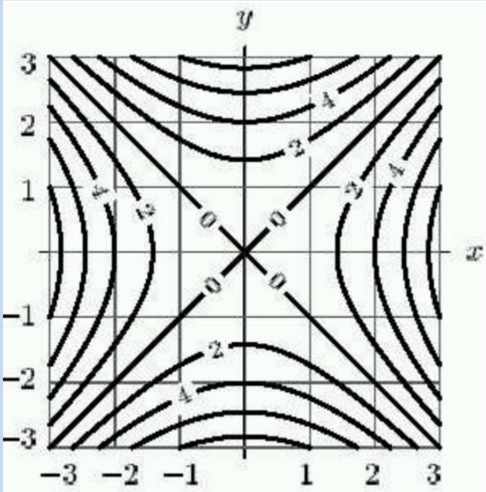
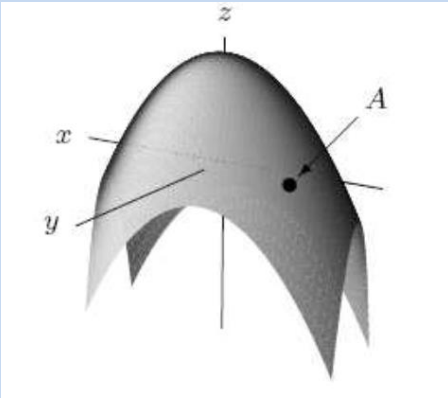
Frage 1:
Welcher der folgenden Begriffe beschreibt den Ursprung im Konturdiagramm in der folgenden Abbildung am besten?



A) Ein Gebirgspass
B) Ein trockenes Flussbett
C) Ein Berggipfel
D) Ein Bergrücken

Carroll MathQUEST

Frage 2:
Die folgende Abbildung zeigt die Fläche $z = f(x, y)$. Welches sind die Vorzeichen von $f_{xx}(A)$ und $f_{yy}(A)$?

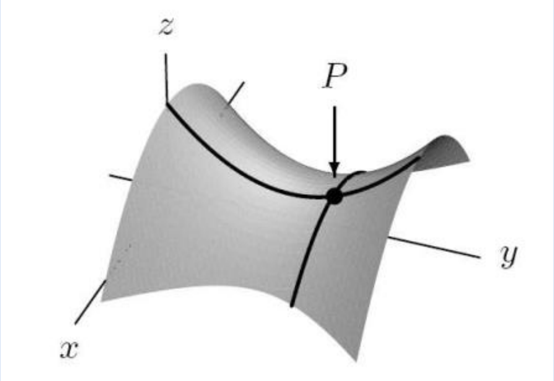


A) $f_{xx}(A) > 0, f_{yy}(A) < 0.$
B) $f_{xx}(A) < 0, f_{yy}(A) < 0.$
C) $f_{xx}(A) \approx 0, f_{yy}(A) \approx 0.$
D) $f_{xx}(A) < 0, f_{yy}(A) \approx 0.$

Carroll MathQUEST

Frage 3:

Die folgende Abbildung zeigt die Fläche $z = f(x, y)$. Welches sind die Vorzeichen von $f_{xx}(P)$ und $f_{yy}(P)$?

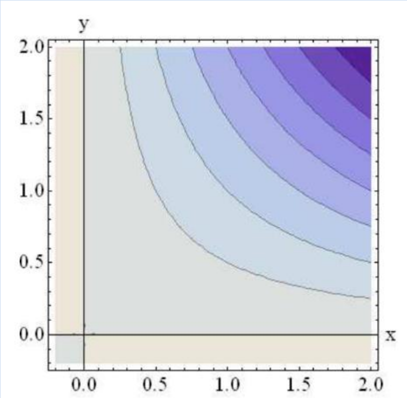


Carroll MathQUEST

A) $f_{xx}(P) > 0, f_{yy}(P) \approx 0.$
B) $f_{xx}(P) > 0, f_{yy}(P) < 0.$
C) $f_{xx}(P) \approx 0, f_{yy}(P) \approx 0.$
D) $f_{xx}(P) < 0, f_{yy}(P) > 0.$

Frage 4:

In der folgenden Konturdarstellung stehen dunkle Schattierungen für kleine Werte der Funktion und helle Schattierungen stehen für große Werte der Funktion. Was ist das Vorzeichen der gemischten partiellen Ableitung?



Carroll MathQUEST

A) $f_{xy} > 0$
B) $f_{xy} < 0$
C) $f_{xy} \approx 0$
D) Dies lässt sich aus der Abbildung nicht ermitteln.

Extrema (ohne Nebenbedingungen) / Optimierungsprobleme

Extremwertaufgabe / Optimierungsaufgabe = Suche nach Max/Min

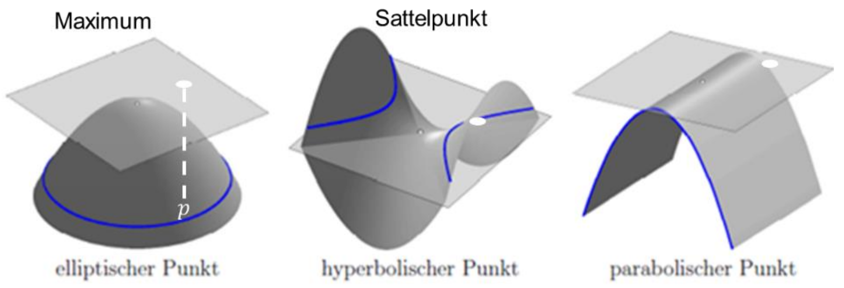
$$f(x_1, \dots, x_n) = \min/\max!$$

Lokale Max/Min-Stelle: Für $y = f(x_1, \dots, x_n)$ an Stelle $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n) \in D$

$\boldsymbol{p}$ ist (lokale) **Maximalstelle**, falls $f(\boldsymbol{p}) > f(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{p}$ ist (lokale) **Minimumstelle**, falls $f(\boldsymbol{p}) < f(\boldsymbol{x})$

Jeweils für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq \boldsymbol{p}$, die nahe genug an der Stelle $\boldsymbol{p}$ liegen (d.h. für die Abstände $|x_i - p_i|$ der Komponenten alle klein genug ist).



Notwendige Bedingung „Stationärer Punkt"

$\mathbf{grad}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{0}$ d.h. Stelle(n) $\boldsymbol{p}$, an der alle ersten Ableitungen verschwinden

Hinreichende Bedingung im speziellen Fall $\boldsymbol{n = 2}$:

- $\mathbf{det}\, \boldsymbol{H_f}(\boldsymbol{p}) > \mathbf{0} \Rightarrow$ bei $\boldsymbol{p}$ lokales Extremum von f.

  Max/Min-Unterscheidung: $f_{x_1 x_1}(p) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Max. von } f \\ > 0 \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Min. von } f \end{cases}$
- $\mathbf{det}\, \boldsymbol{H_f}(\boldsymbol{p}) < \mathbf{0} \Rightarrow$ bei $\boldsymbol{p}$ Sattelpunkt von f
- $\mathbf{det}\, \boldsymbol{H_f}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{0} \Rightarrow$ Keine Aussage, könnte parabolischer Punkt sein

Hinreichende Bedingung allgemein für n Variablen

$$\boldsymbol{H_f}(\boldsymbol{p}) \text{ ist } \begin{cases} \text{negativ definit} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Max. von } f \\ \text{positiv definit} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Min. von } f \\ \text{indefinit} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \textbf{ kein} \text{ lokales Extremum von } f \end{cases}$$

***A* positiv definit:** alle Unterdeterminanten $D_k > \mathbf{0}$
***A* negativ definit:** Unterdeterminanten sind alternierend: $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots$
***A* indefinit:** Wenn beide obigen Fälle nicht erfüllt sind.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{31} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ a_{m1} & & & \cdots\cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Unterdeterminanten:

$$D_1 = |a_{11}|; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots . D \quad = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{31} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ a_{m1} & & & \cdots\cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Analog zu den Extremwertaufgaben in 1 Variablen: Optimierungsaufgaben.

Formuliert als Hauptbedingung mit Zielfunktion, in einem ersten Schritt noch ohne Nebenbedingung.

Lokal: Funktionswert $y = f(\boldsymbol{p})$ ist größer/kleiner als alle $f(x_1, \dots, x_n)$ der näheren Umgebung von $\boldsymbol{p}$

Global: …. für alle $(x_1, \dots, x_n) \in D$

Links: Typische Situationen

Frage: Wie findet man diese lokalen Extremstellen im Innern des Definitionsbereiches *analytisch*, d.h. mit Mitteln der Differentialrechnung?

Notw. Bedingung: Fall einer Variablen $f'(x) = 0$ übertragen auf alle partiellen Ableitungen, also Gradient = **0**.

Hinr. Bedingung **Achtung**: In einer Variablen genügt $f''(x) \neq 0$
Schon bei zwei Variablen genügt nicht: $f_{xx} \neq 0; f_{yy} \neq 0$.

Beispiel: Abgebildeter Sattelpunkt: die Schnittkurven haben je nach Richtung ein Minimum bzw. Maximum (d.h. $f_{xx} \neq 0; f_{yy} \neq 0$), aber die Gesamtfunktion hat dort keine Extremstelle.

10 Beispiel: Lokale Extrema und Sattelpunkte bestimmen

$\boldsymbol{f(x,y) = x - 8y - x^2 + xy - y^2 \ = \max/\min}$ **Die Suche führt hier auf ein LGS.**

Schritt 1: Suche stationäre Stellen (notwendige Bedingung)

Schritt 2: Prüfe hinreichende Bedingung

Schritt 3: Max/Min Unterscheidung

Schritt 4: Extremwert(e)

- Lokale Extrema können auch in **Randpunkten von $\boldsymbol{D}$** auftreten (behandeln wir aber nicht weiter).
- **Globales Extremum:** entweder ein stationärer Punkt, ein Randpunkt oder eine Unstetigkeitsstelle der partiellen Ableitung.
- Auf die hinreichende Bedingung im Fall von mehr als zwei Variablen verzichten wir in dieser Vorlesung, u.a. weil sie Begriffe und Techniker der Linearen Algebra (Definitheit bzw. Eigenwerte von Matrizen) benötigen würde.

11 Beispiel: Lokale Extrema und Sattelpunkte bestimmen

$\boldsymbol{f(x,y) = xy - x^2y - xy^2}$ **Die Suche führt hier auf ein nicht-lineares System.**

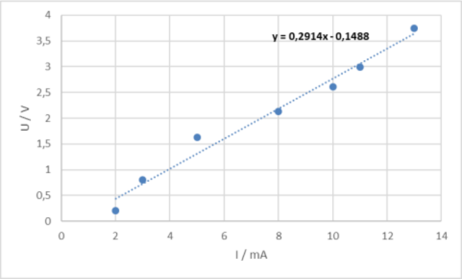
Anwendungen aus Technik und Wirtschaft (z.B. Gewinnmaximierung) zeigen wir in den gemischten Übungen. Eine weitere, die in der Literatur oft an dieser Stelle behandelt wird: Methode der kleinsten Quadrate / Regressionsfunktion.

Wir beschränken uns auf analytisch lösbare Max/Min-Probleme. Methoden der numerischen Optimierung füllen ganze Bücher.

Anwendung Optimierung – Einfache lineare Regression (ELR) / simple linear regression (SLR)

Gegeben: (x_i, y_i) $(i = 1, \dots, N)$ Paare aus reellen Zahlen (Statistik: Werte zweier metrischer Merkmale X, Y)

Index i	x_i	y_i
1	2	0,21
2	3	0,8
3	5	1,63
4	8	2,13
5	10	2,61
6	11	2,99
7	13	3,74



Gesucht: Lineare Funktion $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x + b}$, welche die Messwerte möglichst gut annähert.

Optimierungsaufgabe:

1. Optimierungsfunktion aufstellen:

Schritt 1: Gradient ∇J und Hessematrix H_J
Schritt 2: Notwendige Bedingung $\nabla J = \mathbf{0}$

Schritt 3: Hinreichende Bedingung prüfen: Lokales Minimum: $\det H_J > 0 \; und \; \frac{\partial^2 J}{\partial a^2} > 0$?
Endergebnis: **Gesucht:** Steigung a und Achsenabschnitt b der Regressionsgeraden $\boldsymbol{y = f(x) = a \cdot x + b}$ mit MSE = min, d.h. $\text{Mean Square Error} = J = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - y_i)^2 = \min!$ **Lösung:** Steigung m und Achsenabschnitt b der Regressionsgereaden berechnen sich über $a = \frac{s_{XY}}{s_X^2} \quad ; \qquad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$

Wiederholung Summenzeichen / Rechenregeln mit Summenzeichen

12 Übung: Rechnen mit Summenzeichnen

12.1	Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen Summe der Quadrate der ersten 10 natürlichen Zahlen

<table>
<tr><td>12.2</td><td>
Rechenregeln herleiten: Berechnen Sie:

$$\sum_{i=1}^{10} 2 \cdot i =$$

$$\sum_{i=1}^{10} 2 =$$

$$\sum_{i=1}^{N} b =$$

$$\sum_{i=1}^{10} 2 \cdot i + i^2 =$$
</td></tr>
<tr><td>12.3</td><td>
Umformungen mit Summenzeichen

Zeigen Sie, dass folgende Umformungen, richtig sind, indem Sie die linke Seite der Gleichung soweit umformen, dass es der rechten Seite der Gleichung entspricht.

Wobei folgende Symbole verwendet werden:

Varianz	Kovarianz	Mittelwert x	Mittelwert y	Hilfswerte:	
$s_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$	$s_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$	$a_{xx} := \frac{1}{N}\sum x_i^2$	$a_{xy} := \frac{1}{N}\sum x_i y_i$

$$s_X^2 = a_{xx} - \bar{x}^2$$
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_{XY} = a_{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$
</td></tr>
<tr><td>12.4</td><td>
Ableiten mit Summenzeichen:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{10} i \cdot a$$

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a} =$$

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{10} (i \cdot a + b)^2$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} =$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} =$$
</td></tr>
</table>

Frage 1:
Welcher der Punkte liegt am nächsten zur xy-Ebene

Carroll MathQUEST

A) $(3, 0, 3)$
B) $(0, 4, 2)$
C) $(2, 4, 1)$
D) $(2, 3, 4)$

Frage 2:
Welcher der Punkte liegt am nächsten zum Ursprung?

Carroll MathQUEST

A) $(3, 0, 3)$
B) $(0, 4, 2)$
C) $(2, 4, 1)$
D) $(2, 3, 4)$

Frage 3:
Die Menge aller Punkte, deren Abstand zur z-Achse 4 beträgt, ist:

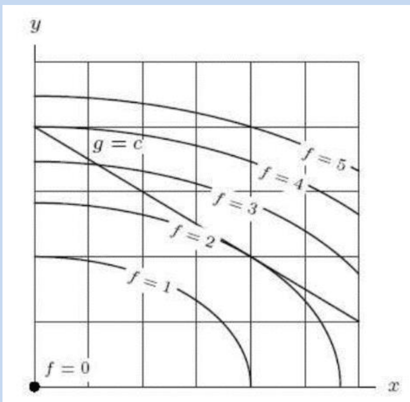
Carroll MathQUEST

A) eine Kugel mit Radius 4, zentriert auf der z-Achse
B) die zur z-Achse parallele Linie im Abstand von 4 Einheiten vom Ursprung
C) ein Zylinder mit dem Radius 4, der auf der z-Achse zentriert ist
D) die Ebene z = 4

Frage 4:
Ermitteln Sie die Maximal- und Minimalwerte von f unter der Nebenbedingung g = c.

Carroll MathQUEST

A) $\max = 5; \min = 0$
B) $\max = 4; \min = 0$
C) $\max = 3; \min = 2$
D) $\max = 4; \min = 2$



Extrema unter Nebenbedingungen – Teil 1: Variablensubstitution

Für die Funktion f (von n Veränderlichen) suchen wir Extremwerte

$$f(x_1, \dots, x_n) = \min/\max!$$

unter m **Nebenbedingungen (NB)** an die n Variablen

$$\text{NB }(*)\quad \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Erinnerung: Schon im Fall einer Variablen hatten die meisten Extremwertaufgaben neben einer Hauptbedingung auch noch eine Nebenbedingung an die Variablen. Unsere bisherige Lösungsmethode: NB nach einer Variablen auflösen und in die HB einsetzen.

13 Beispiele, die sich durch Substitution auf eine Extremwertaufgabe ohne NB zurückführen lassen

Skizzieren Sie die Situation der folgenden Extremwertsuche mit Nebenbedingung

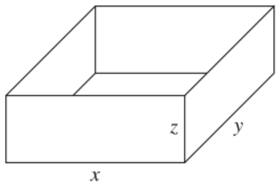
$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2 = \max!$ unter NB: $y = 2 - x$ Lösung $(x|y) = (1|1)$

Skizze:

Hier: Nach Variablensubstitution als „normales" Extremwertproblem lösbar:

Schachtel ohne Deckelmit vorgegebenem Volumen V_0.
Für welche x, y, z ist der Blechverbrauch minimal?

Dies ist ein Minimierungsproblem unter Nebenbedingung.
Hier: Nach Variablensubstitution als „normales" Extremwertproblem lösbar!



Extrema unter Nebenbedingungen – Teil 2: Die Lagrange-Methode

Für die Funktion f (von n Veränderlichen) suchen wir **Extremwerte**

$$f(x_1, \dots, x_n) = \min / \max!$$

unter m **Nebenbedingungen (NB)** an die n Variablen

$$\text{NB } (*) \quad \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Das Auflösen und Einsetzen der NB in die HB sei nicht möglich.

Lösung mit der Lagrange-Methode: Es werden pro NB m weitere Variable λ_j eingeführt und die sog. **Lagrange-Funktion L** gebildet:

$$L := f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m \qquad \text{(Funktion von } m+n \text{ Variablen)}$$

Dann gilt: Die lokalen Extrema von f unter den NB (*) (im Innern des Definitionsbereiches) sind notwendigerweise stationäre Punkte von L, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{zusammen entsteht ein Gleichungssystem, das nach } x_i \text{ und } \lambda_j \text{ aufzulösen ist.}$$

Nicht immer ist eine Lösung durch Auflösen nach einer Variablen und Einsetzen (Variablen-Substitution) möglich.

In diesen Fällen lösen wir Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen nach dem Lagrange-Ansatz:

Die Nebenbedingungen werden über Zusatzvariablen an die Funktion „angehängt“ und von der „um die NB erweiterten Funktion“ L wird ein stationärer Punkt gesucht.

Hinreichende Bedingung behandeln wir nicht. Im Allg. genügt es, die Extrema-*Kandidaten* zu finden.

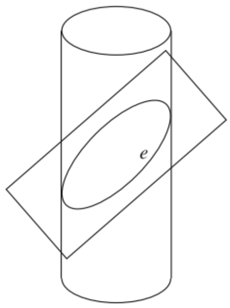
14 Beispiele für die Lagrange-Methode

[s.a. Dürrschnabel 21.3]

Ein Zylinder sei beschrieben durch die Punkte (x, y, z) mit $x^2 + y^2 = 1$. (NB1)

Eine Ebene schneidet diesen Zylinder, sie hat die Gleichung $x + y - z = 0$. (NB2)

Finde den Punkt der Schnittkurve (eine Ellipse) mit geringstem bzw. größten Abstand zu $(0,0,0)$.



Hauptbedingung:

Vereinfachung der Zielfunktion:

Nebenbedingungen:

Übersicht: Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

Es sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reelle Funktion von n Variablen, für die die benötigten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existieren mögen.

<table>
<tr><td>Gradient von f</td><td>$\nabla f = \operatorname{grad} f := \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
Auswertung an Stelle $\boldsymbol{p}$ ergibt einen Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs von f an Stelle $\boldsymbol{p}$ zeigt. Diese maximale Steigung hat den Wert $|\operatorname{grad} f|$</td></tr>
<tr><td>Tangentialebene von f
(an einer Stelle $\boldsymbol{p} \in D$)</td><td>$t(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ (Vektorschreibweise mit euklidischem Skalarprodukt)</td></tr>
<tr><td>Totales Differenzial von f
(an einer Stelle $\boldsymbol{p} \in D$)</td><td>$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$
Die partiellen Ableitungen an der Stelle $\boldsymbol{p} \in D$ auswerten.
Die Werte dx_k geben an, wie weit man sich in x_k-Richtung von $\boldsymbol{p}$ wegbewegt
⇒ df= misst exakt die Änderung auf der Tangentialebene (an $\boldsymbol{p}$)
⇒ dies ist eine Näherung dafür, um wie viele Einheiten sich f ändert.</td></tr>
<tr><td>Richtungsableitung von f</td><td>Steigung von f in Richtung eines Vektors $\boldsymbol{v}$ lässt sich berechnen über:
$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f \qquad (\text{wobei } \boldsymbol{v} \text{ normiert sein muss})$</td></tr>
<tr><td>Hesse-Matrix von f</td><td>Alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung als Matrix (sie ist symmetrisch)
$\boldsymbol{H_f} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{x_nx_1} & & & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Definitheit von quadratischen Matrix A</td><td>$\boldsymbol{A}$ positiv definit ⇔ $\boldsymbol{x^TAx > 0}$ für alle $\boldsymbol{x \neq 0}$
▪ falls $\boldsymbol{A}$ symmetrisch gdw alle Unterdeterminanten $D_k > \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{A}$ negativ definit ⇔ $\boldsymbol{x^TAx < 0}$ für alle $\boldsymbol{x \neq 0}$
▪ falls $\boldsymbol{A}$ symmetrisch gdw $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots$ (alternierend)
$\boldsymbol{A}$ indefinit wenn $\boldsymbol{x^TAx > 0}$ und $\boldsymbol{y^TAy < 0}$ vorkommt.</td></tr>
<tr><td>Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen
an einer inneren Stelle $\boldsymbol{p} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$

Hinreichende Bedingung für $n > 2$</td><td>Notwendige Bedingung „Stationärer Punkt“
$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ d.h. Stelle(n) $\boldsymbol{p}$, an der alle ersten Ableitungen verschwinden
Hinreichende Bedingung im speziellen (häufigen) Fall $\boldsymbol{n = 2}$:
▪ $\mathbf{det}\, \boldsymbol{H_f(p) > 0} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Extremum von } f.$
Max/Min-Unterscheidung: $f_{x_1x_1}(p) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Max. von } f \\ > 0 \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Min. von } f \end{cases}$
▪ $\mathbf{det}\, \boldsymbol{H_f(p) < 0} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ Sattelpunkt von } f$
▪ $\mathbf{det}\, \boldsymbol{H_f(p) = 0} \Rightarrow$ Keine Aussage, könnte parabolischer Punkt sein
Hinreichende Bedingung im allgemeinen Fall $(n \text{ bel.})$
$\boldsymbol{H_f(p)} \text{ ist } \begin{cases} \text{negativ definit} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Max. von } f \\ \text{positiv definit} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \text{ lokales Min. von } f \\ \text{indefinit} \Rightarrow \text{bei } \boldsymbol{p} \ \mathbf{kein} \text{ lokales Extremum von } f \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Lokale Extrema mit Nebenbedingungen
an einer inneren Stelle $\boldsymbol{p} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$

Hinreichende Bedingungen hier nicht, uns genügt, Extrema-Kandidaten zu finden.</td><td>$f(x_1, \dots, x_n) = \min/\max$
unter m Nebenbedingungen (NB) an die n Variablen:
NB (*) $\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$
Lagrange-Funktion $\boldsymbol{L}$ bilden (pro NB m weitere Variable λ_j)
$L := f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$ (Funktion von $n + m$ Variablen)
Dann gilt: Die (lokalen) Extrema von f unter NB (*) (im Innern von D) sind notwendigerweise stationäre Punkte von $\boldsymbol{L}$ d.h.
$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{array}\right\}$ zusammen entsteht ein Gleichungssystem, das nach x_i und λ_j aufzulösen ist.</td></tr>
</table>