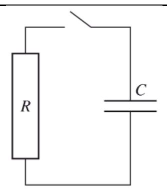
4. Regel von de l'Hospital

Zeigen Sie, dass diese Grenzwerte auf **unbestimmte Ausdrücke** führen und wenden Sie de l'Hospital an.		Kontrolle
4.1	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x^3 - 1}$	0
4.2	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)}$	$\frac{1}{2}$
4.3	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2 + 2x}$	0
4.4 e	$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\cos(ax) - 1}{x(e^x - 1)}$	$-\frac{a^2}{2}$
4.5	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ \ln(2x + 1)$	
4.6	$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{2x} - \frac{1}{1 - \cos(2x)}$	
4.7	$\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$	$\frac{m}{n}(-1)^{m-n}$

5. Tangentensteigung und lineare Approximation

5.1	Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Sinus-Funktion die x-Achse? Berechnen Sie dazu die Tangente an sin(x) im Punkt $x = 0$, Stellen Sie die Tangentengleichung auf und berechnen den Steigungswinkel der Geraden.	$\pi/4$
5.2	Linearisieren Sie die Funktion $f(x) = e^x + \sin(x)$ an der Stelle $x = 0$ und geben Sie einen Näherungswert für $f(x = 0{,}001)$ an.	$t(x) = 1 + 2x$ 1,002

6. Geschwindigkeit, momentane Änderungsraten in Anwendungen

6.1	**Entladestrom:** Ein mit der Ladung Q_0 geladener Kondensator mit der Kapazität C wird ab dem Zeitpunkt $t = 0\ s$ über einen Widerstand der Größe R entladen. Dann berechnet sich die zum Zeitpunkt t auf dem Kondensator befindliche Ladung $Q(t)$ über folgende Formel. Berechnen Sie daraus den von der Zeit abhängigen Entladestrom $I(t)$ als Momentanänderung der Ladung. $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad , \ I(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}(t) = \dot{Q}(t)$	
6.2	**Geschwindigkeit:** Momentane Höhe eines vertikal hochgeworfenen Balls mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist: $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{mit} \quad g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Momentan-)Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t: Wann wird die maximale Höhe erreicht?	

7. Monotonie und Krümmung

In welchen Intervallen ist $f(x)$ (streng) monoton fallend/wachsend (Argumentieren Sie mit der 1. Ableitung) und in welchen Intervallen ist die Krümmung konvex/konkav (Argumentieren Sie mit der 2. Ableitung)?

7.1	$f(x) = x^2 - 4x + 1$	
7.2	$f(x) = 16x^3 - 54x^2 + 2x + 3$	
7.3	$f(x) = xe^{-x}$	

8. Extremwertaufgaben

8.1	**Abstand Parabel Ursprung:** Welcher Punkt auf dem Parabelstück $y = -x^2 + 4, 0 \le x \le 2$, hat maximalen Abstand von Nullpunkt (0,0)	
8.2	Bestimmen Sie das globale Minimum und Maximum von $f(x) = xe^{-x}$ im Intervall [0, 8].	
8.3	Bestimmen Sie im Intervall [0, 4] das globale Maximum und Minimum von $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4, & x \le 3 \\ x^2 - 8x + 16, & x > 3 \end{cases}$	
8.4	Tipps Weiterüben mit Lösungen: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/a/ep/epindex.html	

9. Kosten-Optimierung

9.1	**Gewinnmaximierung:** Eine Unternehmung produziert (pro Monat) x Tsd Stück eines Produktes mit davon abhängigen Gesamtkosten $$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98 \quad [€] \quad (0 \le x \le 12 \text{ Tsd Stück } = \text{Kapazitätsgrenze})$$ Zeigen Sie, dass die Gesamtkosten tatsächlich ansteigen, wenn man mehr produziert. Das Produkt wird zu einem konstanten Preis von $p = 60$ € pro Stück abgesetzt. Bestimmen Sie den damit erzielten maximalen Gewinn. Hinweis: Gewinn = Ertrag – Kosten.	$x_G = 8$ Stück $p_G = 186.25$ $G_{max} = 158$ €
9.2	**Lagerkosten** Für ein Produkt ist der wöchentliche Bedarf gleich b Stück. Die Lagerkosten sind Fixkosten f plus variable Kosten l pro Stück und Woche. Eine Anlieferung verursacht Kosten in der Höhe a (unabhängig von der Stückzahl). Bestellt man x Stück pro Anlieferung, so benötigt man $n = b/x$ Lieferungen und die Transportkosten sind $n\,a = b\,a/x$. Verringert sich das Produkt kontinuierlich, so muss es im Mittel die halbe Zeit zwischen zwei Lieferungen gelagert werden, somit sind die Lagerkosten $b \cdot \frac{l}{2n} + f = l\frac{x}{2} + f$. Die Gesamtkosten für Transport und Lagerung sind somit $K(x) = \frac{ab}{x} + \frac{lx}{2} + f$. Bei welcher Bestellmenge x entstehen minimale Kosten?	

10. Marktgleichgewicht im Duopol

10.1	Die Nachfragefunktion für ein Produkt sei $D(p) = 100 - 0.1p$. Das Produkt wird von zwei Herstellern angeboten, die Mengen x_1 bzw. x_2 zu den Kosten von $C_1(x_1) = 100 + x_1$ bzw. $C_2(x_2) = 50 + 0.5x_2^2$ produzieren. a) Finden Sie die Menge $A_1(x_2)$, die der erste Anbieter produzieren soll, um seinen Gewinn $P_1(x_1) = D^{-1}(x_1 + x_2)x_1 - C_1(x_1)$ für festes x_2 zu maximieren. b) Finden Sie die Menge $A_2(x_1)$, die der zweite Anbieter produzieren soll, um seinen Gewinn $P_2(x_2) = D^{-1}(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2)$ für festes x_1 zu maximieren. c) Wenn die beiden Anbieter in diesem Monat die Mengen $(x_1, x_2) = (20{,}30)$ produzieren, welche optimale Menge errechnet jeder Anbieter für sich für den nächsten Monat? Wird dieser Vorgang über zehn Monate wiederholt, was sind die produzierten Mengen nach diesem Zeitraum? d) Finden Sie das Marktgleichgewicht, das $x_1 = A_1(x_2), x_2 = A_2(x_1)$ erfüllt.