Anwendung der Ableitung

Übersicht

Kurvendiskussion:

- **Steigung und Verlauf von Funktionskurven**
  - Monotonie
  - Krümmungsverhalten
  - Extremwerte
  - Wendetangente
- **Grenzwerte**
  - Unbestimmte Ausdrücke: Regel von l'Hospital

Optimierungsaufgaben

Splines

Änderungsverhalten schätzen: Differential / lineare Approximation

Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung

Später noch weitere Anwendungen

- Taylorpolynome und Potenzreihen
- Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher
- Differentialgleichungen

Anwendung Funktionsverlauf analysieren (Kurvendiskussion)

12 Beispiel Kurvendiskussion mit Polstellen und lokalen Extrema

Ermitteln Sie für $f(x)$ den Verlauf des Funktionsgraphen. Die Ableitungen dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.	
$f(x) = \frac{10\ln x}{x}$	$f'(x) = \frac{10(1-\ln x)}{x^2}$; $f''(x) = \frac{10(2\ln x - 3)}{x^3}$

Definitionsmenge D?

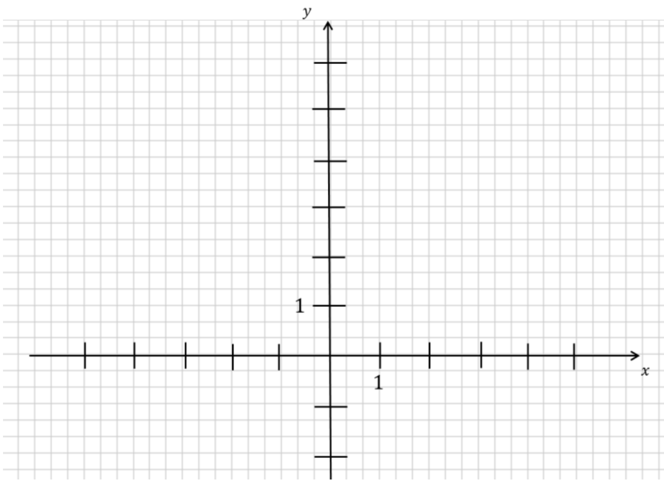
Nullstellen?

Asymptotisches Verhalten am Rand von D?

Lokale Extremstellen?

Wendestellen (oder einheitliche Krümmungsrichtung links bzw. rechts evtl. vorhandener Pole)?

Grobe **Skizze** des Funktionsgraphen und Tangente am Wendepunkt (falls vorhanden):



Peer Instruction-Fragen zur 1. Ableitung

Welches der folgenden Diagramme stellt die erste Ableitung der rechten Abbildung dargestellten Funktion dar?

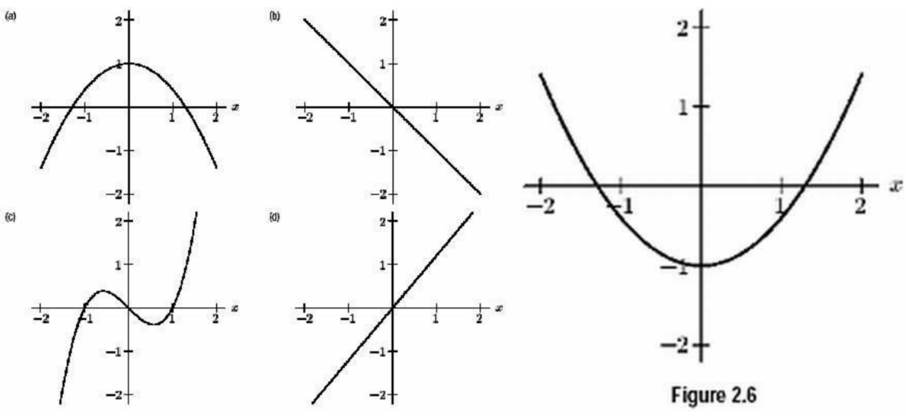


Figure 2.6

(Carroll)

Welches der folgenden Diagramme stellt die erste Ableitung der in der rechten Abbildung dargestellten Funktion dar?

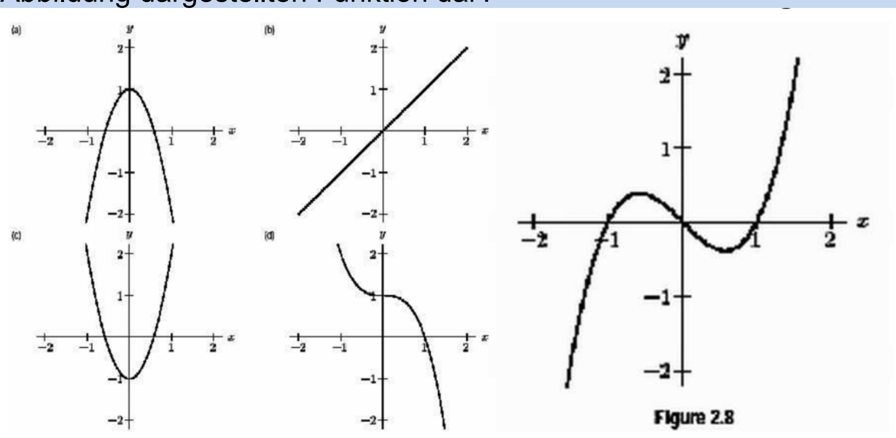


Figure 2.8

(Carroll)

Die Abbildung rechts stellt die erste Ableitung welcher Funktion dar?

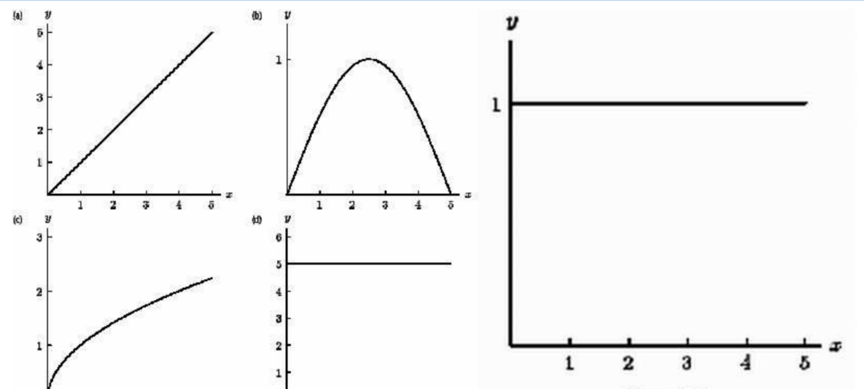


Figure 2.12

(Carroll)

Die Abbildung rechts stellt die erste Ableitung welcher Funktion dar?

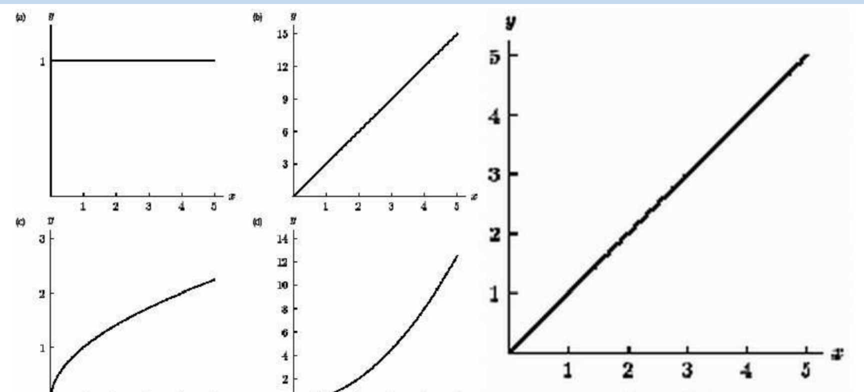
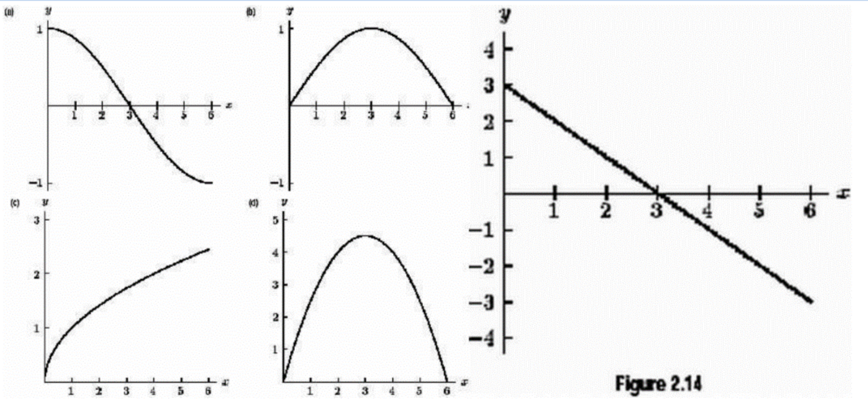


Figure 2.13

(Carroll)

Die Abbildung rechts stellt die erste Ableitung welcher Funktion dar?

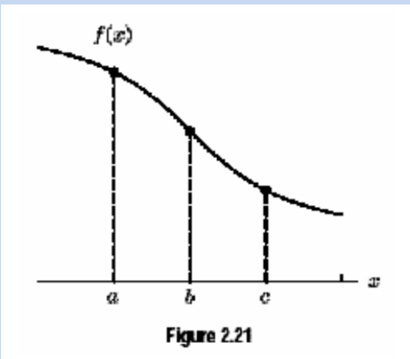


(Carroll)

Peer Instruction-Fragen zur 2. Ableitung

In der Abbildung ist das Vorzeichen der zweiten Ableitung in den Punkten a, b, und c jeweils?

A) $+, 0, -$
B) $-, 0, +$
C) $-, 0, -$
D) $+, 0, +$
E) $+, +, -$

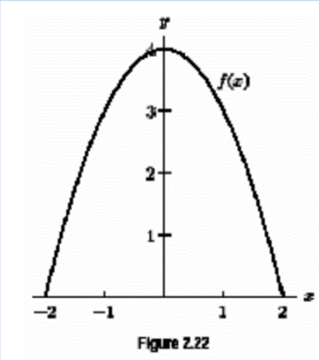


(Carroll)

In der Abbildung sind bei $x = 0$ die Vorzeichen der Funktion, der ersten und zweiten Ableitung in der welcher Reihenfolge?

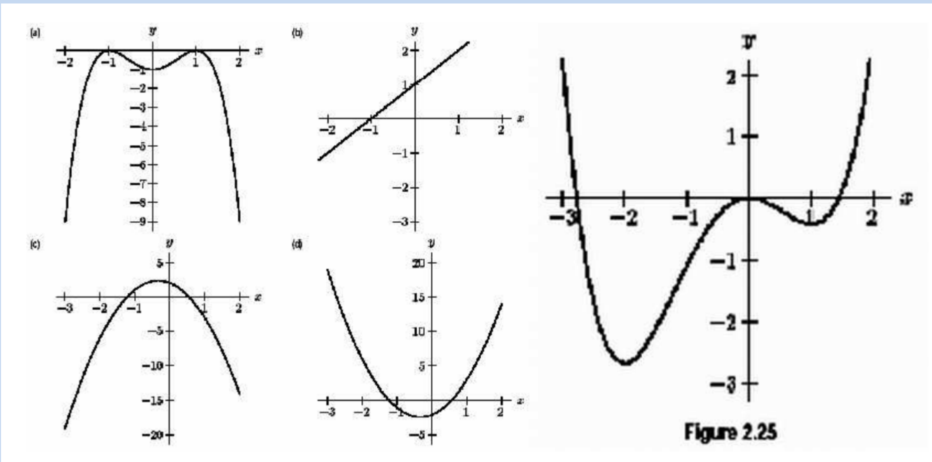
(Carroll)

A) $+, 0, +$
B) $+, 0, -$
C) $-, +, -$
D) $-, +, +$
E) $+, -, +$
F) $+, +, +$



Welches der folgenden Diagramme könnte die zweite Ableitung der in Abbildung rechts dargestellten Funktion darstellen?

(Carroll)



Ein langsamer Güterzug tuckert über ein gerades Gleis. Die Strecke, die er nach x Stunden zurückgelegt hat, ist durch eine Funktion $f(x)$ gegeben. Ein Ingenieur läuft auf dem Dach der Waggons mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h in der gleichen Richtung wie der Zug. Die Geschwindigkeit des Mannes relativ zum Boden ist

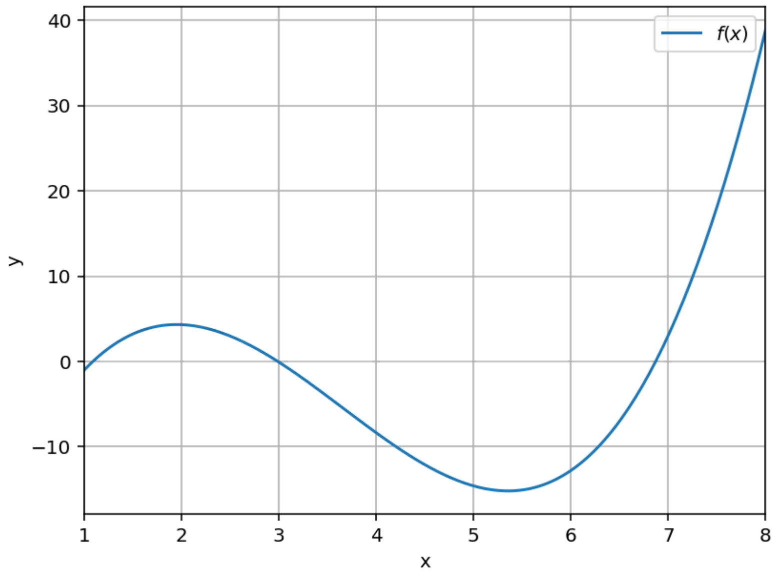
A) $f(x) + 3$
B) $f'(x) + 3$
C) $f(x) - 3$
D) $f'(x) - 3$

(CGQ)

13 Anschauung: Die Ableitung beschreibt die Steigung einer Funktion

Das folgende Diagramm zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = (x-2)^3 - 5(x-2)^2 - \ln(x) + 5$.

Auch ohne die Ableitung berechnen zu können: zeichnen Sie die Steigung von f in da Diagramm ein.
Zunächst: an welchen Stellen ist die Steigung 0, wo ist sie positiv und wo sie negativ?

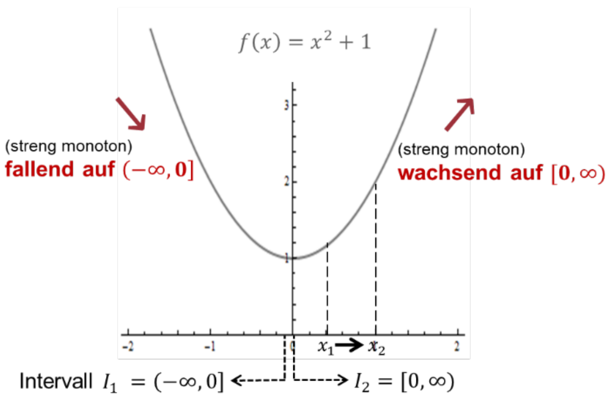


Übersicht: Monotonie und Extremstellen

Generelle Voraussetzung: f sei genügend oft (z.B. beliebig oft) stetig differenzierbar

Wir betrachten auf den folgenden Seiten immer wieder die Funktion $f(x) = 3 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3$ auf dem Intervall $[-\frac{4}{3}; 1{,}4]$.

Monotonie



Monotonie von f auf Teilintervall I:

f <u>streng monoton wachsend</u>, wenn für alle $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) < f(x_2)$

f <u>streng monoton fallend</u>, wenn für alle $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$

f <u>monoton wachsend</u>, wenn für alle $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$

f <u>monoton fallend</u>, wenn für alle $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geq f(x_2)$

(wobei **alle** $x_1, x_2 \in I$)

- Monotonie oft nicht auf ganz D_f sondern für Teilintervalle.
- Später wichtig: Wo f **streng monoton**, dort **umkehrbar**.
- Später: Rechnerisch mit Hilfe der **Ableitung** $f' > 0, < 0$.

Übung: Funktion, die monoton, aber nicht streng monoton ist?

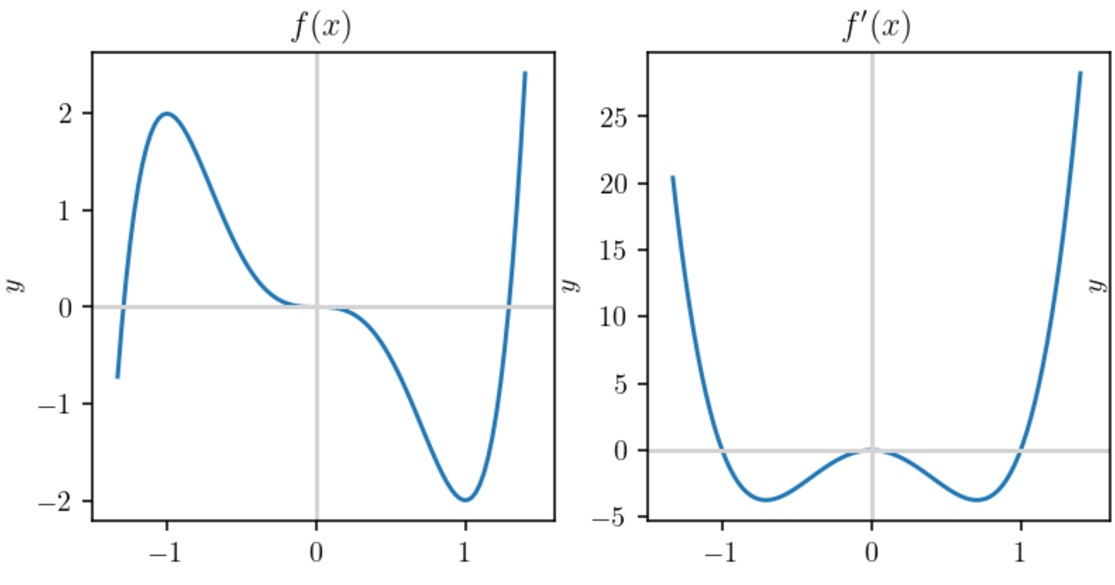
Monotonie – die Rolle der 1. Ableitung: Man berechne die Bereiche (Intervalle I), in denen f' positiv bzw. negativ ist:

$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ $\Rightarrow$ f streng **monoton steigend** auf I ($\Leftarrow$ gilt nicht)

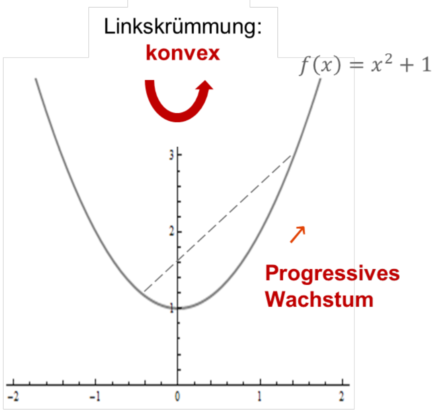
$f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ $\Rightarrow$ f streng **monoton fallend** auf I ($\Leftarrow$ gilt nicht)

$f'(x) = 0$ bei $x = x_0$ $\Leftrightarrow$ f hat waagerechte Tangente $\Rightarrow$ f hat Max, Min oder Sattelpunkt in x_0

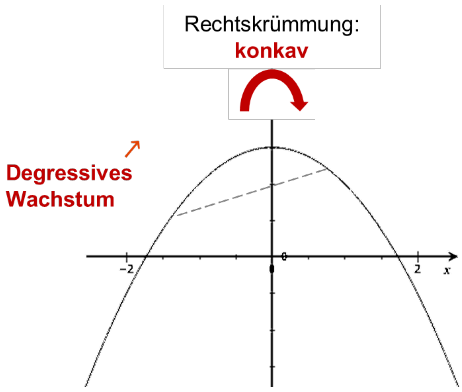
Am Beispiel $f(x) = 3 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2$



Krümmung: konvex, konkav



Konvex: Verbindungsgerade zw. je 2 Punkten liegt oberhalb der Kurve



Konkav: Verbindungsgerade zw. je 2 Punkten liegt unterhalb der Kurve

Krümmung – Die Rolle der 2. Ableitung: Man ermittle die Intervalle, in denen f'' positiv bzw. negativ ist:

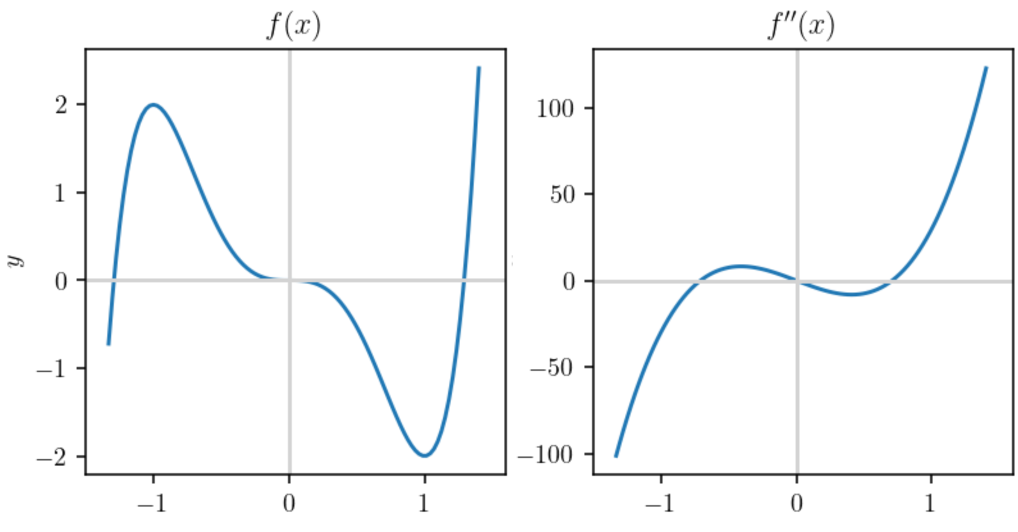
$f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ $\Rightarrow$ f' (Steigung) nimmt auf I streng monoton zu $\Leftrightarrow$ Linkskrümmung: f ist konvex auf I

$f''(x) < 0$ für alle $x \in I$ $\Rightarrow$ f' (Steigung) nimmt auf I streng monoton ab $\Leftrightarrow$ Rechtskrümmung: f ist konkav auf I

$f''(x) = 0$ bei $x = x_0$ $\Rightarrow$ f hat Wendestelle oder evtl. doch Max., Min in in x_0

WS = Wendestelle = Stelle mit **Wechsel der Krümmungsrichtung** $\Leftrightarrow$ **Vorzeichenwechsel von f''**

Am Beispiel $f(x) = 3 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x$

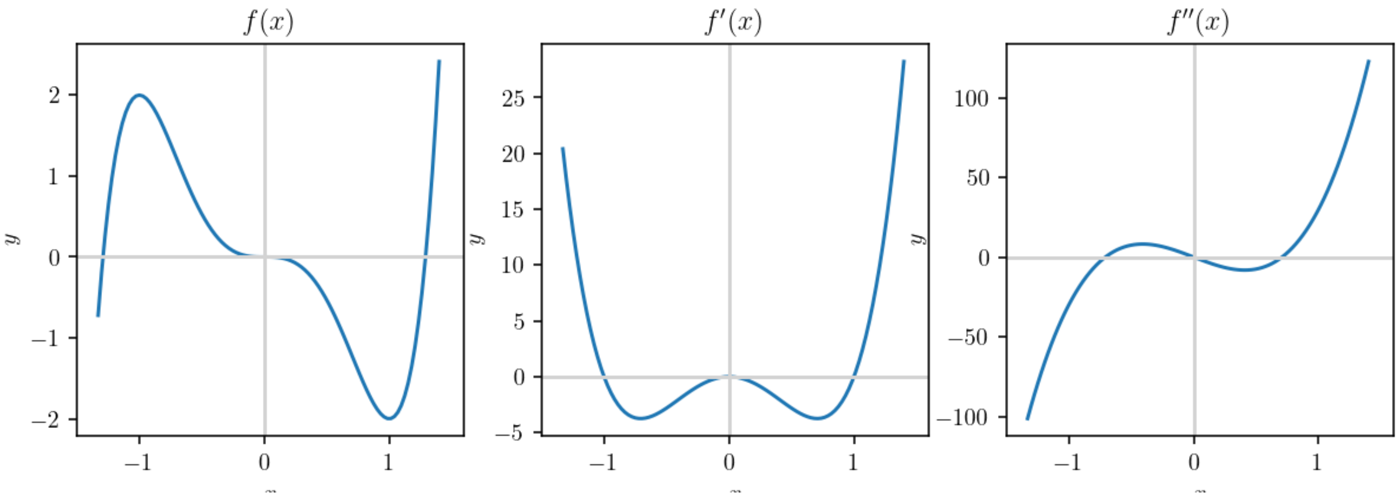


Die zweite Ableitung $f''(x)$ist $\begin{cases} < 0 & x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ = 0 & x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ > 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \\ = 0 & x = 0 \\ < 0 & 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ = 0 & x = 1/\sqrt{2} \\ > 0 & x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Extremwerte – Stationäre Punkte - Die Rolle der Ableitungen $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$

$y_0 = f(x_0)$ **heißt…**	**Mathematisch…**	**Einfach gesprochen…**
Globales bzw. **absolutes Maximum von f**	$f(x_0) > f(x)$ für <u>alle</u> $x \neq x_0$ (aus D)	Der Wert von f an der Stelle x_0 ist der größte im Vergleich zu allen andere Funktionswerten.
Lokales bzw. **relatives Maximum**	$f(x_0) > f(x)$ für alle $x \neq x_0$ in einer (kleinen) Umgebung von x_0	Der Wert von f an der Stelle x_0 ist zumindest nahe um x_0 der größte.
… Minimum	Analog oben mit „<“ anstelle „>“	Analog oben mit „kleinste“ anstelle „größte“

Wir betrachten als Beispiel wieder die Funktion $f(x) = 3 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3$ auf dem Intervall $[-\frac{4}{3}; 1{,}4]$.



Beobachtungen:

- Die Funktion hat ihr globales Maximum (auf dem gegebenen Intervall) am rechten Rand, bei $x = 1{,}4$.
- Die Funktion hat ein lokales Maximum bei $x = -1$ mit Funktionswert $f(-1) = 2$
  - Am lokalen Maximum ist die Funktion flach, also $f'(-1) = 0$
  - Die erste Ableitung wechselt hier ihr Vorzeichen von + nach -
  - Die Funktion ist konvex (Linkskrümmung): $f''(-1) = -30 < 0$
- Die Funktion hat ein lokales Minimum bei $x = 1$ mit Funktionswert $f(1) = -2$
  - Am lokalen Minimum ist die Funktion flach, also $f'(1) = 0$
  - Die erste Ableitung wechselt hier ihr Vorzeichen von - nach +
  - Die Funktion ist konkav (Rechtskrümmung): $f''(1) = 30 > 0$
- Das lokale Minimum bei 1 ist gleichzeitig das globale Minimum.
- Bei $x = 0$ ist die Funktion ebenfalls flach, $f'(0) = 0$, aber es liegt keine Extremstelle, sondern ein **Sattelpunkt** vor. Die zweite Ableitung ist hier ebenfalls 0.

Extremwerte rechnerisch ermitteln

A. Lokale Extremstellen = Stellen mit **Wechsel der Steigungsrichtung** $\Leftrightarrow$ **Vorzeichenwechsel von f'**

<u>Schritt 1: Notwendige Bedingung</u>: **Stationäre Stellen finden** (waagerechte Tangente):

$f'(x) = 0$ lösen durch x_0 ($\Rightarrow$ x_0 <u>könnte</u> Extremstelle sein).

<u>Schritt 2: Hinreichende Bedingung</u>: Tatsächliche Extrema von Sattelpunkt unterscheiden

VZW von f' (in deren NS) begründen: <u>explizit</u> oder über die <u>2. Ableitung:</u>

$f''(x_0) > 0$ $\Longrightarrow$ f' VZW von $-$ nach $+$ $\Longrightarrow$ f Linkskrümmung $\Longrightarrow$ f **lokales Minimum** bei x_0
$f''(x_0) < 0$ $\Longrightarrow$ f' VZW von $+$ nach $-$ $\Longrightarrow$ f Rechtskrümmung $\Longrightarrow$ f **lokales Maximum** bei x_0

Falls $f''(x_0) = 0$ muss der VZW geprüft werden.

B. Verhalten am Rand von D? Gibt es am Rand Funktionswert(e) (Randextremum) oder (nur) Grenzwert(e)?

C. Globale Extremwerte: Vergleich aus (A) und (B) liefert ggf. das **globale** Maximum und/oder Minimum.

Auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt ein stetiges f das absolute Max / Min an. Auf einem unbeschränkten oder offenen Intervall kann der Grenzwert zeigen, dass keines der lokalen Extrema ein globales ist.

Welche Aussage ist **falsch**?

(CC BY-NC-SA 3.0 de
TH Rosenheim)

A) Eine Extremalstelle von f' ist eine Wendestelle von f.
B) Jede Wendestelle einer Funktion f ist eine Extremalstelle von f'.
C) Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.
D) Eine zweimal differenzierbare Funktion f kann bei x_0 ein lokales Extremum besitzen, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.
E) Ich müsste raten.

Eine auf $[0; 5]$ definierte Funktion sei zweimal stetig differenzierbar und es gilt $f''(x) < 0$. Dann hat f eine globale Maximalstelle bei $x_0 = 5$.

(CC BY-NC-SA 3.0 de
TH Rosenheim)

A) Wahr.
B) Falsch.
C) Manchmal.
D) Ich müsste raten.

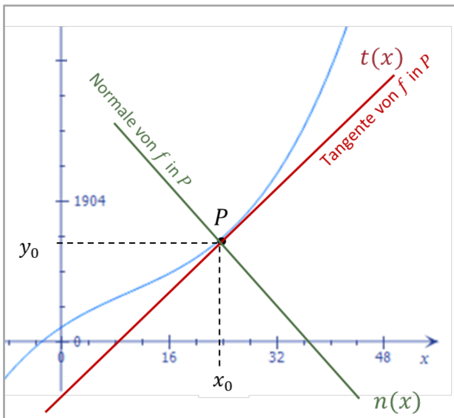
14 Beispiele zu Interpretation von Funktionen, Ableitungen und Extremwerten

Adaptiert aus Hahn, Steffen / Prediger, Susanne (2004): Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion Ein Plädoyer für das Qualitative, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 217–220.

$f(x)$	$f'(x)$	**Extrempunkt**	**Wendepunkte**
Entfernung von einem festen Punkt in Abhängigkeit von der Zeit x.			
Ausbreitung Epidemie: Anzahl der Erkrankten zu einem Zeitpunkt x			
Höhe der Staatschulden im Jahr x			
Landwirtschaftlicher Output (Menge des Ertrags) in Abhängigkeit von der investierten Arbeit (Anzahl der Arbeitsstunden x)			

Tangente und Normale, Linearisierung von f

Die Tangente ist die beste lineare Annäherung an eine (ggf. komplizierte) Funktion f im Punkt $P(x_0|y_0)$, denn sie stimmt mit f nicht nur im Funktionswert, sondern sogar in der Steigung überein. Man spricht auch von Linearisierung der Funktion f. Im Kapitel über Taylorpolynome und Potenzreihenentwicklungen werden wir dies verallgemeinern.



Tangente im Punkt $P = P(x_0|y_0)$

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

„Linearisierung von f": Einzige lineare Funktion (Gerade), die an der Stelle x_0 mit f und f' (Steigung) übereinstimmt.

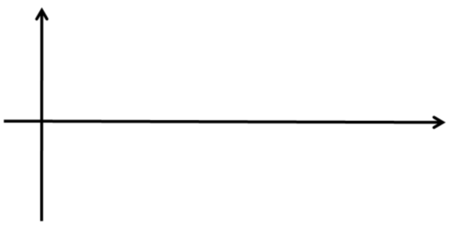
Normale im Punkt $P = P(x_0|y_0)$

$n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Einzige lineare Funktion durch P, die senkrecht zur Tangente von f ist, Die Steigung ist $-\frac{1}{f'(x_0)}$

15 Beispiele zu Tangenten- und Normalen-Gleichung

Die **beste lineare Annäherung an $f(x) = \sin x$** im Punkt $(0,0)$ ist die Funktion $t(x) = x$. Begründung?

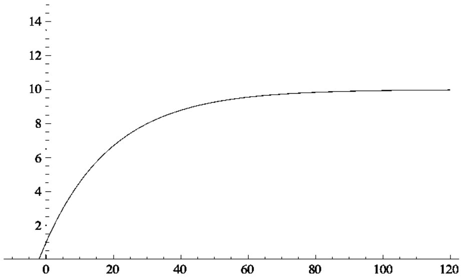


Anwendung: Wenn wir z.B. bei Berechnungen in der **Computergrafik** wissen, dass sowieso nur **kleine Winkel** auftreten können, dann kann man (z.B. innerhalb einer Schleife) die Rechenzeit verkürzen, indem man $\sin x$ durch den einfacheren Ausdruck x ersetzt.

Exponentielles Wachstum bzw. Zerfall gegen eine Schranke S

haben wir z.B. beim **Aufladen eines Kondensators** kennengelernt (dort war $y_0 = 0,\ S = u_0,\ b = \frac{1}{RC}$)

$\boldsymbol{y = f(t) = S - Ae^{-bt}}$ mit $A = S - y_0\,,\ \ b > 0$



Skizze für Parameter $y_0 = 1,\ S = 10,\ b = 0{,}1$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $t = 0$ und den Zeitpunkt, an dem diese das Niveau S erreicht.

1) Ableitung?

2) Tangente bei $t = 0$?

3) Schnitt mit dem Niveau $y = S$?

Stellen Sie auch die Gleichung der Normale zu dieser Tangente auf.

Wenn $e^{0,5}$ durch die Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ im Punkt $(0,1)$ angenähert wird, dann ist die der so erhaltene Wert:

A) $0,5$
B) $1 + e^{0,5}$
C) $1,5$
D) $e/2$

(CGQ)

Sei $f''(x) < 0$ für x in der Nähe eines Punktes a. Dann wird durch die Linearisierung von f am Punkt x der Wert von f an der Stelle a

A) überschätzt.
B) unterschätzt.
C) es fehlen Informationen.

(CGQ)

Bislang nicht berechenbare Grenzwerte

Regel von de l'Hospital zur Berechnung von Grenzwerten bei unbestimmten Ausdrücken

Regel von de l'Hospital: Für Grenzwerte, die auf einen **unbestimmten Ausdruck der Form**

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

führen, bleibt der Grenzwert gleich, wenn man Zähler und Nenner separat ableitet:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(1) Falls die rechte Seite nun einen bestimmten Ausdruck ergibt (siehe auch Erlaubtes Rechnen mit Unendlich), ist man fertig.

(2) Nur falls die rechte Seite wieder ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ wäre, nochmals differenzieren…

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

(3) Statt $x \to x_0$ darf auch $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ stehen.

(4) Die Anwendung von de l'Hospital, ohne dass die Voraussetzung $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ erfüllt ist, kann zu falschen Ergebnissen führen.

(5) Manchmal nützt die Regel von de l'Hospital trotz zulässiger Voraussetzung nichts.

16 Beispiele zur Grenzwertberechnung mit Hilfe der Regel von de l'Hospital für unbestimmte Ausdrücke $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$

16.1	$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{e^x - 1}$ Eine unberechtigte (weitere) Anwendung der Regel von de l'Hospital würde zu einem falschen Ergebnis führen:
16.2	$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}$
16.3	$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2x-1)}{x^2}$
16.4	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$

Wichtige Folgerung: e^x wächst schneller als jede Potenz x^n (ab jetzt ohne Beweis verwendbar)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} x^{-n} e^x = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$$

Wichtiger Grenzwert für $\sin x$ (ab jetzt ohne Beweis verwendbar)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

Herleitung mit Hilfe des Differentialquotienten

Wie behandelt man die restlichen Ausdrücke beim Berechnen von Grenzwerten? (optional)

Grenzwerte
führen auf Ausdrücke der Form

Bestimmte Ausdrücke (Erlaubtes Rechnen mit ∞)	**Unbestimmten** Ausdrücke als **Brüche**:	Die **anderen unbestimmten Ausdrücke**
$\frac{1}{\infty} = 0^+, \ldots$ $\frac{1}{0^-} = -\infty, \ldots$ $e^{-\infty} = 0^+, \ldots$	$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ **Merke: Regel von de l'Hospital** gilt **nur** für diese zwei Brüche! **Merke:** Sonderfall $\frac{\textbf{Polynom}}{\textbf{Polynom}}$ Für $x \to \pm\infty$ genügen höchste Potenzen!	$\mathbf{0} \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $\mathbf{1}^\infty$, $\infty^\mathbf{0}$, $\mathbf{0^0}$ kann man nicht direkt mit der Regel von de l'Hospital bearbeiten, wohl aber auf die günstige Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ **umformen!**

17 Beispiele für Umformungen in den Fällen $\mathbf{0} \cdot \infty$ bzw. $\infty - \infty$ bzw. $\mathbf{1}^\infty$, $\infty^\mathbf{0}$, $\mathbf{0^0}$

17.1	**Der Fall $\mathbf{0} \cdot \infty$ wird über Doppelbruch in $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ umgewandelt:** $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ **Die Umwandlung gelingt immer:** $u(x)\cdot v(x) = \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
17.2	**Der Fall $\infty - \infty$ tritt oft in Form** $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$) auf und wird auf einen Bruchstrich gebracht (Hauptnenner bilden): $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ **Diese Umwandlung gelingt immer:** $u(x) - v(x) = \infty - \infty = \frac{1}{\frac{1}{u(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{v(x)}} = \frac{1}{u_1(x)} - \frac{1}{v_1(x)} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{v_1(x) - u_1(x)}{u_1(x)\cdot v_1(x)}$
17.3	**Der Fall $\mathbf{1}^\infty$, $\infty^\mathbf{0}$, $\mathbf{0^0}$ wird auf die Form** $e^{\infty\cdot 0}$, $e^{0\cdot\infty}$, $e^{0\cdot\infty}$ geschrieben und der Exponent nach Fall (1) behandelt. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **Diese Umwandlung gelingt immer:** $u(x)^{v(x)} = e^{\ln(u(x)^{v(x)})} = e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$

Welcher Grenzwert lässt sich **nicht** mit der Regel von l'Hospital berechnen?

A) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin(x)$

B) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x)}$

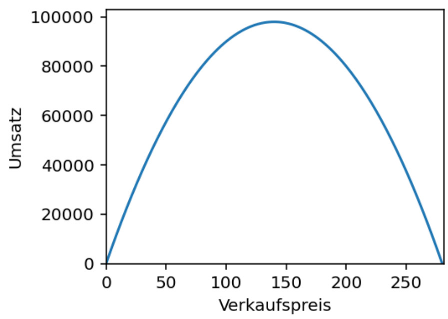
C) $\lim\limits_{x \to \pi/3} \frac{\cos(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$

D) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 - 2x + 1}{8x^2 + 1}$

Extremwertaufgaben / Optimierungsprobleme

18 Extremwertproblem / Eindimensionale Optimierung

Eine Firma stellt Kuckucksuhren her. Vom Modell "De Luxe" werden monatlich 400 Stück zum Preis von $p = 200$€ verkauft. Eine Marktanalyse kam zu dem Ergebnis, dass eine Preisreduktion um 1€ die Nachfrage um 5 Stück steigert. Mit welchem Preis kann die Firma ihren Gewinn maximieren?



Klar ist:

- Bei einem Preis von 0€ könnte die Firma zwar 1400 Uhren absetzen, macht aber keinen Gewinn mehr.
- Bei einem Preis von 280€ wird keine Uhr mehr verkauft, die Firma macht ebenfalls keinen Gewinn mehr.

Irgendwo dazwischen gibt es einen optimalen Preis, bei dem der Gewinn am höchsten ist. Wie können Sie diesen optimalen Preis berechnen?

Wie lautet die Nachfragefunktion $D(p)$, wie viele Stück werden also abhängig vom Preis verkauft?

In welchem Preisbereich erhöht eine Preisreduktion den Erlös $R(p) = p\,D(p)$? Bei welchem Preis kann die Firma also ihren Erlös maximieren? Untersuchen Sie Preise im Intervall $[0,280]$.

Häufig muss man von einer Funktion $y = f(x)$ den **größten oder kleinsten Funktionswert** in einem gewissen Intervall D bestimmen.

Schritt A: **Zielfunktion aufstellen** (Extremwertproblem mathematisch beschreiben)
1. **Hauptbedingung**: Welche Größe soll max/min werden? Welches sind variable Größen, welches Konstanten?
2. **Nebenbedingungen**: Falls mehrere variable Größen: Bedingungen, über die diese voneinander abhängen? Kann über die NB eine Variable durch eine andere ausgedrückt werden? In Hauptbedingung einsetzen!
3. **Definitionsbereich $\boldsymbol{D}$**: Zwischen welchen Werten darf die Variable sinnvollerweise variieren?
4. **Vereinfachung der Zielfunktion möglich?** Gibt es eine vereinfachte Version mit denselben Extremstellen?

Schritt B: Lokale Maxima bzw. Minima (im Innern von D) mit Hilfe der Differentialrechnung die bestimmen.

1. Notwendige Bedingung: 1. Ableitung = 0 (stationäre Stellen)
2. Hinreichende Bedingung: Da 2. Ableitung oft aufwändig zu bestimmen, nutzt man auch folgende Vorgehensweise: In vielen Fällen kann aus Anwendungssicht argumentieren, dass es (in einem Bereich) ein (lokales) Max. bzw. Min geben muss und dass folglich eine gefundene (eindeutige) stationäre Stelle die gesuchte Extremstelle sein muss. Dann kann auf den rechnerischen Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichtet werden.

Schritt C: Verhalten am Rand des Definitionsbereiches begutachten (Funktionswert, ansonsten Grenzwert)

Fazit: Globale Extrema durch Vergleich von (B) und (C).

19 Beispiele (weitere im Abschnitt Gemischte Übungen)

Geometrische Problemstellungen	
19.1	**Rechtecke**: Unter allen Rechtecken mit der Flächendiagonalen $d = 20$ cm ist dasjenige mit dem größten Flächeninhalt zu bestimmen. Wie groß ist dieser Flächeninhalt? **Schritt A**: Zielfunktion aufstellen / Zwischen welchen Werten darf die Variable sinnvollerweise variieren? 1. Welche Größe = max/min? Welche Größen konstant bzw. variabel? 2. Falls mehrere variable Größen: Zusammenhang (NB)? Eine Variable durch die andere ausdrücken? 3. Zielfunktion und ihr Definitionsbereich: 4. Zielfunktion vereinfachen? **Schritt B:** Lokale Extrema suchen **Schritt C:** Randwerte begutachten **Fazit:**

Mit Hilfe der Ableitung: Näherungsverfahren für Nullstellenbestimmung

Problemstellung: Nur in Spezialfällen können wir die Nullstellen einer Funktion rechnerisch ermitteln. Beispiel: Für quadratische Funktionen finden wir die Nullstellen durch die pq-Formel.

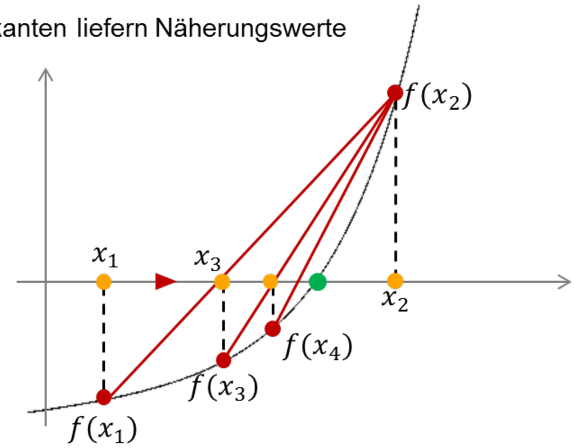
Was machen wir, wenn wir für kompliziertere Funktionsausdrücke die Nullstellen bestimmen müssen? Iterative Verfahren für beliebig genaue Näherungslösung!

Nullstellenbestimmung iterativ

Näherungsverfahren

Regula falsi (basiert auf Sehnen/Sekanten)

Sekanten liefern Näherungswerte



Wähle 2 Startpunkte mit **unterschiedl**. Vorzeichen für f

Schnittpunkt der Verbindungsgeraden per Formel:

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \quad \text{und dazu:} \quad f(x_3)$$

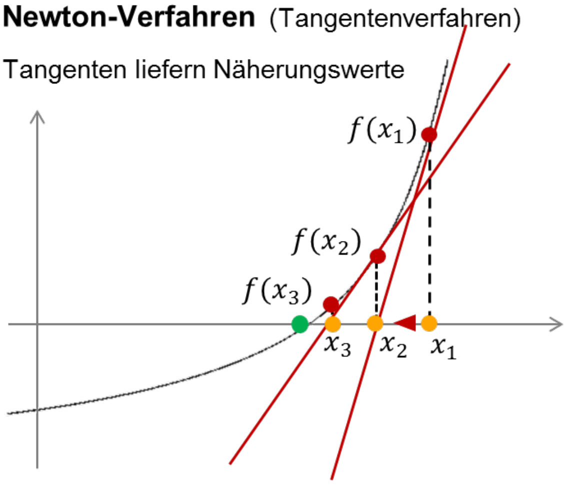
Prüfe Abbruchbedingung: $f(x_3) = 0?$

Bzw. zumindest Fehler klein genug? Falls ja: Ende

Falls nein: Wiederhole Verfahren mit dem neuen Punkt plus einem der vorigen, so dass unterschiedl. VZ für f.

Newton-Verfahren (Tangentenverfahren)

Tangenten liefern Näherungswerte



Wähle 1 Startpunkt $(x_1, f(x_1))$

Schnittpunkt der Tangente per Formel:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{und dazu:} \quad f(x_2)$$

Prüfe Abbruchbedingung: $f(x_2) = 0?$

Bzw. zumindest Fehler klein genug? Falls ja: Ende

Falls nein: Wiederhole Verfahren mit dem neuen Startpunkt.

Anmerkungen:

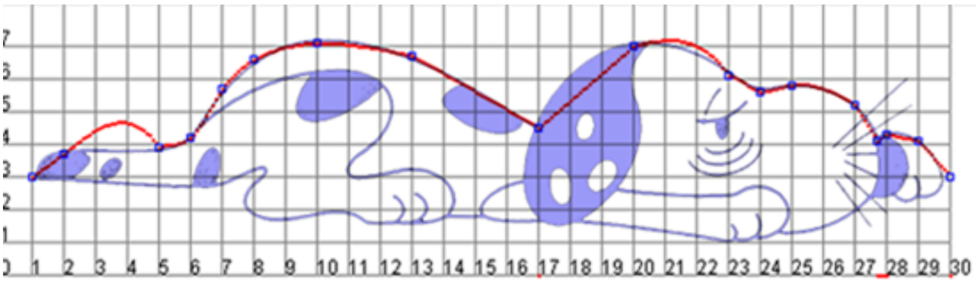
- Abbruchbedingung: **Fehler klein genug?** Vgl. die Nachkommastellen aufeinanderfolgender Näherungswerte x_k und x_{k+1}.
- Die Voraussetzungen an f (stetig bzw. differenzierbar) sind bei uns i.d.R. erfüllt.
- Das Newtonverfahren konvergiert in d. R. schneller als Regula falsi.
- Es benutzt aber die Ableitung der Funktion, die Auswertung der einzelnen Schritte deshalb ggf. aufwendiger.

20 Beispiel und Übungen

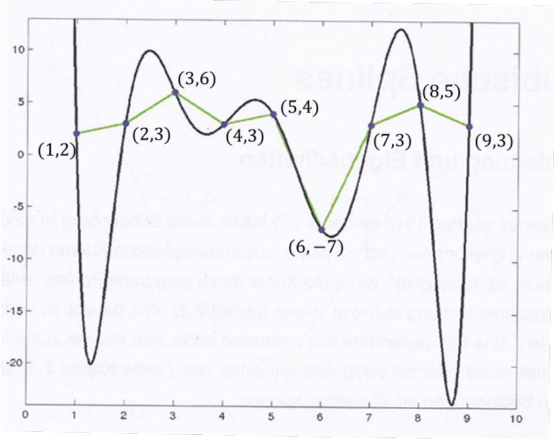
Man ermittle die Nullstelle(n) der angegebenen Funktion bzw. die Lösung der Gleichung:			**Kontrolle**
20.1	$f(x) = e^x + x - 18$	Nullstelle auf 2 Nachkommastellen genau.	2,7261

Siehe die Animation in https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren

Anhang: Splines – „Glatte Übergänge“ in graphischen Darstellungen erzeugen



Ziel: Punkte in einem Koordinatensystem miteinander möglichst „glatt“ zu verbinden ohne unerwünschte Ecken zu erhalten.



Können wir Polynome verwenden?

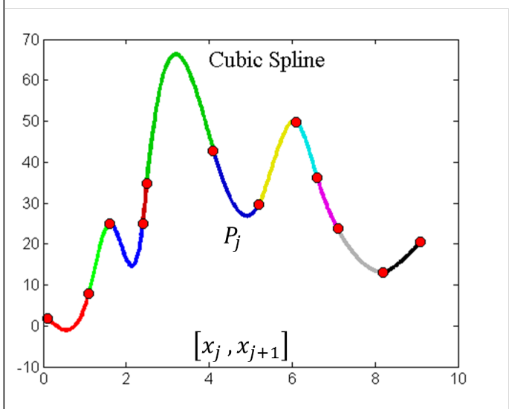
Versucht man, z.B. durch 9 Punkte **ein einziges** Polynom durchzuführen (Interpolation), so erhält man unerwünschte Oszillationseffekte.

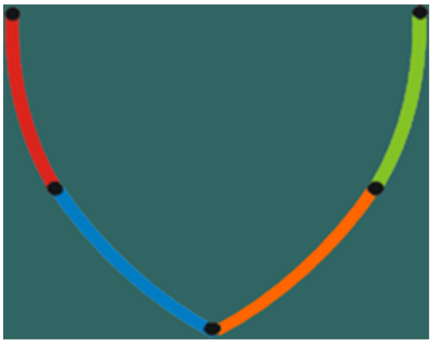
Verbindet man stattdessen stückweise mit Geraden, so erhält man unerwünschte Ecken.

Deshalb anstelle Geraden Polynome höheren Grades aneinander stückeln.

Glatte Übergänge erfordern gleiche Steigung in den Verbindungstellen und gleich Krümmungsrichtung bzw. Krümmungswerte.

Idee: Mehrere Polynome (niederen Grades) „glatt“ aneinander stückeln.





Herkunft aus dem Schiffsbau

(lange dünne Latte = Straklatte = EN: spline)

Kubische Splines: Polynome 3. Grades für jeden Abschnitt $[x_j, x_{j+1}]$.

mit der Nebenbedingung, dass je 2 Nachbarpolynome in den Übergangspunkten nicht nur zusammenstoßen (gleiche Funktionswerte), sondern auch gleiche Steigung und gleicher Krümmungswert (1. Ableitung und 2. Ableitung gleich).

Ansatz: $P_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j$ auf $[x_j, x_{j+1}]$ und y_j = vorgeg. Funktionswert an der Stelle x_j $(*)$

Gleiche Funktionswerte: $P_j(x_j) = y_j$ und $P_j(x_{j+1}) = y_{j+1}$

Gleiche Steigung: $P_j'(x_{j+1}) = P_{j+1}'(x_{j+1})$

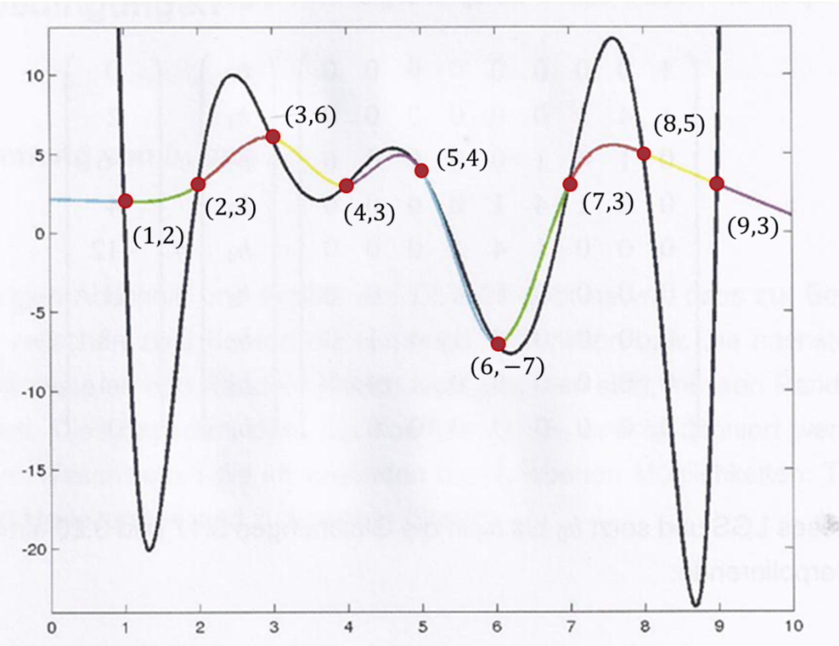
Gleiche Krümmung: $P_j''(x_{j+1}) = P_{j+1}''(x_{j+1})$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich ein LGS für b_j. Aus b_j kann man die a_j und c_j berechnen. Zudem $d_j = y_j$.

Aus den vielen Polynomen 3. Grades wird eine stückweise definierte stetige (und sogar glatte) Gesamtfunktion. Man nennt diesen Ansatz kubische Splines. Sie werden auch in CAD-Systemen benutzt.

$$K(x)=\begin{cases} -0.1371(x)+2.137 & \text{für } x\in[-\infty, \\ 1.1371(x-1)^3-0.1371(x-1)+2 & \text{für } x\in[1,2) \\ -3.6853(x-2)^3+3.4112(x-2)^2+3.2741(x-2)+3 & \text{für } x\in[2,3) \\ 5.6041(x-3)^3-7.6447(x-3)^2-0.9594(x-3)+6 & \text{für } x\in[3,4) \\ -8.7311(x-4)^3+9.1676(x-4)^2+0.5635(x-4)+3 & \text{für } x\in[4,5) \\ 13.3204(x-5)^3-17.0258(x-5)^2-7.2946(x-5)+4 & \text{für } x\in[5,6) \\ -11.5505(x-6)^3+22.9355(x-6)^2-1.3849(x-6)-7 & \text{für } x\in[6,7) \\ 3.8817(x-7)^3-11.7161(x-7)^2+9.8344(x-7)+3 & \text{für } x\in[7,8) \\ 0.0237(x-8)^3-0.0710(x-8)^2-1.9527(x-8)+5 & \text{für } x\in[8,9) \\ -1.9527(x-9)+3 & \text{für } x\in[9,\infty) \end{cases}$$

Die Gesamtfunktion geht durch die vorgegebenen Punkte mit „glatten“ Übergängen und ohne die Oszillationseffekte, die ein einzelnes Interpolationspolynom bewirkt.



21 Übungen: Splines

Legen Sie durch die Punkte (1,2) und (2,3) und (3,6) zwei **kubische Splines** so, dass für die Gesamtfunktion $f(x)$ an der Nahtstelle $x_2 = 2$ die typischen Spline-Bedingungen für einen glatten Übergang gewahrt sind und an den äußeren Randpunkten Vorgaben für Steigung $f'(1) = -1$ und $f'(3) = 1$ eingehalten werden. Ansatz: $P_1(x) = a_1(x-1)^3 + b_1(x-1)^2 + c_1(x-1) + d_1$ auf [1,2] $P_2(x) = a_2(x-2)^3 + b_2(x-2)^2 + c_2(x-2) + d_2$ auf [2,3]	