22

Fourierreihen

22.1 Fourierreihen

Nehmen wir an, wir haben ein akustisches Signal, das wir auf einem Computer abspeichern möchten. Das Signal könnte wie in Abbildung 22.1 aussehen. Um es abzu-

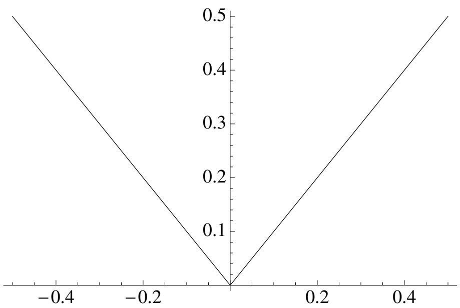

Abbildung 22.1. Akustisches Signal.

speichern wird in der Praxis die Amplitude des Signals in konstanten Zeitabständen, z. B. alle Hundertstelsekunden, gemessen (Samplingrate von 100 Hertz). Es liegen daher etwa nur die Funktionswerte zu den Zeitpunkten $-0.50, -0.49, \ldots, 0.49, 0.50$ vor. Es wäre nun am nahe liegendsten, die gemessenen 100 Funktionswerte abzuspeichern. Das ist vielleicht bei 100 Messwerten kein Problem, kann aber bei einer größeren Anzahl zu Speicherproblemen führen. Die Frage ist also, wie wir das Signal mit möglichst geringem Speicheraufwand aber zugleich möglichst geringem Informationsverlust, abspeichern können.

Wir könnten das Signal zum Beispiel durch ein Taylorpolynom mit etwa zehn Koeffizienten approximieren. Dann müssten nur diese zehn Koeffizienten gespeichert werden, die ja bereits die gesamte Information des Taylorpolynoms enthalten. Das ist auch schon die richtige Idee, nur ergibt sich hier das Problem, dass wir nur die *Funktionswerte* des Signals, nicht aber die Ableitungen kennen, die für die Berechnung der Taylorkoeffizienten notwendig sind. Außerdem würde ein Taylorpolynom eine Näherung geben, die *lokal* um den Entwicklungspunkt t_0 (das wäre im obigen Beispiel der Zeitpunkt 0) sehr gut wäre, aber immer schlechter würde, je weiter wir

G. Teschl, S. Teschl, *Mathematik für Informatiker,* eXamen.press,
DOI 10.1007/978-3-642-54274-9_5, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

uns vom Entwicklungspunkt entfernen. Wir suchen also in unserem Beispiel eine Approximation des Signals, die *global* auf dem gesamten Zeitintervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gut ist und für die die Kenntnis der Funktionswerte (Messwerte) ausreicht.

Es ist nun möglich, nahezu beliebige Funktionen (sogar unstetige) durch ein so genanntes *trigonometrisches Polynom* zu approximieren. Vergleichen wir zum Beispiel unser Signal aus Abbildung 22.1, das durch die Funktion $f(t) = |t|$ gegeben sein könnte, mit

$$F_3(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos(2\pi t) - \frac{2}{9\pi^2}\cos(6\pi t).$$

Abbildung 22.2 zeigt, dass sich beide Funktionen nur geringfügig unterscheiden und

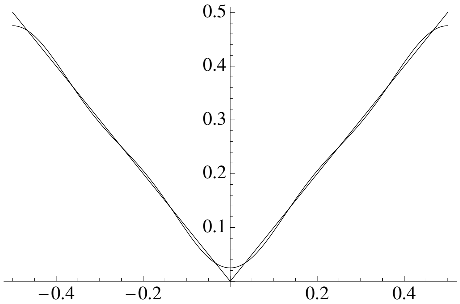

Abbildung 22.2. Signal $f(t) = |t|$ mit trigonometrischem Näherungspolynom.

dass die Annäherung global auf dem gesamten Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gut ist. Wenn wir mit dieser Approximation zufrieden sind, dann würde es also reichen, nur die Koeffizienten $\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{\pi^2}$ und $-\frac{2}{9\pi^2}$ zu speichern! Beachten Sie, dass es dabei aber zu einem Informationsverlust kommt (weil es sich ja nur um eine Näherung handelt).

Die gleiche Idee kommt auch bei verschiedenen (verlustbehafteten) Kompressionsverfahren, wie zum Beispiel JPEG oder MP3, zum Einsatz. Mehr dazu im folgenden Unterabschnitt.

Wie erhält man nun eine solche trigonometrische Approximation und was steckt da mathematisch dahinter? Wir haben bisher ein Signal auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ betrachtet. Gehen wir nun allgemeiner vom Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ aus:

Definition 22.1 Der Ausdruck

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\Big) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + \cdots + a_n \cos(n\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \cdots + b_n \sin(n\omega t) \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ heißt **trigonometrisches Polynom** oder auch **Fourierpolynom** vom Grad n. Die Koeffizienten a_k und b_k heißen **Fourierkoeffizienten** von F_n. (ω ist der griechische Buchstabe „omega“ und wird üblicherweise hier verwendet.)

Im obigen Beispiel ist $F_3(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos(2\pi t) - \frac{2}{9\pi^2}\cos(6\pi t)$ ein Fourierpolynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{2}{\pi^2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{2}{9\pi^2}$ und $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Ein trigonometrisches Polynom ist kein Polynom im eigentlichen Sinn, da es nicht von der Form $a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ ist. Anstelle der Potenzen t^k enthält ein Fourierpolynom die periodischen Funktionen $\sin(k\omega t)$ und $\cos(k\omega t)$ (mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Da mit $\sin(\omega t)$ auch $\sin(k\omega t)$ die Periode T hat, und Analoges für die Kosinusterme gilt, ist auch $F_n(t)$ periodisch mit der Periode T. Es genügt daher, F_n auf einem Intervall der Länge T zu untersuchen, also zum Beispiel auf $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Die Frage ist nun, wie die Koeffizienten a_k und b_k zu wählen sind, um eine vorgegebene Funktion $f(t)$ möglichst gut global anzunähern.

Man muss als Nächstes festlegen, was man unter einer *möglichst guten* globalen Approximation versteht. Eine Möglichkeit wäre zu verlangen, dass der Abstand $|f(t) - F_n(t)|$ über das gesamte Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ betrachtet, also das Integral $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t) - F_n(t)|\,dt$, minimal wird. Aus mathematischen Gründen verwendet man lieber das Integral über die quadratischen Abweichungen $\int_{-T/2}^{T/2} (f(t) - F_n(t))^2\,dt$, denn für diesen Fall gibt es ein Skalarprodukt und das Problem kann geometrisch gelöst werden – siehe übernächster Unterabschnitt.

Definieren wir als Maß für die Güte der Näherung den Wert

$$\int_{-T/2}^{T/2} (f(t) - F_n(t))^2\,dt, \tag{22.1}$$

also die „Summe der quadratischen Abweichungen“. Für welche Koeffizienten a_k und b_k, also für welches Fourierpolynom F_n, wird dieser Wert (Fehler) minimiert? Die Antwort gibt der folgende Satz:

Satz 22.2 Für eine vorgegebene stückweise stetige und beschränkte Funktion $f(t)$ und vorgegebenen Grad n sind die Koeffizienten des bestapproximierenden trigonometrischen Polynoms gegeben durch $(k = 0, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) f(t)\,dt, \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega t) f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Demnach ist insbesondere immer $b_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 0\,dt = 0$ und $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$. Beachten Sie weiters in Definition 22.1, dass im Fourierpolynom der konstante Anteil gleich $\frac{a_0}{2}$ (und nicht a_0) ist. Der Wert $\frac{a_0}{2}$ ist der **lineare Mittelwert** von $f(t)$. Er wird in den technischen Anwendungen auch oft als **Gleichanteil** bezeichnet.

Bei geraden beziehungsweise ungeraden Funktionen reduziert sich die Anzahl der Koeffizienten:

Satz 22.3 Ist $f(t)$ gerade, so folgt $b_k = 0$ und ist $f(t)$ ungerade, so folgt $a_k = 0$ für $k = 0, \ldots, n$.

Denn das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall ist 0, da sich die Flächen links und rechts vom Ursprung wegheben. Und $\cos(k\omega t)f(t)$ ist für ungerades f ungerade bzw. $\sin(k\omega t)f(t)$ ist für gerades f ungerade.

Nun ist das Geheimnis also gelüftet und wir können leicht das zu $f(t) = |t|$ gehörige Fourierpolynom vom Grad drei berechnen.

Beispiel 22.4 (→CAS) Fourierpolynom
Berechnen Sie das Fourierpolynom vom Grad 3 für $f(t) = |t|$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Lösung zu 22.4 Das Fourierpolynom vom Grad 3 hat laut Definition 22.1 die Form (in diesem Beispiel ist die Länge des Intervalls $T = 1$, daher $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$)

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi t) + a_2 \cos(4\pi t) + a_3 \cos(6\pi t) \\ &\quad + b_1 \sin(2\pi t) + b_2 \sin(4\pi t) + b_3 \sin(6\pi t). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten berechnen sich nach Satz 22.2 und, da die Funktion $f(t) = |t|$ gerade ist, nach Satz 22.3:

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_{-1/2}^{1/2} |t|\cos(2\pi kt)\,dt = 4\int_0^{1/2} t\cos(2\pi kt)\,dt, \\ b_k &= 0 \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, 3$.

Wir haben hier verwendet, dass $|t|\cos(2\pi kt)$ als Produkt von zwei geraden Funktionen wieder gerade ist; und dass daher das Integral dieser Funktion über das Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleich zwei mal dem Integral über das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ ist. Auf diesem Intervall ist $|t| = t$ und wir können uns den Betrag sparen.

Die Koeffizienten a_k können mit partieller Integration (bzw. Formelsammlung oder `Mathematica`) berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_0 &= 4\int_0^{1/2} t\,dt = \frac{1}{2} \\ a_1 &= 4\int_0^{1/2} t\cos(2\pi t)\,dt = -\frac{2}{\pi^2} \\ a_2 &= 4\int_0^{1/2} t\cos(4\pi t)\,dt = 0 \\ a_3 &= 4\int_0^{1/2} t\cos(6\pi t)\,dt = -\frac{2}{9\pi^2} \end{aligned}$$

Daher lautet das Fourierpolynom vom Grad 3:

$$F_3(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos(2\pi t) - \frac{2}{9\pi^2}\cos(6\pi t).$$

■

Beachten Sie, dass die Approximation nur auf dem Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ erfolgt, also im letzten Beispiel $|t| \approx \frac{1}{4} - \frac{2\cos(2\pi t)}{\pi^2} - \frac{2\cos(6\pi t)}{9\pi^2}$ nur für $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt (siehe Abbildung 22.3). Eine Approximation auf ganz $\mathbb{R}$ wäre nur gegeben, wenn $f(t)$ periodisch

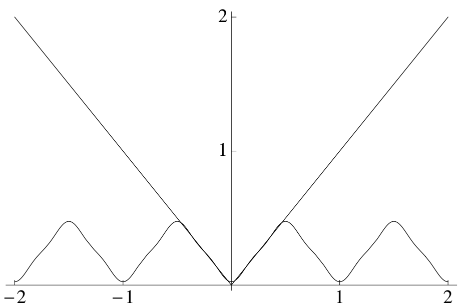

Abbildung 22.3. $|t| \approx \frac{1}{4} - \frac{2\cos(2\pi t)}{\pi^2} - \frac{2\cos(6\pi t)}{9\pi^2}$ nur für $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, die Approximation ist also nur auf diesem Intervall gut.

mit der Periode T ist.

Anstelle des Intervalls $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ kann auch $[0, T]$ (oder jedes andere Intervall der Länge T) verwendet werden. Dafür müssen nur die Integrationsgrenzen entsprechend geändert werden. Das Fourierpolynom ändert sich dabei nicht, wenn die Funktion f periodisch mit der Periode T ist (denn wenn wir über eine ganze Periode integrieren, so ist es egal, wo wir beginnen).

In der Praxis ist meist nicht die Funktionsgleichung von $f(t)$ gegeben, sondern nur die Funktionswerte $f(t_k)$ zu bestimmten Zeitpunkten $t_0 = -\frac{T}{2}$, $t_1 = t_0 + \Delta_n$, $t_2 = t_0 + 2\Delta_n$, $\ldots$, mit $\Delta_n = \frac{T}{n}$. Dann können die Fourierkoeffizienten a_k und b_k näherungsweise mit der Formel aus Definition 21.15 berechnet werden:

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\cos(k\omega t_j) f(t_j), \qquad b_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin(k\omega t_j) f(t_j).$$

Die zugehörige Transformation ist als **diskrete Fouriertransformation** bekannt und die Funktion

$$F_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}\Big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\Big)$$

stimmt mit f an den Stützstellen t_k überein, falls die Anzahl $2m+1$ der Koeffizienten gleich der Anzahl n der Stützstellen ist. Ist $2m+1 < n$, so ist F_m bestapproximierend in dem Sinn, dass die Summe der quadratischen Abweichungen an den Stützstellen minimal ist. Verwendet man obige Formeln für die Berechnung von a_k und b_k, so sind $O(n^2)$ Rechenoperationen notwendig. In der Praxis ist aber oft n sehr groß und man verwendet dann einen Algorithmus, der als **schnelle Fouriertransformation** (FFT - **F**ast **F**ourier **T**ransform) bekannt ist und nur $O(n\log_2(n))$ Rechenoperationen benötigt.

Was ist, wenn wir im Beispiel 22.4 nicht das Fourierpolynom vom Grad 3, sondern eines mit höherem Grad berechnen? Wir würden intuitiv erwarten, dass die Näherung dann noch besser wird. Mit anderen Worten wäre es schön, wenn die Approximation $f(t) \approx F_n(t)$ durch Fourierpolynome F_n beliebig genau gemacht werden kann, indem man nur den Grad n groß genug wählt. Und das ist auch so:

Satz 22.5 Sei f eine stückweise stetige, beschränkte Funktion mit zugehörigen Fourierpolynomen F_n. Dann konvergiert $\int_{-T/2}^{T/2}(f(t) - F_n(t))^2\,dt$ für $n \to \infty$ gegen Null. An jeder Stelle, an der f differenzierbar ist, konvergiert die Reihe gegen den Funktionswert. Wir schreiben

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\Big)$$

und bezeichnen die rechte Seite als die **Fourierreihe** von $f(t)$.