Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025
Studiengang Angewandte Informatik

Gemischte Übungen 8: Fourierreihen

1 Übungen zur Berechnung von Fourierreihen bzw. Fourierpolynomen

1.1

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 \ \ (0 \le x < 4)$ mit Periode der Länge $T = 4$.

a) Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion für $-4 \le x < 12$.

b) Leiten Sie <u>alle</u> Fourierkoeffizienten a_n her.
Für die Koeffizienten $b_n = -\frac{16}{n\pi}$ genügt die Herleitung so weit, bis kein Integralzeichen mehr vorkommt!

c) Geben Sie das Fourierpolynom 2. Grades $F_2(x)$ explizit an (es dürfen Bruchzahlen vorkommen) und skizzieren Sie einen plausiblen Verlauf in die obige Abbildung von f.

d) Inwiefern ist F_2 das „beste" trigonometrische Polynom zu f? (in Worten oder als Formel)

e) Geben Sie die Fourierreihe $F(x)$ von $f(x)$ in $\sum$ –Schreibweise an. Was können Sie über den Wert von $F(x)$ sagen (beachte: Die sogenannte Dirichlet-Bedingung ist erfüllt).

1.2

Gegeben sei die Funktion mit Periode der Länge $T = 2\pi$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } -\pi \le x < 0 \\ e^{x} & \text{für } \ 0 \le x < \pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion für $-2\pi \le x < 2\pi$.

b) Leiten Sie die Fourierkoeffizienten her (möglichst effizienten Rechenweg!)

c) Geben Sie das Fourierpolynom 2. Grades $F_2(x)$ explizit an.

d) Auch obige Teilaufgaben d) und e) sind denkbar, hier aber nicht verlangt.

1.3

Gegeben sei die Funktion mit Periode der Länge $T = 2\pi$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{für } 0 \le x < \pi \\ \dfrac{3}{2}\pi & \text{für } \ \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion für $-2\pi \le x < 4\pi$.

b) Leiten Sie die Fourierkoeffizienten a_n her. Die Fourierkoeffizienten b_n brauchen Sie <u>nicht</u> herzuleiten, diese sind

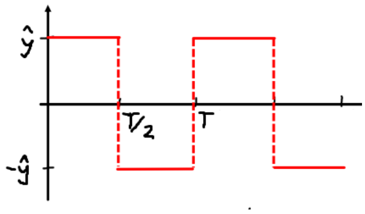
$$b_n = \frac{2(-1)^n - 3}{2n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) Geben Sie das Fourierpolynom 3. Grades explizit an und skizieren Sie einen plausiblen Verlauf in die Skizze bei a).

d) Auch obige Teilaufgaben d) und e) sind denkbar, hier aber nicht verlangt.

1.4

Gegeben sei das folgende periodische Signal.

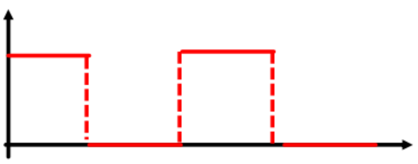


a) Erstellen Sie eine geeignete Funktionsvorschrift und entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe und geben Sie diese in Σ-Schreibweise an und begründen Sie, welche Werte sie annimmt.

b) Geben Sie für $\hat{y} = 2$ das Fourierpolynom 5. Grades explizit an und formulieren Sie, inwieweit man von einer besten Näherung an die abgebildete Funktion sprechen kann.

1.5

Rechtecksignal. Gegeben sei ein Rechtecksigna mit Periode $T = 2\pi$ und Amplitude 1.



Berechnen Sie das zugehörige Fourierpolynom 1.bis 5. Grades und interpretieren Sie deren Bedeutung.

2 Lösungen zur vorigen Aufgabe

2.1	$F(x) = \frac{16}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2\pi^2} \cos(n\frac{\pi}{2}x) - \frac{16}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}x)$
2.2	$F(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2} \cos(nx)$
2.3	$a_0 = \frac{7\pi}{4}$; $a_n = 0$ (n gerade), $a_n = -\frac{1}{\pi n^2}$ (n ungerade) , $b_n = \frac{2(-1)^n - 3}{2n}$
2.4	$F(x) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin((2n-1)\omega x)$
2.5	$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin((2k-1)x)$