Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025

Studiengang Angewandte Informatik & Angewandte Künstliche Intelligenz

Kapitel 7: Reihen und Taylorreihe

Lernziele:

- Sie kennen den Begriff der Reihe.
- Sie kennen die Begriffe konvergent und divergent für Reihen.
- Sie kennen das Nullfolgenkriterium für die Konvergenz von Reihen.
- Sie wissen, was eine geometrische Reihe ist und wann diese konvergiert.
- Sie können das Majorantenkriterium anwenden, um zu bestimmen, ob eine Reihe konvergiert.
- Sie können das Quotientenkriterium anwenden, um zu bestimmen, ob eine Reihe konvergiert.
- Sie wissen, was eine Taylorentwicklung ist und in welchem Sinne diese die beste Approximation einer Funktion ist.
- Sie können das Taylorpolynom und die Potenzreihenentwicklung einer Funktion berechnen.
- Sie können Taylorreihen der Grundfunktionen verwenden, um daraus Taylorreihen zusammengesetzter Funktionen zu gewinnen.

Arithmetische und Geometrische Folge und ihre Summen

1 Besondere Wachstums-/Zerfallsprozesse: Lineare und exponentielle Folgen:

Geben Sie das Bildungsgesetz an und versuchen Sie zu verallgemeinern

a) $2,\ 6,\ 18,\ 54, \ldots$

b) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$

Besonderheit: Kennt man neben dem Startwert das (konstante) Verhältnis q bzw. den Abstand d zweier aufeinanderfolgender Folgegeglieder, so kennt man das ganze Bildungsgesetz der Folge, d.h. man kann jedes Folgeglied direkt ausrechnen. Man kann sogar die Summe (der ersten n Glieder) **als Formel ausdrücken** (Summenformel).

2 Spezialfälle:	**Arithmetische Folge** bzw. **arithmetische Summe**	**Geometrische Folge** bzw. **geometrische Summe**
Definition	wenn zwei aufeinander folgende Glieder immer den gleichen Abstand (Differenz) haben, d.h. $\exists\ d \in \mathbb{R}$, so dass $\forall\ k \geq 1$ gilt: $\boxed{a_k - a_{k-1} = d}$	wenn zwei aufeinander folgende Glieder immer im gleichen Verhältnis (Quotient) stehen, d.h. $\exists\ q \in \mathbb{R}$, so dass $\forall\ k \geq 1$ gilt: $\boxed{\frac{a_k}{a_{k-1}} = q}$
Bildungsgesetz	**Bildungsgesetz über Rekursionsformel:** $\boxed{a_k = a_{k-1} + d}$ **Bildungsgesetz explizit**: $\boxed{a_k = a_0 + kd}$	**Bildungsgesetz über Rekursionsformel:** $\boxed{a_k = a_{k-1} \cdot q}$ **Bildungsgesetz explizit**: $\boxed{a_k = a_0 \cdot q^k}$
Explizite Summenformel für Summe der ersten $n+1$ Glieder	**Formel für die arithmetische Summe:** $\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d}$	**Formel für die geometrische Summe** ($q \neq 1$)**:** $\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$
Spezialfälle	**Gauß'sche Summe** der ersten n natürlichen Zahlen: $\mathbf{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$	Summe der ersten Potenzen einer Zahl $\mathbf{1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$
Mittel der Nachbarwerte (daher der Name)	Jedes Folgeglied ist das **arithmetische Mittel** seiner Nachbarglieder, d.h.: $a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$	Jedes Folgeglied ist das **geometrische Mittel** seiner Nachbarglieder, d.h.: $a_k = \pm\sqrt{a_{k+1} \cdot a_{k-1}}$

Reihen = Unendliche Summen und die Frage, ob deren Grenzwert endlich sein kann

Unendliche Summen

$$0,\overline{1} = 0{,}111\ldots = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots$$

$$= 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \cdots + +0{,}1^m + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}1^k$$

$$= \frac{1}{9}$$

$= s =$ Reihenwert

Bildlich kann man sich vorstellen, dass das Aufsummieren von Zahlen einem Hintereinandergehen von nummerierten Schritten dieser Längen entspricht. Man könnte auch einen Turm mit diesen Etagenhöhen bauen.

Schritt Nr.

Einzelschritt Länge $a_k =$
Gesamtlänge bis Schritt Nr. m : $s_m =$
Gesamtlänge unendlich vieler Schritte: endlich oder unendlich?

Eine Reihe ist kurz gesprochen eine Summe aus unendlich vielen Zahlen.

Unendliche Summen sind uns im Prinzip schon bei periodischen oder irrationalen Zahlen begegnet.

Die Pünktchen deuten an, dass die Summation nach einer Gesetzmäßigkeit immer so weitergeht. Die Summanden könnten man über einen Index kennzeichnen.

Es ist naheliegend, dass man dafür das $\sum$ –Zeichen mit oberer Grenze ∞ verwendet.

Natürlich kann man in endlicher Zeit keine Summe mit unendlich vielen Summanden bilden. Ein echter Ergebniswert s kann nie wirklich erreicht werden. Man kann ihn nur so interpretieren, dass man ihm durch die Summation von endlich vieler der Werte „beliebig nahekommt".
Das ist ist das bekannte Konzept des Grenzwertes.
Grenzwert von was? Von der Teilsumme, die entsteht, wenn man beim Summanden mit Nr. m abbricht.

Obwohl man unendlich oft eine positive Zahl hinzuaddiert, wird behauptet, das Ergebnis kann eine endliche Zahl s sein.
In unserem Beispiel ist $0,\overline{1}$ jedenfalls < 0,2 also endlich.

Wenn GW s existiert <u>und</u> <u>endlich</u> ist, heißt die Reihe **konvergent,** sonst divergent.

ACHTUNG: Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat eine **Doppelbedeutung**: Es steht sowohl für die <u>Folge</u> (s_m) der Teilsummen (Partialsummen) als auch für deren <u>Grenzwert</u> s (**Summe** oder **Wert** der Reihe), sofern dieser existiert.

Was erhalten Sie, wenn Sie die folgende Summe berechnen?

$$16 + 8 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

A) Diese unendliche Reihe konvergiert gegen eine Zahl kleiner als 32.
B) Diese unendliche Reihe ist gleich 32.
C) Diese unendliche Reihe erreicht eine Zahl größer als 32.
D) Diese unendliche Reihe divergiert gegen unendlich.

(Carroll MathQuest)

Was erhalten Sie, wenn Sie die folgende Summe berechnen?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

A) 2
B) Eine Zahl zwischen 2 und 3.
C) Eine Zahl zwischen 3 und 4.
D) Eine Zahl zwischen 4 und 5.
E) Eine Zahl zwischen 5 und 10.
F) Diese unendliche Reihe divergiert gegen unendlich.

(Carroll MathQuest)

Berühmte Reihen, deren Namen, Konvergenzverhalten und ggf. Reihenwert man auswendig kennen sollte

Typ der Reihe	Reihe als unendliche Summe in „Pünktchen“-Schreibweise	Eine Reihe ist der GW der Teilsummen s_m (= Summe nur bis a_m)	Wert der Reihe: Endlicher GW? ∞ oder kein GW?	Anmerkungen
Allg. Prinzip: **Reihe = unendliche Summe** a_k	$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$	$= \lim_{m\to\infty} s_m$	= endlicher GW s → Reihe **konvergiert** **GW ex. nicht oder ist ∞** → Reihe divergiert.	Oft weiß man nur, dass s endlich oder ∞. Nur selten kennt man für s eine Formel. **Wenn allerdings Konvergenz bekannt, kann man Näherung des (unbekannten) Reihenwertes durch Abbrechen berechnen.**
Falls a_k keine Nullfolge (nicht beliebig klein werdend), divergiert die Reihe immer.				
Bsp. keine NF $a_k = 1$ konstant	$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 1$	$= \lim_{m\to\infty} (m+1)$	$= \infty$ (divergent)	Man sagt: a_k Nullfolge ist eine <u>notwendige</u> Bedingung für einen endlichen Reihenwert.
Falls a_k ziemlich schnell gegen Null gehen, kann deren Reihe einen endlichen Wert haben.				
Geometrische Reihe = Potenzen einer festen Basis aufsummieren. $a_k = q^k$ Für $\|q\| < 1$ Nullfolge	$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots q^m + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ Konkrete Beispiele: $1 + 0.1 + 0.1^2 + \cdots$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \ldots$	Sonderfall: s_m kann man als Formel angeben: $= \lim_{m\to\infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$ $(q \neq 1)$	$= \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{falls } \|q\| < 1 \text{ (konvergent)} \\ \infty & \text{falls } q \geq 1 \text{ (divergent)} \\ \text{Kein GW} & \text{falls } q < -1 \text{ (divergent)} \end{cases}$	Wenn die Summanden (Glieder) **schnell genug** gegen Null gehen, kann die unendliche Summe einen endlichen Wert haben, obwohl in jedem Summationsschritt (unendlich oft) ein kleiner positiver Anteil hinzukommt!
Aber: Nicht für jede Nullfolge a_k hat die Reihen einen endlichen Wert.				
Harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	Für s_m keine Formel, aber Abschätzen möglich: $s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ $\geq \ln(m+1) \rightarrow$	$= \infty$ (divergent)	Eine der einfachsten Nullfolgen (die Kehrwerte $a_k = \frac{1}{k}$) bilden die harmonische Reihe. Der Wert ist ∞ ist, weil ihre Teil-Summen unbeschränkt wachsen
Die harmonische Reihe bildet eine Art „Schwelle“. Erhöht man den Exponenten im Nenner von 1 auf $\alpha > 1$, so konvergiert die Reihe (ähnlich wie die geom. Reihe)				
Allgemeine harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ Z.B. $\frac{1}{k^2}, \frac{1}{\sqrt{k}}$	$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ Konkretes Beispiel: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$	Analog: Für s_m keine Formel, aber Abschätzen möglich	$= \begin{cases} \text{endlicher GW} & \text{falls } \alpha > 1 \text{ (konverg.)} \\ \infty & \text{falls } \alpha \leq 1 \text{ (divergent)} \end{cases}$	Sobald $\alpha > 1$, Summanden $\frac{1}{k^\alpha}$ klein genug, um zu endlichem Reihenwert zu führen. **Keine Formel für Wert der Reihe.**

Welche der folgenden Reihen ist nicht geometrisch?

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{3^n}$

B) $\sum_{n=5}^{\infty} 12^{2n+4}$

C) $\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n}$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{1/n}$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{7^{3n}}$

(Carroll MathQuest)

Welche der folgenden geometrischen Reihen konvergiert?

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(-2)^n}$

B) $\sum_{n=5}^{\infty} 6^{3n+2}$

C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^{-n}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^n}{6^{3n}}$

(Carroll MathQuest)

Rechnen mit konvergenten Reihen (Reihen mit endlicher Summe)

Der Reihenwert ist der Grenzwert endlicher Summen. Aus dem Rechnen mit endlichen Summen ergibt sich: Man kann konvergente Reihen gliedweise addieren, subtrahieren oder vervielfachen, d.h. mit einem festen Faktor multiplizieren (nicht mit einer anderen Reihe!). Die resultierenden Reihen sind ebenfalls konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe bzw. Differenz bzw. Vielfaches der Grenzwerte der Ausgangsreihe(n). Für Produkte von Reihen bräuchten wir den Begriff der absoluten Konvergenz bzw. des Cauchyprodukts, die wir aber in diesem Kurs nicht behandeln.

2 Rechnen mit konvergenten Reihen. Am Bsp. der geometrischen Reihe (nur für sie kennen wir Formel für den Reihenwert

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

2.1	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k}$
2.2	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{-1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k \right)$
2.3	$\sum_{i=3}^{\infty} 20 \cdot \frac{1}{5^{i-1}} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} = 14.5$

Konvergenzkriterien für Reihen (Existenz eines endlichen Grenzwertes begründen)

Nur wenige Reihen (wie zuvor die geometrische Reihe) erlauben, ihren (Grenz-)Wert per Formel auszudrücken.

Weshalb wäre es vorteilhaft zu wissen, ob eine Reihe konvergiert, auch wenn man keine Formel für ihren Wert hat?

Wenn die Reihe konvergiert, können wir ihren Wert zumindest näherungsweise durch „Abbrechen der Reihe" und Aufsummieren der ersten Glieder berechnen.

Wie kann man anhand der Reihenglieder a_k entscheiden, ob für die Reihe ein endlicher Grenzwert existiert?

Als notwendige Bedingung für einen endlichen GW müssen die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Aber wir haben bei der harmonischen Reihe gesehen, dass dies nicht hinreichend ist (diese wächst unbeschränkt gegen ∞). Offensichtlich ist entscheidend, wie „schnell" die Glieder gegen Null gehen. Deshalb benötigen wir weitere „Tests", wie man aus a_k auf die Endlichkeit des GW der Reihe $\sum a_k$ schließen kann. Folgende Kriterien helfen dabei, man spricht auch von **Vergleichskriterien**. Wichtige **Vergleichsreihen** sind die geometrische Reihe und die sog. **allgemeinen harmonischen Reihen:**

- **Mindestbedingung prüfen**

Nullfolgen-Test:

a_k keine Nullfolge $\Longrightarrow$ Reihe $\sum a_k$ kann keinen endlichen GW haben.

- **Konvergenzkriterien**

Majorantenkriterium (Vergleich nach oben)

$$|a_k| \leq c_k \quad \text{und man weiß, dass} \sum_k c_k \text{ endlich} \Rightarrow \sum_k a_k \quad \text{konvergiert auch}$$

Quotientenkriterium (Verhältnis aufeinanderfolgender Glieder)

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to q \;\Rightarrow \text{Prüfe ob GW} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \text{Reihe konvergiert (endl. GW)} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{Keine Aussage möglich} \\ q > 1 & \Rightarrow \text{Reihe divergiert} \end{cases}$$

Grenzwertkriterium (Verhältnis zu Vergleichsreihe; anwendbar für $a_k, b_k > 0$)

$$\frac{a_k}{b_k} \to g > 0 \Rightarrow \sum_k a_k \text{ und } \sum_k b_k \text{ gleiches Konvergenzverhalten}$$

Leibniz-Kriterium (für alternierende Reihen, d.h. wechselndes Vorzeichen)

$$a_k \searrow 0 \quad \Rightarrow \sum_k (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \quad \text{konvergiert}$$

Idee dahinter:

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^2 + 2}$$

konvergiert.

A) Wahr.
B) Falsch.
C) Keine Aussage möglich.

(Adaptiert von Carroll MathQuest)

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

konvergiert.

A) Wahr.
B) Falsch.
C) Keine Aussage möglich.

(Carroll MathQuest)

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

konvergiert.

A) Wahr.
B) Falsch.
C) Keine Aussage möglich.

(Carroll MathQuest)

3 Beispiele: Konvergenzkriterien für Reihen: Haben die Reihen einen endlichen Wert (auch wenn wir ihn nicht kennen)?

3.1	Konvergent oder divergent? Endlicher Summenwert oder nicht? $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1}$ Entscheidung über Majorantenkriterium (naheliegend):
3.2	Konvergent oder divergent? Endlicher Summenwert oder nicht? $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$ Entscheidung über Minorantenkriterium (naheliegend):
3.3	Konvergent oder divergent? Endlicher Summenwert oder nicht? $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ Entscheidung über Majorantenkriterium möglich: Entscheidung über Quotientenkriterium möglich:
3.4	Konvergent oder divergent? Endlicher Summenwert oder nicht? $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ Majorantenkriterium? Hier <u>nicht naheliegend</u>. Quotientenkriterium funktioniert:

Exkurs: Teilungsparadoxien [Quelle: de.wikipedia.org]

Beim **Teilungsparadoxon** oder **Dichotomie-Paradoxon** handelt es sich um einen scheinbaren Widerspruch, bei dem gezeigt werden soll, dass Bewegung in Wirklichkeit nicht möglich ist. Es ist eng verwandt mit dem Paradoxon von Achilles und der Schildkröte (siehe unten) und geht - wie auch letzteres - zurück auf den antiken griechischen Philosophen Zenon von Elea.

> Ein Läufer will eine Strecke positiver Länge zurücklegen. Dazu muss er zunächst die Hälfte dieser Strecke zurücklegen. Und um dies zu erreichen, muss er zuerst die Hälfte der Hälfte, also ein Viertel der Gesamtlänge hinter sich bringen. Mit diesem Verfahren zerteilt man die Strecke in unendlich viele Teilstrecken, deren jeweilige Überwindung eine positive, endliche Zeit beansprucht. Infolgedessen muss der Läufer eine unendlich lange Zeit brauchen, um die Gesamtstrecke zurückzulegen.

Mit den heutigen mathematischen Konzepten der Konvergenz lässt sich das Paradoxon leicht mit Hilfe der **geometrischen Reihe** auflösen. Es sei eine Strecke von 100 Metern gegeben, und nehmen wir weiter an, dass der Läufer zur Überwindung eines Meters genau eine Sekunde benötigt. Der Läufer braucht also 100 Sekunden, um 100 Meter zurückzulegen.

Zerlegt man nun die Strecke: Der Läufer muss am Ende 50 m, davor 25 m, davor 12,5 m, davor 6,25 m etc. zurücklegen. Nun betrachtet man die Zeit, die er dafür benötigt. Unter Verwendung des Summenzeichens ergibt sich:

$$50s + 25s + 12{,}5s + 6{,}25s + \cdots. = 50 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) s = 50 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k s = 50 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} s = 50 \cdot 2s = 100s.$$

D. h. auch hier legt der Läufer die Strecke von 100 Metern in 100 Sekunden zurück, weshalb sich der Widerspruch nicht ergibt. Das Paradoxon beruht auf der Fehlannahme, dass unendliche Reihen mit positiven Gliedern nicht konvergieren.

Exkurs: **Zenon's Paradoxon von Achilles und der Schildkröte**

Ein weiterer bekannter Trugschluss, der dem Zenon von Elea zugeschrieben werden. Darin wird versucht zu belegen, dass ein schneller Läufer wie Achilles bei einem Wettrennen eine Schildkröte niemals einholen könne, wenn er ihr einen Vorsprung gewähre.

> Bevor Achilles die Schildkröte überholen kann, muss er zuerst ihren Vorsprung einholen. In der Zeit, die er dafür benötigt, hat die Schildkröte aber einen neuen, wenn auch kleineren Vorsprung gewonnen, den Achilles ebenfalls erst einholen muss. Ist ihm auch das gelungen, hat die Schildkröte wiederum einen – noch kleineren – Weg-Vorsprung gewonnen, und so weiter. Der Vorsprung, den die Schildkröte hat, werde zwar immer kleiner, bleibe aber dennoch immer ein Vorsprung, so dass sich der schnellere Läufer der Schildkröte zwar immer weiter nähert, sie aber niemals einholen und somit auch nicht überholen könne.

Tatsächlich wird ein Schnellerer einen Langsameren aber immer einholen, sofern er dafür nur genügend Zeit hat. Und diese Zeit ist proportional zum Vorsprung und umgekehrt proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Läufer (siehe ganz unten).

Zenons Trugschluss beruht auf zwei Fehlern:

1. Er berücksichtigt nicht, dass eine unendliche Reihe eine endliche Summe haben kann. a_0 ist der Anfangsvorsprung, $a_k =$ Vorsprung nach Einholgen a_{k-1}. Mit $q = \frac{v_s}{v_a} < 1$ ist (Verhältnis der Geschwindigkeiten des Langsameren zum Schnelleren).
$$v_a = \frac{a_0}{t_0} = \frac{a_k}{t_k}, \qquad v_s = \frac{a_1}{t_0} = \frac{a_{k+1}}{t_k} \Rightarrow a_k = a_{k-1}q = a_0 q^k$$
ergeben sich die immer kleineren Laufintervalle $a_k = a_0 \cdot q^k$
$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^k = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^k = \frac{a_0}{1-q} = \frac{a_0 v_a}{v_a - v_s}$$
2. Der Weg – vor dem Einholpunkt –, den Achilles zurückgelegt hat, kann beliebig oft – potenziell unendlich oft – in Vorsprünge der Schildkröte unterteilt werden. Aus der Tatsache, dass diese Teilungshandlung beliebig oft durchgeführt werden kann, folgt aber nicht, dass die zu durchlaufende Strecke unendlich wäre oder dass unendlich viel Zeit erforderlich wäre, sie zurückzulegen.

Zeit, wann Achilles die Schildkröte überholt (damals nicht bestimmbar, da der Geschwindigkeitsbegriff damals unbekannt war). Sei a_0 der Anfangsvorsprung. Die Zeiten t_k, die Achilles benötigt um jeweils den Vorsprung a_k aufzuholen, sind gegeben durch:

$$v_a = \frac{a_0}{t_0} = \frac{a_k}{t_k}, \qquad v_s = \frac{a_1}{t_0} = \frac{a_k}{t_{k-1}}, \qquad \Rightarrow \qquad t_k = \frac{v_s}{v_a} t_{k-1} = t_0 \left(\frac{v_s}{v_a}\right)^k \; und \; t_0 = \frac{a_0}{v_a}$$

Summe all dieser Zeiten t_k ist eine geometrische Reihe, der Grenzwert (Zeit t bei der Achilles die Schildkröte überholt hat) ist:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{v_a} \left(\frac{v_s}{v_a}\right)^k = \frac{a_0}{v_a} \frac{1}{1 - \frac{v_s}{v_a}} = \frac{a_0}{v_a - v_s} = \frac{\text{Anfangsvorsprung}}{\text{Geschwindigkeitsdifferenz}}$$

Approximation von Funktionen

Häufig können Funktionen nicht exakt dargestellt werden. Einerseits liegen Daten zu Funktionen oft nur unvollständig vor (zum Beispiel ein Sensor liefert Daten in einem bestimmten Takt), andererseits sind die darzustellenden Daten oft zu kompliziert um sie in einer einzigen Funktion anzugeben. Dabei ist es oft wünschenswert, eine möglichst gute Näherung aus den vorliegenden, unvollständigen Daten zu erzeugen.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Näherung von Funktionen durch Polynome. Der Satz von Weierstraß besagt, dass diese Näherung beliebig gut möglich ist – wobei verschiedene Definitionen von „gut“ zu verschiedenen Ergebnissen führen.

Die erste Näherung, die wir betrachten, definiert „gut“ also eine lokale Eigenschaft, die die Funktion in genau einem Punkt möglichst gut annähert.

Taylorpolynome und Restglieddarstellung

[Dürrsch 18, Papula1.IV, Teschl 2 Abs. 20.1]

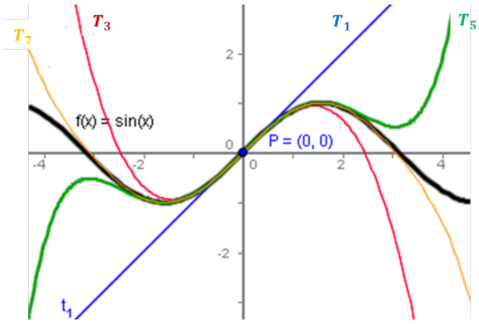
Ziel: Näherung einer gegebenen Funktion f durch ein Polynom?

Inwiefern z.B. $f(x) = \sin x$ näherungsweise durch ein Polynom beschreiben?

Globale Näherung?

Lokale Näherung?

Es gibt Polynome, die sich lokal bei $x_0 = 0$ sehr gut und mit steigendem Grad immer besser an $f(x) = \sin x$ anschmiegen. Die Frage ist, wie findet man die Koeffizienten dieser passsenden Polynome?



$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$

Gute Polynom-Näherungen:

$\boldsymbol{T_1(x) = x}$

$\boldsymbol{T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}}$

$\boldsymbol{T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5}$

Schmiegungspolynom: Gesucht ist (das einzige) Polynom (vorgegebenen Grades m), das an der Stelle x_0 in Funktionswert und allen m Ableitungen mit f übereinstimmt (weil dadurch bestmögliches lokales Anschmiegen entsteht).

Herleitung einer Formel für die „optimalen“ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_m$:

$$T_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_m(x - x_0)^m$$

$$T'_m(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0)^1 + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + ma_m(x - x_0)^{m-1}$$

$$T_m{}''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0)^1 + \ldots + m \cdot (m-1) \cdot a_m(x - x_0)^{m-2}$$

$$T_m^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x - x_0)^1 + \ldots + m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot a_m(x - x_0)^{m-3}$$

Für eine gegebene Funkton wie z.B. $f(x) = \sin x$ ist es eine naheliegender Wunsch, sie näherungsweise durch ein Polynom zu beschreiben. U.a. benutzen Polynome nur die Rechenarten Addieren und Multiplizieren, können also z.B. auf Computern einfach ausgewertet werden.

Ein Polynom vom Grad m ist durch $m + 1$ Koeffizierten $a_0, a_1, \dots, a_m$ eindeutig beschrieben, d.h. nur diese $m + 1$ Werte müssen abgespeichert werden, um das Polyom zu kennen.

Gutes Anschmiegeverhalten bei x_0 wird durch die Ableitungen beschrieben (siehe Definition Schmiegungspolynom).

Die für ein Anschmiegen günstigen Koeffizienten nennt man **Taylor-koeffizienten.** Sie müssen von f und ihren Ableitungen, der Stell x_0 und dem Grad abhängen. Wir sehen, dass sich eine Formel für die günstigen Koeffizienten besonders einfach ergibt, wenn man das Polynom mit seinen Koeffizienten in der Gestalt $(x - x_0)^k$ schreibt.

Taylorpolynom (vom Grad m) **einer Funktion f** an der **Stelle x_0**

= Das Polynom m-ten Grades, bei dem in folgender Gestalt

$$\boldsymbol{T_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_m(x - x_0)^m}$$

die Koeffizienten a_k über die Ableitungen von f an x_0 berechnet werden wie folgt:

$$\boldsymbol{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$ **= Taylorkoeffizienten** von f an Stelle x_0

Voraussetzung: die benötigten Ableitungen müssen existieren.

Kurz:

$$\boldsymbol{T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}$$

Die Stelle x_0 wird auch **Entwicklungspunkt** genannt. Wenn man x_0 betonen will, auch $T_m(x, x_0)$.

Optimalität? Beste Näherung an f in folgendem Sinn: Die Taylorkoeffizienten liefern das <u>einzige</u> Polynom m-ten Grades, das an der Stelle x_0 mit f in Funktionswert <u>und</u> allen m Ableitungen übereinstimmt (Näherung im Sinn lokalen Anschmiegens).

Was ist die Taylorreihe der Funktion $\ln(x)$ beim Punkt $x_0 = 1$?
(Keine Taschenrechner erlaubt!)

A) $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots$
B) $(x-1)-(x-1)^2+2(x-1)^3-6(x-1)^4+\cdots$
C) $\ln(x)+\frac{1}{x}(x-1)-\frac{1}{x^2}(x-1)^2+\frac{2}{x^3}(x-1)^3-\frac{6}{x^4}(x-1)^4+\cdots$
D) $\ln(x)+\frac{1}{x}(x-1)-\frac{1}{2x^2}(x-1)^2+\frac{2}{3x^3}(x-1)^3-\frac{6}{4x^4}(x-1)^4+\cdots$
E) Das kann nicht berechnet werden.
F) Ich weiß es nicht.

(Carroll MathQuest)

Bei $x_0 = 0$, welche Funktion wird durch die folgende Taylorreihe beschrieben?

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots?$$

(Keine Taschenrechner erlaubt!)

A) e^x
B) $\sin x$
C) $\cos x$
D) Das ist keine Taylorreihe.
E) Ich weiß es nicht.

(Carroll MathQuest)

1 Beispiele: Taylorpolynom (vom Grad m) der Funktion f an der Stelle x_0 explizit per Ableitung berechnen

1.1	Für die Funktion $f(x) = e^x$ bestimme man das Taylorpolynom 7. Grades an der Stelle $x_0 = 0$. Man gebe auch die Schreibweise mit dem Summensymbol an.
1.2	Für die Funktion $f(x) = e^x$ bestimme man das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 1$.
1.3	Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ bestimme man das Taylorpolynom 5. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

2 Beispiel: Naturwissenschaftliche Formeln vereinfachen bzw. Zusammenhänge herleiten [Dürrsch Abs. 18.4.4]

a) Für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ist das Taylorpolynom 1. Grades (Tangente) bei $x_0 = 0$ gegeben durch $T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

b) Relativitätstheorie: Für eine mit Geschwindigkeit v bewegten Masse m_0 gilt

$$E = m \cdot c^2 \qquad \text{mit} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{und Lichtgeschwindigkeit} \quad c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Die <u>relativistische</u> kinetische Energie

$$E_{kin,relativistisch} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

Im Vergleich dazu die <u>klassische</u> kinetische Energie

$$E_{kin,klassisch} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Welcher Zusammenhang besteht? Einsetzen von m und Ersetzen der Wurzel durch die Näherung aus (a)

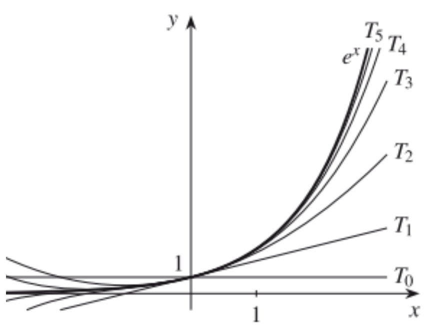
$$E_{kin,relativistisch} = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx$$

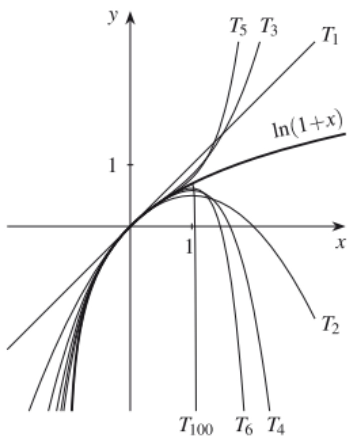
Grundfunktionen: Anschmiegeverhalten ihrer Taylorpolynome an der Stelle $x_0 = 0$

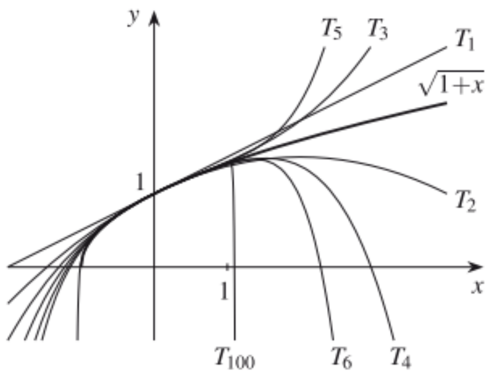
Das Anschmiegeverhalten wird durch die Übereinstimmung mit den Ableitungen erreicht:

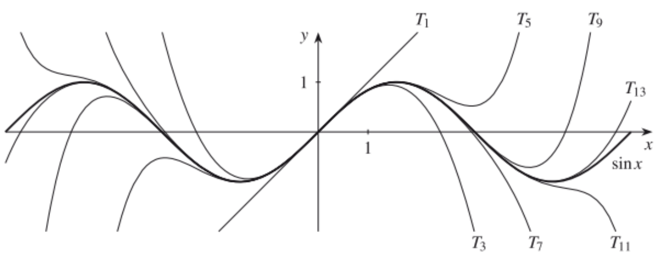
Das Anschmiegeverhalten wird umso besser, je mehr Potenzen man verwendet (je höher die Ableitungen übereinstimmen).

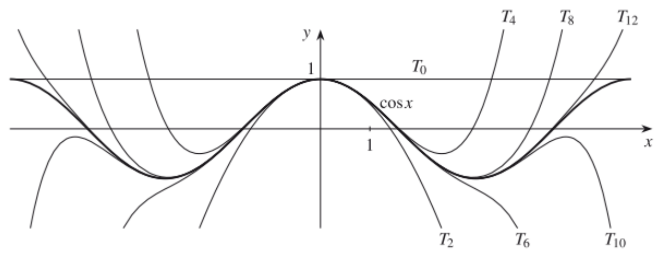
Die Näherung umso schneller, je näher man an der Entwicklungsstelle x_0 ist.











Ist die (Taylor) Polynom-Näherung <u>beliebig genau</u> möglich?

Wie groß die Abweichung zur Originalfunktion? Fehlerformel, Restglieddarstellung R_m

3 Beispiel: Werte der Exp-Funktion durch Polynom-Näherung berechnen [Dürrsch Abs. 18.4.1]

Gegeben sei eine Originalfunktion $f(x)$ (hier im Bsp. e^x) und ihr Taylorpolynom vom Grad m um die Stelle x_0 (hier $x_0 = 0$).

$$e^x \approx T_m(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}x^k$$

Ziel: Berechne für die Zahl $e^{0,2}$ einen Näherungswert
durch Verwendung des Taylorpolynoms 2. Grades

$$e^x \approx T_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$e^{0.2} \approx T_2(0.2) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot 0.2 + \frac{1}{2!}\cdot 0.2^2 = 1.22$$

Ziel: Wie genau ist diese Näherung?
Behauptung: Näherung $T_2(0.2) = 1.22$ stimmt schon auf 2 Nachkommastellen mit dem exakten Wert überein (der Fehler ist sogar $< 0{,}004$)
Über Restglied-Darstellung nach Lagrange eine Fehler-Abschätzung.

Frage: Höheren Grad spendieren ⇒ wird die Näherung <u>genauer</u>?
Z.B. $m = 7$: Wie oben: Übereinstimmung mit exaktem Wert in 9 Dezimalen

$$e^{0,2} \approx T_7(0.2) = 1 + \tfrac{1}{1!}0.2 + \tfrac{1}{2!}0.2^2 + \cdots + \tfrac{1}{7!}0.2^7 = 1.221402758$$

Frage: <u>Beliebig genaue</u> Näherung von $e^{0,2}$ **durch Taylorpolynome?**
Ja, denn dieselbe Abschätzung mit Grad m anstelle $m = 2$ ergibt:

$| e^{0,2} - T_m(0,2) | =$

Als Grenzwert formuliert:

Diese <u>beliebig genaue</u> Übereinstimmung **als Reihe(nwert) schreiben**

$$e^{0,2} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot 0,2 + \frac{1}{2!}\cdot 0,2^2 + \cdots$$

Die obigen Überlegungen gelten für die Funktion $f(x) = e^x$ analog für jedes Stelle x anstelle der konkreten Stelle $x = 0,2$.

$$e^x = T(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Da dies nur ein Näherungswert ist, entsteht ein **Fehler** im Vergleich zum wahren Wert.

Fehler
= | Differenz wahrer Wert – Näherung |
= | $f(x) - T_m(x)$ |

Diese Differenz heißt **„Restglied"**
$$R_m(x) = f(x) - T_m(x)$$

Für das Restglied gibt es folgende Formel:

Restglied-Darstellung nach Lagrange

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

dabei ist z ein passender **Zwischenwert z zwischen x und x_0** (dessen genaue Lage aber <u>nicht</u> bekannt ist).

Die Fehlerdarstellung nach Lagrange nutzt die $(m+1)$ **-te Ableitung** mit einem passenden **Zwischenwert** z. Man erkennt, dass die Formel den Aufbau eines Taylor-Gliedes hat, deshalb Begriff „Restglied".

Die Literatur benutzt für die Zwischenstelle z oft das Symbol ξ (Xi).

Erstaunlich: Obwohl wir den wahren Wert von $e^{0.2}$ nicht kennen, erlaubt die **Restglied-Darstellung nach Lagrange**, den Fehler zwischen $e^{0.2}$ und $T_2(0.2) = 1.22$ abzuschätzen!

Für $m \to \infty$ entsteht aus den Taylorpolynomen $T_m(x)$ eine Reihe, deren Summanden selbst von der Variablen x abhängen, man nennt sie eine **Funktionenreihe**

Taylorreihe einer Funktion $f(x)$

Gegeben: Funktion $f(x)$, Stelle x_0

$$\Downarrow$$

Taylorkoeffizienten (siehe Taylorpolynome)

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\Downarrow$$

Taylorreihe von f um x_0

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Konvergenzbereich: Alle x für die die Reihe konvergiert (einen endlichen Wert hat).

$$\Downarrow$$

Idealfall:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \qquad (*)$$

Gleichheit, wenn **Restglied** beliebig klein:

$$|f(x) - T_m(x)| = |R_m(x)| \to 0 \;\; (m \to \infty)$$

Man nennt die Reihe $(*)$ **Taylorreihen-Darstellung** oder **Potenzreihen-Darstellung** von f. Potenzreihe ist der allgemeinere Begriff für jede Art von Polynom „vom Grad∞“, siehe später.

Gegen sei eine Funktion $f(x)$, die beliebig oft ableitbar ist.
Aus f, ihren Ableitungen und einer Stelle x_0 kann man die Taylorkoeffizienten bilden.

Mit den Taylorkoeffizienten kann man ein unendliches Polynom bilden. Dabei beachten, dass sich die Koeffizienten auf $(x - x_0)^k$ beziehen.

Man nennt diese Reihe die **Taylorreihe von f**.
Taylorreihe um $x_0 = 0$ wird auch **Maclaurin**-Reihe genannt.

Man wünscht sich, dass der Reihenwert = Originalfunktion $f(x)$ ist.
Dann könnte man durch Abbrechen der Reihe beliebig gute Polynom-Näherungen für den wahren Wert von $f(x)$ gewinnen.
Dabei kommt man dann nur mit den Grundrechenarten aus.

Gute Nachricht: So wie im obigen Beispiel für $(x) = e^x$ haben schon viele Mathematiker für viele Grundfunktionen mittels Restglied-Darstellung nachgerechnet, für welche x das Restglied $R_m(x) \to 0$.
In vielen Fällen gilt die Übereinstimmung von Taylorreihe und Originalfunktion für alle x des Definitionsbereiches von f.
In manchen Fällen nur für kleinere x-Bereiche. Man nennt dies den **Konvergenzbereich** bzw. **-intervall** der (Funktionen-)Reihe.

Beispiele: Konvergenz (nur) für $x \in (-1; 1]$ um $x_0 = 0$.

$$f(x) = \ln(1 + x) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{2}}$$

Beachte: Es gibt auch Funktionen, deren Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, aber ungleich $f(x)$ ist.

Übersicht: Taylorreihen der Grundfunktionen & wo sie konvergieren

Wichtige Taylorreihen / Potenzreihen-Darstellung der Grundfunktionen				konvergiert für
Geometrische Reihe	$\mathbf{\frac{1}{1-x}}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-1,1)$
Logarithmus- / Leibnizreihen Spezialfall $x = \pm 1$ Harmonische Reihe (∞) Leibnizreihe $(\ln 2)$	$= \mathbf{\ln \frac{1}{1-x}}$	$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$	$[-1,1)$
	$= \mathbf{\ln(1+x)}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$	$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$	$(-1,1]$
Exponentialreihe	$= \boldsymbol{e^x}$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\mathbb{R}$
Trigonometrische sin-Reihe	$= \mathbf{\sin x}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
Trigonometrische cos-Reihe	$= \mathbf{\cos x}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
Binomische Reihe $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ Wurzel $\sqrt{1+x}$ als Potenz $(1+x)^{0{,}5}$!	$= \mathbf{(1+x)^\alpha}$	$= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$(-1,1]$
Hyperbolischen Reihen $\sinh x, \cosh x$	Analog zu den PR von $\sin x$ bzw. $\cos x$, aber ohne die Vorzeichenwechsel.			

Diese Taylorreihendarstellungen der Grundfunktionen und viele weitere der Papula-FS dürfen ohne Herleitung verwendet werden, wenn nichts Abweichendes gesagt wird..

Anmerkung 1: Eulerschen Zahl e in unterschiedlichen Gestalten

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \quad ; \quad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Anmerkung 2: Dass man für die Potenzen und Logarithmus die verschobenen Funktionen

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \ln(1+x)$$

betrachtet, liegt am bevorzugten Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$, in dem f auch differenzierbar sein muss.

Anmerkung 3: Die Binomische Reihe nutzt **Binomialkoeffizienten** für bel. $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$. Für natürliche Zahlen kennen wir:

$$\binom{n}{0} := 1 \quad ; \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Die letzte Formel kann man auch für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ aufstellen, deshalb definiert man allgemein für $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad ; \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \quad (k \geq 1)$$

In der **Papula-FS Abs. 3.4** sind die Koeffizienten für Spezialfälle der binomischen Reihe schon explizit berechnet, z.B. für

$$\sqrt{1\pm x} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1\pm x}} \quad ; \quad \frac{1}{(1\pm x)^2}$$

Anmerkung 4: Die Eulerfunktion $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ ergibt sich, wenn man in die Taylorreihendarstellungen der beteiligten Funktionen jx anstelle von x einsetzt.

Was ist die Taylorreihe von $2\, sin\, x$ bei $x = 0$?

A) $2 \cdot (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots) = 2x - 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} \mp \cdots$

B) $2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} \mp \cdots$

C) $x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} \mp \cdots$

D) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$

Was ist die Taylorreihe von $sin\, x\ +\ cos\, x$ bei $x = 0$?

A) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

B) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

C) $1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$

D) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$

Bekannte Taylorreihen der Grundfunktionen benutzen & damit rechnen

Die Taylorreihe (TR) vieler zusammengesetzter Funktionen kann aus den bekannten Taylorreihen der Grundfunktionen herleiten. Das geht schneller, als die Taylorkoeffizienten explizit über die Ableitungen der Funktion zu berechnen!!!!

4 Potenzreihen verketten (substituieren) sowie „gliedweise" addieren, durch eine Potenz kürzen

Prinzip der Substitution: In der TR von $f(x)$ kann x durch eine beliebige Funktion $z(x)$ ersetzt und somit die TR für $f(z(x))$ erhalten werden, sofern $z(x)$ innerhalb des Konvergenzintervalls bleibt. So kann man TR zusammengesetzter Funktionen aus den TR der Grundfunktionen herleiten (sofern die innere Funktion die Gestalt einer Potenz ax^n hat) bzw. Taylor-) Näherungspolynome durch Abbrechen bekannter TR gewinnen. **Vorteil: Kein Ableiten notwendig!!**

4.1

Bestimmen Sie eine PR-Darstellung von $f(x)$ indem Sie auf die **bekannte Taylorreihe der Grundfunktion** $\sin$ zurückgreifen (Formelsammlung), anstatt die Taylorkoeffizienten von $f(x)$ explizit per Ableitung zu berechnen.

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$\sin(z) =$$

$$\sin(2x) =$$

Konvergenzbereich der Talyorreihe von $\sin(2x)$?

Taylorpolynom 7. Grades von $f(x) = \sin(2x)$ kann nun durch **Abbrechen der Taylorreihe** gewonnen werden!

$$f(x) \approx$$

4.2

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 5. Grades von $f(x)$, indem Sie eine **bekannte Taylorreihe nutzen** (nicht die Taylorkoeffizienten anhand der Ableitungen bestimmen!). Bestimmen Sie zudem deren Konvergenzbereich.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Potenzreihen darf man „gliedweise" addieren bzw. subtrahieren und durch Potenzen kürzen, mit Potenzen durchmultiplizieren:

4.3

Bestimmen Sie eine PR-Darstellung von $f(x) = x \sin x$ durch Verwendung der bekannten Potenzreihe des Sinus.

$$f(x) = x \cdot \sin x =$$

Bestimmen Sie eine PR-Darstellung von $g(x)$ durch Verwendung der bekannten Potenzreihe des Sinus.

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} =$$

Anmerkung: Multiplikation bzw. Division von Potenzreihen (mit Hilfe des sog. Cauchy-Produktes) behandeln wir nicht.

5 Potenzreihen nutzen, um Grenzwerte oder Integrale zu berechnen

Bei Potenzreihen darf man „gliedweise“ Grenzwerte bilden. Das ist oft ein Ersatz für de l’Hospital (Ableiten wird vermieden).

5.1

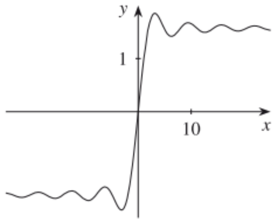
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}{x}=$$

Potenzreihen darf man „gliedweise“ integrieren (aufleiten bzw. bestimmt integrieren)
Das ist besonders von Interesse bei Funktionen, für die man keine Stammfunktion im üblichen Sinn (darstellbare durch elementare Grundfunktionen) angeben kann, z.B. beim

5.2

Der Integralsinus: In der E-Technik spielt im Umfeld des Tiefpasses der sogenannte Integralsinus eine zentrale Rolle.

[Dürrschnabel 18.4.3]



$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$$

Der Integrand hat keine Stammfunktion im üblichen Sinn (darstellbare durch elementare Grundfunktionen). Integrieren Sie stattdessen mit Hilfe der PR-Darstellung des Sinus.

Durch Abbruch der resultierenden Potenzreihe kann man den Funktionsverlauf nun näherungsweise bestimmen (siehe Abbildung).

5.3

Gauß‘schen Fehlerintegral: Zeigen Sie die folgende Darstellung und berechnen Sie eine Näherung für $x = 0{,}1$

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}\pm\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

Beispiele von Funktionen, deren Taylorkoeffizienten man **explizit durch Ableiten berechnen** müsste:

Potenzreihe = Polynom vom Grad ∞

Potenzreihen sind Reihen aus lauter Potenzen, im Prinzip Polynome vom Grad ∞. Bisher haben sich solche Reihen in Form der Taylorreihen ergeben. Dabei nutzen wir speziellen Koeffizienten a_k, die Taylorkoeffizienten zu einer Funktion $f(x)$. Nun geben wir keine konkrete Funktion $f(x)$ vor, sondern nur noch eine Folge von Zahlen, die wir als Koeffizienten $a_k$benutzten. Zusammen mit einem Entwicklungsmittelpunkt x_0 bauen wir daraus eine Potenzreihe. Was können wir über ihren Wert sagen?

6 Potenzreihen

Potenzreihe = Reihe aus Potenzen = Polynom vom Grad ∞

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots}$$

mit Koeffizienten $\boldsymbol{a_k}$ und **Entwicklungspunkt** $\boldsymbol{x_0}$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

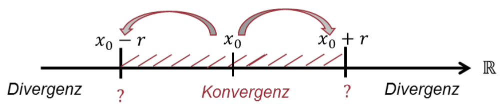
Frage A) Für welche x konvergiert die PR $(*)$? Dieser „Konvergenzbereich (KB)" hat die Gestalt eines Intervalls. Dieses hängt (logischerweise) von x_0 und den Koeffizienten a_k ab. x_0 ist der Mittelpunkt, die a_k bestimmen den Radius des Intervalls.

Schritt 1: **Konvergenzradius** r berechnen. Eine Variante ist:

$$\boldsymbol{r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Schritt 2: **Konvergenzintervall** = Symmetr. Intervall um $\boldsymbol{x_0}$



1) Für x im Innern, d.h. $|x-x_0| < r$ **konvergiert** die PR *)

2) Für x außen, d.h. für $|x-x_0| > r$ **divergiert** die PR *)

3) **Randpunkte** $x = x_0 \pm r$ in PR einsetzen und für die entstehende Zahlenreihe Reihenkonvergenzkriterien anwenden. Für x am rechten, linken Intervallende kann Konvergenz oder auch Divergenz auftreten.

*) Begründung: Quotientenkriterium für $b_k = a_k(x-x_0)^k$

Fazit: **Konvergenzbereich**
= Gesamtmenge aller x mit Konvergenz

z.B. KB = $(x_0 - r, x_0 + r]$

Je nachdem also nur ein (halb-)offenes Intervall.

Anmerkung: Es kann $r = 0$ vorkommen, d.h. dass die Potenzreihe nur für $x = x_0$ konvergiert (was immer der Fall ist). Prominentes Beispiel ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$

Frage B) Kennen wir den Reihenwert im KB?

Weshalb ist es dennoch interessant zu wissen, dass er im KB endlich ist (Konvergenz)?

Überblick: Polynome & Potenzreihen
Taylorpolynom & Taylorreihe zu f

Gegeben: Koeffizienten a_k und Stelle x_0

Klassische Polynome ⟷ **Potenzreihen**

Wo konvergent (endlicher Wert)?

Gegeben: Funktion f und Stelle x_0

Zu f gehöriges Taylorpolynom vom Grad m

Taylorreihe $T(x)$ zu f

wie oben, wobei a_k berechnet aus f
Taylorkoeffizienten von f

$T_m(x)$ ← $$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$ → $T(x)$

Näherung an f

$$T_m(x) \approx f(x)$$

Abbrechen liefert T_m

Wo gleich f?

$$T(x) = f(x) \quad ?$$

In welchem Sinn bestmöglich?

Falls Restglied $R_m = f - T_m \to 0$

Lagrange ermöglicht Abschätzungen:

Grundfunktionen: PR und bekannt!