14 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Dynamische Vorgänge in der Natur, der Technik oder Wirtschaft lassen sich oftmals mathematisch durch Differenzialgleichungen beschreiben. Wesentlich dabei ist, dass nicht nur eine gesuchte Größe in Abhängigkeit der Zeit oder des Ortes, sondern auch ihr Änderungsverhalten in die Modellierung eingeht. Das Kapitel Differenzialgleichungen hat also starken Anwendungsbezug. Wir betrachten die mathematischen Begriffe und Methoden unabhängig von speziellen Anwendungen. Abschnitt 14.7 stellt eine Sammlung von Anwendungsbeispielen aus unterschiedlichen Gebieten bereit. Zum besseren Verständnis empfehlen wir dem Leser, die mathematische Theorie Schritt für Schritt mit diesen Anwendungen abzugleichen. An einigen Stellen beziehen wir uns auf mathematische Sachverhalte, die wir im Detail nicht beweisen. Wer tiefer in die Theorie der Differenzialgleichungen einsteigen möchte, dem sei etwa [Heuser:DGL] oder [Forst] empfohlen.

14.1 Einführung

Zunächst machen wir uns mit den wesentlichen Begriffen und den einfachsten Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen vertraut. Mit der systematischen Lösung spezieller Typen von Differenzialgleichungen beschäftigen wir uns erst später.

14.1.1 Grundbegriffe

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, bei der die Lösungsmenge nicht aus Zahlen, sondern aus Funktionen besteht. In einer Differenzialgleichung kommt außer der gesuchten Funktion selbst auch mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion vor.

Definition 14.1 (Gewöhnliche Differenzialgleichung)

Eine Gleichung, in der mindestens eine Ableitung einer unbekannten Funktion vorkommt, nennt man eine gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL).

Die Bezeichnung „gewöhnlich“ wird verwendet, wenn die gesuchte Funktion in der Differenzialgleichung nur von einer Veränderlichen abhängt. Hängt die gesuchte Lösungsfunktion von mehreren Veränderlichen ab, so spricht man von einer „partiellen“ Differenzialgleichung. Neben gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichungen kommen in Anwendungen noch weitere Typen von Differenzialgleichungen vor. Beispiele dafür sind sogenannte Algebro-, Integro- und Delay-Differenzialgleichungen.

In diesem Buch betrachten wir jedoch nur gewöhnliche Differenzialgleichungen. Bei vielen gewöhnlichen Differenzialgleichungen entspricht die unabhängige Variable der Zeit. Lösungen solcher Differenzialgleichungen sind zeitabhängige Funktionen. Diese beschreiben dynamische Prozesse.

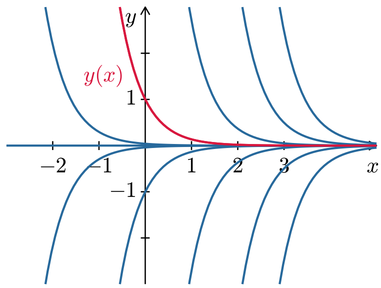
Beispiel 14.1 (Einfache Differenzialgleichung)

Ein einfaches Beispiel für eine Differenzialgleichung ist $y' = -2\,y$. Die Problemstellung lautet folgendermaßen: „Wir suchen Funktionen y, deren Ableitung sich von der ursprünglichen Funktion um den Faktor -2 unterscheidet."

Ein Kandidat für die Lösung ist die Exponentialfunktion $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, denn für die Ableitung gilt

$$y'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} = -2\,y(x).$$

Es gibt jedoch noch weitere Lösungen. Da ein konstanter Faktor beim Ableiten erhalten bleibt, darf man die Exponentialfunktion mit einer beliebigen Konstante C multiplizieren, also $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}$. Somit besitzt die Differenzialgleichung unendlich viele Lösungen. Darunter ist auch die sogenannte triviale Lösung $y(x) = 0$.



■

In Beispiel 14.1 können wir eine typische Eigenschaft von Differenzialgleichungen erkennen: Differenzialgleichungen besitzen in der Regel keine eindeutige Funktion als Lösung, sondern unendlich viele verschiedene Lösungsfunktionen. Die Gesamtheit aller Lösungsfunktionen bezeichnet man als allgemeine Lösung einer Differenzialgleichung.

Definition 14.2 (Lösung und allgemeine Lösung, Trajektorie)

Eine Funktion ist eine Lösung der Differenzialgleichung, falls die Gleichung durch Einsetzen der Funktion und ihrer Ableitungen für alle Werte aus der Definitionsmenge der Funktion erfüllt ist. Die Menge aller Lösungsfunktionen bildet die allgemeine Lösung. Die grafische Darstellung einer Lösung bezeichnet man als Trajektorie.

Streng genommen ist bei der Angabe einer Lösung auch die Definitionsmenge einer Lösung mit anzugeben. Um zu entscheiden, ob eine Funktion eine Lösung einer Differenzialgleichung ist, kann man alle Ableitungen bis zur Ordnung der Differenzialgleichung bestimmen und dann in die Differenzialgleichung einsetzen, siehe Beispiel 14.2. Die Differenzialgleichung muss dann für alle Werte aus der Definitionsmenge erfüllt sein.

Es ist nicht immer garantiert, dass eine Differenzialgleichung überhaupt Lösungen besitzt. Der Nachweis der Existenz von Lösungen ist mathematisch anspruchsvoll. Ein wichtiger Existenzsatz geht auf den italienischen Mathematiker Giuseppe Peano zurück, siehe [Heuser:DGL]. Bei den bisherigen Beispielen haben wir durch Raten Lösungsfunktionen gefunden. Unser Ziel ist jedoch, mithilfe systematischer Verfahren alle Lösungen und somit die allgemeine Lösung zu bestimmen.

Beispiel 14.2 (Lösung einer Differenzialgleichung)

Welche der beiden Funktionen

$$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad y_2(x) = x$$

ist eine Lösung der Differenzialgleichung $y'\,y = -x$? Wegen

$$y_1'(x) = \frac{-2\,x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

gilt $y_1'(x)\,y_1(x) = -x$. Es ist zu beachten, dass die Ableitung $y_1'(x)$ für $x = \pm 1$ nicht definiert ist. Die Funktion $y_1(x)$ erfüllt die Differenzialgleichung für alle x aus dem Intervall $(-1, 1)$ und ist eine Lösung der Differenzialgleichung. Außerdem ist $y_2'(x) = 1$ und somit $y_2'(x)\,y_2(x) = x$. Durch Einsetzen in die Differenzialgleichung ergibt sich die Bedingung $x = -x$. Diese Bedingung ist nur für $x = 0$ erfüllt. Daher ist $y_2(x)$ keine Lösung. ■

Bei der Differenzialgleichung aus Beispiel 14.1 bleibt noch eine spannende Frage offen: Gibt es außer den Exponentialfunktionen noch weitere Lösungen oder haben wir bereits alle Lösungen gefunden? Diese Frage werden wir erst später klären. Wir werden feststellen, dass es tatsächlich keine anderen Lösungen gibt.

Zur Bezeichnung von Ableitungen haben wir bereits in Definition 8.2 unterschiedliche Notationen kennengelernt. Diese unterschiedlichen Schreibweisen werden auch bei Differenzialgleichungen verwendet.

Beispiel 14.3 (Schreibweisen bei Differenzialgleichungen)

Bei der Differenzialgleichung $y'(x) = -2\,y(x)$ kann man für die gesuchte Funktion und für die Variable beliebige Bezeichnungen verwenden, beispielsweise $f'(u) = -2\,f(u)$. Üblicherweise wird sogar ganz auf die Bezeichnung der Variablen verzichtet: $y' = -2\,y$. Wenn man zum Ausdruck bringen möchte, dass es sich um einen zeitabhängigen Prozess handelt, dann verwendet man die Variable t und bezeichnet die Ableitung mit einem Punkt anstelle eines Striches: $\dot{x}(t) = -2\,x(t)$. Unter Physikern ist die Bezeichnung $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -2\,y$ üblich und Mathematiker verwenden gerne die Operatorschreibweise $D\,y = -2\,y$. ■

Merke 14.1 (Bezeichnungen bei Differenzialgleichungen)

Bei Differenzialgleichungen kann man für die gesuchte Funktion und für die Variable beliebige Bezeichnungen verwenden. Es ist auch üblich, ganz auf die Bezeichnung der Variable zu verzichten. Für die Ableitungen verwendet man die Notationen mit Strich oder mit Punkt. Auch die Schreibweise mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}$, ... und die Operatorschreibweise mit D, D^2, ... sind gebräuchlich.

Beim Lösen einer Differenzialgleichung spielt die höchste auftretende Ableitung eine wichtige Rolle. Sie bestimmt die sogenannte Ordnung einer Differenzialgleichung. Je nach Ordnung werden unterschiedliche Lösungsstrategien angewendet.

Definition 14.3 (Ordnung)

Man bezeichnet die höchste auftretende Ableitung in einer Differenzialgleichung als Ordnung der Differenzialgleichung.

Beispiel 14.4 (Einfache Differenzialgleichung zweiter Ordung)

Die Differenzialgleichung $y'' = -9\,y$ hat die Ordnung 2. Wenn wir uns in Worten klar machen, was die Differenzialgleichung bedeutet, dann können wir Lösungen erraten: „Wir suchen alle Funktionen, bei den sich die zweite Ableitung von der ursprünglichen Funktion nur um den Faktor -9 unterscheidet.“ Sinus und Kosinus besitzen die Eigenschaft, dass sich die zweiten Ableitungen nur durch das Vorzeichen von der Ausgangsfunktion unterscheiden:

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x.$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten. Durch Nachrechnen erkennt man somit, dass alle Funktionen der Art

$$y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$$

Lösungen der Differenzialgleichung sind. In Abschnitt 14.3.3 werden wir diese Vorgehensweise bei der Lösungsfindung genauer untersuchen und werden zeigen, dass diese Differenzialgleichung keine weiteren Lösungen besitzt und wir somit die allgemeine Lösung bestimmt haben. ■

Definition 14.4 (Explizite und implizite Form)

Eine Differenzialgleichung, die nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist, nennt man eine Differenzialgleichung in expliziter Form und ansonsten eine Differenzialgleichung in impliziter Form.

Beispiel 14.5 (Differenzialgleichgungen in expliziter und impliziter Form)

a) Die Differenzialgleichung $y^2 = -7 + y'$ lautet in expliziter Form $y' = y^2 + 7$.

b) Da die Differenzialgleichung $y' = \sin y + \cos y'$ nicht nach y' aufgelöst werden kann, existiert für diese Differenzialgleichung keine explizite Form. ■

14.1.2 Anfangswert- und Randwertproblem

Die allgemeine Lösung einer Differenzialgleichung besteht nicht nur aus einer einzigen Lösung, sondern aus einer ganzen Schar von Lösungen. Diese Schar kann durch zusätzliche Bedingungen an die Lösungsfunktion reduziert werden. So gelangt man zu Anfangswert- und Randwertproblemen. Wichtig ist dabei, dass die Anzahl der zusätzlichen Bedingungen mit der Ordnung der Differenzialgleichung übereinstimmt.

Definition 14.5 (Anfangswertproblem)

Ein Anfangswertproblem (AWP) besteht aus einer Differenzialgleichung der Ordnung n und genau n Anfangsbedingungen in Form von Funktionswert und Ableitungen an einer einzigen Stelle x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Beispiel 14.6 (Anfangswertproblem)

Das Anfangswertproblem

$$y'' + 9\,y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

besteht aus einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung und zwei Anfangswerten für $x = 0$. Unter allen Lösungsfunktionen der Differenzialgleichung suchen wir diejenige Funktion, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert 1 und die Ableitung -6 hat. In Beispiel 14.4 haben wir bereits festgestellt, dass die allgemeine Lösung aus Funktionen der Art

$$y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$$

besteht. Aus dem Anfangswert $y(0) = 1$ erhalten wir $1 = C_2$. Für die erste Ableitung

$$y'(x) = 3\,C_1 \cos(3x) - 3\,C_2 \sin(3x)$$

liefert der Anfangswert $y'(0) = -6$ die Bedingung $-6 = 3\,C_1$ und wir erhalten

$$y(x) = -2\,\sin(3x) + \cos(3x)$$

als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. ■

Definition 14.6 (Randwertproblem)

Ein Randwertproblem (RWP) besteht aus einer Differenzialgleichung der Ordnung n und genau n Randbedingungen in Form von Funktionswerten und Ableitungen an mindestens zwei verschiedenen Stellen.

Beispiel 14.7 (Randwertproblem)

Beim Randwertproblem

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

sucht man die Lösung der Differenzialgleichung, die an den beiden Stellen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert 1 hat. Aus der allgemeinen Lösung

$$y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$$

erhält man mit $y(0) = 1$ den Wert $C_2 = 1$ und mit $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ den Wert $C_1 = -1$. Somit ist

$$y(x) = -\sin(3x) + \cos(3x)$$

die eindeutige Lösung des Randwertproblems. ■

In Beispiel 14.6 und Beispiel 14.7 haben wir dasselbe Lösungsprinzip verwendet. Dieses Prinzip lässt sich immer dann anwenden, wenn die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung einfach zu bestimmen ist.

Merke 14.2 (Lösungsstrategie für Anfangs- und Randwertprobleme)

Zur Lösung eines Anfangs- oder Randwertproblems kann man zuerst die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung bestimmen und dann unter allen diesen Lösungen diejenige Lösung herausfinden, die alle Anfangs- oder Randwerte erfüllt.

14.7 Anwendungen

Differenzialgleichungen werden in vielen Bereichen der Naturwissenschaften und der Technik angewendet. In diesem Abschnitt haben wir eine kleine Auswahl von Anwendungen zusammengestellt, die jeweils typische Aspekte beinhalten und gleichzeitig nur ein überschaubares Wissen in den einzelnen Fachgebieten erfordern.

14.7.1 Temperaturverlauf

Ein Körper mit einer Anfangstemperatur T_0 befindet sich in einem umgebenden Medium mit konstanter Temperatur T^*. Aus der Physik ist bekannt, dass die Temperaturänderung des Körpers proportional zur Temperaturdifferenz ist. Beschreibt $T(t)$ die Temperatur des Körpers zur Zeit t, und ist $k > 0$ die Proportionalitätskonstante, so gilt die Differenzialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T^*).$$

Lösungsverfahren wird in der Vorlesung besprochen

Diese lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat die homogene Lösung

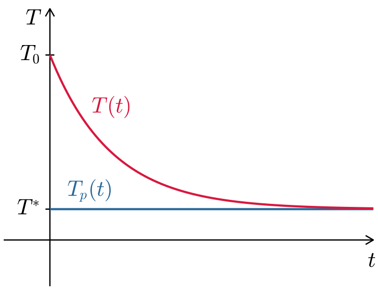
$$T_h(t) = C\mathrm{e}^{-k\,t}.$$

Eine partikuläre Lösung erhält man durch Variation der Konstanten:

$$T_p(t) = \mathrm{e}^{-k\,t} \int \frac{k\,T^*}{\mathrm{e}^{-k\,t}}\,\mathrm{d}t = T^*\,.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$T(t) = T_h(t) + T_p(t) = T^* + C\mathrm{e}^{-k\,t}.$$



Durch Einsetzen der Anfangsbedingung $T(0) = T_0$ lässt sich die Konstante C der allgemeinen Lösung $T(t)$ bestimmen:

$$C = T_0 - T^*\,.$$

Somit ist die Lösung des Problems gegeben durch

$$T(t) = T^* + (T_0 - T^*)\,\mathrm{e}^{-k\,t}$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob T_0 größer oder kleiner als T^* ist.

14.7.2 Radioaktiver Zerfall

Wir betrachten ein radioaktives Präparat, das zur Zeit $t = 0$ die Anzahl $N(0) = N_0$ radioaktive Kerne hat. Einzelne radioaktive Atomkerne zerfallen völlig zufällig. Da es sich aber um eine sehr große Anzahl von Kernen handelt, betrachtet man eine Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Diese Zerfallswahrscheinlichkeit wird üblicherweise durch die Halbwertszeit ausgedrückt. Die Halbwertszeit gibt an, nach welcher Zeit durchschnittlich die Hälfte der ursprünglichen radioaktiven Kerne zerfallen sind. Abhängig von der Substanz kann die Halbwertszeit Sekundenbruchteile oder Milliarden Jahre betragen. Die Zerfallsgeschwindigkeit $\dot{N}$ ist immer proportional zur Anzahl der radioaktiven Teilchen. Es gilt also die lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N.$$

Lösungsverfahren wird in der Vorlesung besprochen

Zur Bestimmung der Anzahl der radioaktiven Teilchen zur Zeit t müssen wir eine Funktion N bestimmen, die diese Gleichung erfüllt und zur Zeit $t = 0$ den Wert $N(0) = N_0$ hat. Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Die Halbwertszeit t^* bestimmt man aus

$$N(t^*) = \frac{1}{2}N_0 \quad\Longrightarrow\quad N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t^*} = \frac{1}{2}N_0 \quad\Longrightarrow\quad -\lambda t^* = \ln\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad t^* = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

In unserem Modell ist die Halbwertszeit t^* unabhängig von der Anzahl N_0.

14.8 Aufgaben

14.8.1 Verständnis und Kompetenz

Aufgabe 14.1 (Erraten von Lösungen von Differenzialgleichungen) ★☆☆☆☆

Bestimmen Sie Lösungen der gewöhnlicher Differenzialgleichungen durch Raten:

a) $y' = -\frac{1}{2}\,y$ b) $\ddot{x} = -2\,x$ c) $f'' = 7\,x - 3$