7

Kombinatorik

7.1 Grundlegende Abzählverfahren

Die Kombinatorik untersucht die verschiedenen Möglichkeiten, Objekte anzuordnen bzw. auszuwählen. Sie ist im 17. Jahrhundert durch Fragestellungen begründet worden, die durch Glücksspiele aufgekommen sind. Viele Abzählprobleme können formuliert werden, indem man geordnete oder ungeordnete Auswahlen von Objekten trifft, die Permutationen bzw. Kombinationen genannt werden. Man kann die Kombinatorik daher auch als die „Kunst des Zählens“ bezeichnen. Sie hilft bei der Beantwortung von Fragen wie: „Wie viele verschiedene Passwörter gibt es, wenn ein Passwort aus mindestens sechs und höchstens acht Zeichen bestehen kann, und wenn davon mindestens eines eine Ziffer sein muss?“ oder „Wie viele Rechenschritte benötigt ein Algorithmus?“ Auch für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten sind Abzählverfahren unentbehrlich: Die Frage „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Lotto „6 aus 45“ sechs Richtige zu haben?“ führt auf die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, 6 Zahlen aus 45 auszuwählen.

Wir besprechen in diesem Abschnitt fundamentale Regeln, die die Grundlage der meisten Abzählverfahren bilden.

Die **Summenregel** ist sehr einfach und lautet: Wenn n Objekte mit Eigenschaft a und m Objekte mit Eigenschaft b gegeben sind, und wenn die beiden Eigenschaften sich ausschließen, dann gibt es $n + m$ Möglichkeiten, ein Objekt auszuwählen, das entweder Eigenschaft a oder b hat.

Beispiel 7.1 Summenregel
Eine Mietwagenfirma hat 12 Kleinwagen (Eigenschaft a) und 7 Mittelklassewagen (Eigenschaft b) zur Auswahl. Die beiden Eigenschaften schließen einander aus, d.h., ein Auto ist entweder Klein- oder Mittelklasse, aber nicht beides gleichzeitig. Dann gibt es $12 + 7 = 19$ Möglichkeiten, ein Auto auszuwählen.

Formal wird die Summenregel mithilfe von Mengen formuliert. Erinnern Sie sich an die Bezeichnung $|A|$ für die Anzahl der Elemente einer Menge A.

Satz 7.2 (Summenregel) Für zwei endliche, disjunkte Mengen A und B ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

G. Teschl, S. Teschl, *Mathematik für Informatiker,* eXamen.press,
DOI 10.1007/978-3-642-37972-7_7, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Beispiel 7.3 Summenregel
Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{d, e\}$. Sie haben keine gemeinsamen Elemente, sind also disjunkt. Daher ist $|A \cup B| = 5$ gleich $|A| + |B| = 3 + 2$.

Die Summenregel kann natürlich auf den Fall verallgemeinert werden, in dem Objekte mit mehr als zwei Eigenschaften gegeben sind: Angenommen, es gibt Objekte mit den Eigenschaften $a_1, a_2, \ldots, a_k$, die sich gegenseitig ausschließen, und die Anzahl der Objekte mit Eigenschaft a_i wird mit n_i bezeichnet. Dann gibt es $n_1+n_2+\ldots+n_k$ Möglichkeiten, ein Objekt auszuwählen, das eine der Eigenschaften $a_1, \ldots, a_k$ hat:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Ein zweites grundlegendes Zählverfahren ist die **Produktregel**. Auch sie ist einfach und wird im Alltag oft verwendet. Sie lautet: Wenn eine Aufgabe in zwei Teilschritte zerlegt werden kann, die hintereinander ausgeführt werden, und wenn es n Möglichkeiten gibt, um Schritt eins durchzuführen und für jede dieser n Möglichkeiten jeweils m Möglichkeiten, um Schritt zwei durchzuführen, dann gibt es insgesamt $n \cdot m$ Wege, um die gesamte Aufgabe durchzuführen.

Beispiel 7.4 Produktregel

a) Wenn es 3 Routen gibt, um von Wien nach Graz zu fahren, und 4 Routen, um von Graz nach Marburg zu fahren, wie viele mögliche Wege gibt es insgesamt, um von Wien über Graz nach Marburg zu kommen?
b) Das Ablaufdatum eines Konservenproduktes wird durch zwei Zahlen gekennzeichnet, wobei die erste Zahl zwischen 01 und 12 liegt (steht für den Monat) und die zweite Zahl 02, 03 oder 04 sein kann (Jahr). Wie viele mögliche Ablaufdaten gibt es?

Lösung zu 7.4

a) Die Gesamtroute kann in zwei Schritten zusammengestellt werden: Schritt eins = Wahl der Route von Wien nach Graz; dafür gibt es 3 Möglichkeiten. Im Anschluss Schritt zwei = Wahl der Route von Graz nach Marburg; dafür gibt es 4 Möglichkeiten. Es gibt daher insgesamt $3 \cdot 4 = 12$ verschiedene Gesamtrouten.
b) Wir können uns zwei Platzhalter MJ vorstellen. Für die Festlegung von M gibt es 12 Möglichkeiten, im Anschluss gibt es jeweils 3 Möglichkeiten für die Festlegung von J. Insgesamt gibt es daher $12 \cdot 3 = 36$ mögliche Ablaufdaten. ■

Die Produktregel entspricht also einem gestuften Entscheidungsprozess. Dieser kann gut mithilfe eines **Baumdiagrammes** dargestellt werden. Dabei stellt jeder Zweig des Baumes eine mögliche Wahl (Entscheidung) dar.

Beispiel 7.5 Baumdiagramm
Veranschaulichen Sie die Situation aus Beispiel 7.4 a) mithilfe eines Baumdiagrammes.

Lösung zu 7.5 Bezeichnen wir die Routen von Wien nach Graz mit a, b, c und die Routen von Graz nach Marburg mit $1, 2, 3, 4$. Dann zeigt das Baumdiagramm in Abbildung 7.1 die 12 möglichen Gesamtrouten von Wien nach Marburg: $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(a, 3), \ldots, (c, 4)$. ■

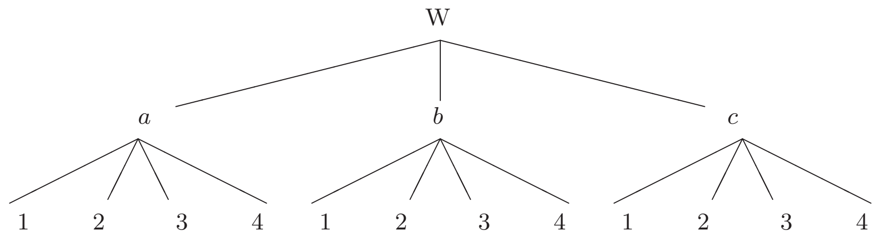

Abbildung 7.1. Baumdiagramm

Auch die Produktregel kann mithilfe von Mengen formuliert werden:

Satz 7.6 (Produktregel) Wenn A und B beliebige endliche Mengen sind, dann ist die Anzahl der Elemente ihres kartesischen Produktes gleich

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Beispiel 7.7 Produktregel
Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{d, e\}$; dann ist $A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$ und daher ist $|A \times B| = 6$ gleich $|A| \cdot |B| = 3 \cdot 2$.

Die Produktregel kann natürlich auch allgemeiner für den Fall von mehr als zwei Teilschritten formuliert werden: Wenn eine Tätigkeit aus k Teilschritten besteht, die hintereinander ausgeführt werden, und wenn es für den ersten Schritt m_1 Möglichkeiten gibt, für den zweiten Schritt m_2 Möglichkeiten, ... und für den k-ten Schritt m_k Möglichkeiten, dann gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$ Möglichkeiten, um die gesamte Tätigkeit durchzuführen:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|.$$

Beispiel 7.8 Produktregel
a) Wie viele verschiedene achtstellige Dualzahlen gibt es?
b) Wenn ein Autokennzeichen in den ersten zwei Stellen aus Großbuchstaben und in den folgenden vier Stellen aus Ziffern besteht, und wenn Buchstaben bzw. Ziffern auch mehrfach vorkommen können, wie viele mögliche Autokennzeichen gibt es dann?

Lösung zu 7.8
a) Stellen wir uns acht Platzhalter für die einzelnen Stellen der Dualzahl vor: XXXXXXXX. Schritt eins = Belegung der ersten Stelle; dafür gibt es 2 Möglichkeiten. Schritt zwei = Belegung der zweiten Stelle, dafür gibt es wieder 2 Möglichkeiten, usw. Insgesamt gibt es also $2^8 = 256$ verschiedene Dualzahlen mit acht Stellen.

b) Ein Autokennzeichen hat die Form BBZZZZ; die Aufgabe besteht aus den sechs Teilschritten diese Platzhalter zu belegen. Für B gibt es immer 26 Möglichkeiten, für Z immer 10 Möglichkeiten, also gibt es insgesamt $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,760\,000$ verschiedene Kennzeichen. ■

Viele Abzählprobleme werden gelöst, indem sowohl die Summen- als auch die Produktregel angewendet werden:

Beispiel 7.9 Summen- und Produktregel

a) Ein Passwort kann aus sechs bis acht Zeichen bestehen (Kleinbuchstaben oder Ziffern). Wie viele mögliche Passwörter gibt es?
b) Angenommen, mindestens eines der Zeichen des Passworts muss eine Ziffer sein. Wie viele mögliche Passwörter gibt es dann?

Lösung zu 7.9

a) Bezeichnen wir mit P_6, P_7 und P_8 die Anzahl der möglichen Passwörter mit sechs, sieben bzw. acht Zeichen. Nach der Summenregel gibt es dann insgesamt $P = P_6 + P_7 + P_8$ mögliche Passwörter. Berechnen wir zunächst P_6: Da es $26 + 10 = 36$ mögliche Zeichen (Buchstaben oder Ziffern) gibt, und Zeichen auch mehrfach vorkommen können, gibt es für jede der sechs Stellen XXXXXX des Passworts 36 Möglichkeiten, und daher nach der Produktregel $36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^6$ verschiedene Passwörter der Länge sechs. Analog gibt es 36^7 verschiedene Passwörter der Länge sieben, und 36^8 verschiedene Passwörter der Länge acht. Insgesamt gibt es daher $36^6 + 36^7 + 36^8 = 2\,901\,650\,853\,888$ mögliche Passwörter.
b) Bezeichnen wir mit Z_6, Z_7, Z_8 die Anzahl der Passwörter mit sechs, sieben und acht Zeichen, die zumindest eine Ziffer enthalten. Insgesamt gibt es dann $Z = Z_6 + Z_7 + Z_8$ zulässige Passwörter. Beginnen wir mit Z_6 und überlegen wir, wie wir mit möglichst wenig Rechenaufwand auskommen: Es sind alle sechsstelligen Passwörter erlaubt, bis auf jene, die keine Ziffer enthalten. Es gibt 26^6 sechsstellige Passwörter ohne Ziffer (d.h. nur mit Buchstaben). Die Anzahl der erlaubten sechsstelligen Passwörter ist damit gleich der Anzahl aller *möglichen* sechsstelligen Passwörter minus der Anzahl der sechsstelligen Passwörter *ohne Ziffer*: $Z_6 = P_6 - 26^6$. Analog berechnet man $Z_7 = P_7 - 26^7$ und $Z_8 = P_8 - 26^8$. Insgesamt sind damit $Z = Z_6 + Z_7 + Z_8 = P - 26^6 - 26^7 - 26^8 = 2\,684\,483\,063\,360$ Passwörter erlaubt. ■

Für nicht disjunkte Mengen kann die Summenregel leicht verallgemeinert werden:

Satz 7.10 (Inklusions-Exklusions-Prinzip) Für zwei beliebige endliche Mengen A und B ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Die gemeinsamen Elemente werden nämlich sowohl durch $|A|$ als auch durch $|B|$ berücksichtigt, also doppelt gezählt. Deshalb muss ihre Anzahl einmal abgezogen werden. Wenn die Durchschnittsmenge $A \cap B$ leer ist, dann erhalten wir wieder die Summenregel.

Beispiel 7.11 Inklusions-Exklusions-Prinzip

a) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$; dann ist $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ und $A \cap B = \{c, d\}$. Daher ist $|A \cup B| = 5$ gleich $|A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 3 - 2$.
b) In einer Stadt sprechen 1 000 000 Menschen Deutsch oder Französisch. Wenn 90% davon (zumindest) Deutsch sprechen, und 20% (zumindest) Französisch, wie viele sprechen dann beide Sprachen?
c) Wie viele achtstellige Dualzahlen gibt es, die mit 0 beginnen oder mit 11 enden?

Lösung zu 7.11

b) Ist D die Menge der Deutsch sprechenden Menschen und F die Menge der Französisch sprechenden Menschen, so ist $|D| = 900\,000$, $|F| = 200\,000$, $|D \cup F| = 1\,000\,000$; somit ist $|D \cap F| = |D| + |F| - |D \cup F| = 900\,000 + 200\,000 - 1\,000\,000 = 100\,000$. Es sprechen also 100 000 Menschen in dieser Stadt beide Sprachen.
c) Es gibt 2^7 achtstellige Dualzahlen, die mit 0 beginnen (denn sie haben die Form YXXXXXXX, wobei es für Y eine Möglichkeit, und für jedes X zwei Möglichkeiten gibt). Diese Anzahl schließt auch jene Dualzahlen ein, die mit 0 beginnen *und* mit 11 enden.
Analog gibt es 2^6 achtstellige Dualzahlen, die mit 11 enden (sie haben die Form XXXXXXYY, wobei es für Y wieder nur eine Möglichkeit, und für jedes X zwei Möglichkeiten gibt). Auch hier sind die Dualzahlen, die mit 0 beginnen *und* mit 11 enden, mitgezählt.
Durch $2^7 + 2^6$ werden also die Dualzahlen, die sowohl mit 0 beginnen als auch auf 11 enden, doppelt gezählt. Daher müssen wir ihre Anzahl einmal abziehen: Es gibt 2^5 solcher Dualzahlen (denn sie haben die Form YXXXXXYY).
Insgesamt gibt es also $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$ Dualzahlen, die mit 0 beginnen oder mit 11 enden. ■

Auch das Inklusions-Exklusions-Prinzip kann auf den Fall von mehr als zwei Mengen verallgemeinert werden, also allgemeiner für k Mengen formuliert werden. Für drei Mengen gilt zum Beispiel:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

7.2 Permutationen und Kombinationen

Permutationen und Kombinationen sind geordnete bzw. ungeordnete Auswahlen von Objekten aus einer Menge. Die Anzahl der möglichen Permutationen bzw. Kombinationen kann leicht mithilfe der im letzten Abschnitt besprochenen Zählverfahren berechnet werden.

Definition 7.12 Eine Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Elementen, bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt, nennt man eine **geordnete Auswahl** (oder eine **Variation** oder eine **k-Permutation**). Der Spezialfall $k = n$, bei dem also *alle* Elemente ausgewählt und angeordnet werden, wird **Permutation** genannt.