6

Folgen und Reihen

6.1 Folgen

Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass wir durch gezieltes Probieren die Zahl $\sqrt{2}$ beliebig genau durch rationale Zahlen annähern können. Ein effizientes Verfahren hat der griechische Mathematiker Heron im 1. Jh. n. Chr. angegeben: Man beginnt mit einem Näherungswert a_1, etwa $a_1 = 2$, und wählt einen zweiten Wert $b_1 = \frac{2}{a_1} = 1$, sodass das Rechteck mit den Seiten a_1 und b_1 die Fläche $a_1 b_1 = 2$ hat. Hätten wir den richtigen Wert (nämlich $\sqrt{2}$) gewählt, so hätten wir ein Quadrat erhalten. So ist aber die eine Seite zu lang und die andere zu kurz. Einen besseren Näherungswert erhalten wir, indem wir den Mittelwert $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) = 1.5$ wählen. Der nächste Näherungswert wird in gleicher Weise aus dem zweiten Näherungswert berechnet: $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{2}{a_2}) = 1.416666\ldots$ In diesem Sinn geht es weiter:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{2}(a_3 + \frac{2}{a_3}) = 1.414215\ldots \\ a_5 &= \frac{1}{2}(a_4 + \frac{2}{a_4}) = 1.414213\ldots \end{aligned}$$

Man erhält eine *Folge* $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ von Näherungswerten. Es kann gezeigt werden, dass dadurch $\sqrt{2}$ in jeder gewünschten Genauigkeit angenähert werden kann.

Definition 6.1 Eine (reelle) **Folge** ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, auch geschrieben als

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Die reellen Zahlen a_n nennt man die **Glieder** der Folge und n heißt **Index** der Folge.

Bei einer Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ werden also die Funktionswerte der Reihe nach aufgelistet, wobei die unabhängige Variable (der Index) die Rolle der Platznummer hat: $a_1, a_2, \ldots$

Für den Folgenindex kann jeder beliebige Buchstabe verwendet werden (gerne nimmt man i, j, k, m oder n). Der Folgenindex muss auch nicht bei 1 beginnen, sondern beginnt oft auch bei 0. Allgemein könnte er bei jeder beliebigen ganzen Zahl beginnen. (Dann handelt es sich eben dementsprechend um eine Funktion $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bzw. $D \subseteq \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.) Auch könnte man als Glieder der Folge komplexe Zahlen zulassen,

G. Teschl, S. Teschl, *Mathematik für Informatiker,* eXamen.press,
DOI 10.1007/978-3-642-37972-7_6,

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; dann spricht man von einer komplexen Folge.

Eine Vorschrift zur Berechnung des n-ten Folgengliedes a_n wird **Bildungsgesetz der Folge** genannt.

Beispiel 6.2 Folge

a) Geben Sie die ersten fünf Glieder der Folge $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ an.
b) Geben Sie die ersten fünf Glieder der Folge $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, an.
c) Durch welches Bildungsgesetz wird die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ beschrieben?
d) Durch welches Bildungsgesetz erhält man die Folge: $-2, 2, -2, 2, -2, \ldots$?

Lösung zu 6.2

a) Wir erhalten die Folgenglieder, indem wir nacheinander im Bildungsgesetz $a_n = n^2$ für den Index n die natürlichen Zahlen einsetzen: $a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, a_3 = 3^2, a_4 = 4^2, a_5 = 5^2 \ldots$ Damit lautet die Folge: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
b) $a_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1}$, $a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2}$, $a_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3}$, $\ldots$ Der Faktor $(-1)^n$ ist positiv für gerades n und negativ für ungerades n. Man erhält daher abwechselnd ein positives und negatives Vorzeichen für die Folgenglieder: -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, $\ldots$
c) Man kann das Bildungsgesetz ablesen, wenn wir die Folge als $\frac{1}{2^0}$, $\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, $\ldots$ schreiben. Das n-te Folgenglied kann also durch $a_n = \frac{1}{2^n}$ beschrieben werden, wobei der Index n hier bei 0 beginnt.
d) Wir haben gerade gesehen, dass man das wechselnde Vorzeichen mit dem Faktor $(-1)^k$ bekommen kann. Schreiben wir also die Folge in der Form $(-1)^1 \cdot 2$, $(-1)^2 \cdot 2$, $(-1)^3 \cdot 2$, $(-1)^4 \cdot 2, \ldots$, dann kann man leicht das Bildungsgesetz ablesen: $a_k = 2 \cdot (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Für den Folgenindex haben wir hier zur Abwechslung den Buchstaben k verwendet. ∎

Wenn die Folgenglieder abwechselnde Vorzeichen haben, dann spricht man von einer **alternierenden Folge**.

Achtung: Wenn wir $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ schreiben, so meinen wir damit die wohl für jeden nahe liegendste Folge $a_n = \frac{1}{2^n}$. Es gibt aber noch andere Folgen, die dieselben ersten fünf Glieder haben, z. B. die Folge $a_n = 1 - \frac{131n}{192} + \frac{83n^2}{384} - \frac{7n^3}{192} + \frac{n^4}{384}$. Sie stimmt aber nur in den ersten fünf Gliedern mit $a_n = \frac{1}{2^n}$ überein, dann geht es unterschiedlich weiter. Trotzdem ist es oft wichtig, aus ein paar Folgengliedern das Bildungsgesetz zu erraten (wenn ein einfaches Bildungsgesetz nicht bekannt ist). Es muss dann aber überprüft werden, ob das erratene Bildungsgesetz wirklich für alle Folgenglieder gilt!

Beim Erraten ist die „On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ `https://oeis.org/` sehr praktisch: Sie geben die ersten Folgenglieder ein und erhalten als Ergebnis, was über die Folge bekannt ist. Wie der Name schon sagt, ist das zwar nur für ganzzahlige Folgen gedacht, aber bei rationalen Folgen gibt man einfach die Folge der Nenner (oder Zähler) ein. Probieren Sie es aus!

Eine andere Möglichkeit, um die Glieder einer Folge zu beschreiben, ist ein so genanntes **rekursives Bildungsgesetz**. Dabei wird ein Glied der Folge immer mithilfe von vorhergehenden Gliedern berechnet.

Beispiel 6.3 (→CAS) Rekursiv definierte Folge

a) Wie lauten die ersten fünf Glieder der Folge, die durch $a_1 = 1$, $a_n = n \cdot a_{n-1}$, $n \geq 2$ beschrieben wird?
b) Geben Sie das Bildungsgesetz für die Heron'sche Folge zur Näherung von $\sqrt{2}$ an (siehe Anfang dieses Abschnitts).

Lösung zu 6.3

a) Das erste Folgenglied ist vorgegeben: $a_1 = 1$; das zweite Folgenglied berechnen wir mithilfe des ersten: $a_2 = 2a_{2-1} = 2a_1 = 2$; das dritte Folgenglied berechnet sich mithilfe des zweiten: $a_3 = 3a_2$, usw. Damit sind die ersten Glieder der Folge: $1, 2, 6, 24, 120 \ldots$

b) Das erste Folgenglied ist vorgegeben (bzw. wir haben diesen Startwert gewählt): $a_1 = 2$. Das Bildungsgesetz für das n-te Folgenglied enthält das vorhergehende Folgenglied: $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) = 1.5$, $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{2}{a_2}) = 1.41667$, usw. Also ist $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ für $n \geq 2$. ■

Die Folge in Beispiel 6.3 a) hätte übrigens auch nicht-rekursiv angegeben werden können, nämlich in der Form $a_n = 1 \cdot 2 \cdots n = n!$ ($n \in \mathbb{N}$). Mehr über rekursiv definierte Folgen werden wir in Kapitel 8 hören.

Im Einklang mit den entsprechenden Eigenschaften für Funktionen definieren wir (streng) monotone bzw. beschränkte Folgen:

Definition 6.4 (Monotone/beschränkte Folge)

a) Eine Folge a_n heißt **monoton wachsend**, wenn

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{für alle } n.$$

D.h., jedes Folgenglied ist größer oder gleich als das vorhergehende. Analog heißt eine Folge **monoton fallend**, wenn

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{für alle } n.$$

Gilt $<$ bzw. $>$ anstelle von $\leq$ und $\geq$, so nennt man die Folge **streng monoton wachsend** bzw. **fallend**.

b) Eine Folge heißt **nach oben beschränkt**, wenn es ein reelles K gibt, sodass

$$a_n \leq K \quad \text{für alle } n.$$

D.h., alle Folgenglieder sind kleiner oder gleich als eine Schranke K. Analog heißt eine Folge **nach unten beschränkt**, wenn es ein k gibt, sodass

$$k \leq a_n \quad \text{für alle } n.$$

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, wenn es also $k, K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$k \leq a_n \leq K \quad \text{für alle } n,$$

oder, äquivalent, $|a_n| \leq C$ mit einem $C \in \mathbb{R}$.

Nun wollen wir uns eine besondere Eigenschaft der Heron'schen Folge genauer ansehen. Wir haben sie ja gerade deswegen betrachtet, weil der Abstand $|a_n - \sqrt{2}|$ zwischen den Folgengliedern und der Zahl $\sqrt{2}$ immer kleiner wird. Wie Abbildung 6.1 zeigt, ist ab dem dritten Folgenglied praktisch kein Unterschied zu $\sqrt{2}$ mehr zu

Abbildung 6.1. Die Glieder der Heron'schen Folge kommen $\sqrt{2}$ beliebig nahe.

erkennen. Die Folgenglieder nähern sich also immer mehr der Zahl $\sqrt{2}$, je größer der Folgenindex n wird. Diese „Annäherung für wachsende n an eine Zahl" ist ein zentraler Begriff in der Mathematik, der durch folgende Definition präzisiert wird:

Definition 6.5 Eine Folge a_n heißt **konvergent** gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn es für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ einen Folgenindex n_0 gibt, sodass alle Folgenglieder mit $n \geq n_0$ in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen. Der Index n_0 muss dabei in der Regel umso größer gewählt werden, je kleiner ε ist. Wir schreiben dafür

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und sagen: „Die Folge a_n **konvergiert gegen** a" oder auch „Die Folge a_n **hat den Grenzwert** a".

Der griechische Buchstabe ε (epsilon) wird in der Mathematik immer verwendet, wenn man es mit einer *kleinen* positiven Zahl zu tun hat. Der kürzeste Mathematikerwitz ist: „Sei Epsilon eine große Zahl".

Anders gesagt: Eine Folge a_n ist konvergent mit Grenzwert a, wenn es zu einem beliebig klein vorgegebenen Abstand $\varepsilon > 0$ einen Folgenindex n_0 gibt, sodass für alle nachfolgenden Glieder der Abstand $|a - a_n|$ kleiner als ε ist. Das heißt, für wachsenden Index n wird der Abstand $|a_n - a|$ *beliebig* klein.

Das Konzept der Konvergenz konkretisiert einfach den Begriff einer *Näherung*: Sie geben mir die Genauigkeit (Fehlerschranke) ε vor, mit der Sie a (z. B. $\sqrt{2}$) approximieren möchten; dann kann ich Ihnen einen zugehörigen Folgenindex n_0 nennen, ab dem diese Genauigkeit erreicht wird. D.h. $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ sind Näherungswerte, die um weniger als ε von a entfernt sind. Das gelingt für *jedes noch so kleine* ε, das Sie sich aussuchen!

Wählt man aus einer Folge einen Teil der Folgenglieder aus, so spricht man (falls es unendlich viele sind) von einer **Teilfolge**.
Beispiel: $1, 3, 5, 7, \ldots$ (alle ungeraden natürlichen Zahlen) ist eine Teilfolge aus $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (alle natürlichen Zahlen).

Eine Folge mit komplexen Folgengliedern $a_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ wird als konvergent bezeichnet, wenn sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil konvergiert: $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Der Grenzwert der Folge ist dann $a = x + \mathrm{i}y$.

Satz 6.6 (Eigenschaften konvergenter Folgen)

a) Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. Konvergiert eine Folge, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen den Grenzwert.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt. Anders gesagt: Eine unbeschränkte Folge ist nicht konvergent.

Warum? a) ist klar, denn wenn die Folge a_n zwei Grenzwerte hätte, also einem a als auch einem b beliebig nahe käme, dann müssten wegen der Dreiecksungleichung (Satz 2.12) auch a und b beliebig nahe beieinander liegen, $|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \le |a_n-a|+|a_n-b|$, also gleich sein.
b) Wählen wir (irgendein) ε und das zugehörige n_0, so bedeutet konvergent, dass $|a_n-a| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Das heißt, alle Folgenglieder a_n mit Index $n \ge n_0$ liegen innerhalb von $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ und sind somit beschränkt. Die Folgenglieder mit Index $n < n_0$ sind nur endlich viele. Unterm Strich gilt damit $|a_n| \le \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n_0}|, |a|+\varepsilon\}$.

Wenn eine Folge den Grenzwert 0 hat, so nennt man sie **Nullfolge**.

Beispiel 6.7 Konvergente Folgen
Ist die Folge konvergent? Was ist ihr Grenzwert?
a) $a_n = 3$ b) $a_n = \frac{1}{n}$ c) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

Lösung zu 6.7

a) Die Folge ist konstant 3 und dieser Wert ist natürlich auch der Grenzwert.

Wundern Sie sich nicht, dass man hier 3 als Grenzwert bezeichnet. Das ist konsistent mit Definition 6.5. Denn zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es hier ein n_0 mit $|a_n - a| = |3-3| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Dieses n_0 ist im Spezialfall einer konstanten Folge für jedes ε gleich 1, d.h., bereits ab dem ersten Folgenglied wird jede Fehlerschranke ε unterschritten.

b) Die Folgenglieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ kommen der Zahl 0 immer näher, das deutet auf den Grenzwert 0 hin. Die Frage ist nun: Gibt es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ einen Folgenindex, ab dem alle nachfolgenden Folgenglieder im Intervall $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$, also in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen? Ja, denn

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

ist erfüllt für $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (einfach die Ungleichung nach n aufgelöst), daher brauchen wir für n_0 nur die erste natürliche Zahl zu wählen, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Beispiel: Für $\varepsilon = 0.01$ erledigt $n_0 = 101$ den Job, denn alle Folgenglieder ab dem Index $n_0 = 101$, also $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \ldots$ liegen in $(-0.01, 0.01)$. Daher hat die Folge den Grenzwert 0. Es ist also eine Nullfolge.

c) Die Folgenglieder $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ kommen der Zahl 0 immer näher, das deutet ebenfalls auf den Grenzwert 0 hin. Tatsächlich: Geben Sie ein noch so kleines $\varepsilon > 0$ vor, ich kann Ihnen ein zugehöriges n_0 nennen, sodass alle Folgenglieder mit Index größer oder gleich n_0 in $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ liegen. Dazu forme ich die Bedingung

$$|\frac{1}{2^n} - 0| < \varepsilon$$

(„Abstand des Folgengliedes vom Grenzwert 0 ist kleiner ε“) nach n um und erhalte $n > \log_2(\frac{1}{\varepsilon})$. Beispiel $\varepsilon = 0.01$: Nun liegen alle Folgenglieder mit Index n größer $\log_2(\frac{1}{0.01}) = 6.64$, also ab $n_0 = 7$, im Intervall $(-0.01, 0.01)$. D.h., $\frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^8}, \ldots$ sind um weniger als 0.01 von 0 entfernt.

Etwas allgemeiner kann man analog für jedes $|q| < 1$ zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Also haben wir es wieder mit einer Nullfolge zu tun.

d) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1$. Hier kommen die Folgenglieder $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ der Zahl 1 mit wachsendem Index beliebig nahe. D.h., zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ liegen alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index n_0 in der Umgebung $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Die Folge hat den Grenzwert 1.

Die Konvergenz dieser Folge kann man wieder durch Berechnung von n_0 mittels Umformung von $|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ wie zuvor nachweisen.

■

Halten wir also fest:

Satz 6.8 (Fundamentale Nullfolgen) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{für } |q| < 1.$$

Es ist klar, dass die Definition 6.5 zu mühsam für die Berechnung von Grenzwerten ist. Zum Glück gibt es ein paar einfache Rechenregeln, zu denen wir gleich kommen werden. Zuvor sehen wir uns aber noch ein paar Beispiele für nicht-konvergente Folgen an.

Definition 6.9 Eine Folge, die *nicht* konvergent ist, heißt **divergent**.

Beispiel 6.10 Divergente Folgen
Warum sind diese Folgen divergent?
a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = 2^n$ c) $a_n = (-1)^n 2^n$

Lösung zu 6.10

a) Anschaulich: Es gibt keine Zahl a (eine einzige, denn ein Grenzwert ist eindeutig), um die sich die Folgenglieder mehr und mehr verdichten, da die Folgenglieder immer zwischen -1 und 1 hin und her springen: Die Teilfolge der Glieder mit geradem Index, a_{2n}, ist konstant gleich 1, die der Glieder mit ungeradem Index, a_{2n+1}, ist konstant gleich -1. Die zwei Teilfolgen haben also verschiedene Grenzwerte, was nach Satz 6.6 a) bei einer konvergenten Folge nicht sein kann. Die Folge ist daher divergent.
b) Die Folge $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ ist unbeschränkt. Damit muss, nach Satz 6.6 b), die Folge divergent sein.
c) $-2, 4, -8, 16, \ldots$ ist unbeschränkt, daher divergent.

■

Halten wir nochmals die Aussage von Satz 6.6 b) fest: „konvergent" $\Rightarrow$ „beschränkt" und deshalb „unbeschränkt" $\Rightarrow$ „divergent". Aber Achtung: „divergent" $\not\Rightarrow$ „unbeschränkt", es gibt also auch beschränkte divergente Folgen, wie etwa die Folge in Beispiel 6.10 a).

Nun wieder zurück zu konvergenten Folgen. Ich habe ja versprochen, dass konvergente Folgen auch einfacher erkannt bzw. Grenzwerte einfacher berechnet werden können als in Beispiel 6.7: