3.1	Für $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ ermittele man die Tangentialebene im Punkt $P(\pi, 0, ?)$ sowohl in Gleichungsform als auch in Punkt-Richtungsform.

$$f(\pi, 0) = \sin(\pi) \cdot \cos(0) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)\cos(y) \qquad f_x(\pi, 0) = -1 \cdot 1 = -1$$

$$f_y = -\sin(x)\sin(y) \qquad f_y(\pi, 0) = 0 \cdot 0 = 0$$

Tangentialebene von f (an einer Stelle $\boldsymbol{p} \in D$)	$t(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$

$$t(x, y) = 0 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \pi \\ y - 0 \end{pmatrix} = 0 - x + \pi = z$$

$$\Rightarrow \quad x + z = \pi$$ Ebene in HNF

In PRR-Form:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$n = 3$
$r = 1$
$n - r = 2$ freie Param

$z = s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$
$y = r$

$$x = \pi - s \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2	$$f(x,y) = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$$ Man ermittele man die Steigung an der Stelle $\boldsymbol{p} = (1,0)$ in Richtung $\boldsymbol{r} = \binom{3}{4}$. Welches ist die Richtung des stärksten Anstiegs von f an der Stelle $\boldsymbol{p}$? Wie groß ist diese stärkste Steigung an der Stelle $\boldsymbol{p}$?

$$f_x \overset{PR}{=} 1 \cdot e^{-y/x} + x \cdot \underbrace{e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2}}_{KR}$$

$$= \left(1 + \frac{y}{x}\right) e^{-y/x}$$

$$f_y = x \cdot \underbrace{e^{-y/x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)}_{KR} = -e^{-y/x}$$

$$\Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} (1 + y/x)\, e^{-y/x} \\ -e^{-y/x} \end{pmatrix}$$

a) $$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Steigung in Richtung von $\vec{r}$:

$$\vec{v} \cdot \nabla f\binom{1}{0} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-0}$$

$$= \frac{1}{5}(3 - 4) = -1/5$$

b) Richtung des stärksten Anstiegs: $\nabla f\binom{1}{0} = \binom{1}{-1}$

c) $$\left|\nabla f\binom{1}{0}\right| = \left|\binom{1}{-1}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$