c) $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ ist als Verkettung von $\cos(x)$ und $\frac{1}{x}$ stetig für $x \neq 0$ (an der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert). ■

Zum Schluss wollen wir noch festhalten, dass stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum und Minimum annehmen:

Satz 19.14 (Weierstraß) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige reelle Funktion f nimmt auf diesem Intervall ihr Maximum und Minimum an. Insbesondere ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

Abgeschlossenheit ist wichtig für diesen Satz! Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, 1)$ stetig, sie hat aber weder ein Minimum noch ein Maximum und ist sogar unbeschränkt.

19.2 Die Ableitung einer Funktion

In der Praxis treten oft komplizierte Funktionen auf, die nur schwer zu untersuchen sind. Die Strategie in der Mathematik ist, diese komplizierten Funktionen durch einfachere zu approximieren und dann Eigenschaften der komplizierten Funktion von der Approximation abzulesen. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei die Differentialrechnung, die versucht, eine Funktion durch eine Gerade, die Tangente, zu approximieren.

Angenommen, wir möchten eine gegebene Funktion $f(x)$ in der Nähe eines bestimmten Punktes $(x_0, f(x_0))$ möglichst gut approximieren. Die einfachste Möglichkeit wäre natürlich, $f(x)$ durch die konstante Funktion $f(x) = f(x_0)$ zu ersetzen. Etwas besser wollen wir es aber schon haben und deshalb versuchen wir, $f(x)$ durch eine Gerade anzunähern, die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ geht, also

$$f(x) \approx f(x_0) + k(x - x_0).$$

Die Frage ist nun, wie dabei die Steigung k gewählt werden soll, damit eine möglichst gute Approximation erreicht wird. Wählen wir zum Beispiel eine zweite Stelle x_1 in der Nähe von x_0, so können wir die Steigung so wählen, dass die Gerade durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ geht:

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Man nennt eine derartige Gerade durch zwei Punkte des Graphen von f eine **Sekante** (siehe Abbildung 19.5). Es ist klar, dass die Approximation im Punkt $(x_0, f(x_0))$ um so besser wird, je näher x_1 bei x_0 liegt. Die optimale Steigung ist also gegeben durch

$$k_0 = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert. Diese optimale Gerade hat die Eigenschaft, dass sie den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gerade berührt und wird deshalb **Tangente** genannt (siehe Abbildung 19.6).

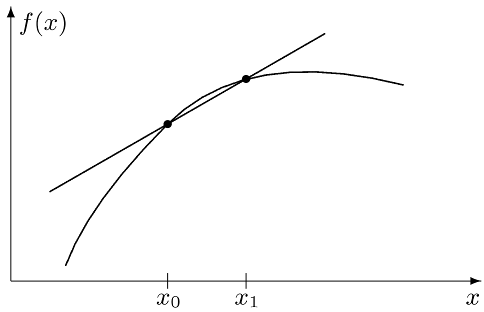

Abbildung 19.5. Sekante

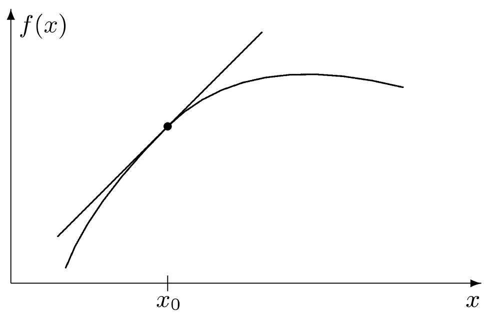

Abbildung 19.6. Tangente

Definition 19.15 Die Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und heißt **Ableitung** oder **Differential** von f in x_0. Man schreibt auch $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$. Die Gleichung der Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ lautet dann:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Wenn f in *jedem* Punkt ihres Definitionsbereiches D differenzierbar ist, dann ist die **Ableitung** f' ebenfalls eine Funktion, nämlich jene, die jedem x die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x zuordnet. Ist f' stetig, so nennt man f **stetig differenzierbar** auf D.

Die Menge aller auf D stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^1(D)$ bezeichnet.

Aus der Definition der Ableitung als Grenzwert von $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ist ersichtlich, dass die Ableitung auch als **lokale Änderungsrate** der Funktion aufgefasst werden kann:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \approx f'(x_0) \quad \text{für } x_1 \text{ nahe bei } x_0.$$

Hier haben wir die Steigung der Sekante durch zwei (nahe beinander liegende) Punkte durch die Steigung der Tangente in einem der beiden Punkte angenähert. Wenn sich also x um $\Delta x = x_1 - x_0$ ändert, dann ändert sich $f(x)$ um $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Insbesondere ist $f(x)$ in der Nähe von x_0 streng monoton wachsend, wenn $f'(x_0) > 0$ ist und streng monoton fallend, wenn $f'(x_0) < 0$.

Wenn t als Zeit interpretiert wird, so schreibt man meistens $\dot{f}(t)$ anstelle von $f'(t)$ bzw. $\frac{df}{dt}$. Wenn zum Beispiel $s(t)$ den zurückgelegten Weg eines Fahrzeuges zum Zeitpunkt t beschreibt, so ist $\dot{s}(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Die Schreibweise $\frac{df}{dx}$ geht auf den deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und die Schreibweise $\dot{f}$ auf den englischen Physiker und Mathematiker Isaac Newton (1643–1727) zurück. Leibniz und Newton haben die Grundlagen der Differentialrechnung etwa zur gleichen Zeit, aber unabhängig voneinander, gelegt.

Beispiel 19.16 Differenzierbare Funktionen

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar?

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \operatorname{sign}(x)$

Lösung zu 19.16

a) Wir müssen untersuchen, für welche x_0 des Definitionsbereiches der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert. Für eine beliebige Stelle x_0 ist

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(2x+1)-(2x_0+1)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2(x-x_0)}{x-x_0} = 2.$$

Die Funktion $f(x)$ ist also überall differenzierbar (x_0 war ja eine *beliebige* Stelle) und ihre Ableitung ist überall gleich 2. Die gleiche Rechnung zeigt allgemein, dass die Funktion $f(x) = k\,x + d$ überall differenzierbar ist und dass $f'(x) = k$ gilt.

b) Für $x_0 \neq 0$ ist die Funktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

differenzierbar (analog wie a)):

$$f'(x_0) = \begin{cases} -1, & x_0 < 0 \\ 1, & x_0 > 0 \end{cases}.$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ist sie aber nicht differenzierbar, denn der Grenzwert der Sekantensteigungen durch Punkte rechts von $x_0 = 0$ ist 1, der Grenzwert von links ist hingegen -1.

Denn der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x-0}{x-0} = -1,$$

und der rechtsseitige ist

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-0}{x-0} = 1.$$

Am Knickpunkt ist die Funktion also nicht differenzierbar.

c) (Vergleiche Beispiel 19.4 a).) Interessant ist wieder nur $x_0 = 0$ (an allen anderen Stellen $x_0 \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = 0$). Bei $x_0 = 0$ besitzt die Funktion keine Ableitung. Denn für Punkte rechts von $x_0 = 0$ ist der Grenzwert der Sekantensteigungen gleich 0. Und für Punkte links von $x_0 = 0$ wachsen die zugehörigen Sekantensteigungen über alle Grenzen (im Grenzwert wäre die Tangente, wenn man von links kommt, senkrecht).

Denn der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-1}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2}{x} = \infty,$$

und der rechtsseitige ist

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-1}{x-0} = 0.$$

■

Grob gesagt hat eine differenzierbare Funktion keine Knicke, und schon gar keine Sprünge, denn weder in einem Knickpunkt noch an einer Sprungstelle ist es sinnvoll, von einer Tangente zu sprechen. Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit:

Satz 19.17 Jede differenzierbare Funktion ist stetig (aber nicht umgekehrt).

Beispiel: $|x|$ ist an $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar. Hier hat die Funktion einen Knick.

Die Approximation einer Funktion durch ihre Tangente wird auch als **Linearisierung** bezeichnet. Dabei wird durch $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente gelegt und die Funktionswerte $f(x)$ für x nahe bei x_0 durch die Tangentenfunktionswerte $t(x)$ angenähert:

$$f(x) \approx t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Diese Näherungsformel kann wie folgt verwendet werden: Angenommen, wir benötigen $\sin(x)$ und wissen, dass nur kleine Winkel x auftreten können. So eine Situation tritt zum Beispiel bei Berechnungen in der Computergrafik oft auf. Muss diese Berechnung häufig ausgeführt werden (z. B. innerhalb einer Schleife), so kann man die Rechenzeit verkürzen, indem man $\sin(x)$ durch einen einfacheren Ausdruck ersetzt. Betrachten wir also Abbildung 19.7 und approximieren wir die Funktion $f(x) = \sin(x)$ durch die Tangente an die Kurve im Punkt $(0, 0)$. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Steigung der Tangente gleich $f'(0) = \cos(0) = 1$ ist. Unsere Näherung ist demnach $\sin(x) \approx x$. Für $x = 0.2$ erhalten wir zum Beispiel $\sin(0.2) \approx 0.2$. Der exakte Wert wäre $\sin(0.2) = 0.198669$. Wir haben also eine für viele Zwecke sicher ausreichende Näherung bekommen. Wie aus Abbildung 19.7 ersichtlich, wird die Güte der Approximation allerdings umso schlechter, je weiter x von 0 entfernt ist. Denn dann wird der Unterschied zwischen exaktem Wert und

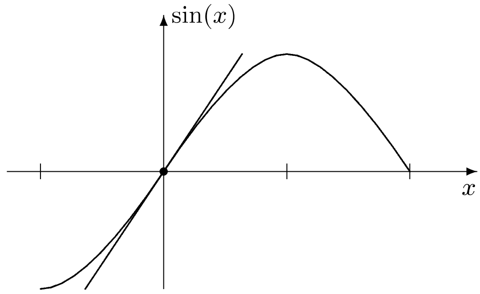

Abbildung 19.7. Tangente an die Kurve $y = \sin(x)$ an der Stelle $x = 0$.

Näherungswert immer größer. Die Linearisierung einer Funktion gibt also eine **lokale** Näherung der Funktion.

Zum Abschluss geben wir noch einen zentralen Satz der Differentialrechnung mit vielen nützlichen Konsequenzen an:

Satz 19.18 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Die Funktion f sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Anschaulich bedeutet der Mittelwertsatz, dass es zwischen a und b eine Stelle x_0

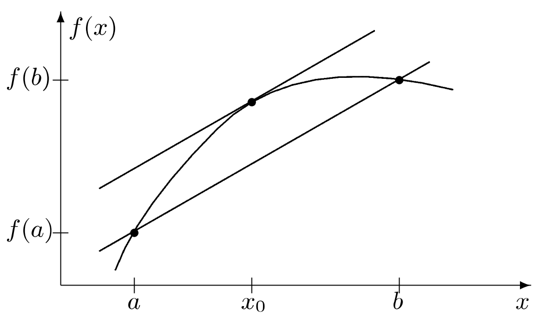

Abbildung 19.8. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

gibt, an der die Steigung von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist (siehe Abbildung 19.8).

Der Spezialfall $f(a) = f(b)$ ist als **Satz von Rolle** bekannt: Sind an zwei Punkten die Funktionswerte gleich, so gibt es dazwischen einen Punkt, an dem die Ableitung verschwindet.