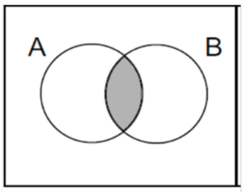
Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025
Studiengang Angewandte Informatik & Angewandte Künstliche Intelligenz

Kapitel 1: Kombinatorik

Lernziele:
- Summen- und Komplementregel bei Abzählproblemen anwenden
- Produktregel bei Abzählproblemen anwenden
- Produktregel als Baum veranschaulichen
- Anzahl an Variationen mit und ohne Beachtung der Reihenfolge berechnen
- Anzahl an Kombinationen mit und ohne Beachtung der Reihenfolge berechnen
- Entscheiden, ob Kombination oder Variation mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge zu berechnen ist

Dieses Kapitel setzt das Wissen über Mengen und Mengenoperationen voraus.

Wiederholung Mengenoperationen: Durchschnitt, Vereinigung, Restmenge, Komplement

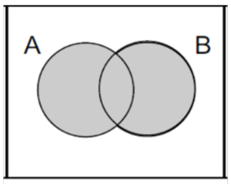


A∩B

Durchschnitt von A und B.

$\boldsymbol{A \cap B} := \{x | x \in A \textbf{ und } x \in B\}$

- „A geschnitten B“
- Menge aller Elemente, die zu <u>allen</u> (beiden) Mengen A, B gehören.
- UND: in A als auch in B

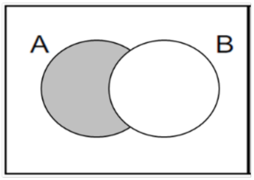


A∪B

Vereinigungsmenge $A \cup B$

$\boldsymbol{A \cup B} := \{x | x \in A \textbf{ oder } x \in B\}$

- „A <u>vereinigt</u> B“
- … Elemente, die zu <u>mind.</u> einer der Mengen A, B gehören.
- ODER: in A oder in B oderin beiden.

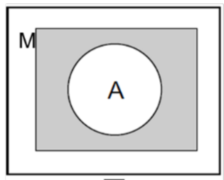


A \ B

Differenz, Restmenge $A \backslash B$

$\boldsymbol{A \backslash B} := \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$

- „A <u>ohne</u> B“
- … Elemente von A <u>ohne</u> die Elemente von B



$\bar{A}$

Komplement von A bzgl. Grundmenge M

$\boldsymbol{\bar{A}} := M \backslash A = \{x \in M | x \notin A\}$

- Alle Elemente einer (bekannten) Grundmenge, die <u>nicht</u> zu A gehören.

Disjunkte Menge (elementfremd): $A \cap B = \emptyset$

Gegeben sind zwei Mengen A und B mit $A \cap B = A$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

A) A und B sind disjunkt
B) A ist eine Teilmenge von B: $A \subseteq B$
C) B ist eine Teilmenge von A: $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$
D) A ist gleich B: $A = \mathrm{B}$

In einem Studiengang gibt es 25 Studierende. 15 von ihnen wählen das Wahlpflichtfach „Spannend“, 10 wählen „Nützlich“. 5 Studierende haben dabei sowohl „Spannend“ als auch „Nützlich“ gewählt.

Wie viele Studierende haben keines der beiden Wahlpflichtfächer gewählt?
Tipp: Betrachten Sie die Gruppen als Mengen und zeichnen Sie ein Venn-Diagramm.

A) 0
B) 5
C) 10
D) 15

Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$B \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$$
$$C \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \; und \; x^2 > 0\}$$

A) Es gilt $B \subseteq A \subseteq C$.
B) Es gilt $B \subseteq C \subseteq A$.
C) Es gilt A$\subseteq B \subseteq C$.
D) Es gilt A$\subseteq C \subseteq B$.

(Bauer)

Binomischer Satz / Binomialkoeffizient

Binomische Formeln - Wie verallgemeinerbar?

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{2}} = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{3}} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Die 1. bzw. 2. Binomische Formel kann durch den binomischen Lehrsatz verallgemeinert werden. Er dient der Auswertung von Potenzen einer Summe oder Differenz zweier Terme $(x+y)^n$. Der Ausdruck in der Klammer gehört zu den „Binomen“.

Binomischer Lehrsatz

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{n}} = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

… benutzt neue mathematische Symbole:

$\boldsymbol{n}$! gelesen: $\boldsymbol{n}$ Fakultät

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$0! := 1$$

Um diese Formeln verstehen zu können, benötigen wir die Kenntnis der folgenden mathematischen Symbole:

$n!$ Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.
(s.a. TeachMatics App: ID 71 Die Fakultät)

Beispiele:

$4!$

$5!$

$15!$ = 1307674368000

Überprüfen Sie per Taschenrechner-Funktion → sehr schnelles Wachstum!

$$x = \frac{8!}{4 \cdot 6!}$$

Berechnen Sie ohne Taschenrechner!

A) 1/3
B) 1/2
C) 4
D) 14

$$\frac{(n+1)!}{n!} = ?$$

A) 1
B) n
C) $n+1$
D) $n!$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gelesen: **„n über k“**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \ \cdot (n-k)!} \qquad \text{falls } k \leq n \quad (\text{andernfalls} := 0)$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \ \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Wichtige Sonderfälle:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Übung:

$$\binom{5}{0} =$$

Berechnen Sie $(x+y)^4$ mit Hilfe des binomischen Satzes (Ergebnis ohne Binomialkoeffizienten)

Jemand behauptet, dass sich der Binomialkoeffizient rekursiv berechnen lässt mit der Formel:

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} = \binom{\mathrm{n}-1}{\mathrm{k}-1} + \binom{\mathrm{n}-1}{\mathrm{k}}$$

Diese Behauptung ist:

A) Immer wahr
B) Immer falsch
C) Für einige, aber nicht für alle Werte wahr
D) Das lässt sich allgemein nicht beantworten.

Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich $\binom{n}{n-k}$?

A) $\binom{n}{k}$
B) $\binom{n-k}{n}$
C) $\binom{n-k}{k}$
D) Keiner davon

Fakultät $n!$

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

„n Fakultät“

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$0! := 1$$

- Sehr schnelles Wachstum
- Verwendung bei Binomialkoeffizienten (s.u.)

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$10! = 3628800$$

$$20! = 2432902008176640000$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ „n über k“

„n über k“ (heißt Binomialkoeffizient)

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{falls } k \le n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{falls } k > n$$

Symmetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Alternative Schreibweise mit Fakultät:

$$= \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$$

Additionseigenschaft:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pascalsches Dreieck:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Berechnung über Addition der „Vorgänger“:

n													
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Passende Theorieblöcke in der TeachMatics App (In der App Suche per Stichwort oder ID)	ID
Die Fakultät	71
Der Binomialkoeffizient	70
(Das Pascalsche Dreieck)	64
Der Binomische Lehrsatz	81

MassMatics-Aufgaben ID 767, 769