

# Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025

## Studiengang Angewandte Informatik

### Gemischte Übungen 5: Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

#### 1 Übung: Partielle Ableitungen berechnen.

1.1	$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3 - x_3 + 10$
1.2	$f(x, y, z) = e^{yz^2} \cos(2x + z) + \ln\left(\frac{xy}{z}\right) + \frac{1}{xy}$

#### 2 Übung: Partielle Ableitungen 2. Ordnung berechnen (und als Hesse-Matrix anordnen)

2.1	$f(x, y) = \frac{x}{x + y}$
2.2	$f(x, y, z) = ze^{\frac{x}{y}}$

#### 3 Übung: Steigungen bzw. Tangentialebene bestimmen, Richtungsableitung, Differential

3.1	Für $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ ermittle man die Tangentialebene im Punkt $P(\pi, 0, ?)$ sowohl in Gleichungsform als auch in Punkt-Richtungsform.	
3.2	$f(x, y) = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$ <p>Man ermittle man die Steigung an der Stelle <math>\mathbf{p} = (1, 0)</math> in Richtung <math>\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}</math>.          Welches ist die Richtung des stärksten Anstiegs von <math>f</math> an der Stelle <math>\mathbf{p}</math>?          Wie groß ist diese stärkste Steigung an der Stelle <math>\mathbf{p}</math>?</p>	
3.3	$f(x, y) = x^2 y - 3y$ <p>Berechnen Sie die Tangentialebene an der Stelle <math>\mathbf{p} = (3, 4)</math>          Bestimmen Sie die exakte Änderung <math>\Delta f</math> und die näherungsweise Änderung <math>df</math> mit dem totalen Differential, wenn sich <math>x</math> um <math>-0,01</math> und <math>y</math> um <math>0,02</math> ändert.</p>	
3.4	Bestimmen Sie das totale Differential für $f(x, y) = x^3 y - x e^{x-y}$ und interpretieren Sie für $(x, y) = (1, 0)$ die Bedeutung im Sinne einer exakten bzw. als näherungsweisen Änderung.	
3.5	Bestimmen Sie das totale Differential für $f(x, y) = \sin(\cos xy)$ und interpretieren Sie für $(x, y) = (1, 2)$ die Bedeutung im Sinne einer exakten bzw. als näherungsweisen Änderung.	
3.6	Das Volumen eines Kreiszylinders mit dem Radius $R$ und der Höhe $h$ ist $V = \pi h R^2$ . Wie ändert sich $V$ in linearer Näherung bei einer Änderung von $R$ und $h$ um $\Delta R, \Delta h$ ?	
3.7	<p><b>Auswirkung kleiner Messfehler bei Einflussgrößen <math>x_1, \dots, x_n</math> auf Ergebnis <math>f(x_1, \dots, x_n)</math>:</b> Bei (kleinen) Messfehlerschranken <math>dx_k = \Delta x_k = \pm \varepsilon_k</math> ist man interessiert an einer Schätzung von</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math> \Delta f </math> = (absoluter) Messfehler (in der Einheit von <math>f</math>) sowie</li> <li><math>\left  \frac{\Delta f}{f} \right </math> = relativer Fehler (in %).</li> </ul> <p>Abschätzen mittels Differentials <math>df</math> unter Verwendung der Betragsungleichung <math> x + y  \leq  x  +  y </math></p> <p><u>Anwendung:</u> Zwei ohmsche Widerstände <math>R_1, R_2</math> werden parallelgeschaltet und bilden so einen Ersatzwiderstand (Gesamtwiderstand) <math>R</math> mit <math>\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}</math>. Berechnen Sie mit Hilfe des Differentials von <math>R</math> den größtmöglichen <u>absoluten</u> und <u>relativen</u> Fehler in % des Ersatzwiderstandes <math>R</math>, wenn <math>R_1 = (100 \pm 2)\Omega</math> und <math>R_2 = (200 \pm 2)\Omega</math> gemessen wurden.</p>	