Materialien zur Klausurvorbereitung SS 2024

Mathematik 2

Studiengang Angewandte Informatik

Hinweise:

Hier eine Sammlung von AKI Mathe 2 Aufgaben „im Klausurstil“. Die Punktegewichtung kann sich je nach Gesamtkonzeption der spezifischen Klausur auch verschieben. Es besteht keine Garantie, dass in der Klausur nicht auch andere Aufgabentypen gestellt werden.

Typische Vorgaben für die Klausur:

1. Bitte erst wenden, wenn die Klausur angefangen hat!
2. Die Klausur darf nur in prüfungsfähigem Zustand angetreten werden.
3. Schreiben Sie auf den Aufgabensatz sowie auf alle ihre Lösungsblätter Ihren Namen, Matrikelnummer, Studiengang. Der Aufgabensatz ist mit allen Lösungsblättern abzugeben.
4. Prüfen Sie zu Beginn der Prüfung den Aufgabensatz auf Vollständigkeit.
5. Verwenden Sie für Ihre Lösungen die Ihnen ausgeteilten Lösungsblätter oder den Aufgabenbogen. Lösungen auf selbst mitgebrachten Blättern werden nicht ausgewertet.
6. Beschriften Sie Ihre Lösungen mit der zugehörigen Aufgabe.
7. Schreiben Sie deutlich lesbar mit Kugelschreiber oder Füller und nicht rot! Mit Bleistift oder Radierstiften geschriebene oder unleserliche Antworten werden nicht gewertet.
8. Erlaubte Hilfsmittel (selbst mitbringen): Nicht-programmierbarer und nicht-grafikfähiger Taschenrechner, Skript-Formelsammlung sowie genehmigte Standard-Formelsammlung in Print-Form (alles ohne eigene Ergänzungen bzw. Notizen). Insbesondere ist Internet-Nutzung nicht erlaubt.
9. Die Lösungswege müssen mit Zwischenrechnungen deutlich und lesbar dargestellt werden. Ergebnisse ohne klar erkennbare Lösungswege werden nicht gewertet. Der Taschenrechner darf nur zur Berechnung von Werten der Grundfunktionen verwendet werden. Weitere Möglichkeiten wie Lösen von Gleichungen, etc. dürfen in den Lösungswegen nicht verwendet werden!
10. Sofern nichts Abweichendes gefordert ist, rechnen Sie exakt bzw. dezimal gerundet auf 2 Nachkomma-Stellen. Bruchzahlen können Sie stehen lassen.
11. Ein Täuschungsversuch führt zum Nicht-Bestehen der Klausur.
12. Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 90 Minuten.

Beispiel 1

Aufgabe 1.1 (30 P) Grundlagen Analysis in einer Variablen

a) (6 P) Die zulässigen Zeichen eines Passwortes seien Groß-, Kleinbuchstaben (ohne Umlaute) und die Ziffern 0...9. **Bitte (nur) die Berechnungsformeln aufstellen**: Wie viele 12-stellige Passwörter gibt es….

1. …, die mit A beginnen oder mit 9 enden?
2. … mit genau den 12 Zeichen **Ym0r3B5aAg9c**, deren Reihenfolge beliebig vertauscht werden darf?
3. … mit genau 4 Ziffern und 8 Groß-/Kleinbuchstaben?

b) (10+4 P) Berechnen Sie den Grenzwert bzw. begründen Sie ggf. die Divergenz

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-2x}{x\sin(2x)}$ (2) ... der Folge $a_n = \frac{(-1)^n(7-4n^2-6n^3)}{1-n^2+\sqrt{n}}$

c) (10 P) Integration durch explizite Substitution der Funktion im Nenner (keine Integraltafel): $\int \frac{1}{3+\sqrt{x}}\,dx$

Aufgabe 1.2 (27 P) Differentialrechnung in mehreren Variablen

a) (12 P) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x,y) = \sin(x\cdot y)\cdot\cos(x\cdot y)$. Fassen Sie die entstehenden Terme so weit wie möglich zusammen. Bestimmen Sie zusätzlich die Richtung der maximalen Steigung an der Stelle $(1,\pi)$.

b) (15 P) Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion f und entscheiden Sie, ob Minimum, Maximum vorliegt.

$$f(x,y) = -5x + 5\frac{x^2}{y} + \frac{1}{4}y^5$$

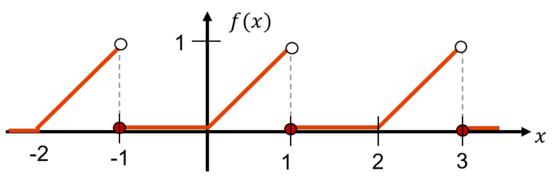
Aufgabe 1.3 (19 P) Reihen und Potenzreihen, Taylorpolynome

a) (11 P) Berechnen Sie die Stammfunktion des Integranden näherungsweise durch Integrieren von dessen Taylorpolynome vom Grad 4 und werten Sie danach den Integralwert damit aus.

$$I = \int_0^{0,1} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\,dx$$

b) (8 P) Leiten Sie das Taylorpolynom 2. Grades von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ durch explizite Berechnung der Taylorkoeffizienten her. Inwiefern ist dieses das beste Polynom 2. Grades zu f?

Aufgabe 1.4 (14 P) Fourierreihen



Stellen Sie für den oben skizzierten Verlauf eines periodischen Signals eine Funktionsvorschrift auf. Von den zugehörigen Fourierkoeffizienten ist bekannt:

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \quad ; \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (n \geq 1)$$

Leiten Sie a_0 und a_n $(n \geq 1)$ her (Rechenweg! Für Stammfunktionen Angabe der Quelle mit Integralnummer). Geben Sie das Fourierpolynom $F_m(x)$ für $m = 2$ explizit an. Inwiefern ist F_2 bzgl. $(*)$ bestmöglich und was kann man sich anschaulich darunter (grob vorstellen) (ergänzen Sie die Skizze).

$$\frac{2}{T}\int_T \left(f(x) - F_m(x)\right)^2 dx \qquad (*)$$

Beispiel 2

Aufgabe 2.1 (29 P) Grundlagen: Kombinatorik, Grenzwerte, Integrale

a) (7 P) Die zulässigen Zeichen eines Passwortes seien Kleinbuchstaben (ohne Umlaute) und die Ziffern 0...9.
Bitte (nur) die Berechnungsformeln aufstellen: Wie viele 12-stellige Passwörter gibt es….
1. …, die an aufeinanderfolgenden Stellen immer Buchstaben und Zahlen abwechseln.
2. …, die mindestens einen Kleinbuchstaben enthalten?
3. …, die eine Umordnung der folgenden Buchstaben sind: 000111aaaazz

b) (8+5 P) Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$(1) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}+2x-1}{x^4} \qquad\qquad (2) \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(2x-2)}{3-3x}$$

c) (9 P) Bestimmen Sie durch Substitution (Ergebnis ohne negative und gebrochene Exponenten)

$$\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+2\cos x}}$$

Aufgabe 2.2 (31 P) Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

a) (15 P) Bestimmen Sie für die Stelle $(x, y) = (1{,}0)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f.

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + 2\sqrt{x}e^{-y}}{x+y^2}$$

b) (16 P) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$f(x,y) = x^2 y + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y^2} = \min \qquad (x, y \neq 0)$$

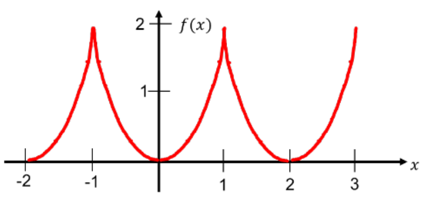
Aufgabe 2.3 (14 P) Reihen und Potenzreihen, Taylorpolynome

a) (6 P) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

b) (9 P) Leiten Sie für $f(x) = 1 - x\cos(x^2)$ für (betraglich) kleine x eine Näherung durch ein das Taylorpolynom 5. Grades her, indem Sie auf der bekannten Taylorreihe von $\cos x$ aufsetzen. Was zeichnet es aus?

Aufgabe 2.4 (15 P) Fourierreihen



Für den obigen Verlauf eines periodischen parabelartigen Signals sei zu dessen Fourierkoeffizienten bekannt:

$$a_n = \frac{8(-1)^n}{(n\pi)^2} \quad (n \geq 1)$$

a) (10 P) Stellen Sie für f eine passende Funktionsvorschrift auf. Leiten Sie alle Fourierkoeffizienten her (Möglichst effizienter Rechenweg! Für Stammfunktionen Angabe der Quelle und Integralnummer). Abwandlung: es genügt so weit, dass kein Integralzeichen mehr vorkommt!

b) (5 P) Geben Sie das Fourierpolynom 3. Grades $F_3(x)$ explizit an (es dürfen Bruchzahlen vorkommen) und skizzieren Sie einen plausiblen Verlauf von $F_3(x)$ für $-2 \leq x \leq 2$ in die obige Abbildung von f. Inwiefern ist F_3 das „beste" trigonometrische Polynom 3. Grades zu f? (in Worten oder als Formel)

Beispiel 3

Aufgabe 3.1 (19 P) Grundlagen Analysis in einer Variablen

a) (9 P) Berechnen Sie den Grenzwert bzw. begründen Sie ggf. die Divergenz

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x\sin(2x)}$$

b) (10 P) Untersuchen Sie beidseitig die Grenzwerte an der Stelle $x = 1$ und folgern Sie damit die Stetigkeit bzw. den Typ der Unstetigkeitsstelle an diesen Stellen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ e^{\frac{1}{1-x}} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3.2 (20 P) Integrieren

a) (10 P) Berechnen Sie mithilfe von Substitution (Ergebnis ohne gebrochene Exponenten): $\int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x$

b) (10 P) Berechnen Sie die folgende DGL durch Trennung der Variablen. Berechnen Sie zusätzlich die spezielle Lösung durch Anwendung der angegebenen Anfangsbedingung

$$y^2 y' + x^2 = 1 \quad \text{mit} \quad y(2) = 1.$$

Aufgabe 3.3 (24 P) Differentialrechnung in mehreren Variablen

a) (14 P) Stellen Sie für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{xy} + \mathrm{e}^{x^2 y}$ das totale Differential an der Stelle $(x,y) = (1{,}1)$ auf Erläutern Sie, welcher Zusammenhang zwischen Differential und Tangentialebene bzw. f besteht. Berechnen Sie mit dem Differential, um wie viel man sich von $(x,y) = (1\,,1)$ gleich weit in x- und y-Richtung bewegen müsste, um näherungsweise eine Änderung von f um $0{,}1$ zu bewirken.

b) (10 P) Stellen Sie die Lagrange-Funktion und ihre partiellen Ableitungen auf, mit der man die folgende Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingung lösen kann (eine explizite Lösung ist nicht verlangt): Welches sind die Seitenlängen eines quaderförmigen Raums mit möglichst großem Volumen, für dessen 6 Seitenflächen man insgesamt 1000 m^2 nutzen darf.

Aufgabe 3.4 (27 P) Reihen, Taylorpolynome, Taylorreihen

a) (10 P) Leiten Sie für $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$ das Taylorpolynom 5. Grades um $x_0 = 0$ her, indem Sie die Taylorreihe von $\sqrt{1+x}$ verwenden.

b) (8 P) Begründen Sie die Konvergenz der Zahlenreihe mit Hilfe des Majoranten- oder des Grenzwert-Kriteriums. Inwiefern erlaubt dieses Wissen, den Reihenwert näherungsweise zu bestimmen?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-n}{1+2n^4}$$

c) (9 P) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{3^n}+\frac{2^n}{4^{n-1}}\right)$$

Beispiel 4

Aufgabe 4.1 (23 P) Grundlagen: Kombinatorik, Grenzwerte, Integration

a) (6 P) Wie viele HEX-Zahlen mit höchstens 8 Stellen gibt es (nur Berechnungsformeln aufstellen)
  a.1) deren erste 2 Stellen gleich sind (restliche Stellen egal)
  a.2) mit mindestens 2 Buchstaben
  a.3) die mit A beginnen, wobei man hier führende Nullen nicht schreibt

b) (8 P) Geben Sie eine nachvollziehbare Herleitung von

$$(1)\ \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{e^{\frac{1}{1-x}}} \qquad\qquad (2)\ \lim_{x\to 0+} \frac{(2-x)^5-2^5}{x\sin(2x)}$$

c) (9 P) Integrieren Sie durch explizite Substitution des (gesamten) Terms im Nenner (keine Integraltafel):

$$\int \frac{e^{4x}}{1-e^{2x}}\,dx$$

Aufgabe 4.2 (29 P) Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

a) (11 P) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen und fassen Sie die entstehenden Terme soweit wie möglich zusammen:

$$(1)\qquad u = u(x,t) = \frac{2x-t}{x+2t} \qquad\qquad (2)\qquad u = u(x,t) = \ln\sin(x-2t)$$

a) (13 P) Berechnen Sie (inkl. Min/Max-Nachweis) alle Stellen (x,y) mit lokalem Max bzw. Min für

$$3x^2y + 2y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1 = \min\ /\max$$

b) (6 P) Stellen Sie die Haupt- und Nebenbedingung auf (Lösung nicht verlang) für das Optimierungsproblem: Was ist der maximale Flächeninhalt eines Rechteckes, das in einen Halbkreis mit Radius R = 1 passt?

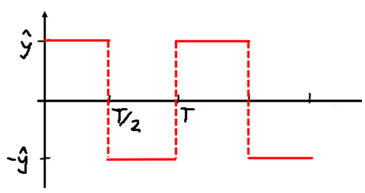
Aufgabe 4.3 (20 P) Reihen, Taylorpolynome

a) (6+4 P) Begründen Sie die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihen (Hilfreich: a.1 Quotientenkriterium, a.2 Minorantenkriterium oder Grenzwertkriterium)

$$\text{a.1)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \qquad\qquad\qquad \text{a.2)}\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-2}}$$

b) (10 P) Leiten Sie für $f(x) = \frac{\sin(3x^2)}{x}$ für (betraglich) kleine x eine Näherung durch ein das Taylorpolynom 5. Grades her, indem Sie auf der bekannten Taylorreihendarstellung des sinus aufsetzen. Was zeichnet dieses Polynom von allen anderen Polynomen 5. Grades aus?

Aufgabe 4.4 (17 P) Fourierreihen



Für das skizzierte Signal mit $T = 1$ und $\hat{y} = 2$ sei zu dessen Fourierkoeffizienten bekannt:

$$b_n = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} \qquad (n \geq 1)$$

a) (10 P) Leiten Sie <u>alle</u> Fourierkoeffizienten so weit her, dass kein Integralzeichen mehr vorkommt.

b) (7 P) Geben Sie das Fourierpolynom 5. Grades $F_5(x)$ explizit an (es dürfen Bruchzahlen vorkommen) und skizzieren Sie für $0 \leq x \leq 2$ einen plausiblen Verlauf in die obige Abbildung von f. Begründen Sie, inwiefern $F_5(x)$ bestmöglich ist.

Ergänzung: Aufgaben zur Modulorechnung

Aufgabe E.1 (8 P)

Begründen Sie, welche Inverse existieren und berechnen sie diese, falls möglich.

(i) Additive Inverse von 47 mod 211 (ii) Multiplikative Inverse von 47 mod 211

Aufgabe E.2 (10 P)

Bob weiß, dass Alice ihre Botschaften $x \in \mathbb{Z}_{23}$ verschlüsselt durch $y = 11 \cdot x \bmod 23$. Wie sieht Bob's Decrypt-Vorschrift $x = d \cdot y \bmod 23$ ($y \in \mathbb{Z}_{23}$) aus? Berechnen Sie d aus $\mathbb{Z}_{23}$ (effizient mit einem Verfahren, welches auch für große Zahlen geeignet wäre)

Aufgabe E.3 (8 P)

(8 P) Bob weiß, dass Alice ihre Botschaften x über $y = 5 \cdot x \bmod 12$ verschlüsselt

(i) Bob behauptet, dass er alle ihre Botschaften eindeutig mit demselben Verfahren $x = 5 \cdot y \bmod 12$ entschlüsseln kann. Begründen Sie, ob das stimmt, ohne EggT anzuwenden.

(ii) Geben Sie alle Zahlen aus $\mathbb{Z}_{12}$ an, die Alice anstelle 5 auch nutzen könnte, so dass Bob alle y eindeutig entschlüsseln kann.

Kurzlösungen Stand 11.6.24 (bei Unklarheiten / Tipp-Fehlern bitte melden!)

Kurzlösungen Beispiel 1

1.1.a.1) $1 \cdot 62^{11} + 62^{11} \cdot 1 - 1 \cdot 62^{10} \cdot 1$ a.2) $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 2 \cdot 1 = 12!$ a.3) $\binom{12}{4} \cdot 10^4 \cdot 52^8$

b.1) l'H.-GW = 0 b.2) TF der geraden Indizes GW +∞, TF der ungeraden Indizes GW -∞ => Divergenz.
c) $2(3+\sqrt{x}) - 6\ln|3+\sqrt{x}| + C$

1.2 a) $\nabla f(1,\pi) = (\ y(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))\ ,\ x(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))\ )^T$, $\nabla f(1,\pi) = (\pi\,, 1)^T$
b) Bei $(x|y) = (0{,}5|1)$ lokale Minimumstelle; bei $(x|y) = (-0{,}5|-1)$ lokale Max(-Stelle)

1.3 a) $I = 0{,}100167$ b) $T_2(x) = \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{7^{\frac{3}{2}}}(x-3) + \frac{1}{7^{\frac{5}{2}}}(x-3)^2 \cdot \frac{3}{2}$

1.4 $a_0 = 0{,}5$; $F_2(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$. (*) = mittlere quadratische Flächenabweichung wird für FP F_2 unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad 2 minimal. ≈ Flächenabweichung. Skizze…

Kurzlösungen Beispiel 2

2.1 a.1) $2 \cdot 26^6 \cdot 10^6$ a.2) $36^{12} - 10^{12}$ a.3) $\frac{12!}{3!3!4!2!}$ b) (1) ∞ (2) ∞ c) $-\frac{2}{3}\sqrt[4]{1+2\cos(x)}^3 + C$

2.2 a) $\nabla f(1,0) = (-1 \quad -2)^T$ b) Bei (x,y)=(1,1) gibt es ein lokales Minimum 3,5.

2.3 a) 2,5833 b) $T_5(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^5$

2.4 $f(x) = 2x^2; a_0 = \frac{4}{3}; F_3(x) = \frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{4}\cos(2\pi x) - \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{9}\cos(3\pi x)$

Einziges trigonometrisches Polynom 3. Grades mit $\int_T |f(x) - F_3(x)|^2\ dx = \min.$

Kurzlösungen Beispiel 3

3.1 a) 1 b) $-\infty$ bzw. 0^+, somit Polstelle

3.2 a) $\frac{2}{3}\sqrt{1+\ln x}^3 + C$ b) $y = \sqrt[3]{3x - x^3 + 3}$

3.3 a) df beschreibt exakt, um wie viel sich die Tangentialebene ändert, wenn man ausgehend von $(x,y) = (1,1)$ in x-Richtung um dx und in y-Richtung um dy ändert; df ist somit eine Näherung für Δf= Änderurng von f. Gesucht war zudem: $dx = dy = \frac{0{,}1}{1+3e}$
b) $L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(2xy + 2xz + 2yz - 1000)$
$L_x = yz + \lambda \cdot (2y + 2z); L_y = xz + \lambda \cdot (2x + 2z); L_z = xy + \lambda \cdot (2x + 2y);\ L_\lambda = 2xy + 2xz + 2yz - 1000$

3.4 a) $T_5(x) = x + x^3 - \frac{1}{2}x^5$ einzige Poly 5. Grades, das in $x_0 = 0$ mit f und den ersten 5 Ableitungen übereinstimmt und somit ein optimales lokales Anschmiegen an f zeigt.
b) z.B. $\leq \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ (allg. harmon. Reihe mit Exp, $\alpha = 2$). Wenn konvergent, Näherung durch Abbrechen.
c) 3,75

Kurzlösungen Beispiel 4

4.1 a.1) $16 \cdot 1 \cdot 16^6$ a.2) $16^8 - [10^8 + \binom{8}{1} \cdot 6^1 \cdot 10^7]$ a.3) $1 \cdot 16^7 + 1 \cdot 16^6 + \cdots + 1 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 1$

b.1) $\frac{-\infty}{0+} = -\infty$ (o. l'Hospital b.2) $\frac{-80}{0+} = -\infty$ (mit 1 x l'Hospital) 4.1 c) $-\frac{1}{2}\ln|1 - e^{2x}| - \frac{1}{2}(1 - e^{2x}) + C$

4.2 a) $u_x = \frac{5t}{(x+2t)^2}$, $u_t = \frac{-5x}{(x+2t)^2}$ b) $u_x = \cot(x - 2t)$ $u_t = -2\cot(x - 2t)$
b) $(x,y) = (0{,}0)$ ergibt (lokales) Max und $(x,y) = (0{,}4)$ ergibt (lokales) Min.

c) Hauptbedingung $A = x \cdot y$ = max Nebenbedingung $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

4.3 a.1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \cdots = 0 < 1 \Rightarrow$ Reihe konv. a.2) … $\geq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ (allg. harmon. Reihe mit $\alpha = 0{,}5$ div.)

b) $T_5(x) = 3x - \frac{9}{2}x^5$. Einzige Poly vom Grad 5, das bei x=0 mit f und ihren ersten 5 Ableitungen übereinstimmt.

4.4 Vorlesungsbeispiel.

Kurzlösungen Ergänzungen

E.1: Add. Invers: 164; Mult. Inverses: 9 (mit EggT)

E.2: $x = 21 \cdot y \bmod 23$

E.3: i) $5 \cdot 5 = 1 \bmod 12$ => x = 5y mod 12. (ii) e invertierbar, also $\in \mathbb{Z}_{12}^{*} = \{1,5,7,11\}$
(wobei $e = 1$ keine wirkliche Verschlüsselung wäre (Anmerkung: zufällig hier immer $d = e^{-1} = e$)