Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025
Studiengang Angewandte Informatik & Angewandte Künstliche Intelligenz

Kapitel 6: Integralrechnung

Lernziele:

- Sie wissen, dass die Fläche unter einer Kurve mithilfe des bestimmten Integrals berechnet wird.
- Sie verstehen, dass das bestimmte Integral als Grenzwert der Riemann-Summen berechnet werden kann.
- Sie sind mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung vertraut.
- Sie kennen den Begriff der Stammfunktion.
- Sie können das bestimmte Integral berechnen, wenn Sie eine Stammfunktion kennen.
- Sie kennen die Stammfunktionen der Grundfunktionen.
- Sie können einfache Integrationsregeln wie die Potenzregel, die Faktorregel, die Summenregel und die Aufspaltung bestimmter Integrale anwenden.
- Sie können die gesamte und durchschnittliche Änderung auf Basis von Änderungsraten berechnen.
- Sie können uneigentliche Integrale berechnen.
- Sie beherrschen die Technik der partiellen Integration für unbestimmte und bestimmte Integrale.
- Sie beherrschen die Technik der Substitution für unbestimmte und bestimmte Integrale.
- Sie können das Volumen von Rotationskörpern berechnen.
- Sie können die Bogenlänge von Kurven berechnen.
- Sie können uneigentliche Integrale berechnen.
- Sie können grundlegende numerische Integrationsverfahren implementieren und anwenden und kennen dabei deren Eigenschaften.

Das bestimmte Integral

Die folgenden Fragen beziehen sich auf den Studierauftrag.

Sie schneiden eine 25cm lange Karotte in SEHR dünne Scheiben.
Wenn jede Scheibe eine Fläche von $\pi \cdot r(x)^2$ hat für jedes x zwischen 0 und 25, und Sie die Schnitte bei $x_1, x_2, \dots x_n$ machen, dann ist eine gute Näherung für das Volumen der Karotte

A) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i$

B) $\sum_{i=1}^{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \cdot x_i$

C) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot [x_{i+1} - x_i]$

(CGQ)

Wählen Sie alle richtigen Antworten:
Wenn f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist, dann

A) ist $\int_a^b f(x)dx$ die Fläche zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den Linien bei $x = a$ und $x = b$.
B) ist $\int_a^b f(x)dx$ eine Zahl.
C) ist $\int_a^b f(x)dx$ eine Stammfunktion von $f(x)$.
D) könnte $\int_a^b f(x)dx$ nicht existieren.

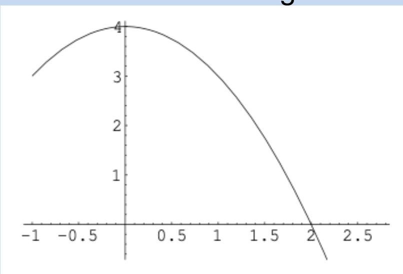
(CGQ)

Sei f stetig und $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt für $\int_a^b f(x)dx$

A) Muss negativ sein.
B) Könnte 0 sein.
C) Nicht genügend Informationen.

(CGQ)

Betrachten Sie die folgende Funktion:

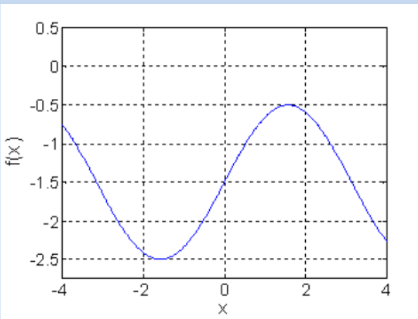


Sei $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, dann ist

A) $g(0) = 0, g'(0) = 0$ und $g'(2) = 0$
B) $g(0) = 0, g'(0) = 4$ und $g'(2) = 0$
C) $g(0) = 1, g'(0) = 0$ und $g'(2) = 1$
D) $g(0) = 0, g'(0) = 0$ und $g'(2) = 1$

(CGQ)

Was ist die beste Schätzung für $\int_{-2}^2 f(x)dx$, wobei $f(x)$ durch den folgenden Graphen gegeben ist?



(Carroll MathQuest)

A) -4
B) -6
C) -1,5
D) 3
E) 6
F) 12

Integrale als Gesamtänderung bei gegebener Änderungsrate

1. Momentane Geschwindigkeit

Sie fahren mit dem Fahrrad vom Bahnhof zur Hochschule und zeichnen die gefahrene Geschwindigkeit auf.

Frage: welche Strecke haben Sie zurückgelegt? Welche Strecke haben Sie in der ersten Minute zurückgelegt?

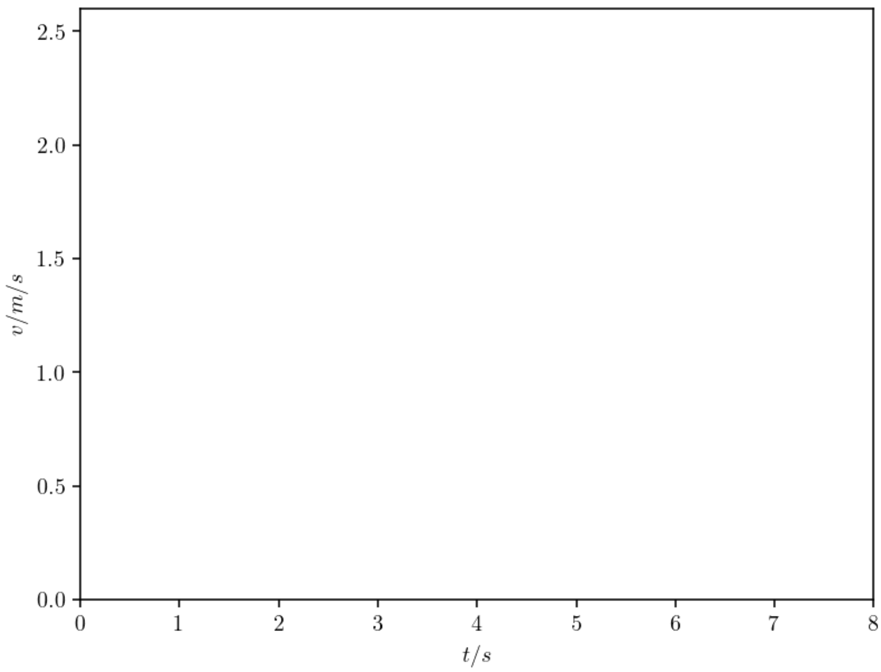


Bild: routing.openstreetmap.de

Bei konstanter Geschwindigkeit: $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt.$

Entspricht der Fläche eines Rechtecks mit Höhe v und breite dt.

Wenn Geschwindigkeit sich häufig ändert:

Damit: Gefahrene Distanz entspricht **Fläche** unter dem Graphen der Geschwindigkeit!

Die Geschwindigkeit ist die Rate, mit der sich der Ort ändert – das Integral über die Änderungsrate gibt die Gesamtänderung.

Wasser läuft mit einer Rate von $f(t)$ Litern pro Minute aus einem Rohr. Sie sammeln das auslaufende Wasser in der Zeit zwischen $t = 2$ und $t = 4$ in einem Eimer. Die Menge an Wasser, die Sie aufgefangen haben, ist dann gegeben durch:

A) $\int_2^4 f(x)dx$
B) $f(4) - f(2)$
C) $(4-2)f(4)$
D) Der Mittelwert von $f(4)$ und $f(2)$ mal der Zeit, die vergangen ist.

(CGQ)

Wenn $f(t)$ in Litern/Minute gemessen wird und t in Minuten, was ist die Einheit von $\int_2^4 f(t)dt$?

A) Liter/Minute
B) Liter
C) Minuten
D) Liter/Minute/Minute

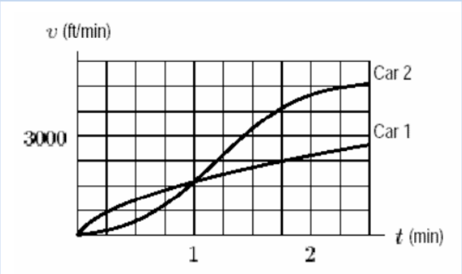
(Carroll MathQuest)

Eine Sprinterin trainiert, indem sie in einer Turnhalle verschiedene Strecken in einer geraden Linie hin und her läuft. Ihre Geschwindigkeit nach t Sekunden ist durch die Funktion $v(t)$ gegeben. Was ist dann $\int_0^{60} |v(t)| dt$?

A) Die Gesamtstrecke, die die Sprinterin in einer Minute zurückgelegt hat.
B) Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Sprinterin in einer Minute.
C) Die Entfernung der Sprinterin vom Startpunkt nach einer Minute.
D) Keine der oben genannten Angaben.

(CGQ)

Die Geschwindigkeit zweier Autos ist durch die folgenden Graphen gegeben. Unter der Annahme, dass beide Autos bei der gleichen Position starten, wann wird Auto 1 von Auto 2 überholt?



(Carroll MathQuest)

A) Zwischen 0,75 und 1,25 Minuten.
B) Zwischen 1,25 und 1,75 Minuten.
C) Zwischen 1,75 und 2,25 Minuten

Stammfunktionen

Die folgenden Fragen zu Stammfunktionen beziehen sich auf den Studierauftrag.

Wenn $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, dann ist $f(x) = g(x)$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

Wenn $f(x) = g(x)$, dann ist $\int f(x)dx = \int g(x)dx$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

Wenn $a \neq b$ und $\int_a^b f(x)dx = 0$, dann ist $f(x) = 0$ im Intervall $[a; b]$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(Carroll MathQuest)

Wenn $a \neq b$ und $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, dann ist $f(x) = 0$ im Intervall $[a; b]$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(Carroll MathQuest)

Sei $f(t)$ stetig und überall positiv. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann wissen wir, dass F

A) immer positiv ist.
B) manchmal positiv und manchmal negativ ist.
C) monoton wachsend ist.
D) Nicht genug Informationen um eine der Aussagen zu treffen.

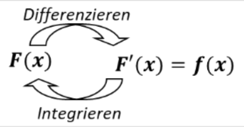
(CGQ)

Abschnitt: Technik des Integrierens - Integrationsregeln

Wie Sie sehen, können Sie schon eine ganze Menge Fragen zu Integralen und Stammfunktionen beantworten. Für viele praktische Anwendungen müssen aber natürlich Stammfunktionen angegeben und mit deren Hilfe bestimmte Integrale ausgerechnet werden können. Dazu gibt es eine Reihe an Rechenregeln, die wir im Folgenden betrachten wollen:

Unbestimmtes Integral = Alle Stammfunktionen (Umkehrung der Ableitung)

Grundproblem Differentialrechnung („Ableiten"):
Geg. $F(x)$. Gesucht: Ableitungsfunktion $f(x) = F'(x)$



Grundproblem Integralrechnung („Aufleiten"):
Geg. $f(x)$. Gesucht: Stammfunktion $\boldsymbol{F(x)}$ von $f(x)$, d.h. eine Funktion $F(x)$, die abgeleitet $F'(x) = f(x)$ ergibt.

Unbestimmtes Integral = *alle Stammfunktionen*

$$\int f(x)\,dx := F(x) + C$$

Integrand f

Integrationsvariable x

Differential dx

eine Stamm-funktion

Integrations-konstante bedeutet: $C \in \mathbb{R}$ beliebig

Beispiel: $f(x) := x$

Eine Stammfunktion ist offensichtlich
$F(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Gibt es weitere? Unendlich viele!

Alle Stammfunktionen sind
$\frac{1}{2}x^2 + \boldsymbol{C}$ (meint: $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$ beliebig)

Schreibweise

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \boldsymbol{C}$$

Je zwei Stammfunktionen unterscheiden sich um eine additive Konstante.

Eindeutigkeit: Durch Vorgabe von nur einem Funktionswert **= Anfangswert(problem)**
Die eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 1$ ist
$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \mathbf{1}$

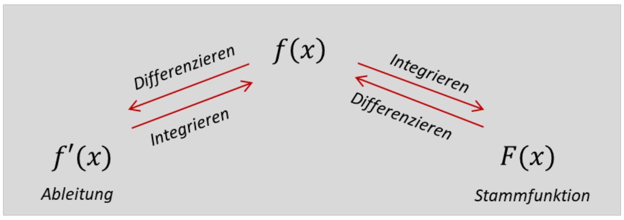
Anwendungsbeispiel:

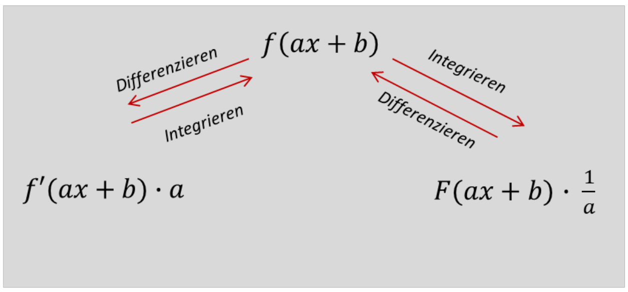
Die Geschwindigkeit eines Autos nimmt linear zu:
$v(t) = v_0 + a \cdot t$

$v(t)$ ist die Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit.

Wie sieht demnach die Funktion $s(t)$ aus?

Teil 1: Stammfunktionen der Grundfunktionen & Linearen Verkettungen





Hat $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$, so hat $f(ax+b)$ die Stammfunktion $F(ax+b) \cdot \frac{1}{a}$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int x^8\,dx = \frac{1}{9}x^9 + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x+2} + C$$

$$\int (3x+2)^8\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}(3x+2)^9 + C$$

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|3x+2| + C$$

$$\int \sqrt{1-2t}\,dt =$$

Obwohl wir für jede Grundfunktion eine Stammfunktion bestimmen können, gilt dies nicht für jede (daraus) zusammengesetzte Funktion (beim Ableiten haben wir dagegen für alle gängigen zusammengesetzten Funktionen eine Ableitungsregel!). Die folgenden Integrationstechniken helfen deshalb **nur in Spezialfällen** weiter.

Es gibt sogar stetige Funktionen, wie zum Beispiel e^{-x^2}, die gar **keine Stammfunktion „in geschlossener Form"** haben (d.h. keine Stammfunktion, die sich über die gängigen Grundfunktionen ausdrücken lässt).

Beachte: Bei allen Formeln sind die Voraussetzungen an die Funktionen so zu stellen, dass die darin vorkommenden Ausdrücke existieren (wohldefiniert sind). Immer beachten: „Probe" einer gefundenen Stammfunktion durch Differenzieren.

Überblick: Grund- oder Stammintegrale

C, C_1, C_2: Reelle Integrationskonstanten

$\int 0\,dx = C$	$\int 1\,dx = \int dx = x + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+1}\right\rvert + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh}\lvert x\rvert + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C \qquad (\lvert x\rvert > 1)$	
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_1 & \text{für } \lvert x\rvert < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C_2 & \text{für } \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	

Übersicht aus [PapulaFS V.2.3]

In dieser Übersicht sind noch nicht die Stammfunktionen aller Grundfunktionen enthalten.
Zum Beispiel fehlt oben:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C \qquad \text{bzw.} \qquad \int \tan x\,dx = -\ln(\cos x) + C$$

Die Korrektheit dieser letztgenannten Stammfunktionen kann man durch Ableiten verifizieren. Ihre Herleitung erfordert jedoch spezielle Integrationstechniken, die wir im Folgenden besprechen werden.

Integraltafeln: In Standardformelsammlungen sind ausführliche Integraltafeln enthalten, in der PapulaFS über 400 Integralen (gedruckt auf gelbem Papier).

Welche Aussage über die Sinusfunktion $\sin\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Kosinusfunktion $\cos\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist richtig?

A) sin ist die einzige Stammfunktion zu cos.
B) sin ist die einzige Stammfunktion zu cos, die im Nullpunkt den Wert 0 hat.
C) Es gibt unendlich viele Stammfunktionen zu cos, die im Nullpunkt den Wert 0 haben.
D) Keine dieser Aussagen ist wahr.

(Bauer)

Beispiel zur Integralberechnung mit bekannter Stammfunktion

1 Beispiele und Übungen: Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen

1.1	$\int_{-3}^{5} x^3 dx =$
1.2	$\int_{-10}^{10} 2^x dx =$
1.3	$\int_{1}^{10} \ln(x)\, dx =$

Grundlegende Integrationstechniken

Wenn $\int_0^2 f(x)dx = 3$ und $\int_2^4 f(x)dx = 5$, dann ist $\int_0^4 f(x)dx = 8$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(Carroll MathQuest)

Wenn $\int_0^2 f(x)dx = 3$ und $\int_2^4 f(x)dx = 5$, was ist dann $\int_0^2 f(2x)dx$?

A) 3/2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 8
F) Das kann nicht bestimmt werden.

(Carroll MathQuest)

Wenn $\int_0^2 f(x) + g(x)dx = 10$ und $\int_0^2 f(x)dx = 3$, dann ist $\int_0^2 g(x)dx = 7$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(Carroll MathQuest)

Wenn $\int_0^2 f(x) \cdot g(x)dx = 10$ und $\int_0^2 f(x)dx = 5$, dann ist $\int_0^2 g(x)dx = 2$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

Regeln für Vielfache und Summen (Linearität des Integrals)

Typ der zusammengesetzten Funktion		Formel für das unbestimmte Integral	Regel in Worten
Konstante Vielfache	$f(x) = c \cdot u(x) \ \ (c \in \mathbb{R})$	$\int c\, u(x)\ dx = c \int u(x)\, dx$	Ein konstanter Faktor darf vor das Integral gezogen werden.
Summe, Differenz	$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$\int u(x) \pm v(x)\ dx = \int u(x)\, dx \pm \int v(x)\, dx$	Eine Summe von Funktionen darf summandenweise integriert werden:
Linearkombination	$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$	$\int \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int f_i(x)\ dx \right)$	Das unbestimmte Integral ist linear.
Lineare Verkettung	$f(x) = v(ax + b) \ \ (a, b \in \mathbb{R})$	$\int f(x) dx = \frac{1}{m} F(mx + n) + C$ wobei F eine Stammfunktion von v ist.	

2 Beispiele und Übungen: Vielfache bzw. Summen bzw. lineare Verkettungen integrieren

2.1	$\int \left(x^7 + 4x + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{1-x}} \right) dx$
2.2	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[7]{x}} - 8e^{-4x} \right) dx$
2.3	**Integration von Funktionen mit Parametern:** Differential dx zeigt an, was die Variable ist, die anderen Parameter wie konstante Zahlenwerte behandeln: $\int ax^2 + bx + c\ dx$ $\int \frac{1}{1 - at} dt$

Im Gegensatz zum gliedweisen Integrieren bei **Summen**, ist die Stammfunktion eines Produktes zweier Funktionen nicht einfach das **Produkt** der Stammfunktionen der Einzelfunktionen. Die Stammfunktion eines **Quotienten** zweier Funktionen ist nicht einfach der Quotient der Stammfunktion von Zähler und Nenner. Wir benötigen spezielle Integrationstechniken.

3 Anwendungsbeispiel: Temperaturverlauf im Inneren einer Außenmauer

3.1	Gegeben ist eine Außenmauer der Dicke d. Die Temperatur im Inneren beträgt 20 °C, im Äußeren -10 °C. Vom Temperaturverlauf $T(x)$ ist lediglich bekannt, dass dessen 2. Ableitung $T''(x)$ verschwindet (= 0). Bestimmen Sie $T(x)$ und skizzieren Sie die Funktion.

4 Anwendung: Gefahrene Strecke bei bekannter Beschleunigung

Sie Fahren mit dem Fahrrad und Ihre Beschleunigung in den ersten 6 Sekunden wird annähernd durch folgende Funktion beschrieben:

$$a(t) = 0{,}2t^3 - 2t^2 + 7t + 2$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben Sie eine Geschwindigkeit von $v_0 = \frac{3m}{s}$.
Berechnen Sie den Weg, den Sie im Zeitintervall $[0; 6]$ zurücklegen.

Hinweis: $\frac{ds}{dt} = v$; $\frac{dv}{dt} = a$

$$\int (x^3 + 5)dx =$$

A) $3x^2$
B) $3x^2 + 5$
C) $\frac{1}{4}x^4 + 5$
D) $\frac{1}{4}x^4 + 5x$
E) Keins davon

(Carroll MathQuest)

$$\int \sqrt{x^3}dx =$$

A) $x^{\frac{3}{2}} + C$
B) $\frac{5}{2}x^{5/2} + C$
C) $\frac{3}{2}x^{1/2} + C$
D) $\frac{2}{5}x^{5/2} + C$
E) $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$
F) Keins davon.

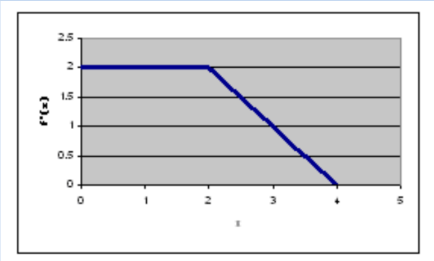
(Carroll MathQuest)

$$\int x \sin x \, dx =$$

A) $\cos x + C$
B) $\frac{1}{2}x^2(-\cos x) + C$
C) $x \cos x + C$
D) $\frac{1}{2}x^2 \sin x + C$
E) Das kann mit unserem bisherigen Wissen nicht beantwortet werden.

(Carroll MathQuest)

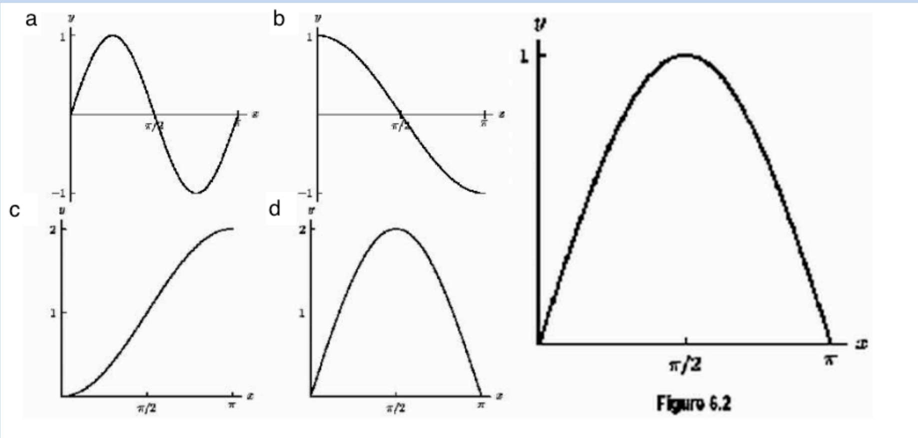
Die folgende Abbildung zeigt die Ableitung einer Funktion f. Wenn $f(0) = 3$ ist, was ist dann $f(2)$?



(Carroll MathQuest)

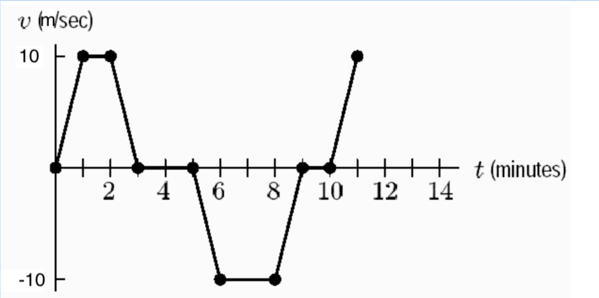
A) 2
B) 4
C) 7
D) Keine dieser Antworten.

Welcher der Graphen a-d könnte eine Stammfunktion der Funktion rechts sein?



(Carroll MathQuest)

Eine Fahrradfahrerin startet zu Hause und fährt entlang eines Radweges, der schnurgerade in Ost-West-Richtung verläuft. Ihre Geschwindigkeit ist im folgenden Graphen zu sehen, wobei positive Geschwindigkeiten eine Fahrt nach Osten und negative Geschwindigkeit eine Fahrt nach Westen bedeuten.



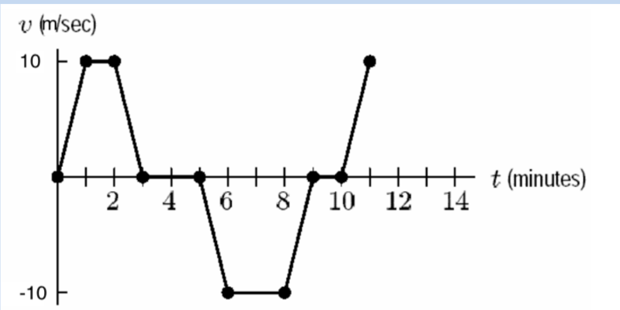
(Carroll MathQuest)

In welchen der folgenden Zeitintervalle hält sie an?

A) $[1;\ 2]$
B) $[3;\ 5]$
C) $[6;\ 8]$
D) $[9;\ 10]$

ös

Eine Fahrradfahrerin startet zu Hause und fährt entlang eines Radweges, der schnurgerade in Ost-West-Richtung verläuft. Ihre Geschwindigkeit ist im folgenden Graphen zu sehen, wobei positive Geschwindigkeiten eine Fahrt nach Osten und negative Geschwindigkeit eine Fahrt nach Westen bedeuten.



(Carroll MathQuest)

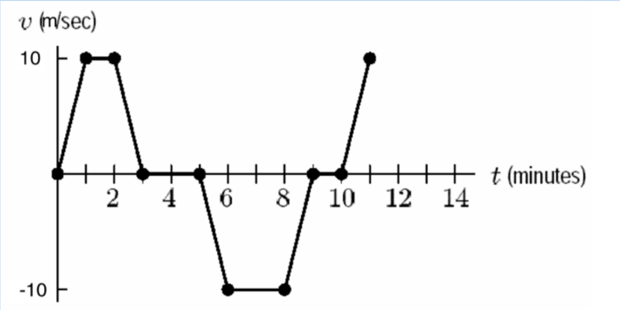
Wenn sie das erste Mal anhält, wie weit ist die von zu Hause entfernt und in welcher Richtung?

A) 1m östlich
B) 1m westlich
C) 20m östlich
D) 20m westlich
E) 30m östlich
F) 30m westlich
G) 1200m östlich
H) 1200m westlich

Eine Fahrradfahrerin startet zu Hause und fährt entlang eines Radweges, der schnurgerade in Ost-West-Richtung verläuft. Ihre Geschwindigkeit ist im folgenden Graphen zu sehen, wobei positive Geschwindigkeiten eine Fahrt nach Osten und negative Geschwindigkeit eine Fahrt nach Westen bedeuten.

ös

(Carroll MathQuest)



Zu welchem Zeitpunkt fährt sie an ihrem Haus vorbei?

A) 3 Minuten
B) 7,5 Minuten
C) 9 Minuten
D) Nie

Wasser strömt mit einer Rate von $f(t) = 5000 + t + 5t^2$ aus einem Reservoir, wobei t in Tagen und f in Litern/Tag gemessen wird. Wie viel Wasser fließt in der ersten Woche insgesamt aus dem Reservoir?

A) 572 Liter
B) 5000 Liter
C) 5595 Liter
D) 35000 Liter
E) 36797 Liter
F) Keine dieser Antworten.

(Carroll MathQuest)

Über eine Brücke fahren Lastwagen. Eine Zählung ergibt, dass abhängig von der Uhrzeit t (in Stunden seit Mittag), es ca. $b(t) = 30\cos(t) + 70$ Lastwagen pro Stunde sind. Wie viele Lastwagen fahren in der Zeit von 15 bis 18 Uhr über die Brücke?

A) 13
B) 210
C) 197
D) 269

(Carroll MathQuest)

5 Wichtige Vereinfachungen für ungerade, gerade oder periodische Funktionen

Treffende Beispiele:

Ungerade Funktion f:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Gerade Funktion f:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

T-Periodische Funktion f:
Über jedes Intervall der Länge T ergibt sich derselbe Integralwert.

$$\int_{T} f(x)dx := \int_{a}^{a+T} f(x)dx \qquad (a \text{ bel.})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_{T} \sin(n\omega x)\,dx = 0 \quad ; \qquad \int_{T} \cos(n\omega x)\,dx = 0$$