$$

Portanto, esta é a resposta correta:

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

I para inversa trigonométrica

Você pode integrar quatro das seis funções trigonométricas inversas (arcsen x, arccos x, arctan x e arccot x) utilizando o Método da Diagonal. A propósito, se você ainda não memorizou as derivadas das seis funções trigonométricas inversas (que mostramos no Capítulo 2), agora seria um ótimo momento para isso.

DICA

Sempre que você integra um produto que inclui uma função trigonométrica inversa, essa função sempre fica na coluna D.

Por exemplo, suponha que você deseje integrar

$$\int \arccos x\;dx$$

1. **Escreva a função trigonométrica inversa no quadro abaixo de *D* e o resto do valor da função (omitindo *dx*) no quadro abaixo de *I*.**

	I
D	1
+ arccos x	
−	

Note que o 1 vai na coluna *I*.

2. **Diferencie arccos x e coloque a resposta na coluna *D*, e então integre 1 e coloque a resposta na coluna *I*.**

	I
D	1
+ arccos x	x
$-\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	

3. **Some o produto da linha inteira que está circulada.**

	I
D	1
+ arccos x	x
$-\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	

Escreva o seguinte:

$(+\text{arccos } x)(x)$

4. **Some a integral da diagonal inferior que está circulada.**

	I
D	1
$+\arccos x$	x
$-\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	

Escreva o seguinte:

$$(+\arccos x)(x)+\int -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x)\,dx$$

Simplifique e integre:

$$=x\arccos x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Sendo $u = 1 - x^2$

$$du = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,du = x\,dx$$

Essa substituição de variáveis introduz uma nova variável u. Não confunda esse u com aquele u utilizado para a integração por partes.

$$=x\arccos x+\int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$=x\arccos x-\frac{1}{2}\left(2\sqrt{u}\right)+C$$

$$=x\ \arccos\ x-\sqrt{u}+C$$

Substituir u por $1 - x^2$ e simplificar dá a seguinte resposta:

$$=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$$

Portanto, $\int \arccos x\,dx = x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

A para algébrica

Se você não está acreditando que o Método da Diagonal realmente vale a pena, garantimos que você o achará útil para lidar com fatores algébricos.

Por exemplo, suponha que você deseje integrar o seguinte:

$$\int x^3 \text{sen} x \, dx$$

Esse exemplo é um produto de funções, então a integração por partes é uma opção. Percorrendo a lista LIAT, você percebe que o produto não contém um fator logarítmico ou um fator trigonométrico inverso. Mas ele inclui o fator algébrico x^3, então coloque esse fator na coluna *D* e o resto na coluna *I*. Agora, você provavelmente está ficando bom em usar a tabela, então preenchemos para você aqui.

	I
D	sen x
+ x^3	− cos x
− $3x^2$	

Seu próximo passo será escrever o que segue:

$$+(x^3)(-\cos x) + \int (-3x^2)(-\cos x)\, dx$$

Mas aqui começa o problema: a única forma de calcular a nova integral é fazendo *outra* integração por partes. E, dando uma espiada na resposta, eis o que você mal pode esperar:

$$=(x^3)(-\cos x) - \left[(3x^2)(-\text{sen} x) - \int (6x)(-\text{sen} x)\, dx\right]$$

$$=(x^3)(-\cos x) - \left\{(3x^2)(-\text{sen} x) - \left[(6x)(\cos x) - \int 6\cos x \, dx\right]\right\}$$

Finalmente, depois de integrar por partes *três* vezes, você finalmente tem uma integral que pode resolver diretamente. Se calcular essa expressão parece divertido (e se você acha que pode fazer isso rapidamente em um teste sem se esquecer de um sinal de menos ao longo do caminho), então mãos à obra. Se não, mostraremos a você uma forma melhor. Continue lendo.

DICA

Para integrar uma função algébrica multiplicada por um seno, um cosseno ou uma função exponencial, coloque o fator algébrico na coluna *D* e o outro fator na coluna *I*. Diferencie o fator algébrico até 0, e então integre o outro fator pelo mesmo número de vezes. Você pode então copiar a resposta diretamente da tabela.

Simplesmente estenda a tabela DI, como você vê aqui.

	I
D	sen x
+ x^3	– cos x
– $3x^2$	– sen x
+ $6x$	cos x
– 6	sen x
+ 0	

Perceba que você apenas continua com os padrões em ambas as colunas. Na coluna *D*, continue alternando sinais de mais e menos e diferencie até chegar a 0. E na coluna *I*, continue integrando.

A surpresa agradável é que você agora pode copiar a resposta da tabela. Essa resposta contém quatro termos (+ *C*, é claro), que copiamos diretamente das quatro linhas circuladas na tabela:

$$x^3(-\cos x) - 3x^2(-\text{sen}\, x) + 6x(\cos x) - 6(\text{sen}\, x) + C$$

Mas, espere! Não esquecemos a última integral da diagonal? Na verdade, não, mas essa integral é $\int 0\, dx \cdot \text{sen} x = C$, o que explica de onde vem o *C* do final.

Eis outro exemplo, só para mostrar o quanto é fácil o Método da Diagonal para os produtos com fatores algébricos:

$$\int 3x^5 e^{2x}\, dx$$

Sem a tabela DI, esse problema é um gigantesco erro de cálculo esperando para acordar. Mas a tabela toma conta de tudo isso.

	I
D	e^{2x}
$+ \quad 3x^5$	$\frac{1}{2} \; e^{2x}$
$- \quad 15x^4$	$\frac{1}{4} \; e^{2x}$
$+ \quad 60x^3$	$\frac{1}{8} \; e^{2x}$
$- \quad 180x^2$	$\frac{1}{16} \; e^{2x}$
$+ \quad 360x$	$\frac{1}{32} \; e^{2x}$
$- \quad 360$	$\frac{1}{64} \; e^{2x}$
$+ \quad 0$	

Agora, apenas copie da tabela, adicione C e simplifique:

$$= +(3x^5)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - (15x^4)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right) + (60x^3)\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right) - (180x^2)\left(\frac{1}{16}e^{2x}\right)$$

$$+ (360x)\left(\frac{1}{32}e^{2x}\right) - (360)\left(\frac{1}{64}e^{2x}\right) + C$$

$$= \frac{3}{2}x^5e^{2x} - \frac{15}{4}x^4e^{2x} + \frac{15}{2}x^3e^{2x} - \frac{45}{4}x^2e^{2x} + \frac{45}{4}xe^{2x} - \frac{45}{8}e^{2x} + C$$

Essa resposta é perfeitamente aceitável, mas se você deseja aprimorar, fatore $\frac{3}{8}e^{2x}$ e deixe um polinômio reduzido:

$$= \frac{3}{8}e^{2x}(4x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 30x - 15) + C$$

T para trigonométrica

Você pode usar o Método da Diagonal para integrar o produto tanto do seno quanto do cosseno e um exponencial. Por exemplo, suponha que você deseje desenvolver a seguinte integral:

$$\int e^{\frac{x}{3}} \operatorname{sen} x \, dx$$

DICA

Ao integrar uma função seno ou cosseno multiplicada por uma função exponencial, faça sua tabela "DI-agonal" com cinco linhas, em vez de quatro. Então coloque a função trigonométrica na coluna *D* e a exponencial na coluna *I*.

	I
D	$e^{\frac{x}{3}}$
+ sen x	$3e^{\frac{x}{3}}$
− cos x	$9e^{\frac{x}{3}}$
+(−sen x)	

Dessa vez, você tem duas linhas para somar, assim como a integral do produto da diagonal inferior:

$$(\operatorname{sen}x)\left(3e^{\frac{x}{3}}\right)+(-\cos x)\left(9e^{\frac{x}{3}}\right)+\int(-\operatorname{sen}x)\left(9e^{\frac{x}{3}}\right)dx$$

Isso pode parecer um beco sem saída, pois a integral resultante parece similar àquela que você está tentando resolver. Por mais estranho que pareça, contudo, essa similaridade faz com que a resolução da integral seja possível. Na verdade, o próximo passo é fazer com que a integral resultante pareça *exatamente* aquela que você está tentando resolver:

$$=(\operatorname{sen}x)\left(3e^{\frac{x}{3}}\right)+(-\cos x)\left(9e^{\frac{x}{3}}\right)-9\int e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x\,dx$$

Agora, substitua a variável I pela integral que você está tentando resolver. Essa ação não é estritamente necessária, mas faz com que o curso de ação se torne um pouco mais claro.

$$I=(\operatorname{sen}x)(3e^{\frac{x}{3}})+(-\cos x)(9e^{\frac{x}{3}})-9I$$

Agora encontre I utilizando um pouco de álgebra básica:

$$10I=(\operatorname{sen}x)(3e^{\frac{x}{3}})+(-\cos x)(9e^{\frac{x}{3}})$$

$$I=\frac{(\operatorname{sen}x)\left(3e^{\frac{x}{3}}\right)+(-\cos x)\left(9e^{\frac{x}{3}}\right)}{10}$$

Finalmente, substitua a integral original de volta na equação, e adicione C:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x\,dx=\frac{1}{10}\left[(\operatorname{sen}x)\left(3e^{\frac{x}{3}}\right)+(-\cos x)\left(9e^{\frac{x}{3}}\right)\right]+C$$

Opcionalmente, você pode limpar essa resposta com um pouco de fatoração:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x\,dx=\frac{3}{10}e^{\frac{x}{3}}(\operatorname{sen}x-3\cos x)+C$$

Se você está descrente de que esse método realmente forneça a resposta correta, verifique-o com a diferenciação e com o uso da Regra do Produto:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{10}e^{\frac{x}{3}}(\operatorname{sen}x - 3\cos x) + C\right)$$

$$= \frac{3}{10}\left[\frac{d}{dx}e^{\frac{x}{3}}(\operatorname{sen}x - 3\cos x) + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x - 3\cos x)\left(e^{\frac{x}{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{10}\left[\left(\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\right)(\operatorname{sen}x - 3\cos x) + (\cos x + 3\operatorname{sen}x)\left(e^{\frac{x}{3}}\right)\right]$$

Nesse ponto, a álgebra mostra que essa expressão é equivalente à função original:

$$= \frac{1}{10}\left(e^{\frac{x}{3}}\right)(\operatorname{sen}x - 3\cos x) + \frac{3}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen}x)\left(e^{\frac{x}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{10}e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x - \frac{3}{10}e^{\frac{x}{3}}\cos x + \frac{3}{10}e^{\frac{x}{3}}\cos x + \frac{9}{10}e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x$$

$$= \frac{1}{10}e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x + \frac{9}{10}e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x$$

$$= e^{\frac{x}{3}}\operatorname{sen}x$$

Capítulo 7

Substituição Trigonométrica: Conheça Todos os (Tri)Ângulos

Neste Capítulo

- Memorize as integrais trigonométricas básicas
- Integre potências de senos e cossenos, tangentes e secantes, e cotangentes e cossecantes
- Compreenda os três casos de uso da substituição trigonométrica
- Evite a substituição trigonométrica sempre que possível

A substituição trigonométrica é outra técnica para colocar em sua bagagem de truques de integração. Ela permite que você integre funções que contenham radicais de polinômios, como $\sqrt{4-x^2}$ e outras funções similares complicadas.

A substituição trigonométrica pode lhe fazer lembrar a substituição de variáveis, que discutimos no Capítulo 5. Com os dois tipos de substituição, você quebra a função que deseja integrar em pedaços e expressa cada pedaço em termos de uma nova variável. Com a substituição trigonométrica, contudo, você expressa esses pedaços como funções trigonométricas.

Então, antes que possa fazer a substituição trigonométrica, você precisa ser capaz de integrar uma variedade mais ampla de produtos e potências de funções trigonométricas. As primeiras partes deste capítulo fornecerão a você as habilidades de que precisa. Depois disso, ensinaremos como utilizar a substituição trigonométrica para expressar funções radicais, de aparência muito complicada, em termos de funções trigonométricas.

Integração das Seis Funções Trigonométricas

Você já sabe como integrar sen x e cos x desde o Capítulo 4, mas para completar, eis as integrais de todas as seis funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

Por favor, memorize-as — você necessitará delas! Para praticar, você também pode tentar diferenciar cada resultado para demonstrar porque cada uma dessas integrais está correta.

Integração de Potências de Senos e Cossenos

Mais adiante, neste capítulo, quando ensinaremos a substituição trigonométrica, você precisará saber como integrar potências de senos e cossenos em uma variedade de combinações. Nesta seção, mostraremos o que você precisa saber.

Potências ímpares de senos e cossenos

Você pode integrar *qualquer* função na forma $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$ quando m for ímpar, para qualquer valor real de n. Para fazer isso, tenha em mente a prática identidade trigonométrica de $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Por exemplo, eis como integrar $\operatorname{sen}^7 x \cos^{\frac{1}{3}} x$:

1. **Retire um sen x e coloque-o ao lado de dx:**

   $$\int \operatorname{sen}^7 x \cos^{\frac{1}{3}} x\, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^{\frac{1}{3}} x \operatorname{sen} x\, dx$$

2. **Aplique a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expressar como cosseno o restante dos senos na função.**

   $$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^3 \cos^{\frac{1}{3}} x \operatorname{sen} x\, dx$$

3. **Use a substituição de variáveis $u = \cos x$ e $du = -\operatorname{sen} x\, dx$:**

   $$= -\int \left(1 - u^2\right)^3 u^{\frac{1}{3}}\, du$$

Agora que você tem a função em termos de potências de u, o pior já passou. Você pode expandir a função transformando-a em um polinômio. Isso é apenas álgebra:

$$= -\int (1-u^2)(1-u^2)(1-u^2)\,u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= -\int (1-3u^2+3u^4-u^6)\,u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= -\int \left(u^{\frac{1}{3}}-3u^{\frac{7}{3}}+3u^{\frac{13}{3}}-u^{\frac{19}{3}}\right)du$$

Para continuar, use a Regra da Soma e a Regra do Múltiplo Constante para separar isso em quatro integrais, como demonstramos no Capítulo 4. Não se esqueça de distribuir os sinais de menos entre as quatro integrais!

$$= -\int u^{\frac{1}{3}}\,du + 3\int u^{\frac{7}{3}}\,du - 3\int u^{\frac{13}{3}}\,du + \int u^{\frac{19}{3}}\,du$$

Nesse ponto, você pode desenvolver cada integral separadamente, utilizando a Regra da Potência:

$$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{10}u^{\frac{10}{3}} - \frac{9}{16}u^{\frac{16}{3}} + \frac{3}{22}u^{\frac{22}{3}} + C$$

Finalmente, use $u = \cos x$ para reverter a substituição de variáveis:

$$= \frac{3}{4}\cos^{\frac{4}{3}} x + \frac{9}{10}\cos^{\frac{10}{3}} x - \frac{9}{16}\cos^{\frac{15}{3}} x + \frac{3}{22}\cos^{\frac{22}{3}} x + C$$

Perceba que ao substituir de volta os termos de x, a potência vai ao lado de cos em vez de x, pois você está elevando a função $\cos x$ inteira à potência. (Veja o Capítulo 2 se você não está certo desse ponto.)

Similarmente, você integra *qualquer* função na forma $\text{sen}^m x \cos^n x$ quando n é ímpar, para qualquer valor real de m. Esses passos são praticamente os mesmos daqueles do exemplo anterior. Por exemplo, eis como integrar $\text{sen}^{-4} x \cos^9 x$:

1. **Retire um $\cos x$ e coloque-o ao lado de dx:**

$$\int \text{sen}^{-4} x \cos^9 x\,dx = \int \text{sen}^{-4} x \cos^8 x \cos x\,dx$$

2. **Aplique a identidade trigonométrica $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ para expressar como seno o restante dos cossenos na função.**

$$= \int \text{sen}^{-4} x\,(1-\text{sen}^2 x)^4 \cos x\,dx$$

3. **Use a substituição de variáveis $u = \text{sen}\, x$ e $du = \cos x\,dx$:**

$$= \int u^{-4}(1-u^2)^4\,du$$

Nesse ponto, você pode distribuir a função para transformá-la em um polinômio, e integrá-la como ensinamos no exemplo anterior.

Potências pares de senos e cossenos

Para integrar $\text{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, use as duas identidades trigonométricas de meio ângulo que mostramos a você no Capítulo 2:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Por exemplo, eis como integrar $\cos^2 x$:

1. **Use a identidade de meio ângulo do cosseno para reescrever a integral em termos de cos $2x$:**

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx$$

2. **Use a Regra do Múltiplo Constante para mover o denominador para fora da integral:**

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x)\, dx$$

3. **Distribua a função e use a Regra da Soma para dividi-la em várias integrais:**

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1 dx + \int \cos 2x\, dx \right)$$

4. **Calcule as duas integrais separadamente:**

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\text{sen} 2x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\text{sen} 2x + C$$

Como um segundo exemplo, eis como você integra $\text{sen}^2 x \cos^4 x$:

1. **Use as duas identidades de meio-ângulo para reescrever a integral em termos de cos $2x$:**

$$\int \text{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

2. **Use a Regra do Múltiplo Constante para mover o denominador para fora da integral:**

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2\, dx$$

3. **Distribua a função e use a Regra da Soma para dividi-la em várias integrais:**

$$= \frac{1}{8}\left(\int 1 dx + \int \cos 2x\, dx - \int \cos^2 2x\, dx - \int \cos^3 2x\, dx \right)$$

4. **Resolva os integrais de potências ímpares resultantes com o uso do procedimento da seção anterior "Potências ímpares de senos e cossenos" e resolva os integrais de potências pares retornando ao passo 1 do exemplo anterior.**

Integração de Potências de Tangentes e Secantes

Quando você está integrando potências de tangentes e secantes, eis aqui uma regra para lembrar: Potências *paaares* de *secaaantes* são *fáááceis*. Os três as nas palavras-chaaave devem ajudá-lo a lembrar essa regra. A propósito, potências ímpares de tangentes também são fáceis. Você deve se virar para se lembrar disso!

Nesta seção, ensinaremos a integrar $\tan^m x \sec^n x$ para todos os valores positivos inteiros de m e n. Você fará uso dessa habilidade mais tarde, neste capítulo, quando mostraremos a você como fazer a substituição trigonométrica.

Potências pares de secantes com tangentes

Para integrar $\tan^m x \sec^n x$ quando n é par — por exemplo, $\tan^8 x \sec^6 x$ — siga os seguintes passos:

1. **Retire um $\sec^2 x$ e coloque-o ao lado de dx:**

$$\int \tan^8 x \sec^6 x \, dx = \int \tan^8 x \sec^4 x \sec^2 x \, dx$$

2. **Use a identidade trigonométrica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ para expressar os fatores remanescentes da secante em termos de tangentes:**

$$= \int \tan^8 x \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \sec^2 x \, dx$$

3. **Use a substituição de variáveis $u = \tan x$ e $du = \sec^2 x \, dx$:**

$$\int u^8 \left(1 + u^2\right)^2 du$$

Nesse ponto, a integral é um polinômio, e você pode resolvê-la como demonstramos no Capítulo 4.

Potências ímpares de tangentes com secantes

Para integrar $\tan^m x \sec^n x$ quando m é ímpar — por exemplo, $\tan^7 x \sec^9 x$ — siga estes passos:

1. **Retire uma tan x e uma sec x e coloque-as ao lado de dx:**

$$\int \tan^7 x \sec^9 x = \int \tan^6 x \sec^8 x \sec x \tan x \, dx$$

2. **Use a identidade trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores remanescentes da tangente em termos de secantes:**

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^3 \sec^8 x \sec x \tan x \, dx$$

3. **Use a substituição de variáveis $u = \sec x$ E $du = \sec x \tan x \, dx$:**

$$= \int \left(u^2 - 1\right)^3 u^8 \, du$$

Agora, a integral é um polinômio, e você pode resolvê-la como ensinamos no Capítulo 4.

Potências ímpares de tangentes sem secantes

Para integrar $\tan^m x$ quando m é ímpar, utilize uma identidade trigonométrica para converter a função em senos e cossenos, como segue:

$$\int \tan^m x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^m x} dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{-m} x \, dx$$

Depois disso, você pode integrar usando o procedimento da seção anterior, "Potências ímpares de senos e cossenos".

Potências pares de tangentes sem secantes

Para integrar $\tan^m x$ quando m é par — por exemplo, $\tan^8 x$ — siga os seguintes passos:

1. **Retire uma $\tan^2 x$ e use a identidade trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressá-la em termos de tan x:**

$$\int \tan^8 x \, dx = \int \tan^6 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

2. **Distribua para dividir a integral em duas integrais separadas:**

$$= \int \tan^6 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^6 x \, dx$$

3. **Desenvolva a primeira integral usando o procedimento que mostramos a você na seção anterior "Potências ímpares de secantes com tangentes".**
4. **Volte ao passo 1 para resolver a segunda integral.**

Potências pares de secantes sem tangentes

Para integrar $\sec^n x$ quando n é par — por exemplo, $\sec^4 x$ — siga estes passos:

1. **Use a identidade trigonométrica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ para expressar a função em termos de tangentes:**

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \left(1+\tan^2 x\right)^2 dx$$

2. **Distribua e divida a integral em três ou mais integrais:**

$$= \int 1dx + 2\int \tan^2 x\,dx + \int \tan^4 x\,dx$$

3. **Integre todas as potências de tangentes utilizando os procedimentos da seção sobre potências de tangentes sem secantes.**

Potências ímpares de secantes sem tangentes

Esse é o caso mais difícil, então aperte os cintos. Para integrar $\sec^n x$ quando n é ímpar — por exemplo, $\sec^3 x$ — siga estes passos:

1. **Retire uma sec x:**

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x \sec x\,dx$$

2. **Use a identidade trigonométrica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ para expressar as secantes remanescentes em termos de tangentes:**

$$= \int \left(1+\tan^2 x\right)\sec x\,dx$$

3. **Distribua e divida a integral em duas ou mais integrais:**

$$= \int \sec x + \int \tan^2 x \sec x\,dx$$

4. **Desenvolva a primeira integral:**

$$= \ln\left|\sec x + \tan x\right| + \int \tan^2 x \sec x\,dx$$

Você pode omitir a constante C, pois você ainda tem uma integral que ainda não desenvolveu — só não se esqueça de colocá-la ao final.

5. **Integre a segunda integral por partes, diferenciando tan x e integrando sec x tan x (veja o Capítulo 6 para saber mais sobre integração por partes):**

$$= \ln|\sec x + \tan x| + \tan x \sec x - \int \sec^3 x\, dx$$

Nesse ponto, perceba que você demonstrou ser verdadeira a seguinte equação:

$$\int \sec^3 x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + \tan x \sec x - \int \sec^3 x\, dx$$

6. **Siga o procedimento algébrico que destacamos no Capítulo 6.**

Primeiro, substitua a variável I pela integral em ambos os lados da equação:

$$I = \ln|\sec x + \tan x| + \tan x \sec x - I$$

Agora, resolva a equação para encontrar I:

$$2I = \ln|\sec x + \tan x| + \tan x \sec x$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\tan x \sec x$$

Agora, você pode substituir de volta a integral por I. Não se esqueça, contudo, de que precisa adicionar uma constante ao lado direito dessa equação, para cobrir todas as soluções possíveis da integral:

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\tan x \sec x + C$$

Essa é sua resposta final. Realmente esperamos que você nunca tenha de integrar $\sec^5 x$, deixe em paz potências ímpares de alto valor em secantes. Mas se você precisar, o procedimento básico que destacamos aqui irá fornecer um valor para $\int \sec^5 x\, dx$ em termos de $\int \sec^3 x\, dx$. Boa sorte!

Potências pares de tangentes com potências ímpares de secantes

Para integrar $\tan^m x \sec^n x$ quando m é par e n é ímpar, transforme a função em uma potência ímpar de secante, e então utilize o método que destacamos na seção anterior "Potências ímpares de secantes sem tangentes".

Por exemplo, eis como integrar $\tan^4 x \sec^3 x$:

1. **Use a confiável identidade trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para converter todas as tangentes em secantes:**

$$\int \tan^4 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^3 x\, dx$$

2. **Distribua a função e divida a integral utilizando a Regra da Soma:**

$$= \int \sec^7 x\,dx - \int 2\sec^5 x\,dx + \int \sec^3 x\,dx$$

3. **Resolva os integrais de potências ímpares resultantes utilizando o procedimento de "Potências ímpares de secantes sem tangentes".**

Infelizmente, esse procedimento leva você de volta para o caso mais difícil desta seção. Felizmente, a maioria dos professores é piedosa quando você está trabalhando com essas funções, então provavelmente você não terá de encarar essa integral em um exame. Caso isso aconteça, contudo, você tem a nossa profunda simpatia.

Integração de Potências de Cotangentes e Cossecantes

Os métodos para integração de potências de cotangentes e cossecantes são muito próximos daqueles para tangentes e secantes, os quais mostramos na seção anterior. Por exemplo, na seção "Potências pares de secantes com tangentes", ensinamos a integrar $\tan^8 x \sec^6 x$. Eis como integrar $\cot^8 x \csc^6 x$:

1. **Extraia uma $\csc^2 x$ e coloque-a ao lado de dx:**

$$\int \cot^8 x \csc^6 x\,dx = \int \cot^8 x \csc^4 x \csc^2 x\,dx$$

2. **Use a identidade trigonométrica $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ para expressar os fatores remanescentes da cossecante em termos de cotangentes:**

$$= \int \cot^8 x \left(1 + \cot^2 x\right)^2 \csc^2 x\,dx$$

3. **Use a substituição de variáveis $u = \cot x$ e $du = -\csc^2 x\,dx$:**

$$= -\int u^8 \left(1 + u^2\right)^2 du$$

Nesse ponto, a integral é um polinômio, e você pode resolvê-la como demonstramos no Capítulo 4.

Perceba que os passos são virtualmente idênticos àqueles para tangentes e secantes. A maior mudança aqui é a introdução de um sinal de menos no passo 3. Então, para descobrir tudo que você precisa saber sobre a integração de cotangentes e cossecantes, tente todos os exemplos da seção anterior, mas mude cada tangente para uma cotangente e cada secante para cossecante.

Algumas vezes, saber como integrar cotangentes e cossecantes pode ser útil para integrar potências negativas de outras funções trigonométricas — quer dizer, potências de funções trigonométricas no denominador de uma fração.

Por exemplo, suponha que você deseje integrar $\frac{\cos^2 x}{-\text{sen}^6 x}$. Os métodos que destacamos anteriormente não funcionam muito bem nesse caso, mas você pode usar identidades trigonométricas para expressar isso como cotangentes e cossecantes.

$$\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^6 x} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^4 x} = \cot^2 x \csc^4 x$$

Falamos mais sobre isso na próxima seção "Integração de combinações estranhas de funções trigonométricas".

Integração de Combinações Estranhas de Funções Trigonométricas

Você não precisa realmente saber como integrar *cada* possível função trigonométrica para passar em Cálculo II. Se você consegue realizar todas as técnicas que introduzimos anteriormente neste capítulo — e admitimos que isso é pedir muito — então você será capaz de lidar, facilmente, com a maior parte dos desafios que seus professores lançarem. Você também tem uma boa chance de acertar em seu exame.

Mas no caso de você estar nervoso com o exame e preferir estudar a se preocupar, nesta seção ensinaremos a integrar uma variedade mais ampla de funções trigonométricas. Não prometemos abordar *todas* as possíveis funções trigonométricas de forma exaustiva. Mas ofereceremos algumas formas adicionais de pensar e categorizar funções trigonométricas que possam ajudá-lo quando você está em território desconhecido.

Uso de identidades trigonométricas para ajustar funções

Você pode expressar cada produto de potências de funções trigonométricas, não importa quão estranho seja, como o produto de qualquer par de funções trigonométricas. Os três pares mais úteis (como você pode lembrar no começo do capítulo) são o seno e cosseno, a tangente e a secante e cotangente e a cossecante. A Tabela 7-1 mostra como expressar todas as seis funções trigonométricas em cada um desses pares.

Tabela 7-1 Expressão das Seis Funções Trigonométricas como um Par de Funções Trigonométricas

Funções Trigonométricas	*Como Senos & Cossenos*	*Como Tangentes & Secantes*	*Como cotangentes & Cossecantes*
$\text{sen}\, x$	$\text{sen}\, x$	$\frac{\tan x}{\sec x}$	$\frac{1}{\csc x}$
$\cos x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sec x}$	$\frac{\cot x}{\csc x}$
$\tan x$	$\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$
$\sec x$	$\frac{1}{\cos x}$	$\sec x$	$\frac{\csc x}{\cot x}$
$\csc x$	$\frac{1}{\text{sen}\, x}$	$\frac{\sec x}{\tan x}$	$\csc x$

Por exemplo, observe a seguinte função:

$$\frac{\cos x \cot^3 x \csc^2 x}{\text{sen}^2 x \tan x \sec x}$$

Como está, você não pode fazer muito para integrar esse monstro. Mas tente expressá-lo em termos de cada par possível de funções trigonométricas:

$$= \frac{\cos^6 x}{\text{sen}^8 x}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{\tan^8 x}$$

$$= \cot^6 x \csc^2 x$$

Como foi demonstrado, o par mais útil para a integração desse caso é $\cot^6 x \csc^2 x$. Nenhuma fração está presente — quer dizer, ambos os termos estão elevados a potências positivas — e o termo cossecante está elevado a uma potência par, então você pode usar o mesmo procedimento básico que ensinamos na seção anterior, "Potências pares de secantes com tangentes".

Uso da Substituição Trigonométrica

A substituição trigonométrica é similar à substituição de variáveis (que já discutimos no Capítulo 5), utilizando uma mudança na variável para transformar uma função que você não pode integrar para uma que você possa. Com a substituição de variáveis, você utiliza tipicamente a variável u. Com a substituição trigonométrica, contudo, você utilizará normalmente a variável θ.

A substituição trigonométrica permite que você integre uma enorme quantidade de funções que você não poderia integrar de outra maneira. Essas funções têm uma aparência especial, unicamente assustadora, e são variações destes três temas:

$(a^2 - bx^2)^n$

$(a^2 + bx^2)^n$

$(bx^2 - a^2)^n$

DICA

A substituição trigonométrica é mais útil quando n é $\frac{1}{2}$ ou um número negativo — quer dizer, para complicadas raízes quadradas e polinômios no denominador de uma fração. Quando n é um inteiro positivo, sua melhor saída é expressar a função como um polinômio e integrá-la como ensinamos no Capítulo 4.

Nesta seção, mostraremos como usar a substituição trigonométrica para integrar funções como essas. Mas, antes de começar, faça este simples teste:

A substituição trigonométrica é:

- A) Fácil e *divertida* — até uma criança consegue fazê-la!
- B) Não é tão ruim quando você sabe como fazer.
- C) É quase tão atraente quanto beber água sanitária.

Gostaríamos de dizer que a resposta é A, mas aí seríamos grandes mentirosos e você nunca mais confiaria em nós novamente. Então, admitimos que a substituição trigonométrica é menos divertida do que uma festa de formatura com uma bela companhia. Ao mesmo tempo, seus piores pesadelos com substituição trigonométrica não têm de se tornar reais, então, por favor, coloque a garrafa de água sanitária de volta na lavanderia.

Temos o sistema bem aqui, e se você segui-lo atentamente, oferecemos a ferramenta de que você precisa para tornar a maior parte da substituição trigonométrica uma questão de preencher as lacunas. Pode confiar — mentimos alguma vez?

Diferencie os três casos de substituição trigonométrica

A substituição trigonométrica é útil para integrar funções que contenham três tipos altamente reconhecíveis de polinômios no numerador ou no denominador. A Tabela 7-2 lista os três casos que você precisa conhecer.

Tabela 7-2 Os Três Casos de Substituição Trigonométrica

Caso	*Radical do polinômio*	*Exemplo*
Caso seno	$(a^2 - bx^2)^n$	$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$
Caso tangente	$(a^2 + bx^2)^n$	$\int \frac{1}{(4 + 9x^2)^2}\,dx$
Caso secante	$(bx^2 - a^2)^n$	$\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}}\,dx$

O primeiro passo da substituição trigonométrica é ser capaz de reconhecer e distinguir esses três casos quando avistá-los.

Conhecer as fórmulas para diferenciar o inverso das funções trigonométricas pode ajudá-lo a se lembrar desses casos.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Perceba que a fórmula da diferenciação para arcsen x contém um polinômio que se parece com o caso do cosseno: uma constante menos x^2. E a fórmula para o arctan x contém um polinômio que se parece com o caso da tangente: uma constante mais x^2. E a fórmula para arcsec x contém um polinômio que se parece com o caso da secante: x^2 menos uma constante. Então, se você já conhece essas fórmulas, não tem de memorizar qualquer informação adicional.

Integração dos três casos

A substituição trigonométrica é um processo em cinco passos:

1. Desenhar o triângulo da substituição trigonométrica para o caso correto.
2. Identificar os pedaços separados da integral (incluindo dx) que você precisa expressar em termos de θ.
3. Expressar esses pedaços em termos de funções trigonométricas de θ.
4. Reescrever a integral em termos de θ e resolvê-la.
5. Substituir *θ* por *x* no resultado.

Não se preocupe se esses passos ainda não fazem muito sentido. Nesta seção, ensinaremos a você como fazer a substituição trigonométrica para cada um dos três casos.

O caso seno

Quando a função que você está integrando incluir um termo na forma $(a^2 - bx^2)^n$, desenhe seu triângulo de substituição trigonométrica para o caso seno. Por exemplo, suponha que você deseja resolver a seguinte integral:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Esse é um caso seno, pois uma constante menos um múltiplo de x^2 está sendo elevada a uma potência $(\frac{1}{2})$. Eis como você utiliza a substituição trigonométrica para fazer o serviço:

1. **Desenhe o triângulo de substituição trigonométrica para o caso correto.**

   A Figura 7-1 ensina você a preencher o triângulo para o caso do seno. Perceba que aquele radical vai ao lado *adjacente* do triângulo. Então, para preencher os dois outros lados do triângulo, utilizamos as raízes quadradas dos dois termos fora do radical — isto é, 2 e x. Colocamos o 2 na hipotenusa e o x no lado oposto.

   DICA

   Você pode verificar para se assegurar de que esse posicionamento está correto, usando o teorema de Pitágoras: $x^2 + \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = 2^2$.

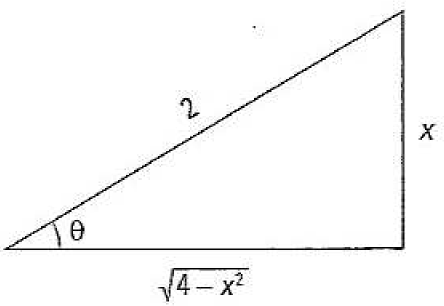


Figura 7-1: Uma substituição trigonométrica para o caso seno.

2. **Identifique os pedaços separados da integral (incluindo dx) que você precisa expressar em termos de θ.**

   Neste caso, a função tem dois pedaços separados que contém x: $\sqrt{4-x^2}$ e dx.

3. **Expresse esses pedaços em termos de funções trigonométricas de θ.**

   Esse é o verdadeiro trabalho da substituição trigonométrica, mas quando seu triângulo está ajustado adequadamente, esse trabalho se torna muito mais fácil. No caso seno, *todas* as funções trigonométricas deveriam ser senos e cossenos.

Para representar o pedaço com radical como uma função trigonométrica de θ, primeiro construa uma fração usando o radical $\sqrt{4-x^2}$ como o numerador e a constante 2 como denominador. Então, iguale essa fração à função trigonométrica adequada:

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \cos\theta$$

Já que o numerador é o lado adjacente do triângulo e o denominador é a hipotenusa $(\frac{A}{H})$, essa fração é igual a csc θ. Agora, um pouco de álgebra deixa o radical sozinho de um lado da equação:

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

A seguir, você deseja expressar dx como uma função trigonométrica de θ. Para fazer isso, construa outra fração com a variável x no numerador e a constante 2 no denominador. Então iguale essa fração à correta função trigonométrica:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\theta$$

Dessa vez, o numerador é o lado oposto do triângulo e o denominador é a hipotenusa $(\frac{O}{H})$, então essa fração é igual a sen θ. Agora, resolva para encontrar x e diferencie:

$$x = 2\operatorname{sen}\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

4. **Reescreva a integral em termos de θ e a resolva:**

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4\int \cos^2\theta\, d\theta$$

Saber como desenvolver integrais trigonométricas realmente vale a pena aqui. Fomos direto ao ponto nesse exemplo, mas anteriormente neste capítulo (em "Integração de potências de senos e cossenos"), ensinamos você a integrar todos os tipos de funções trigonométricas, como esta aqui:

$$= 2\theta + \operatorname{sen}2\theta + C$$

5. **Para mudar esses dois termos θ para termos de x, reutilize a seguinte equação:**

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$$

Então, eis a substituição que lhe dá a resposta:

$$= 2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} + \mathrm{sen}(2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2}) + C$$

Essa resposta é perfeitamente válida, então, em termos técnicos, você pode parar por aqui. Contudo, alguns professores franzem a testa quando se deparam com ninhos de funções trigonométricas e o inverso de funções trigonométricas, de forma que eles preferirão versões simplificadas de $\mathrm{sen}(2\,\mathrm{arcsen}\frac{x}{2})$. Para encontrar isso, comece aplicando a fórmula do seno de ângulo duplo (veja o Capítulo 2) para o sen θ:

$$\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\theta\,\cos\theta$$

Agora, use seu triângulo de substituição trigonométrica para substituir valores de sen θ e cos θ em termos de x:

$$=2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$$

Para acabar, substitua essa expressão para o segundo termo problemático, a fim de obter sua resposta final de uma forma simplificada:

$$2\theta + \mathrm{sen}\,2\theta + C$$

$$=2\mathrm{arcsen}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$$

O caso tangente

Quando a função que você está integrando inclui um termo na forma $(a^2 + x^2)^n$, desenhe seu triângulo de substituição trigonométrica para o *caso tangente*. Por exemplo, suponha que você deseje desenvolver a seguinte integral:

$$\int \frac{1}{(4+9x^2)^2}\,dx$$

Esse é um caso tangente, pois uma constante mais um múltiplo de x^2 estão sendo elevados a uma potência (-2). Eis como você utiliza a substituição trigonométrica para integrar:

1. **Desenhe o triângulo de substituição trigonométrica para o caso tangente:**

   A Figura 7-2 mostra como preencher o triângulo para o caso tangente. Perceba que o radical daquilo que está dentro do parêntese fica na *hipotenusa* do triângulo. Então, para preencher os outros dois lados da figura, use as raízes quadradas dos dois termos dentro do radical — quer dizer, 2 e $3x$. Coloque o termo constante 2 no lado adjacente e o termo da variável $3x$ no lado oposto.

Com o caso tangente, assegure-se de não misturar o posicionamento da variável e da constante.

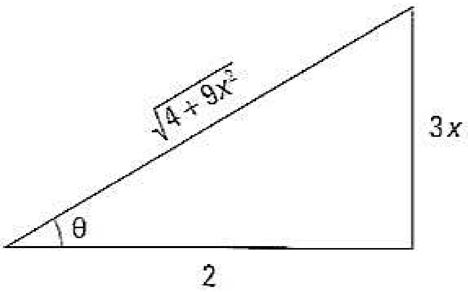


Figura 7-2: Um triângulo de substituição trigonométrica para o caso tangente.

2. **Identifique os pedaços separados da integral (incluindo *dx*) que você precisa expressar em termos de θ.**

   Nesse caso, a função contém dois pedaços separados que contêm x: $\frac{1}{(4+9x^2)^2}$ e dx.

3. **Expresse esses pedaços em termos de funções trigonométricas de θ.**

   No caso tangente, *todas* as funções trigonométricas deveriam ser inicialmente expressas como tangentes e secantes.

   Para representar a porção racional como uma função trigonométrica de θ, construa uma fração utilizando o radical $\sqrt{4+9x^2}$ como numerador e a constante 2 como denominador. Então, iguale essa fração à função trigonométrica apropriada:

   $$\frac{\sqrt{4+9x^2}}{2} = \sec\theta$$

   Como essa fração é a hipotenusa do triângulo sobre o lado adjacente $\left(\frac{H}{A}\right)$, ela é igual a sec θ. Agora, use a álgebra e as identidades trigonométricas para ajustar essa equação no formato:

   $$\sqrt{4+9x^2} = 2\sec\theta$$
   $$(4+9x^2)^2 = 8\sec^4\theta$$
   $$\frac{1}{(4+9x^2)^2} = \frac{1}{8\sec^4\theta}$$

   A seguir, expresse dx como uma função trigonométrica de θ. Para fazer isso, construa outra fração com a variável $3x$ no numerador e a constante 2 no denominador:

   $$\frac{3x}{2} = \tan\theta$$

Dessa vez, a fração é o lado oposto do triângulo sobre o lado adjacente ($\frac{O}{A}$), então ela é igual a θ. Agora, encontre x e então diferencie:

$$x = \frac{2}{3}\tan\theta$$

$$dx = \frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

4. **Expresse a integral em termos de θ e então resolva:**

$$\int \frac{1}{\left(4+9x^2\right)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{8\sec^4\theta}\cdot\frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

Agora, cancelar termos e reorganizá-los torna essa integral de aparência complicada em algo manuseável:

$$= \frac{1}{12}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

Nesse ponto, use suas habilidades da seção anterior "Potências pares de senos e cossenos" para resolver esta integral:

$$= \frac{1}{24}\theta + \frac{1}{48}\mathrm{sen}2\theta + C$$

5. **Mude os dois termos θ de volta para termos x:**

Você precisa encontrar uma forma de expressar θ em termos de x. Eis a forma mais simples:

$$\tan\theta = \frac{3x}{2}$$

$$\theta = \arctan\frac{3x}{2}$$

Então, eis uma substituição que fornece uma resposta:

$$\frac{1}{24}\theta + \frac{1}{48}\mathrm{sen}2\theta + C = \frac{1}{24}\arctan\frac{3x}{2} + \frac{1}{48}\mathrm{sen}\left(2\arctan\frac{3x}{2}\right) + C$$

Essa resposta é válida, mas a maioria dos professores não será fã daquele horrível segundo termo, com o seno de um arco tangente. Para simplificá-lo, aplique a fórmula do seno de ângulo duplo (veja o Capítulo 2) para $\frac{1}{48}$ sen 2θ:

$$\frac{1}{48}\mathrm{sen}2\theta = \frac{1}{24}\mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

Agora, use seu triângulo de substituição trigonométrica para substituir valores para sen θ e cos θ em termos de x:

$$=\frac{1}{24}\left(\frac{3x}{\sqrt{4+9x^2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4+9x^2}}\right)$$
$$=\frac{6x}{24(4+9x^2)}$$
$$=\frac{x}{(16+36x^2)}$$

Finalmente, utilize esse resultado para expressar a resposta em termos de x:

$$\frac{1}{24}\theta+\frac{1}{48}\text{sen}2\theta+C$$
$$=\frac{1}{24}\arctan\frac{3x}{2}+\frac{x}{(16+36x^2)}+C$$

O caso secante

Quando a função que você está integrando incluir um termo no formato $(bx^2-a^2)^n$, trace seu triângulo de substituição trigonométrica para o *caso secante*. Por exemplo, suponha que você deseje resolver esta integral:

$$\int\frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx$$

Esse é um caso secante, pois um múltiplo de x^2 menos uma constante está sendo elevado a uma potência $(-\frac{1}{2})$. Integre utilizando a substituição trigonométrica como se segue:

1. **Trace o triângulo de substituição trigonométrica para o caso secante.**

   A Figura 7-3 mostra como preencher o triângulo para o caso secante. Perceba que o radical vai do lado *oposto* do triângulo. Então, para preencher os outros dois lados do triângulo, use as raízes quadradas dos dois termos dentro do radical — quer dizer, 1 e $4x$. Coloque a constante 1 no lado adjacente e a variável $4x$ na hipotenusa.

   DICA

   Você pode verificar para ter certeza de que essa disposição está correta utilizando o teorema de Pitágoras: $1^2+\left(\sqrt{16x^2-1}\right)^2=(4x)^2$.

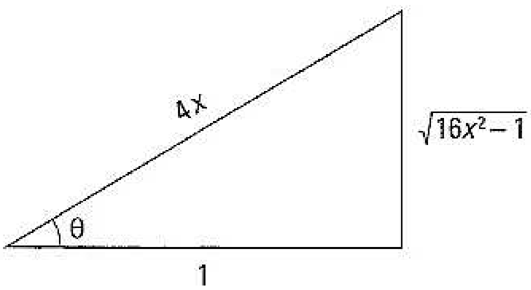


Figura 7-3: Um triângulo de substituição trigonométrica para o caso secante.

2. **Identifique os pedaços separados da integral (incluindo *dx*) que você precisa expressar em termos de θ.**

   Nesse caso, a função tem dois pedaços separados que contêm *x*: $\frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}$ e *dx*.

3. **Expresse esses pedaços em termos de funções trigonométricas de θ.**

   No caso secante (assim como no caso tangente), *todas* as funções deveriam inicialmente ser representadas como tangentes e secantes.

   Para representar o pedaço do radical como uma função trigonométrica de θ, construa uma fração utilizando o radical $\sqrt{16x^2-1}$ como numerador e a constante 2 como denominador. Então iguale essa fração à função trigonométrica apropriada:

   $$\frac{\sqrt{16x^2-1}}{1} = \tan\theta$$

   Perceba que essa fração é o lado oposto do triângulo sobre o lado adjacente ($\frac{O}{A}$), então ele se iguala à tan θ. Simplicando-o um pouco, ele fornece esta equação:

   $$\frac{1}{\sqrt{16x^2-1}} = \frac{1}{\tan\theta}$$

   A seguir, expresse *dx* como uma função trigonométrica de θ. Para fazer isso, construa outra fração com a variável *x* no numerador e a constante 1 no denominador:

   $$\frac{4x}{1} = \sec\theta$$

   Dessa vez, a fração é a hipotenusa sobre o lado adjacente do triângulo ($\frac{H}{A}$), que se iguala a sec 0. Agora, encontre *x* e diferencie para encontrar *dx*:

   $$x = \frac{1}{4}\sec\theta$$

   $$dx = \frac{1}{4}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

4. **Expresse a integral em termos de θ e resolva-a:**

   $$\int \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{\tan\theta}\cdot\frac{1}{4}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

   $$= \frac{1}{4}\int \sec\theta\, d\theta$$

   Agora, use a fórmula para a integral da função secante de "Integração das seis funções trigonométricas", anteriormente neste capítulo:

   $$= \frac{1}{4}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

5. **Mude os dois termos θ de volta para os termos x:**

Neste caso, você não tem de encontrar o valor de θ, pois você já conheceu os valores de sec θ e tan θ em termos de x no passo 3. Então, substitua esses dois valores para obter sua resposta final:

$$= \frac{1}{4} \ln \left| 4x + \sqrt{16x^2 - 1} \right| + C$$

Saiba quando evitar a substituição trigonométrica

Agora que você sabe quando utilizar a substituição trigonométrica, mostraremos uma habilidade que pode ser ainda mais útil: *evitar* a substituição trigonométrica quando ela não for necessária. Por exemplo, observe a seguinte integral:

$$\int \left(1 - 4x^2\right)^2 dx$$

Ela pode parecer um bom local para utilizar a substituição trigonométrica, mas é um lugar ainda melhor para utilizar um pouco de álgebra para expandir o problema em um polinômio:

$$= \int \left(1 - 8x^2 + 16x^4\right) dx$$

Da mesma forma, observe esta integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 49}} dx$$

Você pode utilizar a substituição trigonométrica para resolver essa integral se desejar. (Você pode também subir pelas escadas até o topo do Empire State Building em vez de pegar o elevador, se isso lhe convém.) Contudo, a presença daquele pequeno x no numerador deveria ser a dica de que a substituição de variáveis funcionaria da mesma forma (veja o Capítulo 5 para saber mais sobre substituição de variáveis):

Sendo $u = x^2 - 49$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\,du = x\,dx$

Utilizar a substituição resulta na seguinte integral:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \sqrt{u} + C$$

$$= \sqrt{x^2 - 49} + C$$

Pronto! Provavelmente não precisaremos contar quanto tempo e trabalho você pode economizar agindo de forma inteligente em vez de pegar no pesado. Então, não contaremos!

Capítulo 8

Quando Tudo Mais Falhar: Integração com Frações Parciais

Neste Capítulo

- Reescreva frações complicadas como a soma de duas ou mais frações parciais
- Saiba como usar frações parciais em quatro casos distintos
- Integre com frações parciais
- Uso das frações parciais com expressões racionais impróprias

Vamos dizer a verdade: a esta altura de sua carreira matemática, você tem coisas maiores para se preocupar do que somar um par de frações. E se você sobreviveu à integração por partes (Capítulo 6) e à integração trigonométrica (Capítulo 7), multiplicar alguns polinômios também não matará você.

Então, eis as boas notícias sobre frações parciais: elas estão baseadas em simples aritmética e álgebra. Neste capítulo, introduziremos o básico das frações parciais e ensinaremos você a utilizá-las para resolver integrais. Ilustramos quatro casos separados, nos quais as frações parciais podem ajudá-lo a integrar funções que, de outra forma, seriam uma grande bagunça.

Agora, aqui vão as más notícias: Embora o conceito de frações parciais não seja difícil, usá-las na integração é uma das coisas mais tediosas que você encontrará neste livro. E, como se isso não fosse suficiente, as frações parciais funcionam apenas com funções racionais *próprias*, então ensinaremos você a distingui-las de suas primas mal-humoradas, as funções racionais *impróprias*. Também ofereceremos uma volta ao passado para relembrar a *divisão polinomial*, o que prometemos ser mais fácil do que você pode se lembrar.

Estranho, mas Verdade: Compreenda as Frações Parciais

As frações parciais são úteis para integrar *funções racionais* – quer dizer, funções nas quais um polinômio é dividido por um polinômio. A tática básica por trás das frações parciais é a de dividir uma função racional que você não consegue integrar em duas ou mais funções simples que você possa integrar.

Nesta seção, mostraremos uma simples analogia das frações parciais que envolve apenas aritmética. Depois que você compreender essa analogia, as frações parciais farão muito mais sentido. Ao final da seção, ensinaremos você a resolver uma integral com o uso das frações parciais.

Observe as frações parciais

Suponha que você deseje dividir a fração $\frac{14}{15}$ em uma soma de duas frações menores. Comece por decompor o denominador em seus fatores — 3 e 5 — e ajustar o denominador dessas duas frações menores nestes números:

$$\frac{14}{15} = \frac{A}{3} + \frac{B}{5} = \frac{5A + 3B}{15}$$

Então, você deseja encontrar A e B que satisfaçam essa equação:

$$5A + 3B = 14$$

Agora, só de olhar essa fração, você provavelmente pode encontrar a perfeita solução inteira, $A = 1$ e $B = 3$, então:

$$\frac{14}{15} = \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$$

Se você incluir frações negativas, pode encontrar soluções integrais como essa para cada fração. Por exemplo, a fração $\frac{1}{15}$ parece ser pequena demais para ser uma soma de terços e quintos, até você descobrir que:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$$

Uso de frações parciais com expressões racionais

A técnica de quebrar frações funciona com expressões racionais. Ela pode fornecer uma estratégia para integrar funções que talvez você não possa calcular diretamente. Por exemplo, suponha que você está tentando encontrar a seguinte integral:

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$$

Você não pode integrar essa função diretamente, mas se você quebrá-la na soma de duas expressões racionais mais simples, você pode utilizar a Regra da Soma para resolvê-las separadamente. E, felizmente, o polinômio no denominador é facilmente fatorado:

$$\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x+3)(x-3)}$$

Então, ajuste essa fração polinomial da mesma forma que fizemos com a fração comum da seção anterior:

$$\frac{6}{(x+3)(x-3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}$$

$$=\frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

Isso resulta na seguinte equação:

$$A(x-3)+B(x+3)=6$$

Essa equação funciona para *todos* os valores de x. Você pode aproveitar esse fato para encontrar os valores de A e B, escolhendo valores adequados para x. Para resolver essa equação e encontrar A e B, substitua as raízes do polinômio original (3 e -3) por x e observe o que acontece:

$$A(3-3)+B(3+3)=6 \qquad A(-3-3)+B(-3+3)=6$$

$$6B=6 \qquad -6A=6$$

$$B=1 \qquad A=-1$$

Agora substitua esses valores de A e B de volta nas expressões racionais:

$$\frac{6}{(x+3)(x-3)}=-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}$$

Essa soma de duas expressões racionais é muito mais amistosa para integrar do que aquela com que você começou. Utilize a Regra da Soma seguida por uma simples substituição de variável (veja o Capítulo 5):

$$\int \left(-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=-\int \frac{1}{x+3}\,dx+\int \frac{1}{x-3}\,dx$$
$$=-\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$$

Assim como nas frações comuns, você nem sempre pode quebrar uma expressão racional dessa maneira. Mas, em quatro casos distintos, os quais discutiremos na próxima seção, você pode utilizar essa técnica para integrar funções racionais complicadas.

Resolva Integrais com o Uso das Frações Parciais

Na seção anterior, ensinamos você a utilizar as frações parciais para dividir uma função racional complicada em várias funções menores e mais maleáveis. Embora essa técnica certamente possa impressionar seus amigos, você pode estar se perguntando se vale a pena aprendê-la.

O resultado aparece quando você começa a integrar. Em muitos momentos, você pode integrar uma grande função racional ao quebrá-la na soma de vários pedaços pequenos. Eis uma pequena olhada no uso das frações parciais para integrar uma expressão racional:

1. **Ajuste a expressão racional como uma soma de frações parciais com incógnitas (*A*, *B*, *C*, e assim por diante) nos numeradores.**

   Chamamos de *incógnitas* em vez de variáveis para distingui-las de x, que continua sendo a variável do problema completo.

2. **Encontre os valores de todas as incógnitas e substitua-os nas frações parciais.**

3. **Integre as frações parciais separadamente por qualquer método que funcione.**

Nesta seção, nos concentramos nesses três passos. Mostramos a você como transformar uma função racional complicada em uma soma de funções racionais mais simples e como substituir as incógnitas (como *A*, *B*, *C*, e assim por diante) por números. Finalmente, oferecemos algumas técnicas importantes para integrar os tipos de funções racionais simples que você verá com frequência ao utilizar as frações parciais.

Ajuste de frações parciais caso a caso

Ajustar uma soma de frações parciais não é difícil, mas há quatro casos distintos a observar. Cada caso resulta em um ajuste diferente — alguns mais fáceis que outros.

DICA

Tente se familiarizar com esses quatro casos, pois os utilizaremos durante todo o capítulo. Seu primeiro passo, em qualquer problema que envolva frações parciais, é o de reconhecer com qual caso você está lidando, de forma que possa resolver o problema.

Cada um desses casos está listado na Tabela 8-1.

Tabela 8-1 Os Quatro Casos de Ajuste de Frações Parciais

Caso	*Exemplo*	*Como Fração Parcial*
Caso #1: Fatores lineares distintos	$\frac{x}{(x+4)(x-7)}$	$\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-7}$
Caso #2: Fatores quadráticos irredutíveis distintos	$\frac{8}{(x^2+3)(x^2+9)}$	$\frac{A+Bx}{(x^2+3)}+\frac{C+Dx}{(x^2+9)}$
Caso #3: Fatores lineares repetidos	$\frac{2x+2}{(x+5)^2}$	$\frac{A}{x+5}+\frac{B}{(x+5)^2}$
Caso #4: Fatores quadráticos repetidos	$\frac{x^2-2}{(x^2+6)^2}$	$\frac{A+Bx}{x^2+6}+\frac{C+Dx}{(x^2+6)^2}$

Caso #1: Fatores lineares distintos

O caso mais simples no qual as frações parciais são úteis é quando o denominador é o produto de *fatores lineares distintos* — quer dizer, os fatores lineares não se repetem.

LEMBRE-SE

Para cada fator linear distinto no denominador, adicione uma fração parcial na seguinte forma:

$$\frac{A}{\text{fator linear}}$$

Por exemplo, suponha que você deseje integrar a seguinte expressão racional:

$$\frac{1}{x(x+2)(x-5)}$$

O denominador é o produto de três fatores lineares distintos — x, $(x + 2)$ e $(x - 5)$ — então, é igual à soma das três frações com esses fatores como denominadores:

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-5}$$

O número de fatores lineares distintos no denominador da expressão original determina o número de frações parciais. Nesse exemplo, a presença de três fatores no denominador da expressão original exige três frações parciais.

Caso #2: Fatores quadráticos distintos

Outro caso não tão complicado em que você pode usar frações parciais é quando o denominador é o produto de *fatores quadráticos distintos* — isto é, fatores quadráticos que não se repetem.

Para cada fator quadrático distinto no denominador, adicione uma fração parcial da seguinte forma:

$$\frac{A + Bx}{\text{fator quadrático}}$$

Por exemplo, suponha que você deseje integrar esta função:

$$\frac{5x - 6}{(x-2)(x^2+3)}$$

O primeiro fator no denominador é linear, mas o segundo é quadrático e não pode ser decomposto em fatores lineares. Então, determine suas frações parciais da seguinte forma:

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+3}$$

Assim como com fatores lineares distintos, o número de fatores quadráticos distintos no denominador indica quantas frações parciais você obterá. Então, neste exemplo, dois fatores no denominador exigem duas frações parciais.

Caso #3: Fatores lineares repetidos

Fatores lineares repetidos são mais complicados para trabalhar, pois cada fator exige mais de uma fração parcial.

Para cada fator linear ao quadrado no denominador, adicione duas frações parciais na seguinte forma:

$$\frac{A}{\text{fator linear}} + \frac{B}{(\text{ fator linear })^2}$$

Para cada fator quadrático no denominador, que está elevado à terceira potência, adicione *três* frações parciais na seguinte forma:

$$\frac{A}{\text{fator linear}} + \frac{B}{(\text{ fator linear })^2} + \frac{C}{(\text{ fator linear })^3}$$

Genericamente falando, quando um fator linear é elevado a uma potência n, adicione n frações parciais. Por exemplo, suponha que você deseja integrar a seguinte expressão:

$$\frac{x^2-3}{(x+5)(x-1)^3}$$

Essa expressão contém apenas fatores lineares, mas um desses fatores lineares $(x+5)$ não se repete e o outro $(x-1)$ está elevado à terceira potência. Determine suas frações parciais desta forma:

$$= \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Como você pode ver, adicionamos uma fração parcial para representar o fator que não se repete e três delas para o fator que se repete.

Caso #4: Fatores quadráticos repetidos

Seu pior pesadelo, no que diz respeito às frações parciais, é quando o denominador inclui fatores quadráticos repetidos.

LEMBRE-SE

Para cada fator quadrático ao quadrado no denominador, adicione *duas* frações parciais na seguinte forma:

$$\frac{Ax+B}{\text{fator quadrático}} + \frac{Cx+D}{(\text{fator quadrático})^2}$$

Para cada fator quadrático no denominador, que seja elevado à terceira potência, adicione *três* frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{Ax+B}{\text{fator quadrático}} + \frac{Cx+D}{(\text{fator quadrático})^2} + \frac{Ex+F}{(\text{fator quadrático})^3}$$

Genericamente falando, quando um fator quadrático é elevado a uma potência n, adicione n frações parciais. Por exemplo:

$$\frac{7+x}{(x-8)(x^2+x+1)(x^2+3)^2}$$

Esse denominador tem um fator linear que não se repete $(x-8)$, um fator quadrático que não se repete (x^2+x+1), e uma expressão quadrática que está elevada ao quadrado (x^2+3). Eis como determinar as frações parciais:

$$= \frac{A}{(x-8)} + \frac{B+Cx}{(x^2+x+1)} + \frac{D+Ex}{(x^2+3)} + \frac{F+Gx}{(x^2+3)^2}$$

Dessa vez, adicionamos uma fração parcial para cada um dos fatores não repetidos e duas frações parciais para o fator ao quadrado.

Além dos quatro casos: saiba como determinar qualquer fração parcial

Para começar, tenho algumas ótimas notícias: você provavelmente nunca terá de ajustar frações parciais mais complexas do que aquela que exibimos na seção anterior, então relaxe.

Estamos conscientes de que alguns estudantes gostam de ver essas coisas no caso a caso, por isso que introduzimos esse assunto dessa maneira. Contudo, outros estudantes preferem que seja demonstrado um padrão geral, de forma que eles possam obter a experiência matemática Zen. Se esse é seu caminho, continue lendo. Se não, sinta-se livre para pular essa parte.

Você pode quebrar *qualquer* fração racional na soma de frações parciais. Você apenas precisa compreender o padrão dos fatores polinomiais de graus maiores repetidos no denominador. Esse padrão é simples de entender com um exemplo. Suponha que você esteja trabalhando com a seguinte função racional:

$$\frac{5x+1}{(7x^4+1)^5(x+2)^2(x^2+1)^2}$$

Nesse fator, o denominador inclui um fator problemático que é um *polinômio de quarto grau* elevado à *quinta potência*. Você não pode decompor esse fator, então a função está fora dos quatro casos que destacamos anteriormente neste capítulo. Eis como você quebra essa função racional em frações parciais:

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{7x^4+1} +$$

$$\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(7x^4+1)^2} +$$

$$\frac{Ix^3+Jx^2+Kx+L}{(7x^4+1)^3} +$$

$$\frac{Mx^3+Nx^2+Ox+P}{(7x^4+1)^4} +$$

$$\frac{Qx^3+Rx^2+Sx+T}{(7x^4+1)^5} +$$

$$\frac{U}{x+2} + \frac{V}{(x+2)^2} +$$

$$\frac{Wx+X}{(x^2+1)} + \frac{Yx+Z}{(x^2+1)^2}$$

Como você pode ver, usamos todas as letras maiúsculas. Além disso, o fator problemático dá origem a *cinco frações parciais* — quer dizer, o mesmo número da potência a que ele está elevado. E também:

- O numerador de cada uma dessas frações é um polinômio de *um grau a menos* em comparação ao denominador.
- O denominador de cada uma dessas frações é uma cópia do denominador original, mas em cada caso elevado a uma potência diferente e incluindo a original.

Os dois fatores remanescentes no denominador — um linear repetido (Caso #3) e um quadrático repetido (Caso #4) — fornecem as quatro frações remanescentes, que parecem menores e mais simples, em comparação.

Claro como lama? Gaste algum tempo com esse exemplo e o padrão se tornará mais claro. Perceba também que todos os quatro casos que destacamos anteriormente neste capítulo seguem o mesmo padrão geral.

Você provavelmente nunca terá que trabalhar com nada mais complicado do que isso — e muito menos tentar integrar — mas quando você entende o padrão, você pode quebrar qualquer função racional em frações parciais sem se preocupar com que caso está lidando.

Conheça o ABC para encontrar incógnitas

Você tem duas formas de encontrar as incógnitas em uma soma de frações parciais. A forma fácil e rápida é usando as raízes dos polinômios. Infelizmente, esse método nem sempre encontra as incógnitas em um problema, embora frequentemente encontre algumas delas. A segunda maneira é ajustar um sistema de equações.

Extração de valores com raízes

Quando uma soma de frações parciais tem fatores lineares (sejam distintos ou repetidos), você pode usar as raízes desses fatores lineares para encontrar os valores das incógnitas. Por exemplo, na seção anterior "Caso #1: fatores lineares distintos", ajustamos a seguinte equação:

$$\frac{1}{x(x+2)(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-5}$$

Para encontrar os valores das incógnitas A, B e C, primeiro obtenha um denominador comum do lado direito dessa equação (o mesmo denominador que está do lado esquerdo):

$$\frac{1}{x(x+2)(x-5)} = \frac{A(x+2)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-5)}$$

Agora, multiplique ambos os lados por esse denominador:

$$1 = A(x+2)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x+2)$$

Para encontrar os valores de A, B e C, substitua as raízes dos três fatores (0, –2 e 5):

$$1 = A(2)(-5) \qquad 1 = B(-2)(-2-5) \qquad 1 = C(5)(5+2)$$

$$A = -\frac{1}{10} \qquad B = \frac{1}{14} \qquad C = \frac{1}{35}$$

Substituir de volta esses valores na integral original resulta em:

$$-\frac{1}{10x} + \frac{1}{14(x+2)} + \frac{1}{35(x-5)}$$

Essa expressão é equivalente àquela com que você começou, mas é muito mais fácil de integrar. Para fazer isso, use a Regra da Soma a fim de quebrá-la em três integrais, a Regra do Múltiplo Constante para mover os coeficientes fracionais para fora de cada integral, e a substituição de variáveis (veja o Capítulo 5) para fazer a integração. Eis a resposta para que você possa testar:

$$\int \left[-\frac{1}{10x} + \frac{1}{14(x+2)} + \frac{1}{35(x-5)}\right] dx$$
$$= -\frac{1}{10}\ln x + \frac{1}{14}\ln(x+2) + \frac{1}{35}\ln(x-5) + K$$

LEMBRE-SE

Nessa resposta, utilizamos K em vez de C para representar a constante de integração, de modo a evitar confusão, pois já utilizamos C nas frações parciais anteriormente.

Trabalhe sistematicamente com um sistema de equações

Determinar um sistema de equações é um método alternativo para encontrar o valor das incógnitas quando você está trabalhando com frações parciais. Não é tão simples quanto substituir as raízes dos fatores (o que demonstramos a você na seção anterior), mas é sua única opção quando a raiz de um fator quadrático é imaginária.

Para ilustrar esse método, e por que você precisa dele, utilizaremos o problema que ajustamos em "Caso #2: Fatores quadráticos distintos":

$$\frac{5x-6}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Para começar, veja o quão longe você vai substituindo as raízes das equações. Como mostramos a você em "Extração de valores com raízes", comece por obter um denominador comum no lado direito da equação:

$$\frac{5x-6}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{(A)(x^2+3) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+3)}$$

Agora, multiplique toda a equação pelo denominador:

$$5x - 6 = (A)(x^2 + 3) + (Bx + C)(x - 2)$$

A raiz de $x - 2$ é 2, então determine $x = 2$ e veja o que você obtém:

$$5(2) - 6 = A(2^2 + 3)$$
$$A = \frac{4}{7}$$

Agora você pode substituir $\frac{4}{7}$ por A:

$$5x - 6 = \frac{4}{7(x^2+3)} + (Bx + C)(x - 2)$$

Infelizmente, $x^2 + 3$ não possui qualquer raiz nos números reais, então você precisa de uma abordagem diferente. Primeiro, livre-se dos parênteses do lado direito da equação:

$$5x - 6 = \frac{4}{7}x^2 + \frac{12}{7} + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

A seguir, combine os termos similares (usando x como a variável pela qual você julga a similaridade). Isso é apenas álgebra, então pularemos alguns passos aqui:

$$x^2\left(\frac{4}{7} + B\right) + x(-2B + C - 5) + \left(\frac{12}{7} - 2C + 6\right) = 0$$

Por essa equação funcionar para *todos* os valores de x, agora daremos o que parece ser um passo questionável ao quebrar essa equação em três outras, como se segue:

$$\frac{4}{7} + B = 0$$
$$-2B + C - 5 = 0$$
$$\frac{12}{7} - 2C + 6 = 0$$

Nesse ponto, um pouco de álgebra indica a você que $B = -\frac{4}{7}$ e $C = \frac{27}{7}$. Então você pode substituir os valores de A, B e C de volta nas frações parciais:

$$\frac{5x-6}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{4}{7(x-2)} + \frac{-\frac{4}{7}x + \frac{27}{7}}{x^2+3}$$

Você pode simplificar um pouco a segunda fração:

$$\frac{4}{7(x-2)} + \frac{-4x+27}{7(x^2+3)}$$

Integração de frações parciais

Depois de expressar uma expressão racional complicada como uma soma de frações parciais, a integração se torna muito mais fácil. Falando genericamente, eis o sistema:

1. **Separe todos os termos racionais com numeradores na forma $Ax + B$.**
2. **Use a Regra da Soma para dividir a integral inteira em muitas integrais menores.**
3. **Use a Regra do Múltiplo Constante para mover os coeficientes para fora de cada integral.**
4. **Resolva cada integral com qualquer método que funcione.**

Fatores lineares: Casos #1 e #3

Quando você começa com um fator linear — seja distinto (Caso #1) ou repetido (Caso #3) — usar frações parciais o deixa com uma integral da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$$

Integre todos esses três casos utilizando a substituição de variáveis $u = ax + b$ de forma que $du = a\,dx$ e $\frac{du}{a} = dx$. Essa substituição resulta na seguinte integral:

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^n}\,du$$

Eis alguns exemplos:

$$\int \frac{1}{3x+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(6x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{6(6x-1)} + C$$

$$\int \frac{1}{(x+9)^3}\,dx = -\frac{1}{2(x+9)^2} + C$$

Fatores quadráticos na forma $(ax^2 + C)$: Casos #2 e #4

Quando você começa com um fator quadrático na forma $(ax^2 + C)$ — seja distinto (Caso #2) ou repetido (Caso #4) — utilizar frações parciais resulta nas duas seguintes integrais:

$$\int \frac{x}{(ax^2+C)^n}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(ax^2+C)^n}\,dx$$

Integre o primeiro utilizando a substituição de variáveis $u = ax^2 + C$ de forma que $du = ax\,dx$ e $\frac{du}{a} = x\,dx$. Essa substituição resulta na seguinte integral:

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^n}\,du$$

Essa é a mesma integral que surgiu no caso linear que descrevemos na seção anterior. Eis alguns exemplos:

$$\int \frac{x}{7x^2+1}\,dx = \frac{1}{14}\ln|7x^2+1| + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx = -\frac{2}{(x^2+4)} + C$$

$$\int \frac{x}{(8x^2-2)^3}\,dx = \frac{-1}{32(8x^2-2)^2} + C$$

Para resolver a segunda integral, use a seguinte fórmula:

$$\int \frac{1}{x^2+n^2}\,dx = \frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n} + C$$

Fatores quadráticos na forma $(ax^2 + bx + C)$: Casos #2 e #4

A maioria dos professores de matemática tem pelo menos um pingo de misericórdia em seu coração, então eles tendem a não passar problemas que incluam esse caso mais complicado. Quando você começa com um fator quadrático na forma $(ax^2 + bx + C)$ — seja distinto (Caso #2) ou repetido (Caso #4) — o uso das frações parciais resulta na seguinte integral:

$$\int \frac{hx+k}{(ax^2+bx+C)^n}\,dx$$

Tudo bem, tudo bem; são muitas letras e não existem números suficientes. Eis um exemplo:

$$\int \frac{x-5}{x^2+6x+13}\,dx$$

Essa é praticamente a integral mais cabeluda que você irá ver nos extremos da fração parcial. Para resolver isso, você precisa utilizar a substituição de variáveis $u = x^2 + 6x + 13$ de forma que $du = (2x + 6)$. Se o numerador fosse $2x + 6$, você estaria muito bem. Então você precisa quebrar um pouco o numerador. Primeiro multiplique-o por 2 e divida toda a integral por 2:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-10}{x^2+6x+13}\,dx$$

Já que você multiplicou toda a integral por 1, nenhuma mudança aconteceu. Agora, adicione 16 e –16 ao numerador:

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+6-16}{x^2+6x+13}\,dx$$

Dessa vez, você adicionou 0 na integral, o que não muda seu valor. Nesse ponto, você pode dividir a integral em duas:

$$=\frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,dx-16\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx\right]$$

A essa altura você pode utilizar a desejável substituição de variáveis (que mencionamos há alguns parágrafos) para transformar a primeira integral como segue:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,dx=\int \frac{1}{u}\,du$$

$$=\ln|u|+C$$

$$=\ln|x^2+6x+13|+C$$

Para resolver a segunda integral, complete o quadrado do denominador: divida o termo b (6) por 2 e eleve-o ao quadrado, e então represente o termo C (13) como a soma disso e aquilo que sobrar:

$$-16\int \frac{1}{x^2+6x+9+4}\,dx$$

Agora, divida o denominador em dois quadrados:

$$=-16\int \frac{1}{(x+3)^2+2^2}\,dx$$

Para resolver essa integral, use a mesma fórmula que mostramos na seção anterior:

$$\int \frac{1}{x^2+n^2}\,dx=\frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}+C$$

Eis a resposta final da segunda integral:

$$-8\arctan\frac{x+3}{2}+C$$

Finalmente, junte a resposta completa como a seguir:

$$\int \frac{x-5}{x^2+6x+13}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x^2+6x+13|-8\arctan\frac{x+3}{2}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13|-4\arctan\frac{x+3}{2}+C$$

Integração com Racionais Impróprios

A integração com frações parciais funciona somente com *expressões racionais próprias*, mas não funciona com *expressões racionais impróprias*. Nesta seção, ensinaremos você a separar essas duas feras. Então, mostraremos como usar a divisão polinomial para transformar racionais impróprios em formas mais aceitáveis. Finalmente, acompanharemos você em um exemplo no qual você integra uma expressão racional imprópria utilizando tudo que há neste capítulo.

Diferencie expressões racionais próprias e impróprias

Diferenciar uma fração própria de uma imprópria é fácil: Uma fração $\frac{a}{b}$ é própria se o numerador (sem importar o sinal) é menor que o denominador, e imprópria se for o contrário.

Com expressões racionais, a ideia é similar, mas em vez de comparar o valor do numerador e do denominador, você compara seus graus. O grau do polinômio é a maior potência de x (vá até o Capítulo 2 para relembrar polinômios).

LEMBRE-SE

Uma expressão racional é própria se o grau no numerador é menor que o grau no denominador, e imprópria se for o contrário.

Por exemplo, veja estas três expressões racionais:

$$\frac{x^2+2}{x^3}$$

$$\frac{x^5}{3x^2-1}$$

$$\frac{-5x^4}{3x^4-2}$$

No primeiro exemplo, o numerador é um polinômio de segundo grau e o denominador é um polinômio de terceiro grau, então o racional é *próprio*. No segundo exemplo, o numerador é um polinômio de quinto grau e o denominador é um polinômio de segundo grau, então a expressão é *imprópria*. No terceiro exemplo, tanto o numerador quanto o denominador são polinômios de quarto grau, então a função racional é *imprópria*.

Relembre a divisão polinomial

A maioria dos estudantes de matemática aprendeu divisão polinomial em Álgebra II, demonstrando que sabem como realizá-la em seus exames finais, e esquecendo-se dela imediatamente. E, felizmente, eles nunca precisaram dela novamente — exceto para passar o tempo em festas *extremamente* tediosas — até Cálculo II.

Está na hora de tirar o mofo da divisão polinomial. Nesta seção, mostraremos tudo que você se esqueceu de lembrar sobre a divisão polinomial, com ou sem resto.

Divisão polinomial sem resto

Quando você multiplica dois polinômios, você sempre obtém outro polinômio. Por exemplo:

$$(x^3+3)(x^2-x)=x^5-x^4+3x^2-3x$$

Como a divisão é o inverso da multiplicação, a seguinte equação intuitivamente faz sentido:

$$\frac{x^5-x^4+3x^2-3x}{x^3+3}=(x^2-x)$$

A divisão polinomial é um método confiável de divisão de um polinômio por outro. É similar à divisão longa, então você provavelmente não terá muita dificuldade em compreendê-la, mesmo que nunca a tenha visto.

A melhor forma de mostrar como você pode fazer uma divisão polinomial é com um exemplo. Comece com o exemplo que já destacamos. Suponha que você deseje dividir $x^5-x^4+3x^2-3x$ por x^3+3. Comece ajustando o problema como um típico problema de divisão (perceba que preenchemos com zeros nos x^3 e nos termos constantes):

$$x^5-x^4+0x^3+3x^2-3x+0 \;\big|\; \underline{x^3+3}$$

Comece focando no expoente de grau maior tanto no divisor (x^3) como no dividendo (x^5). Pondere quantas vezes x^3 cabe em x^5 — isto é, $x^5 \div x^3 = ?$ Coloque a resposta no quociente, e então multiplique o resultado pelo divisor, como você faria em uma divisão comum:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & -x^4 & +0x^3 & +3x^2 & -3x & +0 & \underline{x^3+3} \\ \underline{-x^5} & & & \underline{-3x^2} & & & x^2 \end{array}$$

Como você pode ver, multiplicamos x^2 por x^3 para obter o resultado de $x^5 + 3x^2$, alinhando esse resultado para manter os termos de mesmo grau em colunas similares. A seguir, subtraia e desça o termo seguinte, da mesma forma que você faria na divisão comum:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 3x + 0 & x^3+3 \\ \cline{2-2} -x^5 \qquad\qquad -3x^2 \qquad\quad & x^2 \\ \hline -x^4 \qquad\qquad -3x \quad & \end{array}$$

Agora o ciclo está completo, e você pode ponderar quantas vezes x^3 cabe em $-x^4$ — quer dizer, $-x^4 \div x^3 = ?$. Coloque a resposta no quociente e multiplique o resultado pelo divisor:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 3x + 0 & x^3+3 \\ \cline{2-2} -x^5 \qquad\qquad -3x^2 \qquad\quad & x^2 - x \\ \hline -x^4 \qquad\qquad -3x \quad & \\ x^4 \qquad\qquad 3x \quad & \\ \hline 0 \qquad\qquad & \end{array}$$

Nesse caso, a subtração que resulta funciona de forma igual. Mesmo que desça o zero final, você não tem mais nada para dividir, o que demonstra a seguinte igualdade:

$$\frac{x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x}{x^3+3} = x^2 - x$$

Divisão polinomial com resto

Devido ao fato de a divisão polinomial parecer tanto com a divisão comum, faz sentido que a divisão polinomial deva, às vezes, deixar um resto. Por exemplo, suponha que você deseje dividir $x^4 - 2x^3 + 5x$ por $2x^2 - 6$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 + 5x & 2x^2 - 6 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Dessa vez, preenchemos dois coeficientes zero onde era necessário. Para começar, divida x^4 por $2x^2$, multiplique e subtraia:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 5x + 0 & 2x^2 - 6 \\ \cline{2-2} -x^4 \qquad\quad +3x^2 \qquad\qquad\quad & \frac{1}{2}x^2 \\ \cline{1-1} -2x^3 + 3x^2 \qquad\qquad\quad & \end{array}$$

LEMBRE-SE

Não deixe que os coeficientes fracionais o desanimem. Algumas vezes, a divisão polinomial resulta em coeficientes fracionais.

Agora, desça o termo seguinte ($5x$) para começar outro ciclo. Então, divida por $-2x^3$ por $2x^2$, multiplique e subtraia:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +5x & +0 & \;2x^2-6 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & +3x^2 & & & \;\frac{1}{2}x^2-x \\ \cline{1-4}
 & -2x^3 & +3x^2 & +5x & & \\
 & 2x^3 & & -6x & & \\ \cline{1-4}
 & & 3x^2 & -x & &
\end{array}$$

Novamente, desça o próximo termo (0) e comece outro ciclo, dividindo $3x^2$ por $2x^2$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +5x & +0 & \;2x^2-6 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & +3x^2 & & & \;\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2} \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +3x^2 & +5x & & \\
 & 2x^3 & & -6x & & \\ \cline{1-5}
 & & 3x^2 & -x & & \\
 & & -3x^2 & & +9 & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +9 &
\end{array}$$

Como na divisão comum, o resto indica uma quantia fracional que sobrou: o resto dividido pelo divisor. Então, quando você tem um resto em uma divisão polinomial, você escreve a resposta utilizando a seguinte fórmula:

$$\text{Polinomio} = \text{Quociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}$$

DICA

Se você ficar confuso ao decidir como escrever a resposta, pense nela como um número misto. Por exemplo, $\frac{7}{3} = 2$ com um resto de 1, que você escreve como $2+\frac{1}{3}$.

Então, a divisão polinomial nesse caso fornece a seguinte igualdade:

$$\frac{x^4-2x^3+5x}{2x^2-6} = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} + \frac{-x+9}{2x^2-6}$$

Embora esse resultado possa parecer mais complicado que a fração que começou, você fez progresso: transformou uma expressão racional imprópria (na qual o grau do numerador é maior que o grau do denominador) em uma soma que inclui uma expressão racional própria. Isso é similar à prática aritmética de transformar uma fração imprópria em um número misto.

Tente um exemplo

Nesta seção acompanharemos você em um exemplo que apresenta tudo que você aprendeu neste capítulo. Suponha que deseje integrar a seguinte função racional:

$$\frac{x^4 - x^3 - 5x + 4}{(x-2)(x^2+3)}\,dx$$

Essa parece uma boa candidata para as frações parciais, como demonstramos anteriormente, neste capítulo, em "Caso #2: Fatores quadráticos distintos". Mas, antes que possa expressá-la em frações parciais, você precisa determinar se é própria ou imprópria. O grau do numerador é 4 e (já que o denominador é o produto de uma linear e uma quadrática) o grau do denominador inteiro é 3. Assim, essa é uma fração polinomial imprópria (veja "Diferencie expressões racionais próprias e impróprias", anteriormente neste capítulo), então você pode integrar por partes.

Contudo, você pode usar a divisão polinomial para transformar frações polinomiais impróprias em expressões que incluem uma fração polinomial própria (omitimos esses passos aqui, mas ensinamos isso anteriormente, neste capítulo, em "Relembre a divisão polinomial"):

$$\frac{x^4 - x^3 - 5x + 4}{(x-2)(x^2+3)} = x + 1 + \frac{-x^2 - 2x + 10}{(x-2)(x^2+3)}$$

Como você pode ver, os primeiros dois termos dessa expressão são simples de integrar (não se esqueça deles!). Para ajustar o termo remanescente da integração, utilize frações parciais:

$$\frac{-x^2 - 2x + 10}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Obtenha um denominador comum no lado direito da equação:

$$\frac{-x^2 - 2x + 10}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+3)}$$

Agora, multiplique ambos os lados da equação por este denominador:

$$-x^2 - 2x + 10 = A(x^2 + 3) + (Bx + C)(x - 2)$$

Perceba que $(x - 2)$ é um fator linear, então você pode utilizar a raiz desse fator para encontrar o valor de A. Para encontrar esse valor, determine $x = 2$ e encontre A:

$$-(2^2) - 2(2) + 10 = A(2^2 + 3) + (B2 + C)(2 - 2)$$

$$2 = 7A$$

$$A = \frac{2}{7}$$

Substitua esse valor na equação:

$$-x^2 - 2x + 10 = \frac{2}{7}(x^2 + 3) + (Bx + C)(x - 2)$$

Nesse ponto, para encontrar os valores de B e C, você precisa dividir a equação em um sistema de duas equações (como demonstramos anteriormente em "Trabalhe sistematicamente com um sistema de equações"):

$$-x^2 - 2x + 10 = \frac{2}{7}x^2 + \frac{6}{7} + Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C$$

$$\left(\frac{2}{7} + B + 1\right)x^2 + (-2B + C + 2)x + \left(\frac{6}{7} - 2C - 10\right) = 0$$

Isso se divide em três equações:

$$\frac{2}{7} + B + 1 = 0$$

$$-2B + C + 2 = 0$$

$$\frac{6}{7} - 2C - 10 = 0$$

A primeira e a terceira equações mostram a você que $B = -\frac{9}{7}$ e $C = -\frac{32}{7}$. Agora você pode substituir esses valores de A, B e C de volta na soma das frações parciais:

$$\frac{2}{7(x-2)} + \frac{-9x - 32}{7(x^2+3)}$$

Assegure-se de adicionar os termos $(x + 1)$ que você deixou para trás logo depois de terminar sua divisão polinomial:

$$\int \frac{x^4 - x^3 - 5x + 4}{(x-2)(x^2+3)}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{2}{7(x-2)} + \frac{9x - 32}{7(x^2+3)}\right] dx$$

Assim, você pode reescrever a integral original como a soma de cinco integrais separadas:

$$\int x\,dx + \int dx + \frac{2}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{9}{7}\int \frac{x}{x^2+3}\,dx - \frac{32}{7}\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

Você pode encontrar as duas primeiras dessas integrais só de olhar para elas, e as duas seguintes com a substituição de variáveis (veja o Capítulo 5). A última é resolvida com o uso da seguinte regra:

$$\int \frac{1}{x^2+n^2}\,dx = \frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n} + C$$

Eis a solução, para que você faça os passos seguintes sozinho:

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{2}{7}\ln|x-2| - \frac{9}{14}\ln|x^2+3| - \frac{32}{7\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Parte III

Tópicos Intermediários Sobre Integração

A 5a Onda Por Rich Tennant

"Certo, senhora, tenho de pedir que caminhe por esta linha reta, então pedirei que divida essa linha com outra linha perpendicular com inclinação na equação $y = 3x + 5$

Nesta parte ...

Com o básico do cálculo das integrais em suas mãos, o foco torna-se o uso da integração como uma ferramenta para resolver problemas. Você descobrirá como resolver problemas mais complexos de área e como encontrar a superfície da área e o volume dos sólidos.

Capítulo 9

Invenção de Novas Áreas: Resolução de Problemas de Área

Neste Capítulo

- Resolva integrais impróprias
- Resolva problemas de área com mais de uma função
- Meça a área entre funções
- Encontre áreas sem sinais
- Compreenda o Teorema do Valor Médio e o cálculo do valor médio
- Descubra o comprimento do arco

Agora, com sua caixa de ferramentas de *como* calcular integrais completa, este capítulo (e o Capítulo 10) introduz você aos *porquês* de calculá-las.

Começaremos com uma regra simples para expressar uma área com duas integrais definidas separadas. Então nos concentraremos nas integrais impróprias, as quais são infinitas horizontal ou verticalmente. A seguir, ofereceremos a você uma variedade de estratégias práticas para medir áreas que estão ligadas por mais de uma função. Veremos a medição de áreas entre funções, e também esclarecemos a distinção entre elas com sinal e sem sinal.

Depois disso, introduziremos o Teorema do Valor Médio para as integrais, que fornece a base teórica para calcular o valor médio. Finalmente, mostraremos a fórmula para calcular o comprimento do arco, que é o comprimento exato entre dois pontos ao longo de uma função.

Separe em Duas Partes

Eis uma regra simples, mas útil, que parece complicada, porém, na verdade, é muito fácil:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^n f(x)\,dx + \int_n^b f(x)\,dx$$

Essa regra apenas diz que você pode dividir uma área em dois pedaços, e então somá-los para obter a área com que você começou.

Por exemplo, toda a área sombreada da Figura 9-1 é representada pela seguinte integral, que você pode calcular facilmente:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -\cos x \Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

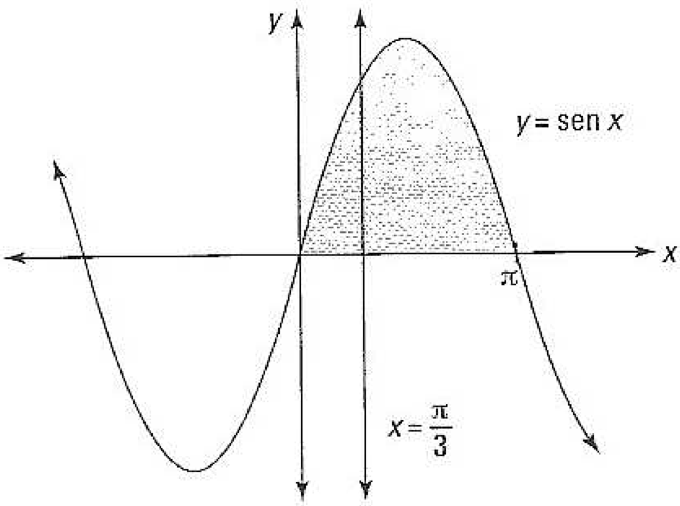


Figura 9-1: Separação da área $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ em duas partes menores.

Desenhar uma linha vertical em $x = \frac{\pi}{3}$ e dividir essa área em duas regiões separadas resultará em duas integrais diferentes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

Não deveria ser surpresa que a soma dessas duas regiões menores é igual a área total:

$$= -\cos x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}} + (-\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} - (-\cos 0) + (-\cos\pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos 0 - \cos\pi$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Embora essa ideia seja ridiculamente simples, dividir uma integral em duas ou mais integrais se torna uma ferramenta poderosa para resolver uma variedade de problemas de área neste capítulo.

Integrais Impróprias

As integrais impróprias aparecem em duas variedades — horizontalmente infinitas e verticalmente infinitas:

- Uma integral *horizontalmente infinita* contém ∞ ou $-\infty$ (ou ambos) como limite de integração. Veja a seção seguinte, "Horizontalmente", para exemplos desse tipo de integral.
- Uma integral *verticalmente infinita* contém pelo menos uma assíntota vertical. Discutiremos isso mais profundamente em uma seção posterior: "Verticalmente".

Integrais impróprias se tornam mais úteis para resolver uma variedade de problemas no Capítulo 10. Elas também servem para lidar com séries infinitas no Capítulo 12. Calcular uma integral imprópria é um processo em três passos:

1. **Expresse a integral imprópria como o limite de uma integral.**
2. **Resolva a integral por qualquer método que funcione.**
3. **Encontre o limite.**

Nesta seção, mostraremos a você, passo a passo, como calcular ambos os tipos de integrais impróprias.

Horizontalmente

O primeiro tipo de integral imprópria ocorre quando uma integral definida tem um limite de integração que seja ou ∞ ou $-\infty$. Esse tipo de integral imprópria é fácil de encontrar, pois o infinito está exatamente na própria integral. Não tem como não ver.

Por exemplo, suponha que você deseja calcular a seguinte integral imprópria:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

Eis como fazer isso, passo a passo:

1. **Expresse a integral imprópria como o limite de uma integral.**

   Quando o limite superior de integração for ∞, use esta equação:

   $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

   Então, faça isto:

   $$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^3}\,dx$$

2. **Resolva a integral:**

   $$\lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_{x=1}^{x=c}\right)$$

   $$= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{2}\right)$$

3. **Encontre o limite:**

   $$=\frac{1}{2}$$

Antes de continuar, reflita por um instante que a área sobre uma curva *infinitamente* longa é, na verdade, *finita*. Ah, a mágica e o poder do cálculo!

Similarmente, suponha que você deseje calcular o seguinte:

$$\int_{-\infty}^0 e^{5x}\,dx$$

Eis como fazer:

1. **Expresse a integral como o limite de uma integral:**

   Quando o limite inferior de uma integração for $-\infty$, utilize esta equação:

   $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

   Então, escreva o seguinte:

   $$\int_{-\infty}^0 e^{5x}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 e^{5x}\,dx$$

2. **Resolva a integral:**

$$= \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{1}{5} e^{5x} \Big|_{x=c}^{x=0} \right)$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{1}{5} e^{0} - \frac{1}{5} e^{5c} \right)$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{5c} \right)$$

3. **Encontre o limite — neste caso, como *c* se aproxima de $-\infty$, o primeiro termo não é afetado e o segundo termo se aproxima de 0:**

$$= \frac{1}{5}$$

Novamente, o cálculo indica a você que, nesse caso, a área sob uma curva infinitamente longa é finita.

É claro, algumas vezes a área sob uma curva infinitamente longa é infinita. Nesses casos, a integral imprópria não pode ser calculada, pois o limite não existe (NE). Eis um exemplo rápido que ilustra essa situação:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

Pode não ser óbvio que essa integral imprópria represente uma área de tamanho infinito. Afinal, o valor da função se aproxima de 0 conforme o x aumenta. Mas observe agora como funciona essa evolução:

1. **Expresse a integral imprópria como o limite de uma integral:**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx\ell = \lim_{c \to \infty} \int_1^{c} \frac{1}{x}\,dx$$

2. **Resolva a integral:**

$$= \lim_{c \to \infty} \ln x \Big|_{x=0}^{x=c}$$

$$= \lim_{c \to \infty} \ln c - \ln 1$$

Neste ponto, você pode ver que o limite vai ao infinito, então ele não existe. Portanto, a integral imprópria não pode ser calculada, pois a área que ela representa é infinita.

Verticalmente

As integrais impróprias verticalmente infinitas são mais complicadas de reconhecer do que aquelas que são horizontalmente infinitas. Uma integral desse tipo contém pelo menos uma assíntota vertical na área que você está medindo. (Uma *assíntota vertical* é um valor de x onde $f(x)$ é igual a ∞ ou $-\infty$. Veja o Capítulo 2 para saber mais sobre assíntotas.) A assíntota pode ser um limite de integração ou pode estar em algum lugar entre os dois limites de integração.

CUIDADO!

Não tente abreviar e calcular integrais impróprias como integrais próprias. Na maioria dos casos, você obterá uma resposta incorreta!

Nesta seção, mostraremos como lidar com ambos os casos de integrais impróprias verticalmente infinitas.

Como lidar com limites assintóticos de integração

Suponha que você deseja calcular a seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Em uma primeira olhada, você pode se sentir tentado a calcular isso como uma integral própria. Mas essa função tem uma assíntota em $x = 0$. A presença de uma assíntota em um dos limites de integração força você a desenvolvê-la como uma integral imprópria:

1. **Expresse a integral como o limite de uma integral:**

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

   Perceba que nesse limite c se aproxima de 0 a partir da direita — quer dizer, do lado positivo —, pois essa é a direção da aproximação de dentro dos limites de integração. (Isso é o que o pequeno sinal de mais [+] no limite do passo 2 significa.)

2. **Resolva a integral:**

   Essa integral é facilmente desenvolvida como $x^{\frac{1}{2}}$, utilizando a Regra da potência, como demonstramos no Capítulo 4, então pouparemos você dos detalhes aqui:

   $$= \lim_{c \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_{x=c}^{x=1}$$

3. **Encontre o limite:**

   $$= \lim_{c \to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}$$

   Neste ponto, a substituição direta resulta na resposta final:

   $$= 2$$

Junte as integráveis descontínuas

No Capítulo 3, discutimos a ligação entre integrabilidade e continuidade: se uma função é contínua em um intervalo, ela também é integrável naquele intervalo. (Volte para o Capítulo 3 para relembrar esse conceito.)

Algumas integrais que são verticalmente infinitas possuem assíntota não nas pontas, mas em algum lugar pelo meio. O resultado é uma *integral descontínua* — quer dizer, uma função com uma descontinuidade no intervalo em que você está tentando integrar.

CUIDADO!

As integrais descontínuas são as integrais impróprias mais complicadas de perceber — você realmente tem de saber como se comporta o gráfico da função que você está integrando. (Veja o Capítulo 2 para observar os gráficos das funções elementares.)

Para calcular uma integral imprópria desse tipo, separe cada assíntota em duas ou mais integrais, como demonstramos anteriormente neste capítulo em "Separe em duas partes". Então, calcule cada uma das integrais resultantes como uma integral imprópria, como ensinamos na seção anterior.

Por exemplo, suponha que você queira resolver a seguinte integral:

$$\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx$$

Devido ao gráfico de sec x conter uma assíntota em $x = \frac{\pi}{2}$ (veja o Capítulo 2 para observar esse gráfico), o gráfico de $\sec^2 x$ possui uma assíntota no mesmo local, como você vê na Figura 9-2.

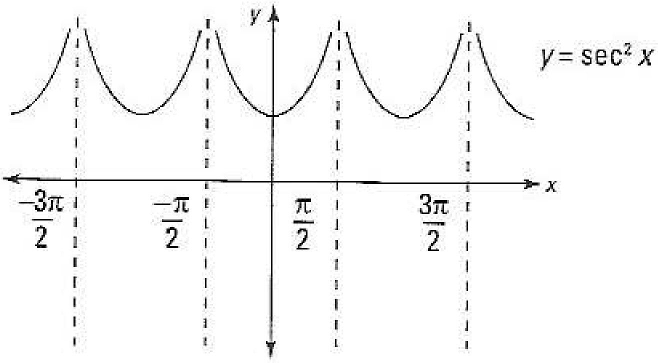


Figura 9-2: O gráfico da integral imprópria $\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx$.

Para calcular essa integral, quebre-a em duas integrais no valor de x onde a assíntota está localizada:

$$\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sec^2 x\, dx$$

Agora, calcule a soma das duas integrais resultantes.

DICA

Você pode poupar muito trabalho percebendo quando as duas regiões são simétricas. Nesse caso, a assíntota em $x = \frac{\pi}{2}$ divide a área sombreada em duas regiões simétricas. Então você pode encontrar uma integral e multiplicá-la por 2 para encontrar a resposta:

$$=2\int_0^c \sec^2 x\,dx$$

Agora, use os passos da seção anterior para resolver esta integral:

1. **Expresse a integral como o limite de uma integral:**

   $$=2\lim_{c \to \frac{\pi}{2}} \int_0^c \sec^2 x\,dx$$

   Nesse caso, a assíntota vertical é o limite superior de integração, então c se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ a partir da esquerda — quer dizer, da parte interna do intervalo no qual você está medindo a área.

2. **Resolva a integral:**

   $$=2\lim_{c \to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x \Big|_{x=0}^{x=c}\right)$$

   $$=2\lim_{c \to \frac{\pi}{2}} (\tan c - \tan 0)$$

3. **Encontre o limite:**

   Note que $\tan \frac{\pi}{2}$ é indefinida, pois a função $\tan x$ possui uma assíntota em $x = \frac{\pi}{2}$, então o limite não existe (NE). Portanto, a integral que você está tentando calcular também não existe, pois a área que ela representa é infinita.

Resolução de Problemas de Área com Mais de Uma Função

A integral definida permite que você encontre a área com sinal sob um intervalo de uma única função. Mas quando você deseja encontrar uma área definida por mais de uma função, você precisa ser criativo e encontrar uma solução. Os professores adoram colocar esses problemas em provas, pois eles testam suas habilidades racionais, assim como seu conhecimento de cálculo.

Felizmente, quando você aborda problemas desse tipo de forma correta, você percebe que eles não são tão terrivelmente difíceis. O truque é quebrar o problema em duas ou mais partes que você pode medir utilizando a integral definida, e então use a adição ou a subtração para encontrar a área que está buscando.

Nesta seção vamos atualizá-lo em relação aos problemas que envolvem mais de uma integral definida.

Encontre a área sob mais de uma função

Algumas vezes, uma única área geométrica é descrita por mais de uma função. Por exemplo, suponha que você deseje encontrar a área sombreada exibida na Figura 9-3.

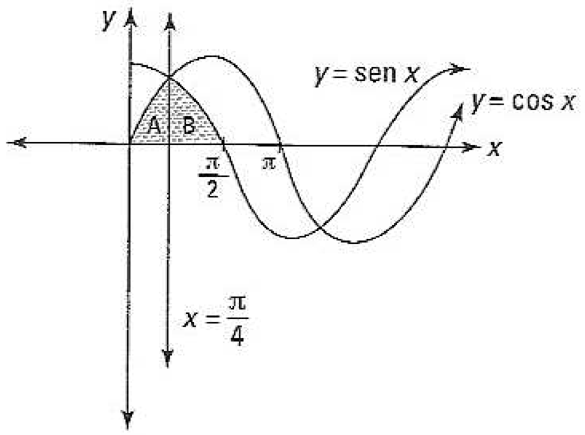


Figura 9-3: Encontre a área sob $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

A primeira coisa a notar é que a área sombreada não está sob apenas uma função, então você não pode esperar utilizar uma única integral para encontrá-la. Em vez disso, a região nomeada A está sob $y = \text{sen } x$ e a região nomeada B está sob $y = \cos x$. Primeiro, determine uma integral para encontrar a área sob ambas estas regiões:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen} x \, dx$$

$$B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

Agora, determine uma equação para encontrar suas áreas combinadas:

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen} x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

Neste ponto, você pode resolver cada uma dessas integrais separadamente. Mas há uma forma mais fácil.

DICA

Devido ao fato de as regiões A e B serem simétricas, elas têm a mesma área. Então você pode encontrar suas áreas combinadas ao dobrar a área de uma única região:

$$= 2A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\, dx$$

Escolhemos dobrar a região A, pois os limites de integração da integral são mais fáceis, mas dobrar a região B também funciona. Agora, integre para encontrar sua resposta:

$$= 2(-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)\right)$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

$$= 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$$

Encontre a área entre duas funções

Para encontrar a área entre duas funções, você precisa determinar uma equação com uma combinação de integrais definidas de ambas as funções. Por exemplo, suponha que você queira calcular a área sombreada da Figura 9-4.

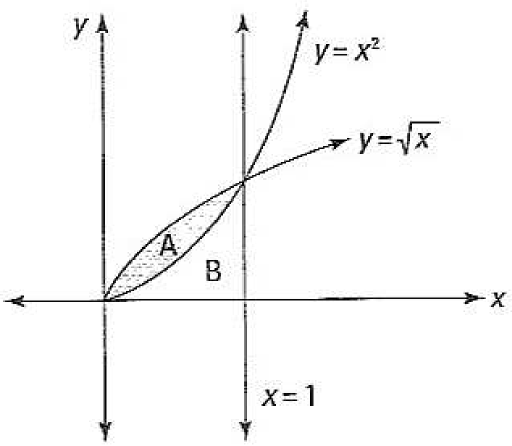


Figura 9-4: Encontre a área entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Primeiro, perceba que as duas funções $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ se intersectam onde $x = 1$. Essa é uma informação importante, pois permite que você determine duas integrais definidas para ajudá-lo a encontrar a região A.

$$A + B = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

$$B = \int_0^1 x^2\,dx$$

Embora nenhuma equação ofereça a informação que você está procurando, unidas elas podem ajudar. Apenas subtraia a segunda equação da primeira, como segue:

$$A = A + B - B = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

Com o problema ajustado adequadamente, agora tudo o que você tem de fazer é resolver as duas integrais:

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=1}\right) - \left(+\frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

Então, a área sob as duas curvas é $\frac{1}{3}$.

Para outro exemplo, suponha que você queira encontrar a área sombreada na Figura 9-5.

Dessa vez, a área sombreada é composta por duas regiões separadas, chamadas de A e B. A região A é limitada acima por $y = x\frac{1}{3}$ e abaixo por $y = x$. Contudo, para a região B, a situação é o reverso, e a região é limitada acima por $y = x$ e abaixo por $y = x\frac{1}{3}$. Também nomeamos a região C e a região D que aparecem no problema.

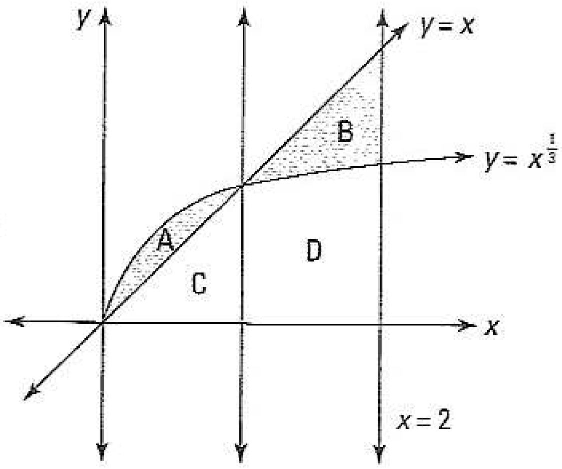


Figura 9-5: Encontre a área entre $y = x$ e $y = x^{\frac{1}{3}}$.

O primeiro passo importante é encontrar o local onde as funções se interceptam — quer dizer, onde a seguinte equação é verdadeira:

$$x = x^{\frac{1}{3}}$$

Felizmente, é fácil perceber que $x = 1$ satisfaz a equação.

Agora, você deseja construir algumas integrais definidas para ajudá-lo a encontrar as áreas das regiões A e B. Eis duas que podem ajudá-lo com a região A:

$$A + C = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$C = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Perceba que resolvemos a segunda integral definida *sem* o cálculo, usando simples geometria, como ensinamos no Capítulo 1. Isso é perfeitamente válido e representa uma grande economia de tempo.

Subtrair a segunda equação da primeira fornece uma equação para a área da região A:

$$A = A + C - C = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \frac{1}{2}$$

Agora, construa duas integrais definidas para ajudarem você a encontrar a área da região B:

$$B + D = \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}$$

$$D = \int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Agora, resolva a primeira integral definida utilizando a geometria em vez de cálculo. Subtrair a segunda equação da primeira resulta em uma equação para a área da região B:

$$B = B + D - D = \frac{3}{2} - \int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Agora você pode determinar uma equação para resolver o problema:

$$A + B = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx + 1$$

Nesse ponto, você é forçado a fazer algum cálculo:

$$= \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{x\ 0}^{x\ 1}\right) - \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^2 + 1\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}} - 0\right) - \left(\frac{3}{4}(2)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}}\right) + 1$$

O resto é apenas aritmética:

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(16)^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4} + 1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{4}(16)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx 0.6101$$

Procure um sinal

A solução de uma integral definida resulta em uma área *com sinal* de uma região (veja o Capítulo 3 para saber mais). Em alguns casos, a área com sinal é o que você deseja, mas em alguns problemas você procura áreas *sem sinal.*

A área com sinal acima do eixo x é positiva, mas a área com sinal abaixo do eixo x é negativa. Em contraste, a área sem sinal é *sempre* positiva. O conceito de área sem sinal é similar ao conceito de valor absoluto. Então, se ajudar, pense na área sem sinal como o valor absoluto de uma integral definida.

DICA

Em problemas nos quais você deve encontrar a área de uma região sombreada em um gráfico, você está procurando uma área sem sinal. Mas, se você está inseguro se uma questão está pedindo que você encontre uma área com sinal ou sem sinal, pergunte ao professor. Isso vale em dobro se uma questão de prova não está clara. A maioria dos professores responderá esclarecendo questões, então não fique intimidado em perguntar.

Por exemplo, suponha que tenham pedido a você que calculasse a área sombreada sem sinal que é exibida na Figura 9-6.

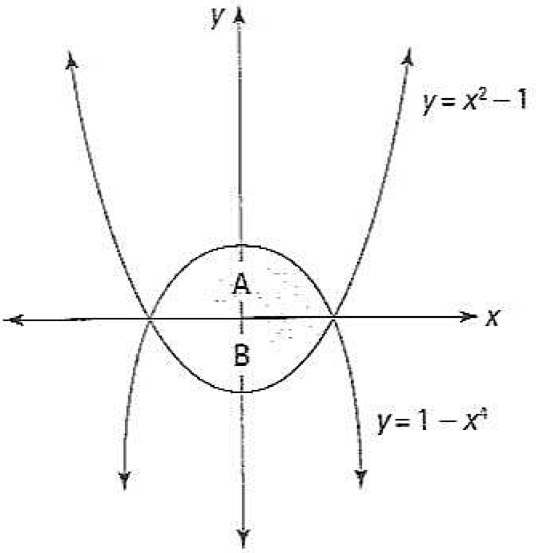


Figura 9-6: Encontre a área entre $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^4$.

Essa área é, na verdade, a soma da região A, que está acima do eixo x, e da região B, que está abaixo desse eixo. Para resolver o problema, você precisa encontrar a soma das áreas sem sinal dessas duas regiões.

Felizmente, ambas as funções se intersectam ao eixo x nos mesmos dois valores de x: $x = -1$ e $x = 1$. Determine integrais definidas para encontrar a área de cada região como segue:

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - x^4)\,dx$$

$$B = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx$$

Perceba que negativamos a integral definida da região B para dar conta do fato de que a integral definida produz uma área negativa abaixo do eixo x. Agora, apenas some as duas equações:

$$A + B = \int_{-1}^{1} (1 - x^4)\,dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx$$

Resolver essa equação fornece a resposta que você está procurando (tenha cuidado com todos aqueles sinais de menos!):

$$= \left(x - \frac{1}{5}x^5 \Big|_{x=-1}^{x=1} \right) - \left(\frac{1}{3}x^3 - x \Big|_{x=-1}^{x=1} \right)$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) - \left(-1 - -\frac{1}{5}\right) \right] - \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - -1\right) \right]$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

Perceba, nesse ponto, que a expressão entre parênteses — representando a área com sinal de B — é negativa. Mas o sinal de menos fora dos parênteses automaticamente muda o sinal como se pretendia:

$$= \frac{8}{5} + \frac{4}{3} = \frac{44}{15}$$

Medição de áreas sem sinal entre curvas com um truque rápido

Depois de você compreender o conceito de medir a área sem sinal (que discutimos na seção anterior), você estará pronto para um truque que torna a medição da área entre curvas algo muito rápido. Como dissemos anteriormente neste capítulo, os professores adoram colocar esses tipos de problemas nos exames. Então, eis uma complicada questão de prova com a qual vale a pena gastar algum tempo:

Encontre a área sem sinal sombreada na Figura 9-7. Aproxime sua resposta em duas casas decimais utilizando cos 4 = –0.65.

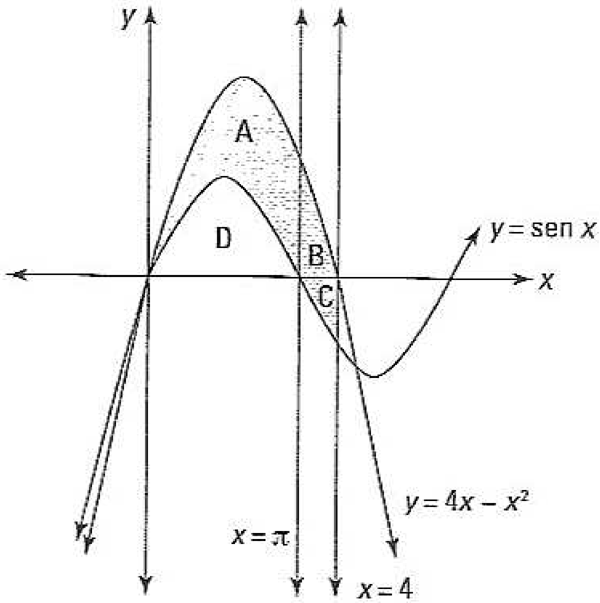


Figura 9-7: Encontre a área entre $y = 4x - x^2$ e $y = \text{sen}\, x$ entre $x = 0$ e $x = 4$.

O primeiro passo é encontrar uma equação para a solução (que provavelmente renderá parte do crédito a você) e, então, preocupe-se em resolvê-la.

Dividimos a área sombreada em três regiões chamadas de A, B e C. Também nomeamos uma região D, a qual você deve considerar. Perceba que $x = \pi$ separa as regiões A e B, e o eixo x separa as regiões B e C.

Você poderia encontrar as três equações separadas para as regiões A, B e C, mas há uma forma melhor.

DICA

Para medir a área sem sinal entre duas funções, utilize este truque:

Área = integral da função superior – integral da função inferior

É isso! Em vez de medir a área abaixo e acima do eixo x, apenas substitua as duas integrais nessa fórmula. Nesse problema, a função superior é $4x - x^2$ e a função inferior é sen x:

$$= \int_0^4 (4x - x^2)\,dx - \int_0^4 \operatorname{sen} x\,dx$$

Esse cálculo não é tão terrível:

$$\left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=0}^{x=4}\right) - \left(-\cos x \Big|_{x=0}^{x=4}\right)$$

$$= \left[\left(2(4)^2 - \frac{1}{3}(4)^3\right) - 0\right] - \left[-\cos 4 - (-\cos 0)\right]$$

$$= 32 - \frac{64}{3} + \cos 4 - 1$$

Quando você atinge esse ponto, você já pode perceber que está no caminho, pois o professor foi legal o suficiente para dar o valor aproximado de cos 4:

$$= 32 - 21{,}33 - 0{,}65 - 1 = 9{,}02$$

Então, a área sem sinal entre as duas funções é de aproximadamente 9,02 unidades.

LEMBRE-SE

Se as duas funções mudam de posição — quer dizer, a de cima se torna a de baixo e a debaixo vai para cima — você pode precisar quebrar o problema em regiões, como demonstramos anteriormente neste capítulo. Mas, mesmo nesse caso, você ainda pode poupar um bocado de tempo utilizando esse truque.

Por exemplo, anteriormente neste capítulo, em "Encontre a área entre duas funções", medimos a área sombreada da Figura 9-5 utilizando quatro regiões separadas. Veja como fazer isso usando o truque desta seção.

Perceba que as duas funções cruzam em $x = 1$. Então, de 0 a 1, a função de cima é $x^{1/3}$ e entre 1 e 2 a função superior é x. Agora, determine duas equações separadas, uma para a região A e outra para a região B:

$$A = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int_0^1 x\,dx$$

$$B = \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Quando os cálculos estão completos, você obtém os seguintes valores para A e B:

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}(16)^{\frac{1}{3}}$$

Some esses dois valores para obter sua resposta:

$$A + B = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}(16)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}6101$$

Como você pode ver, o truque da superior-inferior resulta na mesma resposta de forma muito mais simples do que medir regiões.

O Teorema do Valor Médio das Integrais

O *Teorema do Valor Médio das Integrais* garante que, para cada integral definida, existe um retângulo com a mesma área e largura. Além disso, se você sobrepuser esse retângulo na integral definida, a parte superior do retângulo intercepta a função. Esse retângulo, a propósito, é chamado de *retângulo do valor médio* daquela integral definida. Ele permite que você calcule o *valor médio* de uma integral definida.

O cálculo ostenta *dois* Teoremas do Valor Médio — um para as derivadas e outro para as integrais. Esta seção discutirá o Teorema do Valor Médio das Integrais. Você pode saber mais sobre o Teorema do Valor Médio das Derivadas em *Cálculo Para Leigos®*, de Mark Ryan (Alta Books).

A melhor forma de ver como esse teorema funciona é com um exemplo visual. O primeiro gráfico na Figura 9-8 mostra a região descrita pela integral definida $A = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int_0^1 x\,dx$. Essa região obviamente possui uma base 1, e você pode calculá-la facilmente para comprovar que sua área é 7/3.

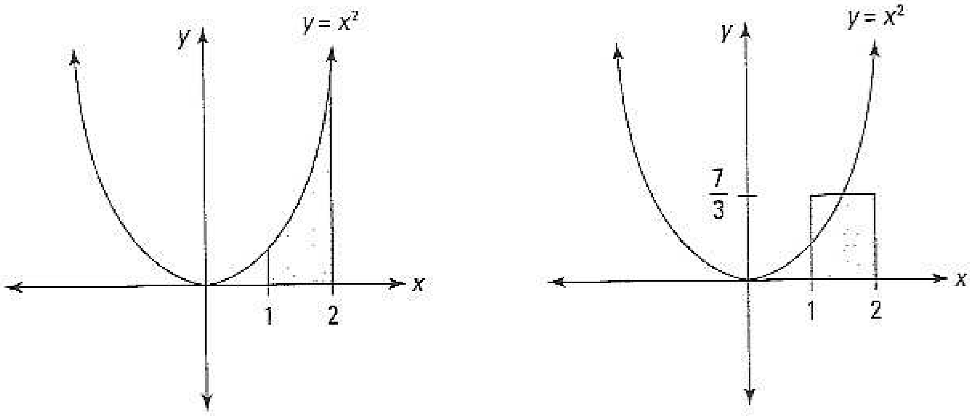


Figura 9-8: Uma integral definida e seu retângulo de valor médio têm a mesma largura e a mesma área.

O segundo gráfico da Figura 9-8 exibe um retângulo com uma largura 1 e sua área é $\frac{7}{3}$. Não deveria ser surpresa que a altura desse retângulo também é $\frac{7}{3}$, então a parte superior desse retângulo intersecta a função original.

O fato de que o topo do retângulo de valor médio intersecta a função é mais uma questão de senso comum. Afinal, a altura desse retângulo representa o valor médio que a função alcança em determinado intervalo. Esse valor deve cair em algum lugar entre os valores máximo e mínimo da função naquele intervalo.

Eis a afirmativa formal do Teorema do Valor Médio das Integrais:

Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo limitado $[a, b]$, então existe um número c naquele intervalo, tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Essa equação pode parecer complicada, mas é basicamente uma reafirmação dessa equação familiar para a área de um retângulo:

Área = Altura x Base

Em outras palavras: comece com uma integral definida que expresse uma área, e então desenhe um retângulo de área igual com a mesma base $(b - a)$. A altura desse retângulo — $f(c)$ — é tal que sua borda superior intersecta a função onde $x = c$.

O valor $f(c)$ é o *valor médio* de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Você pode calculá-lo rearranjando a equação determinada no teorema:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Por exemplo, eis como calcular o valor médio da área sombreada da Figura 9-9:

$$f(c) = \frac{1}{4-2} \cdot \int_2^4 x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 \Big|_{x=2}^{x=4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{4}2^4\right)$$
$$= \frac{1}{2}(64-4) = 30$$

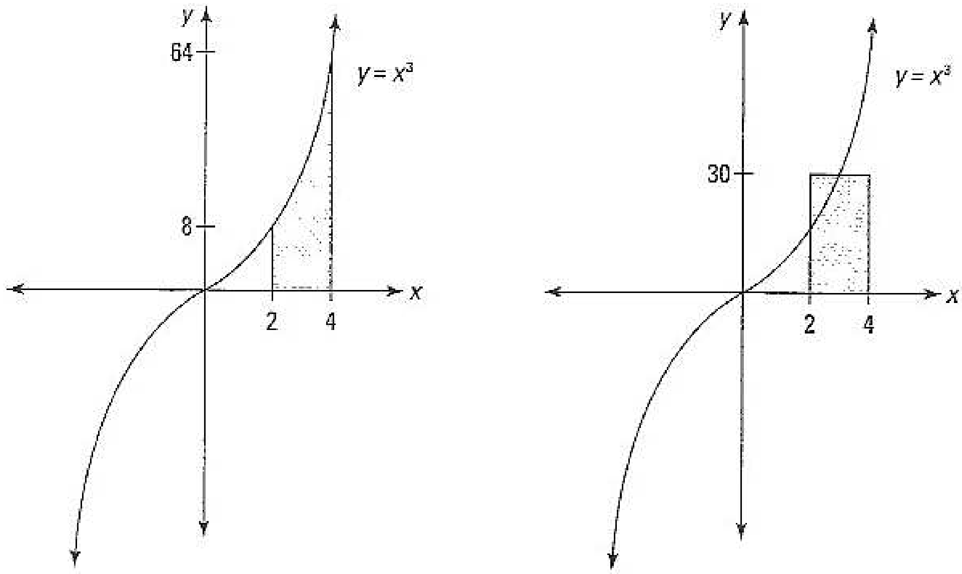


Figura 9-9: A integral definida $\int_2^4 x^3\,dx$ e seu retângulo de valor médio.

Sem surpresa, o valor médio dessa integral é 30, um valor entre o mínimo da função, em 8, e seu máximo em 64.

Cálculo do Comprimento do Arco

O comprimento do arco de uma função em dado intervalo é o comprimento do ponto de partida até o ponto final, medindo-se ao longo do gráfico daquela função.

De certa forma, o comprimento do arco é similar ao da medição prática da distância dirigida. Por exemplo, você pode morar a apenas 5 km do trabalho, "um pulo", mas quando você verifica no hodômetro, você pode descobrir que, na verdade, dirigiu aproximadamente 7 km. Similarmente, a distância em linha reta entre dois pontos é sempre menor que o comprimento do arco ao longo de uma função curva que os conecta.

Usar a fórmula, contudo, frequentemente envolve a substituição trigonométrica (veja o Capítulo 7 para relembrar esse método de integração).

A fórmula para o comprimento do arco ao longo de uma função $y = f(x)$ entre a e b é a seguinte:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Por exemplo, suponha que você deseje calcular o comprimento do arco ao longo da função $y = x^2$, a partir do ponto onde $x = 0$ e até o ponto onde $x = 2$ (veja a Figura 9-10).

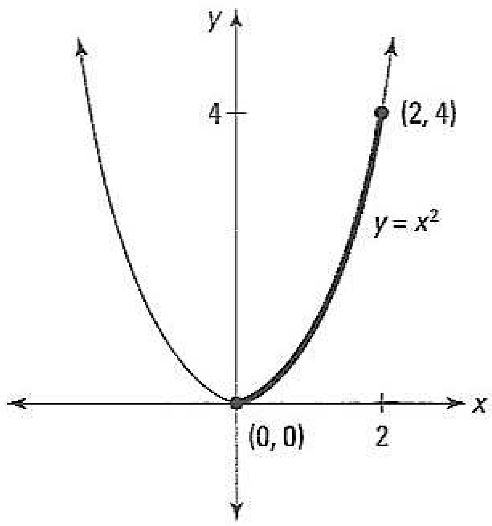


Figura 9-10: Meça o comprimento do arco ao longo de $y = x^2$ entre (0, 0) e (2, 4).

Antes de começar, perceba que se você traçar uma linha reta entre esses dois pontos, (0, 0) e (2, 4), seu comprimento é $\sqrt{20} \approx 4.4721$. Então, o comprimento do arco deveria ser levemente maior.

Para calcular o comprimento do arco, primeiro encontre a derivada da função x^2:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Agora, substitua essa derivada e os limites de integração na fórmula, como segue:

$$\int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Calcular o comprimento do arco normalmente dá a você a oportunidade de praticar a substituição trigonométrica — em particular, o caso da tangente. Quando você desenha seu triângulo de substituição trigonométrica, use $\sqrt{1+4x^2}$ como hipotenusa, $2x$ no lado oposto e 1 no lado adjacente. Isso resulta na seguinte substituição:

$$\sqrt{1+4x^2} = \sec\theta$$

$$2x = \tan\theta$$

$$x = \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

O resultado é a integral:

$$\frac{1}{2}\int \sec^3\theta\, d\theta$$

Perceba que removemos os limites de integração, pois planejamos mudar a variável de volta para x depois de calcular a integral definida. Poupamos você dos detalhes do cálculo dessa integral indefinida, mas você pode vê-los no Capítulo 7. Eis o resultado:

$$= \frac{1}{4}(\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \tan\theta\sec\theta) + C$$

Agora, escreva cada $\sec\theta$ e $\tan\theta$ em termos de x:

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\sqrt{1+4x^2+x^2} + 2x\right| + 2x\sqrt{1+4x^2}\right) + C$$

Nesse ponto, estamos prontos para resolver a integral definida que deixamos de fora anteriormente:

$$\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\sqrt{1+4x^2} + 2x\right| + 2x\sqrt{1+4x^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\sqrt{1+4(2)^2} + 2(2)\right| + 2(2)\sqrt{1+4(2)^2}\right) - 0$$

Você pode acreditar em nossa palavra de que a segunda parte dessa substituição resulta em 0 ou pode calcular por conta própia. Para finalizar:

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{17} + 4\right| + \sqrt{17}$$

$$\approx 0{,}5236 + 4{,}1231 = 4{,}6467$$

Capítulo 10

Aumente o Volume: Uso do Cálculo para Resolver Problemas em 3D

Neste Capítulo

- Compreenda o método do fatiador para encontrar o volume
- Use o inverso para facilitar a resolução de um problema
- Resolva problemas com sólidos de revolução e superfícies de revolução
- Encontre os espaços entre duas superfícies
- Compreenda o método das camadas para encontrar o volume

No Capítulo 9, mostramos a você várias formas diferentes de utilizar integrais para encontrar a área. Neste capítulo, você adicionará uma dimensão ao descobrir como utilizar integrais para encontrar volumes e áreas de superfícies de sólidos.

Primeiro ensinaremos você a encontrar o volume de um sólido com o uso do método do fatiador, que é, na verdade, uma extensão 3D da tática de integração básica que você já conhece do Capítulo 1: dividir uma área em um número infinito de partes e somá-las.

Como um fatiador real, esse método funciona melhor quando a lâmina corta verticalmente — quer dizer, perpendicular ao eixo x. Então, também mostramos a você como usar as inversas para girar alguns sólidos para a posição apropriada.

Depois disso, mostraremos como resolver dois tipos comuns de problemas que os professores de cálculo simplesmente amam: encontrar o volume de um sólido de revolução e a área de uma superfície de revolução.

Com essas técnicas em mãos, você pode partir para problemas mais complexos, em que um sólido é descrito como o espaço entre duas superfícies. Esses problemas são o equivalente em 3D de encontrar a área entre duas curvas, o que discutimos no Capítulo 9.

Para terminar, ofereceremos uma forma adicional de encontrar o volume de um sólido: o método das camadas. Então, daremos uma perspectiva prática de todos os métodos deste capítulo, de forma que você saiba quando utilizá-los.

Fatie Seu Caminho para o Sucesso

Você já ficou maravilhado com a forma como um fatiador de carne transforma um salame inteiro em dezenas de pequenos círculos apetitosos com a largura de um papel? Até mesmo se você é vegetariano, o cálculo oferece uma alternativa amiga dos animais: o método do fatiador para medir o volume de sólidos.

O *método do fatiador* funciona melhor com sólidos que possuam secções planas similares (discutimos isso em mais detalhes na seção seguinte). Eis o plano:

1. **Encontre uma expressão que representa a área de uma secção plana aleatória de um sólido em termos de x.**
2. **Use essa expressão para construir uma integral definida (em termos de dx) que represente o volume do sólido.**
3. **Resolva essa integral.**

Não se preocupe se esses passos não fazem muito sentido por enquanto. Nesta seção, mostraremos quando e como utilizar o método do fatiador para encontrar volumes que seriam complicados ou impossíveis de encontrar sem o cálculo.

Encontre o volume de um sólido sem secções planas congruentes

Antes de entrar no Cálculo, gostaríamos de oferecer algumas informações sobre encontrar o volume de sólidos. Gastar alguns minutos pensando em como o volume é medido *sem* cálculo vale muito a pena quando você entra na arena do cálculo. Isso é algo que não precisa estritamente do uso do cérebro — um pouco de geometria sólida e básica que você provavelmente já conhece. Então, apenas sente-se e acompanhe esta seção.

Um dos sólidos mais simples de se encontrar o volume é o *prisma*. Um prisma é um sólido que possui todas as secções planas congruentes na forma de um polígono. Quer dizer, não importa como você fatia um prisma paralelamente à sua base, sua secção plana tem o mesmo formato e a mesma área da própria base.

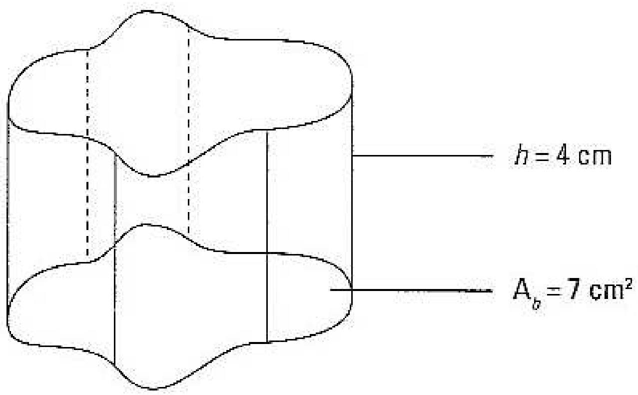
A fórmula para o volume de um prisma é simplesmente a área da base vezes a altura:

$$V = A_b \cdot h$$

Então, se você possui um prisma triangular com a altura de 3 cm e uma área da base de 2 cm^2, seu volume é 6 cm^3.

Essa fórmula também funciona para cilindros — que são um tipo de prisma com uma base circular — e genericamente com qualquer sólido que possua secções planas congruentes. Por exemplo, o sólido de aparência estranha da Figura 10-1 se encaixa perfeitamente. Nesse caso, você recebeu a informação de que a base é 7 cm^2 e a altura é de 4 cm, então o volume desse sólido é de 28 cm^3.

Figura 10-1: Encontre o volume do sólido de aparência estranha com uma altura constante.



Encontrar o volume de um sólido com secções planas congruentes é simples, contanto que você saiba de duas coisas:

- A área da base — quer dizer, a área de qualquer secção plana
- A altura do sólido

Encontre o volume de um sólido com secção plana similar

Na seção anterior você não teve de usar qualquer célula cerebral de cálculo. Mas agora, suponha que você deseje encontrar o volume da torre de resfriamento hiperbólica de aspecto assustador do lado esquerdo da Figura 10-2.

O que torna esse problema fora do alcance da fórmula para prismas e cilindros? Nesse caso, fatiar paralelamente a partir da base sempre resulta na mesma forma — um círculo —, mas a área pode diferir. Quer dizer, o sólido possui secções planas *similares* em vez de congruentes.

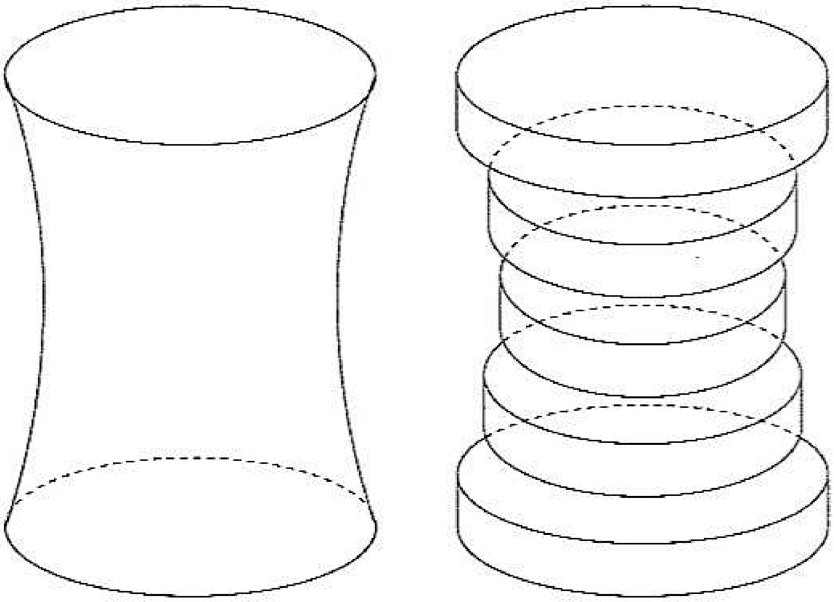


Figura 10-2: Estime o volume de uma torre de resfriamento hiperbólica fatiando-a em secções cilíndricas.

Você pode estimar esse volume ao fatiar o sólido em vários cilindros, encontrando o volume de cada cilindro utilizando a fórmula dos sólidos e altura constante, e somando esses volumes separados. É claro, criar mais fatias aumenta sua estimativa. E, como você já pode ter suspeitado, somar o limite de um número infinito de fatias resulta no volume exato do sólido.

Hummm... isso está começando a parece um trabalho para o cálculo. Na verdade, o que indicamos nessa seção é o método do fatiador, que funciona bem para medir sólidos que possuem secções planas similares.

Quando um problema pede que você encontre o volume de um sólido, olhe a figura desse sólido e descubra como fatiá-lo de forma que as secções planas sejam similares. Esse é um bom primeiro passo na compreensão do problema, a fim de que você possa resolvê-lo.

Para medir sólidos com formas estranhas que *não* possuam secções planas similares, você precisa do cálculo de várias variáveis, que é matéria de Cálculo III. Veja o Capítulo 14 para obter uma visão geral sobre esse tópico.

Medição do volume de uma pirâmide

Suponha que você deseje encontrar o volume de uma pirâmide com uma base de 6 unidades por 6 unidades e uma altura de 3 unidades. A geometria indica que você pode usar a seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\,bh = \frac{1}{3}(36)(3) = 36$$

Essa fórmula funciona perfeitamente, mas ela não revela como resolver problemas similares; funciona apenas para pirâmides. O método do fatiador, contudo, oferece uma abordagem ao problema que você pode generalizar para usar com muitos outros tipos de sólidos.

Para começar, atravessamos essa pirâmide no eixo x do gráfico, como demonstramos na Figura 10-3. Perceba que o vértice dessa pirâmide está na origem, e o centro da base está no ponto (6, 0).

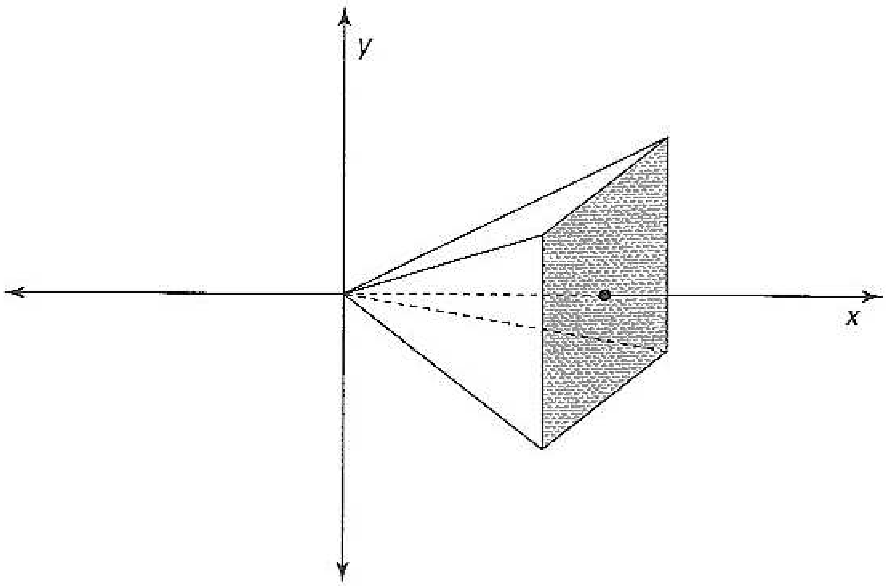


Figura 10-3: Uma pirâmide atravessada em um gráfico e fatiada em três pedaços.

Para encontrar o volume exato da pirâmide, eis o que se deve fazer:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma secção plana aleatória da pirâmide em termos de x.**

   Em $x = 1$, a secção plana é $2^2 = 4$. Em $x = 2$, é $4^2 = 16$. E em $x = 3$, é $6^2 = 36$. Então, falando genericamente, a área da secção plana é:

   $$A = (2x)^2 = 4x^2$$

2. **Use essa expressão para construir uma integral definida que represente o volume da pirâmide.**

   Nesse caso, os limites de integração são 0 e 3, então:

   $$V = \int_0^3 4x^2\,dx$$

3. **Resolva esta integral:**

   $$\frac{4}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=3}$$
   $$= \frac{4}{3}3^3 - 0 = 36$$

Essa é a mesma resposta fornecida pela fórmula da pirâmide. Mas esse método pode ser aplicado por uma variedade muito maior de sólidos.

Medição do volume de um sólido estranho

Depois de você saber o básico da técnica do fatiador, você pode aplicá-la em qualquer sólido com uma secção plana que seja uma função de x. Em alguns casos, esses sólidos são mais difíceis de descrever do que de calcular. Por exemplo, observe a Figura 10-4.

O sólido da Figura 10-4 consiste em duas curvas exponenciais — uma descrita pela equação $y = e^x$ e a outra descrita pela colocação da mesma curva diretamente em frente ao eixo x — unidas por linhas retas. Os outros lados do sólido são limitados por planos, fatiando perpendicularmente em uma variedade de direções.

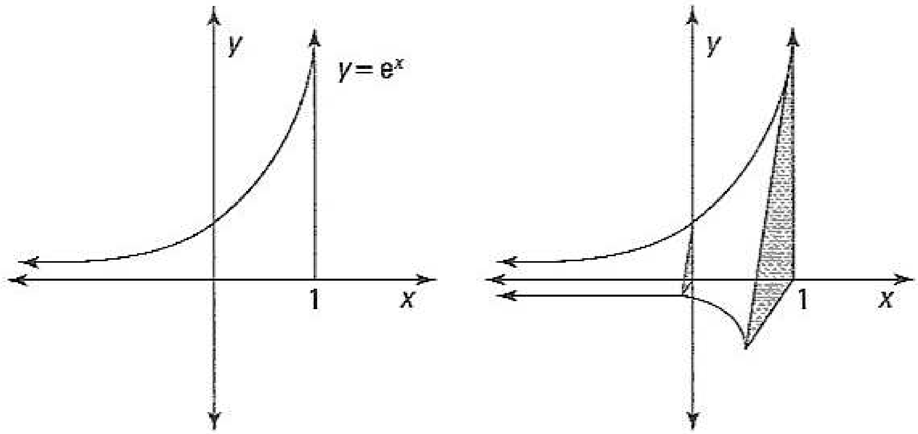


Figura 10-4: Um sólido com base em duas curvas exponenciais no espaço.

Perceba que quando você fatiar esse sólido perpendicularmente ao eixo x, suas secções planas serão sempre um triângulo retângulo. Essa é uma fórmula fácil de medir, então o método de fatiamento funciona perfeitamente para medir o volume desse sólido. Aqui vão os passos:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma secção plana aleatória do sólido.**

   O triângulo no eixo y possui altura e base 1 — quer dizer, e^0. E o triângulo na linha $x = 1$ possui a altura e a base de e^1, que é e. Genericamente, a altura e a base de qualquer secção plana de triângulo é e^x.

   Então, eis como utilizar a fórmula da área do triângulo para encontrar a área de uma secção plana em termos de x:

   $$A = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2}e^x \cdot e^x = \frac{1}{2}e^{2x}$$

2. **Use essa expressão para construir uma integral definida que represente o volume do sólido.**

   Agora que você sabe como medir a área de uma secção plana, integre para somar todas as secções planas entre $x = 0$ e $x = 1$:

   $$V = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x}\, dx$$

3. **Resolva esta integral para encontrar o volume.**

   $$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx$$
   $$= \frac{1}{4} e^{2x}\Big|_{x=0}^{x=1}$$
   $$= \frac{1}{4} e^{2} - \frac{1}{4} e^{0}$$
   $$\approx 1.597$$

Vire o Problema para o Lado

Ao utilizar um verdadeiro fatiador de carne, você precisa encontrar uma forma de girar o que quer que seja que está fatiando para o lado de forma que se encaixe. O mesmo vale para os problemas de cálculo.

Por exemplo, suponha que você deseje medir o volume do sólido exibido na Figura 10-5.

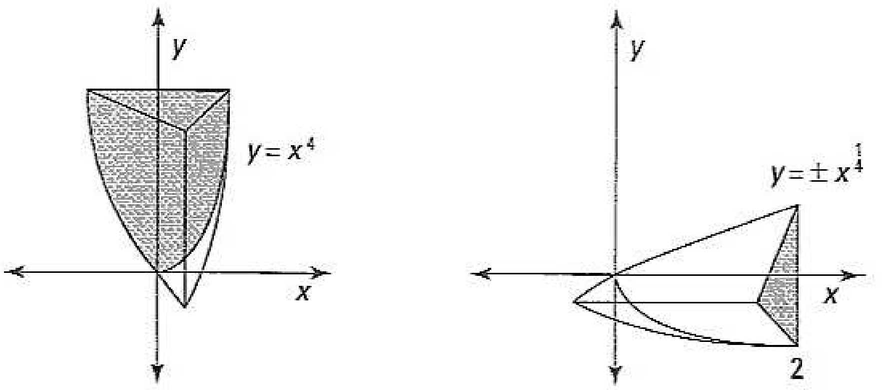


Figura 10-5: Use inversos para preparar um problema para o método do fatiador.

A boa notícia é que esse sólido tem uma secção plana que é similar aos triângulos, então o método do fatiador funcionará. Infelizmente, na forma como o problema está atualmente, você teria de fazer fatias perpendiculares ao eixo y. Mas, para utilizar o método do fatiador, você precisa fazer fatias perpendiculares ao eixo x.

Para resolver o problema, primeiro você precisa virar o sólido sobre o eixo x, como exibido no lado direito da Figura 10-5. A forma mais fácil de fazer isso é usando o inverso da função $y = x^4$. Para encontrar o inverso, mude x e y na equação e encontre y:

$$x = y^4$$
$$\pm\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = y$$

Note que a equação resultante $\pm\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = y$ nesse caso não é uma função de x, pois um único valor de x pode produzir mais de um valor de y. Contudo, você pode usar essa equação em conjunto com o método do fatiador e encontrar o volume que estava procurando.

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma secção plana aleatória do sólido.**

   A secção plana é um triângulo isósceles com altura 3 e base $2x^{\frac{1}{4}}$, então utilize a fórmula da área de um triângulo:

   $$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left(2x^{\frac{1}{4}}\right)(3) = 3x^{\frac{1}{4}}$$

2. **Use esta expressão para construir uma integral definida que represente o volume do sólido.**

   $$V = \int_0^2 3x^{\frac{1}{4}}\,dx$$

3. **Resolva a integral.**

   $$3\left(\frac{4}{5}\right)x^{\frac{5}{4}}\Big|_{x=0}^{x=2}$$

   $$\frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}}\Big|_{x=0}^{x=2}$$

   Agora, resolva esta expressão:

   $$= \frac{12}{5}2^{\frac{5}{4}} - 0$$
   $$= \frac{12}{5}32^{\frac{1}{4}}$$
   $$\approx 5.7082$$

Dois Problemas Revolucionários

Professores de cálculo estão sempre procurando novas formas de torturar seus alunos. Certo, isso é um pouco de exagero. Ainda assim, algumas vezes é difícil compreender exatamente porque um problema sem muita utilidade prática entra para o *hall* da fama do Cálculo.

Nesta seção, ensinaremos como lidar com dois problemas de valor prático duvidoso (a menos que você considere prático passar em Cálculo III!). Primeiro, mostraremos como encontrar o volume de um *sólido de revolução*: um sólido criado pelo giro de uma função ao redor de um eixo. O método do fatiador, que discutimos na seção anterior, também se aplica aos problemas desse tipo.

A seguir, mostraremos como encontrar a área de uma *superfície de revolução*: uma superfície criada pelo giro de uma função ao redor de um eixo. Felizmente, existe uma fórmula para desenvolver ou solucionar esse tipo de problema.

Solidifique sua compreensão dos sólidos de revolução

Um sólido de revolução é criado ao pegar uma função, ou parte de uma função, e girá-la ao redor de um eixo — na maioria dos casos, ou no eixo x ou no eixo y.

Por exemplo, a Figura 10-6 exibe a função $y = 2 \text{ sen } x$ entre $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

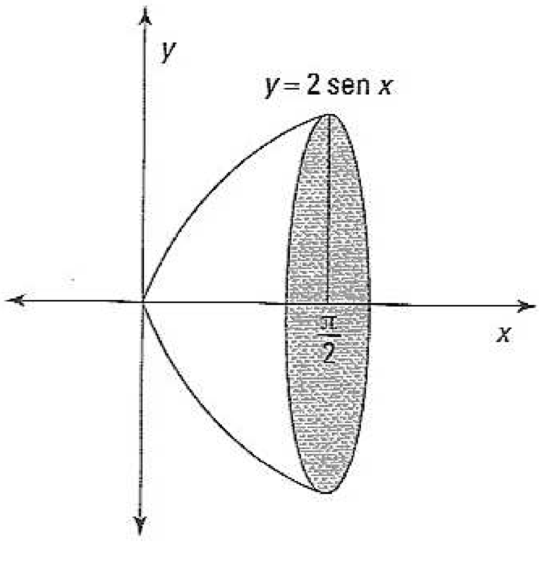


Figura10-6: Um sólido da revolução de $y = \text{sen } x$ ao redor do eixo x.

Cada sólido de revolução tem uma secção plana circular perpendicular ao eixo de revolução. Quando o eixo de revolução é o eixo x (ou qualquer outra linha que seja paralela ao eixo x), você pode usar o método do fatiador diretamente, como demonstramos anteriormente neste capítulo.

Contudo, quando o eixo de revolução é o eixo y (ou qualquer outra linha que seja paralela ao eixo y), você precisa modificar o problema como ensinamos na seção anterior "Vire o problema para o lado".

Para encontrar o volume desse sólido de revolução, utilize o método do fatiador:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma secção plana aleatória de um sólido (em termos de x).**

   Esta secção plana é um círculo com raio 2 sen x:

   $$A = \pi r^2 = \pi\,(2\,\text{sen}x)^2 = 4\pi\,\text{sen}^2 x$$

2. **Use essa expressão para construir uma integral definida (em termos de dx) que represente o volume do sólido.**

   Dessa vez, os limites de integração estão entre 0 e $\pi/2$:

   $$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\pi\text{sen}^2 x\, dx$$

   $$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x\, dx$$

3. **Resolva esta integral com o uso da fórmula de meio ângulo para senos, como ensinamos no Capítulo 7:**

   $$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx$$

   $$= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\; dx\right)$$

   $$= 2\pi\left(x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\text{sen}2x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\right)$$

   Agora, resolva:

   $$= 2\pi\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(\frac{1}{2}\text{sen}\pi - 0\right)\right]$$

   $$= 2\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

   $$= \pi^2$$

   $$\approx 9{,}8696$$

Então, o volume desse sólido de revolução é de aproximadamente 9,8696 unidades cúbicas.

Mais adiante, neste capítulo, mostraremos a você medições mais práticas dos volumes de sólidos de revolução.

Medição da superfície de revolução

O bom sobre encontrar a área de uma superfície de revolução é que há uma fórmula que você pode usar. Memorize-a e você já tem meio caminho andado.

Para encontrar a área de uma superfície de revolução entre a e b, use a seguinte fórmula:

$$A = \int_a^b 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Essa fórmula parece longa e complicada, mas faz muito mais sentido quando você gasta um minuto pensando nela. A integral é feita por dois pedaços:

- A fórmula do comprimento do arco, que mede o comprimento ao longo de uma superfície (veja o Capítulo 9).
- A fórmula da circunferência de um circulo, que mede o comprimento ao redor da superfície.

Então, multiplicar essas duas partes entre si é similar a multiplicar o comprimento e a largura para encontrar a área de um retângulo. Na verdade, a fórmula permite que você meça a superfície da área como um número infinito de pequenos retângulos.

Quando você está medindo a superfície de revolução de uma função $f(x)$ ao redor do eixo x, substitua $r = f(x)$ na fórmula que fornecemos:

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

Por exemplo, suponha que você deseje encontrar a superfície de revolução que é exibida na Figura 10-7.

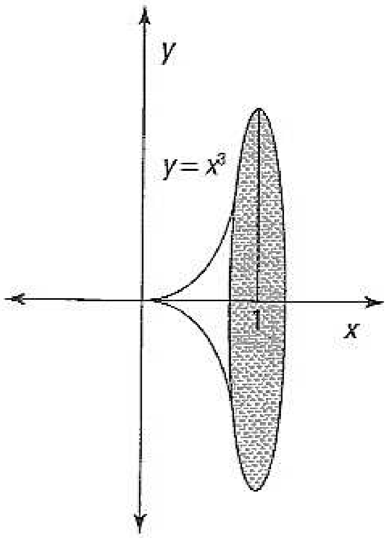


Figura 10-7: Meça a superfície de revolução de $y = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

Para resolver esse problema, primeiro observe que para $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. Então, ajuste o problema como segue:

$$A = \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx$$

Para começar, simplifique um pouco o problema:

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

Você pode resolver esse problema com o uso da substituição de variáveis:

Sendo $u = 1 + 9x^4$

$du = 36x^3\, dx$

$$= \frac{1}{36} \cdot 2\pi \int_1^{10} \sqrt{u}\, du$$

Perceba que mudamos os limites de integração: quando $x = 0$, $u = 1$. E quando $x = 1$, $u = 10$.

$$= \frac{1}{18} \pi \int_1^{10} \sqrt{u}\, du$$

Agora, você pode realizar a integração:

$$= \frac{1}{18} \pi \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{u=1}^{u=10}$$

$$= \frac{1}{27} \pi u^{\frac{3}{2}} \Big|_{u=1}^{u=10}.$$

Finalmente, resolva a integral definida:

$$= \frac{1}{27} \pi\, 10^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27} \pi\, 1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{27} \pi 10 \sqrt{10} - \frac{1}{27} \pi$$

$$\approx 3{,}5631$$

Encontre o Espaço no Meio

No Capítulo 9, mostramos como encontrar a área entre duas curvas pela subtração de uma integral pela outra. Esse mesmo princípio se aplica em três dimensões para encontrar o volume de um sólido que esteja no meio de duas superfícies diferentes.

O método do fatiador, que descrevemos anteriormente neste capítulo, é útil para muitos problemas desse tipo. O truque é encontrar uma forma de descrever a área em formato de rosquinha de uma secção plana como a diferença entre duas integrais: uma integral que descreve a forma toda menos a outra que descreve o buraco.

Por exemplo, suponha que você queira encontrar o volume do sólido exibido na Figura 10-8.

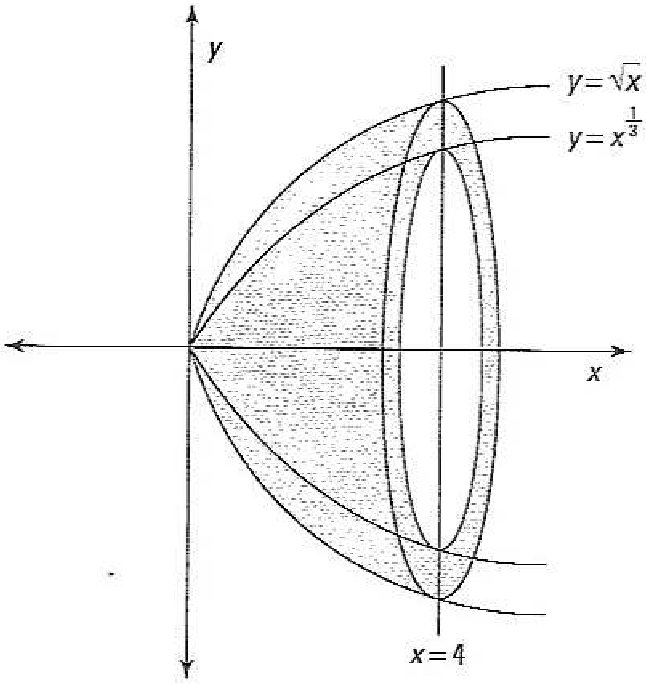


Figura 10-8: Uma figura com formato de vaso entre duas superfícies de revolução.

O sólido lembra um pouco uma tigela virada de lado. O limite externo é o sólido de revolução ao redor do eixo x da função $\sqrt{x}$ O limite interno é o sólido de revolução ao redor do eixo x da função $x^{1/3}$.

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma secção plana aleatória do sólido.**

   Quer dizer, encontre a área do círculo com raio $\sqrt{x}$ e subtraia a área do círculo com raio $x^{1/3}$:

   $$A=\pi\left(\sqrt{x}\right)^2-\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=\pi\left(x-x^{\frac{2}{3}}\right)$$

2. **Use esta expressão para construir uma integral definida que represente o volume do sólido.**

   Os limites de integração dessa vez são 0 e 4.

   $$V=\int_0^4 \pi\left(x-x^{\frac{2}{3}}\right)dx$$

3. Resolva a integral:

$$= \pi \int_0^4 \left(x - x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \pi \left(\int_0^4 x\,dx - \int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\,dx \right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=4} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_{x=0}^{x=4} \right)$$

Agora, resolva esta expressão:

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} 4^2 - 0 \right) - \left(\frac{3}{5}\, 4^{\frac{5}{3}} - 0 \right) \right]$$

$$= \pi \left(8 - \frac{3}{5}\, 1{,}024^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$\approx 6.1336$$

Eis um problema que reúne tudo sobre o método do fatiador: encontre o volume do sólido exibido na Figura 10-9. Esse sólido está entre a superfície de uma revolução $y = \ln x$ e a superfície de uma revolução $y = x^{\frac{3}{4}}$, limitada abaixo por $y = 0$ e acima por $y = 1$.

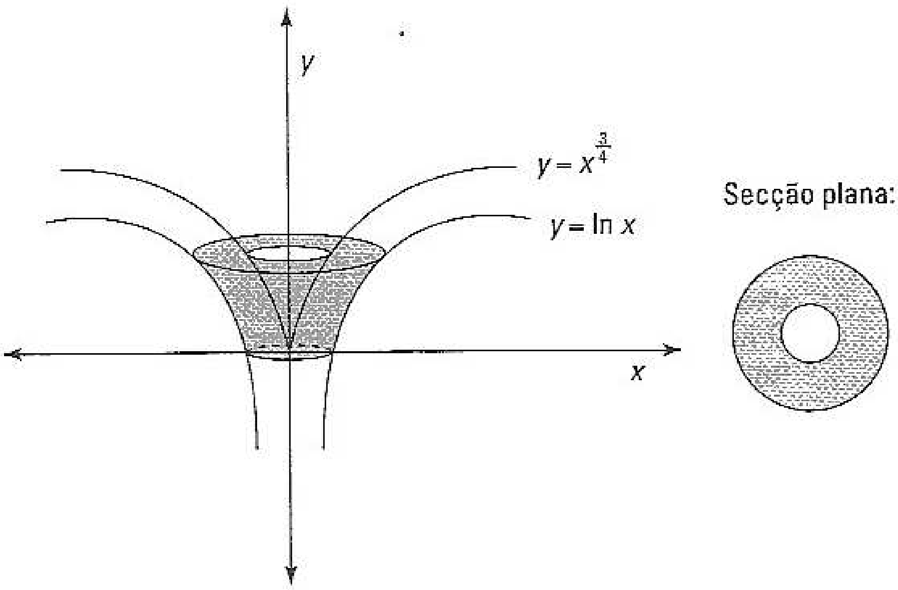


Figura 10-9: Outro sólido formado entre duas superfícies de revolução.

A secção plana desse sólido é exibida no lado direito da Figura 10-9: Um círculo com um buraco no meio.

Perceba, entretanto, que essa secção plana é perpendicular ao eixo y. Para usar o método do fatiador, a secção plana deve ser perpendicular ao eixo x. Modifique o problema utilizando inversos, como demonstramos em "Vire o problema para o lado":

$$x = \ln y \qquad x = y^{\frac{3}{4}}$$
$$e^x = y \qquad x^{\frac{4}{3}} = y$$

O problema resultante é exibido na Figura 10-10.

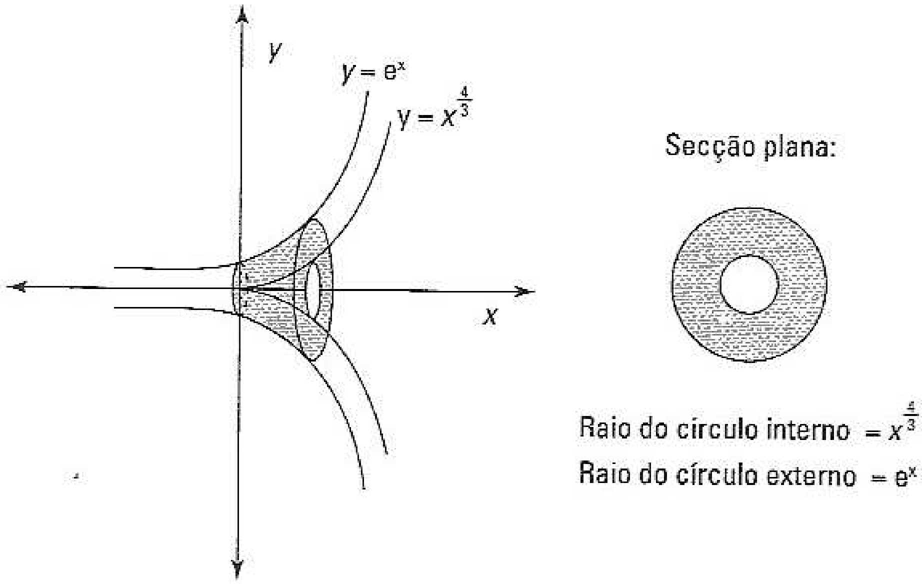


Figura 10-10: Use os inversos para girar o problema da Figura 10-9, de forma que você possa utilizar o método do fatiador.

Agora, você pode utilizar o método do fatiador para resolver o problema:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma secção plana aleatória do sólido.**

   Quer dizer, encontre a área do círculo com raio e^x e subtraia da área do círculo com raio $x^{\frac{4}{3}}$. Isso é apenas geometria, mas vamos devagar para que você possa ver todos os passos. Lembre-se de que a área de um círculo é πr^2:

   $$\begin{aligned} A &= \text{Área do círculo externo — Área do círculo interno} \\ &= \pi (e^x)^2 - \pi \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^2 \\ &= \pi e^{2x} - \pi x^{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

2. **Use essa expressão para construir uma integral definida que represente o volume do sólido.**

   Os limites de integração são 0 e 1:

$$V = \int_0^1 \left(\pi e^{2x} - \pi x^{\frac{8}{3}}\right) dx$$

3. **Resolva a integral:**

$$= \int_0^1 \pi e^{2x}\, dx - \int_0^1 \pi x^{\frac{8}{3}}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{3\pi}{11} x^{\frac{11}{3}} \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} e^{2} - \frac{\pi}{2} e^{0}\right) - \left(\frac{3\pi}{11}(1)^{\frac{11}{3}} - \frac{3\pi}{11}(0)^{\frac{11}{3}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{11}$$

$$\approx 2{,}9218$$

   Então, o volume desse sólido é aproximadamente 2,9218 unidades cúbicas.

Faça o Jogo das Camadas

O *método das camadas* é uma alternativa ao método do fatiado, o qual discutimos anteriormente neste capítulo. Ele permite que você calcule o volume de um sólido ao medir o volume de muitas superfícies concêntricas ao redor do volume, chamadas de "camadas".

Embora o método das camadas funcione somente para sólidos com secções planas circulares, ele é ideal para sólidos de revolução ao redor do eixo *y*, pois você não tem de usar as funções inversas, como demonstramos em "Vire o Problema para o Lado". Eis como funciona:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma camada aleatória do sólido em termos de x.**
2. **Use essa expressão para construir uma integral definida (em termos de dx) que represente o volume do sólido.**
3. **Resolva essa integral.**

Como você pode ver, esse método lembra o método do fatiador. A principal diferença é que você está medindo a área de camadas em vez de secções planas.

Abra e meça uma lata de sopa

Você pode usar uma lata de sopa — ou qualquer outra lata que tenha um rótulo de papel nela — como um prático auxílio visual para demonstrar como funciona o método de camadas. Para começar, vá até a despensa e pegue uma lata.

Suponha que sua lata tenha o tamanho industrial, como um raio de 3 cm e uma altura de 8 cm. Você pode usar a fórmula do cilindro para descobrir seu volume, como a seguir:

$$V = A_b \cdot h = 3^2\pi \cdot 8 = 72\pi$$

Outra opção é o método do fatiador, como ensinamos anteriormente neste capítulo. Uma terceira opção, que é o foco aqui, é o método das camadas.

Para compreender o método das camadas, fatie o papel da lata verticalmente, e remova-o cuidadosamente da lata, como exibido na Figura 10-11. (Enquanto estiver fazendo isso, dê uma lida no rótulo para que, depois, você não esqueça que lata é aquela.)

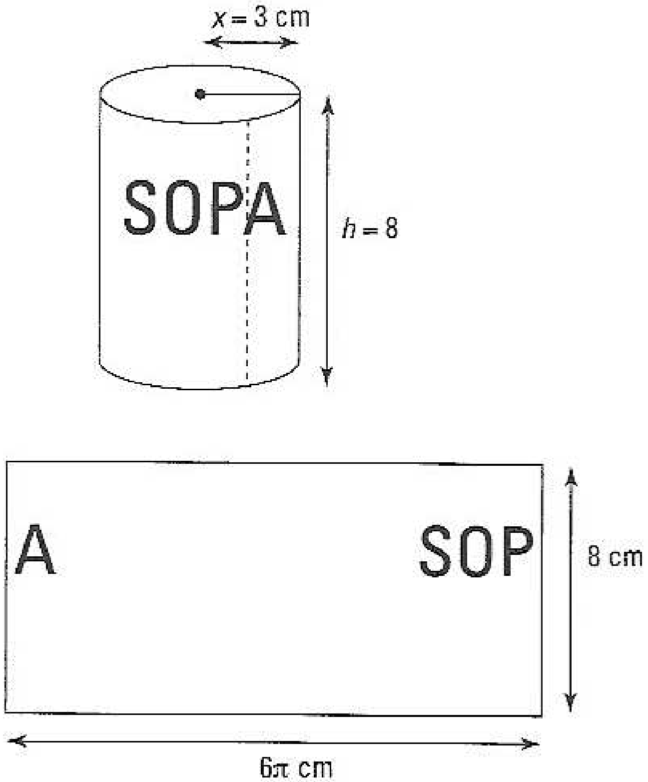


Figura 10-11: Remover o rótulo da lata pode ajudá-lo a compreender o método das camadas.

Perceba que o rótulo é um simples retângulo. Seu lado menor é igual ao comprimento da altura da lata (8 cm) e seu lado mais longo é igual à circunferência ($2\pi \cdot 3$ cm = 6π cm). Então, a área desse retângulo é igual a 48 cm^2.

Agora, eis o passo crucial: imagine que toda a lata é feita de infinitos rótulos enrolados concentricamente ao redor um do outro, até seu núcleo. A área de cada um desses retângulos é:

$$A = 2\pi x \cdot 8 = 16\pi x$$

A variável x nesse caso é qualquer raio possível, de 0 (o raio do círculo exatamente no centro da lata) até 3 (o raio do círculo no limite externo). Eis como utilizar o método das camadas, passo a passo, para encontrar o volume da lata:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma camada aleatória da lata (em termos de *x*):**

   $$A = 2\pi x \cdot 8 = 16\pi x$$

2. **Use essa expressão para construir uma integral definida (em termos de *dx*) que represente o volume da lata.**

   Lembre-se de que, com o método das camadas, você está adicionando camadas a partir do centro (onde o raio é 0) até a camada externa (onde o raio é 3). Então use estes números como limites de integração:

   $$V = \int_0^3 16\pi x \, dx$$

3. **Resolva a integral:**

   $$= 16\pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=3}$$

   $$= 8\pi x^2 \Big|_{x=0}^{x=3}$$

   Agora, resolva esta expressão:

   $$= 8\pi (3)^2 - 0 = 72\pi$$

   O método das camadas verifica que o volume da lata é 72π cm^3.

Utilização do método das camadas

Uma vantagem do método das camadas sobre o método do fatiador surge quando você está medindo o volume de revolução ao redor do eixo y.

Anteriormente, neste capítulo, informamos que o método do fatiador funciona melhor quando um sólido está de lado — quer dizer, quando você pode fatiá-lo perpendicularmente ao eixo x. Mas, quando as secções planas similares de um sólido são perpendiculares ao eixo y, você precisa usar as inversas para rearranjar o problema antes de começar a fatiar. (Veja a seção anterior "Vire o Problema para o Lado" para ter mais detalhes.)

Esse passo de realinhamento não é necessário para o método das camadas. Isso faz com que esse método seja ideal para medir sólidos de revolução ao redor do eixo y. Por exemplo, suponha que você deseje medir o volume do sólido exibido na Figura 10-12.

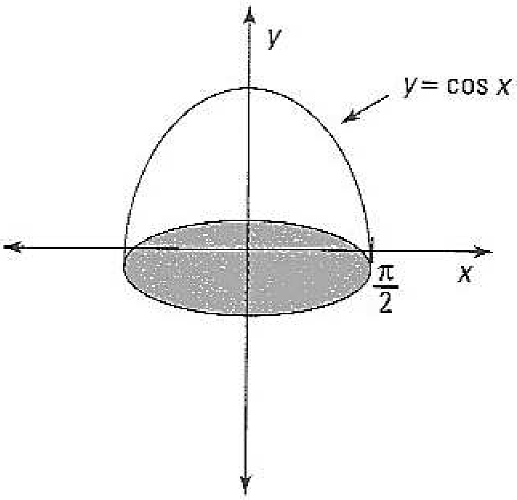


Figura 10-12: Use o método das camadas para encontrar o volume de um sólido de revolução.

Eis como o método das camadas pode oferecer a resolução sem o uso dos inversos:

1. **Encontre uma expressão que represente a área de uma camada aleatória do sólido (em termos de x).**

   Lembre-se de que cada camada é um retângulo com dois lados diferentes: um lado é a altura da função em x — quer dizer, $\cos x$. O outro lado é a circunferência do sólido em x — isto é, $2\pi x$. Então, para encontrar a área de uma camada, multiplique esses dois números entre si:

   $$A = 2\pi x \cos x$$

2. **Use essa expressão para construir uma integral definida (em termos de dx) que represente o volume do sólido.**

   Nesse caso, lembre que você está somando todas as camadas do centro (em $x = 0$) até a camada externa (em $x = \frac{\pi}{2}$).

   $$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \cos x \, dx$$

   $$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$$

3. Resolva a integral.

Essa integral é bem fácil de resolver usando a integração por partes:

$$x\operatorname{sen}x + \cos x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

Agora, resolva esta expressão:

$$= \left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0\operatorname{sen}0 + \cos 0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - (0 + 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\approx 0{,}5708$$

Então, o volume do sólido é de aproximadamente 0,5708 unidades cúbicas.

Saiba Quando e Como Resolver Problemas em 3D

Já que os estudantes, com frequência, ficam confusos quando se trata da resolução de problemas de cálculo em 3D, aqui está uma perspectiva final sobre todos os métodos deste capítulo e sobre como escolher um entre eles.

Primeiro, lembre-se de que cada problema neste capítulo está em uma dessas duas categorias:

- Encontrar a área de uma superfície de revolução
- Encontrar o volume de um sólido

No primeiro caso, use a fórmula que oferecemos anteriormente neste capítulo, em "Medição da superfície de revolução".

No segundo caso, lembre-se de que a chave para medir o volume de qualquer sólido é fatiá-lo na direção de onde possua *secções planas similares* cujas áreas possam ser medidas facilmente — por exemplo, um círculo, um quadrado ou triângulo. Então, sua primeira pergunta é se essas secções planas similares estão arranjadas horizontal ou verticalmente.

- **Horizontalmente** significa que o sólido já está em posição para o método do fatiador. (Se isso ajudar, imagine fatiar um salame em um fatiador de frios. O salame deve estar alinhado de lado — quer dizer, horizontalmente — antes que possa começar a ser fatiado.)
- **Verticalmente** significa que o sólido está de pé, de forma que as fatias estão empilhadas uma em cima da outra.

Quando as secções planas estão arrumadas horizontalmente, o método do fatiador é a forma mais fácil de lidar com o problema (veja "Fatie seu Caminho para o Sucesso", anteriormente neste capítulo).

Quando as secções planas estão arrumadas verticalmente, contudo, sua próxima pergunta é se essas secções planas são círculos:

- Se as secções planas *não* são círculos, você deve usar as inversas para virar o sólido na direção horizontal (como discutimos em "Vire o Problema para o Lado").
- Se elas *são* círculos, você pode usar as inversas para virar o sólido na direção horizontal (como discutimos em "Vire o Problema para o Lado") *ou* usar o método das camadas (como discutimos em "Faça o Jogo das Camadas").

Parte IV
Séries Infinitas

A 5ª Onda Por Rich Tennant

"As séries infinitas têm a ver com sequências. A sequência de que me lembro melhor, n + 1 sobre n², é igual a confusa expressão 'dor de cabeça mais terrível'."

Nesta parte ...

Introduziremos as séries infinitas — quer dizer, a soma de um número infinito de termos. Ensinamos a você o básico sobre trabalhar com sequências e séries e mostramos várias formas de determinar se uma série é convergente ou divergente. Você também descobrirá como utilizar a série de Taylor para expressar e resolver uma variedade de funções.

Capítulo 11

Siga uma Sequência, Vencendo as Séries

Neste Capítulo

- Conheça uma variedade de notações para as sequências
- Diga se uma sequência é convergente ou divergente
- Expresse séries tanto na notação sigma quanto na notação expandida
- Teste uma série para saber se é convergente ou divergente

Justamente quando você pensa que o semestre está melhorando, seu professor de Cálculo II introduz um novo tópico: as séries infinitas.

Quando você se envolve com elas, as séries não são tão difíceis. Afinal, uma série é apenas um monte de números somados entre si. Claro, acontece que essa quantidade de números é infinita, mas a soma provavelmente é a matemática mais fácil do planeta.

Por outro lado, o último mês do semestre é o mais apertado. Você já está ansioso com os exames finais e esperando um intervalo nos estudos. Quando você percebe que o professor não está brincando e realmente espera que você saiba essa matéria, as séries infinitas podem levá-lo a uma espiral infinita de desespero: Por que isso? Por que agora? Por que comigo?

Neste capítulo, ensinaremos a você o básico sobre as séries. Primeiro você navegará até essas novas águas lentamente ao examinar as sequências infinitas. Quando você compreender as sequências, as séries fazem muito mais sentido. A seguir, introduzimos as séries infinitas. Discutimos como expressar uma série tanto na notação expandida quanto na notação sigma, por isso esperamos que você esteja acostumado com a notação sigma. Também mostramos a você como cada série está relacionada a duas sequências.

A seguir, introduziremos o tópico importantíssimo da convergência e divergência. Esse conceito se torna muito complexo, então ofereceremos o básico neste capítulo e guardaremos as informações mais complexas para o Capítulo 12. Finalmente, introduziremos alguns tipos importantes de séries.

Introdução às Sequências Infinitas

Uma sequência de números é simplesmente uma quantidade de números em uma ordem específica. Por exemplo:

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

$2, -2, 2, -2, \ldots$

$0, 1, -1, 2 -2, 3, \ldots$

Quando uma sequência continua para sempre, é uma *sequência infinita*. O cálculo — que foca em tudo que é infinito — se preocupa predominantemente com sequências infinitas.

Cada número em uma sequência é chamado de *termo* daquela sequência. Então, na sequência 1, 4, 9, 16, ..., o *primeiro termo* é 1, o *segundo termo* é 4, e assim por diante.

Compreender as sequências é um primeiro passo importante no caminho da compreensão das séries.

Compreenda as notações para as sequências

A notação mais simples para definir uma sequência é uma variável com n subscrito, cercada por chaves. Por exemplo:

$\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$

$\{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

$\{c_n\} = \{4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots\}$

Você pode fazer referência a um termo específico na sequência utilizando o subscrito:

$a_1 = 1 \qquad b_3 = \frac{1}{3} \qquad c_6 = 14\pi$

CUIDADO!

Tenha certeza de que você está entendendo as diferenças entre notação com e sem chaves:

- A notação $\{a_n\}$ *com* chaves se refere à sequência *inteira*.
- A notação a_n *sem* chaves se refere ao termo n da sequência.

Ao definir uma sequência, em vez de listar os primeiros termos, você pode declarar uma regra baseada em n. (Isso é similar à definição típica de uma função.) Por exemplo:

$\{a_n\}$, onde $a_n = n^2$

$\{b_n\}$, onde $b_n = \frac{1}{n}$

$\{c_n\}$, onde $c_n = 2(n + 1)\pi$

Algumas vezes, para esclarecer mais, a notação inclui os primeiros termos mais uma regra para achar o termo n da sequência. Por exemplo:

$\{a_n\} = \{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$

$\{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$

$\{c_n\} = \{4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots, 2(n + 1)\pi, \ldots\}$

Podemos tornar essa notação mais concisa ao anexar valores iniciais e finais para n:

$$\{a_n\} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{c_n\} = \{2n\pi\}_{n=2}^{\infty}$$

Esse último exemplo aponta para o fato de que o valor inicial de n não tem de ser 1, o que lhe garante mais flexibilidade para definir uma série de números com o uso de uma regra.

DICA

Não deixe que a notação pomposa para as sequências de números o atrapalhe. Quando você se depara com uma nova sequência que é definida por uma regra, anote os primeiros quatro ou cinco números dela. Normalmente, depois que você enxergar o padrão, você descobrirá que o problema é muito mais fácil.

Observe as sequências convergentes e divergentes

Cada sequência infinita é convergente ou divergente:

- Uma sequência convergente tem um limite, isto é, ela se aproxima de um número real.
- Uma sequência *divergente* não possui limite.

Por exemplo, eis uma sequência convergente:

$$\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\}$$

Essa sequência se aproxima de 0, então:

$$\lim\{a_n\} = 0$$

Portanto, essa sequência *converge* até 0.

Eis outra sequência convergente:

$$\{b_n\} = \{7, 9, 7\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 8\frac{1}{4}, ...\}$$

Dessa vez, a sequência se aproxima de 8, de baixo e de cima, então:

$$\lim\{b_n\} = 8$$

Em muitos casos, contudo, uma sequência *diverge* — quer dizer, ela deixa de se aproximar de um número real. A divergência pode ocorrer de duas formas. O tipo mais óbvio de divergência ocorre quando uma sequência explode ao infinito ou ao infinito negativo — quer dizer, ela se distancia mais e mais de 0 a cada termo. Eis alguns exemplos:

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, ...$$

$$\ln 1, \ln 2, \ln 3, \ln 4, \ln 5, ...$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$$

Em cada um desses casos, a sequência se aproxima de ∞ ou $-\infty$, então o limite da sequência *não existe* (NE). Portanto, a sequência é divergente.

Um segundo tipo de divergência ocorre quando uma sequência oscila entre dois ou mais valores. Por exemplo:

$$0, 7, 0, 7, 0, 7, 0, 7, ...$$

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, ...$$

Nesses casos, a sequência vai e volta indefinidamente, nunca se assentando em um valor. Novamente, o limite da sequência *não existe*, então a sequência é divergente.

Introdução às Séries Infinitas

Em contraste com uma sequência infinita (que é uma lista sem fim de números), uma *série infinita* é uma soma sem fim de números. Você pode mudar qualquer sequência infinita para uma série infinita apenas trocando as vírgulas por sinais de mais. Por exemplo:

$$1, 2, 3, 4, \ldots \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots \qquad 1 + -1 + \frac{1}{2} + -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + -\frac{1}{4} + \ldots$$

As duas principais notações para as séries são a notação sigma e a notação expandida. A *notação sigma* fornece uma regra explícita para gerar as séries (veja no Capítulo 2 o básico sobre notação sigma). A *notação expandida* oferece os primeiros termos suficientes de uma série, de forma que o padrão que a gerou se torne claro.

Por exemplo, veja três séries definidas com o uso de ambas as formas de notação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \frac{5}{e^5} + \ldots$$

Como você pode ver, uma série pode começar com qualquer inteiro.

Assim como nas sequências (veja "Introdução às Sequências Infinitas", anteriormente neste capítulo), cada série é convergente ou divergente:

- Uma série convergente resulta em um número real.
- Uma série divergente não resulta em um número real.

Para ficar claro como a evolução de uma série está ligada com a convergência e a divergência, oferecemos alguns exemplos. Para começar, considere esta série convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Perceba que à medida que você soma essa série, da esquerda para a direita, termo a termo, o total somado é uma sequência que se aproxima de 2.

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots$$

Essa sequência é chamada de *sequência de somas parciais* para essa série. Discutiremos sequências de somas parciais com mais detalhes adiante, em "Conecte uma Série com Duas Sequências Relacionadas".

LEMBRE-SE

Por enquanto, por favor, lembre-se de que o valor de uma série é igual ao limite de sua sequência de somas parciais. Nesse caso, já que o limite da sequência é 2, você pode desenvolver essa série como segue:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Portanto, essa série *converge* até 2.

Frequentemente, contudo, uma série *diverge*, isto é, ela não se iguala a qualquer número real. Assim como nas sequências, a divergência pode ocorrer de duas formas. O tipo mais óbvio de divergência acontece quando uma série vai ao infinito ou ao infinito negativo. Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n = -1 + -2 + -3 + -4 + \ldots$$

Desta vez, observe o que acontece quando você soma a série termo a termo:

$$-1, -3, -6, -10, \ldots$$

Claramente, essa sequência de somas parciais diverge ao infinito negativo, então a série também é divergente.

Um segundo tipo de divergência ocorre quando uma série se alterna entre valores positivos e negativos, de tal forma que essa série nunca se aproxima de um valor. Por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 + -1 + 1 + -1 + \ldots$$

Então, eis a sequência de somas parciais relacionada:

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

Nesse caso, a sequência de somas parciais se alterna para sempre entre 1 e 0, então é divergente; portanto, a série também é divergente. Esse tipo de série é chamado, não surpreendentemente, de *série alternada*. Discutiremos as séries alternadas mais detalhadamente no Capítulo 12.

DICA

A convergência e a divergência são, talvez, os tópicos mais importantes de suas últimas semanas de Cálculo II. Muitas das questões de seu exame pedirão que você defina se determinada série é convergente ou divergente.

Posteriormente, neste capítulo, mostraremos como decidir se alguns tipos importantes de séries são convergentes ou divergentes. O Capítulo 12 oferece uma quantidade de ferramentas úteis para responder a essas questões de forma mais geral. Por enquanto, apenas mantenha em mente essa ideia importante sobre convergência e divergência.

Acostume-se à Notação Sigma

A notação sigma é uma forma compacta e prática de representar séries.

Certo, essa é a versão oficial da história. O que também é verdade é que a notação sigma pode ser confusa e assustadora — especialmente quando o professor começa a rabiscá-la em todo o quadro negro na velocidade da luz enquanto explica algum exemplo complexo. Muitos estudantes comem poeira (ou pó de giz).

Ao mesmo tempo, a notação sigma é útil e importante, pois ela fornece uma forma concisa de expressar séries e de manipulá-las matematicamente.

Nesta seção, ofereceremos várias dicas práticas para trabalhar com a notação sigma. Alguns dos usos dessas dicas se tornam mais claros à medida que você continua estudando as séries, mais adiante neste capítulo e nos Capítulos 12 e 13. Por enquanto, apenas adicione essas ferramentas em sua caixa e as utilize quando for necessário.

Escreva a notação sigma na forma expandida

DICA

Quando você está trabalhando com uma série desconhecida, comece por escrevê-la utilizando tanto a notação sigma quanto a notação expandida. Esse hábito garante que você melhore sua compreensão sobre as séries. Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n}$$

Da forma como está, você pode não perceber com o que essa série parece, então expanda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{4}{6} + \frac{8}{9} + \frac{16}{12} + \frac{32}{16} + \ldots$$

À medida que você gasta um pouco de tempo gerando essa série, ela começa a ficar menos assustadora. Por um lado, você já pode ter notado que em uma corrida entre o numerador e o denominador, eventualmente o numerador empata e passa à frente. Pois os termos eventualmente ficam maiores que 1, e a série vai ao infinito, então ela *diverge*.

Veja mais de uma maneira

Geralmente, qualquer série expressa na notação sigma pode ser reescrita de uma forma levemente alterada. Por exemplo:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

Você pode expressar essa série na notação sigma como a seguir:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

Alternativamente, você pode expressar a mesma série em qualquer das seguintes formas:

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

Dependendo do problema que você está tentando resolver, você pode encontrar mais vantagens em uma dessas expressões do que na outra — por exemplo, ao usar o teste de comparações que introduziremos no Capítulo 12. Por enquanto, apenas assegure-se de manter em mente a flexibilidade que está à sua disposição ao expressar as séries na notação sigma.

Descubra a regra do múltiplo constante para as séries

No Capítulo 4 você descobriu que a Regra do Múltiplo Constante para a integração permite que você simplifique um integral pela fatoração de uma constante. Essa opção também está disponível quando você está trabalhando com série. Eis a regra:

$$\Sigma\, ca_n = c\,\Sigma\, a_n$$

Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2} = 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Para ver por que essa regra funciona, primeiro expanda a série de forma que você possa enxergar aquilo com que está trabalhando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2} = 7 + \frac{7}{4} + \frac{7}{9} + \frac{7}{16} + \ldots$$

Trabalhando na forma expandida, você pode fatorar o 7 de cada termo:

$$= 7\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$$

Agora, expresse o conteúdo dos parênteses na notação sigma:

$$= 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Como um passe de mágica, esse procedimento demonstra que as duas expressões em sigma são iguais. Mas essa mágica, na verdade, não é mais exótica do que sua velha amiga do ensino fundamental, a propriedade distributiva.

Examine a regra da soma para as séries

Eis outra ferramenta útil para aumentar sua caixa de ferramentas de truques em sigma. Essa regra espelha a Regra da Soma da Integração (veja o Capítulo 4), que permite que você divida uma soma dentro de uma integral na soma de duas integrais separadas. Similarmente, você pode quebrar a soma dentro de uma série na soma de duas séries separadas:

$$\Sigma\,(a_n + b_n) = \Sigma\, a_n + \Sigma\, b_n$$

Por exemplo:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

Um pouco de álgebra permite que você divida essa fração em dois termos:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)$$

Agora, a regra permite que você divida esse resultado em duas séries:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Essa soma de duas séries é equivalente às séries com que você começou. Assim como na Regra da Soma para a Integração, expressar uma série como a soma de duas séries mais simples tende a tornar mais fácil a resolução de problemas. Genericamente falando, conforme avança com as séries, qualquer truque que você possa encontrar para simplificar uma série difícil é algo benéfico.

Conecte uma Série com Duas Sequências Relacionadas

Toda série tem duas sequências relacionadas. A distinção entre uma sequência e uma série é:

- Uma sequência é uma *lista* de números separados por *vírgulas* (por exemplo: 1, 2, 3, ...).
- Uma série é uma *soma* de números separados por *sinais de mais* (por exemplo: 1 + 2 + 3 + ...).

Quando você enxerga como uma série e duas sequências relacionadas são distintas, mas também relacionadas, você obtém uma compreensão mais clara do funcionamento das séries.

Uma série e sua sequência de definição

A primeira sequência relacionada a uma série é simplesmente a sequência que define a série em primeiro lugar. Por exemplo, eis três séries escritas tanto na notação sigma quanto na notação expandida, cada uma fazendo par com sua sequência de definição:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Quando uma sequência $\{a_n\}$ já está definida, você pode usar a notação $\Sigma\, a_n$ para se referir à série relacionada começando em $n = 1$. Por exemplo, quando $\{a_n\} = \frac{1}{n^2}$, $\Sigma\, a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ ....

Compreender a distinção entre uma série e uma sequência que a define é importante por dois motivos. Primeiro, e o mais básico de tudo, você não deseja confundir os conceitos de sequência e série. Segundo, a sequência que define uma série pode fornecer informações importantes sobre a série. Veja o Capítulo 12 para encontrar mais sobre o teste do enésimo termo, que fornece uma conexão entre uma série e sua sequência de definição.

Uma série e sua sequência de somas parciais

Você pode aprender muito sobre uma série encontrando a *soma parcial* dos primeiros termos. Por exemplo, eis uma série que você já viu antes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

E aqui está a soma parcial dos quatro primeiros termos dessa série:

$$\sum_{n=1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Você pode transformar a soma parcial dessa série em uma sequência como a que segue:

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^n}{2^n - 1}, \ldots\right\}$$

De forma geral, cada série $\Sigma\, a_n$ tem uma sequência $\{S_n\}$ de somas parciais relacionada. Por exemplo, aqui estão alguns desses pares:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \qquad \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots \qquad \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{23}{12}, \frac{163}{60}, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots \qquad 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \ldots$$

LEMBRE-SE

Cada série e sua sequência de somas parciais relacionada são ambas *convergentes* ou ambas *divergentes*. Além disso, se são convergentes, ambas convergem para o mesmo número.

Essa regra não deveria ser uma grande surpresa. Afinal, uma sequência de somas parciais simplesmente resulta em um total para onde a série está se encaminhando. Ainda assim, essa regra pode ser útil. Por exemplo, suponha que você deseje saber se a seguinte sequência é convergente ou divergente:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \ldots$$

Mas que sequência é essa, então? Sob um exame mais profundo, contudo, você descobre que essa é a sequência de somas parciais de cada série simples:

$$1$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

Essa série, chamada de série harmônica, é divergente, então você pode concluir que sua sequência de somas parciais também diverge.

Reconheça Séries Geométricas e Séries P

À primeira vista, muitas séries parecem estranhas e desconhecidas. Mas algumas grandes categorias de séries pertencem ao *hall* da fama. Quando você descobre como identificar esses tipos de séries, você tem uma grande vantagem para começar a descobrir se elas são convergentes ou divergentes. Em alguns casos, você também pode encontrar o valor exato de uma série convergente sem gastar uma eternidade somando números.

Nesta seção, mostraremos a você como reconhecer e trabalhar com dois tipos comuns de séries: as séries geométricas e as séries *P*.

Conheça as séries geométricas

Uma série geométrica é qualquer série na seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

Eis alguns exemplos de séries geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1{,}000} + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{100^n} = 3 + \frac{3}{100} + \frac{3}{10{,}000} + \frac{3}{1{,}000{,}000} + \ldots$$

Na primeira série, $a = 1$ e $r = 2$. Na segunda, $a = 1$ e $r = \frac{1}{10}$. E na terceira, $a = 3$ e $r = \frac{1}{100}$.

Se você está inseguro se uma série é geométrica, você pode testá-la como segue:

1. **Iguale a ao primeiro termo da série.**
2. **Iguale r ao segundo termo dividido pelo primeiro termo.**
3. **Verifique se a série se encaixa na forma $a + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ...$**

Por exemplo, suponha que você deseja descobrir se a seguinte série é geométrica:

$$\frac{8}{5} + \frac{6}{5} + \frac{9}{10} + \frac{27}{40} + \frac{81}{160} + \frac{243}{640} + \ldots$$

Use o procedimento que destacamos da seguinte forma:

1. **Iguale a ao primeiro termo da série:**

   $$a = \frac{8}{5}$$

2. **Iguale r ao segundo termo dividido pelo primeiro termo:**

   $$r = \frac{6}{5} \div \frac{8}{5} = \frac{3}{4}$$

3. **Verifique se a série se encaixa na forma $a + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$:**

$$a = \frac{8}{5}$$

$$ar = \frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{5}$$

$$ar^2 = \frac{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{10}$$

$$ar^3 = \frac{9}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{40}$$

Como você pode ver, essa série é geométrica. Para encontrar o limite de uma série geométrica $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$, use a seguinte fórmula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Então, o limite da série do exemplo anterior é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{8}{5}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{32}{5}$$

Quando o limite de uma série existe, como nesse exemplo, a série é chamada de *convergente*. Então, você diz que a série *converge* para $\frac{32}{5}$.

Em alguns casos, contudo, o limite de uma série geométrica não existe (NE). Nesse caso, a série é *divergente*. Eis a regra completa que indica se uma série é convergente ou divergente:

LEMBRE-SE

Para qualquer série geométrica $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$, se r cair no conjunto aberto $(-1, 1)$, a série converge para $\frac{a}{1-r}$; do contrário, a série diverge.

Um exemplo esclarece o porquê de isso acontecer. Observe a seguinte série geométrica:

$$1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \frac{125}{64} + \frac{625}{256} + \ldots$$

Nesse caso, $a = 1$ e $r = 5/4$. Já que $r > 1$, cada termo nessa série é maior que o termo que o precede, então a série cresce em uma velocidade cada vez mais rápida.

Essa série ilustra uma regra simples, porém importante, para decidir se uma série é convergente ou divergente: uma série pode ser convergente apenas quando sua sequência relacionada *converge para zero*. Discutiremos essa importante ideia (chamada de *teste do enésimo termo*) de forma mais aprofundada no Capítulo 12.

Similarmente, observe este exemplo:

$$1 + -\frac{5}{4} + \frac{25}{16} + -\frac{125}{64} + \frac{625}{256} + \ldots$$

Dessa vez, $a = 1$ e $r = -\frac{5}{4}$. Já que $r < -1$, os termos ímpares crescem de forma positiva e os termos pares aumentam de forma negativa. Então a sequência relacionada de somas parciais se alterna constantemente entre positivo e negativo, com cada termo se distanciando ainda mais de zero do que o termo precedente.

Uma série na qual os termos alternados são positivos e negativos é chamada de *série alternada*. Discutiremos séries alternadas mais detalhadamente no Capítulo 12.

DICA

Falando genericamente, a série geométrica é o único tipo de série que tem uma fórmula simples para calcular seu valor. Então, quando um problema pedir o valor de uma série, tente colocá-la na forma de uma série geométrica.

Por exemplo, suponha que pediram que você calculasse o valor desta série:

$$\frac{5}{7} + \frac{10}{21} + \frac{20}{63} + \frac{40}{189} + \ldots$$

O fato de que estão pedindo que você calcule o valor da série deveria indicar a você que ela é geométrica. Use o procedimento que destacamos anteriormente e encontre a e r:

$$a = \frac{5}{7}$$

$$r = \frac{10}{21} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$$

Então, eis como expressar a série, na notação sigma, como uma série geométrica em termos de a e r:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{7} + \frac{10}{21} + \frac{20}{63} + \frac{40}{189} + \ldots$$

Nesse ponto, você pode usar a fórmula para calcular o valor desta série:

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{5}{7}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{15}{7}$$

Localize a série P

Outro importante tipo de série é a chamada série *P*. Uma *série P* é qualquer série na seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

Eis um exemplo comum de uma série *P*, quando $p = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Outros exemplos de série P:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} = 1 + \frac{1}{32} + \frac{1}{243} + \frac{1}{1{,}024} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

CUIDADO!

Não confunda uma série P com uma série geométrica (que tratamos na seção anterior). Eis a diferença:

- Uma série geométrica tem uma variável n no expoente — por exemplo, $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Uma série P possui a variável na base — por exemplo, $\Sigma \frac{1}{n^2}$.

Assim como nas séries geométricas, existe uma regra simples para determinar se uma série P é convergente ou divergente.

LEMBRE-SE

Uma série P converge quando $p > 1$ e diverge quando $p \leq 1$.

Demonstraremos a prova desse teorema no Capítulo 12. Nesta seção, mostramos a você o porquê de alguns exemplos importantes de série P serem convergentes ou divergentes.

Harmonia com as séries harmônicas

Quando $p = 1$, a série P assume a seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Essa série P é importante o suficiente para ter seu próprio nome: a *série harmônica*. A série harmônica é *divergente*.

Teste de uma série P quando $p = 2$, $p = 3$ e $p = 4$

Aqui estão as série P quando p é igual a alguns números maiores que 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \ldots$$

Já que $p > 1$, essas séries são todas *convergentes*.

Teste de série P quando $p = \frac{1}{2}$

Quando $p = \frac{1}{2}$, a série *P* aparece assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$$

Já que $p \leq 1$, essa série *diverge*. Para entender porque ela diverge, perceba que quando *n* é um número quadrado, o *enésimo* termo é igual a $\frac{1}{n}$. Então, essa série *P* inclui cada termo da série harmônica, além de muitos outros termos. Já que a série harmônica é divergente, essa série também é divergente.

Capítulo 12

Para Onde Vai? Teste a Convergência e a Divergência

Neste Capítulo

- Compreenda a convergência e a divergência
- Uso do teste do *enésimo* termo para provar que uma série diverge
- Aplicação do teste da integral versátil, teste da razão e teste da raiz
- Diferencie entre convergência absoluta e convergência condicional

Testar a convergência e a divergência é o principal evento em seu estudo de séries em Cálculo II. Relembre do Capítulo 11 que quando uma série *converge*, ela pode resultar em um número real. Contudo, quando uma série *diverge*, ela não pode resultar em um número real, pois ela vai ao infinito positivo ou ao infinito negativo ou não consegue se estabilizar em um único valor.

No Capítulo 11 oferecemos dois testes para determinar se tipos específicos de séries (as séries geométricas e as séries *P*) eram convergentes ou divergentes. Neste capítulo, forneceremos mais sete testes que se aplicam a uma variedade muito maior de séries.

O primeiro deles é o teste do *enésimo* termo, que é um tipo de teste automático. Com isso em mãos, continuaremos com dois testes de comparação: o teste de comparação direta e o teste de comparação do limite. Esses testes são o que chamamos de testes de mão única; eles fornecem uma resposta apenas se a série passa no teste, mas não se a série não passar. A seguir, introduziremos três testes de mão dupla, que fornecem uma resposta se a série passa no teste, e a resposta oposta se ela não passar. Esses são os testes da integral, da razão e da raiz.

Finalmente, introduziremos as séries alternadas, nas quais os termos são alternadamente positivos e negativos. Contrastaremos as séries alternadas com as séries positivas, que são as séries com que você está familiarizado, e ensinamos a transformar uma série positiva em uma alternada e vice-versa. Então, mostraremos como provar se uma série alternada é convergente ou divergente com o uso do teste das séries alternadas. Para finalizar, introduziremos os importantes conceitos de convergência absoluta e convergência condicional.

Comece Pelo Início

Ao testar a convergência ou a divergência, não se preocupe demais com o local onde a série começa. Por exemplo:

$$\sum_{n=1.001}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Essa é apenas uma série harmônica com os primeiros mil termos ignorados:

$$=\frac{1}{1.001}+\frac{1}{1.002}+\frac{1}{1.003}+\ldots$$

Essas frações podem parecer pequenas, mas as séries harmônicas divergem (veja o Capítulo 11), e remover um número finito de termos do início dessa série não muda esse fato.

A lição aqui é de que, quando você está testando a convergência ou a divergência, o que está acontecendo no começo da série é irrelevante. Sinta-se livre para esquecer os primeiros bilhões ou mais de termos de uma série se isso ajudá-lo a provar se a série é convergente ou divergente.

Similarmente, na maioria dos casos você pode adicionar alguns termos em uma série sem mudar sua convergência ou divergência. Por exemplo:

$$\sum_{n=1.000}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$

Você pode começar essa série em qualquer lugar entre $n = 2$ e $n = 999$ sem alterar o fato de que ela diverge (já que é uma série harmônica). Apenas tenha cuidado, pois se tentar começar a série a partir de $n = 1$, está adicionando o termo $\frac{1}{0}$, o que não se pode fazer. Contudo, na maior parte dos casos, você pode estender uma série infinita sem causar problemas ou mudar a convergência ou a divergência da série.

CUIDADO!

Embora a eliminação de termos do começo de uma série não afete se a série é convergente ou divergente, isso *afeta* a soma de uma série convergente. Por exemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Esquecer os primeiros termos dessa série — digamos, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ — não muda o fato de que ela é convergente. Mas muda o valor para o qual a série converge. Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

Uso do Teste do Enésimo Termo para a Divergência

O teste do *enésimo* termo para a divergência é o primeiro teste que você precisa conhecer. Ele é fácil e permite que você identifique varias séries como divergentes.

Se o limite da sequência $\{a_n\}$ não é igual a 0, então a série $\Sigma\, a_n$ é *divergente*.

Para mostrar porque esse teste funciona, escolhemos uma sequência que cumpre as condições necessárias, isto é, uma sequência que não se aproxima de 0:

$$\{a_n\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1} \ldots$$

Perceba que o limite da sequência é 1 e não 0. Então, eis a série relacionada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots$$

Já que essa série é a soma de um número infinito de termos que são muito próximos de 1, ela produz naturalmente uma soma infinita, então é divergente.

O fato de que o limite de uma sequência $\{a_n\}$ é igual a 0 não implica necessariamente que a série $\Sigma\, a_n$ seja convergente.

Por exemplo, a sequência harmônica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ se aproxima de 0, mas (como demonstramos no Capítulo 11) a série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ é divergente.

Ao testar a convergência ou a divergência, sempre realize o teste do *enésimo* termo primeiro. É um teste simples, e muitos professores o aplicam em provas, pois é fácil de perceber, mas ainda assim pega o aluno desavisado. ***Lembre-se:*** se a sequência de definição de uma série não se aproxima de 0, a série diverge; do contrário, você precisa realizar outros testes.

Vamos Contar as Mãos

Testes de convergência ou divergência tendem a cair em duas categorias: teste de mão única e testes de mão dupla.

Testes de mão única

Um teste de mão única permite que você extraia uma conclusão apenas quando uma série passa pelo teste, mas não quando ela falha ao passar.

Tipicamente, *passar no teste* significa que determinada condição foi cumprida.

O teste do *enésimo* termo é um exemplo perfeito de teste de mão única: se uma série *passa* no teste — quer dizer, se o limite de sua sequência de definição não é igual a 0 — a série é *divergente*. Mas se a série *falha* ao passar no teste, você não chega à conclusão alguma.

Mais adiante, neste capítulo, você descobrirá mais dois testes de mão única: o teste de comparação direta e o teste de comparação do limite.

Testes de mão dupla

Um teste de mão dupla permite que você chegue a uma conclusão quando uma série passa no teste e que tire uma conclusão oposta quando a série não passa no teste. Assim como no teste de mão única, *passar* no teste significa que determinada condição foi satisfeita. *Falhar* significa que a negação daquela condição foi cumprida.

Por exemplo, o teste para as séries geométricas é um teste de mão dupla (veja o Capítulo 11 para saber mais sobre testar séries geométricas para a convergência ou a divergência). Se uma série passa no teste — quer dizer, se r cai no conjunto aberto $(-1, 1)$ — então a série é convergente. Se a série não passa no teste — isto é, se $r \leq -1$ ou $r \geq 1$ — então a série é divergente.

Similarmente, o teste das séries P também é um teste de mão dupla (veja o Capítulo 11 para saber mais).

CUIDADO!

Tenha em mente que teste algum — inclusive os de mão dupla — irá *garantir* uma resposta para você. Pense em cada teste como uma ferramenta. Se você tiver algum problema em cortar um pedaço de madeira com um martelo, não é culpa do martelo: você apenas escolheu a ferramenta errada para o trabalho.

De modo parecido, se não consegue encontrar uma maneira certa de demonstrar a condição ou a negação em um teste específico, você está sem sorte. Nesse caso, precisa utilizar um teste diferente que seja mais apropriado ao problema.

Mais adiante, neste capítulo, mostraremos mais três testes de mão dupla: o teste da integral, o da razão e o da raiz.

Uso dos Testes de Comparação

Os testes de comparação permitem que use coisas que você conhece para encontrar outras coisas que deseja conhecer. As coisas que conhece são mais eloquentemente chamadas de *séries* *de referência* — uma série cuja convergência ou divergência já tenha sido provada. A coisa que deseja conhecer, é claro, é se uma série desconhecida converge ou diverge.

Assim como no teste do *enésimo* termo, os testes de comparação são de mão única: quando uma série passa no teste, você prova o que queria provar (quer dizer, se há convergência ou divergência). Mas quando uma série falha no teste, o resultado da comparação não é conclusivo.

Nesta seção, mostraremos dois testes básicos de comparação: o de comparação direta e o de comparação do limite.

Obtenha respostas diretas com o teste de comparação direta

Você pode usar o teste de comparação direta para provar a convergência ou a divergência, dependendo de como você o ajusta.

Para provar que uma série converge:

1. **Encontre uma série de referência que você sabe que converge.**
2. **Demonstre que cada termo da série que está testando é menor ou igual ao termo correspondente na série de referência.**

Para provar que uma série diverge:

1. **Encontre uma série de referência que sabe que diverge.**
2. **Demonstre que cada termo da série que está testando é maior ou igual ao termo correspondente na série de referência.**

Por exemplo, suponha que peçam que determine se a seguinte série converge ou diverge:

Série de referência $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots$

É difícil dizer só de olhar se essa série específica é convergente ou divergente. Contudo, ela se parece um pouco com uma série P com $p = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Você sabe que as séries P convergem (veja o Capítulo 11 se não está certo sobre o porquê), então utilize-as como séries de referência.

Agora, sua tarefa é demonstrar que cada termo na série que está testando é menor que o termo correspondente na série de referência:

Primeiro termo: $\frac{1}{2} < 1$

Segundo termo: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

Terceiro termo: $\frac{1}{10} < \frac{1}{9}$

Isso parece satisfatório, mas para completar a prova formalmente, eis o que deseja demonstrar:

Enésimo termo: $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$

Para conferir se essa afirmação é verdadeira, perceba que os numeradores são os mesmos, mas o denominador $(n^2 + 1)$ é maior que n^2. Então, a função $\frac{1}{n^2+1}$ é menor que $\frac{1}{n^2}$, o que significa que cada termo na série testada é menor que o termo correspondente na série convergente de referência. Portanto, ambas as séries são convergentes.

Em outro exemplo, suponha que você deseja testar a seguinte série para ver se é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} = 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \ldots$$

Dessa vez a série lembra uma confiável série harmônica, que você sabe que é divergente:

Série de referência: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

Utilizando a série harmônica como série de referência, compare as duas séries termo a termo:

Primeiro termo: $3 > 1$

Segundo termo: $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$

Terceiro termo: $1 > \frac{1}{3}$

Novamente, tem razão em ter esperança, mas para completar a prova formalmente você deseja saber o seguinte:

Enésimo termo: $\frac{3}{n} \geq \frac{1}{n}$

Dessa vez, perceba que os denominadores são os mesmos, mas o numerador 3 é maior que o numerador 1. Então a função $\frac{3}{n}$ é maior que $\frac{1}{n}$.

Novamente, demonstrou que cada termo na série testada é maior que o termo correspondente na série divergente de referência, então ambas as séries são divergentes.

Como um terceiro exemplo, suponha que pediram a você para demonstrar se esta série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

Nesse caso, multiplicar os denominadores é o primeiro passo:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

Agora, a série se parece um pouco com uma série P com $p = 2$, então faça essa a sua série de referência:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

A série de referência converge, então você deseja demonstrar que cada termo da série testada é menor que o termo correspondente da referência. Isso parece provável, pois:

Primeiro termo: $\frac{1}{6} < 1$

Segundo termo: $\frac{1}{12} < \frac{1}{4}$

Terceiro termo: $\frac{1}{20} < \frac{1}{9}$

Contudo, para convencer seu professor, você deseja demonstrar que cada termo da série testada é menor que o termo correspondente:

Enésimo termo: $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} \leq \frac{1}{n^2}$

Assim como no primeiro exemplo desta seção, os numeradores são iguais, mas o denominador da série testada é maior que aquele da série de referência. Então a série testada é, na verdade, menor que a série de referência, o que significa que a série do teste também é convergente.

Teste seus limites com o teste de comparação de limite

Assim como na comparação direta, o teste de comparação do limite funciona com a escolha de uma série de referência cujo comportamento você conheça e o use para fornecer informações sobre uma série testada, cujo comportamento você não conhece.

LEMBRE-SE

Eis o teste de comparação do limite: dada uma série de teste $\Sigma\, a_n$ e uma série de referência $\Sigma\, b_n$, encontre o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Se o limite se desenvolve em um número positivo, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

Assim como no teste de comparação direta, quando o teste dá certo, o que você aprende depende daquilo que já sabia sobre a série de referência. Se a série de referência converge, então a série do teste também. Contudo, se a série de referência diverge, da mesma forma diverge a série testada.

Lembre-se, porém, de que esse é um teste de mão única: se o teste falha, você não extrai conclusão alguma sobre a série do teste.

O teste de comparação do limite é especialmente bom para teste de séries infinitas com base em *expressões racionais*. Por exemplo, suponha que deseja ver se a seguinte série converge ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^2+1}$$

DICA

Ao testar uma série infinita baseada em uma expressão racional, escolha uma série de referência que seja proporcionalmente semelhante — quer dizer, cujos numeradores e denominadores sejam diferentes em grau.

Nesse exemplo, o numerador é um polinômio de primeiro grau e o denominador é um polinômio de segundo grau (para saber mais sobre polinômios veja o Capítulo 2). Então o denominador é um grau maior que o numerador. Portanto, escolhemos uma série de referência que seja proporcionalmente similar — a confiável série harmônica:

$$\text{Série de referência: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Antes de começar, separe um momento para esclarecer o que você está testando e anote. Nesse caso, você sabe que a série de referência diverge. Então, se o teste for bem-sucedido, você provará que a série testada também diverge. (Se o teste falhar, contudo, você está de volta à estaca zero, pois esse é um teste de mão única.)

Agora, determine o limite (a propósito, não importa qual série você coloca no numerador e qual vai no denominador):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n-5}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n}}$$

Neste ponto, simplifique os números:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-5)n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5n}{n^2+1}$$

Perceba que, aqui, o numerador e o dominador são polinômios de segundo grau. Agora, quando você aplica a Regra de L'Hospital (extraindo a derivada tanto do numerador quanto do denominador), veja o que acontece:

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

Em uma mágica, o limite resulta em um número positivo, então o teste foi bem-sucedido. Portanto, a série testada diverge. Lembre-se, contudo, de que você fez essa mágica acontecer ao escolher uma série de referência proporcional à série do teste.

Outro exemplo deve fazer isso ficar mais claro. Descubra se esta série é convergente ou divergente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{4n^5-n^3-2}$$

Quando percebe que essa série está baseada em uma expressão racional, você imediatamente pensa no teste de comparação do limite. Como o denominador é dois graus maior que o numerador, escolha uma série de referência com a mesma propriedade:

$$\text{Série de referência: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Antes de começar, anote o seguinte: a série de referência converge, então se o teste for bem-sucedido, a série testada também converge. A seguir, determine seu limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3-2}{4n^5-n^3-2}}{\frac{1}{n^2}}$$

Agora, resolva o limite:

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-2)n^2}{4n^5-n^3-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n^5-2n^2}{4n^5-n^3-2}$$

Novamente, numerador e denominador tem o mesmo grau, então você está no caminho certo. Agora, resolver o limite é uma questão de passar por algumas repetições da Regra de L'Hospital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4 - 4n}{20n^4 - 3n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{20n^3 - 4}{80n^3 - 6n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{60n^2}{240n^2 - 6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{120n}{480n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{120}{480} = \frac{1}{4}$$

O teste deu certo, então a série testada converge. E, novamente, o sucesso do teste foi preconcebido pois você escolheu uma série de referência na proporção da série do teste.

Testes de Mão Dupla para a Convergência e a Divergência

Anteriormente, neste capítulo, oferecemos uma variedade de testes de convergência ou divergência que funcionam em apenas uma direção de cada vez. Quer dizer, passar no teste resulta em uma resposta, mas não passar não fornece informação alguma.

Os testes desta seção possuem uma importante característica em comum: independentemente se uma série passe ou não, sempre que o teste fornece uma resposta, essa resposta *sempre* indica se a série é convergente ou divergente.

Integre uma solução com o teste da integral

Justamente quando você pensou que não teria de esquentar a cabeça com integração antes dos dois dias anteriores a seu teste final, eis ela novamente. A boa notícia é a de que o teste da integral é um teste de mão dupla para conferir a convergência ou a divergência.

LEMBRE-SE

Eis o teste da integral:

> Para qualquer série na forma
>
> $$\sum_{x=a}^{\infty} f(x)$$
>
> considere sua integral associada
>
> $$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Se essa integral converge, a série também converge; contudo, se essa integral diverge, a série também diverge.

Na maioria dos casos, você usa esse teste para descobrir se uma série converge ou diverge pelo teste de sua integral associada. É claro, mudar a série para uma integral disponibiliza todos os truques de integração que você já conhece e ama.

Por exemplo, eis como usar o teste da integral para demonstrar que a série harmônica é divergente. Primeiro, a série:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

O teste da integral indica que essa série converge ou diverge dependendo se a seguinte integral definida converge ou diverge:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

Para calcular essa integral imprópria, expresse-a como um limite, como ensinamos no Capítulo 9:

$$= \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x}\,dx$$

Isso é simples de integrar e calcular:

$$= \lim_{c \to \infty} \left(\ln x \Big|_{x=1}^{x=c} \right)$$

$$= \lim_{c \to \infty} \ln c - \ln 1$$

$$\lim_{c \to \infty} \ln c - 0 = \infty$$

Já que o limite vai ao infinito, a integral não existe. Portanto, o teste da integral indica que a série harmônica é divergente.

Como outro exemplo, suponha que você deseja descobrir se a seguinte série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Perceba que essa série começa em $n = 2$, pois $n = 1$ produziria o termo $\frac{1}{0}$. Para usar o teste da integral, transforme a soma nessa integral definida, usando 2 como o limite inferior de integração:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Novamente, reescreva essa integral imprópria como o limite de uma integral (veja o Capítulo 9):

$$\lim_{c \to \infty} \int_2^{c} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Para resolver a integral, use a seguinte substituição de variáveis:

$$u = \ln x$$
$$du = \frac{1}{x} dx$$

Então você pode reescrever como segue:

$$\lim_{c \to \infty} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{u}\, du$$

Observe que como a variável muda de x para u, os limites de integração mudam de 2 e c para ln 2 e ln c. Essa mudança surge quando substituímos o valor $x = 2$ na equação $u = \ln x$, então $u = \ln 2$. (Para saber mais sobre o uso da substituição de variáveis para calcular integrais definidas, veja o Capítulo 5.)

Nesse ponto, você pode desenvolver a integral:

$$\lim_{c \to \infty} \left(\ln u \Big|_{u = \ln 2}^{u = \ln c} \right)$$

$$\lim_{c \to \infty} \ln(\ln c) - \ln(\ln 2) = \infty$$

Você pode ver, sem muito esforço, que conforme c se aproxima do infinito, ln c também se aproxima, e o resto da expressão não afeta isso. Portanto, a série que você está testando é divergente.

Resolução racional de problemas com o teste da razão

O teste da razão é especialmente bom para lidar com séries que incluem fatoriais. Relembre que o fatorial de um número inteiro, representado pelo símbolo ! é aquele número multiplicado por cada número natural menor que ele mesmo. Por exemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

DICA

Volte para o Capítulo 2 para ver algumas dicas úteis sobre fatoriais que podem ajudá-lo nesta seção.

LEMBRE-SE

Para usar o teste da razão, use o limite (conforme n se aproxima de ∞) do termo $(n + 1)$ dividido pelo *enésimo* termo da série:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Correndo o risco de destruir toda a confiança que construímos entre nós através dessas páginas, devemos confessar que não são dois, mas *três* os possíveis resultados provenientes do teste da razão:

- Se o limite é menor que 1, a série converge.
- Se o limite é maior que 1, a série diverge.
- Se o limite é igual a 1, o teste não é conclusivo.

Mas nos manteremos firmes e chamamos esse de teste de mão dupla, porque — dependendo do resultado — ele pode potencialmente comprovar convergência ou divergência.

Por exemplo, suponha que você deseja descobrir se a seguinte série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Antes de começar, expanda a série de forma que você tenha uma ideia sobre com o que está trabalhando. Fizemos isso em dois passos para garantir que a aritmética esteja correta:

$$= \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 1} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \ldots$$

$$= 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \ldots$$

Para descobrir se essa série converge ou diverge, determine o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}$$

Como você pode ver, colocamos a função que define a série no denominador. Então reescrevemos essa função substituindo $n + 1$ por n, e colocamos o resultado no numerador. Agora, encontre o limite:

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1})(n!)}{(n+1)!(2^n)}$$

Nesse ponto, para ver porque o teste da razão funciona tão bem para expoentes e fatoriais, fatore um 2 de 2^{n+1} e um $n + 1$ de $(n + 1)!$:

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2(2^n)(n!)}{(n+1)(n!)(2^n)}$$

Esse truque permite que você simplifique bastante o limite:

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Como o limite é menor que 1, a série converge.

Desenraizando respostas com o teste da raiz

O teste da raiz funciona melhor com séries que possuem potências de n tanto no numerador como no denominador.

LEMBRE-SE

Para utilizar o teste da raiz, extraia o limite (conforme n se aproxima de ∞) da *enésima* raiz do *enésimo* termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Assim como no teste da razão, embora tenhamos chamado isso de teste de mão dupla, na verdade, existem três possíveis resultados:

- Se o limite é menor que 1, a série converge.
- Se o limite é maior que 1, a série diverge.
- Se o limite é igual a 1, o teste não é conclusivo.

Por exemplo, suponha que você deseja decidir se a seguinte série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$$

Isso seria um problema bem complicado para tentar resolver utilizando o teste da razão. Para usar o teste da raiz, extraia o limite da *enésima* raiz do *enésimo* termo:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^n}}$$

Em uma primeira olhada, essa expressão parece pior que aquela com que iniciou. Mas começa a parecer melhor quando você separa o numerador e o denominador em duas raízes:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{(\ln n)^n}}{\sqrt[n]{n^n}}$$

Agora é possível cancelar termos:

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)$$

De repente, o problema não parece tão ruim. Tanto o numerador quanto o denominador se aproximam de ∞, então aplique a Regra de L'Hospital:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

Como o limite é menor que 1, a série é convergente.

Séries Alternadas

As séries que discutimos anteriormente neste capítulo (e a maioria daquelas do Capítulo 11) possuem uma coisa em comum: cada termo nas séries é positivo. Então, cada uma dessas séries é uma *série positiva*. Em contraste, uma série que tem muitos termos infinitamente positivos e muitos termos infinitamente negativos é chamada de *série alternada*.

A maioria das séries alternadas oscila entre termos positivos e negativos de forma que cada termo ímpar é positivo e cada termo par é negativo, ou vice-versa. Essa característica gira em torno da questão da convergência e da divergência. Nesta seção, ensinaremos o que precisa saber sobre séries alternadas.

Veja duas formas de série alternada básica

A série alternada mais básica aparece de duas formas. Na primeira forma, os termos ímpares são negativos; na segunda forma, os termos pares são negativos.

Sem mais demora, eis a primeira forma de série alternada básica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-\ldots$$

Como você pode ver nessa série os termos ímpares são todos negativos. E eis a segunda forma, cujos termos pares são negativos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\ldots$$

Obviamente, em qualquer forma que assuma, a série alternada básica é divergente porque nunca converge em uma única soma, mas, em vez disso, oscila de um lado para o outro entre somas por toda a eternidade. Embora as funções que produzem séries alternadas básicas não sejam muito interessantes por si mesmas, elas ficam interessantes quando são multiplicadas por uma série infinita.

Crie novas séries a partir das antigas

Você pode transformar qualquer série positiva em uma série alternada multiplicando a série por $(-1)^n$ ou $(-1)^{n-1}$. Por exemplo, eis nossa velha amiga, a série harmônica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Para negativar os termos ímpares, multiplique por $(-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

Para negativar os termos pares, multiplique por $(-1)^{n-1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Séries alternadas baseadas em séries positivas convergentes

LEMBRE-SE

Se você sabe que uma série positiva converge, qualquer série alternada baseada nessa série também converge. Essa regra simples permite que você liste várias séries alternadas convergentes. Por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n!} = 2-2+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{15}-\dots$$

A primeira série é uma versão alternada da série geométrica com $r = \frac{1}{2}$. A segunda é uma variação alternada da familiar série P com $p = 2$. A terceira é uma série alternada baseada em uma série que introduzimos na seção anterior "Resolução racional de problemas com o teste da razão". Em cada caso, a versão não alternada dessas séries é convergente, então a série alternada também é convergente.

Podemos mostrar uma forma fácil de ver porque essa regra funciona. Como um exemplo, utilizamos a primeira série das três que oferece-mos a você. O valor da versão positiva dessa série é fácil de calcular utilizando a fórmula do Capítulo 11:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 2$$

Similarmente, se você negativar todos os termos, o valor também é fácil de calcular:

$$\sum_{n=0}^{\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^n = -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\dots = -2$$

Então, se alguns termos são positivos e outros negativos, o valor da série resultante deve estar em algum lugar entre –2 e 2; portanto, a série converge.

Uso do teste da série alternada

Como discutimos na seção anterior, quando você sabe que uma série positiva é convergente, você pode presumir que qualquer série alternada baseada naquela série também é convergente. Em contraste, algumas séries divergentes positivas se tornam convergentes quando transformadas em séries alternadas.

Felizmente, podemos oferecer um simples teste para decidir quando uma série alternada é convergente ou divergente.

LEMBRE-SE

Uma série alternada converge se estas duas condições forem satisfeitas:

1. **Sua sequência de definição converge para zero — quer dizer, ela passa no teste do *enésimo* termo.**
2. **Seus termos não são crescentes (ignorando o sinal de menos) — quer dizer, cada termo é menor ou igual ao termo anterior.**

Essas condições são bem fáceis de conferir, fazendo do teste da série alternada um dos testes mais fáceis deste capítulo. Por exemplo, eis três séries alternadas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}+\ldots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln n}=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}+\ldots$$

Só de olhar para elas, você pode ver que cada uma delas satisfaz ambos os critérios do teste da série alternada, então são todas convergentes. Perceba, também, que em cada caso, as versões positivas das mesmas séries são divergentes. Isso enfatiza um ponto importante: quando uma série positiva é convergente, uma série alternada baseada nela também é necessariamente convergente; mas quando uma série positiva é divergente, uma série alternada baseada nela pode ser convergente ou divergente.

Tecnicamente falando, o teste da série alternada é um teste de mão única: se a série passa no teste — quer dizer, se ambas as condições são satisfeitas — a série é convergente. Contudo, se a série falha no teste — quer dizer, se a condição não é satisfeita — você não pode extrair qualquer conclusão.

Na prática, contudo — e estamos entrando no limbo da matemática aqui — diríamos que quando uma série falha no teste da série alternada, você tem fortes evidências circunstanciais de que a série é divergente.

Por que dizemos isso? Primeiro de tudo, perceba que a primeira condição é o bom e velho teste do *enésimo* termo. Se qualquer série falhar nesse teste, você pode simplesmente jogá-la na pilha das divergentes e continuar sua vida.

Segundo, é raro que uma série — *qualquer série* — satisfaça a primeira condição e não satisfaça a segunda. Claro, isso acontece, mas você tem de procurar muito para encontrar uma série como essa. E mesmo que encontre uma, a série normalmente se estabiliza em um padrão constantemente decrescente de forma bem rápida.

Por exemplo, dê uma olhada na seguinte série alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}-1+\frac{9}{8}-1+\frac{25}{32}-\frac{9}{16}+\frac{49}{128}-\cdots$$

Claramente, essa série passa pela primeira condição do teste da série alternada – o teste do *enésimo* termo –, pois o denominador vai ao infinito em uma velocidade muito mais rápida que o numerador.

E em relação à segunda condição? Bem, os primeiros três termos são crescentes (desconsiderando-se o sinal), mas além desses termos, a série se estabiliza em um padrão decrescente constante. Então, você pode deixar de lado esses primeiros termos e expressar a mesma série de uma forma levemente diferente:

$$=\frac{1}{2}-1+\frac{9}{8}-1+\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$$

Essa versão da série passa no teste da série alternada com louvor, então é convergente. Obviamente, adicionar a ela algumas constantes não a torna divergente, então a série original também é convergente.

Então, quando você está testando uma série alternada, eis o que deve fazer:

1. **Teste a primeira condição – quer dizer, aplique o teste do *enésimo* termo.**

   Se a série não passar, ela é divergente, então o teste acabou.

2. **Se a série passar no teste do *enésimo* termo, teste a segunda condição – quer dizer, veja se seus termos, *em algum momento*, se estabelecem em um padrão decrescente constante (ignorando o sinal, é claro).**

Na maioria dos casos, descobrirá que uma série que satisfaça a primeira condição também satisfará a segunda, o que significa que a série é convergente.

Em casos raros, quando uma série alternada cumpre a primeira condição do teste da série alternada, mas não cumpre a segunda condição, você não pode extrair qualquer conclusão sobre a convergência ou a divergência da série.

Esses casos realmente são raros, mas mostraremos um para que você saiba o que fazer caso seu professor resolva bancar o engraçadinho em uma prova:

$$-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}-\frac{1}{100}+\frac{1}{99}-\frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{999}-\cdots$$

$$-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{4}-\cdots$$

Ambas essas séries satisfazem o primeiro critério do teste da série alternada, mas falham em satisfazer o segundo, então você não pode extrair qualquer conclusão baseando-se nesse teste. Na verdade, a primeira série é convergente e a segunda é divergente. Passe algum tempo as estudando, assim acreditaremos que você verá o porquê. (***Dica***: tente quebrar cada série em duas séries separadas.)

Compreenda a convergência absoluta e a condicional

Nas duas seções anteriores, demonstramos este fato importante: Quando uma série positiva é convergente, uma série alternada baseada nela também é necessariamente convergente; mas, quando uma série positiva é divergente, uma série alternada baseada nela pode ser convergente ou divergente.

Então, para qualquer série alternada, você tem três possibilidades:

- Uma série alternada é convergente, e a versão positiva dessa série também é convergente.
- Uma série alternada é convergente, mas a versão positiva dessa série é divergente.
- Uma série alternada é divergente, então a versão positiva dessa série também deve ser divergente.

A existência de três possibilidades para as séries alternadas faz um novo conceito necessário: a distinção entre *convergência absoluta* e *convergência condicional*.

A Tabela 12-1 indica quando uma série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

Tabela 12-1 Compreenda a Convergência Absoluta e Condicional das Séries Alternadas

Uma Série Alternada É:	Quando Essa Série É:	E Sua Série Positiva Relacionada É:
Absolutamente convergente	Convergente	Convergente
Condicionalmente convergente	Convergente	Divergente
Divergente	Divergente	Divergente

Eis alguns exemplos de séries alternadas que são absolutamente convergentes:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n!} = 2-2+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{15}-\ldots$$

Extraímos esses três exemplos de "Séries alternadas baseadas em séries positivas convergentes", anteriormente neste capítulo. Em cada caso, a versão positiva da série é convergente, então a série alternada relacionada deve ser convergente também. Em conjunto, esses dois fatos significam que cada série converge absolutamente.

E aqui vão alguns exemplos de séries alternadas que são condicionalmente convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}+\ldots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln n}=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}+\ldots$$

Extraímos esses exemplos de "Uso do teste da série alternada", anteriormente neste capítulo. Em cada caso, a versão positiva da série diverge, mas a série alternada converge (com o teste da série alternada). Então, cada uma dessas séries converge condicionalmente.

Finalmente, aqui estão alguns exemplos de séries alternadas que são divergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n=1-2+3-4+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\ldots$$

$$\frac{-1}{10}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{4}-\ldots$$

Como você pode ver, as duas primeiras séries falham no teste do *enésimo* termo, que também é a primeira condição do teste da série alternada, então essas duas séries divergem. No caso da terceira série, é basicamente uma série harmônica divergente *menos* uma série geométrica convergente — quer dizer, uma série divergente com um número finito subtraído dela — então a série toda diverge.

Teste de séries alternadas

Suponha que alguém (como seu professor) passe para você uma série alternada que você nunca viu antes e lhe peça para descobrir se ela é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Isto é o que você deve fazer:

1. **Aplique o teste da série alternada.**

   Na maioria dos casos, esse teste diz se a série alternada é convergente ou divergente:

   a. Se for divergente, está pronto! (A série alternada é divergente.)

   b. Se for convergente, a série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente. Siga para o Passo 2.

   c. Se o teste da série alternada for inconcludente, você não pode escolher uma das opções. Siga para o Passo 2.

2. **Reescreva a série alternada como uma série positiva ao:**

   a. Remover $(-1)^n$ ou $(-1)^{n-1}$ ao trabalhar com a notação sigma.

   b. Mudar os sinais de menos para sinais de mais quando estiver trabalhando com a notação expandida.

3. **Teste essa série positiva para convergência ou divergência usando qualquer um dos testes deste capítulo ou do Capítulo 11:**

   a. Se a série positiva for convergente, a série alternada é absolutamente convergente.

   b. Se a série positiva for divergente *e* a série alternada for convergente, a série alternada é condicionalmente convergente.

   c. Se a série positiva for divergente, *mas* o teste da série alternada não for conclusivo, ou a série é condicionalmente convergente ou divergente, mas você ainda não pode saber qual.

Na maioria dos casos, você não passará por todos esses passos e ainda terá dúvida em relação à série. No evento improvável de você estar nessa posição, veja se você pode quebrar a série alternada em duas séries separadas — uma com termos positivos e outra com termos negativos — e estudar essas duas séries com quaisquer evidências que possuir.

Capítulo 13

Arrumando Funções com a Série de Taylor

Neste Capítulo

- Compreenda funções elementares
- Veja as séries de potência como polinômios com número infinito de termos
- Expresse funções como séries de Maclaurin
- Descubra a série de Taylor como uma generalização da série de Maclaurin
- Aproxime expressões com as séries de Taylor e de Maclaurin

A série infinita conhecida como série de Taylor é um dos feitos matemáticos mais brilhantes com o qual você vai se deparar. Também é bastante coisa para pensar. Embora muitos livros de cálculo tendam a levá-lo até as profundezas com a série de Taylor, preferimos levá-lo pela mão e ajudá-lo a passar por isso lentamente.

A série de Taylor é uma forma específica da série de potências. Por sua vez, ajuda pensar uma série de potências como um polinômio com um número infinito de termos. Então, neste capítulo, iniciaremos com uma discussão sobre polinômios. Fazemos o contraste dos polinômios com outras funções elementares, destacando alguns motivos porque os matemáticos gostam tanto de polinômios (com frequência, mais que seus familiares e amigos).

Então continuaremos até as séries de potências, ensinando você a descobrir quando uma série de potências converge ou diverge. Também discutiremos o intervalo de convergência para uma série de potências, que é o conjunto de valores de x para os quais aquela série converge. Ao fim, introduziremos a série de Maclaurin — uma versão simplificada, porém poderosa, da série de Taylor.

Finalmente, o principal evento: a série de Taylor. Primeiro, mostraremos como usar a série de Taylor para calcular outras funções; você definitivamente precisará disso para sua prova final. Introduziremos o termo resto de Taylor, que permite encontrar a margem de erro ao fazer uma aproximação. Para finalizar o capítulo, mostraremos o funcionamento da série de Taylor, o que ajuda a dar sentido às séries, mas talvez não seja estritamente necessário para passar em um exame.

Funções Elementares

Funções elementares são aquelas funções familiares com que você trabalhou o tempo todo em cálculo. Elas incluem:

- Adição, subtração, multiplicação e divisão
- Potências e raízes
- Funções exponenciais e logarítmicas (normalmente, o logaritmo natural)
- Funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas
- Todas as combinações e composições dessas funções

Nesta seção, discutiremos algumas das dificuldades de trabalhar com funções elementares. Em contraste, mostraremos porque é mais fácil trabalhar com um pequeno conjunto de funções elementares — os polinômios. Para terminar, consideramos as vantagens de expressar funções elementares como polinômios, quando possível.

Conheça duas desvantagens das funções elementares

O conjunto de funções elementares é fechado sob as operações de diferenciação. Quer dizer, quando você diferencia uma função elementar, o resultado é sempre outra função elementar.

Infelizmente, esse conjunto não é fechado sob as operações de integração. Por exemplo, eis uma integral que não pode ser resolvida como uma função elementar:

$$\int e^{x^2}\,dx$$

Então, mesmo que o conjunto de funções elementares seja grande e complexo o suficiente para confundir a maioria dos estudantes, para você — o guru do cálculo — está mais para uma piscina rasa.

Outro problema com funções elementares é que muitas delas são complicadas de resolver com certos valores de x. Até mesmo a simples função sen x não é tão simples de desenvolver, pois (com exceção de 0) cada valor inteiro utilizado resulta em uma resposta irracional para a função. Por exemplo, qual o valor para sen 3?

Perceba por que os polinômios são tão amigáveis

Em contraste com outras funções elementares, os polinômios são praticamente as funções mais amistosas que existem. Eis alguns poucos motivos:

- Polinômios são fáceis de integrar (veja o Capítulo 4 para ver como calcular a integral de qualquer polinômio).
- Polinômios são fáceis de resolver para qualquer valor de x.
- Polinômios são infinitamente diferenciáveis — quer dizer, você pode calcular o valor da primeira, segunda, terceira derivadas, e assim por diante, infinitamente.

Representação de funções elementares como polinômios

Na Parte II, mostramos um conjunto de truques para calcular e integrar funções elementares. Muitos desses truques funcionam com o uso de uma função cuja integral não possa ser calculada na forma em que está e com a transformação dela para uma forma mais amistosa.

Por exemplo, utilizando a substituição $u = \text{sen}\, x$, você pode transformar a integral na esquerda naquela que está à direita:

$$\int \text{sen}^3 x \cos x \; dx = \int u^3 \, du$$

Nesse caso, você pode transformar o produto de duas funções trigonométricas em um polinômio, que é muito mais simples de trabalhar e fácil de integrar.

Representação de funções elementares como séries

A tática de expressar funções complicadas como polinômios (e outras funções simples) motiva grande parte do estudo das séries infinitas.

Embora as séries possam parecer complicadas para trabalhar — e, reconhecidamente, elas realmente apresentam um conjunto próprio de dificuldades — elas possuem duas grandes vantagens que as tornam úteis para a integração:

- Primeiro, uma série infinita se divide facilmente em termos. Na maioria dos casos, você pode usar a Regra da Soma para quebrar uma série em termos separados e calcular cada termo individualmente.
- Segundo, as séries tendem a ser construídas a partir de um padrão reconhecível. Então, se você consegue descobrir como integrar um termo, você normalmente pode generalizar esse método para integrar cada termo na série.

Especificamente, uma série de potências inclui muitas das características que fazem os polinômios serem fáceis de trabalhar. Discutiremos séries de potências na próxima seção.

Séries de Potências: Polinômios com Esteroides

No Capítulo 11, introduzimos as séries geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$$

Também mostramos uma fórmula simples para descobrir se uma série geométrica converge ou diverge.

LEMBRE-SE

A série geométrica é uma forma simplificada de um conjunto maior de séries chamada de série de potências.

Uma *série de potências* é qualquer série na seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Perceba como a série de potências se diferencia da série geométrica:

- Em uma série geométrica, cada termo possui o mesmo coeficiente.
- Em uma série de potências, os coeficientes podem ser diferentes — normalmente de acordo com uma regra que é específica para notação sigma.

Eis alguns exemplos de séries de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} x^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

Você pode pensar em uma série de potências como um polinômio com um número infinito de termos. Por essa razão, muitas características práticas dos polinômios (que descrevemos anteriormente, neste capítulo) são transferidas às séries de potências.

LEMBRE-SE

A forma mais geral assumida por uma série de potências é a seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$$

Essa forma é para uma série de potências centrada em a. Perceba que, quando $a = 0$, ela é reformada para uma versão mais simples que introduzimos anteriormente nesta seção. Então, as séries de potências nessa forma são centradas em 0.

Integração de séries de potências

No Capítulo 4, mostramos um processo de três passos para integrar polinômios. Como as séries de potência lembram polinômios, elas são mais simples de integrar com o uso do mesmo processo básico:

1. **Use a Regra da Soma para integrar a série termo a termo.**
2. **Use a Regra do Múltiplo Constante para mover cada coeficiente para fora de seu respectivo integral.**
3. **Use a Regra da Potência para resolver cada integral.**

Por exemplo, dê uma olhada na seguinte integral:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} x^n \, dx$$

À primeira vista, essa integral de uma série pode parecer assustadora. Mas, para dar a ela uma chance de mostrar seu lado mais fácil, expandimos a série como a seguir:

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + \ldots \right) dx$$

Agora você pode aplicar os três passos de integração de polinômios para resolver esta integral:

1. **Use a Regra da Soma para integrar a série termo a termo:**

$$= \int \frac{1}{4} dx + \int \frac{1}{8} x \, dx + \int \frac{1}{16} x^2 dx + \int \frac{1}{32} x^3 dx + \ldots$$

2. **Use a Regra do Múltiplo Constante para mover cada coeficiente para fora de sua respectiva integral:**

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{8}\int x \, dx + \frac{1}{16}\int x^2 dx + \frac{1}{32}\int x^3 dx + \ldots$$

3. Use a Regra da Potência para resolver cada integral:

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{128}x^4 + \ldots$$

Perceba que esse resultado é outra série de potências, a qual você pode mudar de volta para a notação sigma.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+2}} x^{n+1}$$

Compreenda o intervalo de convergência

Assim como nas séries geométricas e nas séries P (que discutimos no Capítulo 11), uma vantagem da série de potências é que ela converge ou diverge de acordo com um padrão bem claro.

Diferentemente dessas séries mais simples, contudo, uma série de potências frequentemente converge ou diverge baseando-se em seu valor de x. Isso leva a um novo conceito ao se lidar com séries de potências: o intervalo de convergência.

O *intervalo de convergência* de uma série de potência é um conjunto de valores de x para os quais aquela série converge.

LEMBRE-SE

O intervalo de convergência nunca é vazio

Cada série de potências converge para algum valor de x. Quer dizer, o intervalo de convergência de uma série de potências nunca é um conjunto vazio.

Embora esse fato possua implicações práticas, é, na verdade, algo bem automático. Por exemplo, dê uma olhada na seguinte série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Quando $x = 0$, essa série se desenvolve para $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$, então ela obviamente converge para 1. Similarmente, dê uma olhada nesta série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x+5)^n = (x+5) + 2(x+5)^2 + 3(x+5)^3 + 4(x+5)^4 + \ldots$$

Dessa vez, quando $x = -5$, a série converge para 0 de forma tão simples quanto a do último exemplo.

Perceba que em ambos os exemplos, a série converge trivialmente em $x = a$ em uma série de potências centrada em a (veja o começo de "Séries de Potências: Polinômios com Esteroides").

Três variedades para o intervalo de convergência

Existem três possibilidades para o intervalo de convergência de qualquer série de potências:

- A série converge apenas quando $x = a$.
- A série converge em algum intervalo (aberto ou fechado em ambos os lados) centrado em a.
- A série converge para todos os valores reais de x.

Por exemplo, suponha que você deseja encontrar o intervalo de convergência de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

Essa série de potências é centrada em 0, então ela converge quando $x = 0$. Utilizando o teste da razão (veja o Capítulo 12), você pode descobrir se ela converge para qualquer outro valor de x. Primeiro, determine o seguinte limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}$$

Para resolver esse limite, comece por x^n no numerador e no denominador:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)x}{n}$$

A seguir, distribua para remover os parênteses no numerador:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{nx + x}{n}$$

No estado atual, esse limite é na forma de $\frac{\infty}{\infty}$, então aplique a Regra de L'Hospital (veja o Capítulo 2), diferenciando sobre a variável n:

$$\lim_{n \to \infty} x = x$$

Com esse resultado, o teste da razão indica que a série:

- Converge quando $-1 < x < 1$
- Diverge quando $x < -1$ e $x > 1$
- Pode convergir ou divergir quando $x = 1$ e $x = -1$

Felizmente, é fácil de perceber o que acontece nesses dois casos remanescentes. Eis como a série se parece quando $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(1)^n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

Claramente, a série diverge. Similarmente, eis como ela se parece quando $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots$$

Essa série alternada pende entre valores negativos e positivos, então ela também diverge.

Como um exemplo final, suponha que você deseja encontrar o intervalo de convergência da seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Como no último exemplo, essa série é centrada em 0, então ela converge quando $x = 0$. A verdadeira pergunta é se ela converge para outros valores de x. Como essa é uma série alternada, aplicamos o teste da razão em sua versão positiva para ver se conseguimos demonstrar que ela é absolutamente convergente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

Primeiro, desejamos simplificar um pouco:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}}$$

A seguir, expandimos expoentes e fatoriais, como ensinamos no Capítulo 12:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} x^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}}$$

Nesse ponto, é possível simplificar:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

Dessa vez, o limite fica entre -1 e 1 para todos os valores de x. Esse resultado indica que a série converge absolutamente para todos os valores de x, então a série alternada também converge para todos os valores de x.

Expresse Funções como Séries

Nesta seção, você começará a explorar como expressar funções como séries infinitas. Começamos por mostrar alguns exemplos de fórmulas que expressam sen x e cos x como séries. Esses exemplos levam a uma fórmula mais geral para expressar uma variedade mais ampla de funções elementares como séries.

Essa fórmula é a série Maclurin, uma versão simplificada, mas poderosa, da série mais genérica de Taylor, que introduziremos mais adiante neste capítulo.

Expresse sen x como uma série

Eis uma fórmula estranha que expressa a função seno com uma série alternada:

$$\text{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para dar sentido a essa fórmula, use a notação expandida:

$$\text{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Perceba que essa é uma série de potências (que discutimos anteriormente neste capítulo). Para ter uma rápida noção de como ela funciona, eis como você pode encontrar o valor de sen 0 pela substituição de 0 por x:

$$\text{sen } 0 = 0 - \frac{0^3}{3!} + \frac{0^5}{5!} - \frac{0^7}{7!} + \ldots = 0$$

Como você pode ver, a fórmula verifica o que você já sabia: sen 0 = 0.

Você pode usar essa fórmula para aproximar sen x para qualquer valor de x com quantas casas decimais você desejar. Por exemplo, observe o que acontece quando você substitui x por 1 nos quatro primeiros termos da fórmula:

$$\text{sen } 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5.040}$$
$$\approx 0.841468$$

Perceba que o valor real de sen 1 em seis casas decimais é 0,841471, então essa estimativa é correta em cinco casas decimais — nada mau!

A Tabela 13-1 mostra os valores de sen 3 aproximados em seis termos. Observe que o valor real de sen 3 é aproximadamente 0,14112, então a aproximação em seis termos está correta até três casas decimais. Novamente, nada mau, embora não tão bom quando a estimativa de sen 1.

Tabela 13-1 Aproximação do Valor de Sen 3

# de Termos	Substituição	Aproximação
1	3	3
2	$3-\frac{3^3}{3!}$	–1.5
3	$3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}$	0.525
4	$3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}-\frac{3^7}{7!}$	0.09107
5	$3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}-\frac{3^7}{7!}+\frac{3^9}{9!}$	0.14531
6	$3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}-\frac{3^7}{7!}+\frac{3^9}{9!}-\frac{3^{11}}{11!}$	0.14087

Como exemplo final, a Tabela 13-2 mostra o valor de sen 10 aproximado em oito termos. O valor real de sen 10 é aproximadamente –0,54402, então em qualquer padrão essa é uma estimativa ruim. Ainda assim, se você continuar a gerar termos, essa estimativa continua a melhorar cada vez mais, em qualquer nível de precisão que você desejar. Se você tem dúvidas, perceba que depois de cinco termos, a aproximação começa a se aproximar do valor real.

Tabela 13-2 Aproximação do Valor de Sen 10

# de Termos	Substituição	Aproximação
1	10	10
2	$10-\frac{10^3}{3!}$	–156.66667
3	$10-\frac{10^3}{3!}+\frac{10^5}{5!}$	676.66667
4	$10-\frac{10^3}{3!}+\frac{10^5}{5!}-\frac{10^7}{7!}$	–1307.460317
5	$10-\frac{10^3}{3!}+\frac{10^5}{5!}-\frac{10^7}{7!}+\frac{10^9}{9!}$	1448.272
6	$10-\frac{10^3}{3!}+\frac{10^5}{5!}-\frac{10^7}{7!}+\frac{10^9}{9!}-\frac{10^{11}}{11!}$	–1056.938
7	$10-\frac{10^3}{3!}+\frac{10^5}{5!}-\frac{10^7}{7!}+\frac{10^9}{9!}-\frac{10^{11}}{11!}+\frac{10^{13}}{13!}$	548.966
8	$10-\frac{10^3}{3!}+\frac{10^5}{5!}-\frac{10^7}{7!}+\frac{10^9}{9!}-\frac{10^{11}}{11!}+\frac{10^{13}}{13!}-\frac{10^{15}}{15!}$	–215.750

Expresse cos x como uma série

Na seção anterior mostramos uma fórmula que expressa o valor de sen x para todos os valores de x como uma série infinita. Ao diferenciar os dois lados dessa fórmula chegamos a uma fórmula similar para cos x:

$$\frac{d}{dx}\text{sen}x = \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3!} + \frac{d}{dx}\frac{x^5}{5!} - \frac{d}{dx}\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Agora, resolva estas derivadas:

$$\cos x = 1 - 3\frac{x^2}{3!} + 5\frac{x^4}{5!} - 7\frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Finalmente, simplifique um pouco o resultado:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Como você pode ver, o resultado é outra série de potências (que discutimos anteriormente neste capítulo). Eis como você escreve isso utilizando a notação sigma:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Para ter certeza de que essa série realmente funciona conforme anunciado, perceba que a substituição $x = 0$ fornece a equação correta $\cos 0 = 1$. Além disso, substituir $x = 1$ nos quatro primeiros termos resulta na seguinte aproximação:

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = 0.5402\overline{77}$$

Essa estimativa é precisa em quatro casas decimais.

Introdução à Série de Maclaurin

Nas duas últimas seções, mostramos fórmulas para expressar tanto sen x quanto cos x como séries infinitas. Você pode começar a suspeitar de que há algum tipo de método por trás dessas fórmulas. Sem muita comoção, aqui está:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Contemple a *série de Maclaurin*, uma versão simplifica da tão aclamada série de Taylor, a qual introduziremos na próxima seção.

A notação $f^{(n)}$ significa "a *enésima* derivada de f." Isso deveria ficar mais claro na versão expandida da série de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

A série de Maclaurin é um modelo para as duas fórmulas que introduzimos anteriormente neste capítulo. Ela permite que você expresse muitas outras funções como séries de potências a partir dos seguintes passos:

1. **Encontre as primeiras derivadas da função até que você reconheça o padrão.**
2. **Substitua 0 por x em cada uma dessas derivadas.**
3. **Substitua esses valores, termo a termo, na fórmula da série de Maclaurin.**
4. **Se possível, expresse a série na notação sigma.**

Por exemplo, suponha que você deseja encontrar a série de Maclaurin de e^x.

1. **Encontre as primeiras derivadas de e^x até que você reconheça um padrão:**

$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
$$f'''(x) = e^x$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x$$

2. **Substitua 0 por x em cada uma dessas derivadas.**

$$f'(0) = e^0$$
$$f''(0) = e^0$$
$$f'''(0) = e^0$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = e^0$$

3. **Substitua esses valores, termo por termo, na fórmula para encontrar a série de Maclaurin:**

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \ldots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

4. **Se possível, expresse a série na notação sigma:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para verificar essa fórmula, use para estimar e^0 e e^1, substituindo 0 e 1, respectivamente, nos primeiros seis termos:

$$e^0 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$$
$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2{,}7166\text{(repetição)}$$

Esse exercício acerta e^0 exatamente, e aproxima e^1 em duas casas decimais. E, assim como nas fórmulas de sen x e cos x que mostramos anteriormente neste capítulo, a série de Maclaurin para e^x permite que você calcule essa função para qualquer valor de x em qualquer número de casas decimais.

Assim como as outras fórmulas, contudo, a série de Maclaurin para e^x funciona melhor quando x é próximo de 0. Conforme x se move para longe de 0, você precisa calcular mais termos a fim de obter o mesmo nível de precisão.

Mas você pode começar a ver porque a série de Maclaurin tende a fornecer aproximações melhores para valores próximos de 0: o número 0 é "embutido" na fórmula como $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)x$, e assim por diante.

A Figura 13-1 ilustra esse ponto. O primeiro gráfico mostra sen x aproximado por usar os dois primeiros termos da Série de Maclaurin — que é como o polinômio de terceiro grau $x - \frac{x^3}{3!}$. O gráfico subsequente mostra uma aproximação de sen x em quatro termos.

O conto das três séries

É fácil de ficar confuso em relação às três categorias de séries que discutimos neste capítulo. Eis uma forma prática de pensar sobre elas:

- A *série de potências* é uma subcategoria das séries infinitas.
- A *série de Taylor* (batizada em homenagem ao matemático Brook Taylor) é uma subcategoria das séries de potências.
- A *série de Maclaurin* (batizada em homenagem ao matemático Colin Maclaurin) é uma subcategoria da série de Taylor.

Depois que você entender isso, considere que a série de potências possui duas formas básicas:

- A *forma específica*, que é centrada em zero, então a fica fora da expressão.
- A *forma geral*, que não é centrada em zero, então a faz parte da expressão.

Além disso, cada uma das outras duas séries utiliza uma dessas duas formas das séries de potências:

- A série de Maclaurin utiliza a forma específica, então é:
  - Menos poderosa
  - Mais simples de trabalhar
- A série de Taylor utiliza a forma geral, então é:
  - Mais poderosa
  - Mais difícil de trabalhar

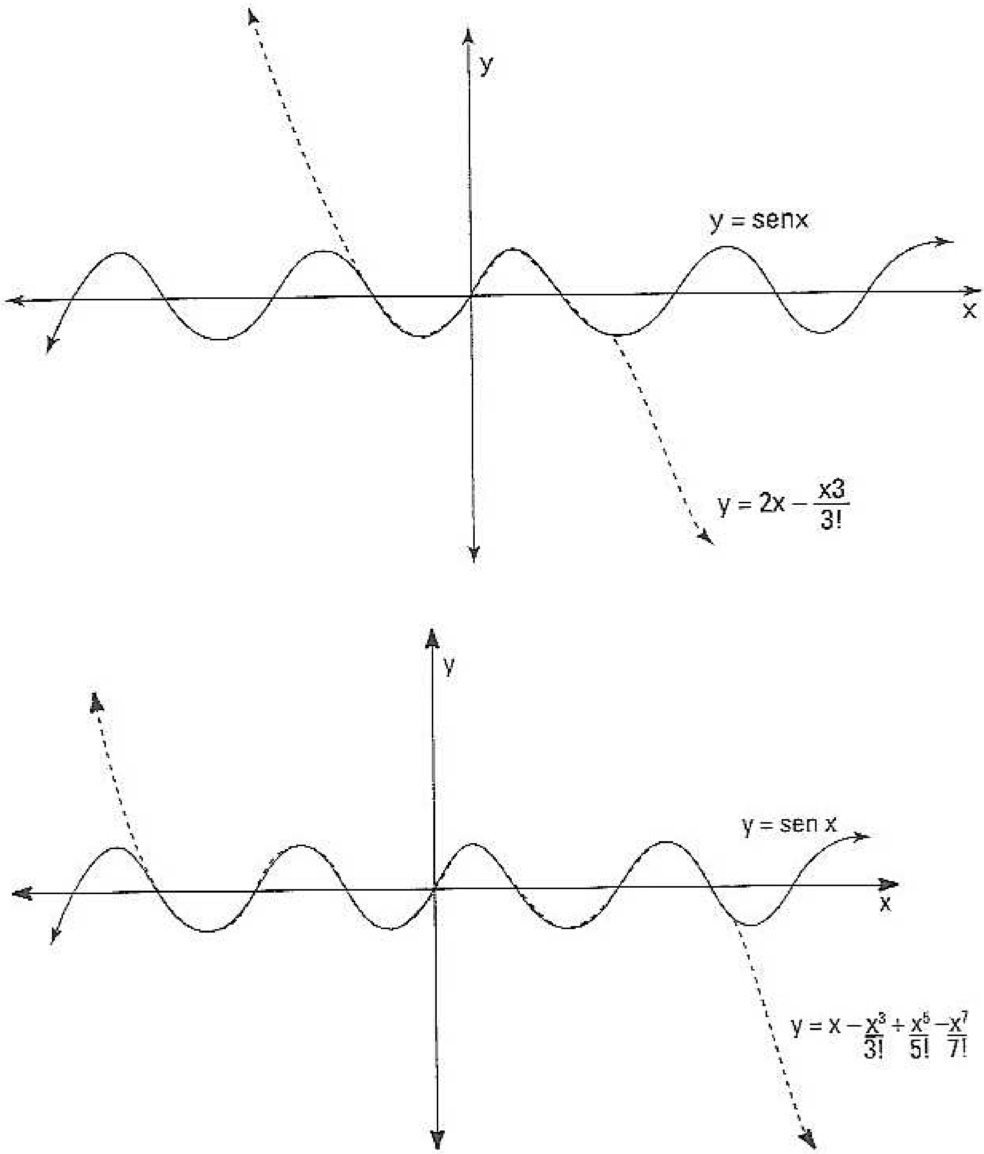


Figura 13-1: Aproximação de sen *x* com o uso da série de Maclaurin.

Como você pode ver, cada aproximação sucessiva melhora em relação à aproximação anterior. Além disso, cada equação fornece um modelo para representar uma ampla variedade de funções como séries de potências.

Introdução à Série de Taylor

Assim como a série de Maclaurin (que introduzimos na seção anterior), a série de Taylor fornece um modelo para representar uma variedade maior de funções como séries de potências.

Na verdade, a série de Taylor é uma versão mais geral do que a série de Maclaurin. A vantagem da série de Maclaurin é que ela é um pouco mais simples de se trabalhar. A vantagem da série de Taylor é que você pode moldá-la para obter uma aproximação melhor de muitas funções.

Sem enrolar demais, eis a série de Taylor no alto de sua glória:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Assim como na série de Maclaurin, a série de Taylor usa a notação $f^{(n)}$ para indicar a *enésima* derivada. Aqui está a versão expandida da série de Taylor:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

Perceba que a série de Taylor inclui a variável a, que não é encontrada na série de Maclaurin. Ou, mais precisamente, na série de Maclaurin, $a = 0$, então ela fica fora da expressão.

A explicação dessa variável pode ser encontrada anteriormente, neste capítulo, em "Série de Potências: Polinômios com Esteroides". Naquela seção, mostramos as duas formas da série de potências:

- Uma forma mais simples, centrada em 0, que corresponde à série de Maclaurin
- Uma forma mais geral, centrada em a, que corresponde à série de Taylor

Na próxima seção, mostraremos as vantagens de se trabalhar com essa variável extra.

Calcule com a série de Taylor

A presença da variável a torna a série de Taylor mais complexa de lidar do que a série de Maclaurin. Mas essa variável confere à série de Taylor maior flexibilidade, como ilustra o próximo exemplo.

Em "Expresse Funções como Séries", anteriormente neste capítulo, tentamos aproximar o valor de sen 10 com a série de Maclaurin. Infelizmente, fazer essa aproximação com oito termos ainda resultou em uma péssima estimativa. Esse problema ocorre porque a série de Maclaurin sempre assume um valor padrão de $a = 0$, e 0 não é próximo o suficiente de 10.

Dessa vez, utilizamos apenas quatro termos da série de Taylor para fazer uma aproximação muito melhor. A chave para essa aproximação é uma inteligente escolha da variável a:

Sendo $a = 3\pi$

Essa escolha tem duas vantagens: primeiro esse valor de a está próximo de 10 (o valor de x), o que é melhor para a aproximação. Segundo, é um valor fácil para o cálculo de senos e cossenos, então calcular isso não deve ser muito difícil.

Para iniciar, substitua 10 por x e 3π por a nos quatro primeiros termos da série de Taylor:

$$\text{sen}\,10 = \text{sen}\,3\pi + (\text{sen}'\,3\pi)(10 - 3\pi) + \frac{(\text{sen}''\,3\pi)(10 - 3\pi)^2}{2!} + \frac{(\text{sen}'''\,3\pi)(10 - 3\pi)^3}{3!}$$

A seguir, substitua na primeira, segunda e terceira derivadas da função seno e simplifique:

$$= \text{sen}\,3\pi + (\cos 3\pi)(0{,}5752) - \frac{(\text{sen}\,3\pi)(0{,}5752)^2}{2!} - \frac{(\cos 3\pi)(0{,}5752)^3}{3!}$$

A boa notícia é que sen $3\pi = 0$, então o primeiro e o terceiro termo ficam fora:

$$= (\cos 3\pi)(0{,}5752) - \frac{(\cos 3\pi)(0{,}5752)^3}{3!}$$

Nesse ponto, você provavelmente desejará pegar a calculadora:

$$= -1\,(0{,}5752) - -\frac{1}{6}\,(0{,}5752)^3$$

$$= -0{,}5752 + 0{,}0317 = -0{,}5434$$

Essa aproximação é correta em duas casas decimais — uma bela melhoria em relação à estimativa da série de Maclaurin!

Exame de séries de Taylor convergentes e divergentes

Anteriormente neste capítulo, mostramos como encontrar o intervalo de convergência de uma série de potências — quer dizer, um conjunto de valores de x para os quais aquela série converge.

Como a série de Taylor é uma forma de série de potências, você não deveria se surpreender por cada série de Taylor também possuir um intervalo de convergência. Quando esse intervalo é um conjunto completo de números reais, você pode utilizar a série para encontrar o valor de $f(x)$ para cada valor real de x.

Contudo, quando o intervalo de convergência de uma série de Taylor é limitado — quer dizer, quando ele diverge de alguns valores de x — você pode utilizá-la para encontrar o valor de $f(x)$ *somente* em seu intervalo de convergência.

Por exemplo, veja essas três importantes séries de Taylor que introduzimos até agora, neste capítulo:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Elas convergem para todos os valores reais de x (você pode conferir isso utilizando o teste da razão, já mencionado neste capítulo), então cada uma é igual ao valor de sua respectiva função.

Agora, considere a seguinte função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Expressamos essa função como uma série de Maclaurin, utilizando os passos que destacamos anteriormente em "Expresse Funções como séries":

1. **Encontre as primeiras derivadas de $\frac{1}{1-x}$ até que você reconheça um padrão:**

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

2. **Substitua 0 por x em cada uma destas derivadas:**

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 2$$

$$f'''(0) = 6$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(0) = n!$$

3. **Substitua esses valores, termo por termo, na fórmula da série de Maclaurin:**

$$\frac{1}{1-x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

4. **Se possível, expresse a série na notação sigma:**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3$$

Para testar essa fórmula, a utilizamos para encontrar $f(x)$ quando $x = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

Você pode testar a precisão dessa expressão substituindo $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{1-x}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Como você pode ver, a fórmula produz a resposta correta. Agora, tentamos utilizá-la para encontrar $f(x)$ quando $x = 5$, contando que a resposta correta deveria ser $\frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4}$:

$$f(5) = 1 + 5 + 25 + 125 + \ldots = \infty \quad \text{INCORRETO!}$$

O que aconteceu? Essa série converge apenas no intervalo $(-1, 1)$, então a fórmula produz apenas o valor de $f(x)$ quando x está nesse intervalo. Quando x está fora desse intervalo, a série diverge, então a fórmula é inválida.

Expressar funções versus aproximar funções

É importante que você compreenda claramente a diferença entre duas práticas matemáticas essenciais:

- *Expressar* uma função como uma série infinita
- *Aproximar* uma função utilizando um número finito de termos de séries

Tanto a série de Taylor quanto a série de Maclaurin são variações da série de potências. Você pode pensar em uma série de potências como um polinômio com número infinito de termos. Também, lembre que a série de Maclaurin é uma forma específica da série mais genérica de Taylor, que surge quando o valor de a se estabelece em 0.

Cada série de Taylor (e, portanto, cada série de Maclaurin) fornece o exato valor de uma função a todos os valores de x para os quais a série converge. Quer dizer, para qualquer valor de x em seu intervalo de convergência, uma série de Taylor converge para $f(x)$.

Na prática, contudo, somar um número infinito de termos simplesmente não é possível. Ainda assim, você pode aproximar o valor de $f(x)$ somando um número finito da série de Taylor adequada. Você fez isso anteriormente, neste capítulo, para estimar o valor de sen 10 e outras expressões.

Uma expressão construída a partir de um número finito de termos de uma série de Taylor é chamada de *polinômio de Taylor*, $T_n(x)$. Como outros polinômios, o de Taylor é identificado por seu grau. Por exemplo, eis um polinômio de Taylor do quinto grau, $T_5(x)$, que aproxima e^x:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Genericamente falando, um polinômio de grau maior resulta em uma aproximação melhor. E, como esse polinômio vem da série de Maclaurin, onde $a = 0$, ele fornece uma estimativa muito melhor para o valor de e^x quando x está próximo de 0. Para o valor de e^x quando x está próximo de 100, contudo, você obtém uma estimativa melhor utilizando um polinômio de Taylor para e^x com $a = 100$:

$$e^x \approx e^{100} + e^{100}(x-100) + \frac{e^{100}}{2!}(x-100)^2 + \frac{e^{100}}{3!}(x-100)^3 + \frac{e^{100}}{4!}(x-100)^4 + \frac{e^{100}}{5!}(x-100)^5$$

Para terminar, lembre-se do seguinte:

- Uma série de Taylor convergente expressa o valor exato de uma função.
- Um polinômio de Taylor, $T_n(x)$, oriundo de uma série convergente aproxima o valor de uma função.

Cálculo da margem de erro de polinômios de Taylor

Na seção anterior, discutimos como um polinômio de Taylor aproxima o valor de uma função:

$$f(x) \approx T_n(x)$$

Em muitos casos, é útil medir a precisão de uma aproximação. Essa informação é fornecida pelo *termo resto de Taylor*:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Perceba que a adição do termo resto $R_n(x)$ transforma a aproximação em uma equação. Eis a fórmula para o termo resto:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad c \text{ entre } a \text{ e } x$$

É importante estar certo de que essa equação é verdadeira para um valor *específico* de c no intervalo entre a e x. Ela *não* funciona para qualquer valor de c naquele intervalo.

Na teoria, o termo resto oferece a diferença precisa entre o valor de uma função e a aproximação $T_n(x)$. Contudo, como o valor de c é incerto, na prática, o termo resto, na verdade, fornece o extremo de sua aproximação.

Um exemplo deve ajudar a esclarecer essa ideia. Utilizamos um polinômio de Taylor do sexto grau para cos x:

$$\cos x \approx T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Suponha que utilizamos esse polinômio para aproximar cos 1:

$$\cos 1 \approx T_6(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720}$$
$$= 0{,}5402\overline{77}$$

Quão precisa essa aproximação poderá ser? Para descobrir, utilize o termo resto:

$$\cos 1 = T_6(x) + R_6(x)$$

Adicionar o termo resto associado transforma essa aproximação em uma equação. Eis a fórmula do termo resto:

$$R_6(x) = \frac{\cos^{(7)} c}{7!}(x-0)^7$$
$$= \frac{\text{sen}\, c}{5{,}040}x^7 \qquad c \text{ entre } 0 \text{ e } x$$

Então, substituir 1 por x dá a resposta:

$$R_6(1) = \frac{\text{sen}\, c}{5{,}040} \qquad c \text{ entre } 0 \text{ e } 1$$

Nesse ponto, você está aparentemente preso, pois não sabe o valor de sen c. Contudo, a função seno sempre produz um número entre –1 e 1, então você pode diminuir bastante o termo resto, como a seguir:

$$-\frac{1}{5{,}040} \le R_6(1) \le \frac{1}{5{,}040}$$

Perceba que $\frac{1}{5{,}040} \approx 0.0001984$, então a aproximação de cos 1 dada por $T_6(1)$ é precisa dentro de 0,0001984 em ambas as direções. E, na verdade, cos 1 ≈ 0,540302, então:

$$\cos 1 - T_6(1) \approx 0{,}540302 - 0{,}540278 = 0{,}000024$$

Como você pode ver, a aproximação está dentro da margem de erro prevista pelo termo resto.

Compreenda Por Que a Série de Taylor Funciona

A melhor forma de ver como funciona a série de Taylor é ver como ela é construída inicialmente. Se você leu todo este capítulo até aqui, você já deve estar pronto.

Para assegurar que você compreenda cada passo ao longo do caminho, construímos a série de Maclaurin, que é só um pouco mais avançada. Essa construção começa com a suposição-chave de que uma função pode ser expressa como uma série de potência, para começar:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...$$

O objetivo agora é expressar os coeficientes do lado direito dessa equação em termos da própria função. Para fazer isso, fizemos outra suposição relativamente segura de que 0 está no domínio de $f(x)$ Então, quando $x = 0$, todos os termos, com exceção do primeiro, dessa série são iguais a 0, restando a seguinte equação:

$$f(0) = c_0$$

Esse processo resulta no valor do coeficiente c_0 nos termos da função. Agora, diferencie $f(x)$:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3...$$

Nesse ponto, quando $x = 0$, todos os termos x caem fora:

$$f'(0) = c_1$$

Então você tem outro coeficiente, c_1, expresso nos termos da função. Para continuar, diferencie $f'(x)$:

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + ...$$

Novamente, quando $x = 0$, o termo x desaparece:

$$f''(0) = 2c_2$$

$$\frac{f''(0)}{2} = c_2$$

Agora, você provavelmente está percebendo um padrão: você pode obter sempre o valor do próximo coeficiente diferenciando a equação anterior e substituído 0 por x no resultado:

$$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4x + 60c_5x^2 + 120c_6x^3 + \ldots$$

$$f'''(0) = 6c_3$$

$$\frac{f'''(0)}{6} = c_3$$

Continuando, os coeficientes também possuem um padrão:

$$c_0 = f(0)$$

$$c_1 = f'(0)$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$\ldots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Substituir esses coeficientes na equação original resulta na conhecida série de Maclaurin, aquela do começo do capítulo:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

PAPO DE ESPECIALISTA

Para construir a série de Taylor, use uma linha similar de pensamento, começando com a forma mais geral da série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \ldots$$

Nesse caso, igualar $x = a$ fornece o primeiro coeficiente:

$$f(a) = c_0$$

Continue a encontrar coeficientes diferenciando $f(x)$ e então repetindo o processo.

Parte V

Tópicos Avançados

A 5ª Onda Por Rich Tennant

Nesta parte...

Você terá uma noção sobre o que existe além de Cálculo II. Oferecemos uma visão geral dos próximos semestres de matemática: Cálculo III (o estudo do cálculo em três ou mais dimensões) e equações diferenciais (equações com derivadas mistas como variáveis).

Capítulo 14

Cálculo Multivariável

Neste Capítulo

- Visualização de vetores
- Um salto de duas para três dimensões
- Compreenda as coordenadas cilíndricas e esféricas
- Uso das derivadas parciais
- Classificação e resolução de integrais múltiplas

O espaço, como disse o Capitão Kirk na abertura de *Jornada nas Estrelas*, é a fronteira final. O cálculo de várias variáveis (também conhecido como Cálculo III) foca nas técnicas para realizar cálculos no espaço — quer dizer, em três dimensões.

Os matemáticos possuem uma variedade de termos para três dimensões: 3D, espaço-3 e R^3 são os mais comuns. Qualquer que seja o nome, adicionar uma dimensão torna o cálculo multivariável mais interessante e útil, mas um pouco mais complicado do que o cálculo com uma variável.

Neste capítulo, ofereceremos uma rápida introdução ao cálculo de várias variáveis, abordando os pontos-chave normalmente ensinados em uma turma de Cálculo III. Primeiro, mostraremos como os vetores fornecem um método para ligar um valor a uma direção. A seguir, introduziremos os três sistemas diferentes de coordenadas 3D: as coordenadas cartesianas 3D, as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas.

Com essa compreensão sobre 3D, discutiremos funções de mais de uma variável, focando na função de duas variáveis $z = f(x, y)$. Com uma compreensão das funções multivariáveis, procederemos para a introdução aos dois conceitos mais importantes do cálculo multivariável: as derivadas parciais e as integrais múltiplas.

Ao final deste capítulo, você terá uma grande plataforma a partir da qual começar Cálculo III.

Visualização de Vetores

Os vetores são utilizados para ligar um número real (chamado de *escalar*) com uma direção no plano ou no espaço. Eles são úteis para a navegação, em que saber a direção na qual se está navegando ou voando é importante. Os vetores também participam muito na física, onde as forças que empurram e puxam também são direcionais. E, como você já pode ter adivinhado, Cálculo III é repleto de vetores.

Nesta seção, introduziremos esse importante conceito. Embora mantenhamos essa discussão em duas dimensões, os vetores são comumente utilizados em três dimensões também.

Compreenda o básico sobre vetores

Uma forma simples de encarar um vetor é com uma seta que possui comprimento e direção. Por convenção, um vetor inicia na origem do plano cartesiano (0, 0) e se estende com um comprimento em alguma direção. A Figura 14-1 mostra uma variedade de vetores.

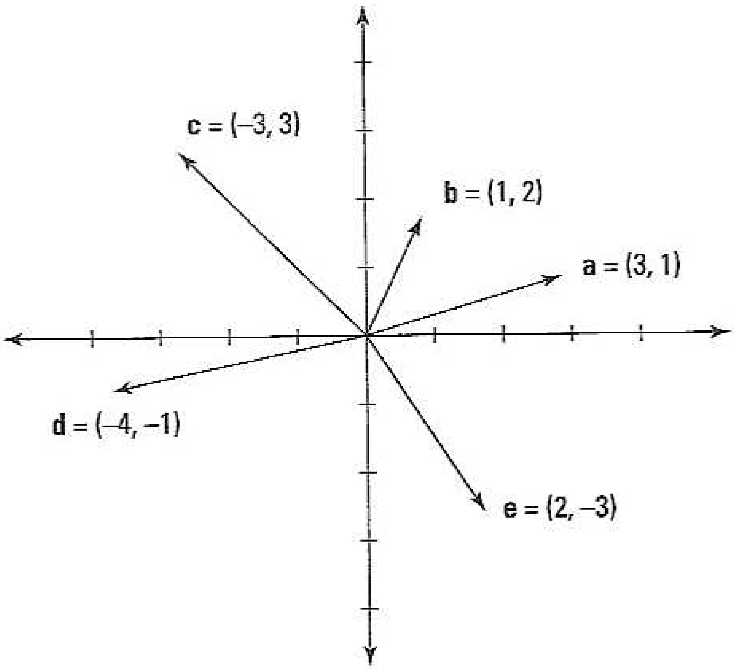


Figura 14-1: Vetores começando na origem são distintos por seus pontos finais.

Como você pode ver, quando um vetor inicia na origem, seus dois *componentes* (seus valores de x e de y) correspondem às coordenadas cartesianas de seu ponto final. Por exemplo, o vetor que inicia em (0, 0) e termina em (3, 1) é diferenciado como o vetor [3, 1].

CUIDADO!

Não confunda um vetor [x, y] com seu par cartesiano correspondente (x, y), que é apenas um ponto.

DICA

Por convenção, os vetores são nomeados em livros com letras minúsculas em negrito: **a**, **b**, **c**, e assim por diante (veja a Figura 14-1). Mas quando você está trabalhando com vetores no papel, a maioria dos professores se contenta em ver você substituindo o negrito por uma pequena linha ou seta acima da letra.

Deslocar um vetor da origem não muda seu valor. Por exemplo, a Figura 14-2 mostra o vetor [2, 3] com uma variedade de pontos iniciais.

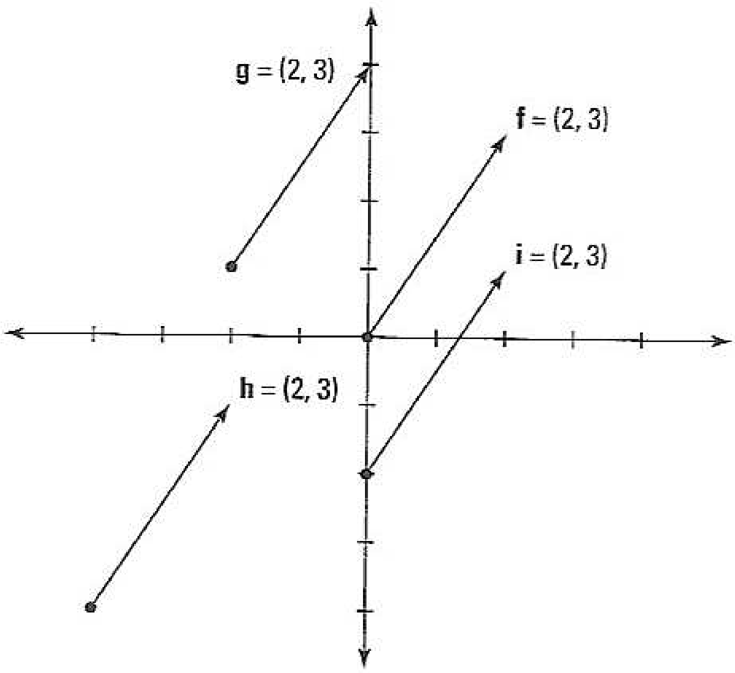


Figura 14-2: Todos os vetores com o mesmo comprimento e a mesma direção são equivalentes, não importando onde começam.

Calcule as coordenadas de um vetor inciando em (x_1, y_1) e terminando em (x_2, y_2) como [$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$]. Por exemplo, eis como calcular as coordenadas dos vetores **g**, **h** e **i** da Figura 14-2:

$$\mathbf{g} = [0 - -2, 4 - 1] = [2, 3]$$

$$\mathbf{h} = [-2 - -4, -1 - -4] = [2, 3]$$

$$\mathbf{i} = [2 - 0, 1 - -2] = [2, 3]$$

Como você pode ver, independentemente dos pontos iniciais e finais, esses vetores são equivalentes entre si e ao **f**.

Distinção entre vetores e escalares

Assim como os esquimós tem milhares de palavras para neve e os italianos ainda mais palavras para massa, os matemáticos possuem muitas palavras para números reais. Quando começa a estudar álgebra, você descobre rapidamente que uma *constante* ou um *coeficiente* era apenas um número real em um contexto específico.

Similarmente, quando você está discutindo vetores e deseja se referir a um número real, use a palavra *escalar*. Apenas o nome é diferente — no fundo, um escalar sabe muito bem que é apenas um bom e velho número real.

Alguns tipos de cálculos de vetores produzem novos vetores, enquanto outros resultam em escalares. Conforme introduzimos esses cálculos por toda a próxima seção, indicamos a você se deve esperar um vetor ou um escalar como resultado.

Calcule com vetores

Os vetores são comumente utilizados para modelar o vento, as correntes marinhas, a gravidade e o eletromagnetismo. Cálculos de vetores são essenciais para todos os tipos de problemas nos quais há colisão. Nesta seção, daremos a você o gostinho de como os cálculos simples com vetores são realizados.

Cálculo da magnitude

O comprimento de um vetor é chamado de sua *magnitude*. A notação para o valor absoluto (| |) também é utilizada para a magnitude de um vetor. Por exemplo, |**v**| se refere à magnitude do vetor **v**. (A propósito, alguns livros representam a magnitude com barras em dobro [|| ||] em vez de barras simples. Em ambas as formas, o significado é o mesmo.)

O que há em um nome?

Um escalar é apenas uma palavra pomposa para um número real. O nome surge porque um escalar *escala* um vetor – quer dizer, muda a escala de um vetor. Por exemplo, o número real 2 escala o vetor **v** com um fator de 2, então 2**v** é duas vezes mais longo que **v**. Você descobrirá mais sobre multiplicação de escalares em "Cálculo com vetores".

Calcule a magnitude de um vetor **v** = [x, y] utilizando uma variação da fórmula da distância. Essa fórmula é, por si só, uma variação do confiável teorema de Pitágoras:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por exemplo, calcule a magnitude do vetor **n** = [4, –3] como a seguir:

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

Como você pode ver, o uso das barras de valor absoluto para a magnitude dos vetores é apropriada: a magnitude, como as outras distâncias, é sempre medida como um valor não negativo. A magnitude de um vetor é a distância da origem de um gráfico até seu ponto, assim como o valor absoluto de um número é a distância dele de 0 em uma linha de números.

LEMBRE-SE

A magnitude de um vetor é *escalar*.

Multiplicação por escalar

Multiplicar um vetor por um escalar é chamado de *multiplicação por escalar*. Para realizar a multiplicação por escalar, multiplique o escalar por cada componente do vetor. Eis como você multiplica o vetor **v** = [x, y] pelo escalar k:

$$k\mathbf{v} = k[x, y] = [kx, ky]$$

Por exemplo, eis como você multiplica o vetor **p** = [3, 5] pelos escalares 2, –4 e $\frac{1}{3}$:

$$2\mathbf{p} = 2[3, 5] = [6, 10]$$

$$-4\mathbf{p} = -4[3, 5] = [-12, -20]$$

$$\frac{1}{3}\mathbf{p} = \frac{1}{3}[3, 5] = [1, \frac{5}{3}]$$

LEMBRE-SE

Quando você multiplica um vetor por um escalar, o resultado é um *vetor*.

Falando geometricamente, a multiplicação por escalar atinge o seguinte:

- A multiplicação por escalar por um número positivo diferente de 1 muda a magnitude do vetor, mas não sua direção.
- A multiplicação por escalar por –1 inverte sua direção, mas não muda sua magnitude.
- A multiplicação por escalar por qualquer outro número negativo inverte a direção do vetor e muda sua magnitude.

A multiplicação por escalar pode mudar a magnitude de um vetor aumentando-a ou diminuindo-a.

- A multiplicação por escalar por um número maior que 1 ou menor que –1 *aumenta* a magnitude do vetor.
- A multiplicação por escalar por uma fração entre –1 e 1 *diminui* a magnitude do vetor.

Por exemplo, o vetor 2**p** é duas vezes mais longo que **p**, o vetor $\frac{1}{2}\mathbf{p}$ possui a metade do comprimento de **p**, e o vetor –**p** tem o mesmo comprimento de **p**, mas se estende na direção oposta a partir da origem (como demonstrado na Figura 14-3).

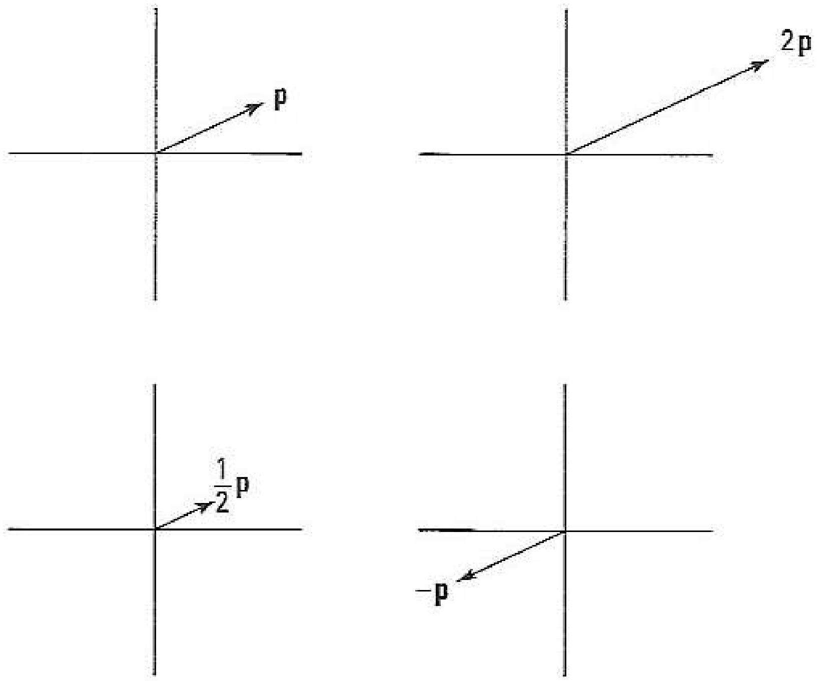


Figura 14-3: A multiplicação escalar do vetor muda sua magnitude e/ou sua direção.

Encontre o vetor unitário

Cada vetor possui um *vetor unitário* correspondente, que tem a mesma direção do vetor, mas com uma magnitude de 1. Para encontrar o vetor unitário **u** do vetor **v** = $[x, y]$, divida esse vetor por sua magnitude, como a seguir:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Perceba que essa fórmula usa a multiplicação por escalar, como mostramos a você na seção anterior, pois o numerador é um vetor e o denominador é um escalar.

Como você deve ter adivinhado só pelo nome, o vetor unitário é um *vetor*.

Por exemplo, para encontrar o vetor unitário **u** do vetor **q** = [–2, 1], primeiro calcule sua magnitude |**q**| como ensinamos anteriormente nesta seção:

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Agora, use a fórmula anterior para calcular o vetor unitário:

$$\mathbf{u} = \frac{[-2, 1]}{\sqrt{5}} = [-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]$$

Você pode conferir que a magnitude do vetor resultante **u** realmente é 1, como a seguir:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = 1$$

Soma e subtração de vetores

Some e subtraia dos vetores componente por componente, como a seguir:

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$
$$[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

Por exemplo, se **r** = [–1, 3] e **s** = [4, 2], eis como adicionar e subtrair esses vetores:

$$\mathbf{r} + \mathbf{s} = [-1, 3] + [4, 2] = [-1 + 4, 3 + 2] = [3, 5]$$
$$\mathbf{r} - \mathbf{s} = [-1, 3] - [4, 2] = [-1 - 4, 3 - 2] = [-5, 1]$$

Quando você adiciona ou subtrai dois vetores, o resultado é um *vetor*.

Geometricamente falando, a rede de efeitos da adição ou da subtração de um vetor é exibida na Figura 14-4. Nesse exemplo, o ponto final de **r** + **s** é equivalente ao ponto final de **s** quando **s** começa no ponto final de **r**. Similarmente, o ponto final de **r** – **s** é equivalente ao ponto final de –**s** — quer dizer, [–4, –2] — quando –**s** inicia no ponto final de **r**.

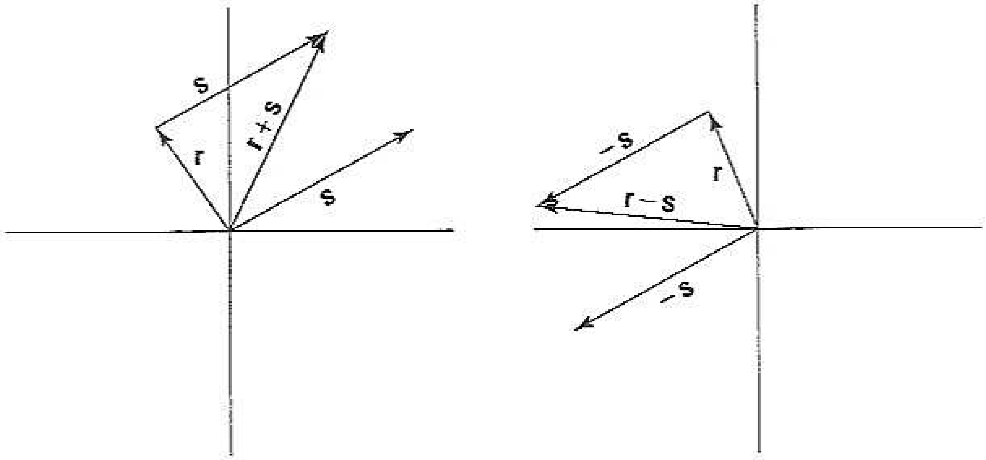


Figura 14-4: Adicione e subtraia os vetores no gráfico, iniciando um vetor no ponto final do outro vetor.

Dê um Salto para Outra Dimensão

O cálculo de várias variáveis diz respeito a três (ou mais) dimensões. Nesta seção, mostraremos três sistemas importantes para determinar pontos em 3D.

Compreenda as coordenadas cartesianas 3D

O sistema de coordenadas cartesianas tridimensional (3D) (também chamado de coordenadas retangulares 3D) é a extensão natural do gráfico cartesiano em 2D. A principal diferença é a adição de um terceiro eixo, o eixo z, estendendo-se ortogonalmente através da origem.

Desenhar um gráfico 3D em duas dimensões é meio complicado. Para se ter uma ideia melhor sobre como pensar em 3D, observe a Figura 14-5, e você pode compará-la com o canto interior de uma sala (não de uma sala redonda!). Perceba o seguinte:

- O eixo x corresponde ao ponto em que a parede esquerda encontra o chão.
- O eixo y corresponde ao ponto em que a parede direita encontra o chão.
- O eixo z corresponde ao ponto onde as duas paredes se encontram.

Assim como o gráfico cartesiano em 2D é dividido em quatro quadrantes, o gráfico 3D é dividido em oito *octantes*. De sua perspectiva, conforme você observa o gráfico, você está dentro do primeiro octante, onde todos os valores de x, y e z são positivos.

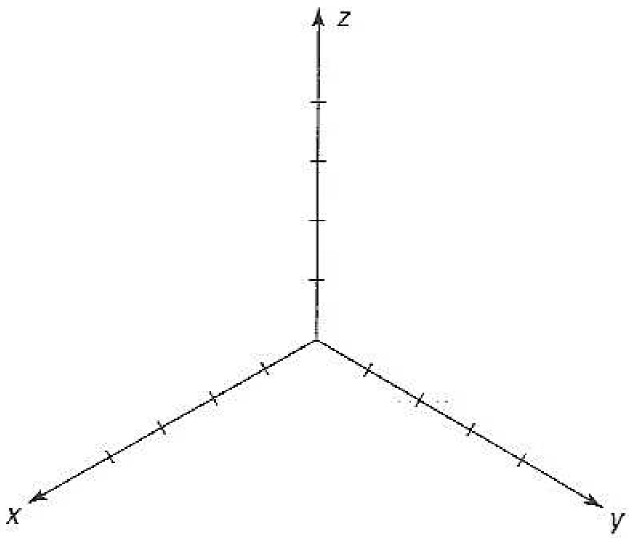


Figura 14-5: O primeiro octante de um sistema de coordenada cartesiana em 3D.

A Figura 14-6 mostra o sistema cartesiano 3D completo com o ponto (1, 2, 5) estabelecido. De forma semelhante com as coordenadas cartesianas comuns, você determina esse ponto contando 1 unidade na direção positiva de x, e então duas unidades na direção positiva de y e, finalmente, cinco unidades na direção positiva de z.

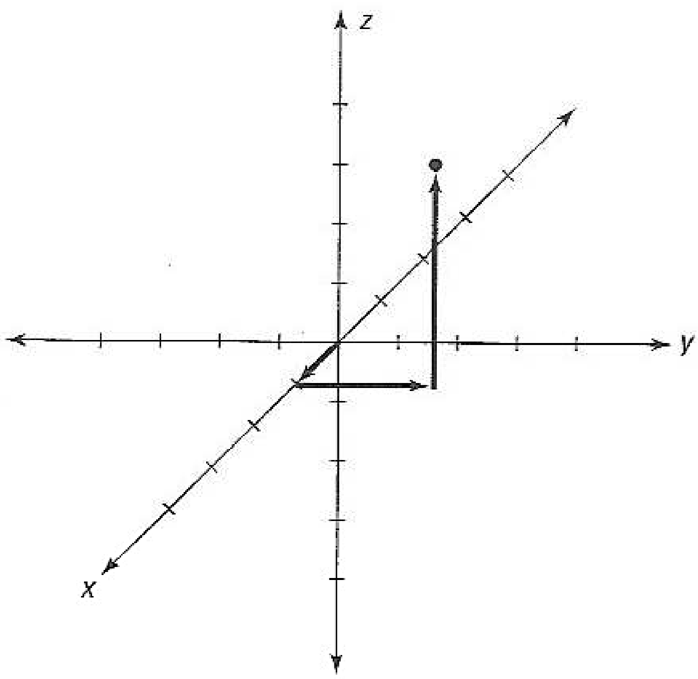


Figura 14-6: Estabeleça o ponto (1, 2, 5) no sistema de coordenadas cartesianas 3D.

Uso de sistemas alternativos de coordenadas 3D

No Capítulo 2, discutimos coordenadas polares, uma alternativa ao gráfico cartesiano. As coordenadas polares são úteis, pois elas permitem que você expresse e resolva uma variedade de problemas de forma mais fácil do que as coordenadas cartesianas.

Nesta seção, mostraremos duas alternativas ao sistema de coordenadas cartesianas 3D: coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas. Assim como as coordenadas polares, ambos esses sistemas conferem grande flexibilidade para resolver uma variedade maior de problemas.

Coordenadas cilíndricas

Você provavelmente se lembra das coordenadas polares de Pré-Cálculo ou até mesmo de Cálculo I. Como no sistema de coordenadas cartesianas, o sistema de coordenadas polares determina um par de valores para cada ponto no plano. Diferentemente do sistema de coordenadas cartesianas, esses valores não dependem de dois eixos perpendiculares (embora esses eixos frequentemente sejam traçados para deixar o gráfico mais compreensível). O eixo principal é o eixo *horizontal*, o qual corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

Enquanto um par cartesiano está na forma (x, y), as coordenadas polares utilizam (r, 0). As *coordenadas cilíndricas* são simples coordenadas polares com a adição de um eixo z, estendendo-se a partir da origem, como nas coordenadas cartesianas 3D (veja "Compreenda as coordenadas cartesianas 3D", anteriormente neste capítulo). Para cada ponto no espaço é determinado um conjunto de coordenadas cilíndricas na forma (r, θ, z).

Eis o que você precisa saber:

- A variável r mede a distância do eixo z até aquele ponto.
- A variável θ mede a distância angular do eixo horizontal. Esse ângulo é medido em radianos em vez de graus, então $2\pi = 360°$. (Veja o Capítulo 2 para saber mais sobre radianos.)
- A variável z mede a distância daquele ponto ao plano xy.

Ao estabelecer coordenadas cilíndricas, determine as primeiras coordenadas (r e θ) da mesma forma que você faria com as coordenadas polares (veja o Capítulo 2). Então determine a coordenada z como você faria com a coordenada cartesiana 3D.

A Figura 14-7 mostra a você como estabelecer o ponto $(3, \frac{\pi}{2}, 2)$ nas coordenadas cilíndricas:

1. **Conte 3 unidades para a direita da origem no eixo horizontal (assim como você faria ao estabelecer coordenadas polares).**
2. **Ande no sentido anti-horário ao longo do arco de um círculo até você alcançar a linha desenhada no ângulo $\frac{\pi}{2}$ a partir do eixo horizontal (novamente, da mesma forma que as coordenadas polares).**
3. **Conte duas unidades acima do plano e estabeleça seu ponto aí.**

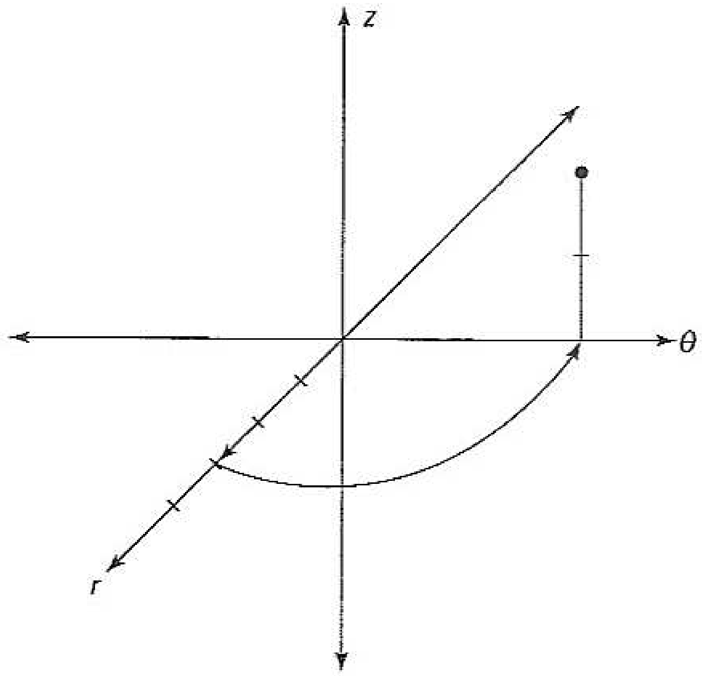


Figura 14-7: Estabeleça o ponto $(3, \frac{\pi}{2}, 2)$ em coordenadas cilíndricas.

Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas são utilizadas — com uma pequena variação — para medir latitude, longitude e altitude na esfera mais importante de todas, o planeta Terra.

Para cada ponto no espaço é determinado um conjunto de coordenadas esféricas na forma (ρ, θ, ϕ). Caso você não esteja em uma irmandade ou fraternidade, ρ é a letra minúscula grega *rho*, θ é a letra minúscula grega *theta* (comumente utilizada em matemática para representar um ângulo), ϕ é a letra minúscula grega *phi*, que é comumente pronunciada "fi" (nunca "pi").

A coordenada ρ corresponde à altitude. Na Terra, a altitude é medida como a distância acima ou abaixo do nível do mar. Nas coordenadas esféricas, contudo, a altitude indica quão distante no espaço está um ponto de sua origem.

A coordenada θ corresponde à longitude: a medida da distância angular do eixo horizontal.

A coordenada ϕ corresponde à latitude. Na Terra, a latitude é medida como uma distância angular a partir do equador. Nas coordenadas esféricas, contudo, a latitude é medida como a distância angular do polo norte.

DICA

Determinar ϕ pode ser bem complicado no começo. Para pegar o jeito, pense em um globo e imagine passar por ele ao longo de uma única linha longitudinal. Perceba que, conforme você se desloca, sua latitude vai mudando, então

- No polo norte, $\phi = 0$
- No equador, $\phi = \frac{\pi}{2}$
- No polo sul, $\phi = \pi$

CUIDADO!

Alguns livros substituem a letra grega ρ (*rho*) por *r*. Em ambas as formas, a coordenada significa a mesma coisa: altitude, que é a distância de um ponto em relação à origem. Em outros livros, a ordem das duas últimas coordenadas é invertida. Assegure-se de que você saiba qual convenção seu livro utiliza.

A Figura 14-8 mostra a você como estabelecer um ponto nas coordenadas esféricas. Por exemplo, suponha que você deseja estabelecer o ponto $(4, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$. Siga estes passos para fazer isso:

1. **Conte quatro unidades para a direita da origem, no eixo horizontal.**
2. **Ande no sentido anti-horário ao longo do arco de um círculo até que você alcance a linha traçada no ângulo $\frac{\pi}{2}$ a partir do eixo horizontal (novamente, assim como nas coordenadas polares).**
3. **Imagine uma única linha longitudinal arqueando-se a partir do polo norte de uma esfera, através do ponto no equador onde você estiver e em direção ao polo sul.**
4. **Desloque-se para baixo na linha de latitude em uma distância angular de $\frac{3\pi}{4}$, a partir do polo norte — quer dizer, na metade da distância entre o equador e o polo sul — e estabeleça seu ponto aí.**

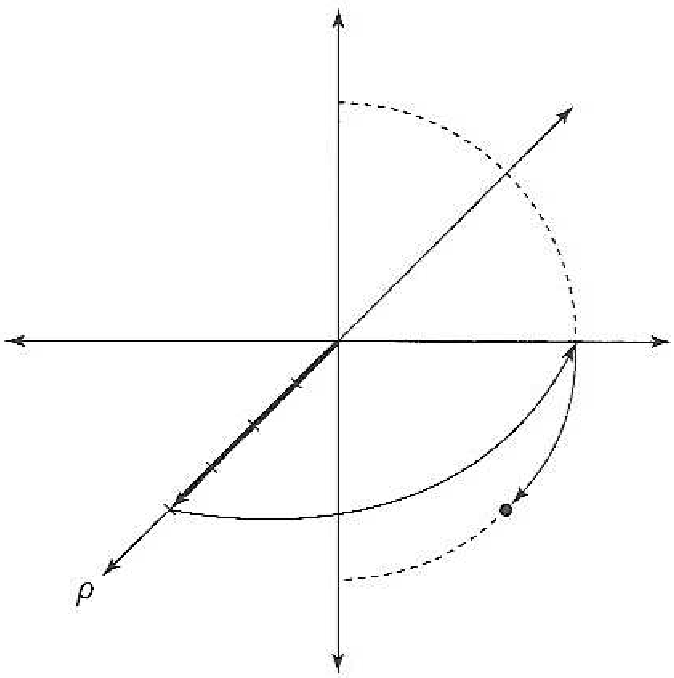


Figura 14-8: Estabeleça o ponto $(4, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ nas coordenadas esféricas.

Funções com Diversas Variáveis

Da álgebra, você sabe que uma função $y = f(x)$ é basicamente uma máquina matemática de transformar um número em outro. A variável x é a variável de entrada e y é a variável de saída, então cada valor de x resulta em um único valor de y.

Quando você faz o gráfico de uma curva, você pode usar o teste da linha vertical para garantir que é uma função: qualquer linha vertical que intersecte uma função a intersecta em um ponto exato, como ilustrado na Figura 14-9.

Esses conceitos relacionados às funções também são levados para funções de mais de uma variável. Por exemplo, eis algumas funções de duas variáveis:

$$z = 2x + y + 5$$

$$z = \operatorname{sen} x + y + \sqrt{y}$$

$$z = e^{xy} - \ln(1 + x^2y^2)$$

A forma geral de uma função de duas variáveis é $z = f(x, y)$. Cada função de duas variáveis possui um par cartesiano (x, y) como entrada e, por sua vez, resulta em um valor de z. Observando os três exemplos anteriores, substituindo a entrada $(0, 1)$ dá um resultado 6 para a primeira função, 2 para a segunda e 1 para a terceira.

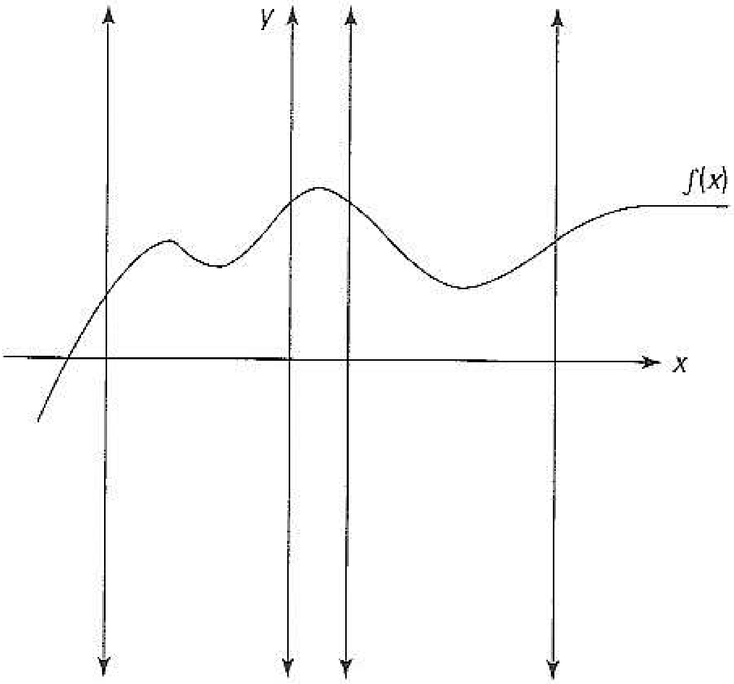


Figura 14-9: O teste da linha vertical mostra que uma função não resulta em mais de um valor de *y* para cada valor inicial de *x*.

Uma boa forma de visualizar uma função de duas variáveis é uma superfície flutuando no plano *xy* de um gráfico cartesiano 3D. (Certo, essa superfície pode cruzar o plano e continuar para baixo dele — assim como uma função pode cruzar o eixo *x* —, mas, por enquanto, apenas imagine-a flutuando.) Cada ponto nessa superfície cresce diretamente acima de um ponto exato do plano. Quer dizer, se você traçar uma linha vertical em qualquer ponto do plano, ela cruza a função em apenas um ponto. A Figura 14-10 ilustra esse conceito.

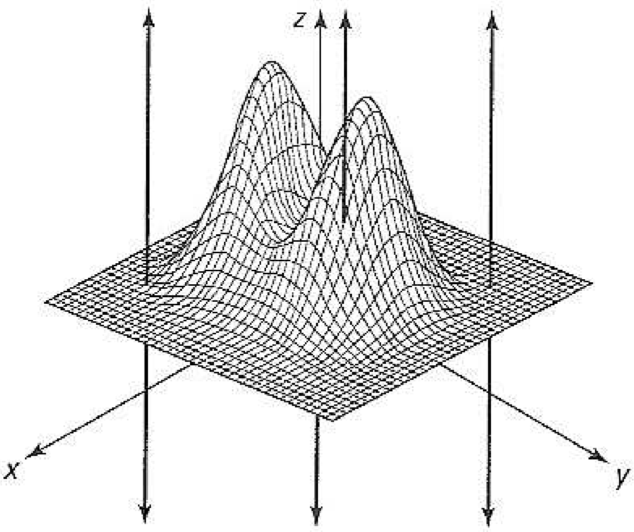


Figura 14-10: O teste da linha vertical para uma função em três dimensões.

O conceito de uma função pode ser estendido a dimensões maiores. Por exemplo, $w = f(x, y, z)$ é a forma básica de uma função de três variáveis. Como essa função (assim como outras funções com mais de duas variáveis) existe em mais de três dimensões, é muito mais difícil de imaginar. Por enquanto, apenas concentre-se em fazer o salto de duas para três dimensões, isto é, de funções de uma variável para funções com duas variáveis. A maior parte do cálculo em várias variáveis que você estuda em Cálculo III é em três dimensões. (Talvez devesse ser chamado de Cálculo 3D.)

Derivadas Parciais

As derivadas parciais são os equivalentes de maior dimensão das derivadas que você conhece do Cálculo I. Assim como a derivada representa a inclinação de uma função em um plano cartesiano, uma derivada parcial representa um conceito similar de inclinação em mais dimensões. Nesta seção, esclareceremos essa noção de inclinação em três dimensões. Também ensinaremos você a calcular as derivadas parciais de funções com duas variáveis.

Meça a inclinação em três dimensões

Na seção anterior "Funções com Diversas Variáveis", recomendamos que você visualize uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ como uma superfície pairando no plano xy de um gráfico cartesiano 3D. (Veja a Figura 14-10 para ter uma ideia de um exemplo de função.)

Por exemplo, observe a função $z = y$ exibida na Figura 14-11. Como você pode ver, essa função parece muito com o telhado inclinado de uma casa. Imagine-se parado sobre essa superfície. Quando você caminha paralelo ao eixo y, sua altitude sobe ou desce. Em outras palavras, conforme muda o valor de y, também muda o valor de z. Mas quando você caminha paralelo ao eixo x, sua altitude permanece a mesma; mudar o valor de x não faz efeito sobre z.

Então, intuitivamente, você espera que uma derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ — a inclinação na direção do eixo y — seja 1. Você também espera que a derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ — a inclinação na direção do eixo x — seja 0. Na próxima seção, ensinaremos você a calcular derivadas parciais para verificar esse resultado.

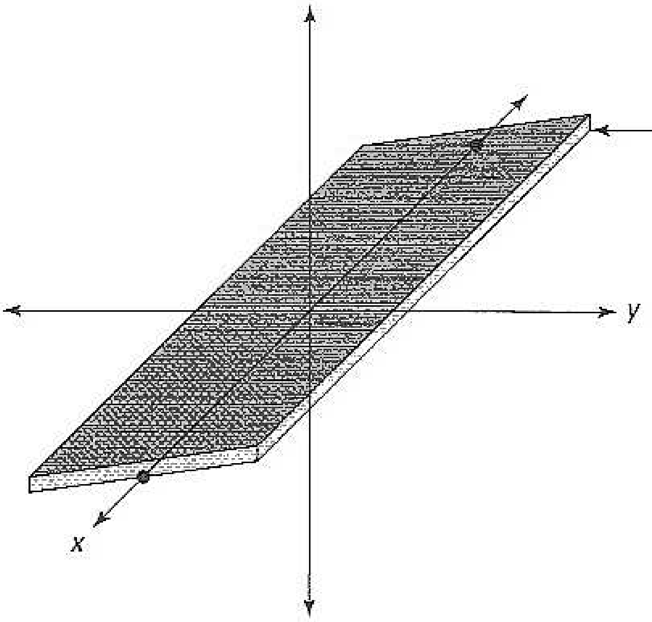


Figura 14-11: A função $z = y$.

Resolução de derivadas parciais

Resolver derivadas parciais não é muito mais difícil do que resolver derivadas comuns. Dada uma função $z(x, y)$, as duas derivadas parciais são $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$. Eis como você as calcula:

- Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, trate y como uma constante e use x como sua variável de diferenciação.
- Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, trate x como uma constante e use y como sua variável de diferenciação.

Por exemplo, suponha que você tenha a equação $z = 5x^2y^3$. Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$, trate y como se fosse uma constante — quer dizer, trate o fator inteiro $5y^3$ como se fosse um único grande coeficiente — e diferencie $5y^3$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^3(2x) = 10xy^3$$

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y}$, trate x como se fosse uma constante — quer dizer, trate $5x^2$ como se fosse um coeficiente — e diferencie y^3:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2(3y^2) = 15x^2y^2$$

Como outro exemplo, suponha que você receba a equação $z = 2e^x$ sen y + ln x. Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$, trate y como se fosse uma constante e diferencie pela variável x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,\text{sen}\,y\,(e^x) + \frac{1}{x} = 2e^x\,\text{sen}\,y + \frac{1}{x}$$

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y}$, trate x como se fosse uma constante e diferencie pela variável y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\, e^x \cos y$$

Como você pode ver, ao diferenciar por y, o termo $\ln x$ é tratado como uma constante e fica de fora completamente.

Retornando ao exemplo da seção anterior — a função $z = y$ do "telhado inclinado" —, eis ambas as derivadas parciais daquela função:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Como você pode ver, esse cálculo produz os resultados previstos.

Integrais Múltiplas

Você já sabe que uma integral permite que você meça a área em duas dimensões (veja o Capítulo 1 caso esse conceito não esteja claro). E como você provavelmente se lembra de geometria, aquilo que é análogo à área em três dimensões é o volume.

As integrais múltiplas são o equivalente em mais dimensões da boa e velha integral que você descobriu em Cálculo II. Elas permitem que você meça o volume em três dimensões (ou mais).

A maioria das integrais múltiplas, que você um dia terá de resolver, aparece em duas variedades: integrais duplas e triplas. Nesta seção, mostraremos como compreender e calcular ambos os tipos de integrais múltiplas.

Meça o volume sob uma superfície

As integrais definidas fornecem uma forma confiável de medir determinada área entre uma função e o eixo x, limitada por quaisquer dois valores de x. (Abordamos isso em detalhes nos Capítulos 2 e 3.) Similarmente, uma *integral dupla* permite que você meça determinado volume entre uma função $z = f(x, y)$ e o plano xy, limitado por quaisquer dois valores de x e quaisquer dois valores de y.

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy$$

Para se ter uma ideia desse volume, observe a Figura 14-12. A integral dupla mede o volume entre $f(x, y)$ e o plano xy, limitado por um retângulo. Nesse caso, o retângulo é descrito pelas quatro linhas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 2$.

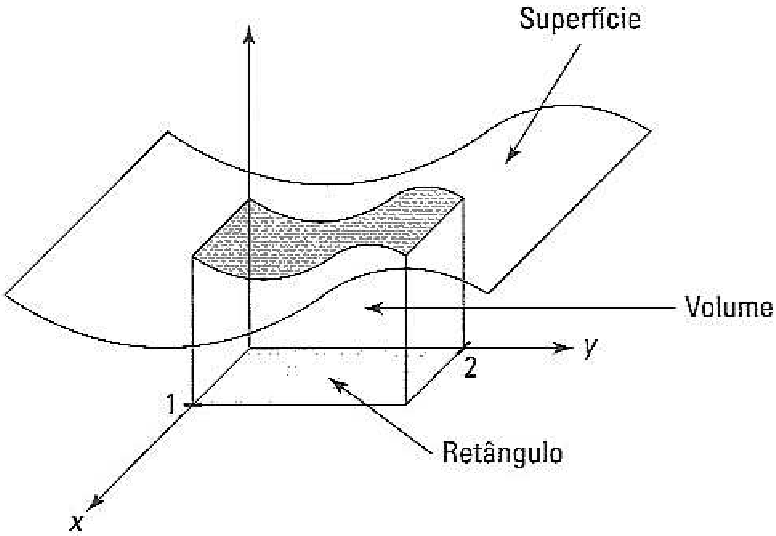


Figura 14-12: Uma integral dupla permite que você meça a área sob uma superfície, limitada por um retângulo.

Uma integral dupla é, na verdade, uma integral dentro de outra integral. Para ajudá-lo a enxergar isso isolamos entre parênteses a integral interna no exemplo anterior:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

Quando você se foca na integral dentro dos parênteses, você pode ver que os limites de integração 0 e 1 correspondem a dx, isso é, $x = 0$ e $x = 1$. Similarmente, os limites de integração 0 e 2 correspondem a dy — quer dizer, $y = 0$ e $y = 2$.

Resolução de integrais múltiplas

Integrais múltiplas (integrais duplas, integrais triplas e assim por diante) são normalmente integrais definidas, então resolvê-las resulta em um número real. Resolver integrais múltiplas é parecido com resolver funções dentro de funções: trabalhe de dentro para fora.

Resolução de integrais duplas

Resolva integrais duplas em dois passos: primeiro desenvolva a integral interna e então substitua essa solução na integral externa e a resolva. Por exemplo, suponha que você deseja integrar a seguinte integral dupla:

$$\int_1^3 \int_{4x}^{5x} \frac{y^2}{x}\,dy\,dx$$

Para começar, coloque a integral interna entre parênteses, de forma que você possa ver melhor aquilo com que está trabalhando:

$$\int_1^3 \left(\int_{4x}^{5x} \frac{y^2}{x}\, dy \right) dx$$

Agora, foque no que há dentro dos parênteses. Por enquanto, você pode ignorar o resto. Sua variável de integração é y, então trate a variável x como se fosse uma constante, movendo-a para fora da integral:

$$\frac{1}{x} \int_{4x}^{5x} y^2\, dy$$

Perceba que os limites de integração nessa integral são funções de x. Então o resultado dessa integral definida também será uma função de x:

$$= \frac{y^3}{3x} \Big|_{y=4x}^{y=5x}$$

$$= \frac{5^3x^3}{3x} - \frac{4^3x^3}{3x} = \frac{125x^3}{3x} - \frac{64x^3}{3x} = \frac{61}{3}x^2$$

Agora, substitua essa expressão na integral externa. Em outras palavras, substitua-a por aquilo que está dentro dos parênteses:

$$\int_1^3 \frac{61}{3} x^2\, dx$$

Resolva essa integral como de costume:

$$= \frac{61}{9} x^3 \Big|_{x=1}^{x=3}$$

$$= \frac{61}{9}(3)^3 - \frac{61}{9}(1)^3$$

$$= 183 - \frac{61}{9} = \frac{1.586}{9}$$

Compreenda as integrais triplas

Integrais triplas parecem assustadoras, mas se você lidar com elas passo a passo, elas não serão mais complicadas do que integrais comuns. Assim como nas integrais duplas, comece no centro e trabalhe de dentro para fora. Por exemplo:

$$\int_1^2 \int_z^{4z} \int_{\frac{z}{y}}^{\frac{2z}{y}} x^3 y^5 z\, dx\, dy\, dz$$

Comece por separar as duas integrais internas:

$$\int_1^2 \left[\int_z^{4z} \left(\int_{\frac{z}{y}}^{\frac{2z}{y}} x^3 y^5 z\, dx \right) dy \right] dz$$

Seu plano de ataque é resolver a integral dentro dos parênteses primeiro, e então dentro dos colchetes e, finalmente, a integral externa. Comece pelo começo:

$$\int_{\frac{z}{y}}^{\frac{2z}{y}} x^3 y^5 z \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 y^5 z \Big|_{x = z/y}^{x = 2z/y}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2z}{y}\right)^4 y^5 z - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{y}\right)^4 y^5 z$$

Perceba que substituir valores para x resulta em uma expressão em termos de y e z. Agora simplifique essa expressão para torná-la mais fácil de trabalhar:

$$= 4yz^5 - \frac{1}{4} yz^5 = \frac{15}{4} yz^5$$

Troque essa solução de volta para substituir a integral nos parênteses:

$$\int_1^2 \left[\int_z^{4z} \frac{15}{4} yz^5 \, dy \right] dz$$

Uma integral a menos, duas restantes. Dessa vez, concentre-se na integral dentro dos colchetes. Agora, a variável de integração é y:

$$\int_z^{4z} \frac{15}{4} yz^5 \, dy$$

$$= \frac{15}{8} y^2 z^5 \Big|_{y = z}^{y = 4z}$$

$$= \frac{15}{8} (4z)^2 z^5 - \frac{15}{8} z^2 z^5$$

Agora simplifique, antes de continuar:

$$= 30z^7 - \frac{15}{8} z^7 = \frac{225}{8} z^7$$

Substitua esse resultado de volta na integral, como a seguir:

$$\int_1^2 \frac{225}{8} z^7 \, dz$$

Agora, resolva esta integral:

$$= \frac{225}{64} z^8 \Big|_{z=1}^{z=2}$$

$$= \frac{225}{64} 2^8 - \frac{225}{64} 1^8$$

$$= \frac{57{,}600}{64} - \frac{225}{64} = \frac{57{,}375}{64}$$

Capítulo 15

O Que É Tão Diferente em Equações Diferenciais?

Neste Capítulo

- Classificação de tipos diferentes de equações diferenciais (EDs)
- Compreenda a ligação entre EDs e integrais
- Verificação da solução proposta de uma ED
- Veja como as EDs figuram no mundo físico
- Utilize uma variedade de métodos para resolver EDs

A própria menção das equações diferenciais (EDs, para facilitar) causa uma poderosa combinação de temor, horror e total confusão nas mentes não matemáticas. Até mesmo intrépidos estudantes de cálculo já pensaram em seguir uma carreira em história da arte ao se deparar com essas feras indomáveis. Mas o que são as equações diferenciais? De onde elas vêm? Por que são necessárias? E, pelo amor de Deus, como as resolvemos?

Neste capítulo, responderemos essas perguntas e o familiarizaremos com as EDs. Ensinaremos a identificar os tipos básicos de EDs, para o caso de você um dia estar em um coquetel do departamento de matemática (sortudo!), e não se sentir completamente desorientado. Relacionamos as EDs com as integrais que você já compreende bem. Mostraremos como construir sua própria ED para que você sempre tenha um passatempo nas horas vagas, e também ensinamos a verificar as soluções das EDs. Além disso, você descobrirá como aparecem as EDs na física. Finalmente, mostramos a você alguns métodos simples para resolver algumas equações diferenciais básicas.

O Básico das Equações Diferenciais

Resumindo, uma *equação diferencial* é qualquer equação que inclui pelo menos uma derivada. Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x\, e^y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$$

Resolver uma equação diferencial significa encontrar o valor da variável dependente nos termos da variável independente. Durante este capítulo, utilizaremos *y* como a variável dependente, então o objetivo de cada problema é encontrar *y* nos termos de *x*.

Nesta seção, ensinaremos você a classificar as EDs. Também demonstramos como construir EDs e verificar a solução de uma ED.

Classificação de EDs

Assim como em outras equações que você já encontrou, as equações diferenciais aparecem em grande variedade. E diferentes variedades de EDs podem ser resolvidas com o uso de diferentes métodos. Nesta seção, mostraremos a você algumas formas importantes de classificar EDs.

Equações diferenciais ordinárias e parciais

Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) tem apenas derivadas de uma variável — quer dizer, não possui qualquer derivada parcial (volte para o Capítulo 14 para saber mais sobre diferenciação parcial). Eis alguns exemplos de EDOs:

$$\frac{dy}{dx} = x \operatorname{sen}(x^2) \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \csc x + e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4xy\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Em contraste, uma *equação diferencial parcial* (EDP) possui pelo menos uma derivada parcial. Eis alguns exemplos de EDPs:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = e^{x-y}$$

$$3\frac{\partial u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\frac{\partial v}{\partial x^2}$$

As equações diferenciais ordinárias normalmente são os tópicos de uma típica aula sobre equações diferenciais na universidade. Elas estão um passo ou dois além daquilo com que você está acostumado a trabalhar, mas muitos estudantes realmente consideram Equações Diferenciais um curso mais fácil que Cálculo II (geralmente considerada a aula mais complicada na série de Cálculo). Contudo, as EDOs estão limitadas na forma com que podem realmente expressar a realidade física.

Os grandes obstáculos são as equações diferenciais parciais. Muitos físicos se dão bem com essas pequenas joias. Infelizmente, resolver EDPs é um salto gigantesco na matemática em relação ao que o estudante médio de cálculo está acostumado. Aprofundar-se no tipo de matemática que faz as EDPs ganhar vida é algo tipicamente reservado para uma pós-graduação.

Ordem das EDs

Equações diferenciais ainda são classificadas de acordo com sua *ordem*. Essa classificação é similar à classificação das equações polinomiais por graus (veja o Capítulo 2 para saber mais sobre polinômios).

As EDOs de primeira ordem contém apenas derivadas simples. Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = ye^x$$

$$3\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} y + 2e^{2x}$$

$$\ln xy \frac{dy}{dx} = 2x^2 + y - \tan x$$

As EDOs de ordens superiores são classificadas, assim como os polinômios, pela *maior* ordem de suas derivadas. Eis alguns exemplos de EDOs de segunda, terceira e quarta ordens:

EDO de segunda ordem: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 10y = e^x$

EDO de terceira ordem: $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

EDO de quarta ordem: $x^2\frac{d^4y}{dx^4} + \cos y = x$

Assim como nos polinômios, genericamente falando, uma ED de ordem maior é mais difícil de resolver do que uma de ordem baixa.

EDs lineares

O que constitui uma equação diferencial linear depende levemente daquilo que você deseja. Com propósitos práticos, uma ED linear de primeira ordem se encaixa na seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções de x. Eis alguns exemplos de EDs lineares de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = -\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{sen}\,x = e^x$$

EDs lineares com frequência podem ser resolvidas, ou pelo menos simplificadas, com a utilização de um *fator de integração*. Mostraremos a você como fazer isso mais adiante, neste capítulo.

Uma ED linear de segundo grau se encaixa na seguinte forma:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes. Eis alguns exemplos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Perceba que a constante a sempre pode ser reduzida a 1, resultando em ajustes nos outros dois coeficientes. As EDs lineares de segundo grau normalmente são tópicos importantes em cursos de equações diferenciais em universidades. Resolvê-las requer um conhecimento de matrizes e números complexos que está além da abrangência deste livro.

Observe atentamente as EDs

Você não precisa jogar basquete profissional para apreciar basquete. Em vez disso, você pode apreciar o jogo das arquibancadas ou, se preferir, em uma confortável poltrona na frente da TV. Similarmente, você não tem que se aprofundar demais em equações diferenciais para adquirir uma compreensão geral de como elas funcionam. Nesta seção, ofereceremos a você assentos bem localizados para o jogo das equações diferenciais.

Como cada integral é uma ED

A integral é um exemplo particular de um tipo mais geral de equação — a equação diferencial. Para ver como isso se dá, suponha que você está trabalhando com esta bela integral:

$$y = \int \cos x \, dx$$

Diferenciar os dois lados a transforma em uma ED:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

É claro, você sabe resolver essa ED pensando nela como uma integral:

$$y = \text{sen}\, x + C$$

Então, genericamente, quando uma ED está na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

quando $f(x)$ é uma função arbitrária de x, você pode expressar essa ED como uma integral e resolvê-la pela integração.

Por que construir EDs é mais fácil que resolvê-las?

A razão porque a ED da última seção é tão simples de resolver é que a derivada está isolada em um lado da equação. As EDs atingem um novo nível de dificuldade quando a derivada não está isolada.

Uma boa analogia pode ser feita na matemática mais simples, ao fazer o salto da aritmética para a álgebra. Por exemplo, eis um problema aritmético:

$$x = 20 - (4^2 + 3)$$

Embora esse seja, tecnicamente, um problema de álgebra, você pode resolvê-lo sem ela, pois o x está isolado no começo do problema. Contudo, o jogo muda quando x está mais misturado na equação. Por exemplo:

$$2x^3 - x^2 + 5x - 17 = 0$$

A aritmética não é forte o suficiente para esse problema, então a álgebra assume seu lugar. Similarmente, quando as derivadas são envolvidas na teia de uma equação — como na maioria das EDs que mostramos anteriormente em "Classificação de EDs" — integrar não é mais eficiente e começa a busca por novos métodos.

Embora resolver EDs seja frequentemente complicado, construí-las é fácil. Por exemplo, suponha que você deseja começar com esta simples equação quadrática:

$$y = 3x^2 + 4x - 5$$

Agora, encontre a primeira e a segunda derivada:

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6$$

Somar os lados esquerdo e direito das três equações resulta na seguinte equação diferencial:

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 10x + 5$$

Como você construiu sozinho a equação, você sabe o que é igualado ao y. Mas, se você passar essa equação para outros estudantes, eles provavelmente não serão capazes de adivinhar como você a construiu, então eles terão algum trabalho para encontrar y. Por exemplo, eis outra ED:

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Essa equação provavelmente parece difícil, pois você não possui muita informação. E, ainda assim, depois de apresentarmos a solução, ela parece simples:

$$y = \operatorname{sen} x \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d^3y}{dx^4} = -\cos x$$

Mas mesmo depois de ver a solução, como você sabe se ela é a única solução? Para começar, $y = -\operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = -\cos x$ são soluções. Existem outras? Como você as encontra? E como você sabe quando já encontrou todas?

Outra dificuldade surge quando o próprio y está misturado na equação. Por exemplo, como você encontra y nessa equação?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{e^y}$$

Como você pode ver, equações diferenciais contêm subtítulos traiçoeiros que você não encontra no cálculo básico.

Verificando soluções de EDs

Mesmo que você não saiba como encontrar uma solução de uma equação diferencial, você pode sempre verificar se uma solução proposta funciona. Essa é uma simples questão de substituir os valores indicados da variável dependente — utilizamos y durante todo o capítulo — em ambos os lados da equação para ver se a igualdade é mantida.

Por exemplo, eis uma ED:

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 4e^{3x} \cos x$$

Você pode não ter ideia de como começar a resolver essa ED, mas imagine que um anjo pouse em sua caneta e lhe ofereça esta solução:

$$y = 4e^{3x} \operatorname{sen} x$$

Você pode verificar se esse anjo realmente sabe matemática substituindo esse valor de y como a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 4e^{3x}\cos x$$

$$\frac{d}{dx}4e^{3x}\operatorname{sen}x = 3(4e^{3x}\operatorname{sen}x) + 4e^{3x}\cos x$$

$$4(3e^{3x}\operatorname{sen}x + e^{3x}\cos x) = 12\,e^{3x}\operatorname{sen}x + 4e^{3x}\cos x$$

$$= 12\,e^{3x}\operatorname{sen}x + 4e^{3x}\cos x = 12\,e^{3x}\operatorname{sen}x + 4e^{3x}\cos x$$

Como os lados esquerdo e direito da equação são iguais, a solução do anjo está correta.

Resolução de Equações Diferenciais

Nesta seção, mostraremos como resolver alguns tipos de EDs. Primeiro você resolverá a ED favorita de todo mundo, a *equação separável*. A seguir, você coloca essa compreensão para trabalhar e resolver um *problema de valor inicial* (PVI). Finalmente, ensinamos você a resolver uma ED linear de primeira ordem utilizando um fator de integração.

Resolução de equações separáveis

Equações diferenciais se tornam mais complicadas de resolver quanto mais embaraçadas elas estiverem. Em certos casos, contudo, uma equação que parece completamente emaranhada é, na verdade, fácil de separar. Equações desse tipo são chamadas de *equações separáveis* (ou *equações autônomas*), e elas aparecem na seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Equações separáveis são relativamente fáceis de resolver. Por exemplo, suponha que você deseja resolver o seguinte problema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}x}{e^y}$$

Você pode pensar no símbolo $\frac{dy}{dx}$ como uma fração e isolar os termos x e y dessa equação em lados opostos do sinal de igualdade:

$$e^y\,dy = \operatorname{sen}x\,dx$$

Agora, integre ambos os lados:

$$\int e^y\,dy = \int \operatorname{sen}x\,dx$$

$$e^y + C_1 = -\cos x + C_2$$

O passo anterior é questionável, pois a variável de integração é diferente em cada lado do sinal de igual. Você pode pensar, "Sem problemas, é tudo integração!", mas imagine se você tentou dividir um lado de uma equação por 2 e o outro lado por 3, e então debochou com "É tudo divisão!". Claramente, você tem um problema. A boa notícia, contudo, é que por razões técnicas além da abrangência deste livro, integrar ambos os lados por variáveis diferentes realmente produz a resposta correta.

C_1 e C_2 são ambos constantes, então você pode usar $C = C_2 - C_1$ para simplificar a equação:

$$e^y = -\cos x + C$$

A seguir, use um logaritmo natural para desfazer o expoente, e então simplifique:

$$\ln e^y = \ln(-\cos x + C)$$

$$y = \ln(-\cos x + C)$$

Para verificar essa solução, substitua o valor de y em ambos os lados da equação original:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{e^y}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(-\cos x + C) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\ln(-\cos x = c)}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(-\cos x + C) = \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x + C}$$

$$\frac{1}{-\cos x + C} \cdot \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x + C}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x + C} = \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x + C}$$

Resolução de problemas de valor inicial (PVIs)

No Capítulo 3 mostramos a você que uma integral definida é um exemplo particular de uma família inteira de integrais indefinidas. De forma parecida, um *problema de valor inicial* (PVI) é um exemplo particular de uma solução de uma equação diferencial. Cada PVI oferece uma informação extra — chamada de *valor inicial* — que permite que você utilize a solução geral em uma ED para obter uma *solução específica*.

Por exemplo, eis um problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad y(0) = 5$$

Esse problema inclui não apenas uma ED, mas também uma equação adicional. Para compreender o que essa equação informa, lembre-se de que y é uma variável dependente, uma função de x. Então, a notação $y(0) = 5$ significa "quando $x = 0$, $y = 5$". Você vê como essa informação funciona conforme continuamos esse exemplo.

Para resolver uma PVI, você primeiro deve resolver a ED. Faça isso encontrando a solução geral sem se preocupar com o valor inicial. Felizmente, essa ED é uma equação separável, que você aprendeu a resolver na seção anterior:

$$\frac{1}{y}\, dy = \sec^2 x\, dx$$

Integre ambos os lados:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \sec^2 x\, dx$$

$$\ln y = \tan x + C$$

Nesse último passo, utilizamos C para consolidar as constantes de integração de ambos os lados da equação em uma única constante C. (Se isso não fizer sentido, explicamos o porquê em "Resolução de equações separáveis", anteriormente neste capítulo.) A seguir, extraímos o logaritmo natural utilizando e:

$$e^{\ln y} = e^{\tan x + C}$$

$$y = e^{\tan x} \cdot e^{C}$$

Como e^C é uma constante, essa equação pode ser ainda mais simplificada utilizando a substituição $D = e^C$:

$$y = De^{\tan x}$$

Antes de continuar, certifique-se de que essa solução é correta ao substituir esse valor de y em ambos os lados da equação original:

$$\frac{dy}{dx} = y \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} De^{\tan x} = De^{\tan x} \sec^2 x$$

$$De^{\tan x} \sec^2 x = De^{\tan x} \sec^2 x$$

Confirmado, então $y = De^{\tan x}$ é, realmente, a *solução geral* para a ED. Para resolver o problema de valor inicial, contudo, precisamos encontrar o valor específico da variável D utilizando a informação adicional que temos: quando $x = 0$, $y = 5$. Substituir esses dois valores na equação torna possível encontrar D:

$$5 = De^{\tan 0}$$

$$5 = De^{0}$$

$$5 = D$$

Agora, substitua esses valores de D de volta na solução geral do problema para obter a solução do PVI:

$$y = 5e^{\tan x}$$

Essa solução satisfaz não apenas a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y \sec^2 x$, mas também o valor inicial $y(0) = 5$.

Uso de um fator de integração

Como mencionamos anteriormente neste capítulo, em "Classificação de EDs", uma equação linear de primeira ordem assume a seguinte forma:

$$\frac{dv}{dx} + a(x)y = b(x)$$

Um método inteligente de resolver EDs nesse formato envolve a multiplicação de toda a equação por um *fator de integração*. Siga estes passos:

1. **Calcule o fator de integração.**
2. **Multiplique a ED por esse fator de integração.**
3. **Reafirme o lado esquerdo da equação como uma única derivada.**
4. **Integre ambos os lados da equação e encontre y.**

Não se preocupe se esses passos não significam muita coisa para você. Nas próximas seções, mostraremos o que é um fator de integração e como utilizá-lo para resolver EDs lineares de primeira ordem.

Tenha muita sorte

Para ajudá-lo a compreender como a multiplicação por um fator de integração funciona, ajustamos uma equação que praticamente se resolve sozinha — quer dizer, se você sabe o que fazer:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$$

Perceba que essa é uma ED linear de primeiro grau, como $a(x) = \frac{2}{x}$ e $b(x) = 0$. Agora ajustamos essa equação pela multiplicação de cada termo por x^2 (veja o motivo resumidamente):

$$\frac{dy}{dx} \cdot x^2 + \frac{2y}{x} \cdot x^2 = 0 \cdot x^2$$

A seguir, utilizamos a álgebra para fazer um pouco de simplificação e reordenação:

$$\frac{dy}{dx} \cdot x^2 + 2x \cdot y = 0$$

Agora, eis onde parecemos ter muita sorte: os dois termos no lado esquerdo da equação são simplesmente o *resultado* da aplicação da Regra do Produto na expressão $y \cdot x^2$ (para saber mais sobre a Regra do Produto, veja o Capítulo 2):

$$\frac{d}{dx}(y \cdot x^2) = \frac{dy}{dx} \cdot x^2 + 2x \cdot y$$

Perceba que o lado direito dessa equação é exatamente o mesmo que o lado esquerdo da equação anterior. Então, realizamos a seguinte substituição:

$$\frac{d}{dx}(y \cdot x^2) = 0$$

Agora, para desfazer a derivada do lado esquerdo, integramos ambos os lados, e então procuramos y:

$$\int \left[\frac{d}{dx}(y \cdot x^2)\right] dx = \int 0 \; dx$$

$$y \cdot x^2 = C$$

$$y = \frac{C}{x^2}$$

Para verificar essa solução, substituímos esse valor de y de volta na equação original:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{C}{x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C}{x^2} = 0$$

$$\frac{-2C}{x^3} + \frac{2C}{x^3} = 0$$

$$0 = 0$$

Faça sua própria sorte

O exemplo anterior funciona porque encontramos uma forma de multiplicar a equação inteira por um fator que fez o lado esquerdo da equação parecer uma derivada resultante da Regra do Produto. Embora isso pareça sorte, se você sabe pelo que multiplicar, *toda* ED linear de primeira ordem pode ser transformada dessa forma. Lembre-se de que a forma de uma ED linear de primeira ordem é a seguinte:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$$

O truque é multiplicar a ED por um *fator de integração* baseado em a(x). Eis o fator de integração:

$$e^{\int a(x)\,dx}$$

Como o fator de integração é originalmente derivado está além da abrangência deste livro. Tudo o que você precisa saber é que funciona.

Por exemplo, no problema anterior, você descobriu que $a(x) = \frac{2}{x}$. Então, eis como encontrar o fator de integração:

$$e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x}$$

Lembre-se de que $2 \ln x = \ln x^2$, então:

$$e^{\ln x^2}$$

$$= x^2$$

Como você pode ver, o fator de integração x^2 é o valor exato que multiplicamos para resolver o problema. Para ver como esse processo funciona, agora que você conhece o truque, eis outra ED para resolver:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$$

Neste caso, $a(x) = 3$, então calcule o fator de integração, como a seguir:

$$e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$$

Agora, multiplique cada termo na equação por esse fator:

$$\frac{dy}{dx} \cdot e^{3x} + 3y \cdot e^{3x} = e^x \cdot e^{3x}$$

Se você preferir, utilize álgebra para simplificar o lado direito e reordenar o lado esquerdo:

$$\frac{dy}{dx} \cdot e^{3x} + 3e^{3x} \cdot y = e^{4x}$$

Agora, você pode ver como o lado esquerdo dessa equação parece o *resultado* da Regra do Produto aplicada para desenvolver a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}(y \cdot e^{3x}) = \frac{dy}{dx} \cdot e^{3x} + 3e^{3x} \cdot y$$

Como o lado direito dessa equação é o mesmo que o lado esquerdo da equação anterior, podemos fazer a seguinte substituição:

$$\frac{d}{dx}(y \cdot e^{3x}) = e^{4x}$$

Perceba que mudamos o lado esquerdo da equação com a utilização da Regra do Produto *ao inverso*. Quer dizer, expressamos o lado esquerdo inteiro como uma única derivada. Agora podemos integrar ambos os lados, para extrair essa derivada:

$$\int \left[\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{3x}\right)\right] dx = \int e^{4x}\, dx$$

$$y \cdot e^{3x} = \frac{e^{4x}}{4} + C$$

Agora, encontre y e simplifique:

$$y = \frac{e^{4x}}{4e^{3x}} + \frac{C}{e^{3x}} = \frac{e^{x}}{4} + Ce^{-3x}$$

Para verificar essa resposta, substitua esse valor de y de volta na ED original:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}}{4} + Ce^{-3x}\right) + 3\left(\frac{e^{x}}{4} + Ce^{-3x}\right) = e^{x}$$

$$\frac{e^{x}}{4} - 3Ce^{-3x} + \frac{3e^{x}}{4} + 3Ce^{-3x} = e^{x}$$

$$\frac{e^{x}}{4} + \frac{3e^{x}}{4} = e^{x}$$

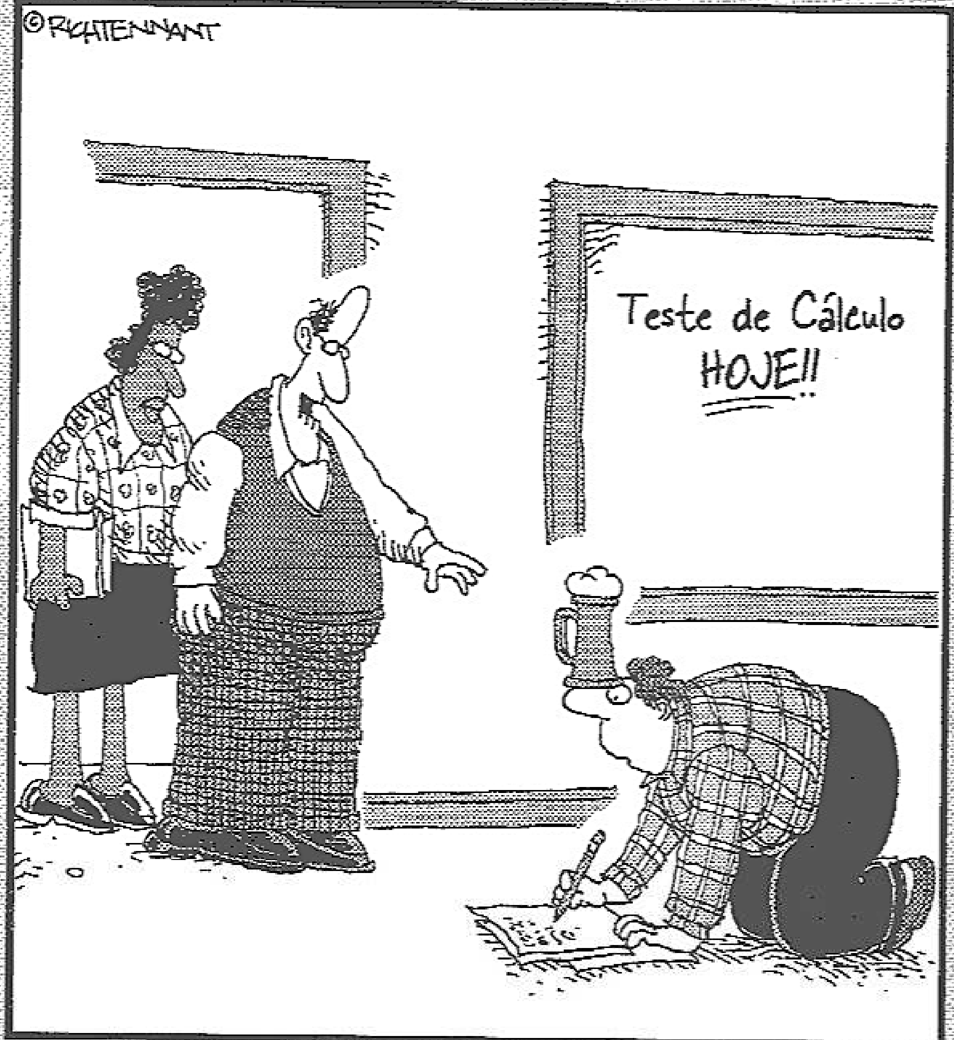
$$e^{x} = e^{x}$$

Como num mágica, essa resposta está correta, então a solução é válida.

Parte VI

A Parte dos Dez

A 5ª Onda Por Rich Tennant



"Observe isto, Ruth. Calma... Firme... primeiro calcule o volume da caneca."

Nesta parte...

Como bônus, eis duas listas dos dez mais entre os tópicos relacionados a cálculo: dez importantes momentos "a-há" de Cálculo II e dez dicas úteis para as provas.

Capítulo 16

Dez Revelações "A-há!" em Cálculo II

Neste Capítulo

- Compreenda os conceitos-chave de integração
- Diferencie a integral definida da integral indefinida
- Saiba o básico sobre as séries infinitas

Certo, aqui você está perto do fim do livro. Você leu cada palavra que escrevemos, memorizou as fórmulas-chave, e trabalhou em todos os problemas. Você está pronto para arrasar no exame final, e você merece! Bom para você! (Ou talvez você tenha aberto o livro e pulado direto para o fim. Isso é bom também! Este é um ótimo lugar para obter uma visão geral sobre o que significam todas essas coisas de Cálculo II.)

Mas, ainda assim, você está com essa leve sensação de que está preso no meio da floresta e não pode ver adiante por causa de todas essas malditas árvores. Esqueça as equações por um momento e gaste cinco minutos observando essas dez maiores revelações "A-há!" sobre Cálculo II. Quando você as compreende, você tem uma sólida base conceitual para começar.

Meios da Integração para Encontrar a Área

Encontrar a área de um polígono ou círculo é fácil. A integração diz respeito a encontrar a área de formas com bordas estranhas, complicadas de trabalhar. Essas bordas podem ser curvas que resultam de polinômios, expoentes, logaritmos, funções trigonométricas ou funções trigonométricas inversas, ou produtos e composições dessas funções.

A integração fornece uma forma concreta de abordar essa questão, conhecida como *problema de área*. Não importa o quão complicada fique a integração, você sempre pode compreender aquilo com que está trabalhando nos termos desta simples pergunta: "De que forma o que estou fazendo me ajuda a encontrar uma área?"

Veja o Capítulo 1 para saber mais sobre a relação entre integração e área.

Quando Você Integra, a Área Vira uma Área com Sinal

No mundo real, a área é sempre positiva. Por exemplo, não existe algo como um pedaço de terra que tenha –4 km^2 de área. Esse conceito de área é chamado de *área sem sinal*.

Mas no gráfico cartesiano do contexto da integração, a área é medida como *área com sinal*, com a área abaixo do eixo x sendo considerada como uma *área negativa*.

Nesse contexto, um quadrado de 2 x 2 unidades abaixo do eixo x é considerado como tendo –4 unidades quadradas na área com sinal. Similarmente, um quadrado de 2 x 2 unidades quadradas que é dividido ao meio pelo eixo x é considerado como tendo uma área de 0.

A integral definida sempre produz a área com sinal entre uma curva e o eixo x, dentro dos limites de integração. Então, se algum problema pedir por uma área sem sinal, você precisa medir a área positiva e a área negativa separadamente, mudar o sinal da área negativa e somar esses dois resultados.

Veja o Capítulo 3 para mais detalhes sobre área com sinal.

A Integração é Apenas uma Soma Pomposa

Para medir a área de um polígono de forma irregular, um bom primeiro passo é cortá-lo em formas menores as quais você saiba como medir — por exemplo, triângulos e retângulos — e então somar as áreas dessas formas.

A integração funciona com o mesmo princípio. Ela permite que você fatie uma forma em formas menores que aproximem a área que você está tentando medir e, então some os pedaços. Na verdade, o símbolo da integral $\int$ por si só é um simples S alongado, que significa *soma*.

Veja o Capítulo 1 para mais detalhes sobre como a integração está relacionada à adição.

A Integração Utiliza um Número Infinito de Fatias Infinitamente Finas

Eis como a integração difere dos outros métodos de medir a área: a integração permite que você fatie uma área em um número infinito de pedaços, todos infinitamente finos, e então some todos esses pedaços para encontrar a área total.

Ou, para descrever de uma forma um pouco mais matemática: a integral definida é o limite da área total de todos esses pedaços conforme o número de fatias se aproxima do infinito e a largura de cada fatia se aproxima de 0.

Esse conceito também é útil quando você está tentando encontrar o volume, como demonstramos no Capítulo 10.

Veja o Capítulo 1 para saber mais sobre como esse conceito de fatiar infinitamente se relaciona com a integração.

A Integração Contém um Fator de Folga

A matemática é uma senhora exigente. Um pequeno erro no começo de um problema frequentemente resulta em um grande erro ao final.

Então, descobrir que você pode fazer fatias finas de uma área de várias maneiras diferentes e ainda assim obter a resposta correta é um alívio. Alguns desses métodos para fatiar incluem os retângulos esquerdos, direitos e de ponto médio. Falamos sobre todos eles no Capítulo 3.

O *fator de folga*, como chamamos, surge porque a integração explora uma sequência infinita de aproximações sucessivas. Cada aproximação faz você chegar mais perto da resposta que está buscando. Então, não importa qual caminho você tomou para chegar lá, um número infinito de tais aproximações o deixa mais perto da resposta.

Veja o Capítulo 3 para saber mais sobre a distinção entre aproximação e resolução de integrais.

Uma Integral Definida Resulta em um Número

Uma integral definida representa a área bem definida de uma forma em um gráfico. Você pode representar qualquer área desse tipo como um número de unidades quadradas, então a integral definida é um número.

Veja o Capítulo 3 para saber mais sobre a integral definida.

Uma Integral Indefinida Resulta em uma Função

Uma integral indefinida é modelo que permite a você calcular um número infinito de integrais definidas relacionadas ao substituir alguns parâmetros. Na matemática, um modelo como esse é chamado de *função*.

Os valores de entrada de uma integral indefinida são os dois limites de integração. Especificar esses dois valores torna a integral indefinida uma integral definida, que resulta então em um número representando uma área.

Mas se você não especificar os limites de integração, você ainda pode desenvolver uma integral indefinida como uma função. O processo de encontrar uma integral definida transforma uma função inicial (por exemplo, cos x) em uma função nova (sen $x + C$).

Veja o Capítulo 3 para saber mais sobre a integral indefinida e a Parte II para ver uma variedade de técnicas para resolver integrais indefinidas.

A Integração é o Inverso da Diferenciação

A integração e a diferenciação são operações inversas: qualquer uma dessas operações desfaz a outra (mais uma constante C). Outra forma de entender isso é dizer que a integração é a *antidiferenciação*.

Eis um exemplo de como a diferenciação desfaz a integração:

$$\int 5x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + C$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{5}{4}x^4 + C = 5x^3$$

Como você pode ver, integrar uma função e então diferenciar o resultado produz a função com que você começou.

Agora, eis um exemplo de como a integração desfaz a diferenciação:

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,x = \cos x$$

$$\int \cos x\;dx = \text{sen}x + C$$

Como você pode ver, diferenciar uma função e então integrar o resultado produz a função com a qual você começou, mais uma constante C.

Veja a Parte II para saber mais sobre como essa relação inversa entre integração e diferenciação fornece uma variedade de métodos inteligentes para integrar funções complicadas.

Cada Série Infinita Possui Duas Sequências Relacionadas

Cada série infinita possui duas sequências relacionadas que são importantes para compreender como funciona determinada série: sua sequência de definição e sua sequência de somas parciais.

A *sequência de definição* de uma série é simplesmente a sequência que define a série em primeiro lugar. Por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

possui a sequência de definição:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\right\}$$

Perceba que a mesma função — neste caso, $\frac{1}{n}$ — aparece na notação mais curta em ambas as séries e sua sequência de definição.

A *sequência de somas parciais* de uma série é a sequência que resulta quando você adiciona sucessivamente um número finito de termos. Por exemplo, a série anterior possui a seguinte sequência de somas parciais:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \ldots$$

Perceba que uma série pode divergir enquanto sua sequência de definição converge, como nesse exemplo. Contudo, uma série e sua sequência de somas parciais sempre convergem ou divergem juntas. Na verdade, a definição da convergência de uma série é baseada no comportamento de sua sequência de somas parciais (veja a próxima seção para saber mais sobre convergência e divergência).

Veja a Parte IV para mais informações sobre as séries infinitas.

Cada Série Infinita Converge ou Diverge

Cada série infinita converge ou diverge, não existem exceções.

Uma série *converge* quando ela resulta (é igual a) um número real. Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = 1$$

Por outro lado, uma série *diverge* quando ela não resulta em um número real. A divergência pode acontecer de duas formas. O tipo mais comum de divergência é quando a série vai ao ∞ ou ao $-\infty$. Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots$$

Obviamente, essa série não irá resultar em um número real — ela apenas fica maior e maior eternamente.

Outro tipo de divergência ocorre quando uma série se alterna para sempre em dois ou mais valores. Isso acontece somente quando uma série é *alternada* (veja o Capítulo 12 para saber mais sobre séries alternadas). Por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-\ldots$$

A sequência de somas parciais (veja a seção anterior) para essa série se alterna pela eternidade entre -1 e 0, nunca se assentando em um único valor, então a série diverge.

Veja a Parte IV para saber mais sobre séries infinitas.

Capítulo 17

Dez Dicas para Usar nas Provas

Neste Capítulo

- Fique calmo quando o teste for complicado
- Lembre-se daqueles *dxs* e *Cs*
- Saia do labirinto
- Verifique possíveis erros

Nunca encontrei alguém que adorasse realizar testes de matemática. A pressão é grande, o tempo é curto e aquela fórmula que você não consegue lembrar está fora de alcance. Infelizmente, os exames fazem parte do cotidiano do estudante. Eis nossa lista dez mais das sugestões para fazer com que as provas sejam um pouco mais fáceis.

Respire

Esse é sempre um bom conselho — afinal de contas, onde você estaria se não respirasse? Bem, certamente não seria um bom lugar.

Muito daquilo que você pode sentir ao encarar um teste — por exemplo, frio na barriga, suor nas mãos ou tremores — é uma simples reação física ao estresse causado pela adrenalina. Seu corpo está se preparando para uma resposta do tipo lute ou fuja, mas em um teste, não há nada contra o que lutar ou fugir.

Um pouco de respiração profunda é um simples exercício físico que pode ajudar a dissipar a adrenalina e acalmá-lo. Então, enquanto está esperando o professor chegar e passar a prova, inspire e expire profundamente. Se ajudar, imagine a serenidade e o conhecimento profundo de todas as coisas matemáticas penetrando seu corpo a cada inspiração, e todas as coisas ruins saindo na expiração.

Comece Lendo Todo o Exame

Quando você recebe seu exame, tome um minuto para ler todo ele para que saiba o que vai encarar. Essa prática faz seu cérebro começar a trabalhar (conscientemente ou não) com os problemas.

Enquanto você estiver lendo, veja se consegue encontrar um problema que pareça mais fácil do que os outros (veja a próxima seção).

Resolva o Problema Mais Fácil Primeiro

Após a lida inicial, vire para a página com o problema mais fácil e resolva-o. Esse aquecimento faz seu cérebro começar a funcionar e normalmente reduz sua ansiedade.

Não Esqueça de Escrever *dx* e +*C*

Lembre-se de incluir cada *dx* inoportuno em cada expressão de integração. Eles têm de estar lá, e alguns professores levam para o lado pessoal quando você não os inclui. Você não tem qualquer motivo para perder pontos com algo tão trivial.

E não se esqueça de que a solução para toda integral *indefinida* termina com $+C$ (ou qualquer constante que você escolher). Sem exceções! Assim como no caso dos *dxs*, omitir essa constante pode custar alguns pontos em uma prova, então adquira o hábito de incluí-las.

Tome o Caminho Mais Fácil Sempre que Possível

Entre os Capítulos 4 e 8, introduzimos as técnicas de integração por ordem de dificuldade. Antes de você partir para os cálculos, tire um minuto para revisar todos os métodos que você conhece, do mais fácil até o mais difícil.

Sempre verifique antes para ver se você conhece uma fórmula simples: por exemplo, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ pode deixá-lo em pânico até se lembrar de que a resposta simplesmente é $\text{arcsec}\, x + C$. Se não existe uma fórmula, reflita se uma simples substituição de variáveis é possível. E a integração por partes? Seus últimos recursos sempre são a substituição trigonométrica e a integração com frações parciais.

Quando você estiver trabalhando na resolução de problemas de área, fique aberto à possibilidade de que o cálculo não seja necessário. Por exemplo, você não precisa de cálculo para encontrar a área sob uma linha reta ou um semicírculo. Então, antes de começar a integrar, pare por um minuto para ver se você pode encontrar uma forma mais simples.

Se Você Ficar Encurralado, Rascunhe

Quando você olha para um problema e não sabe o que fazer, pegue um pedaço de papel para rascunho e rabisque tudo que você conseguir pensar, sem que isso faça sentido.

Use a álgebra, as identidades trigonométricas, todos os tipos de substituições de variáveis. Escreva as séries tanto na notação sigma quanto na notação expandida. Desenhe figuras e gráficos. Anote tudo, até ideias que parecem não ter valor.

Você pode descobrir que esse processo refresca seu cérebro. Até copiar o problema — equações, gráficos e tudo mais — às vezes pode ajudá-lo a perceber algo importante que você não se deu conta na primeira vez que leu a questão.

Se Você Realmente Estiver Sem Saída, Prossiga

Não tem sentido ficar batendo a cabeça contra a parede, a menos que você deseje ficar com poeira de tijolo em seu cabelo. Da mesma forma, não faz sentido passar um teste inteiro congelado frente a um problema.

Então, se você rabiscar e rabiscar ainda mais (veja a seção anterior) e você ainda não está chegando a lugar algum no problema, passe para o próximo. Você também pode aproveitar ao máximo o tempo para resolver problemas que você consegue resolver. Além disso, muitos problemas parecem mais fáceis na segunda tentativa. E trabalhar em outras áreas do teste pode lembrá-lo de alguma informação importante que você esqueceu.

Verifique suas respostas

Aproximando-se do fim do teste, principalmente se você está encurralado, tome um minuto para verificar novamente alguns dos problemas que você já completou. Aquilo que você escreveu ainda faz sentido: Se você enxergar alguns *dxs* ou *Cs* faltando, escreva-os. Assegure-se de não ter esquecido qualquer sinal de menos.

Por exemplo, suponha que você esteja integrando para encontrar uma área em algum lugar dentro de uma região 2 x 2 em um gráfico, e sua resposta é 7 trilhões. Obviamente, alguma coisa deu errado. Se você tem tempo para descobrir o que houve, refaça seus passos.

Embora consertar um problema em uma prova possa ser tedioso, normalmente leva menos tempo do que começar (e talvez não terminar) um novo problema da estaca zero.

Se Uma Resposta não Fizer Sentido, Admita

Suponha que você está integrando para encontrar uma área em algum lugar dentro de uma região 2 x 2 em um gráfico e sua resposta é 7 trilhões. Obviamente, algo deu errado. Se você não tem tempo para descobrir o que aconteceu, escreva um recado para o professor admitindo o problema.

Escrever esse recado faz com que seu professor saiba que sua compreensão conceitual do problema está correta – quer dizer, que você entendeu que a integração significa área. Então, se aconteceu de seu cálculo ter ficado bagunçado por causa de um erro menor, como esquecer uma casa decimal, você provavelmente perderá apenas alguns poucos pontos.

Repita o Mantra "Estou Fazendo Meu Melhor", e então Faça Seu Melhor

O máximo que você pode fazer é seu melhor, e até mesmo o melhor estudante de matemática ocasionalmente vê uma fórmula ou afirmação em um teste e fica se perguntando "o quê?".

Quando surgem esses momentos, e eles surgirão, você pode criar uma espiral de vergonha em relação a todo o estudo que você deveria, poderia e realmente fez. Mas não há recompensas no final dessa espiral. Você também pode largar seu lápis, deixar a sala, abandonar o curso, voar para o Tibete e entrar em um monastério. Esse plano de ação também não é recomendável, a menos que você seja fluente em tibetano (que é bem mais difícil que cálculo!).

Em vez disso, respire (veja a seção sobre respirar, anteriormente neste capítulo) e relembre-se gentilmente de que "está fazendo seu melhor". E então faça seu melhor com aquilo que você tem. A perfeição não pertence a este mundo, mas se você conseguir arranjar um pouco de tranquilidade quando estiver sob pressão, provavelmente acabará fazendo algo melhor do que faria se fosse o contrário.

Índice

• Símbolos •

• A •

• B •

• C •

• D •

• E •

F

G

• H •

• I •

• K •

• L •

• M •

• N •

• O •

• P •

• Q •

• R •

• S •

• T •

• U •

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

Tenha as informações de que precisa para não se curvar a um cálculo

Ganhe confiança e progrida nessa complexa matéria

Preparando-se para Cálculo II? Este divertido e formidável guia está recheado com instruções, conselhos e dicas para lhe ajudar a sacar matemática e mandar bem. Com explicações a fundo dos tópicos-chave de cálculo intermediário, da integração para integrais indefinidas a séries infinitas. E mais: você vai resolver muitos exercícios práticos que lhe ajudarão a atingir um outro nível.

Abra este livro e descubra como:

- Trabalhar com integrais indefinidas
- Simplificar funções com substituições variáveis
- Resolver área complexa e problemas de volume
- Entender séries e sequências
- Resolver diferencial e equações multivariáveis
- Utilizar retângulos para descomplicar problemas

Neste livro você encontrará:

- *Explicações de fácil entendimento*
- *Informações passo a passo fáceis de localizar*
- *Ícones e outros recursos de identificação e memorização*
- *Folha de cola destacável com informações práticas*
- *Listas com 10 itens relevantes sobre o assunto*
- *Um toque de humor e diversão*

ALTA BOOKS
EDITORA
www.altabooks.com.br

Mark Zegarelli é professor de matemática e escritor com 25 anos de experiência profissional. É autor de *"Matemática Básica & Pre-Álgebra Para Leigos®"*.

ISBN 978-85-7608-577-5

9788576085775