9 Integralrechnung

Die Einstiegsfrage in die Integralrechnung betrifft das sogenannte Flächenproblem: Wie kann man den Flächeninhalt unter einer Funktion berechnen? Wie so oft in der Mathematik liegt der Schlüssel zur Lösung des Problems darin, den geeigneten Querbezug herzustellen. Die wesentliche Erkenntnis dieses Kapitels ist der Zusammenhang der Differenzialrechnung mit dem Flächenproblem. Wir werden sehen, dass die Integralrechnung eine Art Umkehrung der Differenzialrechnung darstellt.

9.1 Flächenproblem

Zunächst beschränken wir uns nur auf Funktionen, die keine negativen Funktionswerte haben und stetig sind. Das Schaubild einer solchen Funktion schließt im Intervall $[a, b]$ mit der x-Achse eine Fläche A ein. Wir suchen nach einer Methode, diesen Flächeninhalt zu berechnen.

9.1.1 Integralsymbol

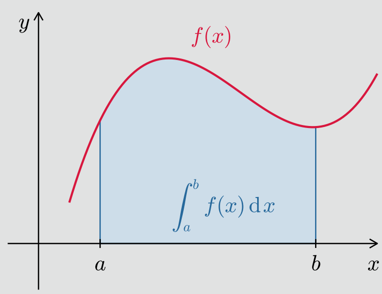
Die Fläche ist erst durch Angabe von Untergrenze a und Obergrenze b eindeutig festgelegt. Wir benötigen deshalb eine geeignete Schreibweise, um unmissverständlich klar zu machen, in welchem Bereich wir die Funktion f betrachten.

Definition 9.1 (Integralsymbol)

Eine stetige und nicht negative Funktion f begrenzt für x-Werte zwischen a und b mit der x-Achse ein Flächenstück. Für den Inhalt A dieser Fläche verwendet man die Schreibweise mit dem Integralsymbol

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion f unter dem Integral bezeichnet man als Integrand.



Wir verwenden die Sprechweise „Integral von a bis b über f von x $\mathrm{d}x$". Die Bezeichnung $\mathrm{d}x$ kennen wir bereits von der Ableitung $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ in Differenzialschreibweise. Hier bei der Integration taucht sie wieder auf.

Beim Integral setzen wir zunächst $f \geq 0$ und $a \leq b$ voraus. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir jedoch sehen, dass Integrale auch für $f < 0$ und $a > b$ sinnvoll definiert werden können. Integrale, bei denen ∞ oder $-\infty$ als Grenzen vorkommen, bezeichnet man als uneigentliche Integrale. Die Besonderheiten werden in Abschnitt 9.3.5 beleuchtet.

Das Integralsymbol $\int$ wurde in Anlehnung an ein langgezogenes „S“ als Anfangsbuchstabe des lateinischen Worts „summa“ bereits im 17. Jahrhundert von dem Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz eingeführt. Bei der Definition des Integralsymbols ist die Variable x lediglich ein Platzhalter. Wir können anstatt x jede beliebige Variable verwenden, mit den Worten von Goethes Faust formuliert: „Name ist Schall und Rauch“.

Merke 9.1 (Integrationsvariable)

Die Bezeichnung der Integrationsvariable spielt keine Rolle:

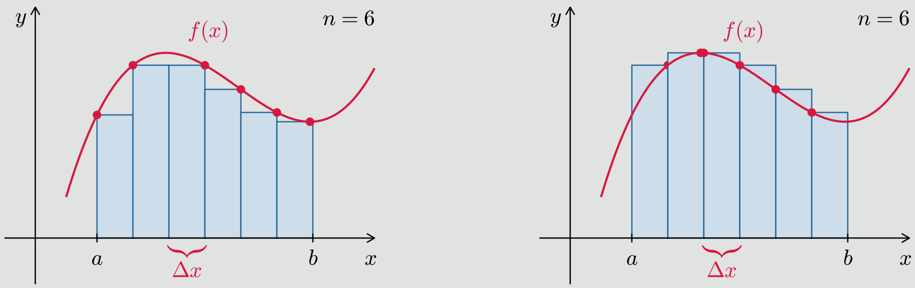
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

9.1.2 Integral als Grenzwert von Summen

Eine nahe liegende Idee bei der Berechnung einer Fläche unter einer Funktion ist die Verwendung kleiner Rechtecke. Dazu unterteilt man das Intervall von a bis b in n gleich große Teilintervalle. Bei dieser sogenannten äquidistanten Unterteilung hat jedes Teilintervall die Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Rechtecke, deren Höhen so gewählt werden, dass sie gerade noch unter die Funktion passen, erzeugen die sogenannte Untersumme. Bei der Obersumme entsprechen die Höhen der Rechtecke den maximalen Funktionswerten.

Merke 9.2 (Unter- und Obersumme)

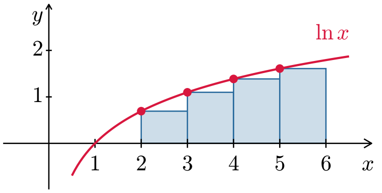
Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion kann durch Untersumme und Obersumme angenähert werden. Der tatsächliche Wert der Fläche ist nicht kleiner als die Untersumme und auch nicht größer als die Obersumme.

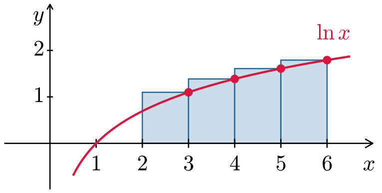


Je kleiner man die Grundseiten der Rechtecke Δx wählt, um so geringer ist der Unterschied zwischen Unter- und Obersumme. Wenn man n groß wählt, kann man die Fläche entsprechend genau berechnen.

Beispiel 9.1 (Unter- und Obersumme)

Die Fläche A unter der Funktion $f(x) = \ln x$ für x-Werte zwischen 2 und 6 soll mithilfe von Unter- und Obersumme näherungsweise berechnet werden.





Eine grobe Abschätzung erhält man mit $n = 4$ Rechtecken, deren Grundseiten die Länge $\Delta x = 1$ haben. Die Untersumme S_U und die Obersumme S_O ergeben

$$S_U = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 4 + 1 \cdot \ln 5 = \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \ln 120 \approx 4.7875,$$

$$S_O = 1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 4 + 1 \cdot \ln 5 + 1 \cdot \ln 6 = \ln(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = \ln 360 \approx 5.8861.$$

Der Wert des bestimmten Integrals muss zwischen den beiden berechneten Werten liegen:

$$4.7875 \approx \ln 120 \le A \le \ln 360 \approx 5.8861.$$

Mithilfe von Methoden, die wir in diesem Kapitel noch kennen lernen werden, kann man den exakten Wert der Fläche A für die Funktion f bei diesem Beispiel ermitteln:

$$A = 6 \ln 6 - 2 \ln 2 - 4 \approx 5.3643.$$

Untersumme und Obersumme liefern nur eine grobe Eingrenzung. Die generelle Vorgehensweise lässt sich zu einem praktikablen numerischen Verfahren erweitern, siehe Abschnitt 9.5.1. ∎

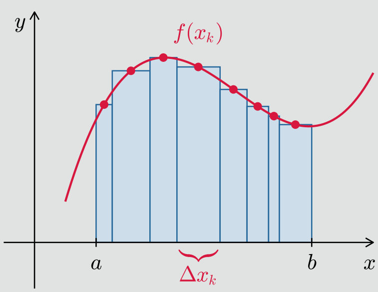
Die Grundseiten der Rechtecke müssen keinesfalls alle gleich groß sein. Wir können Rechtecke mit beliebigen Grundseiten Δx_k verwenden. Anstelle von minimalen und maximalen Funktionswerten können wir die Höhe der Rechtecke durch Funktionswerte $f(x_k)$ an einer beliebigen Stelle x_k im Rechteck festlegen. Wenn wir die Grundseiten der Rechtecke nun immer kleiner werden lassen, dann wird der Näherungswert der Fläche immer genauer. Somit können wir die Fläche unter einer Funktion mathematisch exakt als einen Grenzwert von Summen definieren.

Merke 9.3 (Fläche als Grenzwert von Summen)

Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion f entspricht dem Grenzwert von Summen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

falls die Grundseiten der Rechtecke Δx_k gegen null streben und der Grenzwert der Rechtecksummen existiert. Dabei ist x_k eine Stelle innerhalb des Rechtecks mit Grundseite Δx_k.



9.1.3 Bestimmtes Integral

Bei den bisherigen Betrachtungen sind wir stets davon ausgegangen, dass die Funktion stetig ist und keine negativen Funktionswerte hat. Die Grenzwertformel ist jedoch auch für unstetige Funktionen oder Funktionen mit negativen Funktionswerten gültig. Somit können wir mithilfe der Grenzwertdarstellung das Integral für beliebige Funktionen definieren.

Definition 9.2 (Bestimmtes Integral)
Das bestimmte Integral einer Funktion f zwischen den Grenzen a und b ist definiert durch den Grenzwert der Summen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

wobei Δx_k die Grundseiten der Rechtecke und x_k jeweils eine Stelle innerhalb der Rechtecke bezeichnet.

Für beliebige Funktionen ist nicht sichergestellt, dass der Grenzwert existiert. Man kann jedoch zeigen, dass der Grenzwert für stetige und sogar für stückweise stetige Funktionen immer existiert. Integrale über Funktionen, die zwischen a und b Definitionslücken haben, werden wir in Abschnitt 9.3.5 noch genauer untersuchen.

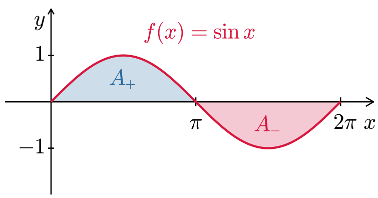
Bei negativen Funktionswerten ist das Produkt aus Grundseite Δx_k und Funktionswert $f(x_k)$ negativ. Somit erzeugen negative Funktionswerte Flächenanteile, die negativ gezählt werden. Bei einer nicht negativen Funktion stimmt die Fläche A, die die Funktion zwischen a und b mit der x-Achse einschließt, mit dem bestimmten Integral überein. Die Flächenberechnung im Fall von negativen Funktionswerten werden wir in Abschnitt 9.4.1 genauer beleuchten.

Für viele praktische Zwecke ist die Definition eines Integrals als Grenzwert von Summen völlig ausreichend. Diese Definition geht im Wesentlichen auf Georg Friedrich Bernhard Riemann zurück. Man bezeichnet dieses Integral daher auch als Riemann-Integral. Henri Lebesgue ist es gelungen, die hier vorgestellte Definition zu verallgemeinern. Das Lebesgue-Integral wird mithilfe des sogenannten Lebesgue-Maßes definiert. Die Maßtheorie bildet einen wichtigen Grundpfeiler der Mathematik.

Beispiel 9.2 (Bestimmtes Integral des Sinus)
Für das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = \sin x$ für x-Werte zwischen 0 und 2π gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Die positiven Anteile zwischen 0 und π werden durch die negativen Anteile zwischen π und 2π kompensiert.



9.2 Zusammenhang von Ableitung und Integral

Die Berechnung eines bestimmten Integrals mithilfe von Grenzwerten ist meistens ein mühsames Unterfangen. Wir suchen deshalb nach Methoden, mit denen sich Integrale einfacher berechnen lassen. Es stellt sich heraus, dass zwischen dem Integral und der Ableitung einer Funktion ein fundamentaler Zusammenhang besteht. Diesen Zusammenhang bezeichnet man als Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

9.2.1 Integralfunktion

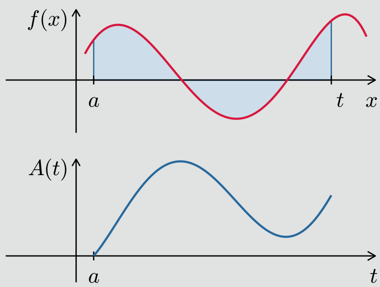
Den Schlüssel für den Zusammenhang zwischen Differenzial- und Integralrechnung bildet die sogenannte Integralfunktion. Bei der Integralfunktion betrachtet man den Flächeninhalt unter einer Funktion f mit fester Untergrenze a und variabler Obergrenze t. Dadurch ergibt sich eine Flächenfunktion A in Abhängigkeit der Variablen t.

Definition 9.3 (Integralfunktion)

Die Integralfunktion

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist definiert durch den Wert des bestimmten Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, t]$. Dabei wird A als Funktion der variablen Obergrenze t interpretiert.



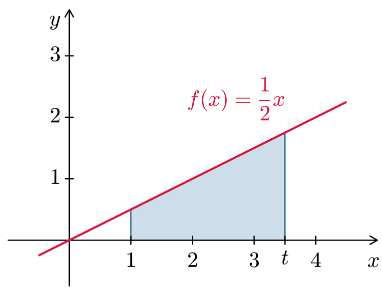
Die Integralfunktion hat an der Stelle $t = a$ immer den Wert 0. Positive Werte der Funktion f lassen die Integralfunktion A anwachsen und negative Werte führen zu Verringerung der Funktionswerte von A. Ein Nulldurchgang der Funktion f von positiven zu negativen Werten erzeugt bei der Integralfunktion A an der entsprechenden Stelle ein Maximum. Analog erzeugt der Übergang von negativen zu positiven Werten ein Minimum.

Beispiel 9.3 (Integralfunktion)

Die Integralfunktion der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

soll für $a = 1$ bestimmt werden. Dazu betrachten wir die Fläche unter der Funktion f zwischen der festen Untergrenze $a = 1$ und der variablen Obergrenze t. Der Flächeninhalt besteht aus einem Trapez mit einer Grundseite der Länge $t - 1$. Die linke Seite des Trapezes hat die Höhe $\frac{1}{2}$ und die rechte Seite $\frac{t}{2}$.



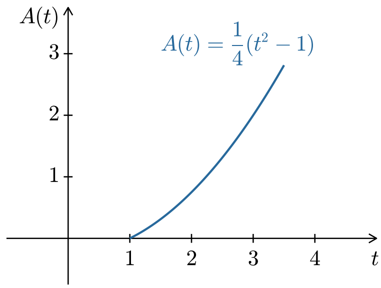
Die Trapezfläche können wir aus dem Produkt der Länge der Grundseite und der mittleren Höhe berechnen, siehe Abschnitt 9.5.1. Wir erhalten

$$A(t) = (t-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(t^2-1\right).$$

Damit gilt

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(t^2-1\right)$$

für die Integralfunktion.

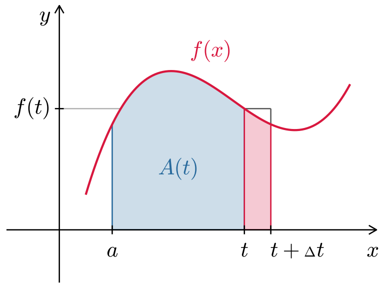


Die Ableitung der Integralfunktion stellt die Verbindung zwischen Differenzial- und Integralrechnung her. Die Berechnung der Ableitung erfolgt mittels Definition über den Grenzwert

$$A'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}.$$

Die Differenz der beiden Integralfunktionswerte besteht aus einem Flächenstück, das bei t startet und bei $t+\Delta t$ endet. Diese Differenz kann man für kleine Δt-Werte durch ein Rechteck mit Grundseite Δt und Höhe $f(t)$ annähern:

$$A(t+\Delta t) - A(t) \approx \Delta t\, f(t).$$



Insgesamt erhalten wir dann als Grenzwert

$$A'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\, f(t)}{\Delta t} = f(t).$$

Die Ableitung der Integralfunktion ist also gerade die Funktion f selbst. Dieser wichtige Zusammenhang ist im ersten Teil des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung formuliert.

Satz 9.1 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung I)
Die Ableitung der Integralfunktion

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist die Ausgangsfunktion f. Es gilt also

$$A'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = f(t).$$

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil beschreibt den Zusammenhang zwischen der Ableitung der Integralfunktion und der Ausgangsfunktion. Der zweite Teil, den wir in Abschnitt 9.2.3 behandeln, liefert eine Formel zur Berechnung von bestimmten Integralen.

Beispiel 9.4 (Ableitung der Integralfunktion)

In Beispiel 9.3 haben wir die Integralfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$ für $a = 1$ bestimmt:

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{2}x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(t^2 - 1\right).$$

Die Ableitung der Integralfunktion ergibt dann

$$A'(t) = \frac{1}{2}\,t = f(t).$$

Das Beispiel bestätigt also den ersten Teil des Hauptsatzes der Differenzialrechnung. ■

9.2.2 Stammfunktion

Die Ableitung der Integralfunktion ist die Ausgangsfunktion. Wenn wir also umgekehrt zu einer gegebenen Funktion die Integralfunktion berechnen wollen, müssen wir die Ableitung umkehren. Die Umkehrung der Differenziation bezeichnet man als Integration.

Definition 9.4 (Unbestimmtes Integral, Stammfunktion)

Eine Funktion F, deren Ableitung die Funktion f ergibt, für die also $F' = f$ gilt, bezeichnet man als unbestimmtes Integral oder Stammfunktion von f. Die Bestimmung einer Stammfunktion bezeichnet man als Integration. Sie ist gewissermaßen die Umkehrung der Differenziation:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Integration}} F(x), \qquad F(x) \xrightarrow{\text{Differenziation}} f(x).$$

Für ein unbestimmtes Integral verwendet man die Notation $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Für bestimmte und unbestimmte Integrale verwendet man dasselbe Integralsymbol. Der einzige Unterschied besteht darin, dass man zur Bezeichnung einer Stammfunktion keine Ober- und Untergrenze verwendet. Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktion klären wir in Abschnitt 9.2.3.

Manchmal wird anstelle der Sprechweise „integrieren“ auch „aufleiten“ gebraucht. Obwohl dieser Begriff sprachlich enger mit „ableiten“ verwandt ist, ist diese Sprechweise mit Vorsicht zu genießen. Während die Bestimmung der Ableitung ein rein handwerkliches Unterfangen mit festen Regeln ist, stellt die Integration eher eine Kunst dar, bei der ein gewisses Maß Intuition für den richtigen Ansatz notwendig ist.

Beispiel 9.5 (Integrationskonstante)

a) Eine Stammfunktion von $f(x) = x^3$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4$, da die Ableitung von F gerade wieder f ergibt.

b) Auch $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^3$, da die Ableitung von F ebenfalls f ergibt. ■

Merke 9.4 (Integrationskonstante)

Eine Funktion f hat keine eindeutig bestimmte Stammfunktion F. Da die Ableitung einer Konstanten null ist, kann man zu jeder Stammfunktion F eine beliebige Konstante C addieren und erhält wieder eine Stammfunktion:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Die Bestimmung einer Stammfunktion ist die Umkehrung der Ableitung. Somit können wir für alle Funktionen, die sich als Ableitung einer anderen Funktion ergeben haben, Stammfunktionen angeben. Bei den folgenden Beispielen beziehen wir uns auf Ergebnisse aus Kapitel 8.

Beispiel 9.6 (Stammfunktionen)

a) Die Ableitung von $F(x) = \mathrm{e}^x$ ist $F'(x) = \mathrm{e}^x$, somit gilt

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

für die Stammfunktionen der e-Funktion.

b) Da wir die Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ kennen, folgt

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

für die entsprechenden Integrale.

c) Die Ableitung von $F(x) = x^n$ ist $F'(x) = n\,x^{n-1}$. Dadurch erhalten wir

$$\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,x^n + C.$$

Dies gilt nicht nur für natürliche Hochzahlen n, sondern für alle reellen Zahlen $n \neq 0$.

d) Die Ableitung von $F(x) = \ln x$ ist $F'(x) = \frac{1}{x}$, also ist

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C.$$

Allerdings ist $\ln x$ nur für positive x-Werte definiert. Für negative x-Werte gilt

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\,(-1) = \frac{1}{x}.$$

Insgesamt erhalten wir also die Formel

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

für $x \neq 0$.

e) Die Ableitung von $F(x) = \arctan x$ ist $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Somit erhalten wir

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

für die Stammfunktionen. ■

Merke 9.5 (Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen)

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$	$= \mathrm{e}^x + C$	$\int \sin x \,\mathrm{d}x$	$= -\cos x + C$
$\int x^a \,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \cos x \,\mathrm{d}x$	$= \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$	$= \arctan x + C$

9.2.3 Bestimmtes Integral und Stammfunktion

Der erste Teil des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung besagt, dass die Integralfunktion A eine Stammfunktion von f ist. Da es zu einer Funktion f keine eindeutig bestimmte Stammfunktion F gibt, müssen wir noch klären, welche Stammfunktion F für die Flächenberechnung die passende Stammfunktion ist. Wegen

$$A(a) = \int_a^a f(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

brauchen wir genau die Stammfunktion, die an der Stelle a den Wert 0 hat. Das können wir dadurch erreichen, dass wir eine beliebige Stammfunktion F wählen und dann einfach den Funktionswert an der Stelle a abziehen:

$$A(t) = \int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x = F(t) - F(a).$$

Somit verfügen wir über eine einfache Strategie, um bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen zu ermitteln.

Satz 9.2 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung II)

Das bestimmte Integral einer Funktion f kann man mithilfe einer beliebigen Stammfunktion F von f bestimmen:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Man setzt die Obergrenze b in die Stammfunktion F ein und zieht davon den Wert der Stammfunktion an der Untergrenze a ab.

Die Notation mit dem senkrechten Strich bedeutet, dass bei der Stammfunktion F der Funktionswert an der Stelle b ermittelt wird und davon der Funktionswert an der Stelle a abgezogen wird:

$$F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Anstelle eines senkrechten Strichs kann man auch zwei eckige Klammern schreiben.

Beispiel 9.7 (Bestimmtes Integral und Stammfunktion)

a) Zur Berechnung des bestimmten Integrals $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$ kann man eine beliebige Stammfunktion von $f(x) = x$ verwenden. Die einfachste Wahl ist $F(x) = \frac{1}{2}\,x^2$. Damit ist

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit der Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 47.11$:

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\,x^2 + 47.11\right)\Big|_1^2 = 2 + 47.11 - \left(\frac{1}{2} + 47.11\right) = \frac{3}{2}.$$

Bei bestimmten Integralen kommt es also nicht auf die Integrationskonstante an.

b) Wenn wir das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$$

berechnen wollen, benötigen wir eine Stammfunktion. Wir wissen bereits, dass die Ableitung von $F(x) = \sin x$ die Funktion $f(x) = \cos x$ ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

Also ist umgekehrt $F(x) = \sin x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos x$. ▪

9.2.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Mittelwerte von Funktionen haben vielfältige praktische Anwendungen. Man benötigt sie in der Elektrotechnik, um sogenannte Effektivwerte und Wirkleistungen zu berechnen, siehe Abschnitt 9.6.1.

Definition 9.5 (Arithmetisches und quadratisches Mittel)

Bei einer über dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f bezeichnet man

- als Mittelwert oder arithmetisches Mittel den Wert

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

- als quadratisches Mittel den Wert

$$\overline{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}.$$

Die Sprechweise ist nicht einheitlich. Manchmal spricht man vom Mittelwert, manchmal auch nur kurz vom Mittel. Beide Begriffe beschreiben denselben Sachverhalt. Beim Begriff Mittelwert meint man in der Regel das arithmetische Mittel.