Mathematatik für Informatiker 2 – SS 2025
Studiengang Angewandte Informatik

Kapitel 2: Folgen

Lernziele:

- Kennen den Begriff der Zahlenfolge und den Unterschied zur Funktion
- Explizite und rekursive Bildungsvorschrift von Zahlenfolgen herleiten
- Die Begriffe monoton, beschränkt, konvergent, divergent für Folgen und Funktionen kennen
- Erkennen, ob eine Folge monoton und/oder beschränkt ist
- Elementare Grenzwerte der Grundfunktionen (auswendig) kennen
- Grenzwerte von Folgen berechnen
- Rechenregeln für Grenzwerte kennen und anwenden können

Funktion bzw. Abbildung (Mathematik 1)

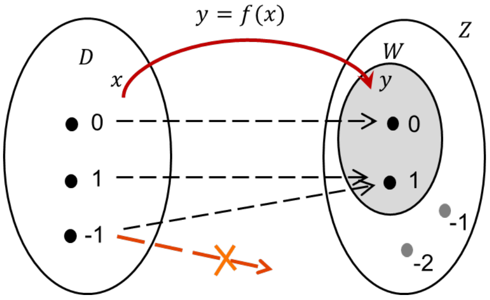
[Teschl1, 5.2, Papula1 Kap. III.1, Dürrsch Kap2]

Funktionen sind Modelle der Wirklichkeit. In Naturwissenschaft, Technik, Informatik, Wirtschaftswissenschaften muss oft beschrieben werden, in welcher Weise eine Größe von dem Wert einer anderen Größe abhängt. Wir betrachten einige solche e Beispiele in der Vorlesung. Hierzu nun die grundlegenden mathematischen Begriffe.

Definition: Funktion bzw. Abbildung

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y$$

$$f: \begin{cases} D \to W \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$



Definition: Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element $y = f(x)$ der Wertemenge W zuordnet (eindeutige Abbildung von D nach W)

- $x \triangleq$ **unabhängige Variable**, Veränderliche, **Argument**
- $y \triangleq$ **abhängige Variable**, Funktionswert
- $f(x)$ = Funktionsterm, z.B. $f(x) = x^2$

Auf die Bezeichner kommt es nicht an.

Betrachtet man mehrere Funktionen, so schreibt man für die Definitionsmenge D zur Verdeutlichung D_f.

Die Zuordnung f ist auch charakterisiert als **Menge** der Zuordnungspaare

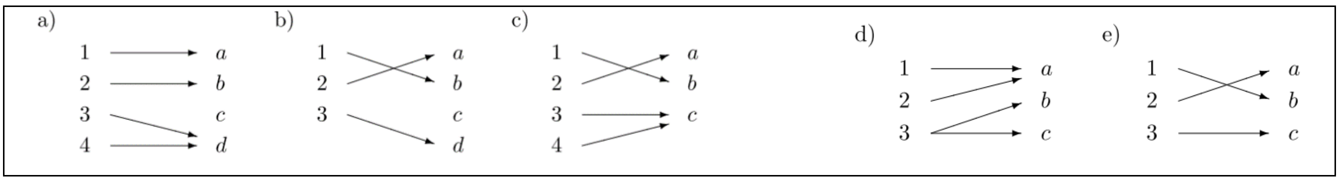
$$\{(x, y) \mid x \in D, y = f(x) \in W\}$$

Lässt man mehrdeutige Zuordnungen zu: Relationen.

Die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv

$f: D \to Z$ **surjektiv** Französ: „sur" = „auf"	Jeder Wert der Zielmenge kommt als „Partner" vor: $f(D) = Z$ Zu **jedem** $y \in Z$ gibt es (mind) einen Urbildwert $x \in D$, so dass $y = f(x)$ Durch geeignete Einschränkung von Z ist Surjektivität erzwingbar.	**Jedes** Element der Zielmenge wird von **mindestens** einem Pfeil getroffen.
$f: D \to Z$ **injektiv** = eineindeutig = (eindeutig) **umkehrbar** = invertierbar	Kein Element der Zielmenge kommt mehrfach als Partner vor. Jeder Wert der Bildmenge $y \in W = f(D)$ hat **genau** einen **Urbildwert**, d.h. es gibt **genau** ein $x \in D$, so dass $y = f(x)$	**Kein** Element der Zielmenge wird **mehrfach** von einem Pfeil getroffen.
$f: D \to Z$ **bijektiv** = injektiv **und** surjektiv = 1-zu-1-Abbildung	**Jeder** Wert der Zielmenge kommt **genau einmal** als Funktionswert vor.	Jedes Element aus Zielmenge durch **genau einen** Pfeil getroffen.

1 Übung: Begriffe Funktion oder (nur) Relation? injektiv, surjektiv, bijektiv?



Begriff der Zahlenfolge

Funktion

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y$$

Folgen sind spezielle Funktionen

Beispiel: Verdopplungsfolgen

$(a_n) = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \ldots$ (mit Startwert 1)

$(b_n) = 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48, \ldots$ (mit Startwert 3)

Explizit: $a_n = 2^n$ bzw. $b_n =$ ________

Rekursiv: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ bzw. $b_n =$ ________
mit $a_0 = 1$ mit $b_0 =$

Teilfolge der geraden Glieder

$(a_{2k}) = a_0, a_2, a_4, a_6, \ \ldots = 1{,}4{,}16{,}64, \ldots$

(Reelle) Folge
= Eine geordnete Abfolge von Zahlen,
bezeichnet mit (a_n) bzw. $\langle a_n \rangle$
= Funktionsvorschrift der natürlichen Zahlen nach $\mathbb{R}$
= Eine Funktion mit Definitionsbereich $D = \mathbb{N}_0$

Rekursive Folge: Bildungsgesetz benutzt vorhandene Glieder (greift auf **Vorgänger** und/oder Vor-Vorgänger zurück).

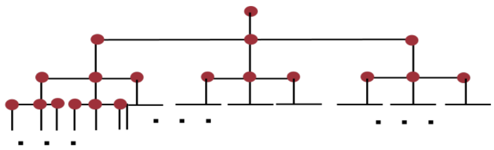
Explizites Bildungsgesetz = Formel der Funktionsvorschrift

$$a_n = f(n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Teilfolge: Beliebige Anzahl (auch ∞ viele) Folgeglieder weglassen

Der Index-Bezeichner ist unerheblich: Man kann die Folge (a_n) auch als (a_k) bzw. (a_m) etc. ausdrücken. Auch der **Startindex** ist an sich unerheblich. Bezeichner und Startindex wirken sich jedoch auf das Bildungsgesetz (Funktionsvorschrift) aus.

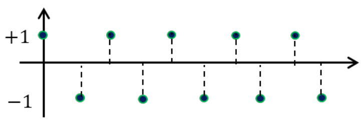
2 Einfache Beispiele für Exponentielles Wachstum bzw. Zerfall

2.1	Gegeben sei die Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ Geben Sie an: Die rekursive Bildungsvorschrift: Die explizite Bildungsvorschrift: Wie könnte man die Folge graphisch darstellen? Wie würde man ihre Monotonie ausdrücken (verbal, als Formel)? 
2.2	**Über die explizite Bildungsvorschrift können wir auch sehr späte Folgeglieder direkt berechnen:** a) Eine Produktionsmenge wird jedes Jahr um 2 % erhöht. Wie groß ist die jährliche Menge, wenn wir heute mit 10 000 Stück starten, nach 35 Jahren? (Es hat sich dann nahezu verdoppelt). b) **Bäume:** Der Baum hat die „Levels“ (Tiefe) $m = 0, 1, 2 \ldots$ Wie viele Blätter hat das Level 4? … das Level m? Auf welchem Level m sind es mindestens 1 Mio Knoten? 
2.3	**Geometrische Folge: Konstantes Vielfaches des Vorgängers ⟷ Exponentielles Wachstum oder Zerfall**

Alternierende Folgen

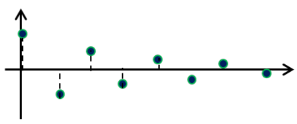
= Die Glieder **wechseln** ständig ihr **Vorzeichen**.

$(a_n) = +1, -1, +1, -1, +1, -1, , \ldots$



Bildungsgesetz: $a_n =$

$(b_n) = +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \ldots$



Bildungsgesetz: $b_n =$

Typische Form des Bildungsgesetzes:

3 Beispiele: Rekursive Folgen

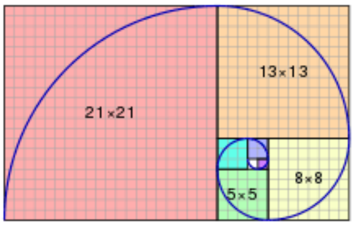
3.1

Fibonacci-Folge

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ (n \geq 2) \ \text{ mit den Anfangsbedingungen } a_1 = 0, \ a_2 = 1$$

$$(a_n) = 0, \ 1, \ 1, 2, \ 3, \ 5, 8, \ 13, \ 21, \ 34, \ldots$$

viele Formen des Wachstums in der Natur mit Fibonacci-Zahlen beschreiben. Verwandtschaft mit dem goldenen Schnitt.



Man kann diese Rekursion auch durch eine explizite Vorschrift ausdrücken. Darauf verzichten wir an dieser Stelle.

3.2

Heron-Folge:

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

$(a_n) = 1, \ 1.5, \ 1.4166, \ 1.4142, \ldots$. Sie nähert sich dem Wert $\sqrt{2}$ beliebig genau an.

4 Eigenschaften konvergenter Folgen. Begründen Sie:

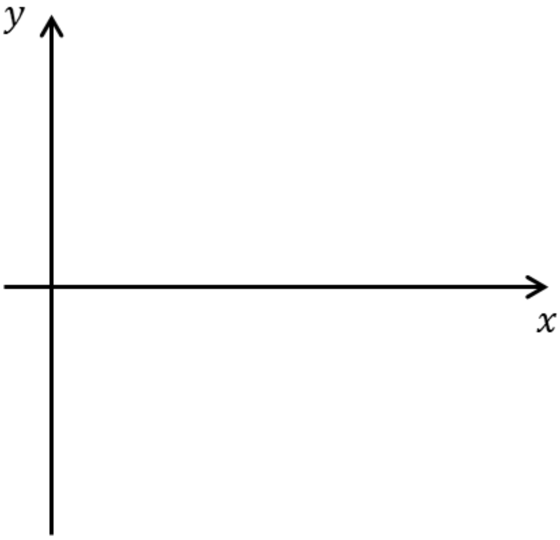
1. Finden wir **2 Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten**, so divergiert die Folge selbst.

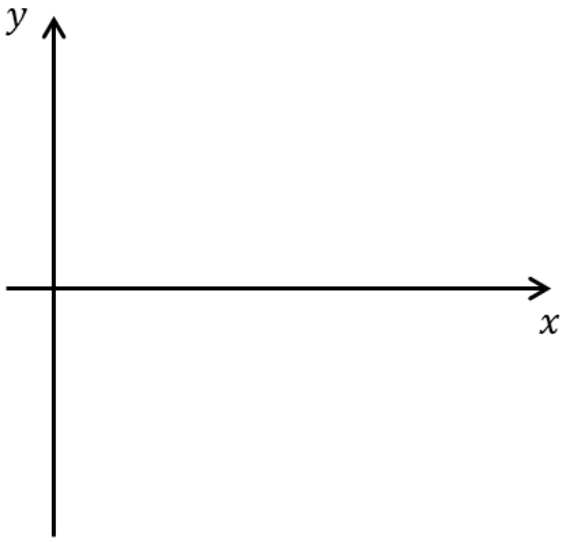
2. **Konvergiert eine Folge, so konvergiert auch jede Teilfolge (gegen denselben GW).**

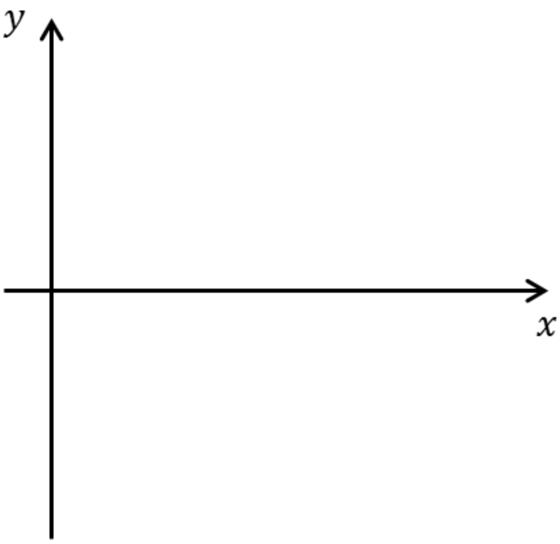
3. **Der GW einer Folge ist eindeutig bestimmt.**

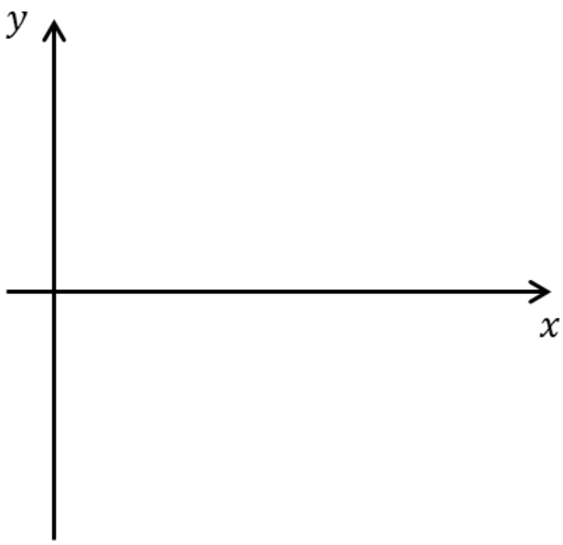
Veranschaulicht man sich einen Grenzwert grafisch als beliebig dünnen „Schlauch“, in den alle späten Folgeglieder fallen müssen, so sind diese Eigenschaften konvergenter Folgen nahezu selbstverständlich. Machen Sie sich dies ggf. anhand passender Skizzen (z.B. der vorigen Beispiele) deutlich!

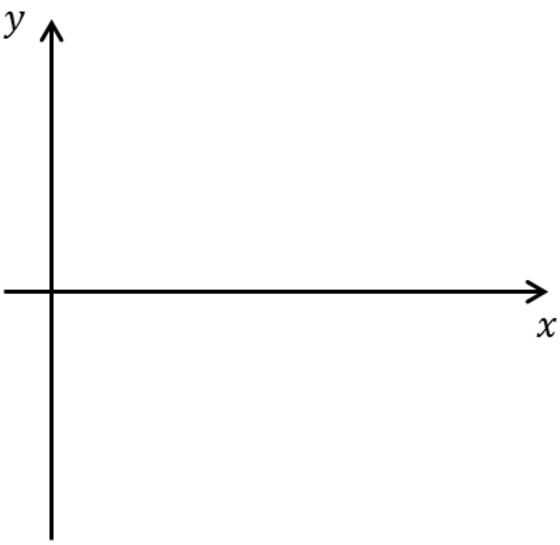
Verhalten von Folgen bzw. Funktionen – Qualitative Unterschiede

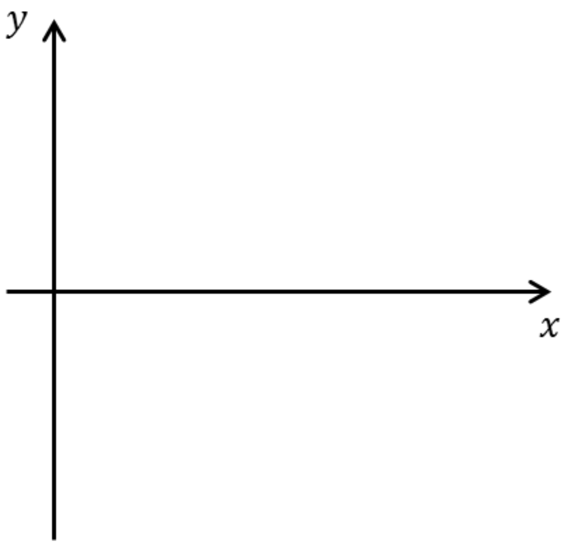












Fragen zum Studierauftrag

Gegeben die Folge $15, 30, 60, 120, 240, \ldots$, was ist a_n?
Hinweis: es ist $a_0 = 15$.

A) $a_n = n + 15$
B) $a_n = 15 \cdot 2^n$
C) $a_n = 15 \cdot 2n$
D) $a_n = 15 \cdot n^2$
E) Keine der genannten Antworten.
F) Ich weiß es nicht.

Gegeben die Folge $a_n = \frac{5}{10^n}$. Welches ist die korrekte, rekursive Definition der Folge?

A) $a_n = 0{,}1 \cdot a_{n-1}$ mit $a_0 = 5$
B) $a_n = 10 \cdot a_{n-1}$ mit $a_1 = 5$
C) $a_n = 5 \cdot a_{n-1}$ mit $a_0 = \frac{1}{10}$
D) $a_n = 5 \cdot a_{n-1}$ mit $a_1 = 0{,}5$
E) Keine der genannten Antworten.
F) Ich weiß es nicht.

Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

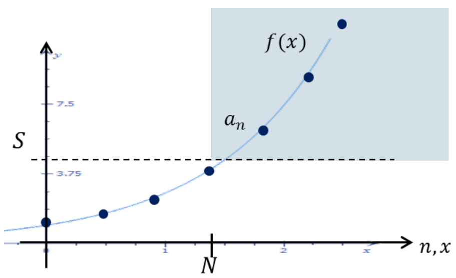
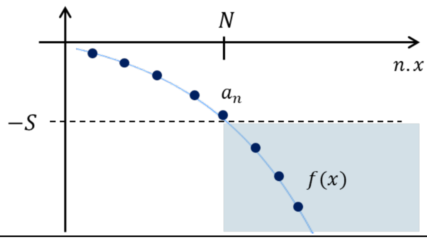
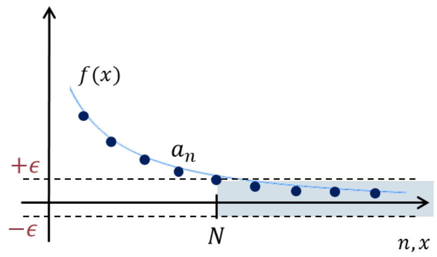
A) Die Folge ist beschränkt.
B) Die Folge ist monoton.
C) Die Folge ist konvergent.
D) Die Folge ist eine Nullfolge.

Es wird behauptet:
A1: Jede beschränkte, monoton fallende Folge ist eine Nullfolge.
A2: Jede Nullfolge ist monoton fallend und beschränkt.

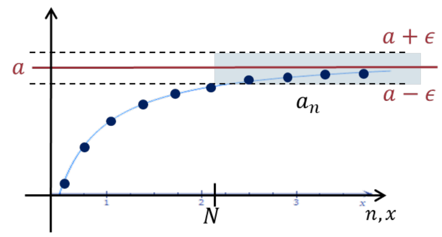
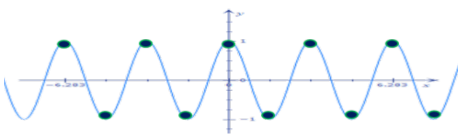
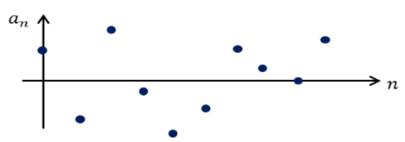
A) Nur A1 ist korrekt.
B) Nur A2 ist korrekt.
C) Sowohl A1 als auch A2 sind korrekt.
D) Keine der beiden Aussagen ist korrekt.

Grenzverhalten von Folgen bzw. von Funktionen $f(x)$ bei $x \to \pm\infty$ [Teschl1 Abs. 6.1]

Eine Folge kann gegen einen festen Wert konvergieren oder divergieren. Bei der Divergenz können wir noch unterscheiden, ob der Grenzwert unbestimmt ist oder ob die Folge gegen $\pm\infty$ divergiert, dann sprechen wir von bestimmter Divergenz.
Da Folgen ja Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$ sind, lässt sich der Grenzwertbegriff außerdem direkt auf reelle Funktionen übertragen.

<table>
<tr><th>Typisches Verhalten</th><th>Mathematische Symbole</th><th>Damit ist exakt gesprochen gemeint</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1a) Bestimmte Divergenz gegen den GW $+\infty$ *)
</td><td>Jeweils <u>zwei Arten</u> der mathematischen Schreibweise (<u>Sprechweisen</u> s. Folgeseite)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$a_n \to \infty$ (für $n \to \infty$)</td><td>Egal wie groß wir eine Schranke S vorgeben, irgendwann (ab einem zu S passenden Index) liegen <u>alle</u> späteren Folgeglieder darüber:
Für alle $S > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > S$ für alle $n > N$</td></tr>
<tr><td>$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$f(x) \to \infty$ (für $x \to \infty$)</td><td>Für alle $S > 0$ gibt es ein $x_S \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > S$ für alle $x > x_S$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1b) Bestimmte Divergenz gegen den GW $-\infty$ *)
</td><td>$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$
$a_n \to -\infty$ (für $n \to \infty$)</td><td>Für alle $S > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < -S$ für alle $n > N$</td></tr>
<tr><td>$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$
$f(x) \to -\infty$ (für $x \to \infty$)</td><td>Für alle $S > 0$ gibt es ein $x_S \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < -S$ für alle $x > x_S$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2a) Konvergenz gegen den GW 0
</td><td>$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$a_n \to 0$ (für $n \to \infty$)</td><td rowspan="4">Grenzwerte $a \in \mathbb{R}$ (z.B. $a = 0$)
Abstand der Folgeglieder a_n zu a wird beliebig klein, sofern n nur groß genug ist.

Egal welche <u>noch so kleine</u> Genauigkeit ϵ wir vorgeben, irgendwann (ab einem zu ϵ passenden Index N) halten <u>alle</u> späteren Folgeglieder diese Genauigkeit ein, d.h. ihr Abstand zu a ist kleiner ϵ.
Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N$
Anschaulich: ab einem geeigneten Index liegen alle nachfolgenden Folgeglieder im vorgegebenen ϵ –Streifen um a.

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $x_\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle $x > x_\epsilon$
[Alternative (unten): über Folgen]</td></tr>
<tr><td>$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$f(x) \to 0$ (für $x \to \infty$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2b) Konvergenz gegen den GW $a \in \mathbb{R}$
</td><td>$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
$a_n \to a$ (für $n \to \infty$)</td></tr>
<tr><td>$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$
$f(x) \to a$ (für $x \to \infty$)</td></tr>
<tr><td>3) Unbestimmte Divergenz (= kein GW)

</td><td>$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ exist. nicht}$$
Hierfür gibt es Beispiele mit bzw. ohne „Häufungspunkte“.
$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ exist. nicht}$$</td><td>Divergenz über Teilfolgen nachweisen:
▪ Finden wir 2 Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten, so divergiert die Folge selbst. Hinweis: Bei VZ-Wechsel wie $(-1)^n$ untersuchen wir oftmals die Teilfolgen der geraden bzw. ungeraden Glieder.
▪ Finden wir eine divergente Teilfolge, so divergiert die Folge selbst.</td></tr>
</table>

Alles Gesagte für $x \to +\infty$ kann man für Funktionen analog auf den Fall $x \to -\infty$ übertragen!

Die genaue Sprechweise zu den zwei mathematischen Symbolen für Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

sprechen wir: **„der <u>Grenzwert</u> der Folge a_n (für n gegen Unendlich) <u>ist gleich</u> a“.**

$$a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty)$$

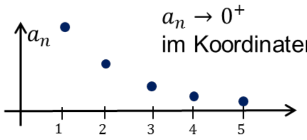
sprechen wir: **„die Folge a_n <u>konvergiert (oder strebt) gegen</u> den (Grenz-)Wert a (für n gegen Unendlich).**

Angabe der <u>Richtung</u> der Annäherung: a^+ (analog: a^-)

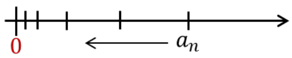
$\boxed{a_n \to a^+}$

Kurzschreibweise für $a_n \to a$ wobei $a_n > a$

$a_n \to 0^+$ im Koordinatensystem



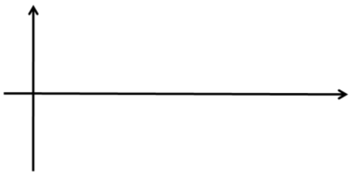
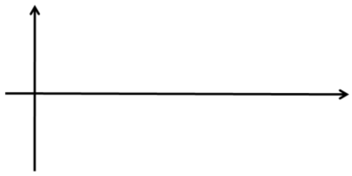
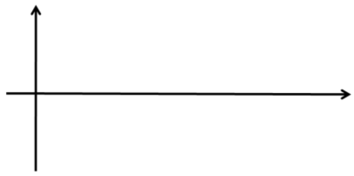
$a_n \to 0^+$ am Zahlenstrahl



Folgeglieder bleiben <u>größer</u> als der GW. Die Folge a_n nähert sich von <u>oben</u> bzw. von <u>recht</u>s an den Grenzwert a an.

5 Beispiele: Eine noch so große Schranke übertreffen bzw. einem Wert beliebig nahe kommen…

5.1	Geben Sie konkrete Beispiele für Funktionsvorschriften $f(x)$ bzw. Bildungsgesetze von Folgen (a_n), die zu den Abbildungen passen könnten und formulieren Sie deren Verhalten für $x \to \infty$ mit den zwei Grenzwert-Symbolen.
5.2	Für $a_n = e^n$ bestimme man den Index N, ab dem alle späteren Folgeglieder a_n größer als die Schranke $S = 1\ \text{Mio}$ sind Weil dieses für jedes noch so große S möglich ist, gilt:
5.3	Für $a_n = \frac{1}{n}$ bestimme man den Index N, ab dem der Abstand von a_n zum Wert 0 höchstens $\epsilon = 0.001$ beträgt. Weil dieses für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ möglich ist, gilt:
5.4	Für $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ bestimme man den Index N, ab dem der Abstand von a_n zum Wert 1 höchstens $\epsilon = 0.001$ beträgt. Weil dieses für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ möglich ist, gilt:

5.5	Skizzieren Sie die folgenden **alternierenden Folgen**? Beschreiben Sie ihr Verhalten für $n \to \infty$: $a_n = (-1)^n$ $\qquad$ $b_n = (-1)^n n$ $\qquad$ $c_n = (-1)^n \frac{1}{n}$   
5.6	Berühmt ist die Euler'schen Zahl e als folgender Grenzwert: $\boldsymbol{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818285}$ (Sehr langsam: Bei n = 1000 erst zwei Nachkommastellen erreicht)

Über eine Folge ist bekannt, dass sie beschränkt ist und Sie können zwei Teilfolgen finden, die gegen den gleichen Grenzwert a konvergieren.
Dann ist die Folge:

A) Divergent.
B) Konvergent mit Grenzwert a.
C) Konvergent, aber möglicherweise mit einem anderen Wert als a.
D) Ich weiß es nicht.

Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & wenn\ n\ gerade \\ 3 - \frac{1}{n} & wenn\ n\ ungerade \end{cases}$$

Welche Aussage ist korrekt?

A) Die Folge a_n konvergiert gegen 1.
B) Die Folge a_n konvergiert gegen 3.
C) Die Folge a_n konvergiert gegen einen Wert zwischen 1 und 3.
D) Die Folge a_n divergiert bestimmt.
E) Die Folge a_n divergiert unbestimmt.

Rechenregeln für Grenzwerte

Die folgenden Rechenregeln sind für die Grenzwerte von Funktionen notiert, gelten aber vollkommen analog auch für die Grenzwerte von Folgen, wenn statt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eingesetzt wird.

Den Begriff der Stetigkeit bzw. einer „stetigen“ Funktion lernen wir erst im nächsten Kapitel kennen. Hier reicht es aus: alle Grundfunktionen sind in Ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Rechnen mit Grenzwerten

GW von Summen, Produkte, Quotienten, Potenzen berechnen: Sind die GW auf der rechten Seite **endlich**, dann existiert auch der GW der linken Seite. Auch falls $x_0 = \pm\infty$.

Summen, Produkte:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Quotienten: solange Nenner $\neq 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad (\text{Nenner} \neq 0)$$

Für alle im Punkt „stetigen“ f, insb. Potenzen

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

Die Grundfunktionen x^p, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$ sind in jedem Punkt aus D stetig.

Erlaubtes Rechnen mit $\pm\infty$

Bestimme Ausdrücke mit Unendlich
… ergeben sich aus dem Verlauf der Grundfunktionen (dabei sei $c > 0$)

$\infty + \infty = \infty$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
$\infty \pm c = \infty$	$(-\infty) \pm c = -\infty$
$c \cdot \infty = \infty$	$c \cdot (-\infty) = -\infty$
$(-c)\cdot\infty = -\infty$	$(-c)\cdot(-\infty) = +\infty$
$\infty\cdot\infty = \infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

$\frac{1}{\infty} = 0^+$ bzw. $\frac{1}{-\infty} = 0^-$ bzw. $\frac{0^\pm}{\infty} = 0^\pm$

$\frac{1}{0^+} = \infty$ bzw. $\frac{1}{0^-} = -\infty$ bzw. $\frac{\infty}{0^+} = \infty$

$\infty^p = \infty \ (p > 0)$ bzw. $\infty^\infty = \infty$

$e^\infty = \infty$ bzw. $e^{-\infty} = 0$

$q^\infty = \infty$ bzw. $q^{-\infty} = 0 \quad (q > 1)$

$\ln 0^+ = -\infty$

bzw. Vorsicht

Unbestimmte Ausdrücke
… es kann alles Mögliche passieren. Spezialverfahren!

$\infty - \infty$

$0\cdot\infty$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{0}{0}$

∞^0, 0^0

1^∞

Regel von de l'Hôspital

6 Beispiele: Rechenregeln für Grenzwerte

Wir betrachten die Folge $a_n = \sqrt{n^3 + \ln(n) - e^{-n}}$

Rechnen mit Grenzwerten:

Erlaubtes Rechnen mit $\pm\infty$:

Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \exp\left(\frac{n^2}{n} - \sqrt{n}\right)$$

Unter Verwendung der oben genannten Rechenregeln für Grenzwerte, was können Sie über den Grenzwert der Folge sagen? Konvergiert oder divergiert die Folge?

A) Die Folge a_n konvergiert.
B) Die Folge a_n divergiert bestimmt.
C) Die Folge a_n divergiert unbestimmt.
D) Keine Aussage möglich.

Betrachten Sie zwei Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3$.

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n - \sin(\pi \cdot a_n)$

A) 0
B) -6
C) $-\infty$
D) Keine Aussage möglich.

Jemand macht folgende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^n \\
&= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} (-1)^n \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis kann nicht stimmen, da die Folge $(-1)^n$ nicht konvergent ist.
Wo hat diese Rechnung einen Fehler?

A) Beim Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile.
B) Beim Gleichheitszeichen in der dritten Zeile.
C) Beim Gleichheitszeichen in der vierten Zeile.
D) Die Rechnung hat an diesen Stellen keinen Fehler, das Problem liegt woanders.

(Bauer)

Es seien a_n und b_n konvergente Folgen. Was ist das stärkste der folgenden logischen Symbole, das anstelle von $\boxed{?}$ im Ausdruck

(a_n) und (b_n) konvergent $\boxed{?}$ $(a_n + b_n)$ konvergent

eingesetzt werden kann?

A) $\Rightarrow$
B) $\Leftarrow$
C) $\Leftrightarrow$
D) Keines von diesen.

(Bauer)

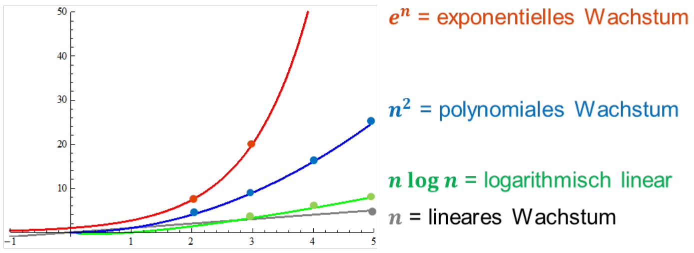
Wachstum im Vergleich – Größenverhältnisse beurteilen können

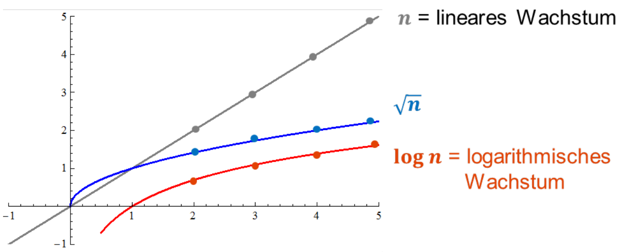
7 **Wachstum im Vergleich** (z.B. Laufzeit von Algorithmen in $\mu\mathrm{sec}$ in Abh. der zu verarbeitenden Datenmenge n)

Ordnen Sie die folgenden Werte nach aufsteigender Größe (für großes $n \in \mathbb{N}$:

10^n, n^2, 2^n, n^3, $n!$, $\sqrt{n}$, n^n, $\sqrt[3]{n}$, e^n, n, $\log n$, $n \log n$, $n^2 \log n$, $n \log(n^2)$

Wachstum im Vergleich





Die meisten Grundfunktionen wachsen unbeschränkt, jedoch mit ganz unterschiedlicher „Geschwindigkeit".

Es ist wichtig, das Wachstum im Vergleich zu kennen.

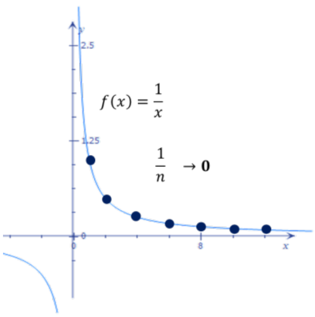
Exponentielles Wachstum ist sehr viel rasanter als z.B. polynomielles Wachstum. Damit wir die Werte e^n einzeichnen können, mussten wir hier sogar den y-Maßstab verkleinern!

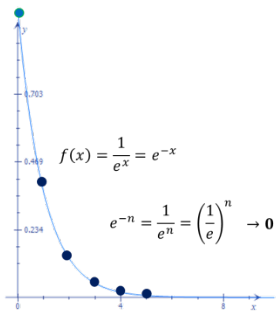
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$
n^2	100 $\mu\mathrm{sec}$	2500 $\mu\mathrm{sec}$	10000 $\mu\mathrm{sec}$
2^n	1024 $\mu\mathrm{sec}$	36 Jahre	Jahre ?

Logarithmus wächst viel geringer als linear. Beispiel?

Werten wir nur natürliche Zahlen n aus, erhalten wir sog. Zahlenfolgen (grafisch: die Punkte anstelle der durchgezogenen Linie)

Zerfall





Durch **Kehrwerte** erhalten wir wichtige Beispiele **fallender** Funktionen bzw. Zahlenfolgen.

Wächst der Nenner unbeschränkt, so wird der Kehrwert beliebig klein (beliebig nahe an die 0).

Beispiele:

$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^p}, \frac{1}{\log x}, \frac{1}{2^x}, e^{-x}$

bzw.

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n^p}, \frac{1}{\log n}, \frac{1}{2^n}, e^{-n}$

8 **Wachstum im Vergleich:** Logarithmisches, lineares, quadratisches, polynomielles, exponentielles, faktorielles Wachstum

Wachstum im Vergleich

$$\ln n < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \cdots < 2^n < e^n < n! < n^n \quad \text{(sofern } n \text{ gross genug)}$$

Stirling-Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Folglich für die Kehrwerte (Verfall) im Vergleich:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^3} > \cdots > \frac{1}{2^n} > \frac{1}{e^n} > \frac{1}{n!} > \frac{1}{n^n} \quad \text{(sofern } n \text{ gross genug)}$$

9 Ergänzungen

9.1	**Ein Blick auf die „Ordnung" des Wachstums einer Folge in $\boldsymbol{O}$-Notation** [Teschl Abs. 8.3] $2n^2 + 3n - 1 = O(n^2) \quad (*)$ $a_n = O(b_n)$ schreiben wir, wenn $\lvert a_n \rvert \leq C \cdot b_n$ mit einer Konstanten C für alle $n \geq n_0$ (nur späte Werte interessieren). Damit schätzen wir Wachstum von a_n (bis auf Vielfaches) durch das Wachstum von b_n ab. Nachweis von $(*)$ Bestimmen Sie die Wachstumsordnung in O-Notation für a) $a_n = 5n - 3\ln(n)$ b) $a_n = 9\,n\ln(n) + 9n^2$ c) $a_n = 5n^3 + 3 \cdot 2^n$ Ausblick: Stirling-Formel für das Wachstum der Fakultät: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
9.2	**Monotonie-Nachweis:** Da Folgen auch nur Funktionen sind, könnten wir Monotonie über die 1. Ableitung nachweisen (späteres Kapitel). Bei einfach gebauten Folgen gelingt dies auch durch den Nachweis der Gültigkeit der Ungleichung $\boldsymbol{a_n < a_{n+1}}$ **Beispiel:** $a_n = \frac{n}{n+2}$ Vermutung: (a_n) ist streng monoton steigend. Beweis: Zeige $a_n < a_{n+1}$ ist wahr.

10 Die O-Notation und Grenzwerte

[Teschl Abs. 8.3]

Mit dem Grenzwert-Begriff haben wir ein weiteres mächtiges Werkzeug für O-Abschätzungen:

> Wenn die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ einen endlichen Grenzwert hat, so ist sie beschränkt und folglich
> $$a_n = O(b_n)$$

Beispiel: Polynom im Vergleich zu seiner höchsten Potenz:

$$\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2} \to 2 \quad \text{(endlicher GW)} \qquad \Longrightarrow \qquad 2n^2 + 3n - 1 = O(n^2)$$

Später zeigen wir z.B. mit der Regel von de l'Hospital auch kompliziertere Grenzwerte wie

$$\frac{\ln(n^3 + e^n)}{n} \to 1 \quad \text{(endlicher GW)} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(n^3 + e^n) = O(n)$$

Wann und wozu benutzen wir Grenzwerte?

1. das Verhaltenvvon Funktionen am Rand des Definitionsbereiches beschreiben können (Ersatz für Funktionswerte): Bei vielen Prozessen (Wachstum/Zerfall, Kosten-/Gewinnentwicklungen…) kommt es auf das Verhalten für sehr große bzw. sehr kleine Wert an.
2. Wo zwei Abschnitte einer Funktionsdefinition aufeinanderstoßen: sog. stetige und unstetige Prozesse / Funktionen (mit Sprüngen, Polstellen) unterscheiden können.
3. die Grundlage der Differentialrechnung beherrschen, mit der wir Änderungsverhalten von Funktionen beurteilen, z.B. Extremwerte ermitteln und vieles mehr.