# Mathematik für Informatiker 2 – SS 2024
## Studiengang Angewandte Informatik

### Kapitel 3: Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

**Lernziele:**

- Asymptotisches Verhalten von Funktionen (Grenzwert gegen $\pm\infty$) berechnen
- Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs berechnen
- Bei inneren Punkten: links- und rechtsseitigen Grenzwert unterscheiden, Existenz des Grenzwerts beurteilen
- Definition der Stetigkeit verstehen
- Stetigkeit von Funktionen ermitteln
- Begriffe Beschränktheit, Monotonie kennen und argumentieren
- Begriffe Minimum und Maximum kennen
- Zwischenwertsatz anwenden, Zusammenhang zur Lösbarkeit von Gleichungen kennen

### Mögliche Begleitliteratur

| | |
|---|---|
| [Teschl 1] | Kap. 5 und Teile von Kapitel 6; Zusätzlich empfehlenswert: [Hartmann], [Brill]. |
| [Teschl 2] | Kap. 18 |
| [Papula 1] | Kap. III |
| [Dürrsch] | Kap. 2+3 |

## Grenzwerte reeller Funktionen

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y$$

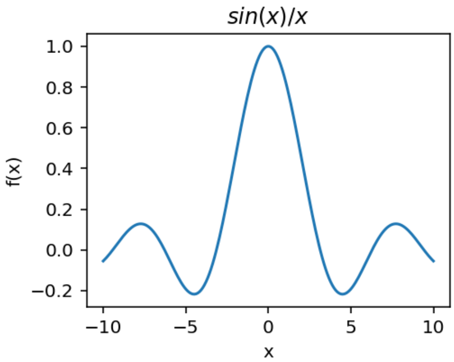
$$f\colon \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = f(x) \end{cases}$$

Definition: Eine reelle (oder auch reellwertige) Funktion $f$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x$ der Definitionsmenge $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ genau ein Element $y = f(x)$ der Wertemenge $W \subset \mathbb{R}$ zuordnet (eindeutige Abbildung von $D$ nach $\mathbb{R}$)

- $x \triangleq$ **unabhängige Variable**, Veränderliche, **Argument**
- $y \triangleq$ **abhängige Variable**, Funktionswert
- $f(x)$ = Funktionsterm, z.B. $f(x) = x^2$

### 1 Einführendes Beispiel

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Ihr Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, für $x = 0$ gibt es keinen Funktionswert. Wir fragen uns: wie verhält sich die Funktion, wenn sich $x$ dem Wert $0$ nähert.



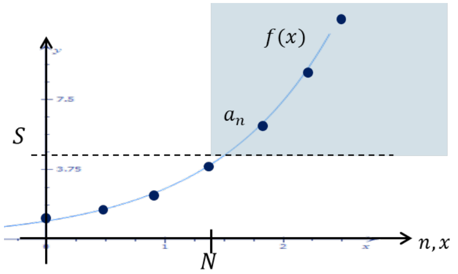
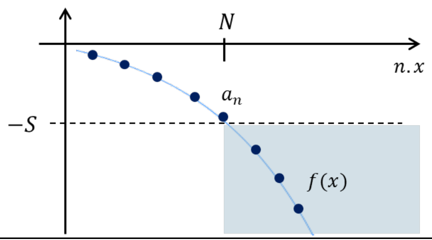
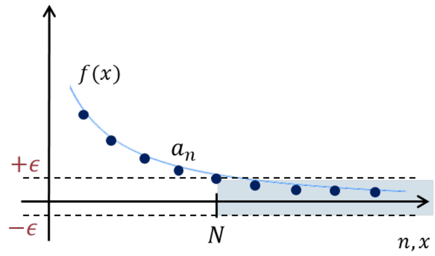
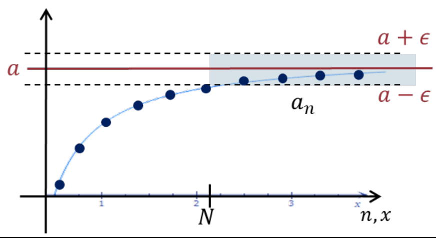
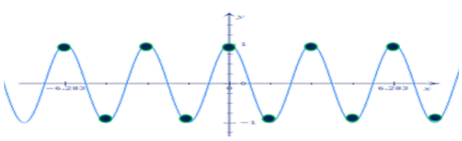

Der Funktionsgraph lässt uns vermuten, dass sich die Nullstellen im Zähler und Nenner in einer Weise herausheben, so dass der Funktionswert definiert werden kann.

Ein Blick auf die Werte von $f(x)$ für kleine $x$ bestätigt das:

| $x$ | $\pm 0.1$ | $\pm 0.01$ | $\pm 0.001$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.99833416 | 0.9999833 | 0.9999998 |

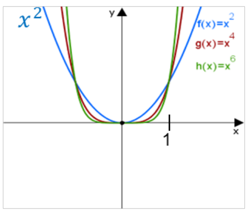
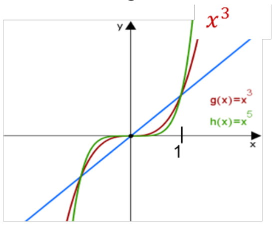
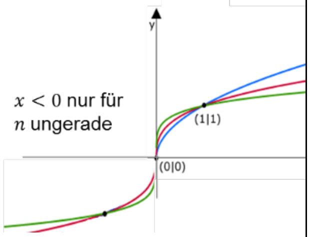
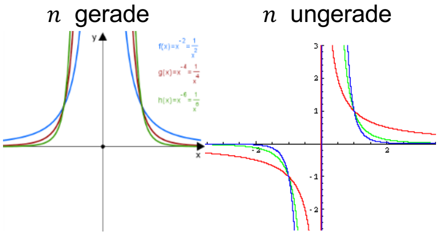
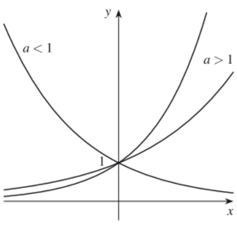
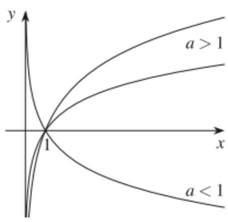
Im Folgenden wollen wir das Verhalten von Funktionen am Rand ihres Definitionsbereichs genauer untersuchen.

## Grenzverhalten von Funktionen $f(x)$ bei $x \to \pm\infty$

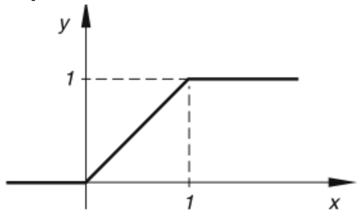
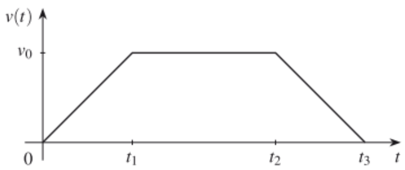
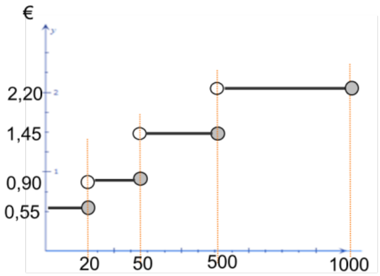
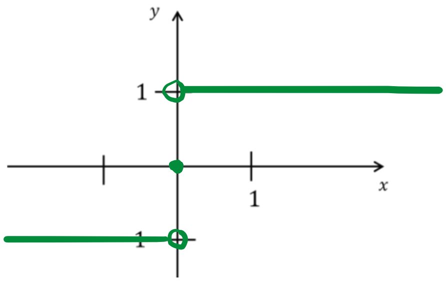
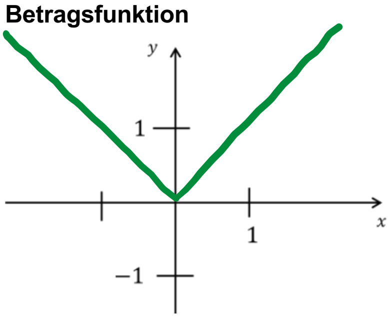
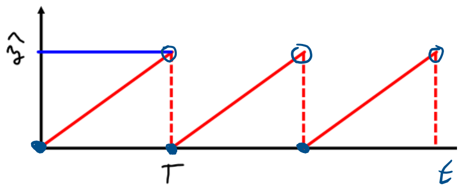
| Typisches Verhalten | Mathematische Symbole | Damit ist exakt gesprochen gemeint |
|---|---|---|
| **1a) Konvergenz gegen den GW** $+\infty$ *)<br><br> | Jeweils <u>zwei Arten</u> der mathematischen Schreibweise (<u>Sprechweisen</u> s. Folgeseite)<br>$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$<br>$f(x) \to \infty$ (für $x \to \infty$) | Egal wie groß wir eine Schranke $S$ vorgeben, irgendwann liegen <u>alle</u> späteren Funktionswerte darüber:<br>Für alle $S > 0$ gibt es ein $x_S \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > S$ für alle $x > x_S$ |
| **1b) Konvergenz gegen den GW** $-\infty$ *)<br><br> | $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$<br>$f(x) \to -\infty$ (für $x \to \infty$) | Für alle $S > 0$ gibt es ein $x_S \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < -S$ für alle $x > x_S$ |
| **2a) Konvergenz gegen den GW 0**<br><br> | $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$<br>$f(x) \to 0$ (für $x \to \infty$) | **Grenzwerte** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ (z.B. $a = 0$)<br>Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $x_\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\lvert f(x) - a \rvert < \epsilon$ für alle $x > x_\epsilon$<br>[Alternative (unten): über Folgen] |
| **2b) Konvergenz gegen den GW** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$<br><br> | $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$<br>$f(x) \to a$ (für $x \to \infty$) | |
| **3) Divergenz (= hat keinen Grenzwert)**<br> | $\lim_{x\to\infty} f(x)$ exist. nicht | . |

*) Konvergenz gegen den GW $+\infty$ oder $-\infty$ wird manchmal auch als „bestimmt divergent" oder als „konvergent gegen den <u>uneigentlichen</u> GW $+\infty$ oder $-\infty$ bezeichnet. **Alles Gesagte für $x \to +\infty$ kann man für Funktionen analog auf den Fall $x \to -\infty$ übertragen!**

## Erlaubtes Rechnen mit $\pm\infty$

| Variable = Basis / Variable = Exponent | Inverse | Erlaubtes Rechnen mit $\pm\infty$ | Inverse-Eigenschaft algebraisch formuliert: |
|---|---|---|---|
| **Potenzfunktionen** …mit natürlichem Exponent<br>$y = x^n$<br>$n$ gerade<br><br>$n$ ungerade<br><br>Def.: $x \in \mathbb{R}$ falls natürlicher Exponent. | … mit gebrochen-rationalem Exponent: **Wurzelfkt.**<br>$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ,<br>$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ; $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$<br><br>Def. Gerade Wurzeln: $x \geq 0$<br>(für neg. Werte nicht def.)<br>Def. Ungerade Wurzeln: $x \in \mathbb{R}$ | $(+\infty)^2 =$<br>$(-\infty)^2 =$<br>$(+\infty)^p =$<br>$(p > 0)$<br>$(-\infty)^3 =$<br>$\sqrt{+\infty} =$<br>$\sqrt{-\infty} =$ n. def.<br>$\sqrt[3]{-\infty} =$<br>$(+\infty)^\infty =$ | **Potenzieren & Wurzelziehen sind Inverse**<br>denn die Wurzel-Definition besagt:<br>$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$<br>**Potenzgleichung lösen durch Wurzelziehen:**<br>**Ungerade Exponenten:**<br>Eindeutige Umkehrung<br>$x^n = y \quad \mid \sqrt[n]{\dots}$<br>$\Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$<br>**Gerade Exponenten:** Zwei mögliche Lösungen!<br>$y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$<br>**Wurzelgleichung lösen durch Potenzieren:**<br>$\sqrt[n]{x} = y \quad \mid (\dots)^n$<br>$\Rightarrow x = y^n$<br>Potenzieren mit geraden Exponenten (z.B. Quadrieren) ist keine Äquivalenzumformung. Ob Lösung rechts auch links erfordert **Probe**.<br>**Sonderfall $n = 0$:** $y = x^0 \equiv 1$ (Konstante Fkt.)<br>**$y = x^\alpha$ mit irrationalem Exponent**:<br>Definition über beliebig genaue Näherung über rationale Exponenten.<br>Def.: $x > 0$ |
| …mit negativen ganzen Exponenten (**Kehrwerte**)<br>$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$<br>z. B. $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$<br>$n$ gerade     $n$ ungerade<br><br>Def-Bereich: $x \neq 0$ (Division d. 0 n def.) | …mit negativem gebrochen-rationalem Exponent<br>$y = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$<br>*Graph ähnlich wie links.* | $\frac{1}{+\infty} =$<br>$\frac{1}{-\infty} =$<br>$\frac{0^\pm}{+\infty} = 0^\pm$<br>$\frac{1}{0^\pm} =$<br>$\frac{+\infty}{0^\pm} = \pm\infty$ | |
| **Exponentialfunktion**<br>$y = a^x$<br>Unterscheide Basis $0 < a < 1$ bzw. $a > 1$<br><br>Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$<br>**Eulersche e-Fkt:**<br>$y = e^x$ bzw. $\exp(x)$<br>$e$ = 2,7182818284... | **Logarithmusfunktion**<br>$y = \log_a x$<br>Unterscheide Basis<br>$0 < a < 1$ bzw. $a > 1$<br><br>Definitionsbereich: $x > 0$<br>(log nicht def. für $x \leq 0$)<br>$a = e$: $y = \ln x$<br>$a = 10$: $y = \lg x$ | $e^{+\infty} =$<br>$e^{-\infty} =$<br>$\ln(+\infty) =$<br>$\ln(-\infty) =$ n. def.<br>$\ln(0^+) =$<br>$\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} =$<br>$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} =$<br>$q^{+\infty} = \{$<br>$q^{-\infty} = \{$ | **In-Exponent-zur-Basis-$a$-erheben und Logarithmieren zur-Basis-$a$ sind Inverse:**<br>denn Log-Definition besagt:<br>$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x$<br>**Exponentialgl. lösen durch Logarithmieren:**<br>$a^x = y \mid \log_a(\dots)$ $(x \in \mathbb{R}, y > 0)$<br>$\Leftrightarrow x = \log_a(y)$<br>**Log-Gleichung lösen d. Entlogarithmieren:**<br>$\log_a(x) = y \quad \mid a^{(\dots)}$ $(x > 0, y \in \mathbb{R})$<br>$\Leftrightarrow x = a^y$ |

## 2 Beispiele abschnittweise definierter Funktionen

| | | |
|---|---|---|
| **Rampenfunktion**   | **Passende Funktionsvorschrift?** $f(x) = \begin{cases} 0 & für\ x \leq 0 \\ x & für\ 0 < x \leq 1 \\ 1 & für\ x > 1 \end{cases}$ | |
| **Trapezfunktion** (mit 2 Rampen)   | $v(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{t_1} \cdot t & falls\ 0 < t \leq t_1 \\ v_0 & falls\ t_1 < t \leq t_2 \\ \frac{v_0}{t_3 - t_2} \cdot t + \frac{v_0 \cdot t_3}{t_3 - t_2} & falls\ t_2 < t \leq t_3 \end{cases}$ | Ein Auto fährt mit einer konstanten Beschleunigung an, fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ weiter und bremst am Ende der Fahrt ab. Geschwindigkeitsverlauf $v = v(t)$ als Funktion von der Zeit $t$ |
| **Treppenfunktionen** = abschnittweis konstant   | **Beispiel „Portofunktion“** $f(x) = \begin{cases} 0{,}55, & 0 < x \leq 20 \\ 0{,}90, & 20 < x \leq 50 \\ 1{,}45, & 50 < x \leq 500 \\ 2{,}20, & 500 < x \leq 1000 \end{cases}$ | Weitere typische Beispiele mit fallendem Verlauf:<br><br>**Rabattfunktion (für Preis/ME)**<br><br>Angebotsfunktionen mit eingearbeiteter Rabattstaffel, z.B. Preis pro Liter Heizöl bei Abnahme von $x$ Liter. |
| **Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)**   | $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ | |
| **Betragsfunktion**   | $\lvert x \rvert = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ | |
| **Kippschwingung (Sägezahnimpuls)**   | $\mathrm{f(t)} = \frac{\hat{\mathrm{y}}}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{t} \qquad \text{für } 0 \leq \mathrm{t} < \mathrm{T}$<br>f ist T-periodisch | Bei periodischen Funktionen genügt es, die Funktionsvorschrift für nur ein (beliebiges) Periodenintervall anzugeben. Alle anderen Werte stehen dann durch periodische Fortsetzung fest. |

## Stetigkeit und Unstetigkeit

| | |
|---|---|
| **Definition**: Eine Funktion $f$ heißt **stetig** an der Stelle $x_0$, wenn der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert (wenn also links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind) und gleich $f(x_0)$ ist.<br><br>Ist die Funktion $f$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches $D$ stetig, so sagt man, $f$ ist stetig (auf $D$). | Anschaulich besagt die Stetigkeit, dass die Funktion $f$ keine Sprungstelle hat und nicht unendlich wird.<br><br>Alternative Definition: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $x \in D$ mit $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ |

- **Die Grundfunktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.** Man beachte aber, dass $D$ aber nicht immer ganz $\mathbb{R}$ ist.
- **Wie argumentieren wir Stetigkeit für zusammengesetzte Funktionen?**

Aufgrund der Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten können wir aus Stetigkeit der Grundfunktionen auf Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen schließen, solange wir nicht durch Null dividieren oder einen „unbestimmten Ausdruck“ erzeugen:

- Summen bzw. Differenzen, Produkte, Potenzen stetiger Funktionen sind stetig.
- Sofern der Nenner nicht Null wird, sind auch Quotienten stetiger Funktionen wieder stetig.
- Verkettungen (Hintereinander Ausführen) stetiger Funktionen sind stetig (sofern definiert).

- **An einer Stelle, an der eine Unstetigkeit nicht sofort ausgeschlossen werden kann?**

Bilde den links- und rechtsseitigen Grenzwert für diese Stelle und zeige, dass diese entweder selbst nicht existieren bzw. nicht endlich sind bzw. dass sie zwar endlich, aber nicht gleich bzw. gleich dem Funktionswert sind.

## Fragen zu stetigen Funktionen

Ein tropfender Wasserhahn fügt dem Wasservolumen in einer Badewanne in Abständen von genau einer Sekunde genau einen Milliliter hinzu. Sei $f(t)$ die Funktion, die das Wasservolumen in der Wanne zum Zeitpunkt $t$ darstellt.


A) $f$ ist eine stetige Funktion zu jedem Zeitpunkt $t$.
B) $f$ ist für alle $t$ stetig, außer für die genauen Zeitpunkte, zu denen das Wasser in die Wanne tropft.
C) $f$ ist zu keinem Zeitpunkt $t$ stetig.
D) Es gibt nicht genügend Informationen um zu wissen, wo $f$ stetig ist.

(CGQ)

Ein tropfender Wasserhahn fügt dem Wasservolumen in einer Badewanne in Abständen von genau einer Sekunde genau einen Milliliter hinzu. Sei $g(x)$ die Funktion, die das Wasservolumen in der Wanne als Funktion der Wassertiefe $x$ darstellt.


A) $g$ ist eine stetige Funktion für jede Tiefe $x$.
B) Es gibt einige Werte von $x$ bei denen $g$ nicht stetig ist.
C) $g$ ist für keine Tiefe $x$ stetig.
D) Es gibt nicht genügend Informationen um zu wissen, wo $g$ stetig ist.

(CGQ)

Wie Sie wissen ist die folgende Aussage wahr:

Wenn $f(x)$ ein Polynom ist, dann ist $f(x)$ stetig.

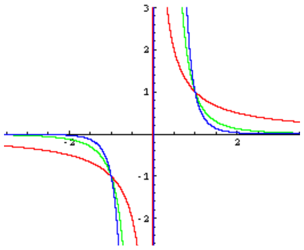
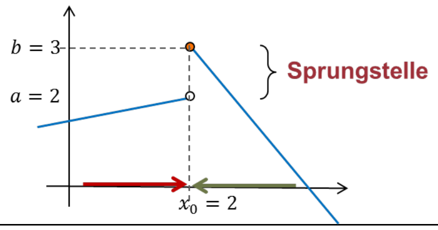
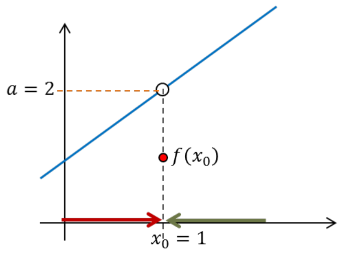
Welche der folgenden Aussagen ist ebenfalls wahr?


A) Wenn die Funktion $f(x)$ nicht stetig ist, dann ist sie kein Polynom.
B) Wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist, dann ist sie ein Polynom.
C) Wenn die Funktion $f(x)$ kein Polynom ist, dann ist sie auch nicht stetig.

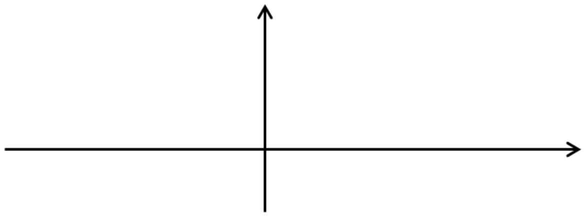
(CGQ)

## 3 Grenzwerte bei Annäherung an innere Stellen

Wir betrachten $f(x) = \frac{1}{x}$. Was ist $D$? Was ist der „Rand“ von $D$? GWe interessant bei $\pm\infty$ und an der **inneren Stelle** $x_0 = 0$.

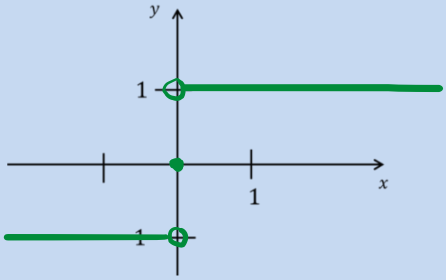
| Annäherung an eine innere Stelle $x_0$ | Mathematische Symbole | Damit ist gemeint: |
|---|---|---|
| **(a) … von rechts: $x \to x_0 +$**<br> | **Rechtsseitiger Grenzwert von $f$ gegen $x_0$**<br>$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$<br>$f(x) \to a$ für $x \to x_0 +$<br>**Am Beispiel:** | $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x_0 + h) = a$<br>Definition: Für jede beliebige Folge $x_n \to x_0$ mit $x_n > x_0$ existiert der **Folgen-GW** $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$ |
| **(b) …von links: $x \to x_0 -$**<br>Wenn Rechts- und linksseitiger GW existieren, aber mindestens einer ist $\pm\infty$, spricht man von **Polstelle** | **Linksseitiger Grenzwert von $f$ gegen $x_0$**<br>$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = b$<br>$f(x) \to b$ für $x \to x_0 -$<br>**Am Beispiel:** | $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x_0 - h) = b$<br>Definition: Für jede beliebige Folge $x_n \to x_0$ mit $x_n < x_0$<br>Existiert der **Folgen-GW** $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$ |
| (a) (b) mit endlichen (verschiedenen) GWen<br> | Typisch: Abschnittweise definierte Funktionen | $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ |
| **(c) …egal von welcher Seite: $x \to x_0$**<br> | (Nur) falls rechtsseitiger GW (a) gleich dem linksseitigen GW (b) ist, ist die Richtung der Annäherung egal und es gibt den (einen)<br>**„Der“ Grenzwert von $f$ gegen $x_0$**<br>$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$<br>$f(x) \to a$ für $x \to x_0$<br>**Am Beispiel:** | $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$<br>oder:<br>Definition: Für jede beliebige Folge $x_n \to x_0$ existiert der **Folgen-GW** $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$<br>und man schreibt dafür $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$<br>(Annäherungsrichtung egal) |

## 4 Beispiele: Stetigkeit von Funktionen bzw. Arten von Unstetigkeitsstellen

| | |
|---|---|
| An welchen Stellen bestehen Zweifel bzgl. der Stetigkeit der Funktion? Ermitteln Sie dafür den links- und rechtsseitigen Grenzwert und entscheiden Sie, ob bzw. welche Art von Unstetigkeit vorliegt. | |
| 4.1 | $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 4.2 | $f(x) = x^2 e^x + \sin x - \sqrt{x}$ |
| 4.3 | $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 + 2x^2}{x + 2x^2} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln x} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$  |

Betrachten Sie die Signumsfunktion

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$





Welche der folgenden Aussagen über $sgn(x)$ ist wahr?

A) Der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^-} sgn(x)$ existiert.
B) Der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} sgn(x)$ existiert.
C) Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} sgn(x)$ existiert.
D) Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} sgn(x)$ ist gleich dem Funktionswert $sgn(0)$.

Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{if } x > 9 \\ 2 & \text{if } x = 9 \\ -x + 14 & \text{if } -7 \le x < 9 \\ 21 & \text{if } x < -7 \end{cases}$$


A) $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 2$
B) $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 5$
C) $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 6$
D) $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 14$
E) $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 21$

(CGQ)

Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{if } x > 9 \\ 2 & \text{if } x = 9 \\ -x + 14 & \text{if } -7 \leq x < 9 \\ 21 & \text{if } x < -7 \end{cases}$$


Die Funktion ist bei $x = -7$

A) Nicht stetig, da der Grenzwert nicht existiert.
B) Nicht stetig, da die Funktion hier nicht definiert ist.
C) Nicht stetig, da Grenzwert und Funktionswert nicht übereinstimmen.
D) Stetig.

**Wahr oder falsch:** Wenn $x$ bis $100$ wächst, dann kommt $f(x) = 1/x$ immer näher an 0, deshalb ist der Grenzwert für $x$ gegen $100$ von $f(x)$ gleich 0.
Seien Sie bereit, Ihre Antwort zu begründen.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

**Wahr oder falsch:** $\lim_{x\to a} f(x) = K$ bedeutet, dass wenn $x_1$ näher bei $a$ ist als $x_2$, dann ist auch $f(x_1)$ näher bei $K$ als $f(x_2)$.
Seien Sie bereit, Ihre Antwort zu begründen.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

Sie versuchen den Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ zu bestimmen. Sie setzen $x = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots$ ein und erhalten $f(x) = 0$ für alle diese Werte. Sie erfahren sogar, dass für alle $n = 1{,}2, \ldots$ gilt $f\left(\frac{1}{10^n}\right) = 0$.


**Wahr oder falsch:** Sie wissen damit, dass $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

Wenn eine Funktion $f$ bei $x = a$ nicht definiert ist, dann


A) kann der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ nicht existieren.

B) könnte der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ gleich 0 sein.

C) muss der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ gegen $\infty$ divergieren.

D) nichts davon.

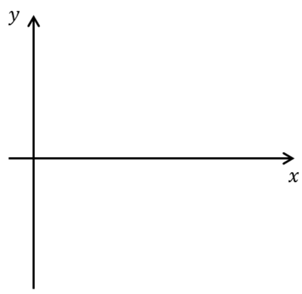
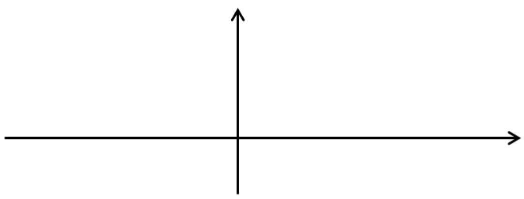
(CGQ)

## Grenzwerte von zusammengesetzten Funktionen

[Teschl 1, Abs. 6.1]

Aus den „elementaren“ Grenzwerten kann man die Grenzwerte von zusammengesetzten Ausdrücken berechnen:
Die sog. **Grenzwertsätze** sind schon von den Folgen bekannt: Mit Grenzwerten kann man die Grundrechenarten durchführen, solange die Grenzwerte existieren, endlich sind, und man gültige Rechenregeln einhält.

**5 Die einfachen Fälle: Erlaubtes Rechnen mit Grenzwerten bzw. erlaubtes Rechnen mit Unendlich**

| | |
|---|---|
| 5.1 | $\boldsymbol{f(x) = 5x^2 + 4e^{3x} + 1}$ $\quad D =$ $\quad$ Von Interesse sind die folgenden GWe (Ersatz für Funktionswert)<br>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$<br>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ |
| 5.2 | $D =$ $\quad$ Von Interesse sind die folgenden GWe (Ersatz für Funktionswert)<br>$\boldsymbol{f(x) = 50(1 - e^{-0.01x})}$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$<br>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$<br><br> |
| 5.3 | $\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{1}{x}}}$ $\quad D =$ $\quad$ Von Interesse sind die folgenden GWe (Ersatz für Funktionswert)<br>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$<br>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$<br>$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) =$<br>$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) =$<br> |
| 5.4 | $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sin x}{x}}$ $\quad$ Berechnen Sie die Grenzwerte von $f$ für $x \to \infty$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ |

## Unbestimmte Ausdrücke $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$

| | |
|---|---|
| Alle folgende Beispiel sind von der Art „$\frac{\infty}{\infty}$“, liefern aber verschiedene Ergebnisse:<br>$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} =$ ________; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} =$ ________; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} =$ ________<br>Alle folgende Beispiel sind von der Art „$\infty - \infty$“, liefern aber verschiedene Ergebnisse:<br>$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - x^2) =$ ____; $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - x) =$ ____; $\lim\limits_{x\to\infty}(x - x^2) =$ ____ | Sobald ein Grenzwert Null oder Unendlich ist, muss man überlegen, ob Rechnen mit Null bzw. Unendlich ein eindeutiges Ergebnis liefert<br>→ **erlaubtes Rechnen mit ∞ bzw. 0**<br>Falls es keine einheitliche Rechenregel gibt:<br>→ sog. **unbestimmte Ausdrücke** |

### GW für Polynome für beliebig große Werte $x \to \pm\infty$

**Trick: Ausklammern der höchsten Potenz:**

$$\lim_{x\to\infty}(-5x^3 + 6x^2 - 7x + 8) =$$

**Polynome** $a_p x^p + \cdots + a_1 x + a_0$ $(p > 0)$ streben für $x \to \pm\infty$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
Das passende Vorzeichen hängt nur von der höchsten Potenz $\boldsymbol{a_p x^p}$ ab, denn:

$$\lim_{x\to\infty} \boldsymbol{a_p x^p} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{a_p x^p} = a_p \cdot \infty^p$$

**Deshalb ab jetzt GWe von Polynomen für $x \to \pm\infty$ auf höchste Potenz verkürzen**

$$\lim_{x\to\infty}(-5x^3 + 6x^2 - 7x + 8) = \lim_{x\to\infty}(-5x^3) = (-5) \cdot \infty^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 + 6x^2 - 7x + 8) = \lim_{x\to-\infty}(-5x^3) = (-5) \cdot (-\infty)^3 = \infty$$

In den obigen Beispielen konnte man die unbestimmten Ausdrücke aufgrund der einfachen Gestalt der beteiligten Terme durch Umformungen (wie z.B. Kürzen oder Ausklammern letztlich doch berechnen. Im Fall von Polynomen gelingt dies für $x \to \pm\infty$ immer.

Ohne diese Vereinfachung würde man bei solchen Polynomen i.d.R. den unbestimmten Ausdruck "$\infty - \infty$" erhalten.

Analog könnte man für die allgemeine Form eines Polynoms vorgehen.

Deshalb dürfen wir ab jetzt das explizite Ausklammern auch weglassen und die GWe sofort anhand der höchsten Potenz berechnen (aber nur für $x \to \pm\infty$ .

### GW $x \to \pm\infty$ für gebrochen-rationaler Fkt. $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$

Für die Polynome in Z und N höchste Potenz relevant:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 2x = +\infty$$

Beispiel Grad Zähler = Grad Nenner:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x^3 + 6x^2 - 7x + 8}{2x^3 + 3x + 1} = \frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^3}{2x^3} = -2.5$$

Beispiel echt-gebrochen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x^3 + 6x^2 - 7x + 8}{2x^4 + 3x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\text{Polynom v. Grad 3}}{\text{Polynom v. Grad 4}} = 0$$

<u>Die formale Begründung über Ausklammern</u> der höchsten Potenz wie bei Polynomen, deshalb hier nicht explizit.

Bisher können wir bei unbestimmten Ausdrücken nur versuchen, durch Umformung (wie Kürzen, Ausklammern) einen berechenbaren Ausdruck zu erzeugen. Später lernen wir zusätzlich die **Regel von de l'Hospital** für "$\infty/\infty$" bzw. "$0/0$" kennen.

Was ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 5x}{2x^2 + 3}$$

A) 0
B) 2
C) 3
D) 6
E) $\infty$


(CGQ)

Gegeben $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$. Berechnen Sie $\lim_{x \to -1^+} f(x)$.

A) $-1$
B) $\infty$
C) $-\infty$
D) Existiert nicht


(CGQ)

**Wahr oder falsch:** Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Betrachten Sie weiterhin eine andere Funktion $g(x)$, die nahe $a$ definiert ist. Dann ist $\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = 0$.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

**Wahr oder falsch:** Wenn $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, dann ist $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = 0$.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

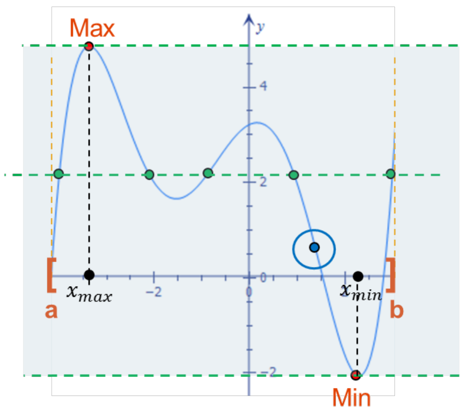
(CGQ)

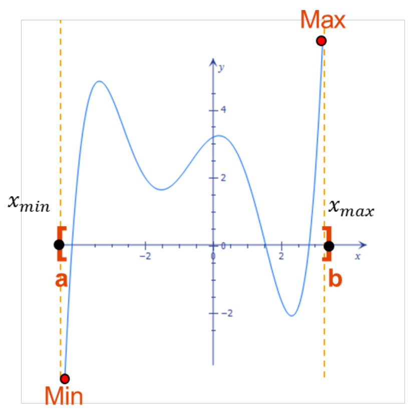
## Eigenschaften stetiger Funktionen

### Gutartige Eigenschaften stetiger Funktionen

$f$ sei auf dem **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ **stetig**. Dann besitzt sie folgende Eigenschaften:

| | |
|---|---|
| **Beschränktheit** | **$f$ ist auf $[a, b]$ beschränkt.** |
| **Maximum / Minimum** | $f$ nimmt in $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum (mindestens 1 x) an.<br>D.h. es gibt Stellen $x_{max}$ und $x_{min}$ mit $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ für alle $x \in [a, b]$. |
| **Zwischenwertsatz für stetige Funktionen** | $f$ nimmt in $[a, b]$ zwischen 2 Funktionswerten jeden Zwischenwert (mind. 1 x) an. |
| **Vorzeichen-beständigkeit** | Ist $f$ an der Stelle $x_0$ im Innern von $[a, b]$ positiv (negativ), so gibt es ein (beidseitiges) Intervall um $x_0$, in dem $f$ beständig positiv (negativ) ist. |




Entscheidend sind dabei beide Voraussetzungen:

- Auf einem unbeschränkten Definitionsintervall muss selbst ein stetiges, beschränktes $f$ kein Max/Min annehmen.
- Auf einem beschränkten **offenen** Intervall wie zum Beispiel $(2, 4)$ muss selbst ein stetiges $f$ kein Max/Min annehmen.

### 6 Anwendungen

**Nullstellensatz von Bolzano:** Wenn $f$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist und wenn $a$ und $b$ ein unterschiedliches Vorzeichen haben, dann hat $f$ mindestens eine Nullstelle mit $f(x_0) = 0$ und $x_0 \in [a, b]$.

| | |
|---|---|
| 6.1 | Die Funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ hat im Intervall $[-1,1]$ mindestens eine Nullstelle. |
| 6.2 | Die Gleichung $e^{x^2-1} = x + 2$ besitzt eine Lösung im Intervall $[1,3]$. |

Sie kennen folgende Werte einer Funktion $f$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 4 | -2 | -5 | 1 |


**Wahr oder falsch:** Es gibt mindestens ein $x$, bei dem $f(x) = 0$ ist.

A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

**Wahr oder falsch:** Sie waren einmal exakt 1,003 m groß.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

**Wahr oder falsch:** Zu irgendeiner Zeit, seit Sie geboren wurden, war Ihr Gewicht in kg exakt gleich Ihrer Größe in cm dividiert durch 10 (also in dm).


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(Adapted from CGQ)

**Wahr oder falsch:** Zu irgendeiner Zeit, seit Sie geboren wurden, war Ihr Gewicht (in kg) exakt gleich der Anzahl Ihrer Geburtstage.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

**Wahr oder falsch:** Entlang des Äquators gibt es zwei exakt gegenüberliegende Punkte, bei denen zur gleichen Zeit exakt die gleiche Temperatur herrscht.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

**Wahr oder falsch:** Bei einem Basketballspiel gewinnt eine Mannschaft mit einem Vorsprung von 36 Toren.
Zu irgendeinem Zeitpunkt des Spiels muss der Vorsprung exakt 25 Tore betragen haben.


A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

(CGQ)

**Wahr oder falsch:** Die Funktion $x^{100} - 9x^2 + 1$ hat eine Nullstelle in $[0,2]$.

A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.


(CGQ)

Wenn eine Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ kein Maximum hat, dann

A) Muss sie unstetig sein.
B) Muss sie unbeschränkt stein.
C) Beides.
D) Keines von beiden.


(Bauer)

**Wahr oder falsch:** Sie können das folgende Verfahren benutzen, um Nullstellen einer stetigen Funktion $f$ beliebig exakt (also mit einer vorgegebenen Genauigkeit $\epsilon$) zu berechnen.


Ausgangspunkt: ein Intervall $[a, b]$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

1. Setze $c = \frac{a+b}{2}$
2. Wenn $b - a < \epsilon$ oder $f(c) = 0$, dann breche ab und gebe $c$ zurück.
3. Wenn $f(c) < 0$, dann setze $a = c$, sonst $b = c$.
4. Gehe zu 1.

A) Wahr, und ich bin sehr sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir nicht sicher.
C) Falsch, aber ich bin mir nicht sicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.