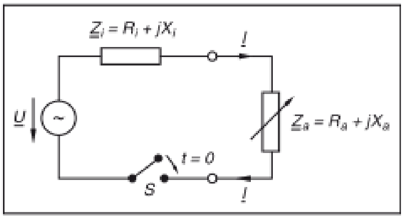
4 Übung: Extremwertaufgaben (mit linearen bzw. nicht-linearen Gleichungssystemen)

Untersuchen Sie die Funktion auf Extremstellen (Maximum, Minimum?) bzw. Sattelpunkte (bei $n = 2$ Variablen notwendige und hinreichende Bedingung prüfen)		Kontrolle
4.1	$f(x,y) = -4x^2 - 4y^2 + 16x + 12y - xy - 10$	2x2 LGS $(1{,}84\ ,\ 1{,}27)$ Maximumstelle
4.2	$f(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$	Nichtlineares Gleichungssystem $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ Maximumstelle, $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ Minimumstelle, $(\pm 1, 0)$ Sattelstellen
4.3	$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_2^5 + 5\frac{x_1^2}{x_2} - 5x_1$	Nichtlineares Gleichungssystem $(\frac{1}{2}, 1)$ Minimumstelle, $(-\frac{1}{2}, -1)$ Maximumstelle

5 Übung: Extremwertaufgaben im Anwendungskontext, auch mit 3x3 LGS

5.1	Berechnen Sie die Punkte auf der Fläche mit der Gleichung $$z = \frac{1}{xy}$$ welche vom Ursprung das minimale Abstandsquadrat und damit auch den minimalen Abstand haben.	
5.2	**Leistungsanpassung beim Wechselstromgenerator**: Ein Wechselstromgenerator mit dem komplexen Innenwiderstand $R_i + jX_i$ liefert eine konstante Quellenspannung $\underline{U}$ mit dem Effektivwert U. Ein Verbraucher mit dem stetig veränderbaren komplexen Widerstand $R_a + jX_a$ soll so abgestimmt werden, dass die von ihm aufgenommene Wirkleistung $$P = P(R_a, X_a) = \frac{R_a \cdot U^2}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2}$$ maximal wird. Wie müssen Wirkwiderstand R_a und Blindwiderstand X_a des Verbrauchers gewählt werden und wie groß ist die maximale Wirkleistung? Die Größen U, R_i, X_i sind fest. Die hinreichende Bedingung für das Maximum (2. Ableitungen) muss <u>nicht</u> geprüft werden. Hinweis: Erst $\frac{\partial P}{\partial X_a} = 0$, dann $\frac{\partial P}{\partial R_a} = 0$.	 $R_a = R_i, \quad X_a = -X_i$ $P_{max} = \frac{U^2}{4R_i}$
5.3	**Gewinnmaximierung**: Es werden mehrere Produkte P_1, P_2, P_3 hergestellt, pro Periode in Mengen x_1, x_2, x_3 (in passenden Mengeneinheiten ME_k). Die Gesamtkosten K (in Geldeinheiten GE) sowie die Stückpreise p_1, p_2, p_3 seien gegeben. Bestimmen Sie die Produktionsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist. Für $n > 2$ genügt uns, die notwendige Bedingung zu erfüllen. $K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 100 \quad (x_i \geq 0)$ (in GE) $p_1 = 40, \quad p_2 = 50, \quad p_3 = 80$ (in GE/ME_k) Hinweis: Gewinn = Ertrag – Kosten. Ertrag = $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$ (Menge mal Stückpreis für jedes Produkt).	$x_1 = 17{,}5$ (ME) $x_2 = 5$ (ME) $x_3 = 12{,}5$ (ME)
5.4	Wie in Voraufgabe. Hier hängen jedoch die Stückpreise ggf. von den Produktionsmengen ab. Bestimmen Sie den maximalen Gewinn (bei welchen Produktionsmengen wird er erreicht)? $K(x_1, x_2) = 0{,}5x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 500.000$ $p_1(x_1, x_2) = 1.280 - 4x_1 + x_2, \quad p_2(x_1, x_2) = 2.360 + 2x_1 - 3x_2$ (jeweils GE/ME)	$x_1 = 220$, $x_2 = 350$ (ME)

6 Übung: Extrema unter Nebenbedingungen

Lösen Sie mit der Methode der Substitution oder nach Lagrange. Beim Lagrange-Ansatz genügt das Auffinden der stationären Punkte (notwendige Bedingung für ein Extremum).		Kontrolle
6.1	Die Erträge einer Produktion hängen nach folgender Gesetzmäßigkeit von den Produktionsfaktoren Arbeit r_1 und Kapital r_2 ab. $$f = f(r_1, r_2) = 2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{r_2}$$ Die Kosten ermitteln sich in Abhängigkeit des Faktoreinsatzes über $$K = 8r_1 + 20r_2$$ Finden Sie zu für die Produktion einer Zielmenge von 80 ME die Kombination der Produktionsfaktoren r_1, r_2, mit der die Kosten minimal sind.	$(r_1, r_2) = (20; 4)$
6.2	Finden Sie für $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$ die relativen Extrema unter der Restriktion $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8.$$	(x_1, x_2, x_3, x_4) $= (2,2,2,2)$
6.3	Finden Sie für $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz$ die Minimumstelle unter der NB $x - y^3 + z = 4$.	$0, -1{,}3$