7.2 Beschränkte und monotone Funktionen

Wir wenden uns zunächst einigen sehr einfachen Eigenschaften von Funktionen zu, die den entsprechenden Eigenschaften der Folgen ähneln. Die erste Eigenschaft gibt zum Ausdruck, dass die Funktionswerte einer Funktion nicht beliebig groß werden. Da Funktionen negative oder sogar komplexe Werte annehmen können, ist dieses *groß* im Sinne des Betrages zu verstehen. Demnach heißt eine Funktion $f : D \to W$ **beschränkt**, falls es eine positive Zahl C gibt mit

$$|f(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in D.$$

Eine Funktion, die diese Eigenschaft für keine positive Zahl C besitzt, heißt **unbeschränkt**.

Bei diesem Begriff wird wieder klar, dass eine Eigenschaft einer Funktion nicht nur von der Abbildungsvorschrift, sondern auch vom Definitionsbereich abhängt. Betrachten wir die Funktion $f : (1,2) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Da sich beim Bilden des Kehrwerts (bei gleichen Vorzeichen auf beiden Seiten) Ungleichungszeichen umdrehen, erhalten wir aus $x > 1$ die Abschätzung

$$f(x) = \frac{1}{x} < 1.$$

Da die Funktionswerte auch alle positiv sind, gilt also $|f(x)| < 1$ für alle $x \in (1,2)$ – die Funktion f ist beschränkt.

Nun betrachten wir $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, ebenfalls mit

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion ist unbeschränkt, denn für $x < 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$g(x) > n.$$

Die Funktionswerte können also größer werden als jede beliebige natürliche Zahl.

Die beiden Funktionen f und g unterscheiden sich nur im Definitionsbereich, die Abbildungsvorschrift ist dieselbe. Trotzdem ist die eine beschränkt, die andere nicht. Die Situation ist auch in der Abb. 7.8 veranschaulicht.

Wie bei Folgen kann man bei *reellwertigen* Funktionen auch von **nach oben beschränkten** oder **nach unten beschränkten** Funktionen sprechen, wenn

$$f(x) \leq C \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq C$$

für alle $x \in D$ gilt. So ist etwa die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ zwar, wie wir oben gesehen haben, unbeschränkt, aber sehr wohl nach unten beschränkt, siehe Abb. 7.8.

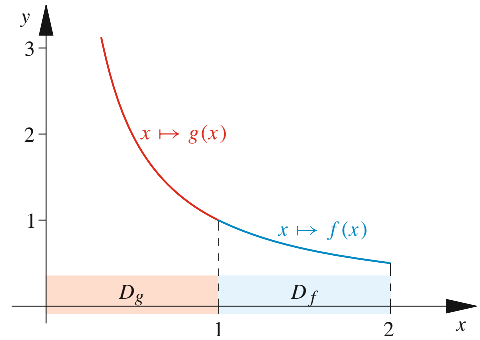


Abb. 7.8 Die beiden Funktionen f und g haben dieselbe Abbildungsvorschrift – aber f ist beschränkt, g nicht

Noch allgemeiner kann bei zwei reellwertigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ mit demselben Definitionsbereich die eine Funktion eine Schranke für eine andere Funktion bilden, wenn nämlich die Ungleichung

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt. Dies ist oft ein nützliches Werkzeug: Man kann etwa eine kompliziertere Funktion durch eine einfachere beschränken, um auf Eigenschaften der komplizierteren Funktion zu schließen.

Beispiel Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

Der Graph der Funktion ist in der Abb. 7.9 dargestellt. Indem wir im Zähler eine Null addieren, erhalten wir

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

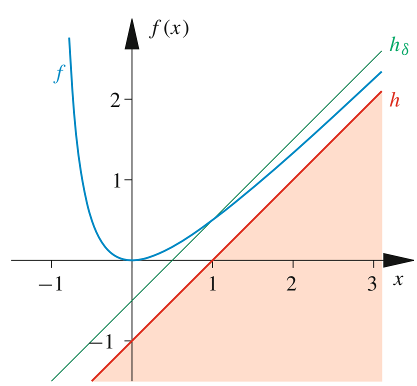


Abb. 7.9 Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ befindet sich oberhalb der Geraden $h(x) = x - 1$, aber unterschreitet die Parallele h_δ für genügend großes x

Der Bruch $1/(x+1)$ ist aber stets positiv für $x > -1$. Also folgt

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} \geq x - 1.$$

Der Graph von f befindet sich also stets oberhalb der Geraden $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x - 1$, wie in der Abb. 7.9 gezeigt ist. Wir sagen, dass f durch h nach unten beschränkt ist. Unter anderem können wir daran ablesen, dass f nicht nach oben beschränkt ist, denn h ist nicht nach oben beschränkt.

In der Abbildung sieht man aber auch, dass sich der Graph von f dem Graphen von h anzunähern scheint. Um dies mathematisch zu erfassen, verschieben wir den Graphen von h ein kleines Stück nach oben und erhalten $h_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_\delta(x) = x - 1 + \delta$ für ein $\delta > 0$. Setze $x_\delta = 1/\delta - 1$. Dann gilt für $x \geq x_\delta$ die Ungleichung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &\overset{x \geq x_\delta}{\leq} x - 1 + \frac{1}{x_\delta + 1} \\ &= x - 1 + \delta = h_\delta(x) \end{aligned}$$

Für $x \geq x_\delta$ gilt also $f(x) \leq h_\delta(x)$. Da wir diese Überlegung für jedes noch so kleine $\delta > 0$ durchführen können, muss sich der Graph von f also dem Graphen von h immer weiter annähern. ◀

Eine zweite elementare Eigenschaft, die wir bei Folgen kennengelernt haben, ist die Monotonie. Auch diese lässt sich ganz analog auf Funktionen übertragen. Bei diesem Begriff müssen aber D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$ sein. Eine Funktion $f : D \to W$ heißt **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, falls für x, $y \in D$ mit $x < y$ stets

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(y)$$

gilt. Ist in diesen Ungleichungen die Gleichheit nicht zugelassen, so sprechen wir von einer **streng** monoton wachsenden bzw. einer **streng** monoton fallenden Funktion.

Selbstfrage 2

Überlegen Sie sich zwei Funktionen mit derselben Abbildungsvorschrift aber unterschiedlichen Definitionsbereichen, sodass die eine monoton wachsend, die andere monoton fallend ist.

Jede streng monotone Funktion ist injektiv

Auf S. 38 haben wir den Begriff *injektiv* kennengelernt. Eine injektive Abbildung hat die Eigenschaft, dass es zu jedem Funktionswert $f(x)$ nur genau ein Urbild $x \in D$ gibt. Wir wollen uns klar machen, dass dies bei einer streng monotonen Funktion

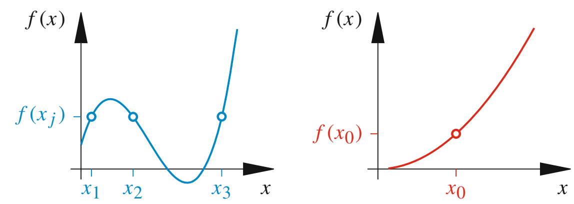


Abb. 7.10 Eine nicht-monotone Funktion braucht nicht injektiv zu sein (links). Eine streng monotone Funktion ist immer injektiv (rechts)

stets der Fall ist. Wir beschränken uns auf den Fall einer streng monoton wachsenden Funktion. Für eine streng monoton fallende Funktion geht die Herleitung analog. Wir nehmen an, dass es zwei Stellen $x, y \in D$ mit $f(x) = f(y)$ gibt. Ist nun $x < y$, so muss $f(x) < f(y)$ sein, da f streng monoton wächst. Ist dagegen $x > y$, so muss auch $f(x) > f(y)$ gelten. Beides steht im Widerspruch zu $f(x) = f(y)$, es bleibt also nur $x = y$. Somit ist gezeigt, dass jede streng monotone Funktion injektiv ist. Geometrisch ist diese Aussage sofort klar, wie man in der Abb. 7.10 sieht.

Wir wollen uns klar machen, dass die Umkehrung dieser Aussage keinesfalls gilt. Es ist also nicht jede injektive Funktion streng monoton. Dazu betrachten wir die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases},$$

die in Abb. 7.11 zu sehen ist. Für $0 \leq x < 1$ ist auch $0 \leq f(x) < 1$. Dagegen ist für $1 \leq x \leq 2$ die Ungleichung $1 \leq f(x) \leq 2$ erfüllt. Die Bilder der beiden Intervalle $[0, 1)$ und $[1, 2]$ unter f haben keine gemeinsamen Punkte. Es reicht also aus, die beiden Intervalle getrennt zu betrachten. Auf beiden ist f aber streng monoton, also injektiv. Es folgt, dass f insgesamt injektiv ist.

Eine Bemerkung zum Abschluss: Am Graphen in Abb. 7.11 ist zu sehen, dass f einen Sprung hat. Im übernächsten Abschnitt werden wir uns den Zusammenhang zwischen Monotonie, Injektivität und dem Auftreten von Sprüngen genauer klar machen.

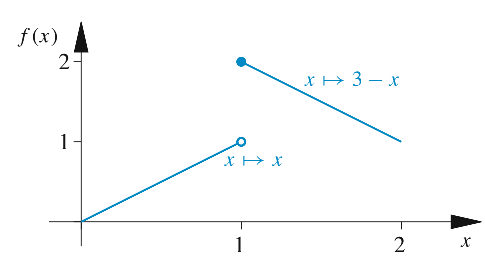


Abb. 7.11 Eine Funktion, die nicht monoton, aber trotzdem injektiv ist: Zu jedem Funktionswert gibt es nur ein Urbild

7.4 Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit

In diesem Kapitel wurden schon die unterschiedlichsten Beispiele für Funktionen betrachtet. In den meisten von uns untersuchten Fällen ist der Graph der Funktion eine glatte Kurve gewesen, aber wir haben auch schon Graphen mit Sprüngen kennengelernt. Auch für dieses unterschiedliche Verhalten gibt es Beispiele in den Naturwissenschaften.

Anwendungsbeispiel Zu den essenziellen Instrumenten an Bord jedes Autos gehört der Tachometer, der zu jedem Zeitpunkt die *Momentangeschwindigkeit* anzeigt (Abb. 7.17). Auch

Abb. 7.17 Das Armaturenbrett eines Autos umfasst die Anzeige vieler stetiger Funktionen – auch die Momentangeschwindigkeit auf dem Tacho

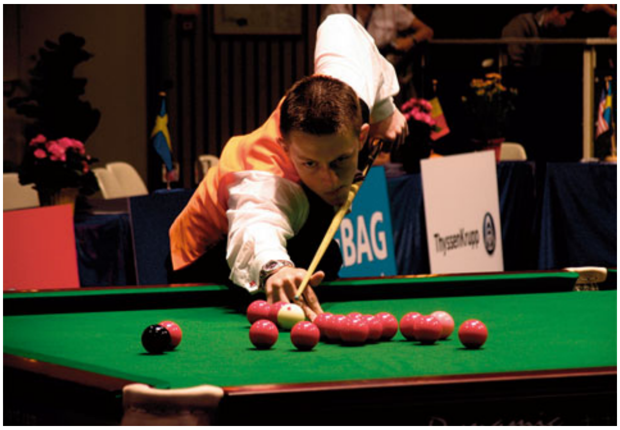


Abb. 7.18 Die Bewegung einer Billardkugel beim Stoß mit einem Queue lässt sich als eine sprunghafte Änderung der Momentangeschwindigkeit idealisieren

wenn sich die Anzeige bei entsprechender Fahrweise durchaus schnell ändern kann, wird sie das niemals sprunghaft tun – oder zumindest nur dann, wenn gerade ein für Fahrzeug und Passagiere katastrophales Ereignis stattfindet.

Beim Billard (Abb. 7.18) stellt sich die Situation vollkommen anders dar. Dazu wollen wir die Idealisierung des vollkommen elastischen Stoßes betrachten, bei dem Impuls und Energie erhalten bleiben (siehe auch das Anwendungsbeispiel auf S. 66) und ferner noch annehmen, dass es sich bei den Kugeln um starre Körper handelt, sie also nicht verformbar sind. Die Kugeln ruhen dann, bis sie entweder vom Queue eines Spielers oder durch eine andere Kugel einen Impuls erhalten. Dann bewegen sie sich sofort mit einer gewissen Geschwindigkeit vorwärts. Den Verlauf der Momentangeschwindigkeit einer Billardkugel zeigt die Abb. 7.19.

Bei diesen Anwendungen ist das Modell ganz entscheidend für die mathematischen Eigenschaften der auftretenden Funktionen: Wählt man statt des idealisierten vollkommen elastischen Stoßes zwischen starren Körpern eine andere Beschreibung der Impulsübertragung für die Billardkugeln, so mag sich die Geschwindigkeitsänderung zwar sehr schnell, aber nicht mehr sprunghaft vollziehen. ◀

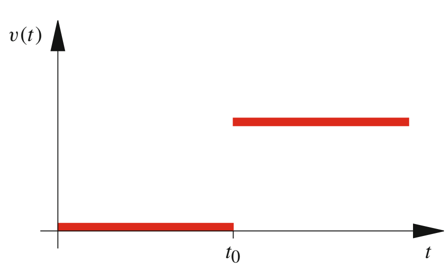


Abb. 7.19 Die Momentangeschwindigkeit einer Billardkugel ist vor und nach dem Stoß konstant. Im Augenblick des als ideal angenommenen Stoßes springt sie

Wie können wir dieses Verhalten nun mathematisch fassen? Der Unterschied zwischen den beiden Situationen besteht darin, dass wir im ersten Fall vom Verhalten in der Nähe eines bestimmten Zeitpunkts auf das Verhalten zu diesem Zeitpunkt schließen können. Wir können auch sagen, dass sich diese Funktion *stabil* verhält: Eine kleine Änderung des Arguments (des Zeitpunktes) bewirkt nur eine kleine Änderung des Funktionswertes (der Momentangeschwindigkeit). Im zweiten Fall ist das nicht möglich, das Verhalten kurz vor dem Stoß hat nichts mit dem Verhalten danach zu tun. Die Funktion verhält sich *instabil*, denn man kann die Änderungen in den Funktionswerten nicht dadurch beliebig klein machen, dass man nur sehr kleine Änderungen im Argument zulässt.

Allerdings könnte sich eine Änderung zwar stabil aber sehr schnell vollziehen. Dann kann man trotzdem durch sehr kleine Änderungen der Argumente nur kleine Änderungen der Funktionswerte zulassen. Allerdings müssen wir dann sehr genau hinsehen, quasi mit einer Lupe. Die Rolle dieser mathematischen Lupe werden konvergente Folgen übernehmen.

Zunächst wird der Begriff des Grenzwertes auf Funktionen übertragen. Dazu sei $f : D \to W$ eine Funktion, sowie $\hat{x}, y \in \mathbb{C}$. Dann heißt y **Grenzwert der Funktionswerte** $f(x)$ **für** x **gegen** $\hat{x}$, falls es eine Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$ gibt und falls für jede solche Folge gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

(siehe dazu auch Abb. 7.20). Diese Tatsache drückt man dann formelmäßig durch

$$\lim_{x\to\hat{x}} f(x) = y$$

aus.

Was unterscheidet nun eine Funktion mit Sprung von einer ohne? Die Antwort gibt der folgende Begriff, der für die gesamte Analysis zentral ist.

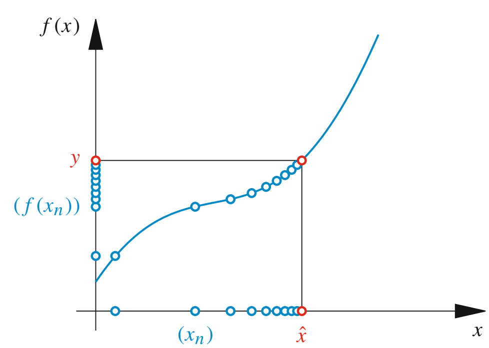


Abb. 7.20 Die Definition des Grenzwertes für Funktionswerte: Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to \hat{x}$ konvergiert $f(x_n)$ gegen y

Definition der Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt an der Stelle $\hat{x} \in D$ **stetig**, falls

$$\lim_{x\to\hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$$

gilt. Ist f an jedem $x \in D$ stetig, so heißt f **auf D stetig**.

Noch klarer wird die Bedeutung dieses Begriffs mit der Formel

$$\lim_{x\to\hat{x}} f(x) = f\big(\lim_{x\to\hat{x}} x\big).$$

Ist eine Funktion also an einer Stelle $\hat{x}$ stetig, so darf man die Grenzwertbildung gegen $\hat{x}$ und die Anwendung der Funktion vertauschen.

Jedes Polynom ist stetig

Untersuchen wir zunächst einige einfache Funktionen auf Stetigkeit.

Beispiel

- Betrachten wir zunächst ein Polynom, etwa $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = 5x^2 - 2x + 1$, das wir an der Stelle $\hat{x} = 0$ auf Stetigkeit überprüfen wollen. Gegeben ist eine beliebige reelle Nullfolge (x_k). Dann gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen (siehe S. 186),

  $$\lim_{k\to\infty} p(x_k) = \lim_{k\to\infty} \big(5x_k^2 - 2x_k + 1\big) = 1 = p(0).$$

  Da die Folge (x_k) ganz beliebig war, folgt also

  $$\lim_{x\to 0} p(x) = p(0),$$

  das Polynom p ist also in 0 stetig.
- Diese Rechnung lässt sich sofort auf jedes Polynom, auch mit komplexen Koeffizienten, übertragen. Mit $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir ein Polynom vom Grad n,

  $$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j,$$

  mit irgendwelchen komplexen Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Wir wollen untersuchen, ob p an einer beliebigen Stelle $\hat{x} \in \mathbb{C}$ stetig ist. Geben wir uns dazu eine Folge (x_k) in $\mathbb{C}$ vor, die gegen $\hat{x}$ konvergiert. Dann gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen,

  $$\lim_{k\to\infty} p(x_k) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lim_{k\to\infty} x_k^j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, \hat{x}^j = p(\hat{x}).$$

  Da die Folge (x_k) beliebig gewählt war, gilt also

  $$\lim_{x\to\hat{x}} p(x) = p(\hat{x}),$$

  p ist also in $\hat{x}$ stetig. Da aber auch $\hat{x}$ beliebig gewählt war, haben wir die Stetigkeit von p auf ganz $\mathbb{C}$ nachgewiesen.

Wir halten fest: *Jedes Polynom ist auf $\mathbb{C}$ eine stetige Funktion.* ◀

Kommentar Das Beispiel zeigt, dass es sehr mühsam ist, bei der Verwendung von Grenzwerten für Funktionswerte immer mit Folgen hantieren zu müssen. Glücklicherweise ist das auch gar nicht notwendig: Alle Rechenregeln für Grenzwerte, die wir von den Folgen her kennen, übertragen sich auf das Rechnen mit Funktionen. Die Übersicht auf S. 186 listet alle diese Regeln auf, sie gelten ganz entsprechend bei Grenzwerten für Funktionswerte. Wir werden sie ab jetzt verwenden und uns dadurch das Leben erheblich vereinfachen. ◀

Eine Folge der Rechenregeln ist, dass die meisten Funktionen, die durch einfache Formeln definiert werden, stetig sind. Die Übersicht auf S. 218 listet die wichtigsten Fälle stetiger Funktionen auf. Um den Begriff der Stetigkeit aber noch besser verstehen zu können, wollen wir uns mit Funktionen beschäftigen, die *nicht* stetig sind.

Vorher definieren wir noch ein wichtiges Hilfsmittel. Insbesondere bei Funktionen mit Sprüngen ist es oft nützlich, sich bei der Bestimmung eines Grenzwerts nur auf eine Richtung zu beschränken. Dazu betrachten wir etwa alle Folgen (x_n) mit Grenzwert $\hat{x}$ und $x_n > \hat{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nähern uns $\hat{x}$ also stets *von oben*. Existiert nun für jede solche Folge der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ und sind alle diese Grenzwerte gleich, so setzen wir

$$\lim_{x\to\hat{x}+} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Analog definiert man den Grenzwert $\lim_{x\to\hat{x}-} f(x)$ für einen Grenzwert *von unten*.

Für diese einseitigen Grenzwerte findet man in der Literatur auch andere Notationen. So ist es etwa auch üblich einen schrägen Pfeil beim Limessymbol zu verwenden:

$$\lim_{x\nearrow\hat{x}} f(x) = \lim_{x\to\hat{x}-} f(x) \quad \text{und}$$
$$\lim_{x\searrow\hat{x}} f(x) = \lim_{x\to\hat{x}+} f(x)$$

Noch kürzer ist die Schreibweise $f(\hat{x}-) = \lim_{x\to\hat{x}-} f(x)$.

Es gibt nun drei typische Situationen, bei denen Funktionen unstetig sein können, die wir im Folgenden vorstellen wollen.

Teil II

Teil II

Übersicht: Stetige Funktionen und Unstetigkeiten

In dieser Übersicht wurden die wichtigsten stetigen Funktionen zusammengestellt. Auch die wichtigsten Beispiele für Unstetigkeiten sind noch einmal aufgeführt.

Polynomfunktionen Ein Polynom

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j,$$

ist an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ definiert und stetig.

Rationale Funktionen Eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit zwei Polynomen p, q ist an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ stetig, an der sie definiert ist (d. h. an der $q(z) \neq 0$ gilt).

An Nullstellen des Nenners, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind, haben rationale Ausdrücke einen *Pol*. Ist ein Funktionswert an dieser Stelle festgelegt, ist die Funktion dort nicht stetig.

Potenzfunktionen Eine Funktion der Form

$$f(x) = x^{p/q}$$

für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist in allen Stellen $x \in (0, \infty)$ stetig.

Insbesondere sind alle *Wurzelfunktionen*

$$f(x) = \sqrt[q]{x}$$

auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig.

Transzendente Standardfunktionen Die im Kap. 4 vorgestellten Funktionen

$$\exp \quad \ln \quad \sin \quad \cos$$

sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Für den natürlichen Logarithmus gilt

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty.$$

Man spricht von einer *Singularität*.

Sprünge Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und gilt

$$\lim_{x \to \hat{x}-} f(x) \neq \lim_{x \to \hat{x}+} f(x),$$

so spricht man von einem *Sprung* an der Stelle $\hat{x}$. Ist $\hat{x} \in D$, so ist f an der Stelle $\hat{x}$ nicht stetig.

Beispiel

- Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ist in der Abb. 7.21 links dargestellt. Der Graph dieser Funktion hat einen *Sprung*. Die Vermutung liegt nahe, dass f an dieser Stelle nicht stetig ist.
In der Tat ist

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \neq 1 = f(1).$$

Also ist f in 1 nicht stetig
- Die Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ soll durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definiert sein. Der Graph ist in der Abb. 7.21 rechts dargestellt. Schon im Kap. 4 hatten wir das Verhalten von $1/x$ bei null einen *Pol* genannt. In der Tat ist g in der Nähe von null unbeschränkt, weder der Grenzwert $\lim_{x \to 0-} g(x)$ noch der Grenzwert $\lim_{x \to 0+} g(x)$ existieren. Also ist g auch nicht stetig.

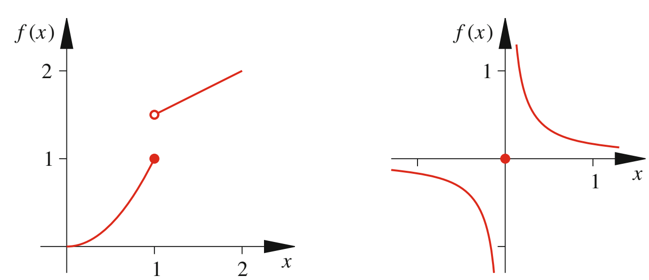
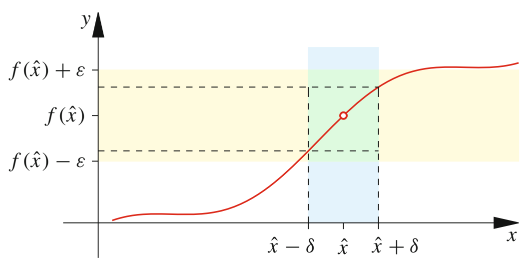


Abb. 7.21 Links: Unstetigkeit durch einen Sprung; rechts: Unstetigkeit durch einen Pol

Vertiefung: Die Definition der Stetigkeit nach Cauchy

Den Begriff der Stetigkeit haben wir auf das Konzept der konvergenten Folgen zurückgeführt. Es gibt eine zweite äquivalente Definition dieses Begriffs, die ohne Folgen auskommt und auf den französischen Mathematiker Cauchy zurückgeht.

Durch die Folgen (x_n), die gegen ein $\hat{x}$ konvergieren, können wir das Verhalten von f in der Nähe der Stelle $\hat{x}$ untersuchen. Alternativ können wir zu diesem Zweck auch auf den Begriff der *Umgebung* zurückgreifen, der uns bereits bei der Definition konvergenter Folgen begegnet ist.



Salopp gesprochen ist eine Funktion f in $\hat{x}$ stetig, falls für Stellen x dicht bei $\hat{x}$ auch die Funktionswerte $f(x)$ dicht bei $f(\hat{x})$ liegen. Es kommen also zwei verschiedene Sorten von Umgebungen ins Spiel: solche um $\hat{x}$ und solche um $f(\hat{x})$.

Formal erhalten wir dann die folgende Definition: Eine Funktion $f : D \to W$ heißt stetig an einer Stelle $\hat{x} \in D$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - \hat{x}| < \delta$ auch $|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$ folgt.

Diese komplizierte Formulierung muss erst einmal aufgedröselt werden. Vorgegeben wird eine ε-Umgebung um $f(\hat{x})$. Zu dieser muss es eine passende δ-Umgebung um $\hat{x}$ geben, sodass diese δ-Umgebung durch f in die ε-Umgebung abgebildet wird. Wegen dieses Zusammenspiels von ε und δ spricht man auch von der *ε-δ-Definition* der Stetigkeit.

In der Tat kann man zeigen, dass für die Analysis diese Definition zu der von uns verwendeten vollständig äquivalent ist. Sie erlaubt aber eine völlig andere Interpretation. Unter Verwendung des Begriffs der abgeschlossenen Mengen, den wir in Abschn. 7.5 einführen, lässt sie sich so formulieren: Das Urbild eines Komplements einer abgeschlossenen Menge ist stets selbst Komplement einer abgeschlossenen Menge. Für alle von uns betrachteten Situationen sind diese beiden Definitionen der Stetigkeit äquivalent.

- Als dritten Fall betrachten wir die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Den Graphen zeigt die Abb. 7.22. Während der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0-} h(x)$ existiert (und gleich null ist), existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} h(x)$ nicht. Betrachten wir dazu die beiden Folgen (x_n) und (y_n) mit

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{bzw.} \quad y_n = \frac{2}{(4n-3)\,\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

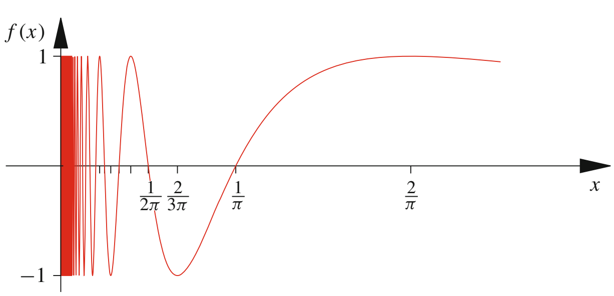


Abb. 7.22 Unstetigkeit durch Oszillation

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Aber während $h(x_n) = 0$ für alle n ist, erhält man $h(y_n) = 1$. Bei diesem Beispiel kann man übrigens durch eine geeignete Wahl der Nullfolge (x_n) jeden beliebigen Wert zwischen -1 und 1 für $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$ erhalten. Man spricht von einer *Oszillationsstelle*. ◀

Achtung Für die vorangegangenen Beispiele ist es ganz wesentlich, dass die Unstetigkeitsstelle zum Definitionsbereich der Funktion gehört. Betrachtet man etwa $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$, so ist diese Funktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig! Dies ist auch die Grenze der anschaulichen Vorstellung, dass eine Funktion stetig ist, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen. Von Stetigkeit kann man nur an Stellen sprechen, an denen eine Funktion auch definiert ist. ◀

Für den Fall der Polstellen kann man die Definition des Grenzwertes für Funktionen erweitern, um auch in diesen Situationen mit einer einfachen, formelmäßigen Darstellung arbeiten zu können. Betrachten wir dazu eine reellwertige Funktion $f : D \to W$, $W \subseteq \mathbb{R}$ und eine konvergente Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$. Es muss dabei $\hat{x}$ selbst kein Element von D sein.

Gibt es nun für jede Zahl $C > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x_n) > C \quad \text{für alle } n \ge N,$$

Hinweis: Dieses Beispiel können Sie auslassen, komplexe Funktionen behandeln wir nicht.

Beispiel: Unstetigkeit bei einer komplexen Funktion

Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $z = 0$ stetig?

Problemanalyse und Strategie Beim Nachweis von Stetigkeit im Komplexen muss man sicherstellen, dass man das Verhalten einer Funktion an der zu untersuchenden Stelle in allen Richtungen betrachtet. Aus einzelnen Richtungen mag eine Funktion stetig erscheinen, aber aus anderen nicht. Dies ist hier der Fall.

Lösung Als eine erste Folge betrachten wir (z_n) mit $z_n = 1/n$. Dann gilt

$$\frac{z_n}{\overline{z_n}} = \frac{\overline{z_n}}{z_n} = 1.$$

Damit ist dann $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit gilt $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 = f(0)$.

Doch dieses Ergebnis stimmt nicht für alle Folgen, wie wir anhand einer zweiten Folge nachprüfen können. Wir wählen (z_n) mit

$$z_n = \frac{1+i}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

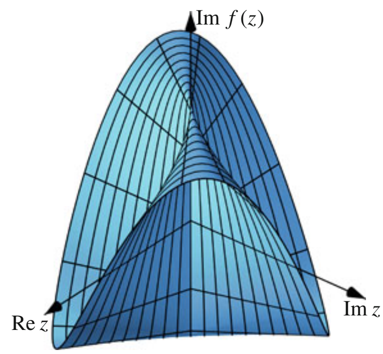
Auch hier gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, allerdings ist nun

$$\frac{z_n}{\overline{z_n}} = \frac{1+i}{1-i} = i.$$

Damit folgt

$$\frac{\overline{z_n}}{z_n} = -i \quad \text{und daher} \quad f(z_n) = 2i.$$

Es ist also $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 2i \neq f(0)$. Die Funktion f ist in 0 nicht stetig.



Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen des Imaginärteils von f. Man kann gut das Verhalten von f in der Nähe der Stelle 0 erkennen: je nachdem aus welcher Richtung in der komplexen Zahlenebene man sich nähert, erhält man einen anderen Grenzwert für $z \to 0$.

gilt

$$\lim_{x\to-1-} f(x) = \lim_{x\to-1-} \frac{2}{x+1} = -\infty.$$

Dagegen ist der Nenner des Bruchs für $x > -1$ stets positiv, hier gilt

$$\lim_{x\to-1+} f(x) = \lim_{x\to-1+} \frac{2}{x+1} = +\infty.$$

Für betragsmäßig große Werte von x dominiert der erste Summand, das x, denn der Bruch konvergiert hier gegen null. Hier gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

◀

Hinweis: Kapitel 7.5 ist nicht mehr relevant.
Bei Interesse können Sie die Vertiefung zu Lipschitz-stetigen Funktionen noch lesen.

7.5 Kompakte Mengen

Stetige Funktionen sind besonders wichtig, aber ihre besondere Bedeutung ergibt sich erst, wenn sie auch besonders gutartige Definitionsmengen besitzen. Solche Mengen werden wir als *kompakt* bezeichnen.

Um die Definition dieses Begriffs zu motivieren, erinnern wir noch einmal daran, dass $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ stetig ist. Der einzige Kandidat für eine Unstetigkeitsstelle, die Polstelle $\hat{x} = 0$, gehört nicht zum Definitionsbereich. Von Stetigkeit oder Unstetigkeit zu sprechen, macht aber nur für solche Stellen Sinn, an denen ein Funktionswert definiert ist. Wir wollen nun unsere Betrachtungen auf solche Definitionsmengen beschränken, bei denen keine isolierten Punkte ausgenommen sind. Solche Mengen haben also keine Lücken.

Vertiefung: Lipschitz-stetige Funktionen

Bei einer stetigen Funktion gibt das Verhalten der Funktion in der Nähe einer Stelle Auskunft über das Verhalten an der Stelle selbst. Allerdings haben wir noch kein Mittel gefunden, dieses Verhalten zu quantifizieren. Eine solche Möglichkeit bietet der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit.

Falls für eine Funktion $f : D \to W$ eine Konstante $L > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D$$

existiert, so nennen wir die Funktion **lipschitz-stetig** mit **Lipschitzkonstante** L.

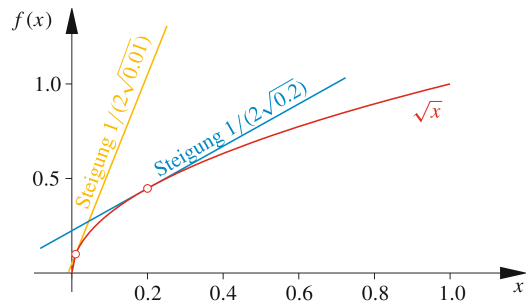
In der Tat bedeutet diese Definition, dass die Funktionswerte an zwei Stellen dicht zusammenliegen müssen, falls auch diese Stellen dicht zusammen liegen. Die Lipschitzkonstante *quantifiziert* diesen Zusammenhang, sie gibt eine *Höchstrate der Änderung* der Funktionswerte an. Insbesondere impliziert Lipschitz-Stetigkeit auf D immer, dass die Funktion auch auf D stetig ist.

Sehr gut kann man sich das am Beispiel der Wurzelfunktion klar machen. Wir betrachten $D = [\delta, 1]$ mit $\delta > 0$ und setzen

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in D.$$

Dann gilt für $\delta \leq y \leq x \leq 1$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}}\,|x - y|.$$



Da

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \to \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \qquad x, y \to \delta,$$

ist diese Abschätzung optimal: Wir können keine kleinere Konstante mit dieser Eigenschaft finden als $1/(2\sqrt{\delta})$.

Nun lassen wir $\delta \to 0$ gehen. Wir wissen ja, dass die Wurzelfunktion auch auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig ist, aber die Lipschitzkonstante geht dann gegen Unendlich! Die Wurzelfunktion ist also auf dem Intervall $[0, 1]$ nicht mehr lipschitz-stetig. Am Graphen kann man auch gut erkennen, warum dies so ist: Die Kurve wird zunehmend steiler, wenn sie sich der Null nähert, die Änderungsrate wird immer größer.

Lipschitz-Stetigkeit spielt immer dort eine Rolle, wo es auf eine Beschränkung von Änderungsraten ankommt. Dies ist vor allem bei numerischen Anwendungen der Fall, aber auch in den Kapiteln zu Differenzialgleichungen wird uns dieser Begriff wieder begegnen.

so wird die Folge $(f(x_n))$ beliebig groß. Ist dies nun für *jede* solche Folge der Fall, so schreiben wir kurz

$$\lim_{x \to \hat{x}} f(x) = \infty.$$

Gilt andererseits, dass

$$f(x_n) < -C \quad \text{für alle } n \geq N,$$

so wird die Folge $(f(x_n))$ beliebig klein. Die Kurzschreibweise ist dann

$$\lim_{x \to \hat{x}} f(x) = -\infty.$$

In diesen Situationen sprechen wir von einem **uneigentlichen Grenzwert** und sagen *f geht für x gegen $\hat{x}$ gegen plus (oder minus) unendlich.*

Analog definieren wir einseitige uneigentliche Grenzwerte ($x \to \hat{x}\pm$) und uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x),$$

um das Verhalten einer Funktion für sehr große Argumente zu charakterisieren.

Beispiel Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = x + \frac{2}{x + 1}$$

hat an der Stelle -1 einen Pol. An der zweiten Darstellung lässt sich das Verhalten der Funktion gut ablesen: Für $x < -1$ ist der Nenner des Bruchs stets negativ. Er konvergiert gegen null für $x \to -1$, während der erste Summand x beschränkt bleibt, also