Fragen zu Integrationstechniken

Welche Ableitungsregel hilft uns, die Substitutionsregel zu verstehen?

A) Die Produktregel
B) Die Kettenregel
C) Beide

(CGQ)

Die Fläche A einer runden Zelle ändert sich als Funktion des Radius r und der Radius ändert sich mit der Zeit $r(t) = g(t)$. Wenn $\frac{dA}{dr} = f(r)$ ist, dann ist die Gesamtänderung der Fläche zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ gegeben durch

(CGQ)

A) $\Delta A = \int_{\pi(g(0))^2}^{\pi(g(1))^2} dA$

B) $\Delta A = \int_{g(0)}^{g(1)} f(r)dr$

C) $\Delta A = \int_0^1 f\big(g(t)\big)g'(t)dt$

D) Alle dieser Antworten.

Die Fläche A einer runden Zelle ändert sich als Funktion des Radius r und der Radius ändert sich mit der Zeit $r(t) = \ln(t+2)$. Durch welchen Ausdruck ist die Gesamtänderung der Fläche zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ gegeben?

(CGQ)

A) $\Delta A = \pi(\ln 3)^2 - \pi(\ln 2)^2$

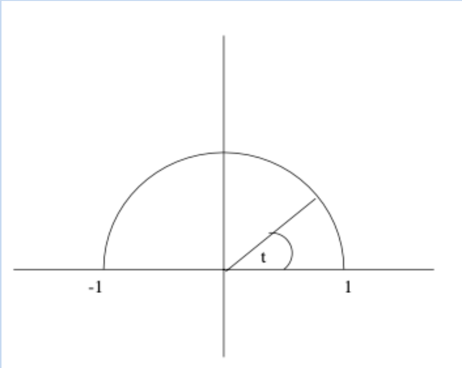
B) $\Delta A = 2\pi \int_{\ln 2}^{\ln 3} r\, dr$

C) $\Delta A = 2\pi \int_0^1 \frac{\ln(t+2)}{t+2} dt$

D) Alle dieser Antworten.

Eine Möglichkeit die halbe Fläche des Einheitskreises zu berechnen ist das Integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$



(CGQ)

Sei t der gezeigte Winkel. Dann ist die Fläche des Halbkreises gegeben durch

A) $\int_0^{\pi} -\sin t \; dt$
B) $\int_0^{\pi} -\sin^2 t \; dt$
C) $\int_{\pi}^{0} -\sin^2 t \; dt$
D) $\int_0^{\pi} -\cos t \; dt$

Integration per Substitution

Bei der Integration per Substitution wird ein Teil des Integranden mit einem neuen Bezeichner (beispielsweise z) abgekürzt und ersetzt (substituiert). Die Integration per Substitution ist naheliegend, wenn der Integrand eine verkettete Funktion ist, deren innere Funktion nicht-linear ist. Sie führt aber nicht immer zu einer brauchbaren Vereinfachung.

Bei der Substitution sind alle Integralbestandteile, die sich ursprünglich auf die Original-Integrationsvariable (beispielsweise x) beziehen über die neue Variable (beispielsweise z) auszudrücken. Dabei ist **Vorsicht** geboten, denn die Variable x kommt nicht nur im Integranden $f(x)$ vor, sondern auch im sog. Differential dx und in eventuell vorhandenen Integrationsgrenzen a, b.

1 Beispiele, wobei wir unter dem Integral $\int f(x)\ dx$ lesen wie ein Produkt $\int f(x) \cdot dx$ (Begründung später)

Vorgehensweise beim unbestimmten Integral	Bestimmtes Integral	Beispiel A	Beispiel B
$I = \int f(x)\ dx$ Substitution naheliegend? Falls ja:	$I = \int_a^b f(x)dx$	$I = \int_1^2 2x \cdot \cos(x^2)\, dx$	$I = \int_0^3 x\sqrt{1+2x}\, dx$
Schritt 1: Ersetze einen Teil des Funktionsterms (oft die innere Funktion) $z := u(x)$	$z = u(x)$	$z := x^2$	$z := 1 + 2x$
Schritt 2: Ersatz für dx berechnen $\frac{dz}{dx} = u'(x) \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{u'(x)}$	$dx = \frac{dz}{u'(x)}$	$\frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x}$	
Schritt 3: Alles in z-Variable umschreiben ▪ $u(x), dx$ ersetzen durch z-Schreibweise ▪ Verbleibende x-Terme kürzen. ▪ Evtl. verbleibende x-Terme durch z-Terme ausdrücken.	Zusätzlich: Integralgrenzen anpassen $\int_a^b \dots dx$ $\Rightarrow \int_{u(a)}^{u(b)} \dots dz$		
Schritt 4: z-Integral lösen $I = \int g(z)\, dz = G(z) + C$		$= \sin\ z\ + C$	
Schritt 5: Für das Ergebnis z wieder durch die **Originalvariable x** ausdrücken, d.h. ersetze $z = u(x)$ (Rücksubstitution) $I = G\big(u(x)\big) + C = F(x) + C$		$= \sin(x^2) + C$	$= \frac{1}{10}(1+2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}} + C$

Beobachtung: Im Beispiel A hätte man auch direkt über die Stammfunktion der äußeren Funktion lösen können.

2 Beispiel:

$$\int_{-2}^{4} \sqrt{3x^2 - 1}\, x dx$$

Über Rücksubstitution:

Mit Ersetzung der Grenzen:

Technik der Partiellen Integration (Produktintegration, Produktregel)

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Wir betrachten die Produktregel fürs Ableiten.
Nur wenn ein Integrand zufällig die rechte Gestalt hätte, wäre die SF $u \cdot v$

$$u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

Da das sehr selten der Fall sein wird, betrachtet man einen Teil davon und erhält durch Umstellen eine Formel für die Stammfunktion eines Produktes $u \cdot v'$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

Da rechts jedoch wieder ein Integral steht, das man erst noch lösen muss, ist diese **teilweise (= partielle) Integration** nur sinnvoll, wenn das neue Integral $\int u' \cdot v \, dx$ lösbar ist.

Deshalb ist wichtig, die hierfür günstigen Situationen zu erkennen:

Partielle Integration

$$\boxed{\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx}$$

Produkt, von dem man von einem Faktor v' die Stammfunktion v kennt.

Dann kennt man einen Teil der gesamten Stammfunktion

Den anderen Teil muss man noch integrieren.

Falls er einfacher ist als das Original gelingt dies oft (die partielle Integration führt zum Ziel).

Sinnvoll falls:

Ein Faktor , der sich beim Ableiten „vereinfacht“.

Ein Faktor, der beim Aufleiten nicht komplizierter wird.

Typische Beispiele:

Polynome	$x \mapsto 1$		$e^x \mapsto e^x$
	$x^2 \mapsto 2x$		$\sin x \mapsto -\cos x$
	$x+1 \mapsto 1$		$\cos x \mapsto \sin x$
Logarithmus	$\ln x \mapsto \frac{1}{x}$		

Beispiel: $$\int x \cdot \cos x \; dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \; dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

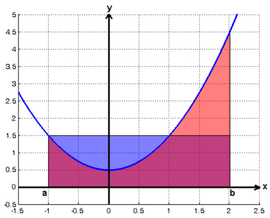
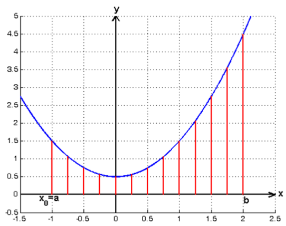
3 **Beispiele:** Typischer Anwendungsfall: **Polynom** multipliziert mit $\boldsymbol{e^x}$, $\boldsymbol{\sin x}$, $\boldsymbol{\cos x}$ (bzw. linear verkettet).

3.1	$\int \sin(2x) \cdot x \, dx$
3.2	Manchmal ist die partielle Integration mehrfach anzuwenden: $\int x^2 e^x \, dx$

Mittelwerte

Mittelwerte spielen in Naturwissenschaft und Technik eine wichtige Rolle. Man unterscheidet zwischen linearen und quadratischen Mittelwerten. Bekannt sind primär die Mittelwerte für N diskrete Werte. Doch wie lassen sich diese Mittelwerte für die unendlich vielen Funktionswerte einer stetigen Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ berechnen?

Was ist der Mittelwert von $f(x) = x^2 + 0.5$ im Bereich von $a = -1$ bis $b = 2$?

Linearer Mittelwert = Arithmetisches Mittel für <u>diskrete</u> Werte $\bar{y}_{lin} = \frac{y_1 + \cdots + y_N}{N}$ bzw. $\bar{y}_{lin} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$	Alle Werte werden addiert und das Resultat durch deren Anzahl geteilt. Der Mittelwert $\bar{y}_{lin}$ ergibt N-fach summiert das gleiche Resultat wie die N Origianlwerte zusammen $y_1 + \cdots + y_N$
Quadratische Mittel (EN: root mean square RMS) für <u>diskrete</u> Werte (ähnlich einfach zu berechnen) $\bar{y}_{quad} = \sqrt{\frac{y_1^2 + \cdots + y_N^2}{N}}$ bzw. $= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k^2}$	Es wird das lineare Mittel der quadrierten Werte berechnet und aus diesem die Wurzel gezogen. Der Mittelwert $\bar{y}_{quad}^2$ ergibt N-fach summiert das gleiche Resultat wie die Summe der Quadrate der Originalwerte $y_1^2 + \cdots + y_N^2$
Lineares Mittel für eine stetige <u>Funktion</u> f auf [a, b] $\bar{y}_{lin} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ Geometrische Deutung: 	 **Herleitung:** In $[a, b]$ betrachte N diskrete Werte $y_k = f(x_k)$ in gleichem Abstand Δx, d.h. $N \cdot \Delta x = b - a$ Somit gilt für $N \to \infty$: $\bar{y}_{lin} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
Quadratisches Mittel für stetige <u>Funktion</u> f auf [a, b] $\bar{y}_{quad} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2 dx}$	Herleitung wiederum aus dem quadratischen Mittel von N diskreten Werten und dann $N \to \infty$. Es wird das lineare Mittel der quadrierten Funktion berechnet und aus diesem die Wurzel gezogen. **Große Funktionswerte fallen hier stärker ins Gewicht als kleine.** Diese ziehen das quadratische Mittel in ihre Richtung. Das quadratische Mittel ist **größer** gleich dem **linearen Mittel**.
Spezialfall periodische Funktionen $\bar{y}_{lin} = \frac{1}{T}\int_T f(x)\, dx$ $\bar{y}_{quad} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T f(x)^2\, dx}$	Im Falle einer periodischen Funktion erhält man das lineare bzw. quadratische Mittel über den kompletten Definitionsbereich durch Integration über ein beliebiges Intervall der Länge der Periode T.

Sie reisen mit der Geschwindigkeit $v(t)$ die kontinuierlich im Intervall $[a, b]$ variiert und Ihre Position ist gegeben durch $s(t)$. Wodurch ist Ihre durchschnittliche Geschwindigkeit in diesem Zeitintervall gegeben?

A) $\frac{\int_a^b v(t)dt}{b-a}$

B) $\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$

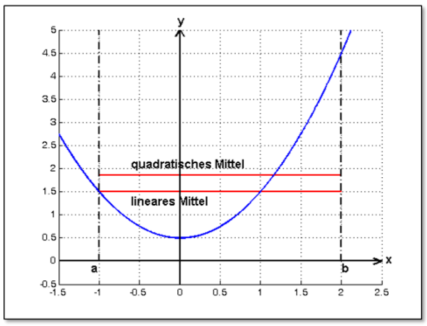
C) $v(c)$ für mindestens ein $c \in [a, b]$

(CGQ)

4 Beispiele und Übungen zur Mittelwert-Berechnung bei stetigen Funktionen

4.1

Berechnen Sie den linearen bzw. den quadratischen Mittelwert von
$f(x) = x^2 + 0.5$ im Bereich von $a = -1$ bis $b = 2$.



4.2

Arithmetischer Gleichrichtwert einer sinus-förmigen Wechselspannung der Periodendauer T.

$$u(t) = \widehat{u} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Der arithmetische Mittelwert von $t = 0$ bis $t = T$ wäre aufgrund der Symmetrie $= 0$.

Deshalb <u>arithmetischer Gleichrichtwert</u> als Mittelwert über eine <u>halbe Periode</u> von $t = 0$ bis $t = T/2$.

$$|\overline{u}_m| = \frac{1}{\frac{T}{2} - 0} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\, dt = \frac{2\widehat{u}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)\, dt =$$

4.3

Effektivwert des Stroms / Mittelwert für periodische Funktionen:
Der zeitliche Verlauf eines Wechselstroms ist

$$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{(wie üblich } \omega > 0 \text{ konstant und somit Periode } T = 2\pi/\omega \text{)}$$

Berechnen Sie den Effektivwert I_{eff} des Stroms als quadratisches Mittel des Stroms über ine Periode. Die Stammfunktion darf einer Integraltafel entnommen werden oder beachten Sie (Folge der Formel zur Winkelverdopplung) die Beziehung

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}[1 - \cos(2t)]$$

Ein Gleichstrom der Stärke

$$I_{eff} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} = 0.707\ \hat{\imath}$$

leistet an einem ohmschen Widerstand R die gleiche Arbeit wie der Wechselstrom $i(t)$.

Bogenlänge von Kurven

Häufig haben Sie es in Anwendungen mit der Bewegung von Körpern im Raum zu tun, beispielsweise wenn Sie die Bewegung eines Objekts in einem Computerspiel oder eines Roboterarms beschreiben wollen. Dabei befindet sich das Objekt zu jedem Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Eine stetige Abbildung $\vec{x}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt t des Intervalls $[a, b]$ einen Punkt $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet, wird **Kurve** genannt. Die Variable t wird als **Parameter** bezeichnet.

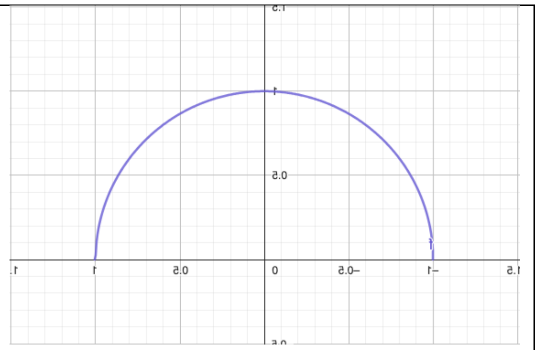
Wir beschreiben die obere Hälfte des Einheitskreises im $\mathbb{R}^2$ mit der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \quad t \in [-1; 1]$$

Es sind aber auch andere Darstellungen möglich:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

Die Kurve ist dabei in beiden Fällen gleich, man spricht von einer anderen Parameterdarstellung.

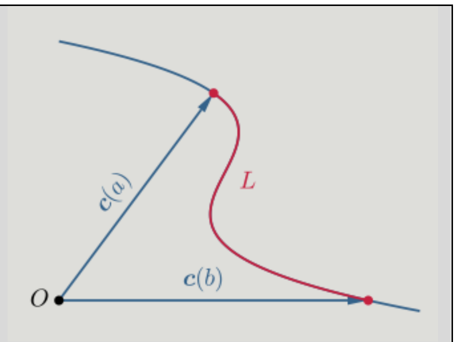


Ziel ist es jetzt, die **Bogenlänge** einer Kurve zu berechnen. Dazu wird anschaulich die Kurve in kleine Teilstücke zerlegt und auf jedem Teilstück durch eine Gerade angenähert. Im Grenzwert „Länge der Teilstücke gegen 0" erhalten wir die Bogenlänge der Kurve.

Die **Bogenlänge** einer differenzierbaren Kurve $\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big), t \in [a, b]$ ist gegeben durch

$L(\vec{x}) = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt$ in 2D

$L(\vec{x}) = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt$ in 3D



[Koch]

5 Beispiele: Länge des Kreises

5.1	Wir berechnen die Länge eines allgemeinen Kreises mit Radius r $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$

5.2	Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \end{pmatrix}$ im Intervall $[3; 8]$.

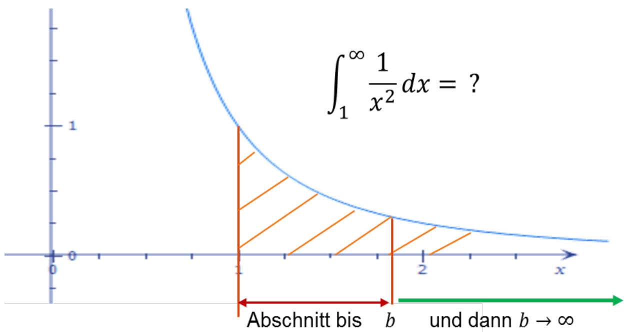
Uneigentliche Integrale – der Fall ∞

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Grenzen des Integrationsbereiches $[a, b]$ endlich sind. Eine stetige Funktion ist dann automatisch immer beschränkt („endlich"). Man spricht von <u>eigentlichen</u> Integralen. **Uneigentliche Integrale** liegen vor, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft. Dies kann auf zwei Weisen geschehen: Der **Integrationsbereich ist unbeschränkt** oder der **Integrand** ist **unbeschränkt** (Funktion mit Pol). Dies führt auf die Frage nach dem Inhalt von unbeschränkten Flächen. Man führt die Berechnung durch beliebig nahes „Abschneiden" auf endliche Flächen zurück. D.h. ein „uneigentliches Integral" wird als Grenzwert von eigentlichen Integralen definiert. Man sagt, das uneigentliche Integral **existiert oder konvergiert**, wenn dieser Grenzwert existiert. Bzw. das uneigentliche Integral **divergiert,** wenn dieser GW nicht existiert.

<u>Frage</u>: Können unbegrenzte Flächenstücke überhaupt einen endlichen Wert haben? Bsp. Kehrwerte

Fall 1: Intervall ist unbeschränkt

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$



Vorgehensweise: Zunächst über einen (beliebigen) **endlichen Abschnitt** $[a, b]$ integrieren und dann $b \to \infty$

$$\int_a^\infty \boldsymbol{f(x)\,dx} := \lim_{b\to\infty} \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \lim_{b\to\infty} \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}$$

Bsp Konvergenz (Flächeninhalt endlich)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx =$$

Bsp Divergenz (Flächeninhalt unendlich)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \qquad \text{erst recht} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \infty$$

Wichtige Grundintegrale:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

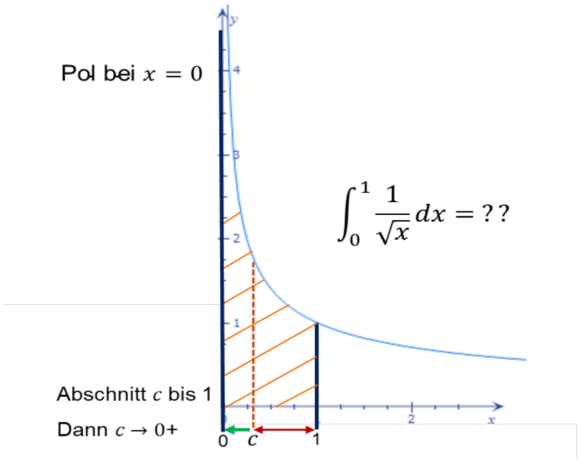
Analog falls Intervall links unbeschränkt:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

Integral über $(-\infty, \infty)$ erfordert <u>zwei</u> <u>separate</u> (!) Grenzwerte (symmetrische Abschnitte genügen nicht!)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

Fall 2: Funktion ist unbeschränkt (Polstelle)



Vorgehensweise falls $f: (a; b] \to \mathbb{R}$ habe **Pol bei a**.
Über Abschnitte bis kurz vor a integrieren. Dann GW $\to \boldsymbol{a+}$

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} := \lim_{c\to a+} \int_c^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \boldsymbol{F(b)} - \lim_{c\to a+} \boldsymbol{F(c)}$$

Bsp Konvergenz

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

Bsp Divergenz:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty \qquad \text{erst recht} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty$$

Wichtige Grundintegrale:

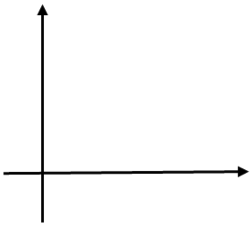
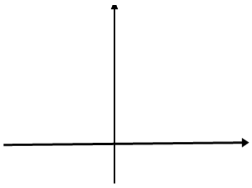
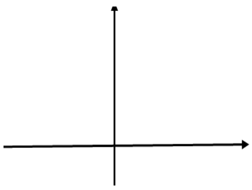
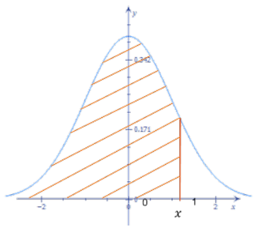
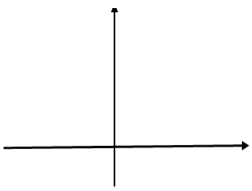
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < 1$$

Analog falls f Unendlichkeitsstelle bei b:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} F(c) - F(a)$$

Polstelle innerhalb des Integrationsintervalls: Das Integral muss dieser Stelle in <u>zwei</u> Teilintegrale aufgeteilt werden und beide Teile <u>getrennt</u> gelöst werden!

6 Beispiele: Uneigentliche Integrale berechnen

6.1		$\lambda > 0$: $I = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx$
6.2		$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx =$
6.3		$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \infty \quad \text{falsch wäre} \quad F(2) - F(-1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{2}$
6.4	 	Gaußsche Glockenkurve. Dichtefunktion einer normalverteilte Zufallsvariablen $$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ Verteilungsfunktion $$P(X \leq x) = \phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz$$ Die Gauß'sche Glockenkurve e^{-x^2} besitzt keine Stammfunktion, die Sie („in geschlossener Form") über die Ihnen bekannten Grundfunktionen ausdrücken könnten. Deshalb sind Näherungswerte für die Integralwerte tabelliert. Die Endlichkeit des Integrals lässt sich jedoch durch Vergleich argumentieren: Argumentieren Sie, dass $\int_0^\infty e^{-x^2} dx < \infty$ durch Vergleich mit dem schon bekannten $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$.

Endliche Integralwerte (endliche Flächeninhalte) durch Vergleich argumentieren: Zum Nachweis, ob ein uneigentliches Integral endlich oder unendlich ist (ohne den Integralwert exakt zu bestimmen), genügt oft schon ein Vergleich:

Vergleichskriterium Aus dem Wissen über die (einfache) Funktion g kann man wie folgt „**durch Vergleich**" Aussagen über (die „schwierigere") Funktion f gewinnen:

(1) Zum Nachweis $< \infty$ (Konvergenz) helfen **Abschätzungen nach oben** (man sagt: konvergente „**Majorante**" finden).
Gilt $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ und $\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ und sogar $\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty$

(2) Zum Nachweis d= ∞ (Divergenz) helfen **Abschätzungen nach unten** (man sagt: divergente „**Minorante**" finden).
Gilt $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ und $\int_a^\infty g(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \infty$

Als Vergleichsfunktion eignet sich oft die Kehrwert-Funktionen ($\alpha > 0$ passend gewählt)

$$g(x) := \frac{1}{x^\alpha}$$

Deren uneigentliche Integrale kennen wir!

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale haben einen endlichen Wert, d.h. sind konvergent?

A) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$

B) $\int_{2}^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

C) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

D) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1} dx$

(TH Rosenheim

Welche Aussage über das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \sin(x)\, dx$$

trifft zu?

(Bauer)

A) Es hat den Wert 2, denn sin ist periodisch und es gilt

$$\int_0^\infty \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2$$

B) Es hat den Wert Null, denn

$$\int_0^\infty \sin(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\cdot 2\pi} \sin(x)\, dx = 0$$

C) Es existiert nicht, weil

$$\int_0^\infty \sin(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \sin(x)\, dx$$

nicht existiert

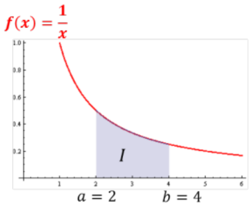
D) Es existiert nicht, weil der Integrand unbeschränkt ist.

Numerische Integration (Quadraturverfahren) und softwaretechnische Umsetzung

Ziele

1. Grundlegende Konstruktionsprinzipien numerischer Integrationsverfahren verstehen (Konstruktion in 3 Schritten)
2. Einblick in die softwaretechnische Umsetzung (Beispielprogramm)
3. Einige Begriffe mit Bezug zur Ingenieurs-Praxis kennen

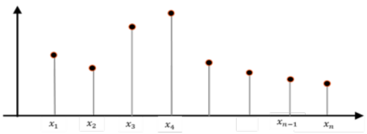
Problemstellung



$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (f \text{ stetig auf } [a,b],\ a,b \text{ endlich})$$

$$I = \int_2^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln 4 - \ln 2 = 0{,}69314718056$$

$$\int_0^4 \sin\left(\frac{e^{0{,}05x}}{\cos^2 x + 0{,}05}\right) dx \qquad \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0.49 \cdot \sin^2 \varphi}\;\, d\varphi$$



Stammfunktion als Formel zu bestimmen ist oft schwierig bzw. langwierig.

In manchen Fällen kann die Stammfunktion einer (stetigen) Funktion nicht als Formel aus endlich vielen Verknüpfungen der uns bekannten Grundfunktionen dargestellt werden.

Eventuell liegt eine Funktion nur als Folge diskreter Messwerte vor. Für den Integranden f kennen wir keinen Funktionsausdruck, von dem wir die Stammfunktion bilden könnten.

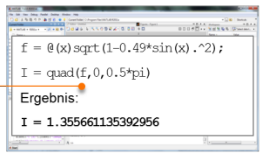
Dennoch interessieren wir uns für einen (Näherungs-)Wert des Integrals über $[a, b]$.

Für uns genügt zunächst: a, b endlich.

Software (1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0.49 \cdot \sin^2 x}\;\, dx$$

Mathematische Software
- Taschenrechner
- MATLAB, Mathcad, Mathematica, Maple, Octave, Scilab, …



- **Symbolisch integrieren**
  Formel für die Stammfunktion von f und diese an den Grenzen auswerten (gibt es nicht immer bzw. Herleitung relativ langsam)

- **Numerisch integrieren (Quadraturverfahren):**
  Näherungswert ermitteln über Formeln bzw. Algorithmen, die nur einzelne Funktionswerte von $f(x)$ benötigen.
- **Konstruktionsprinzipien in 3 Schritten!**

Naheliegender Griff zu mathematischer Software

a) Moderne Taschenrechner
b) Mathematische Programmiersprachen

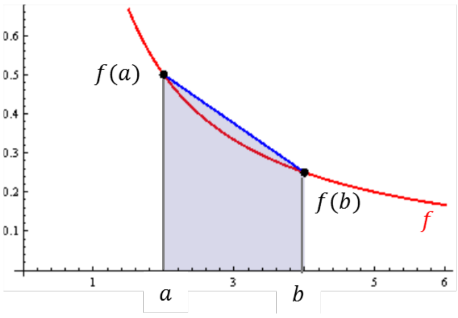
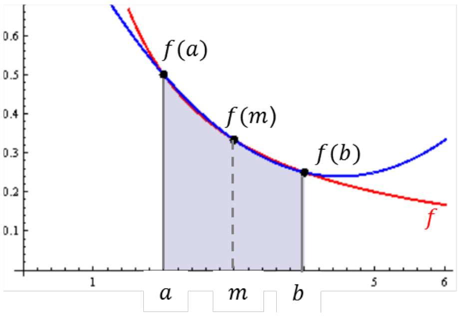
Sie bieten in der Regel beide Möglichkeiten:

a) Symbolisch Integrieren
b) Numerische Integration (Quadraturverfahren)

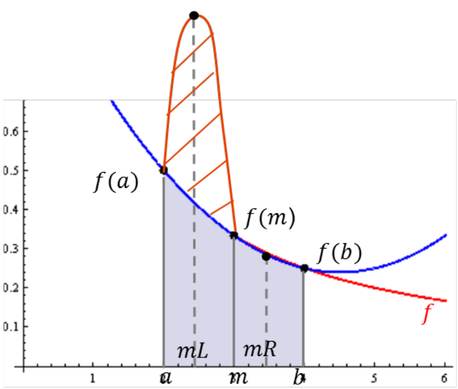
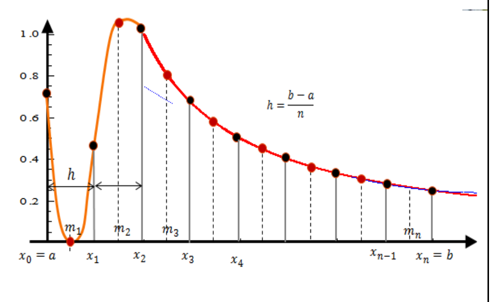
Bei Letzteren werden nur einzelne Funktionswerte des Integranden f ausgewertet. Über sog. Quadraturformeln werden Näherungswerte für den exakten Integralwert berechnet.

Grundlegende Konstruktionsprinzipien für Quadraturverfahren in drei Schritten

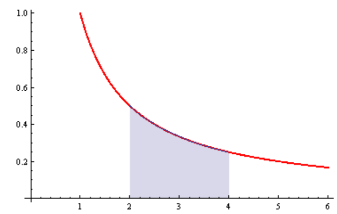
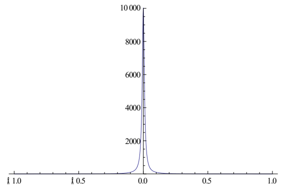
Teil 1 – Einfache Quadraturformeln

Annäherung durch eine lineare Funktion 	**Fläche unter der Geraden:** **Trapez-Formel** $T_1 = (b-a)\cdot\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$	**Beispiel: Näherungswerte für** $I = \int_2^4 \frac{1}{x}dx = 0{,}69314718056$ $T_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 0{,}75$
Annährung durch quadratische Parabel 	**Fläche unter der Parabel:** **3-Punkt-Simpson-Formel** (Keplersche Fassregel) $S_1 = (b-a)\cdot\frac{1}{6}\cdot[f(a)+\mathbf{4}\cdot f(m)+f(b)]$ mit der Mitte $m = \frac{a+b}{2}$	**Beispiel: Näherungswerte für** $I = \int_2^4 \frac{1}{x}dx = 0{,}69314718056$ $S_1 = 2\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ $= 0,\mathbf{694}444444444$

Teil 2 – Zusammengesetzte Quadraturformeln

 $S_1 + S_1$	**Halbierung des Integrationsintervalls** Getrennte Anwendung der Simpson-Formel auf die Hälften $[a,m]$ und $[m,b]$ **5-Punkt-Simpson-Formel** $S_2 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot[f(a)+\mathbf{4}\cdot f(mL)+\mathbf{2}\cdot f(m)$ $+\mathbf{4}\cdot f(mR)+f(b)]$ Hierzu 2 weitere Funktionswerte notwendig: bei Mitte links mL, Mitte rechts mR: $mL = a+\frac{b-a}{4}, \quad mR = b-\frac{b-a}{4}$	**Beispiel: Näherungswerte für** $I = \int_2^4 \frac{1}{x}dx = 0{,}69314718056$ $S_2 = 0,\mathbf{693}2539$
	***n*-fach summierte Simpson-Formel:** Zerlegung von $[a,b]$ gleichmäßig in n Teilintegrale und jeweils Anwendung der 3-Punkt-Simpson-Formel S_1 mit den Stützstellen x_{k-1}, m_k, x_k. $S_n = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{6}\cdot[f(a)+4f(m_1)+2f(x_1)+4f(m_2)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})$ $+4f(m_n)+f(b)]$ Es sind $2n+1$ Funktionsauswertungen notwendig.	

Ob wir wenig oder sehr viele Funktionsauswertungen benötigen, bis die summierte Simpson-Formel brauchbare Resultate liefert, kann sehr unterschiedlich sein:

	$I = \int_2^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$ $I \;= 0{,}69314718056$ $S_1 \;= 0{,}69444444444$ $S_{22} = \mathbf{0.69314718}89$		$I = \int_{-100}^{100} \frac{1}{0.0001 + x^2}\,dx$ $I = 314{,}139265$ $S_{2000} = 407.9229676094761$ 4001 Funktionsauswertungen und keine einzige Stelle stimmt mit dem exakten Integralwert überein.

Voraussagen über die notwendige Anzahl Teilintervalle (Funktionswerte) sind im Prinzip anhand der Fehlerformel möglich. Sie basiert aber auf der 4. Ableitung der zu integrierenden Funktion f.

Fehlerformel: Die Abweichung des Näherungswertes S_n vom (unbekannten) exakten Integralwert I ist als Formel darstellbar:

$$I - S_n = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot f^{(4)}(z) \qquad \text{für ein geeignetes } z \in [a,b]$$

Diese Darstellung ist (nur) gültig für alle Funktionen f, für die die 4. Ableitung auf ganz $[a,b]$ existiert und stetig ist. Mindestens für diese Funktionen können wir dem exakten Wert beliebig nahe kommen. Durch Abschätzung des maximalen Wertes von $f^{(4)}$ kann zu einer gewünschten Genauigkeit das notwendige n bestimmt werden (siehe Übung unten).

Forderung an ein Black Box Verfahren zur numerischen Integration einer gegebenen Funktion f auf $[a,b]$

- Input sei lediglich: Intervallgrenzen a, b und (optional) die Vorgabe der gewünschten Genauigkeit tol.
- Output sei ein Näherungswert, der mindestens die Toleranz-Vorgabe erfüllt.
- Die notwendige Intervalleinteilung soll automatisch berechnet werden. Wir wollen keine 4. Ableitung berechnen.
- Anzahl der Funktionsauswertungen möglichst klein halten: Verfeinerung des Integrationsintervalls nur dort, wo wirklich Bedarf! Anpassung an den Funktionsverlauf.

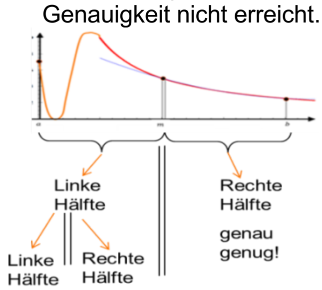
Teil 3 – Der adaptive Simpson-Algorithmus und Beispielprogramm

Grundidee in Worten: Wende auf das Intervall 2 verschiedene Quadraturmethoden an und erhalte 2 Näherungswerte. Stimmen die Näherungen bis auf Toleranz tol überein? Falls ja: fertig! Falls nein: Zerteile $[a,b]$ und berechne die Integral-hälften unabhängig voneinander nach demselben Verfahren, aber mit höherer Genauigkeit (Toleranz-Halbierung).

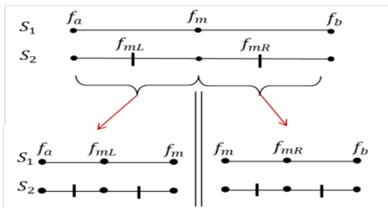
Prinzip grafisch …

Wenig Funktionsauswertungen:

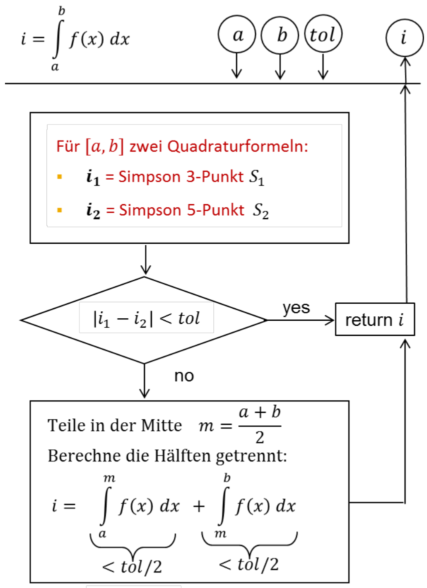
1. Verfeinerung nur wo Genauigkeit nicht erreicht.



2. Funktionswerte weitergeben:



Modellierung …



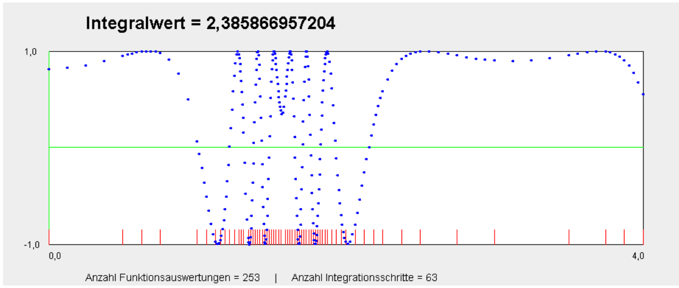
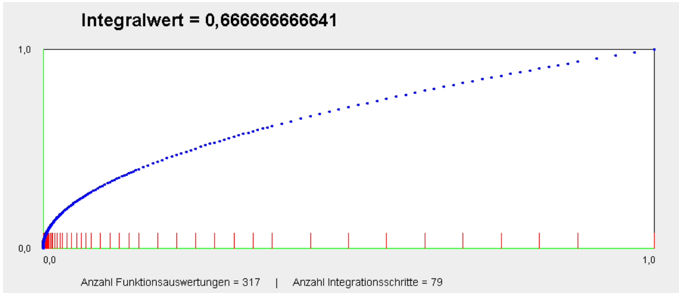
Teile-und-Herrsche-Prinzip

Coding …

```java
public double quad(double a, double b, double tol) {
    double fa = f(a);
    double fm = f((a + b) / 2);
    double fb = f(b);
    if (tol <= 0)
        tol = 0.000001;
    return integriere(a, b, tol, fa, fm, fb);
}

public double integriere(double a, double b, double tol,
        double fa, double fm, double fb) {

    double h, d, m, fmL, fmR, i1, i2, i;

    h = b - a;
    d = h / 4;
    fmL = f(a + d);
    fmR = f(b - d);

    i1 = h / 6 * (fa + 4 * fm + fb);
    i2 = h / 12 * (fa + 4 * (fmL + fmR) + 2 * fm + fb);
    i = (16 * i2 - i1) / 15;

    if (abs(i - i2) < tol) {
        return i;
    } else {
        m = (a + b) / 2;
        i = integriere(a, m, tol / 2, fa, fmL, fm)
            + integriere(m, b, tol / 2, fm, fmR, fb);
        return i;
    }
}
```

Beispiele mit Demoprogramm

Das adaptive Verhalten lässt sich an Beispielen sehr gut nachvollziehen. Es bringt gegenüber der gleichmäßigen Einteilung von S_n sehr viel. Hier auch Beispiele von Funktionen, bei denen die übliche Fehlerformel über die 4. Ableitung nicht anwendbar ist. (Intervall-Einteilung erkennt man an den Strichen unten)

$\int_0^4 \sin\left(\frac{e^{0,05x}}{\cos^2 x + 0,05}\right) dx$ Adaptive Arbeitsweise: Anpassung an den Kurven-verlauf. Zu tol = 0,0001 werden 253 Funktionswerte berechnet.	
$\int_0^1 \sqrt{x} dx$ Zu tol = 10^{-8} werden **317** Funktionswerte berechnet. Die summierte Simpson-Regel bräuchte ca. **40.000** Funktionsauswertungen!	

Anmerkung: hier steckt Mathematik dahinter:

1. Der Fehlerschätzer $|S_1 - S_2|$ liefert für die allermeisten Funktionen eine obere Schranke für den echten Fehlers $|I - S_2|$.
2. Die Halbierung der Toleranz bei Halbierung des Integrationsintervalls ist erfüllbar.
3. Verbesserung der Näherung durch eine sog. Extrapolation $i = (16i_2 - i_1)/15$ (ohne zusätzliche Funktionswerte).

Eine harte Abbruchbedingung ist sinnvoll. Auch die MATLAB Funktion `quad` ist so realisiert.

Auch beim adaptiven Algorithmus kann zur Erreichung der geforderten Toleranz eine sehr feine Einteilung notwendig sein. Harte Abbruchbedingungen wie die Begrenzung der maximalen Anzahl Funktionsauswertungen bzw. die minimale Länge eines Integrationsteilintervalls ist sinnvoll (Übung). Auch die MATLAB Funktion `quad` ist so implementiert. Erhält man derartige Fehlermeldungen, so hilft ggf. die Anpassung (Reduktion) der geforderten Toleranz.

Ausblick

Es gibt neben Simpson viele weitere Quadraturformeln. Zum Beispiel basiert die MATLAB-Funktion `quadgk` statt auf Simpson auf einer sog. Gauß-Kronrod-Quadratur. Einige der früher wichtigen Quadraturformeln verlieren aufgrund der Rechner-Unterstützung an Bedeutung (etwa die sog. geschlossenen Newton-Cotes-Formeln).

Details lernen wir nicht kennen. Die Vorzüge der Quadraturformel hinter `quadgk` gehen in folgende Richtung:

1. Besser als quad, falls oszillierende Funktionen mit hoher Genauigkeit integriert werden sollen.
2. Besser als quad für Integrale mit Unendlichkeitsstellen (Singularität) an den Intervallenden. Hier kommt zum Tragen, dass die Stützstellen der Gauß-Quadraturformeln nicht an den Intervallenden, sondern alle im Innern liegen. Beispiel: $\int_0^1 1/\sqrt{x}\, dx$
3. Integrale mit unbeschränktem Integrationsbereich $\int_1^\infty 1/x^2\, dx$.

Mehrdimensionale Integrale: Integration über Dreiecke / Rechtecke bzw. Monte-Carlo-Verfahren.

Software (2): Integrale in der Praxis - einige Bemerkungen.

In der Praxis treten Integrale i.d.R. als Teil umfangreicherer Problemstellungen auf. Je nach Problemklasse gibt es gängige, teilweise hochspezialisierte SW-Pakete, die „ihre“ Integrale oft nach dafür optimierten Quadraturverfahren implementieren.

- Mechanik: Festkörpersimulation; E-Technik: Maxwell-Gleichungen, Berechnung elektrischer, magnetischer, thermodynamischer Felder. Allg: Lösen (partieller) Differentialgleichungen.
  - Numerische Lösung über die Finite-Elemente-Methode (FEM) (bzw. auch sog. discontinuous Galerkin method)
  - Aufteilung des Berechnungsgebietes in bestimmte Anzahl Elemente „finiter“ Größe. Dies ergibt Gitter aus Dreiecken oder Rechtecken und in Folge leicht bis zu 100.000 mehrdimensionale Integrale (über Dreiecke).
  - Diverse FEM Software-Pakete. Der Jahresumsatz geht in die Milliarden.
  - Beispiele: Pakete wie Abaqus, ANSYS, FEMM, einfache Lösungen in CAD-Systeme integriert, spezialisierte Pakete wie MAFIA.
  - Auch Anwendung *adaptiver* Gitterverfeinerungen.
- Fourier Transformation – z.B. für Signalverarbeitung
  - Die auftretenden Integrale sind gut lösbar über Trapezregel bzw. Verbesserung mittels Romberg-Extrapolation.
- Speziallösungen (z.B. in C), die u.a. Integrale auszuwerten haben
  - Z.B. bei Optimierungsproblemen, bei denen dasselbe Integral vielfach ausgewertet wird.
  - können aus dem C-Code die MATLAB-Funktionen wie `quad` rufen.
  - können Quadaraturverfahren explizit implementieren (z.B. den adaptiven Simpson-Algorithmus von oben).
- Ggf. Hilfe durch Numeriker bzw. Berater der Paket-Anbieter (MathWorks, Abaqus) in Anspruch nehmen.

7 Übungen zu Quadraturverfahren

7.1	Leiten Sie die 3-Punkt-Simpson-Regel her.
7.2	Zeigen Sie, dass sie sogar Polynome 3. Grades exakt integriert.
7.3	Berechnen Sie anhand der Fehlerformel die Anzahl Teilintervalle, mit der die summierte Simpsonformel S_n das Integral $I = \int_2^4 1/x\,dx$ auf 0.001 genau berechnet.
7.4	Implementieren Sie die oben beschriebenen harten Abbruchbedingungen für das adaptive rekursive Simpson-Verfahren.
7.5	**Verständnisfragen** 1. Nennen Sie 3 Gründe für den Bedarf an numerischen Integrationsverfahren. 2. Erklären Sie das Konstruktionsprinzip der einfachen Trapez- und Simpsonregel. 3. Wie gelangt man von der 3-Punkt-Simpson-Regel auf die summierte Simpsonformel? 4. Weshalb ist die Simpson-Formel für die Integration von $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ ungeeignet? 5. Die MATLAB Funktion „`quad`“ implementiert ein sog. adaptives Simpson-Verfahren. a. Was bedeutet „adaptiv“ und was ist der Vorteil gegenüber der nicht-adaptiven summierten Simpson-Regel? b. Erklären Sie den rekursiven Ansatz (Teile-und-Herrsche-Prinzip)! c. Was sind die wesentlichen Vorgaben, die wir als Nutzer eines solchen Verfahrens vorgeben?

Anhang: Integrale, die bei Fourierreihen eine Rolle spielen

8 Übung: Auslöschungseffekt / Orthogonalsystem aus trigonometrischen Grundfunktionen

Zeigen Sie, dass für jedes $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Funktionen

$$u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad u_n(x) := \cos(n\omega x) \quad \text{und} \quad v_n(x) := \sin(n\omega x) \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

(auf dem Vektorraum aller stetigen Funktionen $f: [0, T] \to \mathbb{R}$) ein Orthonormalsystem (ONS) bilden bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Auf dieser Tatsache basiert die Fouriertheorie (späteres Kapitel).

8.1

Für ein ONS sind für „paarweise senkrecht stehen“ und „normiert“ die unten stehenden Bedingungen (1)-(3) zu zeigen.

Vorüberlegung: Welche Periode haben die cos- bzw. sin-Funktionen u_n, v_n?

Erinnerung 1: Falls f T-periodisch ist, ist jedes Integral über eine Vollperiode gleich, insbes. $\int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx$

Erinnerung 2: Falls f ungerade Funktion, ist $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

Erinnerung 3: Falls f, g gerade bzw. ungerade Funktionen sind, können wir Aussagen über das Produkt $f \cdot g$ machen.

$$(\mathbf{1}) \qquad \langle \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{v_m} \rangle = \frac{2}{T} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \cos(n\omega x) \cdot \sin(m\omega x)\, dx = 0$$

$$(\mathbf{2}) \qquad \langle \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{u_m} \rangle = \frac{2}{T} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \cos(n\omega x) \cdot \cos(m\omega x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$(\mathbf{3}) \qquad \langle \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_m} \rangle = \frac{2}{T} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \sin(n\omega x) \cdot \sin(m\omega x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \qquad \textbf{\textit{Nachweis analog zu}}\ (\mathbf{2})$$

9 Übung: Berechnen Sie das bestimmte Integral, wobei die Stammfunktion einer Integraltafel entnommen werden darf.

Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.		Stammfunktion	Integralwert
9.1	$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} x\cos(n\omega x)\, dx$		0
9.2	$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} x\sin(n\omega x)\, dx$		$-\frac{T}{n\omega} = -\frac{T^2}{2\pi n}$
9.3	$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} x^2\cos(n\omega x)\, dx$		$\frac{2T}{n^2\omega^2} = \frac{T^3}{2n^2\pi^2}$
9.4	$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} x^2\sin(n\omega x)\, dx$		$-\frac{T^3}{2n\pi}$
9.5	$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} e^x\cos(nx)\, dx$ bzw. $\int_{-\boldsymbol{\pi}}^{\mathbf{0}} e^{-x}\cos(nx)\, dx$		$\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}$
9.6	$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} e^x\sin(nx)\, dx$		$\frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot e^{\pi} + n}{1 + n^2}$