Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025
Studiengang Angewandte Informatik & Angewandte Künstliche Intelligenz

Kapitel 4: Differentialrechnung

Lernziele:

Technik des Differenzierens (Ableitung bilden)

- Sie können die Ableitung als Steigung einer gekrümmten Kurve interpretieren/Änderungsrate interpretieren.
- Sie kennen die Herleitung der Ableitung als Differentialquotient (Grenzwert der Sekantensteigung).*
- Sie können bestimmen, ob eine Funktion differenzierbar ist.
- Sie können mit Hilfe der Ableitungsregeln die Ableitung einer Funktion bestimmen:
    - Sie kennen die Ableitung von Grundfunktionen
    - Sie können die Ableitung von verketteten Funktionen mit Hilfe der Kettenregel bestimmen?
    - Sie können die Ableitung von zusammengesetzten Funktionen mit Hilfe der Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotientenregel bestimmen?
- Sie kennen das Verfahren der Ableitung über die Inversen der Funktion anhand dem Beispiel weniger Funktion z.B. ln(x) und arctan(x).
- Sie können höhere Ableitungen bestimmen

Wozu die Ableitung?

- Sie kennen die Begriffe Monotonie, Krümmung, Wendestelle, lokale und globale Extrempunkte.
- Sie können mithilfe der Ableitungen argumentieren, ob eine Funktion/Kurve monoton steigend/fallend ist, ein lokales Maximum/Minimum oder eine Wendestelle hat.
- Sie können eine vollständige Kurvendiskussion durchführen.
- Sie können die Regel von l'Hospital zur Berechnung von Grenzwerten bei unbestimmten Ausdrücken anwenden.
- Sie kennen die Herleitung der Regel von l'Hospital
- Sie können die Tangente und Normale an jedem Punkt einer Funktion bestimmen.
- Sie können Optimierungsaufgaben lösen.
- Sie können Nullstellen iterativ bestimmen (optional, wenn Zeit ausreicht)

Mögliche Begleitliteratur

[Teschl 2]	Kap. 19
[Dürrsch]	Kap. 11 + 12
[Papula 1]	Kap. IV

Ableitung als momentane „Geschwindigkeit“ bzw. lokale Änderungsrate

1. Momentane Geschwindigkeit

Sie fahren mit dem Fahrrad vom Bahnhof zur Hochschule und benötigen für die Strecke von 2,6 km genau 8 Minuten.

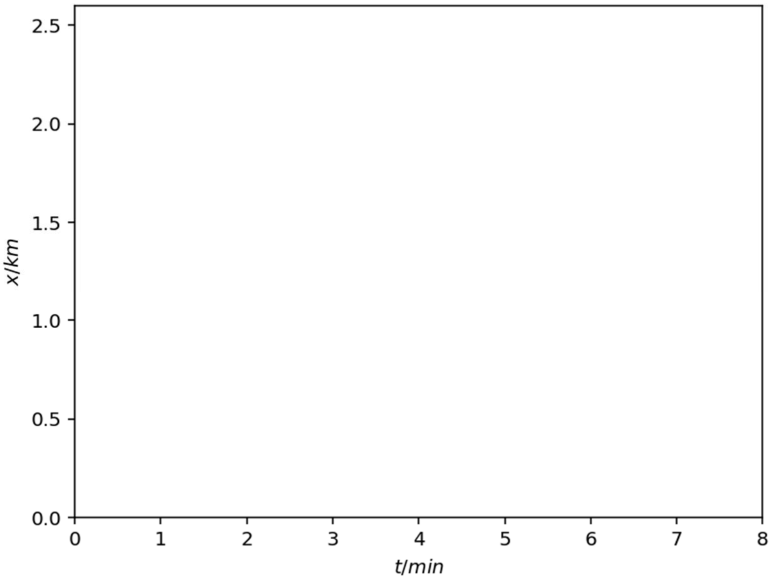
Bild: routing.openstreetmap.de

a) Geschwindigkeit (<u>ohne</u> Beschleunigung und Bremsen):

$v(t)$ =

b) Manchmal sind Sie aber auch 30 km/h gefahren!

Auftragung der Weg-Zeit-Funktion $t \mapsto x(t)$ – jedem Zeitpunkt t wird der bis dahin zurückgelegte Weg x zugeordnet.



Zu Beginn beschleunigen Sie linear $a = 2\frac{m}{s^2}$, der zurückgelegte Weg ist:

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

Erste Sekunde: $x(1s) - x(0s)$ =

Zweite Sekunde: $x(2s) - x(1s)$ =

Dritte Sekunde: $x(3s) - x(2s)$ =

Wie schnell waren Sie zum Zeitpunkt $t = 1s$?

Mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[0s, 1s]$: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1s)-x(0s)}{1s-0s}$ =

Mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[1s, 2s]$: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2s)-x(1s)}{2s-1s}$ =

Idee: verkleinern des Intervalls, um genauere Abschätzung zu kriegen:

Δt	Linkes Intervall	Geschwindigkeit im linken Intervall	Rechtes Intervall	Geschwindigkeit im rechten Intervall
1s				
0,1s				
0,01s				
0,001s				

Wenn Δt beliebig klein wird, kommen die Geschwindigkeiten im linken sowie im rechten Intervall beliebig nahe an den gleichen Wert. Damit ist die Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate) zum Zeitpunkt $t = 1s$ gegeben durch:

Zusammenfassung: Geschwindigkeit

Sobald sich die Geschwindigkeit ändert (Beschleunigen oder Abbremsen) ist es sinnvoll, von einer Momentangeschwindigkeit zu sprechen. Wir würde man sie definieren?

Geschwindigkeit <u>ohne</u>
Beschleunigung bzw. Bremsen $\quad v(t) =$

Momentangeschwindigkeit
zum Zeitpunkt t_0 $\quad v(t_0) =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

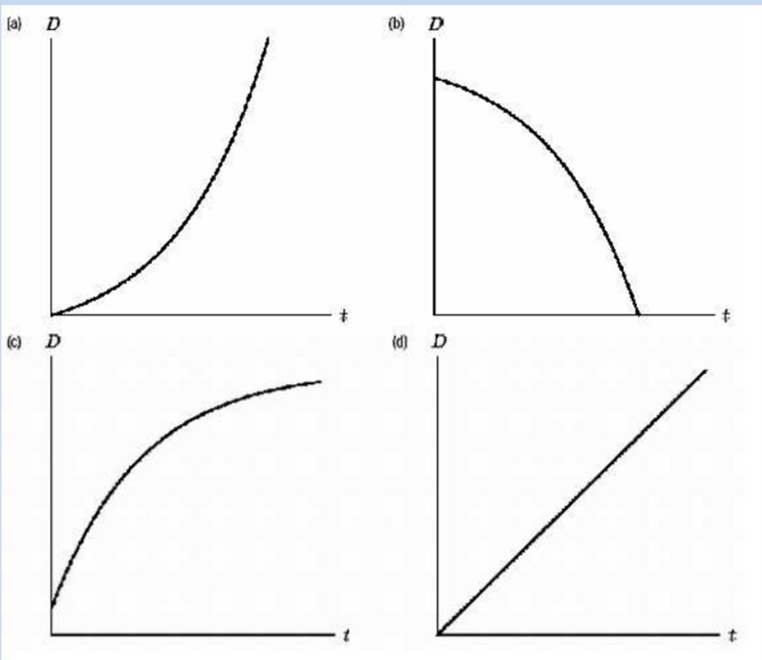
$$v(t_0) = s'(t_0) = \dot{s}(t_0)$$

Die Ableitung des Weges nach der Zeit liefert die momentane Änderungsrate, d.h. die Momentan-geschwindigkeit der Fortbewegung, die durch die Funktion $s(t)$ des Weges beschrieben wird.

Momentanbeschleunigung
zum Zeitpunkt t_0? $\quad a(t_0) = \dot{v}(t_0) = \ddot{s}(t_0)$

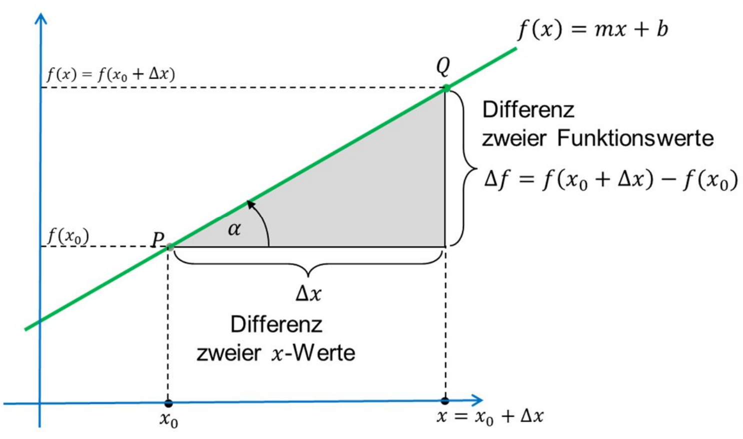
Momentanbeschleunigung
= Änderung der Geschwindigkeit

Welcher Graph stellt eine Verlangsamung eines Objekts dar, wobei D die Entfernung und t die Zeit ist?
Gehen Sie davon aus, dass die Skalierung für alle Diagramme gleich ist.



Steigung einer gekrümmten Kurve – Tangentensteigung – Differentialquotient – Die Ableitung

Einleitung: Steigung einer Geraden und **Δ-Symbol**



Steigung einer Geraden $f(x) = mx + b$

Eine Gerade hat an jeder Stelle x_0 dieselbe Steigung, die sich durch Auswerten eines beliebigen Steigungsdreiecks berechnen lässt:

Höhenänderung Δf in Bezug auf Horizontaländerung Δx, das benennt man

Differenzenquotient

$$\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{(mx + b) - (mx_0 + b)}{x - x_0} = m$$

Problem: Wie beschreibt man die Steigung einer Funktion f, die krummlinig verläuft?

Zwei Begriffe, um das Steigungsverhalten einer Funktion f zu beschreiben:

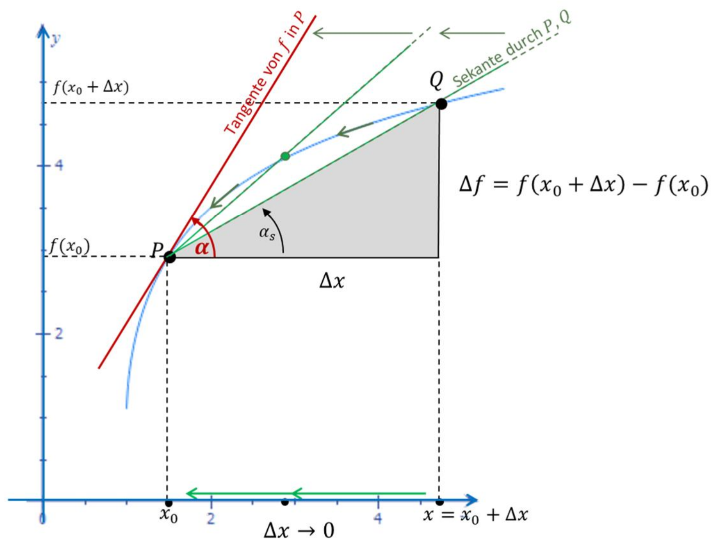
a) **Durchschnittliche** Steigung einer Funktion zwischen zwei Stellen x_0 und x_1 ≙ Steigung der <u>Sekante</u> ≙ Differenzenquotient

b) Steigung einer Funktion **an der Stelle x_0** ≙ Steigung der <u>Tangente</u> im Punkt $P(x_0, y_0)$ ≙ Differentialquotient

Ableitung $f'(x_0)$ = Steigung der Funktion in x_0

= Steigung der Tangente = $\tan \alpha$

= Grenzwert der Sekanten-Steigung für $x \to x_0$ (falls dieser existiert).



Definition der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 ist definiert über einen Grenzwert, den sog.

Differentialquotienten

$$\boldsymbol{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

= **GW des Differenzenquotienten**,

= GW der Sekanten-Steigung $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

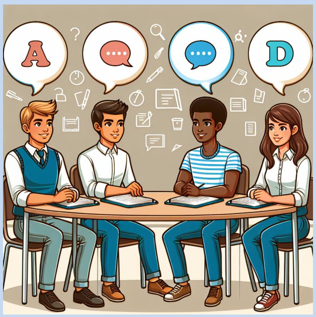
Schreibweisen des Differentialquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Gängige Symbole für die Ableitung:

$f'(x_0)$ oder $y'(x_0)$ bzw. $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\frac{d}{dx} f(x_0)$ oder $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ bzw. $\dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$

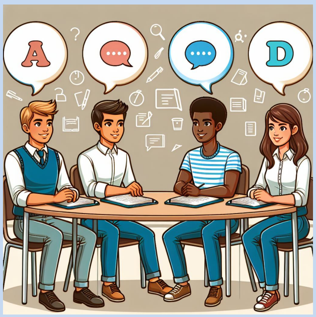
Wir wollen herausfinden, wie sich das Volumen eines Luftballons verändert, wenn er mit Luft gefüllt wird. Wir wissen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, wobei r der Radius in dm und $V(r)$ das Volumen in dm³ ist.



Der Ausdruck $\frac{V(3)-V(1)}{3-1}$ stellt die

A) durchschnittliche Änderungsrate des Radius in Bezug auf das Volumen, wenn der Radius sich von 1 dm auf 3 dm ändert.
B) durchschnittliche Änderungsrate des Radius in Bezug auf das Volumen, wenn das Volumen sich von 1 dm³ auf 3 dm³ ändert.
C) durchschnittliche Änderungsrate des Volumens in Bezug auf den Radius, wenn der Radius sich von 1 dm auf 3 dm ändert.
D) durchschnittliche Änderungsrate des Volumens in Bezug auf den Radius, wenn das Volumen sich von 1 dm³ auf 3 dm³ ändert.

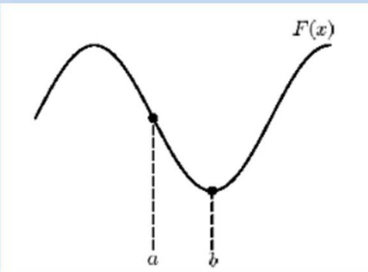
Wir wollen herausfinden, wie sich das Volumen eines Luftballons verändert, wenn er mit Luft gefüllt wird. Wir wissen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, wobei r der Radius in dm und $V(r)$ das Volumen in dm³ ist.

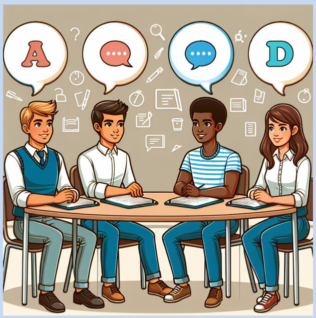


Welche der folgenden Zahlen gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich das Volumen ändert, wenn der Radius 1 dm beträgt?

A) $\frac{V(1{,}01)-V(1)}{0{,}01} \approx 12{,}69$
B) $\frac{V(0{,}99)-V(1)}{-0{,}01} \approx 12{,}44$
C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{V(1+h)-V(1)}{h}$
D) Alle der genannten Punkte

Welche der folgenden Angaben stellt die Steigung einer Linie zwischen den beiden Punkten dar, die in der Abbildung markiert sind?

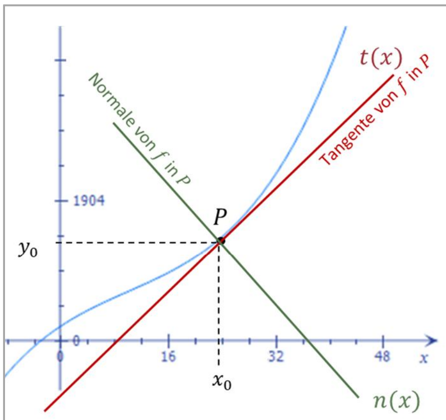




A) $m = \frac{F(a)+F(b)}{a+b}$
B) $m = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$
C) $m = \frac{a}{b}$
D) $m = \frac{F(a)-F(b)}{a-b}$

Tangente und Normale, Linearisierung von f

Die Tangente ist die beste lineare Annäherung an eine (ggf. komplizierte) Funktion f im Punkt $P(x_0|y_0)$, denn sie stimmt mit f nicht nur im Funktionswert, sondern sogar in der Steigung überein. Man spricht auch von Linearisierung der Funktion f. Im Kapitel über Taylorpolynome und Potenzreihenentwicklungen werden wir dies verallgemeinern.



Tangente im Punkt $P = P(x_0|y_0)$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

„Linearisierung von f": Einzige lineare Funktion (Gerade), die an der Stelle x_0 mit f und f' (Steigung) übereinstimmt.

Normale im Punkt $P = P(x_0|y_0)$

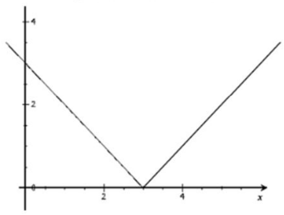
$$n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Einzige lineare Funktion durch P, die senkrecht zur Tangente von f ist, Die Steigung ist $-\frac{1}{f'(x_0)}$

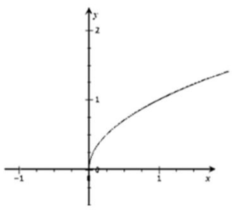
Differenzierbarkeit

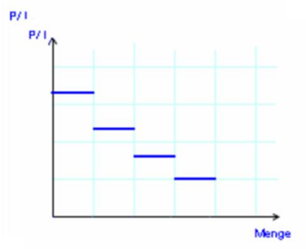
Beispiel: (Wo) differenzierbar? stetig?

$f(x) = |x - 3|$

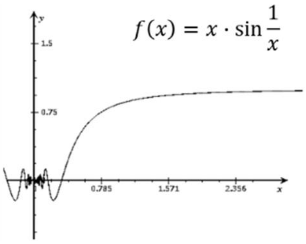


$f(x) = \sqrt{x}$





$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$



Differenzierbarkeit : Die Ableitung, d.h. der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

muss nicht immer existieren. Falls ja, heißt die Funktion in x_0 **differenzierbar**, andernfalls nicht.

Anschaulich: Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0 heißt, dass die Funktion dort eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt, insbesondere **durchgängig** und **ohne Knicke** gezeichnet werden kann.

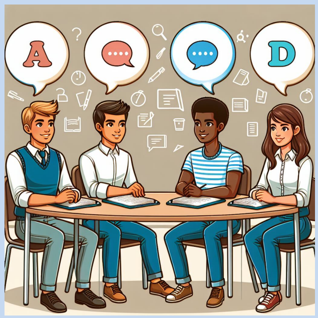
Differenzierbarkeit ist stärker als Stetigkeit

Ist f differenzierbar in x_0, so auch stetig.

Ist f nicht stetig, so kann sie nicht differenzierbar sein.

Ein stetiges f braucht nicht differenzierbar zu sein.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

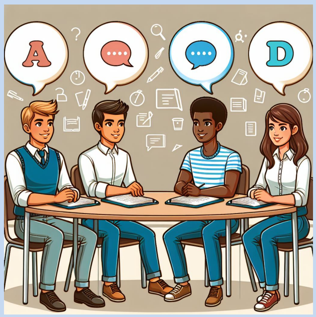


A) Jede stetige Funktion ist auch differenzierbar

B) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert, dann nennt man die Funktion differenzierbar an der Stelle x_0

C) Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_o))$

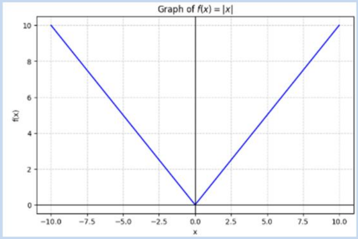
Angenommen $f'(x)$ existiert in dem Intervall für $x \in (a, b)$. Lesen Sie die folgenden 4 Aussagen.



(1) $f(x)$ ist stetig auf (a, b)
(2) $f(x)$ ist stetig bei $x = a$
(3) $f(x)$ ist definiert für alle x in (a, b)
(4) $f'(x)$ ist differenzierbar auf (a, b)

A) (1) und (3)
B) (1), (2) und (3)
C) Alle 4 Aussagen sind wahr.
D) Keine Aussage ist war.
E) Nur (1) ist wahr

Wir betrachten folgende Funktion:

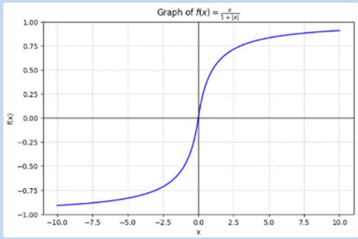


$f(x) = |x|$

Welche Aussagen sind wahr?

A) f ist im Nullpunkt nicht stetig und nicht differenzierbar.
B) f ist im Nullpunkt stetig aber nicht differenzierbar.
C) f ist im Nullpunkt stetig und differenzierbar.

Wir betrachten folgende Funktion:



$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Welche Aussagen sind wahr?

A) f ist im Nullpunkt nicht stetig und nicht differenzierbar.
B) f ist im Nullpunkt stetig aber nicht differenzierbar.
C) f ist im Nullpunkt stetig und differenzierbar.

Abschnitt: Technik des Differenzierens (Ableitung bilden)

Die **Ableitung von Funktionen an einer Stelle x_0 werden mit Hilfe des Differentialquotienten** hergeleitet:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$ mit Hilfe des Differentialquotienten

Die Potenzregel für eine Funktion $f(x) = x^n$ lässt sich auch mit Hilfe des Differentialquotienten herleiten:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \cdots = \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

Exkurs: 3. Binomische Formel für höhere Potenzen $a^n - b^n$. Überprüfen Sie die Richtigkeit der Formel durch nachrechnen:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Zukünftig werden wir auf weitere Herleitung mit dem Differentialquotienten verzichten und die Regeln anwenden, die Mathematiker vor unserer Zeit für uns hergeleitet und schon mehrfach bewiesen haben.

Ableitung der Grundfunktionen Die Ableitung von $x^r, e^x, \ln x, \sin x, \cos x$ sind Ableitungen der wichtigsten Grundfunktionen. Kehrwerte und Wurzeln werden als Potenzen geschrieben und über die Potenzregel abgeleitet.

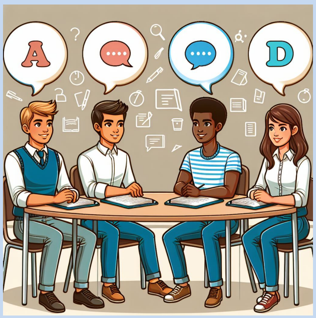
	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	**Potenzen** x^r	$\boldsymbol{r \cdot x^{r-1}}$
2.2	x^4	
2.3	$\frac{1}{x}$	
2.4	$\frac{1}{x^2}$	
2.5	$\sqrt{x}$	
2.6	$\sqrt[3]{x}$	
2.7	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
2.8	$\frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$	

2.9	e^x	
2.10	$\ln x$	
2.11	$\sin x$	
2.12	$\cos x$	

Verständnisfragen zur Ableitung von Grundfunktionen:

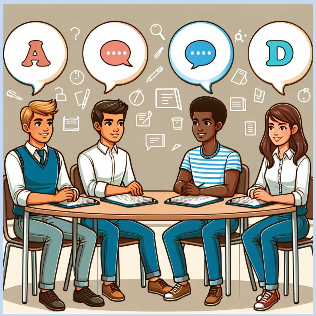
Wenn $f(x) = e^2 - 1$, wie lautet dann $f'(x)$?

A) $2e$
B) e^2
C) 0
D) 2



Wenn $f(x) = \ln 2$, wie lautet dann $f'(x)$?

A) $\frac{1}{2}$
B) $\ln 2$
C) 0
D) 2



Teil 2: Kettenregel = Regel für die Ableitung von verketteten (mittelbaren) Funktionen

3 Vorübungen: Warum braucht man eine Kettenregel zum Ableiten verketteter Funktionen?

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = \sin(x^2)$.	**Fehlkonzepte:** $f'(x) = \cos(x^2)$ oder $f'(x) = \cos(2x)$. Naheliegende Vermutung führt zum falschen Ergebnis.
$f(x) = (x^3)^4$	Die Begründung für die Notwendigkeit der Kettenregel, lässt sich gut am Beispiel von Polynomfunktionen zeigen: **Fehlkonzepte:** $f'(x) = 4(x^3)^3 = 4x^9$ oder $f'(x) = 4(3x^2)^3 = 4 \cdot 3^3 \cdot x^6$ **Korrekt: (Mit Kettenregel)** $f'(x) = 4(x^3)^3 \cdot 3x^2 = 4 \cdot 3 \cdot x^9 \cdot x^2 = 12x^{11}$
$f(x) = x^{12}$	$f(x) = 12x^{11}$
Den Beweis der Kettenregel erfolgt über den Differentialquotienten. Im Buch „Mathematik“ von Tilo Arens et al. ist der Beweis ausführlich beschrieben.	

Verkettungen werden abgeleitet, indem man sie in die beteiligten, nacheinander auszuführenden Grundfunktionen zerlegt und die Ableitung jeder beteiligten Grundfunktion **multipliziert**. Man sagt auch: *Ableitung der äußeren Funktion mal Ableitung der inneren Funktion* (oder umgekehrt). Die Ableitung der inneren Funktion zu multiplizieren nennt man auch „Nachdifferenzieren“.

4 Übungen: Kettenregel für einfach verkettete Funktionen

Innere Fkt. $u(x)$ Ableitung $u'(x) = \frac{du}{dx}$	Äußere Fkt. $v(u)$ Ableitung $v'(u) = \frac{dv}{du}$	Ableitung nach der Kettenregel $f' = v'(u) \cdot u'$ bzw. $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ „**Ableitung äußere F. mal Ableitung inneren F.**“

4.1	$f(x) = \sin(x^2)$ Rechenweg für die Ableitung: **Mögl. 1:** Von innen nach außen explizit in Grundfunktionen zerlegen und diese separat ableiten: $u = x^2 \qquad v = \sin(u)$ $u' = 2x \qquad v' = \cos(u)$ Alle Ableitungen multiplieren und Variablen rückwärts einsetzen: $f'(x) = 2x \cdot \cos(u)$ $f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$ **Mögl. 2:** Von außen nach innen arbeiten: Äußere Ableitung mal innere Ableitung. Dabei Terme in den inneren Klammern beibehalten.

4.2	$f(x) = \sqrt{\ln x}$
4.3	$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$
4.4	$f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^3}$

5 Spezialfall: lineare innere Funktion $f(ax + b)$

Innere Funktion: $u(x) = ax + b$ Ableitung innere Funktion: $u'(x) = a$	Ableitung nach der Kettenregel $\frac{d}{dx} f(ax + b) = a \cdot f'(ax + b)$
5.1	$f(x) = (5x + 1)^4$
5.2	$f(x) = \frac{1}{1-2x}$
5.3	$f(x) = e^{3x}$
Versuchen Sie mit steigender Routine, den Spezialfall der linearen inneren Funktion „im Kopf“ abzuleiten. Er ist später beim Integrieren besonders wichtig.	

6 Beispiele: Mehrfache Anwendung der Kettenregel

Bei Verkettungen aus mehreren elementaren Funktionen wird die Kettenregel mehrfach angewendet. Wie die Zerlegung explizit durchgeführt wird, zeigt das erste Beispiel. Man kann das Zerlegen und Nachdifferenzieren jedoch auch im Kopf durchführen.

6.1

$f(x) = \ln^8(x^4 + 1)$

Rechenweg für die Ableitung:

Mögl. 1: Von innen nach außen explizit in Grundfunktionen zerlegen und diese separat ableiten:

$u = x^4 + 1 \;\; ; \;\; v = \ln u \;\; ; \;\; w = v^8$

$u' = 4x^3 \;\; ; \;\; v' = \frac{1}{u} \;\; ; \;\; w' = 8v^7$

Alle Ableitungen multiplizieren und Variablen rückwärts einsetzen:

$f'(x) = (4x^3) \cdot \frac{1}{u} \cdot 8v^7$

$f'(x) = (4x^3) \cdot \frac{1}{x^4 + 1} \cdot 8[\ln(x^4 + 1)]^7$

Mögl. 2: Von außen nach innen arbeiten:
Äußere Ableitung mal innere Ableitung.
Dabei Terme in den inneren Klammern beibehalten.

6.2

$f(t) = \cos(\ln^2 t)$

Rechenweg für die Ableitung:

6.3

$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$

Rechenweg für diese Ableitung:

Teil 3: Ableitung von zusammengesetzten Funktionen: Vielfache, Summe, Produkt, Quotient

7 Vorübungen: Warum gibt es die Produktregel?

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$.	**Fehlkonzepte:** $f'(x) = 2x \cdot \cos(x)$ Naheliegende Vermutung führt zum falschen Ergebnis.
$f(x) = x^3 \cdot x^4$	Die Begründung für die Notwendigkeit der Kettenregel, lässt sich gut am Beispiel von Polynomfunktionen zeigen: **Fehlkonzepte:** $f'(x) = 3x^2 \cdot 4x^3 = 12x^5$ **Korrekt: (Mit Kettenregel)** $f'(x) = 3x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot 4x^3 = 3x^6 + 4x^6 = 7x^6$
$f(x) = x^7$	$f(x) = 7x^6$
Den Beweis der Produktregel erfolgt über den Differentialquotienten. Im Buch „Mathematik" von Tilo Arens et al. ist der Beweis ausführlich beschrieben.	

Für alle Funktionen, die zusammengesetzt sind als Vielfaches, Summe, Produkt, Quotient aus einfacheren Funktionen, gibt es Regeln, wie deren Ableitung aus den Ableitungen der Bestandteile zusammensetzt wird. Ggf. sind diese Regeln mehrfach oder in Kombination anzuwenden.

$f(x) = x^2 + 4\sin x + 3x + 2$

Summen und Vielfache:

Faktor-Regel: Konstante Faktoren beim Ableiten erhalten

Summen-Regel:
Summanden einzeln ableiten:

$f'(x) = 2x + 4 \cdot \cos x + 3 + 0$

Auch: Linearität der Ableitung

$f(x) = x^2 \sin x = x^2 \cdot \sin x = u(x) \cdot v(x)$

Produkt von Funktionen: **Produktregel**

NR: Faktoren erst einzeln ableiten:

$$\begin{array}{c|c} u(x) = x^2 & v(x) = \sin x \\ \hline u'(x) = 2x & v'(x) = \cos x \end{array}$$

$\oplus$

Kreuzweise multiplizieren und addieren:

$$\boldsymbol{f' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$f(x) = \frac{x^2}{\sin x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

Quotient von Funktionen: **Quotientenregel**

NR: Zähler und Nenner-Ableitung bilden:

$$\begin{array}{c|c} u = x^2 & v(x) = \sin x \\ \hline u' = 2x & v'(x) = \cos x \end{array}$$

$\ominus$

Kreuzweise multiplizieren und subtrahieren:

$$\boldsymbol{f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}$$

8 Beispiele und Übungen zu Summen-, Produkt-, Quotientenregel

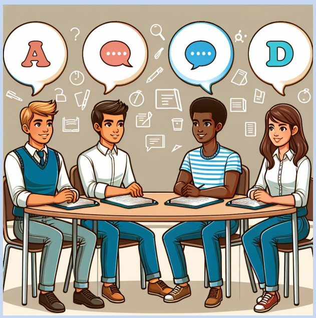
Bilde die Ableitung		Passende Regel	$f'(x)$
8.1	$f(x) = 0{,}5x + 1 - \frac{36}{x}$	Summen-Regel Faktor-Regel	
8.2	$f(x) = x^2 e^x$	Produkt-Regel	

8.3	$f(x) = \frac{x + \ln x}{e^x}$ Rechne auf zwei Arten $f'(x) = \frac{-x^2 + x - x\ln x + 1}{xe^x}$
8.4	$y(t) = e^{-2t}\cos(5t + 6)$

Verständnisfragen:

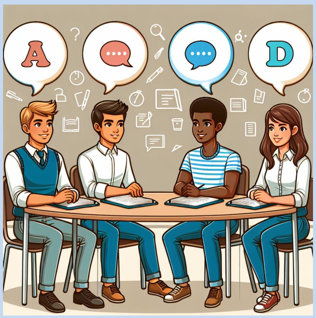
Wenn $f(x) = e^{7x}$, wie lautet dann $f'(x)$?

A) e^{7x}
B) $7 \cdot e^{7x}$
C) $7x \cdot e^{7x-1}$



Wenn $f(t) = x \cdot \ln t$, wie lautet dann $f'(t)$

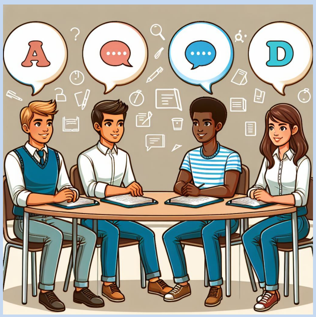
A) $1 \cdot \ln t + x \cdot \frac{1}{t}$
B) $\ln t$
C) 0
D) $\frac{x}{t}$



Wenn $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ wie lautet dann $f'(x)$

A) $u'vw + uv'w$
B) $u'(vw) + u(v'w + vw')$
C) $u'vw + uv'w'$
D) $u'vw + uv'w + uvw'$

Beispiel:
$f(x) = x^2 e^x (\ln x + 1)$



9 Schreiben Sie die weiteren Grundfunktionen so um, dass Sie bereits bekannte Ableitungen nutzen können

9.1	$a^x =$	$\ln a \cdot a^x$
9.2	$\log_a x =$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
9.3	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9.4	$\cot x =$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
9.5	$\sinh x =$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
9.6	$\cosh x =$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$
9.7	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
9.8	$\coth x =$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

Höhere Ableitungen

Begriff	Allgemeine Definition	Anmerkungen
Zweite Ableitung $f''(x)$	… ist die Ableitung der ersten Ableitung: $f'' := (f')'$ bzw. $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$ oder $\frac{d^2}{dx^2} f$	(Später sehen wir): Geometrisch beschreibt die 2. Ableitung f'' die Steigung (Änderungstendenz) der 1. Ableitung f'.
Dritte Ableitung $f'''(x)$	… ist die Ableitung der zweiten Ableitung: $f''' := (f'')'$ bzw. $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f}{dx^3}$ oder $\frac{d^3}{dx^3} f$	
n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ $f^{(n)}$ heißt n-te Ableitung von f oder Ableitung n-ter Ordnung von f.	$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))'$ bzw. $\frac{d^n f}{dx^n}$ oder $\frac{d^n}{dx^n} f$	

10 Übungen: Höhere Ableitungen. Man ermittele die Ableitungen erster bis dritter Ordnung der folgenden Funktionen.

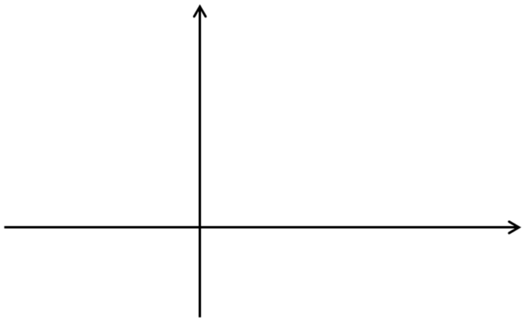
$h(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$

$h'(z) = -\frac{z+3}{(z-1)^3}$; $h''(z) = \frac{2(z+5)}{(z-1)^4}$; $h'''(z) = -\frac{6(z+7)}{(z-1)^5}$

Teil 4: Die Ableitung der inversen Funktion

[Papula 1 Kapitel IV.2.8]

Geometrische Herleitung und Interpretation



$y = f^{-1}(x)$	Die Ableitung der Inversen ist der **Kehrwert** der Ableitung der Originalfunktion an der Stelle y.	$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} f(y)}$
$y = f(x)$	Die Ableitung der Originalfunktion ist der **Kehrwert** der Ableitung ihrer Inversen an der Stelle y.	$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} f^{(-1)}(y)}$

11 Beispiele und Übungen: Ableitung der Inversen - Voraussetzung: $f', f^{-1'} \neq 0$

Bilde die Ableitung von		Inverse	Formel zur Ableitung der Inversen.
11.1	$y = \ln x$	$y = \ln x$ $x = e^y$	$\frac{d \ln x}{dx} =$
11.2	$f(x) = \arctan x$ $= \tan^{-1}(x)$	$y =$ $x =$	Hinweis 1: trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ Hinweis 2: $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

Überblick Ableitungen der Grundfunktionen

[PapulaFS IV.2]

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
Potenzfunktion	x^n	$n x^{n-1}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
Arkusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$
	$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1 + x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
Areafunktionen	$\text{arsinh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
	$\text{arcosh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
	$\text{artanh}\, x$	$\frac{1}{1 - x^2}$
	$\text{arcoth}\, x$	$\frac{1}{1 - x^2}$

Überblick Ableitung zusammengesetzter Funktionen

Zusammensetzung	Ableitung $f'(x)$	
$f(x) = c \cdot u(x) \quad (c \in \mathbb{R})$	$f'(x) = c \cdot u'(x)$	Faktor-Regel
$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$	Summen-Regel
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	Produkt-Regel
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad (v(x) \neq 0)$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$	Quotienten-Regel
$f(x) = v(u(x))$	$f'(x) = v'\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$	Ketten-Regel