Mathematik für Informatiker 2 – SS 2025

Studiengang Angewandte Informatik & Angewandte Künstliche Intelligenz

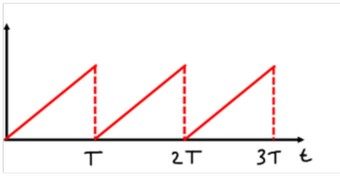
Kapitel 8: Fourierreihen

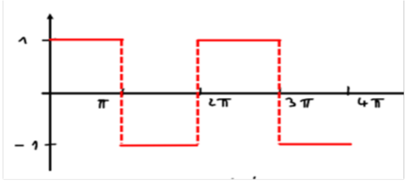
Lernziele:

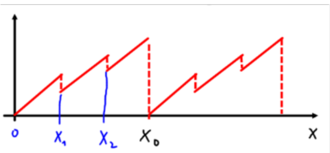
- Sie verstehen die das grundlegende Prinzip der Approximation einer periodischen Funktion durch Sinus- und Kosinusfunktionen.
- Sie kennen die Definition der Fourierkoeffizienten und können diese berechnen.
- Sie verstehen die Definition der Fourierreihe.
- Sie können das Fourierpolynom einer Funktion berechnen.
- Sie wissen, in welchem Sinne die Fourierreihe bzw. das Fourierpolynom die beste Approximation einer Funktion ist.
- Sie wissen, wo die Fourierreihe gegen eine Funktion konvergiert und wie die Konvergenz bei unstetigen Funktionen ist.

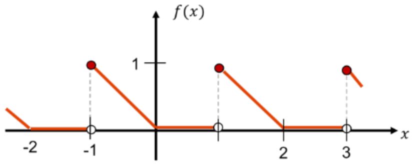
Fourierreihen

Typische periodische Signalverläufe

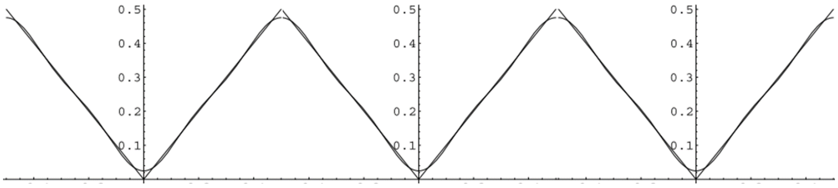






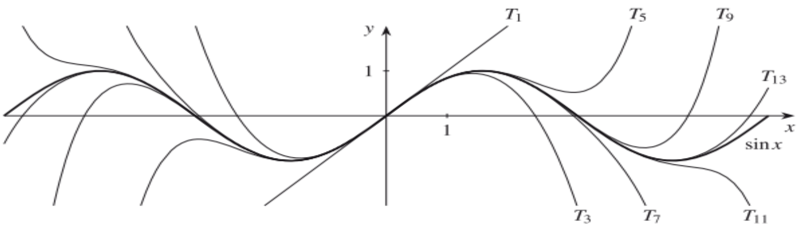


Wunsch: Periodische Funktion über ganz $\mathbb{R}$ näherungsweise durch ein Polynom beschreiben?



Vorteil einer Polynom-Näherung: Nur wenige Polynomkoeffizienten speichern und $f(x)$ überall näherungsweise rekonstruieren.

Erinnerung: Taylorpolynome $T_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
Weshalb <u>nicht</u> geeignet?



Anstelle klassischer Polynome: Welche Alternative eignet sich besser?

Bausteine klassischer Polynome sind:

Periodische, trigonometrische Bausteine (mit vorgegebener) Periode sind:

Klassische Polynome sind Linearkombinationen aus $x^0,\ x,\ x^2, \dots x^m$

$$\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$$

Anwendungsbeispiel:
Akustisches Signal soll gespeichert werden. Sampling Rate von 100 Hz: 100 Funktionswerte (an i.d.R. äquidistanten Messpunkten).

Problemstellung:
Speicherplatz sparen bei möglichst geringem Informationsverlust?

Idee: Näherung des Originalsignals durch ein „Polynom“ aus z.B. 10 Koeffizienten. **Nur diese (wenigen) Koeffizienten speichern**. Das über die Koeffizienten **festgelegte „Polynom“** liefert dann für jede Stelle einen Funktionswert, der das Originalsignal sehr gut beschreibt.

Die gleiche Idee kommt auch bei verschiedenen (verlustbehafteten) Kompressionsverfahren, wie zum Beispiel JPEG oder MP3, zum Einsatz. Mehr dazu am Ende des Kapitels.

Taylorpolynome <u>nicht</u> geeignet?

1. Wir bräuchten <u>Ableitungen!</u>
Aber: Wir haben nur Funktionswerte, keine Ableitungen. An Knick- oder Sprungstellen gibt es keine Ableitung. Solche Stellen sind bei Signalen aber oft vorhanden.

2. Wir brauchen eine <u>global gute Näherung!</u>
Aber: Talyorpolynome nähern i.Allg. nur lokal um die Entwicklungsstelle x_0 gut an.

Trigonometrische Polynome sind Linearkombinationen aus $\cos(n\omega x)$ bzw. $\sin(n\omega x)$

$$\boldsymbol{F_m(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega x) + b_1\sin(\omega x) + a_2\cos(2\omega x) + b_2\sin(2\omega x) + \dots + a_m\cos(m\omega x) + b_m\sin(m\omega x)}$$

Idee: Trigonometrische Polynome = Linearkombination aus endlich vielen trigonometrischen Grundfunktionen

Trigonometrisches Polynom vom Grad m hat die folgende Form. $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten.

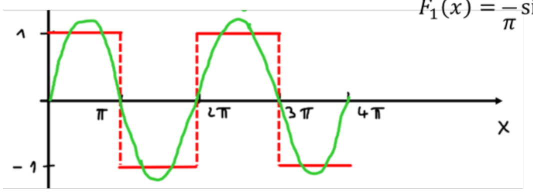
$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega x) + b_1\sin(\omega x) + a_2\cos(2\omega x) + b_2\sin(2\omega x) + \cdots + a_m\cos(m\omega x) + b_m\sin(m\omega x)$$

bzw. kurz

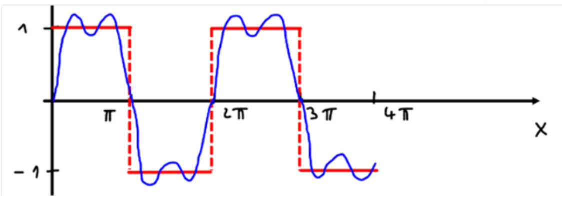
$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)$$

Es hat die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Die besondere Gestalt der Konstanten der Form $\frac{a_0}{2}$ anstelle a_0 begründen wir später.

$F_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$



$F_2(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{\pi}\frac{1}{3}\sin(3x)$



Eine geschickte Wahl der Koeffizienten a_n, b_n führt durch die Überlagerung periodischer Wellenlinien zu periodischen wellenartigen Funktionsgraphen, die das periodische Originalsignal gut nachahmen, **auch wenn diese Sprünge haben**.

Wenn wir einen Signalverlauf (periodische Funktion) $f(x)$ vorgeben: Wie müsste man die Koeffizienten a_n, b_n festsetzen, damit das trigonometrische Polynom $F_m(x)$ den Verlauf von f „möglichst gut" beschreibt? Was wollen wir überhaupt unter „möglichst gut" verstehen, insbesondere im Unterschied zu Taylorpolyomen?

Frage: Passende Koeffizienten für ein „bestes" trigonometrisches Polynom vom Grad m zu einer gegebenen Funktion f ?

„Fourierkoeffizienten" (FK)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin(n\omega x)\,dx \qquad \text{(FK)}$$

Im Gegensatz zu den Taylorkoeffizienten bestimmen sich die passenden Koeffizienten für ein „bestes" trigonometrisches Polynom nicht durch Ableiten sondern durch Integrieren. Man nennt sie die Fourierkoeffizienten.

Das Symbol $\int_T$ steht für eine Integration über ein <u>beliebiges</u> Intervall der Länge T und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die Formel gilt auch für a_0.

Herleitung dieser Formeln. Idee: Falls f „zufällig" schon ein trigonometr. Polynom wäre, gelangen wir an die Koeffizienten, indem wir den „Auslöschungseffekt" der trigonometrischen Grundfunktionen nutzen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x) \qquad |\cdot \cos(n\omega x)$$

$$f(x)\cos(n\omega x) = \cdots + a_k\cos(k\omega x)\cos(n\omega x) + \cdots \qquad | \text{ Integriere}$$

$$\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \cdots + a_k\int_T \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx + \cdots$$

$$\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \cdots + a_k\frac{2}{T}\int_T \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx + \cdots = a_n\cdot 1$$

Gilt auch im Spezialfall $n = 0$ denn: $\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(0)dx = \frac{2}{T}\int_T \frac{a_0}{2}dx = a_0$

Erinnerung: Aus der Integralrechnung kennen wir den „Auslöschungseffekt" der trigonometrischen Grundfunktionen:

Mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gilt:

$$\frac{2}{T}\int_T \cos(k\omega x)\cdot\sin(n\omega x)\,dx = 0 \quad \text{f. } k,n \in \mathbb{N}_0$$

bzw.

$$\frac{2}{T}\int_T \cos(k\omega x)\cdot\cos(n\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ 1 & \text{für } k = n \end{cases}$$

Fourierpolynom $F_m(x)$ zu einer geg. Funktion f

I.d.R. ist f selbst kein trigonometrisches Polynom. Dennoch kann man die Fourierkoeffizienten (FK) nach obiger Formel bilden und damit das zu f bzw. das zu den FK von f gehörige trigonometrische Polynom $F_m(x)$ bilden.

Man nennt es das Fourierpolynom $F_m(x)$ vom Grad m zu f. Nun können wir zwar keine Gleichheit mehr erwarten, überlegen aber, in welchem Sinn wir durch $F_m(x)$ eine Näherung an $f(x)$ erhalten.

Fourierkoeffizienten und -polynom zu einer Funktion f auf Intervall der Länge T (Periode)

Gegeben: Funktion f auf einem Intervall der Länge T. **Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega = 2\pi/T}$**.

Daraus bilde die **Fourierkoeffizienten zu f** nach folgenden Formeln (falls z.B. f stückweise stetig):

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx \qquad \boldsymbol{b_n} = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin(n\omega x)\,dx \qquad *)$$

*) Ist f periodisch, so darf man ein beliebiges Intervall mit Länge der Periode T wählen.

Fourierpolynom m-ten Grades zu f = das **trigonometrische Polynom** mit diesen Fourierkoeffizienten

$$F_m(x) = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{a_1}\cos(\omega x) + \boldsymbol{b_1}\sin(\omega x) + \boldsymbol{a_2}\cos(2\omega x) + \boldsymbol{b_2}\sin(2\omega x) + \cdots + \boldsymbol{a_m}\cos(m\omega x) + \boldsymbol{b_m}\sin(m\omega x)$$

In welcher Beziehung steht das Fourierpolynom $F_m(x)$ zum Original f ?

Bestapproximation an f in dem Sinn, dass es unter allen trigonometrischen Polynomen m-ten Grades dasjenige ist, für das die mittlere quadratische Abweichung über alle Funktionswerte minimal wird:

$$\frac{2}{T}\int_T (f(x) - F_m(x))^2\,dx = \min$$

Dies ist eine globale Minimierung des Abweichungsfehlers (auf dem Gesamtintervall) und keine lokale (wie bei Taylorpolynomen).

Integrationsintervall:

*) Das Symbol $\int_T$ ... steht für das Intervall der Länge T, auf dem man f betrachtet.

Ist $f(x)$ T-periodisch, so darf man ein beliebiges Intervall einer Periodenlänge T wählen. Sinnvollerweise achtet man dabei auf Symmetrien. Falls f gerade ist, z.B. $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Symmetrie-Betrachtungen:

f **gerade** Funktion $\Rightarrow b_n = 0$
$\Rightarrow$ nur Kosinus-Anteile und die Konstante $a_0/2$

f **ungerade** Funktion $\Rightarrow a_n = 0$
$\Rightarrow$ nur Sinus-Anteile

Ohne die Terme explizit zu berechnen: Die Fourierreihe für $f(x) = x^3$ im Intervall $[-\pi; \pi]$ enthält…

A) … nur Sinus-Terme.
B) … nur Kosinus-Terme.
C) … sowohl Sinus- als auch Kosinus-Terme.
D) Das ist unmöglich.

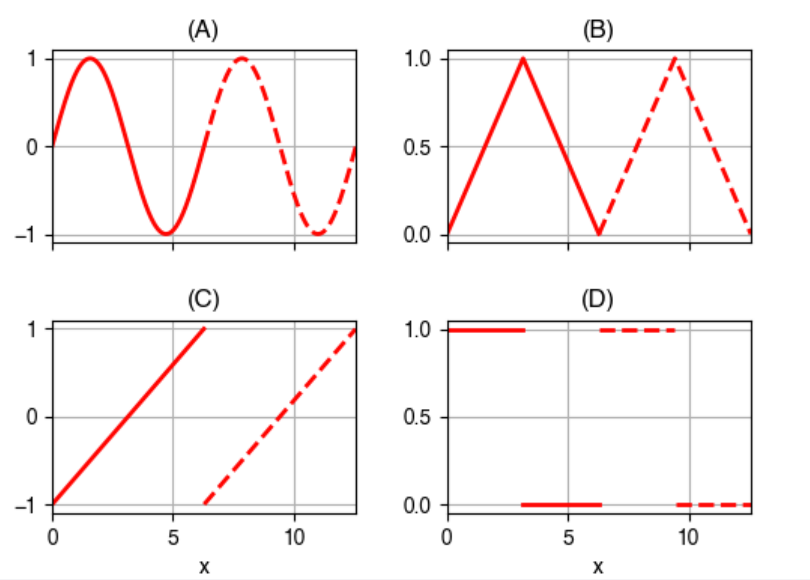
(Carroll MathQuest)

Was ist die Fourierreihe der Funktion $y = 2x + 3$ im Intervall $[-\pi;\ \pi]$?

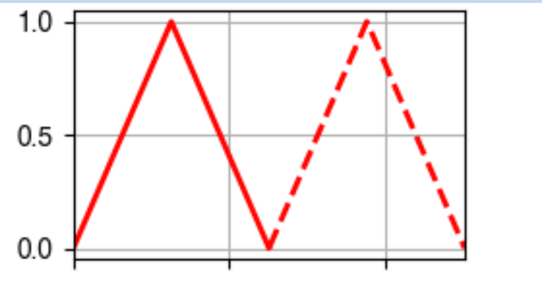
A) $2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \cdots$
B) $3 + 4\sin x - 2\sin 2x\ + \frac{4}{3}\sin 3x - \sin 4x + \cdots$
C) $3 + 2\sin x - \cos x + \frac{2}{3}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 4x + \cdots$
D) $3 + 2\cos x - \cos 2x + \frac{2}{3}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 4x + \cdots$
E) Diese Fourierreihe kann nicht erzeugt werden.
F) Ich weiß es nicht.

(Carroll MathQuest)

Ohne Berechnung: Für welche der folgenden Funktionen mit Periode $T = 2\pi$ ist der Term a_0 gleich 0?

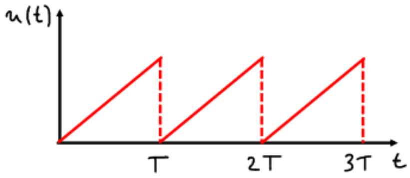


Welchen Wert hat der Fourier-Koeffizient a_0 für die folgende Funktion?



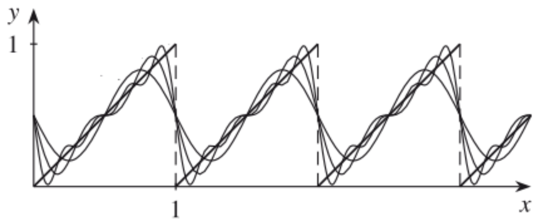
A) 0
B) $1/3$
C) $1/2$
D) $1/\pi$
E) $1/2\pi$
F) 1

1 Beispiele: Fourierpolynom einer Funktion mit Periode T

1.1	**Sägezahnimpuls.** Gegeben sei eine Kippspannung mit Schwingungsdauer $T = 2\pi$ und Amplitude 1.  Berechnen Sie das zugehörige Fourierpolynom 3. Grades und interpretieren Sie seine Bedeutung. Wählen Sie $T = 2\pi$. Schritt 1: Funktionsvorschrift? Periode und Kreisfrequenz? Symmetrieeigenschaften? **Erinnerung**: Bei periodischen Funktionen genügt es, die Funktionsvorschrift für nur ein (beliebiges) Periodenintervall anzugeben. Alle anderen Werte stehen dann durch periodische Fortsetzung fest. Schritt 2: Fourierkoeffizienten berechnen. Stammfunktionen dürfen einer Integraltafel entnommen werden. Schritt 3: Fourierpolynom 3. Grades

Schritt 4: Interpretation: Plausiblen Verlauf von $F_3(x)$ skizzieren und Bestapproximation in Worten und per Formel:

Zusatz: Fourierpolynome höheren Grades im Vergleich:



Schritt 5: Fourierreihe $F(x)$? Welche Werte nimmt sie an? (Ergänzung im Laufe des nächsten Abschnitts)

Formal gesehen müssen wir, um die Fourierkoeffizienten überhaupt bilden zu können, Integrale berechnen können. Dies funktioniert, wenn f stetig ist, aber auch wenn f nur stückweise stetig ist (endlich viele Sprungstellen sind erlaubt). Dies sind sehr „schwache" Voraussetzungen im Vergleich zur Differenzierbarkeit bei Taylorkoeffizienten. Tatsächlich gilt schon für stückweise stetige und beschränkte Funktionen, dass sich die Fourierpolynome der Funktion $f(x)$ im Sinne der mittleren quadratischen Abweichung beliebig genau annähern, d.h. das Fehlerintegral gegen Null geht:

$$\frac{2}{T}\int_0^T (f(x) - F_m(x))^2 \, dx \to 0.$$

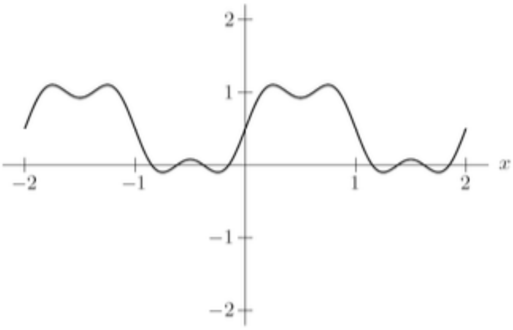
Der untenstehende Graph enthält die ersten drei Terme der Fourier-Reihe welcher der folgenden Funktionen?

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ and $f(x+2) = f(x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ and $f(x+2) = f(x)$

(c) $f(x) = |x|$ on $-1 < x < 1$ and $f(x+2) = f(x)$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ and $f(x+2) = f(x)$



(Carroll MathQuest)

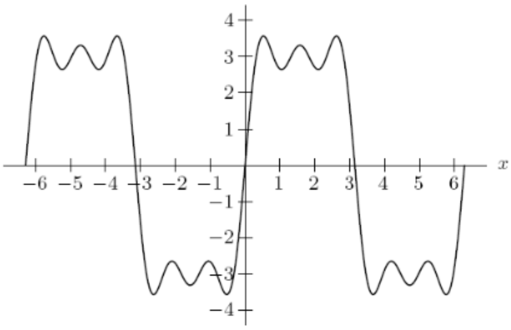
Der untenstehende Graph enthält die ersten drei Terme der Fourier-Reihe welcher der folgenden Funktionen?

(a) $f(x) = 3(x/\pi)^3$ on $-\pi < x < \pi$ and $f(x+2\pi) = f(x)$

(b) $f(x) = |x|$ on $-\pi < x < \pi$ and $f(x+2\pi) = f(x)$

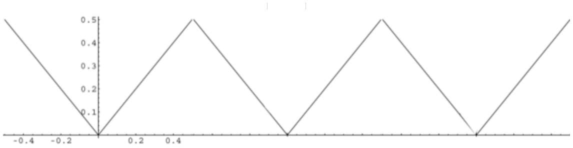
(c) $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 < x < \pi \end{cases}$ and $f(x+2\pi) = f(x)$

(d) $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ and $f(x+2\pi) = f(x)$



(Carroll MathQuest)

1.2 **Dreieck-Signal.** Berechnen Sie für dieses akustische Signal



dasjenige trigonometrische Polynom 3. Grades, das dieses im Sinne der mittleren quadratischen Abweichung am besten annähert und skizzieren Sie einen plausiblen Verlauf

Schritt 1: Funktionsvorschrift? Periode und Kreisfrequenz? Symmetrieeigenschaften?

Schritt 2: Fourierkoeffizienten berechnen. Stammfunktionen dürfen einer Integraltafel entnommen werden.

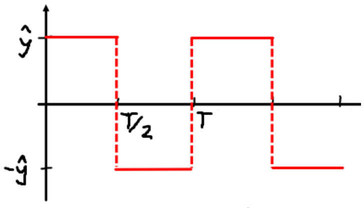
Wir argumentieren, dass bei geraden Funktionen immer $b_n = 0$ gilt, also nur a_n zu berechnen ist!

Analog bei ungeraden Funktionen immer $a_n = 0\ (n > 0)$, also nur b_n und a_0 zu berechnen!

Schritt 3: Fourierpolynom 3. Grades

	Zusatz: Fourierpolynom m-ten Grades Schritt 4: Interpretation: Plausiblen Verlauf von $F_3(x)$ skizzieren und Bestapproximation in Worten und per Formel: Schritt 5: Fourierreihe $F(x)$? Welche Werte nimmt sie an? (Ergänzung im Laufe des nächsten Abschnitts)

1.3 **Rechtecksignal.** Gegeben sei ein Rechtecksigna mit Periode T und Amplitude $\hat{y}$.



Entwickeln Sie die Funktion in ihre Fourierreihe, interpretieren Sie das Abbrechen der Reihen bei Grad 5.

Schritt 1: Funktionsvorschrift? Periode und Kreisfrequenz? Welche Symmetrieeigenschaften fallen diesmal auf?

Schritt 2: Fourierkoeffizienten berechnen. Stammfunktionen dürfen einer Integraltafel entnommen werden.

Schritt 3: Fourierpolynom 5. Grades (und darin auch 1.-4. Grades enthalten):

Schritt 4: Fourierreihe $F(x)$? Gestalt?

Welche Werte nimmt die Fourierreihe an? (Ergänzung im Laufe des nächsten Abschnitts)

Interpretation: Inwiefern ist $F_5(x)$ das beste trigonometrische Polynom 5. Grades zu f?

Hintergrundinformation: Die bestapproximierende Eigenschaft über Orthogonale Systeme herleiten (Lineare Algebra)

Den uns bekannten Auslöschungseffekt mit $\omega = 2\pi/T \quad (k, n \in \mathbb{N})$

$$\frac{2}{T}\int_T \cos(k\omega x) \cdot \sin(n\omega x)\, dx = 0$$

$$\frac{2}{T}\int_T \cos(k\omega x) \cdot \cos(n\omega x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ 1 & \text{für } k = n \end{cases}$$

$$\frac{2}{T}\int_T \sin(k\omega x) \cdot \sin(n\omega x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ 1 & \text{für } k = n \end{cases}$$

… können wir auch so formulieren, dass die trigonometrischen Grundfunktionen

$$u_n(x) = \cos(n\omega x) \quad \text{und} \quad v_n(x) = \sin(n\omega x)$$

$$u_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

ein Orthonormalsystem (ONS, rechtwinkliges System) bilden bzgl. des Skalarprodukts (für Funktionen)

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \frac{2}{T}\int_T f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Ausgeschrieben ergeben sich:

Das Fourierpolynom zu f vom Grad m:

$(*) =$

Mit den Fourierkoeffizienten:

<u>Spezialfall $n = 0$</u>:
Weil man diese explizite Formel auch für $n = 0$ nutzen möchte, schreibt man in $F_m(x)$ statt a_0 immer $\frac{a_0}{2}$ und arbeitet mit $u_0(x) = 1 = \cos(0 \cdot x)$

Die Lineare Algebra lehrt, dass unter allen Linearkombinationen der Form

$$\boldsymbol{a_0 u_0 + a_1 u_1 + b_1 v_1 + \cdots + a_m u_m + b_m v_m} \quad (*)$$

diejenige mit **minimalem Abstand *) zu $\boldsymbol{f}$** ist, deren Koeffizienten per Skalarprodukt gebildet werden:

$$\boldsymbol{a_n} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u_n} \rangle \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b_n} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v_n} \rangle$$

Man nennt dann die **Bestapproximation** an f auch $\boldsymbol{f}_{||}$.

<u>Spezialfall $n = 0$</u>:
Mit $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt die SP-Formel auch für a_0.

Der Vorteil dieser Herleitung ist, dass man damit die bestapproximierende Eigenschaft von $\boldsymbol{F_m = f_{||}}$ begründet hat:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{||}\|^2 = \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{F_m}\|^2 &= \langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{F_m}, \boldsymbol{f} - \boldsymbol{F_m} \rangle \\ &= \frac{2}{T}\int_0^T \big(f(x) - F_m(x)\big)\big(f(x) - F_m(x)\big) dx \\ &= \frac{2}{T}\int_0^T (f(x) - F_m(x))^2\, dx\end{aligned}$$

Dieser mittlere quadratische Abstand ist also kleinstmöglich unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad m genau dann, wenn man für $\boldsymbol{F_m}$ das Fourierpolynom zu f wählt.

*) Der Abstand ist im Sinn der Längenmessung über das Skalarprodukt gemeint:

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}$$

Fourierreihen (<u>beliebig</u> genaue Annäherung durch Fourierpolynome?)

Analog zu den Potenz- und Taylorreihen einer Funktion, gehen wir nun mit $m \to \infty$ von trigonometrischen Polynom zur trigonometrischen Reihe und vom Fourierpolynom $F_m(x)$ zur Fourierreihe $F(x)$ über. Die Entwicklung einer Funktion in ihre Fourierreihe nennt man auch **Fourieranalyse**.

Überblick: Trigonometrische Polynome & Reihen
Fourierpolynom & Fourierreihe zu f

Trigonometrisches Polynom vom Grad m ⟷ **Trigonometrische Reihe** Konvergent?

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

Funktion f

Zu f das Fourierpolynom $F_m(x)$ vom Grad m

Fourierreihe $F(x)$ zu f

wie oben, wobei a_k, b_k **Fourierkoeffizienten von f**

„Beste Näherung an f"?

In welchem Sinn…?

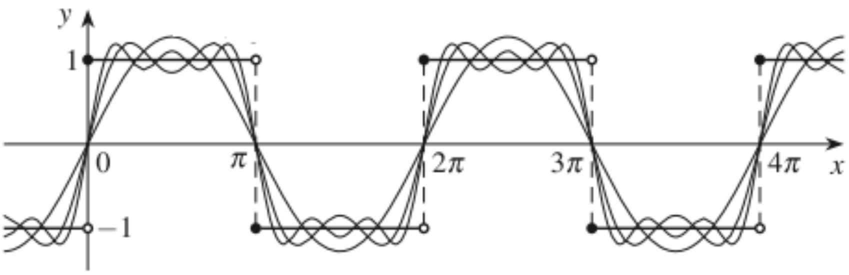
Wo beliebig genaue Annäherung der Funktionswerte $F_m(x) \to f(x)$?

Wo konvergent: Wert von $F(x)$?

$F(x) = f(x)$???

Dirichlet-Bedingung

Beobachtung: Für $m \to \infty$ geht $F_m(x)$ beliebig nahe an $f(x)$ außer bei den Sprungstellen (Vermutung: Mittelwert). Begründung liefert die sogenannte Dirichlet-Bedingung.



Wie genau beschreibt die Fourierreihe $F(x)$ die Funktion $f(x)$? Wir wissen zwar bereits, dass die Flächenabweichung 0 ist, aber da diese über ein Integral berechnet wird, muss das nicht heißen, dass die Fourierreihe $F(x)$ überall dieselben Funktionswerte wie $f(x)$ hat. Da die Fourierkoeffizienten von $F(x)$ durch Integrale berechnet werden, Integrale aber nicht von <u>einzelnen</u> Funktionswerten abhängen, muss man in Unstetigkeitsstellen auch oft $F(x) \neq f(x)$ erwarten. Anders gesprochen:

Welchen Wert nimmt die Fourierreihe an?

<u>Wo</u> lässt sich eine Funktion <u>beliebig genau</u> durch trigonometrische Polynome (Fourierpolynome) annähern?

Die Dirichlet-Bedingung

Fourieranalyse / Fourierreihe zu f :

Bilde aus f ihre Fourierkoeffizienten a_n, b_n und daraus die Fourier-<u>Reihe</u>

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \qquad (*)$$

Dirichletsche Bedingung:

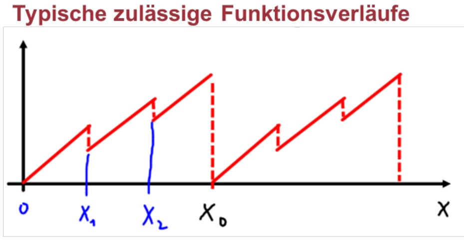
- Lässt sich das Periodenintervall in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(x)$ **stetig und monoton** ist,
- und sind die Unstetigkeitsstellen von Typ **Sprungstelle** (d.h. der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert)

dann konvergiert die Fourierreihe $(*)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Wert

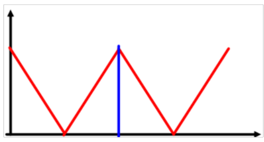
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{in Steigkeitsstelle von } f \\ \frac{f(x+)+f(x-)}{2} & \text{in Sprungstelle von } f \end{cases}$$

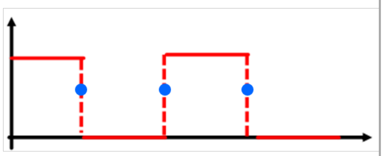
Durch Abbrechen der Fourierreihe nach endlich vielen Gliedern erhält man ein trigonometrisches (Fourier-)Polynom $F_m(x)$, das in obigem Sinn als Näherungsfunktion für $f(x)$ dienen kann.

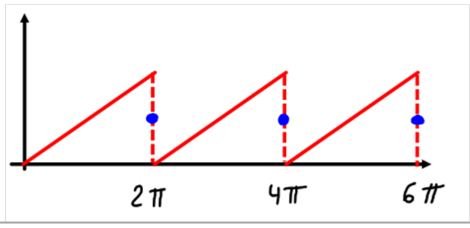
Typische zulässige Funktionsverläufe



<u>Dirichletsche Bedingung</u>

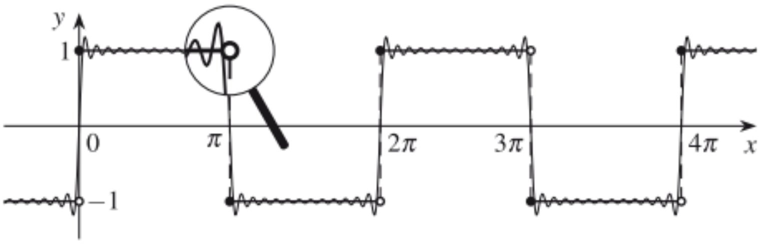






<u>Arithmetische Mittel</u>

Gibbsches Phänomen in der Nähe von Sprungstellen: Nahe der Sprungstellen schwingen die trigonometrischen Polynome über die Funktion f hinaus. Mit steigendem Grad lokalisiert sich dieses Überschwingen zwar immer mehr auf die Sprungstelle, doch bleibt das Phänomen bestehen (hier gezeichnet ist F_{25} gezeichnet.



Notation: wenn eine Funktion auf einem Intervall definiert ist, nehmen wir an, dass sie außerhalb davon periodisch fortgesetzt wird. Zum Beispiel wenn f auf $[0; L)$ definiert, dann nehmen wir an, dass $f(x - L) = f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & f\ddot{u}r -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} & f\ddot{u}r\ 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe der Funktion f konvergiert bei $x = 0$.

A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir unsicher.
C) Falsch, aber ich bin mir unsicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & f\ddot{u}r -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} & f\ddot{u}r\ 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe bei $x = 0$.

A) 0
B) $\pi/4$
C) $-\pi/4$
D) Konvergiert nicht.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ f\ddot{u}r -1 \leq x \leq 1$$

Die Fourier-Reihe der Funktion f konvergiert bei $x = 0$.

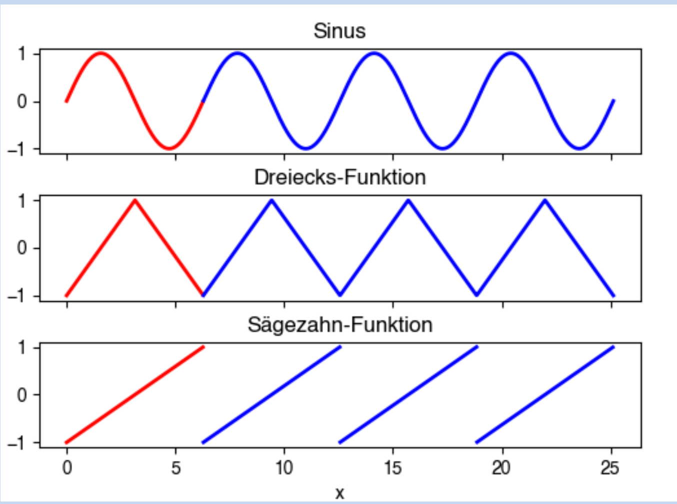
A) Wahr, und ich bin mir sicher.
B) Wahr, aber ich bin mir unsicher.
C) Falsch, aber ich bin mir unsicher.
D) Falsch, und ich bin mir sicher.

$f(x) = e^{2x}$ $für$ $0 \leq x < 1$ und $f(x-1) = f(x)$.

Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe bei $x = 1$?

A) Gar nicht, da die $f(x)$ bei $x = 1$ nicht stetig ist.
B) e^2
C) 0
D) $(1 + e^2)/2$
E) $(1 + \int_0^1 e^{2x} dx)/2 = (1 + \frac{e^2}{2})/2$

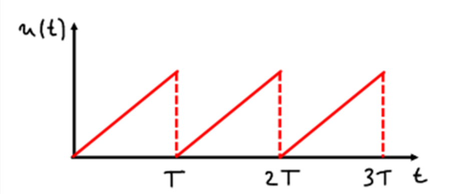
Betrachten Sie die folgenden, periodischen Funktionsverläufe:

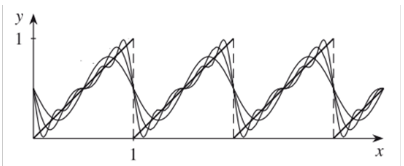


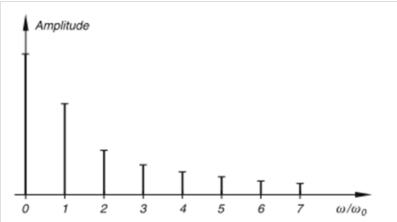
Ordnen Sie die Funktionen danach, für welche Funktion die Fourier-Reihe am schnellsten konvergiert.

A) Sinus – Dreieck – Sägezahn
B) Sinus – Sägezahn – Dreieck
C) Dreieck – Sinus – Sägezahn
D) Sägezahn – Dreieck – Sinus
E) Ich weiß es nicht.

Frequenzspektrum







Fourierpolynom vom Grad 3

$$F_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin(x) - \frac{1}{2\pi}\sin(2x) - \frac{1}{3\pi}\sin(3x)$$

Fourierpolynom vom Grad m

$$F_m(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\pi n}\sin(n\omega x)$$

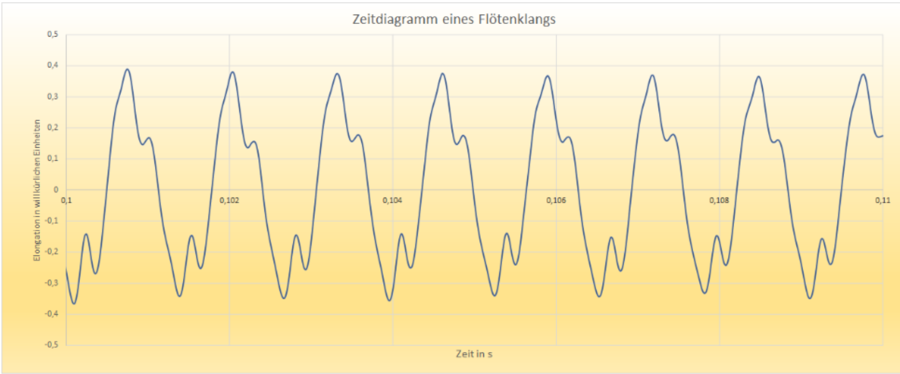
Fourierreihe ($m \to \infty$)

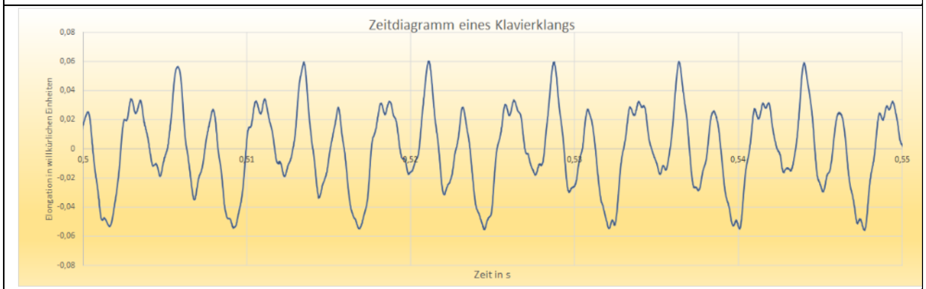
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

Frequenzspektrum

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

2 Frequenzanalyse





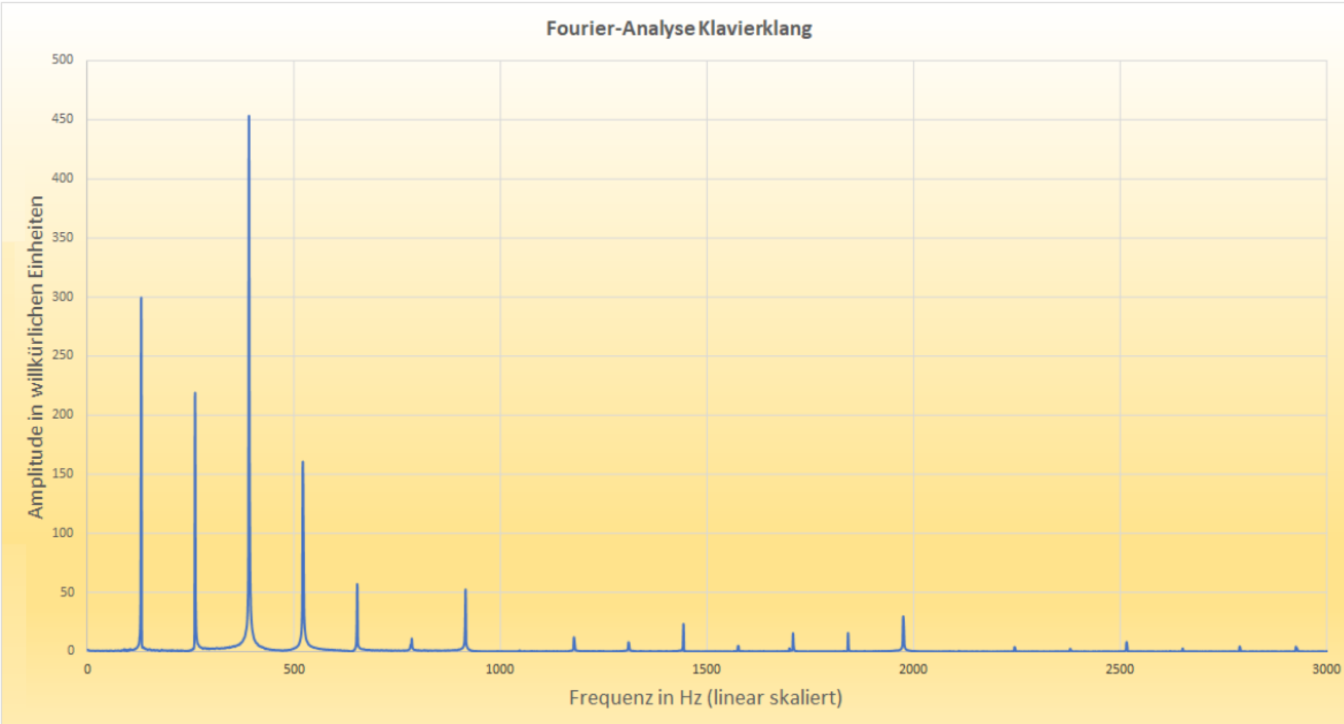
Bei Instrumenten entspricht ein Ton einer Schwingung mit einer entsprechenden Grundfrequenz.

Dass verschiedene Instrumente unterschiedlich klingen, obwohl sie den gleichen Ton spielen, liegt an weiteren Anteilen im Frequenzspektrum.

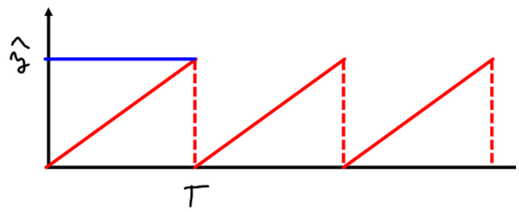
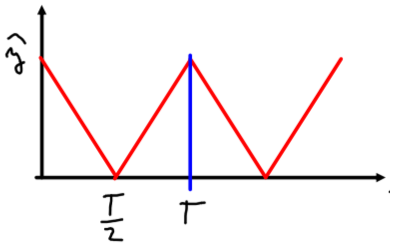
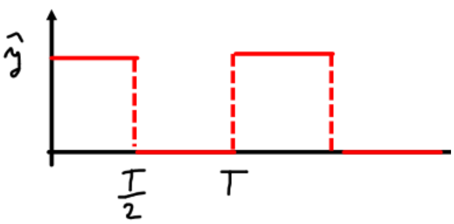
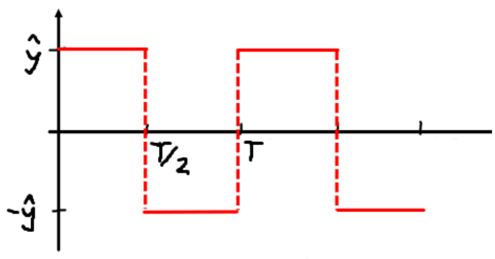
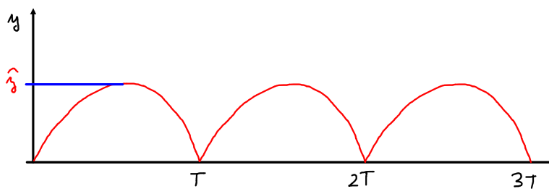
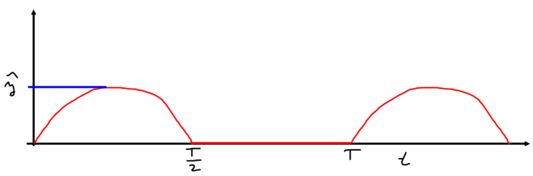
Links sehen Sie das Zeitdiagramm der Lautstärke einer Flöte (oben) und eines Klaviers (unten). Sie können erkennen, dass die Grundfrequenz des Signals gleich ist – daher der gleiche Ton. Aber das Signal sieht unterschiedlich aus, weil weitere vielfache der Frequenz darin vorhanden sind.

Unten sehen Sie die mittels Fourieranalyse ermittelten Frequenzen des Klaviers. Sie erkennen klar die dominierende Amplitude des Grundtons bei 485 Hz.

Quelle: https://tetfolio.fu-berlin.de/web/1444967



3 **Typische periodische Funktionsverläufe und ihre Fourierreihen** (wir leiten einige davon her)

3.1	Kippschwingung (Sägezahnimpuls)  	$F(x)=\frac{\hat{y}}{2}-\frac{\hat{y}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega x)$
3.2	Dreieckskurve (analog 1.2)  	$F(x)=\frac{\hat{y}}{2}+\frac{4\hat{y}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)\omega x)$
3.3	Rechteckkurve  	$F(x)=\frac{\hat{y}}{2}+\frac{2\hat{y}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin((2n-1)\omega x)$
3.4	Rechteckkurve  	$F(x)=\frac{4\hat{y}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin((2n-1)\omega x)$
3.5	Sinusimpuls (**Zweiweggleichrichtung**)  	$F(x)=\frac{2\hat{y}}{\pi}-\frac{4\hat{y}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(n\omega x)$ Hierbei und oben beachte man noch die Schreibweise: $(2n-1)(2n+1)=(2n)^2-1$
3.6	Sinusimpuls (**Einweggleichrichtung**)  	$F(x)=\frac{\hat{y}}{\pi}+\frac{\hat{y}}{2}\sin(\omega x)$ $-\frac{2\hat{y}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2n\omega x)$ Für $\hat{y}=1,\ T=2\pi$ ergibt sich: $F(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{2}{\pi}[\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2x)+\frac{1}{3\cdot 5}\cos(4x)+...]$

Beachte: In technischen Anwendungen ist die Variable im Allg. die Zeit t (anstelle x).

Komplexe Schreibweise der Fourierreihe

Erinnerung: Eulersche Formel:

Die Fourierreihe $F(x)$ einer T-periodischen Funktion f lässt sich repräsentieren über die **komplexe Schreibweise**

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x}$$

mit den folgenden **komplexen Fourierkoeffizienten c_k**

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T f(x) e^{-jk\omega x}\, dx \qquad \text{(FKC)}$$

welche die Koeffizienten a_k, b_k für die **reelle** Fourierdarstellung ergeben

$$a_k = c_k + c_{-k} \qquad (k = 0,1,2\dots)$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}) \qquad (k = 1,2,\dots)$$

Insbesondere erhalten wir in komplexer Form eine **einfache Darstellung des Frequenzspektrums**:

$$A_k = |c_k|$$

Anmerkung 1: Den genaue Zusammenhang zwischen komplexer Fourierreihe und reeller sieht man hier:

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\omega x}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k[\cos(k\omega x) + j\sin(k\omega x)] + c_{-k}[\cos(-k\omega x) + j\sin(-k\omega x)]$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k[\cos(k\omega x) + j\sin(k\omega x)] + c_{-k}[\cos(k\omega x) - j\sin(k\omega x)]$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k})\cos(k\omega x) + j(c_k - c_{-k})\sin(k\omega x)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

Anmerkung 2: Die Grundbausteine sind nun die komplexe Exponentialfunktion. Ihr Auslöschungseffekt schreibt sich:

$$\frac{1}{T}\int_T e^{jk\omega x} \cdot e^{-jn\omega x}\, dx = \delta_{kn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq n \\ 1 & \text{falls } k = n \end{cases}$$

Anmerkung 3: Die Herleitung der komplexen Form der Fourierkoeffizienten (FKC) über Vorgehensweise wie im Reellen

$$f(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{jk\omega x} \qquad \text{mit } e^{-jn\omega x} \text{ multiplizieren und integrieren} \dots$$

Ausblick: Weitere Anwendungen

Diskrete Fouriertransformation (DFT) und Datenkompression

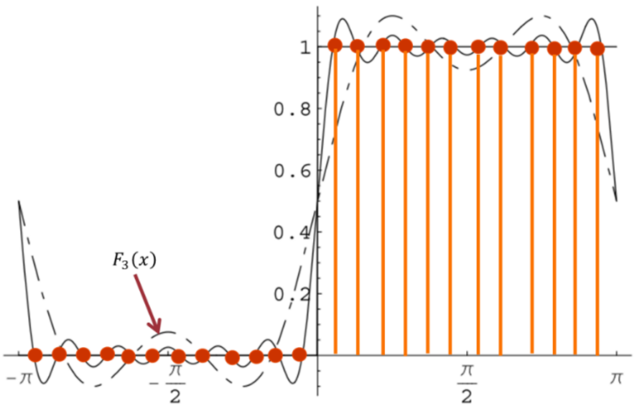
Kontinuierliche Funktion $f(x)$ und ihre unendlich viele FK

Wenn wir unendlich viele FK berücksichtigen können wir $f(x)$ in Gestalt ihrer Fourierreihe ausdrücken:

Speichern nur der ersten $N = 2m + 1$ FK:

Berücksichtigen wir nur die FK bis zum Grad m, d.h. speichern wir nur die $N = 2m + 1$ vielen ersten FK, können wir zwar keine Gleichheit, aber eine Näherung im Sinne der besten mittleren quadratischen Abweichung erhalten.

In der Praxis haben wir meist anstelle $f(x)$ nur diskrete Messwerte y_i an endlich vielen Stellen x_i $(i = 1, \dots, N)$



Spendiert man zu $N = 2m + 1$ Messwerten genauso viele Fourierkoeffizienten, so bilden das resultierende Fourierpolynom $F_m(x)$ die N diskreten Messwerte sogar exakt ab. Würde man alle N FK speichern, hätte man jedoch keinen Vorteil gegenüber der Speicherung der N Originaldaten. Was passiert, wenn wir nur die ersten FK verwenden?

Bei weniger FK immer noch eine gute Näherung aller Messwerte!

Bei $N = 2m + 1$ FK exakte Abbildung der N Messwerte:

Bei weniger FK immer noch eine gute Näherung aller Messwerte!

Fazit: Kompression! Abspeichern von wenigen ersten FK ergibt (über das zugehörige Fourierpolynom) zwar keine exakte Rekonstruktion, aber eine gute Näherung aller ursprünglichen Werte. Wenige FK gegenüber allen Originaldaten bedeutet weniger Speicherbedarf. Datenkompression, die (akzeptabel) verlustbehaftet ist.

Genauer: Fourierkoeffizienten zu N diskreten Werten?

Aus den Formeln der FK einer kontinuierlichen Funktion $f(x)$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx \;;\; b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin(n\omega x)\,dx}$$

ergeben sich die Formeln der diskreten Fouriertransformation

$$\boxed{a_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \cos(n\omega x_i) \qquad b_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sin(n\omega x_i)}$$

Beachte: In die Berechnung jedes Fourierkoeffizienten fließen alle Originaldaten ein. D.h. jeder FK hat Informationen über alle Originaldaten.

JPEG und MP3

[Teschl 2 Abs. 22]

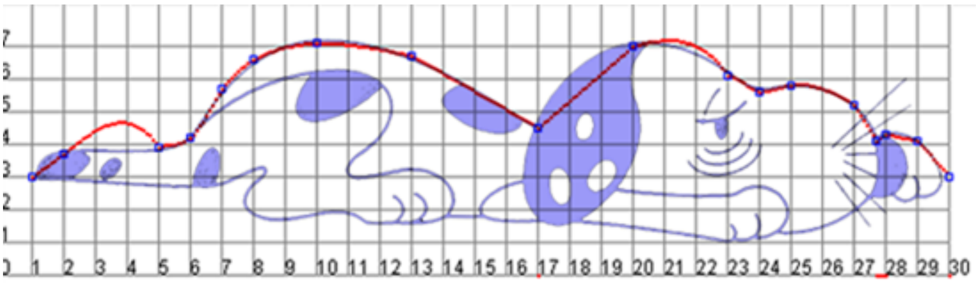
Diese Ideen kommen auch in der Bildkompression zur Anwendung. Beim JPEG-Verfahren wird das Bild in Quadrate von 8×8 Bildpunkten aufgeteilt. Für die Bildpunkte werden dann die Werte der Luminanz Y (Helligkeit) und der Chrominanzen C_b, C_r (Farbwerte) betrachtet. Da das menschliche Auge Fehler bei der Helligkeit stärker wahrnimmt als Fehler bei der Farbe, genügt es, nur einen Teil der Chrominanzwerte zu verwenden, wodurch bereits eine Kompression erzielt wird. Diese Daten werden dann durch ein trigonometrisches Polynom dargestellt. Es handelt sich dabei genau um die sog. **diskrete Kosinustransformation**. Da es nur endlich viele Punkte sind, ist es möglich, ein trigonometrisches Polynom zu finden, das an diesen Punkten exakt mit den gegebenen Werten übereinstimmt. Die Anzahl der Koeffizienten bei exakter Darstellung ist allerdings gleich der Anzahl der Punkte und es würde in diesem Fall keine Kompression erreicht. Durch die Anzahl der Koeffizienten, die man abspeichert, kann man das Verhältnis zwischen Kompressionsrate und Qualitätsverlust wählen.

Ähnlich geht man bei der Audiokompression vor. Gleich wie bei der Zerlegung einer Funktion in eine Fourierreihe, zerlegt unser Ohr ein akustisches Signal in einzelne Frequenzen $f = \omega/2\pi$, wobei nur ein bestimmter Frequenzbereich wahrgenommen werden kann (typischerweise 20 Hz bis 18 kHz, also Schwingungen von minimal 20 Perioden pro Sekunde bis maximal 18 000 Perioden pro Sekunde). Untersuchungen der Psychoakustik zeigen weiter, dass bei zwei Frequenzen, von denen eine wesentlich lauter ist als die andere, die leisere nicht wahrgenommen wird. Es bietet sich also an, Frequenzbereiche, die nicht wahrgenommen werden, auch nicht abzuspeichern. Beim MP3-Verfahren wird der hörbare Frequenzbereich in an das menschliche Gehör angepasste Teilbereiche zerteilt und gemäß dem psychoakustischen Modell auf verzichtbare Frequenzen untersucht. Die Frequenzen, die gespeichert werden müssen, werden dann ähnlich wie bei JPEG mit einer modifizierten diskreten Kosinustransformation weiterverarbeitet.

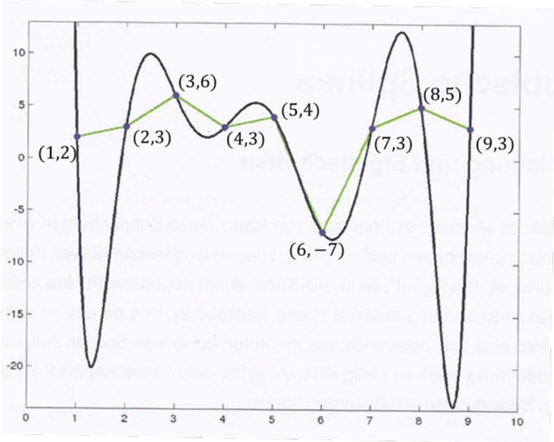
Wavelets

Den Kern der Fourierreihen bilden trigonometrische Funktionen, die sich am Computer nur indirekt (z. B.) über Näherungspolynome berechnen lassen. Man kann auch andere Funktionen verwenden, in der Praxis oft so genannte Wavelets, die sich am Computer einfacher berechnen lassen und zusätzlich dem Problem angepasst werden können.

Splines – „Glatte Übergänge“ in graphischen Darstellungen erzeugen



Ziel: Punkte in einem Koordinatensystem miteinander möglichst „glatt“ zu verbinden ohne unerwünschte Ecken zu erhalten.



Können wir Polynome verwenden?

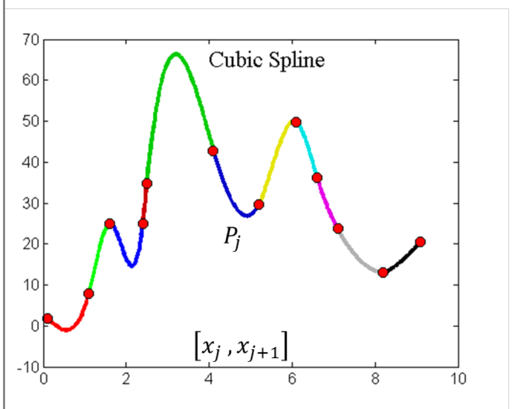
Versucht man, z.B. durch 9 Punkte **ein einziges** Polynom durchzuführen (Interpolation), so erhält man unerwünschte Oszillationseffekte.

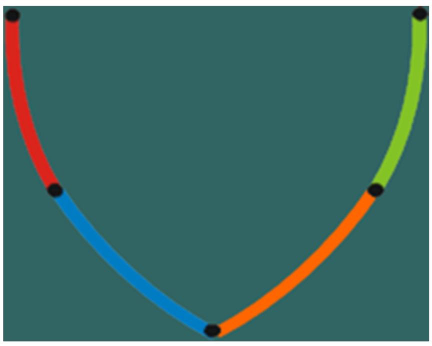
Verbindet man stattdessen stückweise mit Geraden, so erhält man unerwünschte Ecken.

Deshalb anstelle Geraden Polynome höheren Grades aneinander stückeln.

Glatte Übergänge erfordern gleiche Steigung in den Verbindungstellen und gleich Krümmungsrichtung bzw. Krümmungswerte.

Idee: Mehrere Polynome (niederen Grades) „glatt“ aneinander stückeln.





Herkunft aus dem Schiffsbau

(lange dünne Latte = Straklatte = EN: spline)

Kubische Splines: Polynome 3. Grades für jeden Abschnitt $[x_j, x_{j+1}]$.

mit der Nebenbedingung, dass je 2 Nachbarpolynome in den Übergangspunkten nicht nur zusammenstoßen (gleiche Funktionswerte), sondern auch gleiche Steigung und gleicher Krümmungswert (1. Ableitung und 2. Ableitung gleich).

Ansatz: $P_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j$ auf $[x_j\,,\,x_{j+1}]$ und y_j = vorgeg. Funktionswert an der Stelle x_j $(*)$

Gleiche Funktionswerte: $P_j(x_j) = y_j$ und $P_j(x_{j+1}) = y_{j+1}$

Gleiche Steigung: $P_j'(x_{j+1}) = P_{j+1}'(x_{j+1})$

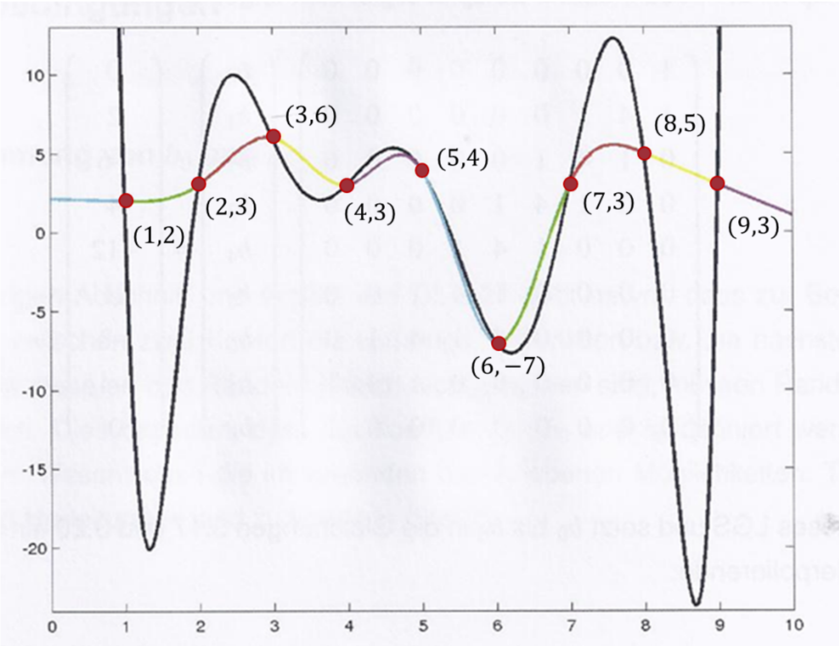
Gleiche Krümmung: $P_j''(x_{j+1}) = P_{j+1}''(x_{j+1})$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich ein LGS für b_j. Aus b_j kann man die a_j und c_j berechnen. Zudem $d_j = y_j$.

Aus den vielen Polynomen 3. Grades wird eine stückweise definierte stetige (und sogar glatte) Gesamtfunktion. Man nennt diesen Ansatz kubische Splines. Sie werden auch in CAD-Systemen benutzt.

$$K(x) = \begin{cases} -0.1371(x) + 2.137 & \text{für } x \in [-\infty, \\ 1.1371(x-1)^3 - 0.1371(x-1) + 2 & \text{für } x \in [1,2) \\ -3.6853(x-2)^3 + 3.4112(x-2)^2 + 3.2741(x-2) + 3 & \text{für } x \in [2,3) \\ 5.6041(x-3)^3 - 7.6447(x-3)^2 - 0.9594(x-3) + 6 & \text{für } x \in [3,4) \\ -8.7311(x-4)^3 + 9.1676(x-4)^2 + 0.5635(x-4) + 3 & \text{für } x \in [4,5) \\ 13.3204(x-5)^3 - 17.0258(x-5)^2 - 7.2946(x-5) + 4 & \text{für } x \in [5,6) \\ -11.5505(x-6)^3 + 22.9355(x-6)^2 - 1.3849(x-6) - 7 & \text{für } x \in [6,7) \\ 3.8817(x-7)^3 - 11.7161(x-7)^2 + 9.8344(x-7) + 3 & \text{für } x \in [7,8) \\ 0.0237(x-8)^3 - 0.0710(x-8)^2 - 1.9527(x-8) + 5 & \text{für } x \in [8,9) \\ -1.9527(x-9) + 3 & \text{für } x \in [9,\infty) \end{cases}$$

Die Gesamtfunktion geht durch die vorgegebenen Punkte mit „glatten“ Übergängen und ohne die Oszillationseffekte, die ein einzelnes Interpolationspolynom bewirkt.



2 Übungen: Splines

Legen Sie durch die Punkte (1,2) und (2,3) und (3,6) zwei **kubische Splines** so, dass für die Gesamtfunktion $f(x)$ an der Nahtstelle $x_2 = 2$ die typischen Spline-Bedingungen für einen glatten Übergang gewahrt sind und an den äußeren Randpunkten Vorgaben für Steigung $f'(1) = -1$ und $f'(3) = 1$ eingehalten werden. Ansatz:

$$P_1(x) = a_1(x-1)^3 + b_1(x-1)^2 + c_1(x-1) + d_1 \text{ auf } [1,2]$$

$$P_2(x) = a_2(x-2)^3 + b_2(x-2)^2 + c_2(x-2) + d_2 \text{ auf } [2,3]$$