$$a_n = 1 + \frac{(a_{n-1} - 1)^2}{2a_{n-1}},$$

und somit ist in jedem Fall $a_n \geq 1$ für $n > 1$ (Induktion). Analog zeigt die Umformung

$$a_{n-1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{a_{n-1}}\right),$$

dass $a_{n-1} - a_n \geq 0$ ist, falls $a_{n-1} \geq 1$. Für $n > 1$ ist unsere Folge also größer gleich eins und monoton fallend, somit konvergent nach Satz 6.17.

Was ist aber der Grenzwert a? Um ihn zu berechnen, wenden wir einen kleinen Trick an. Wir berechnen den Grenzwert beider Seiten in der Rekursion: $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$. Multiplizieren wir die Gleichung $a = \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})$ mit a, so erhalten wir eine quadratische Gleichung, deren Lösungen ± 1 sind. Der Grenzwert ist also $a = 1$. (Da alle Folgenglieder ≥ 1 sind, ist $a = 1$ und nicht $a = -1$.)

Nun haben wir eine Folge a_n, die gegen 1 konvergiert. Wie sollen wir damit Wurzeln berechnen? Ganz einfach: Wir betrachten die Folge $h_n = \sqrt{x}a_n$. Dann gilt

$$h_n = \sqrt{x}a_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}a_{n-1} + \frac{x}{\sqrt{x}a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(h_{n-1} + \frac{x}{h_{n-1}}\right).$$

Da $\lim_{n\to\infty} h_n = \sqrt{x} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$ ist, folgt:

Satz 6.20 Die Heron'sche Folge

$$h_n = \frac{1}{2} \cdot \left(h_{n-1} + \frac{x}{h_{n-1}}\right), \qquad x > 0,$$

konvergiert für beliebigen Startwert $h_1 > 0$ gegen $\sqrt{x}$.

Damit steht ein effektives Verfahren zur Berechnung von Wurzeln zur Verfügung!

6.2 Reihen

Neben Folgen, die wir im letzten Abschnitt kennen gelernt haben, gibt es ein weiteres wichtiges Hilfsmittel, das bei vielen Näherungsproblemen verwendet wird: die Reihen. Eigentlich sind Reihen nichts anderes als spezielle Folgen, die aber so häufig auftreten, dass man ihnen einen eigenen Namen gegeben hat. Reihen sind uns bereits begegnet, nämlich bei der Schreibweise einer rationalen bzw. irrationalen Zahl als „Summe von unendlich vielen Potenzen von 10". Später werden wir Reihen zum Beispiel verwenden, um beliebige Funktionen durch solche, die leichter handzuhaben sind, zu approximieren.

Definition 6.21 Man nennt den formalen Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

eine **unendliche Reihe** oder kurz **Reihe**. Das Symbol ∞ deutet an, dass eine Reihe unendlich viele Glieder hat. Wenn die Folge s_n der **Teilsummen**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

konvergiert, dann heißt die Reihe **konvergent**. Man nennt in diesem Fall den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ der Teilsummenfolge die **Summe der Reihe** und schreibt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Eine nicht-konvergente Reihe heißt **divergent**. Konvergiert sogar $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, so nennt man die Reihe **absolut konvergent**.

Beispiel 6.22 (→CAS) Konvergente und divergente Reihen

a) Man kann zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ konvergent ist. Versuchen Sie, den Grenzwert der Reihe zu erraten.
b) Man kann zeigen, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Reihe ist. Berechnen Sie die erste, dritte, zehnte, 100., 1000. und 10000. Teilsumme der Reihe.
c) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ konvergent?
d) Ist die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent?

Lösung zu 6.22

a) Die ersten Teilsummen sind: $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ usw. (siehe auch Abbildung 6.2). Es sieht also so aus, als ob die Folge $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots$ der Teilsummen gegen 2 konvergiert!

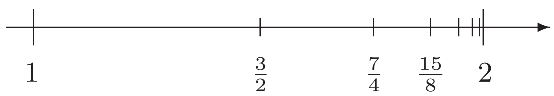

Abbildung 6.2. Die Teilsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ kommen 2 beliebig nahe.

Wir werden bald sehen, dass der Grenzwert der Reihe tatsächlich 2 ist.

b) Mit dem Computer berechnen wir $s_1 = 1$, $s_3 = 1.36111$, $s_{10} = 1.54977$, $s_{100} = 1.63498$, $s_{1000} = 1.64393$, $s_{10000} = 1.64483$. Man kann zeigen, dass der Grenzwert $\frac{\pi^2}{6} = 1.64493$ ist. Die 10000. Teilsumme der Reihe ist also schon ein ganz guter Näherungswert für $\frac{\pi^2}{6}$.
c) Die Teilsummenfolge $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ ist divergent, das heißt, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ ist divergent.
d) Die Teilsummen $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ werden als **harmonische Zahlen** bezeichnet: $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = H_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. Man kann zeigen, dass diese Reihe divergent ist.

Das ist nicht so leicht zu sehen: Betrachten wir die Teilsumme H_{2^n} und zerlegen wir sie in Teile von $2^{m-1}+1$ bis 2^m für $m = 1, \ldots, n$: $H_{2^n} = 1+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})$. Im m-ten Teil gibt es also $2^m - 2^{m-1}$ Summanden, von denen jeder größer oder gleich dem letzten Summanden 2^{-m} ist. Insgesamt ist also jeder der n Teile größer oder gleich $(2^m - 2^{m-1})2^{-m} = \frac{1}{2}$ und somit $H_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Das heißt, die Folge H_{2^n} ist unbeschränkt und somit divergent. Damit haben wir eine divergente Teilfolge von H_n gefunden, und somit ist nach Satz 6.6 auch H_n divergent.

■

Die harmonischen Zahlen divergieren ungefähr „so schnell" wie $a_n = \ln(n)$: Sowohl H_n als auch $\ln(n)$ ist eine streng monoton wachsende Folge, die aber nicht beschränkt ist. Man kann zeigen, dass die Folge der Differenzen, $H_n - \ln(n)$, konvergiert. Ihr Grenzwert ist die so genannte **Euler-Mascheroni Konstante** γ (griechischer Buchstabe „gamma"): $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln(n)) = \gamma = 0.577216$. Es ist ein bis heute ungelöstes Problem, ob γ irrational ist oder nicht.

Es ist kein Zufall, dass bei einer konvergenten Reihe $a_k \to 0$ gilt:

Satz 6.23 (Notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe)
Es gilt:

$$\sum a_k \text{ konvergent } \Rightarrow a_k \text{ Nullfolge.}$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

Mit anderen Worten: Konvergieren die Koeffizienten a_k nicht gegen 0, so kann sofort auf die Divergenz der Reihe geschlossen werden. Aus $a_k \to 0$ kann aber *nicht* auf die Konvergenz der Reihe geschlossen werden.

Beispiel 6.24 Notwendiges Kriterium für die Konvergenz
a) Da $a_k = 2^k$ keine Nullfolge ist, ist $\sum 2^k$ divergent.
b) $a_k = \frac{1}{k}$ ist eine Nullfolge. Daraus kann aber nicht geschlossen werden, dass $\sum \frac{1}{k}$ konvergent ist (tatsächlich ist die harmonische Reihe auch divergent).

Bei divergenten Reihen muss man vorsichtig sein. Man darf mit ihnen nicht so rechnen, wie man es von endlichen Summen her gewohnt ist. Ein kleines Beispiel soll das verdeutlichen: Angenommen wir setzen $1+2+4+8+16+32+\ldots = x$. Formen wir nun x ein wenig um: $x = 1+2(1+2+4+8+16+\ldots) = 1 + 2x$. Daraus folgt: $x = 1 + 2x$, also $x = -1$?! *Konvergente* Reihen lassen aber zum Glück mehr mit sich machen.

Regeln für das Rechnen mit konvergenten Reihen ergeben sich unmittelbar aus den Regeln für Grenzwerte von Folgen (vergleiche Satz 6.11):

Satz 6.25 (Rechenregeln für konvergente Reihen) Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, so gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot a_k) &= c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{für ein beliebiges } c \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) \\ \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k\end{aligned}$$

Konvergente Reihen darf man also gliedweise addieren, subtrahieren oder mit einer Konstante multiplizieren, und der Grenzwert der neuen Reihe ist die Summe/Differenz der einzelnen Grenzwerte bzw. Konstante mal Grenzwert der Ausgangsreihe.

Absolut konvergente Reihen darf man auch multiplizieren, und es gilt (**Cauchy-Produkt**)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Beispiel 6.26 Rechnen mit konvergenten Reihen
Aus Beispiel 6.22 wissen wir, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ist. Satz 6.25 sagt nun, dass die Reihe mit den 6-mal so großen Gliedern gegen den 6-mal so großen Grenzwert konvergiert: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2} = 6 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \pi^2$.

Es ist meist nicht leicht, den Grenzwert einer Reihe zu berechnen. Eine Ausnahme:

Definition 6.27 Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit einem beliebigen $q \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt **geometrische Reihe** (der Index k muss nicht unbedingt bei 0 beginnen).

Geometrische Reihen kommen sehr häufig vor. Wir sind ihnen schon in den Beispielen 6.22 a) und c) begegnet. Dort haben wir gesehen, dass für $q = \frac{1}{2}$ die geometrische Reihe konvergent ist, für $q = 2$ aber divergent. Es hängt also offensichtlich vom Wert von q ab, ob die Reihe konvergiert.

Welche Rolle q für die Konvergenz spielt, können wir einfach überlegen: Betrachten wir die Teilsummenfolge

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

Es wäre praktisch, ein Bildungsgesetz dafür zu haben, dann könnten wir – mithilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen – eventuell etwas über Konvergenz bzw. Divergenz sagen. Machen wir dazu eine kleine Umformung: Es ist

$$q \cdot s_n = q + q^2 + \ldots + q^{n+1},$$

und wenn wir die beiden Ausdrücke voneinander abziehen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) - (q + q^2 + \ldots + q^{n+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Indem wir nach s_n auflösen, erhalten wir ein Bildungsgesetz für die Folge s_n,

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

dem wir ansehen können, für welche q sie konvergiert: Wenn $|q| < 1$, dann konvergiert die Folge q^{n+1} gegen 0, und damit konvergiert s_n gegen $\frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

Satz 6.28 (Konvergenz/Divergenz der geometrischen Reihe) Für die Teilsummen der geometrischen Reihe gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad q \neq 1.$$

Die geometrische Reihe ist daher für jedes q (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit $|q| < 1$ konvergent und hat in diesem Fall den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Beispiel 6.29 Geometrische Reihe
Welche Reihe ist konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k$ d) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$

Lösung zu 6.29

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$. Da $|q| < 1$, ist die Reihe konvergent mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.
b) Das ist eine konvergente geometrische Reihe, deren Laufindex k bei 1 beginnt. Die Formel für den Grenzwert in Satz 6.28 bezieht sich aber auf den Fall, dass der Index bei $k = 0$ beginnt. Kein Problem! Wir machen eine kleine Umformung: $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k - (\frac{1}{2})^0$. Der Grenzwert ist also: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$.
c) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k$ ist konvergent, weil $|q| = \frac{1}{10} < 1$ ist. Ihr Grenzwert ist $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$.
d) $|q| = 2 > 1$, daher ist die geometrische Reihe divergent. ■

Für die geometrische Reihe aus Beispiel 6.29 c) gilt:

$$\frac{10}{9} = 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots = 1.1111\ldots = 1.\overline{1}.$$

Eine periodische Dezimalzahl ist also der Grenzwert einer geometrischen Reihe! Somit können wir auch die Bruchdarstellung einer periodischen Dezimalzahl finden:

Beispiel 6.30 Bruchdarstellung einer periodischen Dezimalzahl
Schreiben Sie als Bruch: a) $0.\overline{2}$ b) $0.\overline{9}$

Lösung zu 6.30

a) $0.\overline{2} = 0.2 + 0.02 + 0.002 + \ldots = 0.2 \cdot (1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots) = 0.2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{9}$.
b) $0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots = 0.9 \cdot (1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots) = 0.9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$. Die Zahl 1 kann also auch durch eine periodische Dezimalzahl dargestellt werden. ■