Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025
Studiengang Angewandte Informatik

Kapitel 5: Mehrdimensionale Analysis

Lernziele:

- Funktionen mehrerer Veränderlicher partiell ableiten können (erste und höhere Ableitungen), Gradient bilden.
- Änderungsverhalten von Funktionen mehrerer Veränderlicher näherungsweise per Differentialrechnung beurteilen können: Partielle Ableitung, partielles Differenzial, totales Differential.
- Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Variablen lösen können. Hierbei wird die hinreichende Bedingung für Max/Min nur für den Fall von 2 Variablen verlangt.
- Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Variablen unter Nebenbedingungen per Variablen-Substitution und nach Lagrange lösen können (ohne hinreichende Bedingung für Max/Min).

Kapitel: Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Funktionen mehrerer Veränderlicher

- Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen
- Räumliche Darstellung bei 2 Variablen
- Lineare Funktionen mit mehreren Variablen, lineare Gleichungen

Partielle Ableitung

- Steigung, partielle Ableitung (erster und höherer Ordnung)
- Gradient
- Totales Differential
- Richtungsableitung

Extrema

- Relatives Extremum ohne Nebenbedingungen
- Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrange-Ansatz)

Mehrfachintegrale

- Integrale von Funktionen mehrerer Variablen
- Normalbereiche und Mehrfachintegrale
- Anwendungen

Literatur

[Teschl 2] Kapitel 23**. Allerdings betrachten wir nur reellwertige Funktionen, keine Jacobi-Matrix etc**.

[Tietze 1] S. 153 ff

[Dürrschnabel] Kapitel 20-22

Übersicht und Vergleich

Variable	eine Variable x	Mehrere unabh. Variablen $x_1, \dots, x_n$ Zusammengefasst ein Vektor $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, \dots, x_n)$
Funktion	$y = f(x)$ Bsp $= x^2$	$y = f(x_1, \dots, x_n) = f(\vec{\boldsymbol{x}})$ Bsp. $= x_1^2 + \dots + x_n^2$
Erste Ableitung Gradient	$y' = f'(x)$ bzw. $y' = \frac{df}{dx}$	f_{x_i} bzw. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ Zusammengefasst zum Gradienten-Vektor: $\operatorname{grad}(f) = \nabla f =$
Zweite Ableitung Hesse-Matrix	$y'' = f''(x) = (f')'$ $y' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right)$	$f_{x_i x_k}$ $\frac{\partial f}{\partial x_k \partial x_i}$ Zusammengefasst zur Hesse-Matrix: $H_f = \left(f_{x_i x_k}\right) =$
Tangente	an Stelle p: 1. Taylorpolynom $t(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$	an Stelle $\boldsymbol{p} = (p_1; p_2)$ $t(x, y) =$
Differential	an Stelle p $\Delta f \approx \Delta t = df = f'(p) \cdot dx$	$\Delta f \approx \Delta t = df =$

Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen: Einführung und Begriffe

Funktion

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y$$

Z.B. Rechenvorschrift: $f(x) = x^2 \quad (D \subset \mathbb{R})$

Reelle Funktion mehrerer Variablen

$$n, V, T \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow P$$

Rechenvorschrift: $P(n, V, T) = R\,\frac{n \cdot T}{V}$

3 reellen unabhängige Variable; zus. ein Vektor des $\mathbb{R}^3$

$$D \subset \mathbb{R}^3$$

Funktion von n Variablen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y$$

Kurz:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bzw. Variable als Vektor:

$$y = f(\boldsymbol{x})$$

Beispiele:

$n > 3$: $\; y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

$n = 2$: $\; z = f(x, y) = x \cdot y$

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_2 x_3 + 100$$

$$x = x(r_1, \dots, r_3) = 2 \cdot r_1^{0{,}5} \cdot r_2^{0{,}4} \cdot r_3^{0{,}1}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R = R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Bisher haben wir uns immer mit Funktionen in Abhängigkeit von einer (reellen oder komplexen) Variablen beschäftigt. Jedoch: <u>Jede</u> **eindeutige Zuordnungsvorschrift** von einer Definitionsmenge A in eine Zielmenge B wird als Funktion bezeichnet.

Eine solche eindeutige Zuordnung kann auch zwischen mehreren Input-Variablen und einer Output-Variablen gegeben sein. Viele technische oder ökonomische Größen hängen nicht nur von einer unabhängigen Variablen ab, sondern von mehreren Input-Größen, die man unabhängig voneinander festlegen oder ändern kann. Deshalb betrachten wir nun $D \subset \mathbb{R}^n$, Funktionen mehrerer unabhängiger reeller Variablen und (in Mathe2) reellem Zielwert.

<u>Beispiel</u>: Beim idealen Gas ist der Druck P in Abh. der Stoffmenge n (Mol), Volumen V Temperatur T (R = Allg. Gaskonstante) eindeutig bestimmt und kann als mathematische Term formuliert werden.

Kann man die Zuordnungsvorschrift über einen mathematischen Term beschreiben, können wir Fragestellungen mit den Mitteln der Analysis bearbeiten.

Definition: Eine reelle Funktion von n Variablen ist eine Vorschrift, die jeder Kombination von n Variableneines Definitionsbereiches $D \subseteq \mathbb{R}^n$, genau eine reelle Zahl (Wert) zuordnet.

Bezeichnen wir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ als Vektor des $\mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x}$ oder $\vec{x}$, so ergibt sich eine Schreibweise ähnlich zu einer Variablen:

Bezeichner der Variablen (allgemeine Mathematik)

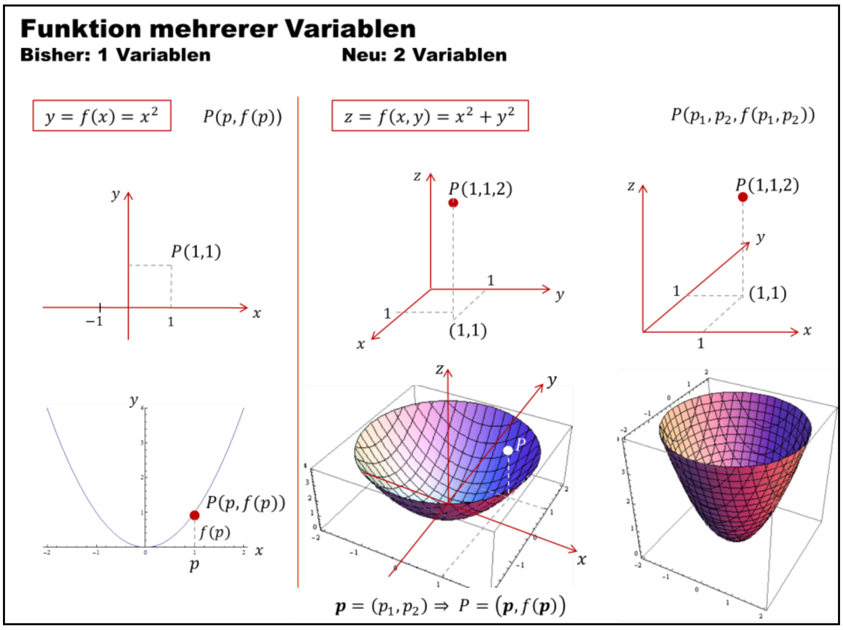
Die Bezeichner der (mehreren) unabhängigen Variablen sind an sich unerheblich. Üblich in der **allgemeinen Mathematik** sind x, y bzw. bei mehr als 2 Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Für **physikalische** oder **ökonomische** Größen bzw. Funktionen nutzt man feststehende Bezeichner. t = Zeit, x = Menge / Produktions- oder Absatzmenge, K = Kosten, etc. Wenn mehrere Variable eines Typs vorkommen, werden diese nummeriert.

<u>Beispiel</u>: Für eine Unternehmung, die drei Güter (Produkte) herstellt, hängen die Kosten K (gemessen in Geldeinheiten GE in einer Zeitperiode) von den Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 (mit passender Mengeneinheit ME) der einzelnen Produkte ab.

<u>Beispiel</u>: Produktion einer Menge x in Abh. des Einsatzes von n „Produktionsfaktoren" $r_1, \dots, r_n$ (z.B. Arbeitsleistung, Maschinenlaufzeiten, Energieeinsatz, Betriebsstoffe…). Hier ist x nicht die unabh. Variable, sondern Bezeichne des Funktionswertes:

<u>Beispiel</u>: Der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter ohmscher Widerstände R_1, R_2 berechnet sich nach dem Kirchhoff'schen Gesetz. Man kann R explizit als Funktion R_1, R_2 darstellen (Auflösen nach R ist möglich)!

Räumliche Darstellung im Fall $n = 2$



Bei 2 unabhängigen Variablen müssen wir (inkl. der abh. Variablen) 3 Dimensionen darstellen: Definitionsbereich ist eine Teilmenge der x, y-Ebene und über jedem Punkt (x, y) genau ein Funktionswert als z-Koordinate („Höhe des Gebirgspunktes").

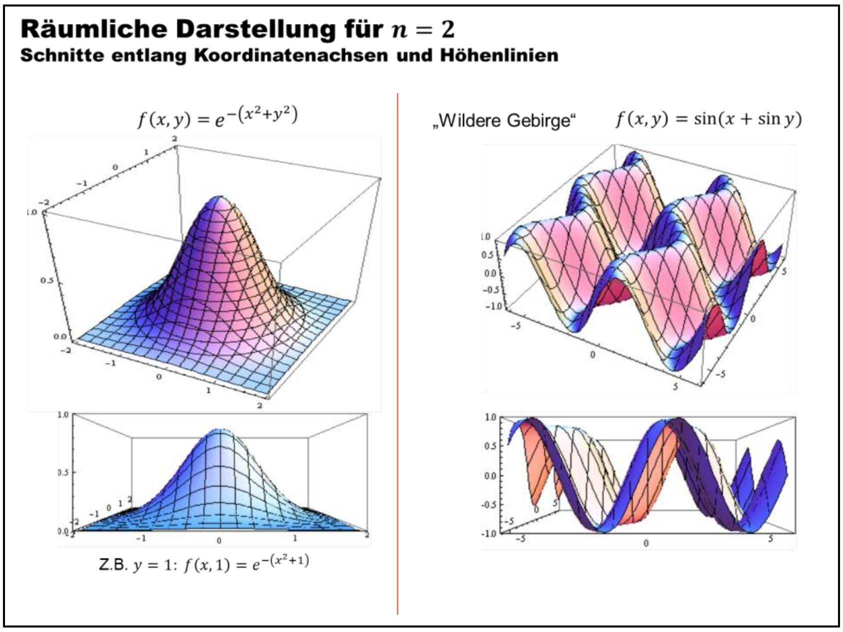
Wir verwenden als 3D-Koordinatensystem ein „**Rechtssystem**".

Es entsteht eine Fläche im 3D Raum, eine Art **Funktionsgebirge**.

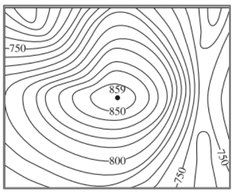
(x, y, z) mit $z = f(x, y)$ ist ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ auf der Oberfläche dieses Gebirges.

Bei mehr als zwei unabhängigen Variablen versagt die Anschauung, aber die Techniken der Analysis können analog angewendet werden.

Anmerkung: Das Funktionsgebirge links heißt Rotationsparaboloid.

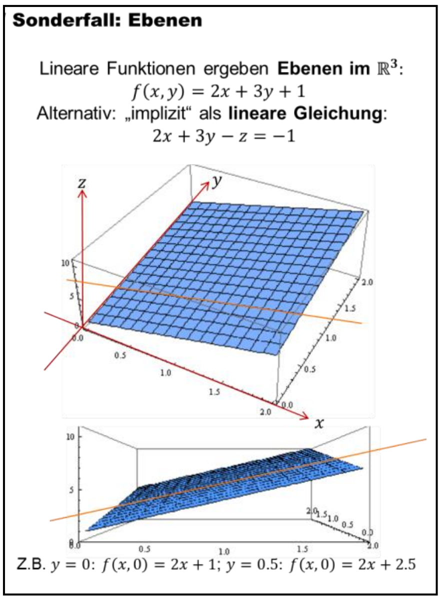


Vergleich zu topografischen Karten:



Schnitte und Höhenlinien
Niveaulinien / Isoquanten

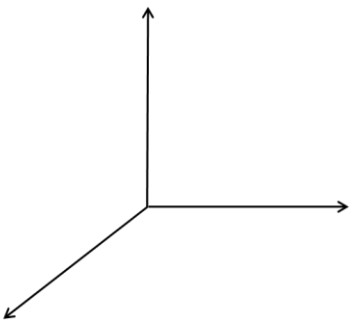
Eine gute Vorstellung erhält man auch, wenn man sich Schnitte (parallel zu den 3 Koordinatenebenen) veranschaulicht (diese sind dann nur 2-dimensional, also einfach darzustellen). Man erhält sie, in dem man eine der Koordinaten x, y, z konstant auf einen festen Wert setzt. Speziell Höhenlinien = Schnitte parallel zur xy-Ebene.



Lineare Funktion mit n Variablen

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c$$

$$(a_i, c \in \mathbb{R} \text{ const})$$



Im $\mathbb{R}^3$ ergibt sich anschaulich eine Ebene.

Skizze? Entweder durch Berechnen von 3 Punkten (vorzugsweise auf den Koordinatenachsen) oder über die Schnitte (Geraden) mit den Ebenen des Koordinatensystems.

Beispiel: Skizze für $x + 2y + 4z = 4$

Frage 1:

Wie sieht ein Graph der Funktion $f(x,y) = x$ aus?

A) Eine Linie in der xy-Ebene
B) Eine Linie in drei Dimensionen
C) Eine horizontale Ebene
D) Eine schiefe Ebene

Carroll MathQUEST

Frage 2:

Das durch $x = 2$ beschriebene Objekt im 3D-Raum ist

A) Ein Punkt
B) Eine Linie
C) Eine Ebene
D) Undefiniert.

Carroll MathQUEST

Frage 3:

Der Graph von $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ sieht am ehesten so aus:

A) eine Schale, die sich nach oben öffnet die aber flacher ist als $x^2 + y^2$
B) eine Schale, die sich nach oben öffnet, aber steiler ist als $x^2 + y^2$
C) einer Schale, die sich nach unten öffnet
D) ein kleiner Hügel in einer großen Ebene

Carroll MathQUEST

Frage 4:

Eine Ebene hat einen z-Achsenabschnitt von 3, eine Steigung von 2 in x-Richtung und eine Steigung von -4 in y-Richtung. Die Höhe der Ebene bei (2,3) ist

A) -2
B) -8
C) -5
D) Nicht bestimmbar durch die Informationen.

Carroll MathQUEST

Partielle Ableitung und Gradient ∇f

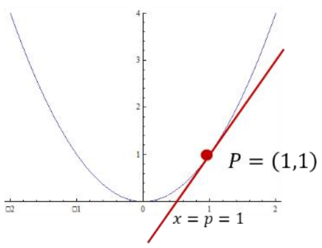
Bei der Wanderung über ein Gebirge hängt die Steigung von der Richtung ab. Im Gegensatz zu Funktionen einer Variablen, die sich nur in eine x-Richtung verändern kann, kann man bei $n = 2$ Variablen in jede Richtung der x, y-Ebene gehen. Von „der" Steigung kann man nur bezogen auf eine(n) Richtung(svektor) sprechen. Betrachten wir zunächst die Richtungen entlang der Koordinatenachsen. Die Tangentensteigung in Richtung der x-Achse erhalten wir, in dem wir y fest halten und nur nach der Variablen x ableiten (beim Ableiten$y$ wie Konstante behandeln).

Dies nennt man die partielle Ableitung $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ von f nach x. Analog $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ Tangentensteigung in Richtung der y-Achse.

Steigung / (Partielle) Ableitung

Bisher: 1 Variablen

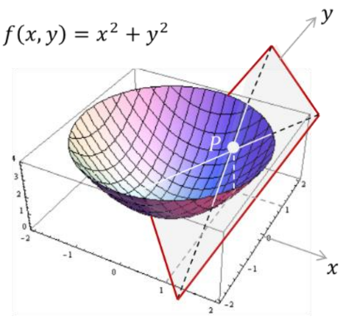
$y = f(x) = x^2$



$f'(x) = 2x$ Steigung von f bei x

Neu: 2 Variablen

$z = f(x, y) = x^2 + y^2$



Spezielle Stelle in Ebene, z.B.: $\boldsymbol{p} = (1,1)$
Punkt auf Kurve: $P = (1,1,2)$
Kurve in Richtung x-Achse: $z = x^2 + 1$
Kurve in Richtung y-Achse: $z = 1 + y^2$
Davon Tangentensteigung bekannt.

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ Steigung von f bei $\boldsymbol{p} = (x, y)$ in x-Richtung

$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ Steigung von f bei $\boldsymbol{p} = (x, y)$ in y-Richtung

Zusammenfassung als Vektor:

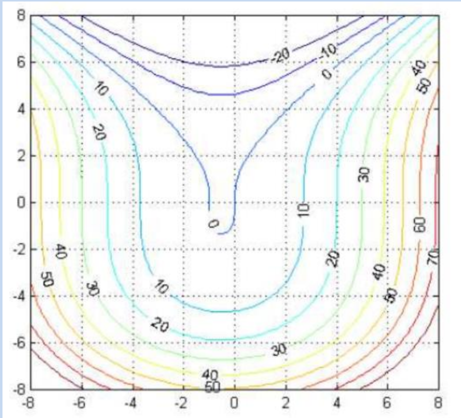
$$\nabla f = \text{grad } f := \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

1 Beispiele zum Bilden der partiellen Ableitungen 1. Ordnung und Interpretation als Steigung in eine Richtung

1.1	$f(x, y) = \frac{1}{2}xy - y^2 - 2xy^2$ Gesucht: Steigung von f an der Stelle $(-2,2)$ in x- bzw. y-Richtung.
1.2	$f(x, y) = (2x - y)^3 + \ln(xy + 1)$. Gesucht: Alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung. Hierzu benötigen wir die Kettenregel.

Frage 1:

Welche der folgenden Aussagen trifft auf den Punkt (4,2) im folgenden Höhenlinien-Diagramm zu?



A) $f_x > 0, f_y > 0$
B) $f_x > 0, f_y < 0$
C) $f_x < 0, f_y > 0$
D) $f_x < 0, f_y < 0$

Carroll MathQUEST

Frage 2:

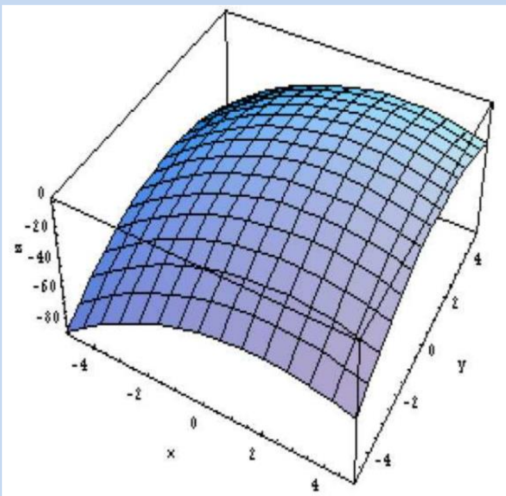
Welcher Wert kommt der partiellen Ableitung f_x am nächsten im Punkt (4, 2) bei dem Höhenliniendiagramm von Frage 1.

A) 40
B) 20
C) 10
D) 4

Carroll MathQUEST

Frage 3:

An welchem Punkt über der xy-Ebene werden beide partiellen Ableitungen positiv sein?



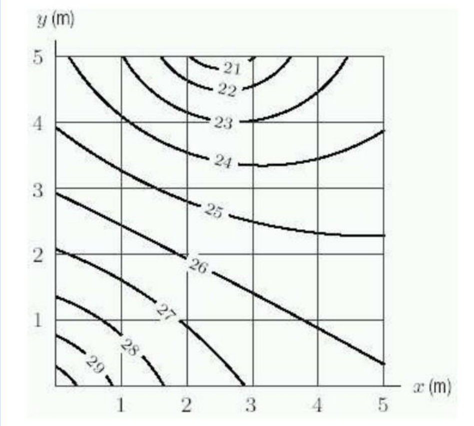
A) $(-5, -5)$
B) $(5, -5)$
C) $(5, 5)$
D) $(-5, 5)$

Carroll MathQUEST

Frage 4:

Was ist größer, $f_x(2,1)$ oder $f_y(1,2)$, wenn man die Niveaukurven von $f(x,y)$ aus der folgenden Abbildung verwendet?

A) $f_x(2,1) > f_y(1,2)$
B) $f_x(2,1) < f_y(1,2)$



Carroll MathQUEST

Allgemein für n Variablen

Partielle Ableitung (1. Ordnung) einer Funktion von n Variablen

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

nach der Variablen x_k ist die gewöhnliche Ableitung von f nach x_k unter Konstanthalten aller übrigen Variablen. Schreibweisen:

$$f_{x_k} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_n) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x_k} f(\boldsymbol{x})$$

Gradient von f (Zusammenfassung als Vektor)

$$\boldsymbol{\nabla f = \mathrm{grad}\, f} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{x_1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f_{x_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_n}} \end{pmatrix}$$

Als Differentialquotient

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(\boldsymbol{x}) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ist selbst wieder eine Funktion von n Variablen.

Ausgewertet an der Stelle $\boldsymbol{p} \in D$ ergibt sich die **Steigung** (der Tangente) von f an der Stelle $\boldsymbol{p}$ in **Richtung $\boldsymbol{x_k}$**

Formal ist die partielle Ableitung nach x_k der Differentialquotient, bei dem der Grenzwert gebildet wird, den wir in der Analysis einer Variablen zur Berechnung der momentanen Änderungsrate nutzen, jedoch nur bei (kleinen) Änderung der k-ten Variable.

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$ Misst also die relative Änderung des Funktionswertes f bezogen auf kleine Änderungen der Variable x_k wenn die anderen Variablen unverändert bleiben.

Bei ökonomischen Funktionen sagt man auch „**partielle Grenzfunktionen**", weil man Änderungen von f „an der Grenze" (d.h. für kleine Änderungen von x_k) misst.

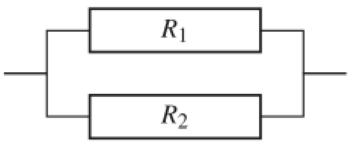
2 Beispiele mit mehr als zwei Variablen

$f(x_1, x_2, x_3) := \sqrt{x_1^3 + 2} \cdot \ln x_2 + e^{x_2 x_3^2}$

Bestimmen Sie die Steigungen von f in Richtung der 3 Koordinatenachsen x_i an der Stelle $(x_1, x_2, x_3) = (0,1,0)$.

3 Anwendung: Parallel geschaltete Widerstände: Änderungsrate

Der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter ohmscher Widerstände R_1, R_2 berechnet sich nach dem Kirchhoff'schen Gesetz als



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Wie groß ist die folgende Änderungsrate?

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} =$$

Interpretation: Sie misst die relative Änderung des Gesamtwiderstands R bezogen auf kleine Änderungen des ersten Widerstands R_1, wenn der zweite Widerstand R_2 unverändert bleibt.

Höherer partielle Ableitungen & Hesse-Matrix

Partielle Ableitung zweiter Ordnung von f nach x_i, x_k.
für $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ergibt sich, indem man die partielle Ableitung 1. Ordnung f_{x_i} nach der Variablen x_k ableitet

$$f_{x_i x_k} := \left(f_{x_i}\right)_{x_k} := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}; \qquad f_{x_k x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 + y^4$$

$$f_x = 3x^2 + y^2 \qquad f_y = 2xy + 4y^3$$

$$f_{xx} = 6x \qquad \underbrace{f_{xy} = 2y \qquad f_{yx} = 2y} \qquad f_{yy} = 2x + 12y^2$$

Hesse-Matrix von f = Alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung werden als Matrix zusammengefasst (sie ist symmetrisch)

$$\boldsymbol{H_f} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{x_nx_1} & & & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H_f} = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x + 12y^2 \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz: Reihenfolge vertauschbar

Sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen stetig, so kommt es auf die Reihenfolge partieller Ableitungen nicht an:

$$f_{x_i x_k} = f_{x_k x_i} \quad ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

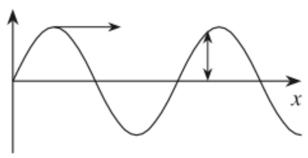
4 Beispiele: Geben Sie alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung an

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^3)}$$

5 Anwendungen der partiellen Ableitungen 2. Ordnung

Eine wichtige Anwendung der Hesse-Matrix sehen wir später bei der **Suche nach Max, Min von f**.
Zudem treten partielle Ableitungen 2. Ordnung in sog. **partiellen Differentialgleichungen** auf.
Beispiel: Die Ausbreitung einer Welle mit der Geschwindigkeit c in x-Richtung in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit t kann mit Hilfe der Wellengleichung beschrieben werden, wobei $y = y(x,t)$ die Auslenkung an der Stelle x zum Zeitpunkt t ist.

y zu einem Zeitpunkt $t = t_0$



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Beh.: Folgende Funktionen erfüllen diese Wellengleichung

$y(x,t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}(x - ct)\right)$

$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ für beliebige, 2-mal differenzierbare Fktn f, g.

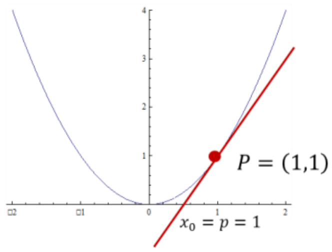
Probe: Partielle Ableitungen bilden und Gleichung durch Einsetzen überprüfen.

Tangentialebene

Im Fall einer Variablen ist die Tangente (Gerade) die beste lineare Annäherung an $f(x)$. Bei Funktionen von 2 Variablen betrachtet man eine Ebene (**Tangentialebene**) als beste lineare Annäherung an $f(x,y)$. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie (1) eine Ebene ist und (2) in x-Richtung und in y-Richtung dieselbe Steigung wie f hat. D.h. sie wird durch die Tangenten in x- und y-Richtung aufgespannt. In Vektorschreibweise zeigt sich eine große Ähnlichkeit zum Fall einer Variablen!
Im Fall zweier Variable kann es vorkommen, dass die partiellen Ableitungen in x- und y-Richtung existieren, die aufgespannte Ebene aber keine Anschmiegung an f darstellt. Für „gutartige" Funktionen (etwa f_x, f_y stetig) ist dies jedoch nicht der Fall.

Bisher: 1 Variablen

$y = f(x) = x^2$



Tangente in P:

Gerade: $t(x) = ax + b$ mit

(1) $t(p) = f(p)$;

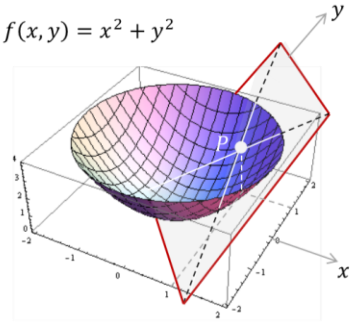
(2) $t'(p) = f'(p)$

$\Rightarrow \; t(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$

Beste lineare Anschmiegung an f an Stelle p (falls f' existiert)

Neu: 2 Variablen

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$



Vektorschreibweise
Für die Variablen $\boldsymbol{x} = (x,y)$
Für die Stelle: $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0)$
Für die Funktion: $z = f(\boldsymbol{x})$

Tangentialebene in P:

Ebene: $t(x,y) = ax + by + c$ mit

(1) $t(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p})$;

(2) $t_x(\boldsymbol{p}) = f_x(\boldsymbol{p})$ und $t_y(\boldsymbol{p}) = f_y(\boldsymbol{p})$

$\Rightarrow t(x,y) = f(\boldsymbol{p}) + f_x(\boldsymbol{p})(x - p_1) + f_y(\boldsymbol{p})(y - p_2) \qquad (*)$

$\boxed{t(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}$ Analogie zu $n = 1$.

Beste ebene Anschmiegung an f (falls f_x, f_y stetig)
Daraus ergibt sich das totale Differential (s.u.)

6 Beispiele und Übungen zu Steigung und Tangentialebene

Für $f(x,y) = x^2 + y^2$ ermittele man die Tangentialebene im Punkt $P(1,1,?)$.

- Als Funktionsvorschrift $t(x,y)$ Lösung: $t(x,y) = 2x + 2y - 2$
- (Implizite) Darstellung als Gleichung von drei Variablen
- In Parameterdarstellung (im Sinne der Analytischen Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Bringt man der Gleichung der Tangentialebene (*) den Wert $f(\boldsymbol{p})$ bzw. (identisch mit) $t(\boldsymbol{p})$ auf die linke Seite, so erhält man die Höhenänderung auf der Tangentialebene $\Delta t = f_x(\boldsymbol{p})(x - p_1) + f_y(\boldsymbol{p})(y - p_2)$, wenn man sich von $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ nach $\boldsymbol{x} = (x,y)$ bewegt. Bei kleinen Änderungen kann die Höhenänderung auf der Tangentialebene als (einfach zu berechnende) <u>Näherung</u> für die (Höhen-)Änderung von f verwendet werden. Bezeichnet man für die Deltas in x- bzw. y-Richtung mit dx bzw. dy, so ergibt sich die folgende Formel „Totales Differential". Die Schreibweise dx soll hier lediglich andeuten, dass diese Formel primär **für kleine Deltas** angewendet wird (weil man damit Näherungsaussagen über f machen will; die Tangentialebene selbst ist i.d.R. nicht von Interesse). Im Gegensatz zum Integral-Symbol meint dx hier aber kein Differential im Sinne „beliebig klein werdend" (GW-Betrachtung $\Delta x \to 0$).

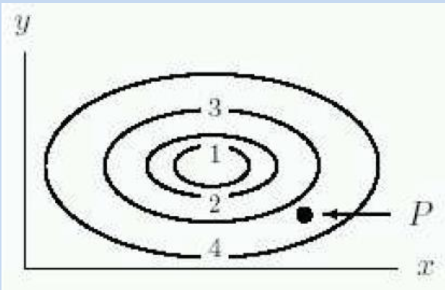
Frage 1:
Gegeben ist $f(2,3) = 7, f_x(2,3) = 1$ und $f_y(2,3) = 4$. Dann sei die Tangentialebene an die Oberfläche von $z = f(x,y)$ im Punkt $(2,3)$

C) $z = 7 - x + 4y$
D) $x - 4y + z + 3 = 0$
E) $-x + 4y + z = 7$
F) $z = 17 + x - 4y$

Carroll MathQUEST

Frage 2:
Die folgende Abbildung zeigt die Höhenlinienkurven der Funktion $f(x,y)$.
Die Approximation der Tangentialebene an $f(x,y)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ ist
$f(x,y) \approx c + m(x - x_0) + n(y - y_0)$.
Welches sind die Vorzeichen von c, m und n?

A) $c > 0, m > 0, n > 0$
B) $c < 0, m > 0, n < 0$
C) $c > 0, m < 0, n > 0$
D) $c < 0, m < 0, n < 0$
E) $c > 0, m > 0, n < 0$



Carroll MathQUEST

Frage 3:
Welche der folgenden Gleichungen könnte die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $z(x,y) = x^2 + y^2$ in einem Punkt (a,b) im ersten Quadranten sein?

A) $z = -3x + 4y + 7$
B) $z = 2x - 4y + 5$
C) $z = 6x + 6y - 18$
D) $z = -4x - 4y + 24$

Carroll MathQUEST

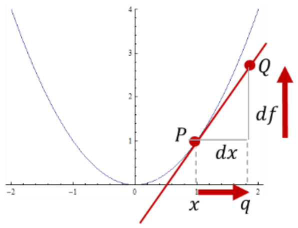
df = Differential von f = Änderungsverhalten entlang der Tangentialebene

Voriges Beispiel: Tangentialebene: $t(x,y) = f(1{,}1) + f_x(1{,}1) \cdot (x-1) + f_y(1{,}1) \cdot (y-1$

Änderung auf t bei Weggehen $(1{,}1) \to (x,y)$: $\Delta t = t(x,y) - f(1{,}1) = f_x(1{,}1) \cdot (x-1) + f_y(1{,}1) \cdot (y-1)$

Änderung von f bei Weggehen $(1{,}1) \to (x,y)$: $\Delta f \approx \Delta t$

$y = f(x) = x^2$



Differential:

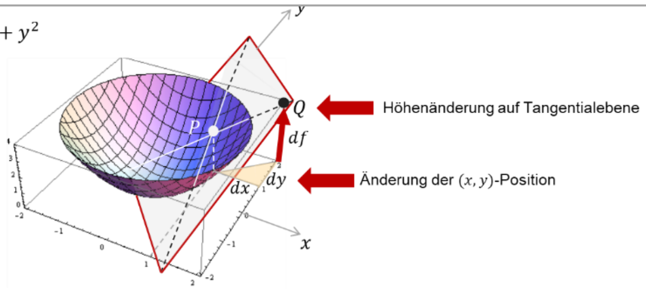
$df = f'(x) \cdot dx$

Bedeutung:

Änderungswert auf der Tangente.

Gibt näherungsweise an, um wie viel sich f ändert, wenn man die Variable ausgehend vom Wert x um dx ändert.

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$



Partielles Differential (zu einer der Richtungen):

$df_x = f_x \cdot dx$ analog $df_y = f_y \cdot dy$

Bedeutung:

Änderungswert auf der Tangente in x-Richtung.

Gibt näherungsweise an, um wie viel sich f ändert, wenn man
die x-Variable ausgehend vom Wert x um dx und die anderen Variablen aber unverändert lässt.

Totales (vollständiges) Differential:

$df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$

Ausführlich: $df = f_x(x,y) \cdot dx + f_y(x,y) \cdot dy$

Bedeutung:

Änderungswert auf der Tangentialebene.

Gibt näherungsweise an, um wie viel sich f ändert, wenn man
die x-Variable ausgehend vom Wert x um dx **und**
die y-Variable ausgehend vom Wert y um dy ändert.

(Totales) Differential df

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

Die partiellen Ableitungen werden an einer Stelle $\boldsymbol{p} \in D$ ausgewertet.

Die Werte dx_k geben an, um wie viele Einheiten man sich in x_k-Richtung von $\boldsymbol{p}$ wegbewegt (gleichbedeutend mit Δx_k.

Bedeutung:

- df misst (exakt) die Änderung auf der Tangentialebene von f bei $\boldsymbol{p}$
- df ist **Näherung** für Δf , d.h. für die Änderung von f (um so exakter, je kleiner dx_k)
- Anwendung in der Fehlerrechnung (lineare Fehlerfortplanzung)

.

7 Beispiele: Änderungsverhalten über das Differential annähern

7.1	$f(x,y) = x^2 + y^2$ a) Bestimmen Sie das Differential von f b) Bestimmen Sie das Differential von f an der Stelle $(x,y) = (1{,}1)$ c) Um wie viel ändert sich f näherungsweise, wenn man ausgehend von der Stelle $(1{,}1)$ nur in x-Richtung um 0.1 geht. nur in y-Richtung um 0.25 geht. sowohl in x-Richtung um 0.1 <u>und</u> in y-Richtung um 0.25 geht. (Kontrolle: 0.7)
7.2	Ideale Gasgleichung. $P(n,V,T) = R\frac{nT}{V}$ = Druck in Abhängigkeit von Stoffmenge n, Volumen V, Temperatur T Formel für die näherungsweise Änderung des Gasdrucks P bei einer geringfügigen Änderung n, V, T?

Frage 1:

Gegeben sind $f_x(3,4) = 5$, $f_y(3,4) = -2$, und $f(3,4) = 6$.

Unter der Annahme, dass die Funktion differenzierbar ist, was ist die beste Schätzung für $f(3.1,\ 3.9)$?

A) 5.7
B) 5.3
C) 6.3
D) 6.7

Carroll MathQUEST

Frage 2:

Ein kleines Unternehmen hat Anlagen im Wert von 300.000 $ und 100 Mitarbeiter.
Die monatliche Gesamtproduktion, P (in Tausend Dollar), ist eine Funktion des Gesamtwerts der Ausrüstung, V (in Tausend Dollar), und der Gesamtzahl der Arbeiter, N.
Das Differential von P ist gegeben durch $dP = 4{,}9dN + 0{,}5dV$. Wenn das Unternehmen beschließt, 3 Arbeiter zu entlassen und zusätzliche Ausrüstung im Wert von 20.000 $ zu kaufen, dann

A) steigt die monatliche Produktion.
B) sinkt die monatliche Produktion sinkt.
C) bleibt die monatliche Produktion gleich.

Carroll MathQUEST

Frage 3:

Wir müssen die Fläche des Fußbodens eines großen rechteckigen Raums bestimmen, aber unsere Messungen sind nicht sehr genau. Wir stellen fest, dass der Raum 15,9m x 13,4m groß ist, so dass wir eine Fläche von 213,06 m² erhalten, aber unsere Messungen sind nur bis auf ein paar Zentimeter genau ($\pm$ 2 cm), so dass unsere Schätzung der Fläche wahrscheinlich um ein bisschen daneben liegt. Bestimmen Sie mit Hilfe von Differentialen den wahrscheinlichen Fehler in unserer Schätzung der Fläche des Bodens.

A) 4,0 cm²
B) 58,6 cm²
C) -50 cm²
D) 50 cm²

Carroll MathQUEST

Steigung in eine beliebige Richtung & Richtung mit stärkstem Anstieg

Frage 1: Steigung von f in eine beliebige Richtung?

Frage 2: Richtung mit dem stärksten Anstieg / Abfall?

Richtungsableitung von f

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f \; = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}} \cdot \nabla f \qquad (\text{wobei } \boldsymbol{v} \text{ normiert ist})$$

Die Steigung von f in Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$ ergibt sich aus dem Skalarprodukt des normierten Richtungsvektors $\boldsymbol{v}$ mit dem Gradienten von f, (also den Steigungen in die Richtung der Koordinatenachsen).

Richtung durch einen Richtungsvektor $\boldsymbol{v}$ des $\mathbb{R}^n$ beschreiben

(Zumindest wenn alle partiellen Ableitungen stetig sind, existiert die Tangente in jede Richtung).

Der Gradient ∇f zeigt in die Richtung mit dem stärksten Anstieg von f !

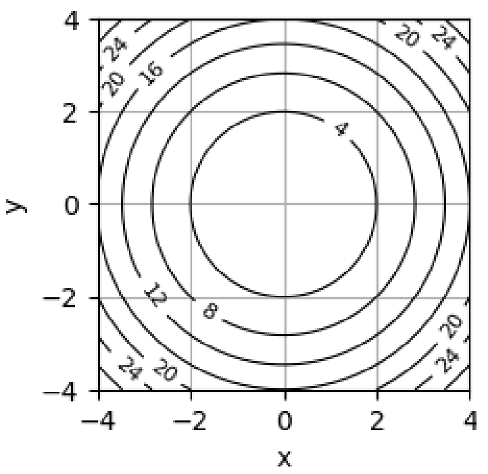
∇f = Richtung des stärksten Anstiegs von f

8 Beispiele zur Richtungsableitung

Für $f(x,y) = x^2 + y^2$ bestimme man an der Stelle $\boldsymbol{p} = (-2{,}2)$ die Steigung in die Richtungen:

$\boldsymbol{r_1} = \binom{2}{0}$, $\boldsymbol{r_2} = \binom{-1}{0}$, $\boldsymbol{r_2} = \binom{0}{1}$, $\boldsymbol{r_3} = \binom{0}{-2}$, $\boldsymbol{r_4} = \binom{2}{-2}$, $\boldsymbol{r_5} = \binom{1}{2}$.

Kontourliniendiagram von $f(x,y) = x^2 + y^2$:



Welches ist die Richtung des stärksten Anstiegs von f an der Stelle $\boldsymbol{p}$?

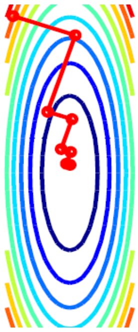
Wie groß ist diese stärkste Steigung an der Stelle $\boldsymbol{p}$?

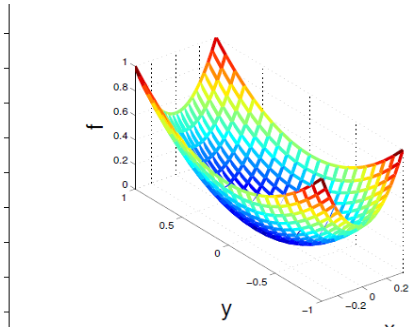
9 Richtung des Gradienten = Richtung des steilsten Anstiegs

Begründen Sie diese Aussage mit Hilfe der Darstellung des Skalarproduktes mit Hilfe von Längen und Winkel

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi$$

Anwendung: Gradientenverfahren = Verfahren des steilsten Abstiegs





Suche nach Minimum entlang der Richtung $-\nabla f$ (steilster Abstieg). Z.B. bei

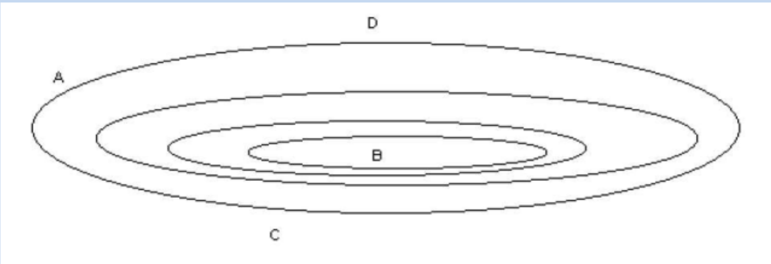
Berechnung von Roboterbahnen.

Backpropagation zum Trainieren lernender künstlicher neuronaler Netze.

Finanz-Portfolios, Produktionsparameter, Strahlentherapie in der Medizin…

Bild Quelle: https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/part_dgl/teaching/WS2010_Optimierung_für_Nichtmathematiker.pdf

Frage 1:
Welcher Weg führt auf dem abgebildeten Höhenliniendiagramm zu der größten Höhenänderung?



A) Von A nach B.
B) Von C nach B.
C) Von D nach B.
D) Alle Höhenänderungen sind annähernd gleich.

Carroll MathQUEST

Frage 2:
Welcher Weg ist der steilste bei dem Höhenliniendiagramm von Frage 1

A) Von A nach B.
B) Von C nach B.
C) Von D nach B.
D) Alle Höhenänderungen sind annähernd gleich.

Carroll MathQUEST

Frage 3:

Gegeben ist der Gradient $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Was ist das Vorzeichen der Richtungsableitung von f in der Richtung des Vektors ↖ und in der Richtung des Vektors ↑ ?

A) positiv und positiv.
B) positiv und negativ
C) negativ und positiv
D) negativ und negativ.

Carroll MathQUEST

Frage 4:

Gegeben ist der Gradient $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Was ist das Vorzeichen der Richtungsableitung von f in der Richtung des Vektors ← und in der Richtung des Vektors ↘ ?

A) positiv und positiv.
B) positiv und negativ
C) negativ und positiv
D) negativ und negativ.

Carroll MathQUEST

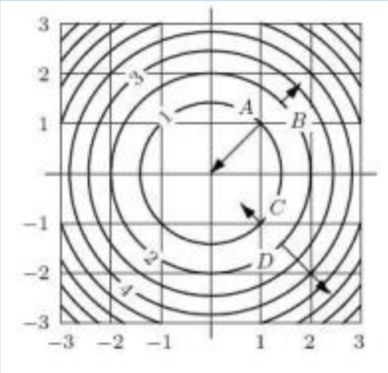
Frage 5:

In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von $z = x^2 + y^2$ im Punkt $(2{,}3)$ am positivsten?

A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
C) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Carroll MathQUEST

Frage 6:
Welcher der Vektoren, die im Konturdiagramm von $f(x, y)$ in der folgenden Abbildung dargestellt sind, könnte ∇f an dem Punkt sein, an dem der Vektor startet?



Carroll MathQUEST

Frage 7:
Die Oberfläche eines Hügels wird modelliert durch $z = 25 - 2x^2 - 4y^2$. Als eine Wanderin den Punkt $(1, 1, 19)$ erreicht, beginnt es zu regnen. Sie beschließt, den Berg auf dem direktesten Weg abzusteigen. Welcher der folgenden Vektoren zeigt in die Richtung, in der sie ihren Abstieg beginnt?

A) $\begin{pmatrix} -4x \\ -8y \end{pmatrix}$.
B) $\begin{pmatrix} 4x \\ 8x \end{pmatrix}$.
C) $\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.
D) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Carroll MathQUEST