Zusammenhänge sind nur in seltenen Fällen eindimensionaler Natur. Fast alle Größen, mit denen man es in der Praxis zu tun hat, hängen in Wirklichkeit von verschiedenen Einflüssen ab – also von mehreren Variablen.

Einen Vorgeschmack darauf, was es bedeutet, mit vielen Variablen umzugehen, haben wir bereits in Teil III, der linearen Algebra erhalten. Doch die Probleme, die sich im Kontext linear-algebraischer Abbildungen behandeln lassen, sind zwar vielfältig, aber doch begrenzt. Viele praktische Probleme sind komplizierterer Natur und erfordern es, nichtlineare Funktionen mehrerer Variablen zu behandeln, sie zu differenzieren, entlang von Kurven oder über gekrümmte Flächen zu integrieren oder Differenzialgleichungen aufzustellen und zu lösen, die Ableitungen nach mehreren Variablen enthalten.

Das ist ein sehr umfangreiches Programm und wird uns auch den gesamten Teil IV beschäftigen. In diesem Kapitel werden wir beginnen, die Thematik aufzurollen. Die Grundfragen dabei sind, wie man Funktionen von mehreren Variablen überhaupt handhabt, wie in diesem Fall Stetigkeit und Differenzierbarkeit aussehen und welche Anwendungen sie haben. Dabei wird sich zeigen, dass wir zwar im Prinzip auf alle Techniken und Konzepte zurückgreifen können, die wir in Teil II kennengelernt haben, dass sich dabei aber gelegentlich gewisse Komplikationen ergeben.

Ist man allerdings bereit, diesen Preis zu zahlen, dann wird einem eine Theorie von gewaltiger Leistungskraft in die Hand gegeben, mit der man Temperaturmodelle der Atmosphäre ebenso gut beschreiben kann wie die Bewegung eines Teilchens auf einer fast beliebig geformten Bahn oder den Fluss elektrischer Feldlinien durch eine gekrümmte Fläche.

24.1 Wozu Funktionen von mehreren Variablen?

Abbildungen haben wir in Abschn. 2.6 sehr allgemein eingeführt, und auch die elementaren Funktionen haben wir in Kap. 7 nicht nur für den Fall $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet, sondern zum Beispiel auch für $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

In der Differenzial- und Integralrechnung hingegen haben wir uns bisher auf den Fall $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt. Nun ist es an der Zeit, diese Werkzeuge auch auf den allgemeineren Fall $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ zu erweitern. Immerhin hängen auch in den Anwendungen die meisten relevanten Größen von mehreren voneinander unabhängigen Variablen ab.

Anwendungsbeispiel

- Die kinetische Energie eines Körpers

$$W_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$$

Abb. 24.1 Motorrad und Geländewagen können bei entsprechenden Geschwindigkeiten die gleiche kinetische Energie haben

ist eine Funktion der Masse m und der Geschwindigkeit v. Beide Größen sind im Prinzip völlig unabhängig voneinander, wir können einen Probekörper ganz beliebiger Masse aussuchen und diesen dann auf eine beliebig wählbare Geschwindigkeit beschleunigen. Wissen wir von einem Fahrzeug lediglich, dass es eine kinetische Energie von $W_{\text{kin}} = 340\,312.5$ J hat, so kann es sich ebenso gut um ein Motorrad mit $m = 225$ kg und einer Geschwindigkeit von $v = 55$ m/s handeln wie um einen Geländewagen mit $m = 3\,025$ kg und einer Geschwindigkeit von $v = 15$ m/s.
Auf jeden Fall lässt sich feststellen, dass die kinetische Energie sowohl mit wachsender Masse als auch mit wachsender Geschwindigkeit zunimmt, durch den quadratischen Zusammenhang allerdings mit letzterer deutlich schneller. Die Frage, wie sich solche Zusammenhänge *lokal* einfach beschreiben lassen, wird uns wie im Eindimensionalen zur Differenzierbarkeit führen.
- Die Temperatur T in der Atmosphäre wird von der geografischen Lage (Länge l und Breite b) ebenso abhängen wie von der Höhe h und sich auch noch mit der Zeit ändern. $T(l, b, h, t)$ ist also eine Funktion von vier Variablen. Dieser Zusammenhang wird sich über größere Bereiche im Allgemeinen kaum durch eine einfache Funktion beschreiben lassen.
Versuchen wir aber dennoch, ein sehr simples Modell aufzustellen, das höchstens qualitative Aussagen machen kann. Mit der in der Geografie üblichen Angabe der Breite in Grad könnte es zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} T &= T(l, b, h, t) \\ &= T_0 + T_1\,(1 + \alpha \cos b)\,\mathrm{e}^{-\beta h}\,(1 + \gamma \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

In diesem Modell gibt es einige Größen, die am Anfang frei gewählt werden, für den weiteren Verlauf aber dann als konstant angesehen werden. Wir nennen diese *Parameter*. Solche Parameter sind T_0, die Minimaltemperatur, und T_1, die Größenordnung der Temperaturskala darüber. Des Weiteren legt $\alpha \in [0, 1]$ fest, wie stark die Temperatur nach Norden hin abnimmt, $\beta > 0$ gibt den Temperaturabfall mit steigender Höhe an und $\gamma \in [0, 1]$ die täglichen Schwankun-

Abb. 24.2 Das Wetter der Erde ist ein hochkomplexes System, dessen Entwicklung auch von den besten Simulationen nur für kurze Zeit vorhergesagt werden kann. Qualitative Aspekte des Klimas lassen sich allerdings schon mit einfachen mathematischen Modellen erfassen

gen. Letztlich ist $\omega > 0$ die Rotationsgeschwindigkeit der Erde.

Hingegen haben wir hier überhaupt keine Abhängigkeit von der geografischen Länge l vorliegen. Sie trotzdem als Argument der Funktion aufzunehmen ist kein Fehler, auch die konstante Funktion, definiert durch $f(x) = c$, ist ja eine Funktion.

Die Modellparameter lässt man üblicherweise für eine bestimmte Betrachtung fix, deswegen sind sie auch nicht als Argumente der Funktion aufgeführt. In manchen Situationen könnte man sich aber durchaus für die Abhängigkeit der Temperatur von diesen Modellparametern interessieren, und dann kann es sinnvoll sein, die Funktion

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{par}}(l, b, h, t, T_0, T_1, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= T_0 + T_1 \cdot (1 + \cos b) \cdot \mathrm{e}^{-\beta h} \cdot (1 + \gamma \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

zu betrachten. Will man nicht unbedingt die heutige Erde beschreiben, so kann man auch die Rotationsgeschwindigkeit ω freigeben und als zusätzliches Argument betrachten. Abhängig von der konkreten Problemstellung kann man für dieselbe Funktion unterschiedliche Größen als fixe Parameter oder als Variablen betrachten. ◄

Es ist also keineswegs mathematischer Selbstzweck, Funktionen von mehreren Variablen zu untersuchen, sondern es lassen sich dafür zahlreiche Anwendungen finden. Tatsächlich erfordern viele praktische Probleme unmittelbar die Fähigkeit, mit derartigen komplizierteren Abhängigkeiten umgehen zu können.

Selbstfrage 1

Suchen Sie selbst ein praktisch relevantes Beispiel für eine Funktion von mehreren Variablen bzw. erstellen Sie für eine derartige Größe ein einfaches mathematisches Modell.

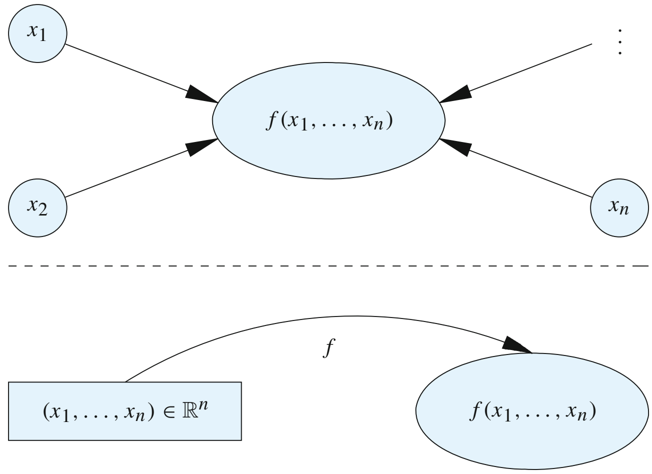


Abb. 24.3 Zwei Sichtweisen von Funktionen mit mehreren Variablen

Funktionen mehrer Variablen passen auf den ersten Blick nicht besonders gut in unser Konzept von Abbildungen. Für eine Abbildung f hatten wir ja verlangt, dass es sich um eine Vorschrift handelt, die jedem Element einer gewissen Definitionsmenge $D(f)$ ein Element einer Wertemenge $W(f)$ zuordnet. Hier scheinen wir zunächst den Fall vorliegen zu haben, dass aus mehreren Mengen zugleich in einer abgebildet wird. So ist eine Funktion f mit Vorschrift $w = f(x, y, z)$ eine Zuordnung von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Dieser scheinbare Widerspruch lässt sich aber leicht auflösen. Dazu fasst man einfach die n Argumente der Funktion als n-Tupel auf, als Element $\boldsymbol{x}$ des Raums $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion mit Vorschrift $w = f(x_1, x_2, x_3)$ ist demnach eine Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ in die reellen Zahlen. Diese Sicht der Dinge ändert nichts an den funktionalen Abhängigkeiten, ermöglicht jedoch eine konsistente Behandlung im Rahmen des Konzepts der Abbildungen. Der Unterschied zwischen den beiden Auffassungen ist in Abb. 24.3 dargestellt.

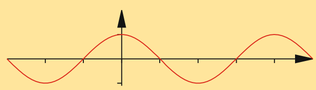
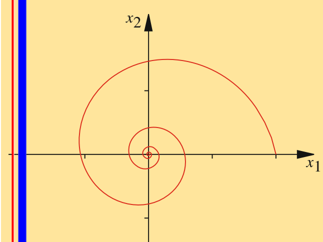
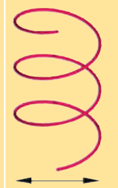
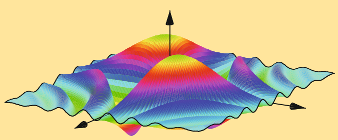
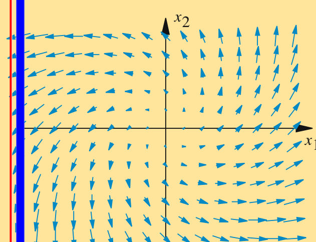
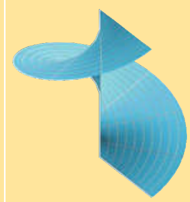
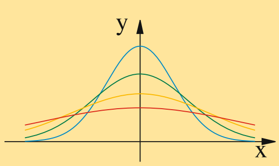
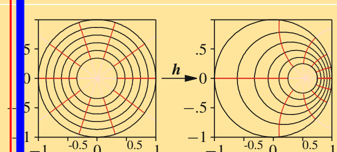
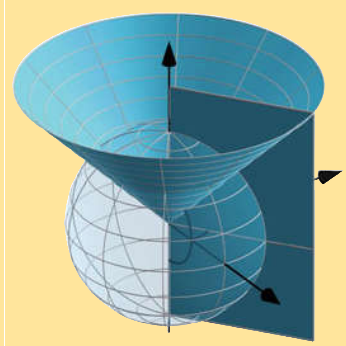
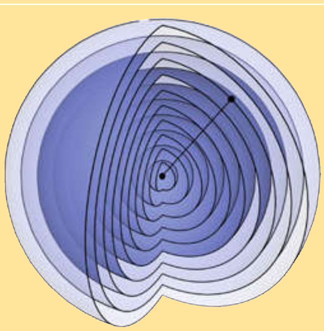
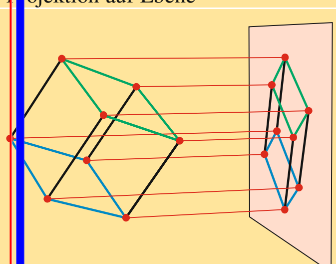
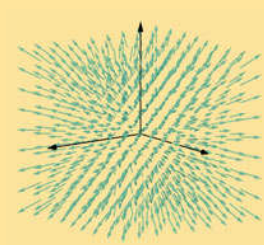
An dieser Stelle könnte man natürlich einwenden: Wenn es Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, warum nicht auch von $\mathbb{R}$ in einen $\mathbb{R}^m$ oder gleich der Allgemeinheit zuliebe von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$? All diese Fälle sind natürlich möglich, und wir werden sie noch gebührend behandeln. Eine Übersicht ist auf S. 870 angegeben.

Vorläufig widmen wir uns aber Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – und dabei wird meistens $n = 2$ oder $n = 3$ sein. In höheren Dimensionen laufen die meisten Rechnungen weitgehend analog, nur die Schreibarbeit nimmt zu und es wird immer schwieriger, noch eine bildliche Vorstellung zu behalten. Im Fall $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ war es ja in vielen Fällen möglich, den Graphen einer Funktion zu zeichnen. Ähnliches gelingt oft auch noch für den Fall einer Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Dabei werden die Punkte $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ in ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem gezeichnet, diese bilden eine Art von Fläche. Natürlich kann diese Fläche recht wild und

Übersicht: Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Wir geben eine Übersicht über Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit teilweise verschiedenen geometrischen Interpretationen. Dabei benutzen wir die (zugegebenermaßen ein wenig schlampige) Vektornotation $\boldsymbol{x}$ für Elemente des $\mathbb{R}^n$ und des $\mathbb{R}^m$ auch dann, wenn $n \neq m$ ist. Viele der hier angesprochenen Begriffe werden erst in den nächsten Kapiteln (insbesondere Kap. 26 und 27) ausführlich diskutiert.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = f(x)$ Fkt. einer reellen Var.	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ ebene Kurven	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ Raumkurven
		
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\Phi(\boldsymbol{x})$ ebene Skalarfelder	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ ebene Vektorfelder	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ Flächen
		
$y = f(x, t)$ Kurvenschar mit Parameter t	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ Gebietstransformationen	
		
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\Phi(\boldsymbol{x})$ räumliche Skalarfelder	$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ Projektion auf Ebene	$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ räumliche Vektorfelder
		

Fokus der Mathe2
Vorlesung auf die
Funktionen im blauen
Kasten.

zerklüftet sein. Die einzige Einschränkung ist, dass über (oder unter) jedem Punkt (x_1, x_2) nur ein Punkt der Fläche liegen darf.

Meist werden wir es jedoch mit „schönen", also stetigen und nicht zu wild oszillierenden Funktionen zu tun haben. Die Graphen solcher Funktionen lassen sich außer als Flächen auch auf andere Art darstellen, etwa mittels Höhenlinien. Bei den Flächen zeichnet man häufig Bilder einiger achsenparalleler Geraden $x_1 = \text{const}$ bzw. $x_2 = \text{const}$ ein oder färbt die Fläche entsprechend dem Funktionswert.

Einige Beispiele sind in den Abb. 24.4, 24.5, 24.6 und 24.7 dargestellt. Weitere Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werden wir in Kap. 27 diskutieren.

Selbstfrage 2

Versuchen Sie selbst, den Graphen der Funktion f mit $[-\pi, \pi] \to [0, 1], f(x_1, x_2) = \sin^2 x_1 \cos^2 x_2$ zu skizzieren.

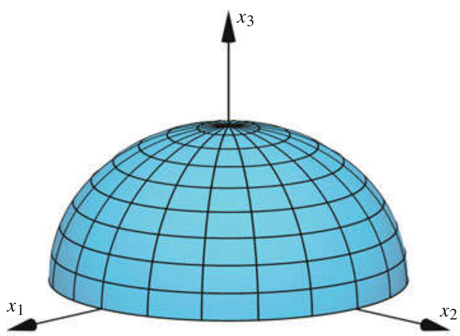


Abb. 24.4 Eine Darstellung des Graphen der Funktion $f_2\colon E \to \mathbb{R}$, $f_2(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Dabei bezeichnet E jene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die $x_1^2 + x_2^2 \le 1$ erfüllt. Die Kurven auf der Fläche sind, wie auch in Abb. 24.5 die Bilder von achsenparallelen Geraden $x_1 = \text{const}$ bzw. $x_2 = \text{const}$

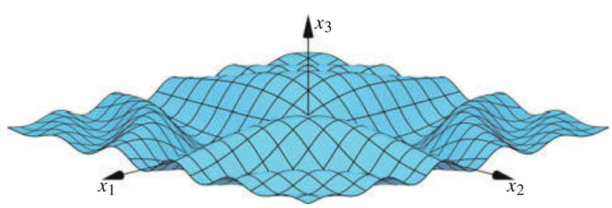


Abb. 24.5 Eine Darstellung des Graphen der Funktion $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2)}$

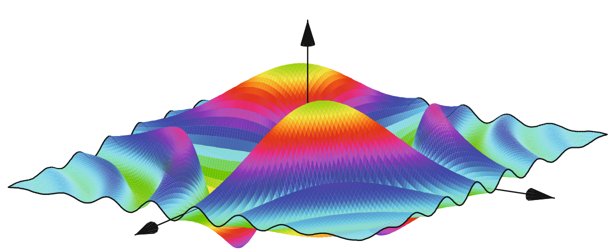


Abb. 24.6 Eine Darstellung des Graphen der Funktion f_3 aus Abb. 24.5 als Fläche im $\mathbb{R}^3$. Dabei ist die Höhe zusätzlich durch Farbe codiert

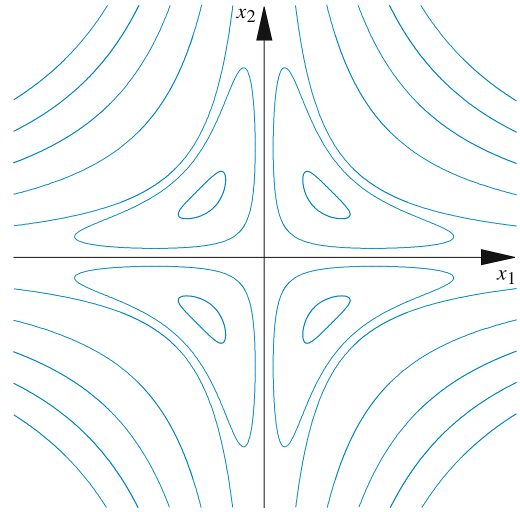


Abb. 24.7 Eine Darstellung des Graphen der Funktion f_3 aus Abb. 24.5 mittels Höhenlinien

Kommentar Wie schon im Eindimensionalen ist es aber wichtig, sich immer im Klaren zu sein, dass das, was in solchen Bildern aufgezeichnet wird, nicht „die Funktion f an sich" ist, sondern nur die Menge

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_3 = f(x_1, x_2)\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Noch genauer, da die dreidimensionale Drucktechnik ja noch in den Kinderschuhen steckt, ist es sogar nur ihre zweidimensionale Projektion auf ein Blatt Papier. ◀

Für Funktionen mehrerer Variablen werden viele Ausdrücke deutlich sperriger als im eindimensionalen Fall. Daher ist jede Möglichkeit, einige Zeichen einzusparen, willkommen, und entsprechend haben sich etliche Kurzschreibweisen eingebürgert. Zum Beispiel gibt es die Schreibweise mit einem senkrechten Strich oder eckigen Klammern für das Einsetzen eines bestimmten Arguments,

$$f(x)\big|_{x_0} = f(x)\big|_{x=x_0} = [f(x)]_{x_0} = f(x_0) .$$

Dabei muss allerdings stets klar sein, welches Argument zu ersetzen ist.

Teil IV