Die Umkehrung dieses Satzes gilt übrigens auch: Ist die Taylorreihe der Ableitung gefunden,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

so ist die Taylorreihe von f gegeben durch

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

Beispiel 20.10 Gliedweises Differenzieren einer Taylorreihe
Bestimmen Sie die Reihendarstellung von $(\mathrm{e}^x)'$, indem Sie die Reihe für e^x gliedweise differenzieren. Zeigen Sie dadurch, dass $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Lösung zu 20.10 Es ist nach Satz 20.7

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Wenn wir beide Seiten differenzieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^x)' &= 1 + \frac{2x}{2 \cdot 1} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \end{aligned}$$

also wieder die Reihe für e^x! ■

Man kann in einer Taylorreihe auch *komplexe* Werte für x zulassen und dadurch Funktionen wie e^x auch für komplexe Argumente definieren (für e^x ist das konsistent mit Definition 18.39). Die Werte von x, für welche die Taylorreihe dann konvergiert, liegen in der komplexen Ebene innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt x_0 und Radius r. Daher kommt auch der Name „Konvergenzradius". Wenn man nur reelle Argumente x zulässt, dann reduziert sich dieser Kreis auf ein Intervall auf der reellen Achse.

ab hier lesen

20.2 Monotonie, Krümmung und Extremwerte

In diesem Abschnitt wollen wir uns ansehen, wie Steigungsverhalten, Krümmungsverhalten und Extremwerte einer Funktion mithilfe von Ableitungen untersucht werden können.

Das Vorzeichen der ersten Ableitung sagt uns, wo eine Funktion monoton wachsend und wo sie fallend ist:

Satz 20.11 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $I \subseteq D$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend auf } I, \\ f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist monoton fallend auf } I. \end{aligned}$$

Bei streng monotonen Funktionen kann leider nicht einfach $\geq$, $\leq$ durch $>$, $<$ ersetzt werden. Die Ableitung einer streng monotonen Funktion kann nämlich durchaus an *einzelnen* Punkten verschwinden. Sie kann aber nie auf einem ganzen (auch noch so kleinen) Teilintervall von I verschwinden.

Satz 20.12 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $I \subseteq D$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in I \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend auf } I, \\ f'(x) < 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in I \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend auf } I. \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass eine monotone Funktion sogar streng monoton ist, müssen wir also sicherstellen, dass die Ableitung nur an *einzelnen* Punkten verschwindet (aber nicht auf einem ganzen Intervall).

Beispiel 20.13 Monotonie mithilfe der 1. Ableitung
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten:
a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{9}{4}$

Lösung zu 20.13

a) Die erste Ableitung ist $f'(x) = 3x^2$. Sie ist also ≥ 0 für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend. Da die Ableitung nur an der einzelnen Stelle $x = 0$ verschwindet, ist die Funktion sogar streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Die erste Ableitung ist $f'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Nullstellen dieser quadratischen Funktion sind bei $x = -2$ und $x = 1$. Daher ist $f'(x) \leq 0$ für $-2 \leq x \leq 1$, somit ist $f(x)$ auf diesem Intervall monoton fallend. Für $x < -2$ bzw. $x > 1$ ist $f'(x) \geq 0$, somit ist die Funktion auf diesen Intervallen monoton wachsend. Da die Ableitung nur an den einzelnen Stellen $x = -2$ und $x = 1$ verschwindet, ist die Funktion in den angegebenen Teilintervallen sogar *streng* monoton wachsend/fallend. ■

Als Nächstes interessieren wir uns für das Krümmungsverhalten einer Funktion:

Definition 20.14 Eine Funktion f heißt

- **konkav** auf einem Intervall I, wenn die Sekante durch zwei beliebige Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ im Bereich zwischen diesen Punkten auf oder unterhalb des Funktionsgraphen von f liegt:

$$f((1-t)x_0 + t\,x_1) \geq (1-t)f(x_0) + t\,f(x_1) \quad \text{für} \quad t \in (0,1),\ x_0 < x_1.$$

- **konvex** auf einem Intervall I, wenn die Sekante durch zwei beliebige Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ im Bereich zwischen diesen Punkten auf oder oberhalb des Funktionsgraphen von f liegt:

$$f((1-t)x_0 + t\,x_1) \leq (1-t)f(x_0) + t\,f(x_1) \quad \text{für} \quad t \in (0,1),\ x_0 < x_1.$$

Wie kommt man auf diese Bedingung? Wenn t die Werte zwischen 0 und 1 durchläuft, dann durchläuft $(1-t)x_0 + t\,x_1$ die Werte zwischen x_0 und x_1. Die Gleichung der Sekante lautet $s(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$. Ist f konkav, muss somit $f((1-t)x_0 + t\,x_1) \geq s((1-t)x_0 + t\,x_1) = (1-t)f(x_0) + t\,f(x_1)$ gelten. Analoges gilt für konvexes f.

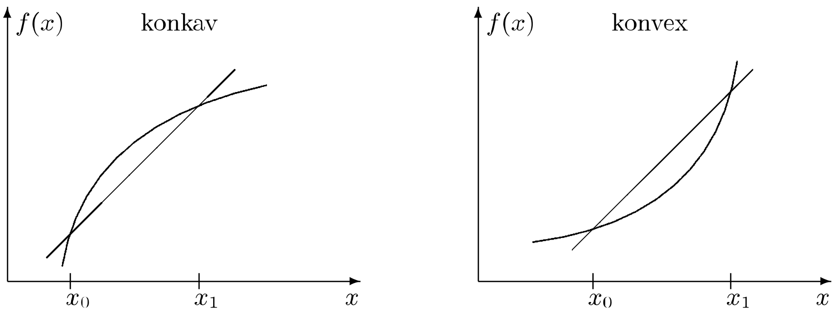

Abbildung 20.2. Konkav und konvex

Anschaulich: „Konkav“ bedeutet, dass der Graph in Richtung wachsender x-Werte eine Rechtskurve macht. Analog bedeutet „konvex“ eine Linkskurve, wenn die x-Werte wachsen.

Über das Krümmungsverhalten gibt uns die zweite Ableitung Auskunft:

Satz 20.15 Ist $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf einem Intervall $I \subseteq D$, so gilt:

$$f \text{ ist konkav auf } I \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I,$$
$$f \text{ ist konvex auf } I \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I.$$

Anders gesagt: f ist konvex/konkav, wenn die erste Ableitung monoton wachsend/fallend ist.

Beispiel 20.16 Krümmung mithilfe der 2. Ableitung
Auf welchen Intervallen sind die Funktionen konkav, wo konvex?
a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ b) $f(x) = \ln(x)$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = x^3$

Lösung zu 20.16

a) Aus $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass die Exponentialfunktion konvex auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
b) Wegen $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ ist der Logarithmus konkav auf seinem gesamten Definitionsbereich.
c) Da $f''(x) = 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist die Parabel konvex auf ganz $\mathbb{R}$.
d) Aus $f''(x) = 6x$ folgt, dass die kubische Funktion konkav für $x \leq 0$ und konvex für $x \geq 0$ ist. ∎

In vielen Anwendungsfällen ist es wichtig, den größten (oder kleinsten) Funktionswert einer Funktion zu bestimmen (man spricht auch von **Optimierung**).

Definition 20.17 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat an einer Stelle x_0

- ein **lokales (oder relatives) Maximum**, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gibt (für irgendein $\varepsilon > 0$), sodass
$$f(x) \le f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$$
gilt. Es handelt sich um das **globale Maximum**, wenn
$$f(x) \le f(x_0) \text{ für alle } x \in D$$
gilt.
- ein **lokales (oder relatives) Minimum**, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gibt (für irgendein $\varepsilon > 0$), sodass
$$f(x) \ge f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$$
gilt. Es handelt sich um das **globale Minimum**, wenn
$$f(x) \ge f(x_0) \text{ für alle } x \in D$$
gilt.

Maxima und Minima werden oft mit dem Überbegriff **Extremum** oder **Extremwert** bezeichnet.

Das globale Maximum (Minimum) ist also der höchste (bzw. tiefste) Punkt im ganzen Definitionsbereich von f. Beispielsweise hat die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in Abbildung 20.3 bei a ein globales Minimum, bei x_0 ein lokales Maximum, bei x_1 ein lokales Minimum, bei x_2 ein globales Maximum und bei b ein lokales Minimum.

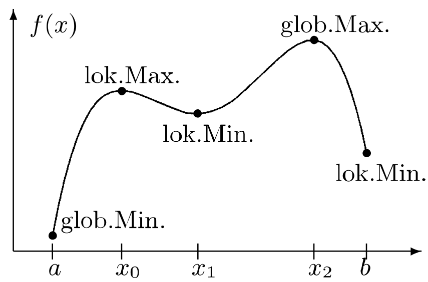

Abbildung 20.3. Extrema

Ein globales Maximum (Minimum) kann an mehreren Stellen vorliegen. Für $\cos(x)$ ist jedes gerade Vielfache von π ein globales Maximum und jedes ungerade Vielfache ein globales Minimum.

Überlegen wir uns, wie wir Extrema aufspüren können und sehen uns dazu die Abbildung 20.3 an. Die abgebildete Funktion hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum. Die Tangente an die Kurve hat für Stellen links von x_0 eine positive Steigung und rechts davon eine negative Steigung. An der Stelle x_0 selbst verschwindet die Ableitung: $f'(x_0) = 0$. Wenn wir also die Stelle mit waagrechter Tangente gefunden haben, haben wir Kandidaten für Extremstellen.

Eine Stelle, wo die erste Ableitung verschwindet, ist erst ein *Kandidat* für eine Extremstelle, denn es gibt auch *Wendepunkte* mit waagrechter Tangente zum Beispiel bei der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$. In diesem Fall wechselt die Ableitung das Vorzeichen nicht (die Funktion wechselt nicht von fallend auf steigend bzw. umgekehrt). Mehr dazu etwas weiter unten.

Ob es sich tatsächlich um ein Extremum handelt, und wenn ja, um welches, sagen uns die höheren Ableitungen der Funktion:

Satz 20.18 (**Kriterium für lokale Extrema**) Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion in einem offenen Intervall (a, b). Dann gilt für $x_0 \in (a, b)$:

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

Ist $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, so müssen die nächsthöheren Ableitungen untersucht werden (siehe Satz 20.22).

Warum kommt es auf die höheren Ableitungen an? Das können wir uns folgendermaßen vorstellen: Angenommen $f'(x_0) = 0$. Nähern wir die Funktion f in einer Umgebung von x_0 durch ein Taylorpolynom zweiten Grades an,

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

also durch eine Parabel mit Scheitel an der Stelle x_0. Falls nun $f''(x_0) > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet (Minimum bei x_0). Falls $f''(x_0) < 0$, so ist sie nach unten geöffnet (Maximum bei x_0). Ist $f''(x_0) = 0$, so muss ein Taylorpolynom höheren Grades betrachtet werden.

Etwas präziser argumentiert folgt aus Satz 20.4 (falls $f'''(x)$ stetig ist)

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2(1 + r(x))$$

mit $|r(x)| = |\frac{2R_2(x)}{f''(x_0)(x-x_0)^2}| \le \frac{C}{3f''(x_0)}|x - x_0|$. Also gilt $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$ und für x nahe genug bei x_0 ist $1 + r(x) > 0$. Somit ist in der Nähe von x_0 das Vorzeichen der rechten Seite gleich dem Vorzeichen von $f''(x_0)$.

Manchmal sind auch *Wendepunkte* einer Funktion f interessant.

Definition 20.19 Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**, wenn in $(x_0, f(x_0))$ die Krümmung von konkav in konvex übergeht oder umgekehrt.

Das heißt anschaulich, dass der Funktionsgraph von f hier von einer „Rechtskurve“ in eine „Linkskurve“ übergeht bzw. umgekehrt. Das sind also jene Punkte, an denen die zweite Ableitung $f''(x)$ ihr Vorzeichen ändert. Wie finden wir diese Punkte?

Beim Übergang von konkav zu konvex wird die erste Ableitung links vom Wendepunkt immer kleiner, rechts davon immer größer. An der Stelle des Wendepunkts hat also $f'(x)$ ein Minimum. Analog hat beim Übergang von konvex zu konkav die erste Ableitung an der Stelle des Wendepunkts ein Maximum. Um die Wendepunkte zu finden, müssen wir daher die Extrema der ersten Ableitung finden! Wir wenden also das Kriterium für Extrema aus Satz 20.18 auf $f'(x)$ an und erhalten:

Satz 20.20 (**Kriterium für Wendepunkte**) Sei f dreimal differenzierbar in einem offenen Intervall (a,b). Dann gilt für $x_0 \in (a,b)$:

- Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.
- Wenn zusätzlich auch $f'(x_0) = 0$ ist (d.h., waagrechte Tangente), so wird der Wendepunkt ein **Sattelpunkt** genannt.

bis hier, Rest optional

Beispiel 20.21 Lokale Extrema, Wendepunkte
Finden Sie Extremstellen bzw. Wendepunkte:
a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ b) $f(x) = (x-1)^2$ c) $f(x) = (x-2)^3 + 5$

Lösung zu 20.21

a) Wir leiten die Funktion dreimal ab: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $f'''(x) = 6$.
Extremwerte: Wir bestimmen zunächst die Nullstellen der ersten Ableitung: $x = 1$ und $x = 3$. Dann betrachten wir noch die zweite Ableitung an diesen Stellen: $f''(1) = -6 < 0$, also liegt bei $x = 1$ ein Maximum vor; $f''(3) = 6 > 0$, also liegt bei $x = 3$ ein Minimum vor. (Wäre die zweite Ableitung an einer dieser Stellen gleich null gewesen, so hätte es sich um einen Wendepunkt handeln können.)
Wendepunkte: Wir bestimmen dazu die Nullstellen der zweiten Ableitung: $f''(x) = 6x - 12$ hat eine Nullstelle $x = 2$. Nun untersuchen wir die dritte Ableitung an dieser Stelle: Da $f'''(2) = 6 \neq 0$, liegt hier ein Wendepunkt vor.

b) Ableitungen: $f'(x) = 2(x-1)$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$.
Extremwerte: $f'(x) = 2(x-1)$ besitzt nur die Nullstelle $x = 1$, daher ist das der einzige Kandidat für eine Extremstelle. Nähere Auskunft gibt die zweite Ableitung an dieser Stelle: Da $f''(1) = 2 > 0$, liegt bei $x = 1$ ein Minimum vor.
Wendepunkte: Weil $f''(x) = 2$ keine Nullstellen hat, hat die Funktion keine Wendepunkte.

c) Ableitungen: $f'(x) = 3(x-2)^2$, $f''(x) = 6(x-2)$, $f'''(x) = 6$.
Extremwerte: $f'(x) = 3(x-2)^2$ hat die Nullstelle $x = 2$. Die zweite Ableitung an dieser Stelle ist $f''(2) = 0$. Also ist $x = 2$ auch eine Nullstelle der zweiten Ableitung und somit ein Kandidat für einen Wendepunkt.
Wendepunkte: $x = 2$ ist die einzige Nullstelle der zweiten Ableitung. Da die dritte Ableitung an dieser Stelle ungleich null ist, $f'''(2) = 6 \neq 0$, hat die Funktion bei $x = 2$ einen Wendepunkt (Sattelpunkt). Abbildung 20.4 zeigt den Funktionsgraphen. ■

Zusammenfassend und etwas allgemeiner gilt folgendes Kriterium für Extrema:

Satz 20.22 Sei f mindestens n-mal differenzierbar in einem offenen Intervall (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0)$ die erste Ableitung, die an der Stelle x_0 nicht verschwindet. Dann gilt:

a) Ist n gerade, so besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$.
b) Ist n ungerade, so besitzt f an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt.

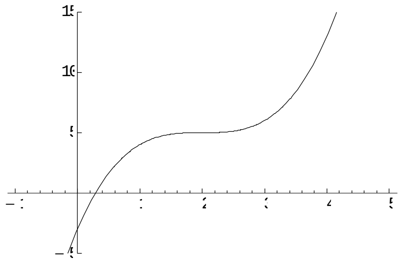

Abbildung 20.4. $f(x) = (x-2)^3 + 5$

Warum? Analog wie zuvor folgt aus Satz 20.4 (falls $f^{(n+1)}(x)$ stetig ist)

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + r(x))$$

mit $|r(x)| \le \frac{C}{(n+1)f^{(n)}(x_0)}|x - x_0|$.

Beispiel 20.23 Extrema und Sattelpunkte
Bestimmen Sie die Extrema von $f(x) = (x-3)^5$.

Lösung zu 20.23 Die erste Ableitung hat die Nullstelle $x = 3$. Die zweite, dritte und vierte Ableitung an dieser Stelle verschwindet ebenfalls: $f''(3) = f'''(3) = f^{(4)}(3) = 0$. Erst $f^{(5)}(3) \neq 0$. Da 5 eine ungerade Zahl ist, liegt bei $x = 3$ ein Sattelpunkt vor. ■

Maxima oder Minima am *Rand* eines Intervalls können wir mithilfe der Differentialrechnung nicht finden. Betrachten Sie z. B. die Funktion $f(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$. Sie hat bei $x = 0$ den kleinsten Funktionswert und bei $x = 1$ den größten Funktionswert ihres Definitionsbereiches. Da die Tangente hier aber nicht waagrecht ist, kommen wir diesen Extremstellen nicht durch Nullsetzen der ersten Ableitung auf die Spur. Das gleiche gilt für Punkte, an denen f nicht differenzierbar ist. Diese Punkte müssen also gesondert untersucht werden:

Daher haben wir bisher immer offene Intervalle vorausgesetzt. Nun gehen wir auf den Fall ein, dass Extrema auf einem abgeschlossenen Intervall gesucht sind.

Beispiel 20.24 Extrema auf einem abgeschlossenen Intervall
Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum von

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{falls } -1 \le x < 0, \\ 1 - x + x^2 & \text{falls } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Lösung zu 20.24 Die Funktion ist bei 0 zwar stetig, aber linksseitige Ableitung $\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0}(1 + x)' = \lim_{x\to 0} 1 = 1$ und rechtsseitige Ableitung $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0}(1 - x + x^2)' = \lim_{x\to 0}(-1 + 2x) = -1$ stimmen nicht überein. Also ist $f(x)$ bei 0 nicht differenzierbar. Wir müssen also beide Teilintervalle getrennt betrachten:

Auf dem Intervall $(-1, 0)$ hat die erste Ableitung keine Nullstellen, $f'(x) = 1 \neq 0$, also gibt es keine lokalen Extrema in diesem offenen Intervall. Maximum und

Minimum werden somit am Rand angenommen. Am linken Rand ($x = -1$) ist der Funktionswert gleich $f(-1) = 0$, am rechten Rand ($x = 0$) ist $f(0) = 1$. Daher ist der kleinste Funktionswert des Intervalls $[-1, 0]$ am linken Rand und der größte Funktionswert am rechten Rand.

In $(0, 1)$ hat die erste Ableitung $f'(x) = -1 + 2x$ eine Nullstelle bei $x = \frac{1}{2}$. Die zweite Ableitung an dieser Stelle ist $f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0$, daher liegt hier ein lokales Minimum vor. Der Funktionswert hier ist $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Nun müssen wir noch die Randpunkte untersuchen: Da die Randwerte gleich $f(0) = 1$ bzw. $f(1) = 1$ sind, liegt an beiden Rändern ein globales Maximum des Intervalls $[0, 1]$ vor. Insgesamt

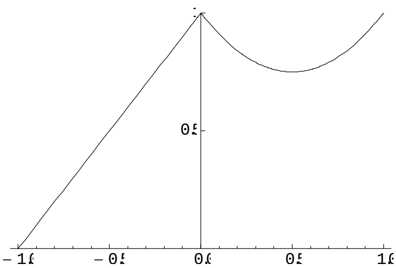

Abbildung 20.5. $f(x) = 1 + x$ für $x < 0$ und $f(x) = 1 - x + x^2$ für $x \geq 0$

liegt somit das globale Maximum auf dem gesamten Definitionsbereich von f bei $x = 0$ bzw. $x = 1$ und das globale Minimum bei $x = -1$ vor. Siehe Abbildung 20.5. ■

Am Rand liegt außer in pathologischen Fällen immer ein lokales Extremum vor (ein pathologisches Beispiel wäre $f(x) = x \sin(1/x)$ auf $[0, 1]$). Ist $f^{(n)}(a)$ die erste Ableitung am linken Rand, die nicht verschwindet, so handelt es sich um ein Maximum, falls $f^{(n)}(a) < 0$ und um ein Minimum, falls $f^{(n)}(a) > 0$. Ist analog $f^{(n)}(b)$ die erste Ableitung am rechten Rand, die nicht verschwindet, so handelt es sich um ein Maximum, falls $(-1)^n f^{(n)}(b) < 0$ und um ein Minimum, falls $(-1)^n f^{(n)}(b) > 0$.

Zur Bestimmung von globalen Extrema (vor allem von Funktionen mehrerer Variablen) wird die **globale Optimierung** verwendet. Globale Optimierung ist meist um ein Vielfaches schwieriger als lokale Optimierung.

Sehen wir uns abschließend noch ein aufwändigeres Beispiel zur Berechnung von Extremstellen an:

Beispiel 20.25 (→CAS) Gauß'sche Glockenkurve
Bestimmen Sie die Extrema und Wendepunkte der Gauß'schen Glockenkurve

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma > 0,$$

die in der Statistik die Normalverteilung beschreibt. Die Parameter μ (griechischer Buchstabe „mü“) und σ^2 (griechischer Buchstabe „sigma“) heißen dann **Erwartungswert** bzw. **Varianz**. Der Fall $\mu = 0$, $\sigma = 1$ ist in Abbildung 20.6 dargestellt.