Auch Logarithmen sind eine ergiebige Quelle für unterschiedlich aussehende, aber letztlich gleichwertige Stammfunktionen. Wegen

$$\ln \frac{x}{2} = \ln x - \ln 2$$

sind die Funktionen F und G, $F(x) = \ln \frac{x}{2} + C$, $G(x) = \ln x + D$ beide gleichwertige „Stammfunktionen“. Dabei ist $D = C - \ln 2$.

Durch Übergang ins Komplexe lassen sich manche reellen Integrale einfach lösen

Ein besonders praktischer Trick ist es, reelle Integrale künstlich zu „komplexifizieren“, um das einfachere Verhalten mancher komplexer Funktionen ausnutzen zu können.

Die Ableitungsregel

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda\, e^{\lambda x}$$

gilt für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$, daher findet man umgekehrt für $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$

$$\int e^{\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C\,.$$

Nun sind die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus gerade der Real- und Imaginärteil der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument. Durch das Betrachten komplexer Exponentialfunktionen lassen sich demnach viele Integrale, in denen Winkelfunktionen vorkommen, auf elegante Weise lösen.

Beispiel Wir bestimmen die beiden Integrale

$$I_1 = \int e^{ax} \cos(bx)\, dx \quad \text{und} \quad I_2 = \int e^{ax} \sin(bx)\, dx\,.$$

Dazu betrachten wir das komplexe Integral

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax}\, e^{ibx}\, dx = \int e^{(a+ib)x}\, dx \\ &= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} + C = \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax}\, e^{ibx} + C \\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} \left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right) + C\,. \end{aligned}$$

Nun erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{Re} I = e^{ax} \left(\frac{a\cos(bx)}{a^2+b^2} + \frac{b\sin(bx)}{a^2+b^2} \right) + C_1 \\ I_2 &= \operatorname{Im} I = e^{ax} \left(\frac{a\sin(bx)}{a^2+b^2} - \frac{b\cos(bx)}{a^2+b^2} \right) + C_2, \end{aligned}$$

wobei wir die Integrationskonstante nach $C = C_1 + iC_2$ aufgespalten haben. ◀

Noch viel effizientere Methoden zum Bestimmen von reellen Integralen mit komplexen Methoden stellt die *Funktionentheorie* zur Verfügung, die in Kap. 32 behandelt wird.

12.2 Partielle Integration

Wir kommen nun zur ersten der drei klassischen Integrationstechniken, die uns den Hauptteil dieses Kapitels beschäftigen werden – der partiellen Integration. Wie erhält man aber überhaupt Integrationsregeln?

Nachdem Integrieren, genauer das Auffinden einer Stammfunktion, ja die Umkehrung des Differenzierens ist, kann man erwarten, dass sich aus jeder Ableitungsregel eine Integrationsregel ergibt. Analog war es ja schon beim umgekehrten Lesen der Ableitungstabelle der Fall.

Teil II

Integration der Produktregel führt zur Methode der partiellen Integration

Integrieren wir die Gleichung der Produktregel,

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v',$$

so erhalten wir

$$u\,v = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx, \qquad (12.1)$$

denn auf der linken Seite hebt das Integral die Ableitung genau auf. Simples Umstellen der Terme in (12.1) liefert uns die entscheidende Regel.

Partielle Integration

Für zwei differenzierbare Funktionen u und v mit stetig differenzierbaren Ableitungen u' und v' gilt die Regel der **partiellen Integration** oder *Produktintegration*:

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx \qquad (12.2)$$

Auch andere Schreibweisen für diese Formel sind verbreitet, zum Beispiel

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du,$$

was nach der Kettenregel bzw. den Rechenregeln für das totale Differenzial genau (12.2) entspricht.

Wie auch immer sie genau dargestellt wird, auf den ersten Blick wirkt diese Rechenregel nur mäßig hilfreich. Erstens muss man sich auch weiter mit einem Integral herumschlagen, und zweitens ist es notwendig, zu einem Faktor des ursprünglichen Integranden, nämlich v', bereits eine Stammfunktion zu kennen. Gerade wenn man es mit Produkten von elementaren Funktionen zu tun hat, ist aber der zweite Punkt meist überhaupt kein Problem.

In vielen Fällen führt die partielle Integration tatsächlich zu einfacheren Integralen. Natürlich sollte man einen Blick dafür haben, welchen Teil des Integranden man besser als den zu differenzierenden und welchen als den zu integrierenden wählt.

Beispiel Wir untersuchen das Integral

$$I_1 = \int x \cos x \,\mathrm{d}x$$

Der Integrand liegt in Produktform vor; die Frage ist nur, welchen der beiden Faktoren wählen wir als zu integrierenden, welchen als zu differenzierenden? Sowohl zu x als auch zu $\cos x$ kennen wir eine Stammfunktion. Während es aber beim Kosinus bis auf ein Vorzeichen keinen Unterschied macht, ob wir ihn nun differenzieren oder integrieren, wird $f(x) = x$ durch Differenzieren einfacher, durch Integrieren hingegen komplizierter.

Demnach setzen wir $u = x$, $v' = \cos x$ und hoffen, dass sich das Problem dadurch vereinfacht. Dabei führen wir auch gleich eine praktische, wenn auch völlig unverbindliche Schreibweise ein, nämlich die Form der partiellen Integration als Zwischenschritt zwischen senkrechten Linien festzuhalten.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{matrix} \right| = \\ &= x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Wie erhofft haben wir ein einfacheres Integral erhalten, das sich elementar lösen lässt. ◀

Kommentar Für die praktische Handhabung der Zwischenrechnungen gibt es viele Varianten. Die hier vorgestellte, das Einfügen in ein „aufgetrenntes" Gleichheitszeichen ist meist recht praktisch, aber nur als Vorschlag zu verstehen. Besonders bei Klausuren und Prüfungen ist es meist vorteilhaft, sich an die Notation des jeweiligen Dozenten zu halten, um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen. ◀

Beispiel Analog versuchen wir, das Integral

$$I_2 = \int x^2 \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

mittels partieller Integration zu lösen. Dabei wird es sinnvoll sein, $u = x^2$ und $v' = \mathrm{e}^x$ zu setzen. Durch das Differenzieren wird x^2 nämlich einfacher, während e^x auch beim Integrieren seine Gestalt nicht ändert:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x^2 \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 2x & v = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| = \\ &= x^2 \,\mathrm{e}^x - 2 \int x \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2 \,\mathrm{e}^x - 2 \tilde{I}_2 \end{aligned}$$

Das Integral ist tatsächlich einfacher geworden, und eine zweite partielle Integration führt nun zum Ziel:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \int x \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 1 & v = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| = \\ &= x \,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x \,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$I_2 = x^2 \,\mathrm{e}^x - 2 x \,\mathrm{e}^x + 2 \,\mathrm{e}^x + D,$$

wobei für die Integrationskonstante $D = -2C$ gesetzt wurde, genauso gut hätte man auch hier natürlich C schreiben können. ◀

Achtung Bereits am letzten Beispiel kann man erahnen, dass das richtige Berücksichtigen der Vorzeichen und Vorfaktoren bei mehrfacher partieller Integration umständlich werden kann. Die Gefahren dieser Fehlerquelle sollten nicht unterschätzt werden. Wie immer beim Integrieren kann man die Richtigkeit seiner Lösung aber sofort durch Differenzieren nachprüfen.

Die Vorzeichensetzung bei der partiellen Integration selbst kann man sich, selbst wenn sie einem gerade entfallen sein sollte, hingegen mittels Integration der Produktregel jederzeit wieder herleiten. ◀

Unter Umständen kann es nötig sein, den Integranden erst auf Produktform zu bringen, um die partielle Integration anwenden zu können. Das zeigt sich etwa im Paradebeispiel für diese Art der partielle Integration.

Beispiel Wir untersuchen nun das wichtige Integral

$$I = \int \ln x \,\mathrm{d}x,$$

das vorerst so gar nicht nach einem Kandidaten für partielle Integration aussieht:

$$\begin{aligned} I &= \int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{matrix} \right| = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \, x \,\mathrm{d}x \\ &= \ln x \cdot x - \int \mathrm{d}x = \ln x \cdot x - x + C \end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$I = \int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + C\,. \qquad (12.3)$$

Eine derartige Ergänzung mit einem Faktor 1 und anschließende partielle Integration ist auch ein bewährtes Mittel bei vielen Integralen, deren Integrand der Logarithmus einer komplizierteren Funktion ist.

Dass die Konstante 1 durch das Integrieren geringfügig komplizierter wird ist ein geringer Preis dafür, dass man durch das Differenzieren den Logarithmus los wird. ◀

Auch bei bestimmten Integralen lässt sich die partielle Integration anwenden, man braucht nur jeweils die Grenzen richtig einzusetzen:

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$$

Anwendungsbeispiel Eine exponentialverteilte Zufallsvariable besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte ($\lambda > 0$)

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(siehe Abschn. 39.2). Wir überprüfen, dass es sich tatsächlich um eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte handelt, d. h., dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

ist. Des Weiteren berechnen wir den Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x$$

sowie die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2\, p(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Zunächst müssen wir verifizieren, dass das Integral von p über ganz $\mathbb{R}$ eins ergibt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1$$

Nun bestimmen wir den Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\infty} x\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ u' = 1 & v = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{array} \right| = -\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

und die Varianz

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 & v' = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ u' = 2\, \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) & v = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{array} \right| \\ &= -\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda^2} + 2 \int_0^{\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x - \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} x\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x}_{=E(X)} - \frac{2}{\lambda^2} \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x}_{=1} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,. \end{aligned}$$

Wir werden uns auf S. 1483 noch ausführlich mit dieser Verteilung beschäftigen. ◀

Die partielle Integration kann äußerst wichtige Ergebnisse liefern. So können wir sie benutzen, um eine neue Darstellung des Restgliedes für die Taylor-Entwicklung zu erhalten.

Wir betrachten eine Funktion f, die in einer Umgebung eines Punktes x_0 $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Mit dem zweiten Hauptsatz der Integralrechnung und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \underbrace{1}_{u'(t)}\ \underbrace{f'(t)}_{v(t)}\, \mathrm{d}t \\ &= (t - x) f'(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} (t - x) f''(t)\, \mathrm{d}t \\ &= (x - x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t) f''(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Nochmalige partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x - t)}_{u'(t)}\ \underbrace{f''(t)}_{v(t)}\, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2} (x - t)^2 f''(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x - t)^2 f'''(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x - t)^2 f'''(t)\, \mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

Teil II

also ist

$$f(x) = \left[f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) \right] + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x - t)^2 f'''(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Durch vollständige Induktion können wir nun weiter die folgende Darstellung des Restgliedes beweisen:

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Partielle Integration kann selbst dann Erfolg haben, wenn sie zum Ausgangsintegral zurückführt

Die partielle Integration kann diverse Überraschungen bereithalten. So kann es bei manchen Rechnungen passieren, dass die partielle Integration nie zu einer integralfreien Form führt – und dass sich das gesuchte Integral dennoch mit dieser Methode berechnen lässt. Dies ist der Fall, wenn man nach (meist mehrfacher) partieller Integration wieder das Ausgangsintegral erhält. Dabei hat man eine algebraische Gleichung für das gesuchte Integral erhalten, die sich meist einfach lösen lässt.

Beispiel Zu berechnen ist das Integral

$$I = \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x,$$

das wir in Abschn. 12.1 schon mittels trigonometrischer Identitäten bzw. durch Erraten gelöst haben. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = \cos x \\ u' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= \sin^2 x - \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \sin^2 x - I + 2C \end{aligned}$$

Hier haben wir die Integrationskonstante bereits vorausschauend $-2C$ genannt. Insgesamt haben wir die Gleichung

$$I = \sin^2 x - I + 2C \quad \Leftrightarrow \quad 2I = \sin^2 x + 2C$$

erhalten, kennen also

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Die Integrationskonstante, die bei unbestimmten Integralen immer auftritt, muss natürlich auch hier berücksichtigt werden. ◄

Es kann aber auch passieren, dass eine solche Vorgangsweise keinen unmittelbaren Erfolg bringt, sondern man noch zusätzliche Tricks ins Spiel bringen muss.

Beispiel Dazu versuchen wir, das Integral

$$I = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

mittels partieller Integration zu lösen.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = \sin x \\ u' = \cos x & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & v' = \cos x \\ u' = -\sin x & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= -\sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = I \end{aligned}$$

Hier haben wir nichts gewonnen, denn die Gleichung $I = I$, die wir am Ende erhalten haben, ist zwar eine wahre Aussage, verrät uns aber nichts über I. Um wirklich eine Lösung für das Integral zu erhalten, greifen wir ein Zwischenergebnis von oben heraus, und benutzen die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} I = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) \, \mathrm{d}x \\ &= -\sin x \cos x + \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= -\sin x \cos x + x - I \end{aligned}$$

Nun erhalten wir sofort

$$I = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

Als bestimmtes Integral lässt sich unser Beispiel für manche Grenzen übrigens sehr leicht lösen. Den Wert von

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

etwa kann man sofort ohne Rechnung angeben. Betrachten wir den Graphen des Integranden und zeichnen zusätzlich ein Rechteck der Länge π und Höhe 1 ein, wie in Abb. 12.2 dargestellt ist.

Weil einerseits $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, andererseits Sinus und Kosinus ja nur gegeneinander verschoben sind, sind die Flächen unter- und oberhalb des Graphen gleich groß.

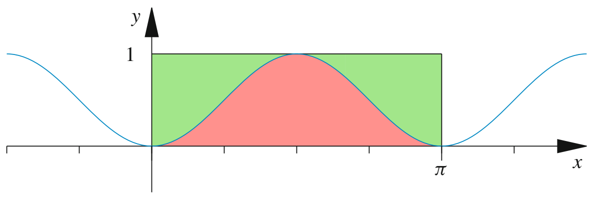

Abb. 12.2 Die Flächen unter- und oberhalb des Funktionsgraphen von $f(x) = \sin^2 x$ sind im Intervall $[0, \pi]$ gleich groß. Damit lässt sich auch das Integral dieser Funktion über diesen Bereich sofort angeben

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist $A = \pi$, und damit erhalten wir unmittelbar

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

◀

Anwendungsbeispiel Integrale über Quadrate von Winkelfunktionen spielen in vielen Anwendungen eine große Rolle, etwa bei Leistungsberechnungen. Die elektrische Leistung P ergibt sich als Produkt von Spannung U und Stromstärke I, zu einem bestimmten Zeitpunkt t ist also

$$P(t) = U(t)\,I(t)\,.$$

Im Fall von Wechselstrom haben Strom und Spannung meistens sinusförmigen Verlauf,

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U) \qquad I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I)\,.$$

mit Frequenz ω. Im einfachsten Fall sind keine Kapazitäten oder Induktivitäten zu berücksichtigen. Dann ist einerseits $\varphi_U = \varphi_I = \varphi$, andererseits ergibt das Ohm'sche Gesetz mit dem konstanten Widerstand R sofort $I_0 = U_0/R$. Damit erhält man für die Arbeit pro Periode $\tau = 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned} W_\tau &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} P(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} U_0\, I_0\, \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt \\ &= \int_{-\frac{\varphi}{\omega}}^{\tau-\frac{\varphi}{\omega}} \frac{U_0^2}{R} \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\tau} \sin^2(\omega t)\,dt \\ &= \frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{2}\big[\omega\, t - \sin(\omega t)\,\cos(\omega t)\big]_0^{\tau=2\pi/\omega} \\ &= \frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{\pi}{\omega}. \end{aligned}$$

Dabei wurde einerseits die Periodizität des Integranden benutzt, andererseits die Regel, dass

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

ist, wenn F eine Stammfunktion von f ist. Tatsächlich interessiert uns aber weniger die Arbeit pro Periode, sondern pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{W_\tau}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{\pi}{\omega} = \frac{U_0^2}{2R}\,.$$

Gibt es im Stromkreis nicht nur Ohm'sche Widerstände, sondern auch Kapazitäten (etwa durch Kondensatoren) oder Induktivitäten (etwa durch Spulen), so kann es zu einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung kommen, $\varphi_U \neq \varphi_I$. In diesem Fall rechnet man günstigerweise mit der komplexen Impedanz Z statt mit dem reellen Widerstand R. Auch die Leistung wird in diesem Fall komplex.

Nur der reelle Teil der Leistung wird wirklich vom Verbraucher entnommen, der imaginäre (die *Blindleistung*) pendelt zwischen Versorger und Verbraucher hin und her. Im Grenzfall verschwindender Ohm'scher Widerstände hat man $\varphi_U - \varphi_I = \pm\frac{\pi}{2}$ und nur noch Blindleistung. ◀

12.3 Substitutionsmethode

Die partielle Integration ist bei vielen Integralen hilfreich, das schlagkräftigste Verfahren zum Auffinden einer Stammfunktion ist aber die **Substitution** oder **Variablentransformation**.

Diese wollen wir erst einmal anhand eines Beispiels motivieren, bevor wir sie als Umkehrung der Kettenregel streng rechtfertigen. Wie man mithilfe der Kettenregel sofort überprüfen kann, gilt

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x}\,\cos x$$

und damit

$$\int e^{\sin x}\,\cos x\,dx = e^{\sin x} + C\,.$$

Wie kann man aber in solchen Fällen eine Stammfunktion erraten, wenn man es ohne dieses Wissen im Hinterkopf mit einem derartigen Integral zu tun hat?

Zudem hat in vielen Fällen der Integrand zwar eine Form, die durchaus für eine Ausnutzung der Kettenregel geeignet ist – jedoch nicht ganz so offensichtlich wie in unseren Beispielen.

Daher wollen wir uns nun eine allgemeiner anwendbare Strategie überlegen, mit Integralen umzugehen, in denen das Argument einer Funktion eine andere Funktion ist. In unserem Fall taucht der Sinus als Argument der Exponentialfunktion auf.

Um diese komplizierte Konstruktion zu vereinfachen, fassen wir den Sinus als *neue Integrationsvariable* $u = \sin x$ auf, wir *substituieren*. Dabei müssen wir natürlich auch das Differenzial entsprechend umrechnen.

Die Regeln für das Differenzial sagen uns

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Damit gilt aber auch

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos x},$$

solange $\cos x \neq 0$ ist. Das erleichtert die Rechnung gewaltig. Nicht nur, dass wir mithilfe dieser Umrechnung aus der Integration über x eine über u machen können, nein, auch den Kosinus können wir kürzen

$$I = \int \mathrm{e}^u \cos x \frac{\mathrm{d}u}{\cos x} = \int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C\,.$$

Im Hintergrund ist hier natürlich die Kettenregel am Werk, allerdings weniger offensichtlich als zuvor.

Wir haben nun eine integralfreie Darstellung, allerdings in der neuen Variablen u. Nun können wir aber ohne Schwierigkeiten wieder $u = \sin x$ einsetzen. Dieses Rückeinsetzen wird oft mit einem senkrechten Strich oder eckigen Klammern geschrieben. (Die Beziehung zwischen alter und neuer Integrationsvariable wird typischerweise nicht in jedem Schritt explizit angemerkt, dennoch muss sie in der Rechnung stets berücksichtigt werden.) In unserem Fall erhalten wir

$$I = \mathrm{e}^u\big|_{u=\sin x} + C = \mathrm{e}^{\sin x} + C.$$

Dass wir in diesem Beispiel zwischendurch $\cos x \neq 0$ voraussetzen mussten, bedeutet keine Einschränkung mehr, da wir unser Ergebnis stetig, sogar differenzierbar auch an diesen Punkten fortsetzen können.

Wären nach dem Substituieren und dem Umrechnen des Differenzials noch irgendwo Ausdrücke in der alten Variablen x übriggeblieben, so hätten wir diese auch auf die neue Variable u umschreiben müssen:

Beispiel Wir bestimmen

$$J = \int \mathrm{e}^{\sin x} \cos^3 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei können wir natürlich unsere Ergebnisse von vorher verwenden und erhalten mit $u = \sin x$

$$J = \int \mathrm{e}^u \cos^2 x\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\sin x}\,.$$

So wie $u = \sin x$ ist, hängt x gemäß $x = x(u) = \arcsin u$ von u ab. Um eine Darstellung rein in der neuen Variablen u zu erhalten, benutzen wir

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$$

und erhalten

$$\begin{aligned} J &= \int \mathrm{e}^u\,(1-u^2)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\sin x} \\ &= \left[\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u - \int \mathrm{e}^u\,u^2\,\mathrm{d}u\right]_{u=\sin x}\,. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist elementar, das zweite haben wir bereits auf S. 426 mittels partieller Integration bestimmt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} J &= \int \mathrm{e}^u\,(1-u^2)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\sin x} \\ &= \left[\mathrm{e}^u - u^2\mathrm{e}^u + 2u\mathrm{e}^u - 2\mathrm{e}^u + C\right]_{u=\sin x} \\ &= \left[(1-u^2)\mathrm{e}^u + 2(u-1)\mathrm{e}^u + C\right]_{u=\sin x} \\ &= \cos^2 x\,\mathrm{e}^{\sin x} + 2(\sin x - 1)\mathrm{e}^{\sin x} + C\,. \end{aligned}$$ ◀

Gelingt ein so geschicktes Umschreiben nicht mehr, muss man explizit mit $x = x(u)$, hier also der Beziehung $x = \arcsin u$ arbeiten. Dabei muss man sich abhängig vom Integrationsbereich auch Gedanken über den passenden Zweig des Arkussinus machen.

Die Substitutionsmethode folgt aus der Integration der Kettenregel

Nachdem wir die Substitutionsmethode bereits in Aktion gesehen haben, wollen wir uns nun überlegen, was dort eigentlich genau passiert ist: Wir haben ein Integral der Art

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

auf eine neue Integrationsvariable u umgeschrieben. Dieses „Umschreiben" erfolgt tatsächlich mittels einer umkehrbaren differenzierbaren Funktion, die wir φ nennen wollen, $u = \varphi(x)$.

Um das Differenzial zu transformieren, verwenden wir die Kettenregel

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}(\varphi^{-1})}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Überall, wo die alte Integrationsvariable noch vorkommt, wird sie nun mittels $x = \varphi^{-1}(u)$ ersetzt. So erhält man ein Integral, das vollständig in der neuen Variablen u formuliert ist.

Um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen, verzichtet man allerdings meist ganz auf das Einführen eines eigenen Symbols für ϕ und bezeichnet die Funktion direkt mit u, ihre Umkehrfunktion direkt mit $x = u^{-1}$. Das ist eine recht eingängige Schreibweise; man sollte allerdings im Auge behalten, dass u oder x dann je nach Zusammenhang für eine Integrationsvariable oder für eine Funktion stehen kann.

Um unsere Strategie streng zu untermauern, betrachten wir eine Funktion u, die auf dem gesamten betrachteten Intervall $[a, b]$, dem späteren Integrationsbereich, streng monoton und differenzierbar ist. Wenn wir Differenzierbarkeit voraussetzen, wird die Monotonie durch $u'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ garantiert.

Nun behaupten wir: Wenn Φ eine Stammfunktion von $f(u)\,u'$ ist,

$$\Phi'(x) = f(u(x))\,u'(x)\,,$$

dann ist $\Phi(u^{-1})$ eine Stammfunktion von f. Das klingt im Lichte der Kettenregel plausibel, aber beweisen müssen wir es natürlich trotzdem.

Beweis Unter der Voraussetzung $u'(x) \neq 0$ existiert sicher die Umkehrfunktion u^{-1}, und wir erhalten durch Ableiten nach der Kettenregel mit $t = u(x)$ bzw. $x = u^{-1}(t)$

$$\begin{aligned}\left(\Phi\left(u^{-1}(t)\right)\right)' &= \Phi'(u^{-1}(t))\,\left(u^{-1}(t)\right)' \overset{\text{nach Voraussetzung}}{=} \\ &= f\left(u\left(u^{-1}(t)\right)\right)u'\left(u^{-1}(t)\right)\left(u^{-1}(t)\right)'.\end{aligned}$$

Nun benötigen wir eine kleine Nebenrechnung, und zwar differenzieren wir die Identität

$$u\left(u^{-1}(t)\right) = t$$

nach der Kettenregel. Das ergibt

$$u'\left(u^{-1}(t)\right)\left(u^{-1}(t)\right)' = 1.$$

Dies oben eingesetzt liefert

$$\left(\Phi(u^{-1}(t))\right)' = f\left(u\left(u^{-1}(t)\right)\right) = f(t),$$

was zu beweisen war. ∎

Wir werden die so gefundene Formel noch ein wenig umstellen, um sie in eine möglichst praktische Form zu bringen.

Substitutionsmethode

Für eine differenzierbare und umkehrbare Funktion φ gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi^{-1}(u))\,\frac{\mathrm{d}(\varphi^{-1})}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u\,,$$

wobei nach Integration entweder links $x = \varphi^{-1}(u)$ oder rechts $u = \varphi(x)$ zu setzen ist.

Im Einführungsbeispiel war $u = \varphi(x) = \sin x$. In salopper Schreibweise (mit $u = \varphi$ und $x = \varphi^{-1}$) und unter der stärkeren Voraussetzung $u' \neq 0$, die stets ausreicht, um die Umkehrbarkeit zu gewährleisten, nimmt die Substitutionsformel die folgende Gestalt an:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(u))\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u\,, \qquad u' \neq 0\,.$$

Diese Formel kann in beide Richtungen gelesen werden, und für beide Umformungen finden sich Beispiele, bei denen sich ein Integrand wesentlich vereinfacht.

Beispiel Bei

$$\int \cos(\mathrm{e}^u)\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \left|\begin{matrix} x = \mathrm{e}^u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u \end{matrix}\right| = \int \cos x\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\mathrm{e}^u}$$

ist die Sache klar. Auch in die andere Richtung können sich jedoch Vereinfachungen ergeben, etwa bei

$$\begin{aligned} I &= \int \arcsin x\,\mathrm{d}x = \int \arcsin(\sin u)\,\frac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int u\,\cos u\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\arcsin x}\end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich nun mittels partieller Integration schnell bewältigen:

$$\begin{aligned} I &= \int u\,\cos u\,\mathrm{d}u = \left|\begin{matrix} f = u & g' = \cos u \\ f' = 1 & g = \sin u \end{matrix}\right| = \\ &= u\,\sin u - \int \sin u\,\mathrm{d}u = u\,\sin u + \cos u + C \\ &= \left[u\,\sin u + \sqrt{1-\sin^2 u} + C\right]_{u=\arcsin x}\end{aligned}$$

Nun fehlt nur noch die Rücksubstitution:

$$I = x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$ ◀

Achtung Da hier ein unbestimmtes Integral steht, ist von einem Integrationsbereich natürlich vorderhand nichts zu sehen. Sobald man aber die konkreten Grenzen einsetzen will, muss man sich Gedanken machen, ob die Bedingung $u' \neq 0$ auch für den gesamten so erfassten Integrationsbereich erfüllt ist – ansonsten besteht zumindest die Möglichkeit, dass man ein unsinniges Ergebnis erhält. ◀

Vom Standpunkt des praktischen Arbeitens aus ist die Substitution jedenfalls ein äußerst nützliches Handwerkszeug, um Integrale zu berechnen oder sie zumindest in eine Form zu bringen, in der sie numerisch gut zu handhaben sind. Einen Algorithmus (soweit das möglich ist) geben wir im Beispiel auf S. 432 an.

Mehr als bei jeder anderen Integrationstechnik ist bei der Substitution Erfahrung der Schlüsselfaktor zur effizienten Anwendung. Gerade am Anfang ist es oft nicht leicht zu erkennen, welchen Ausdruck man am besten substituieren soll – hier hilft wohl nur das Rechnen von möglichst vielen und unterschiedlichen Beispielen. Wie bei der partiellen Integration ist übrigens auch bei der Substitution eine praktische Kurzschreibweise mit senkrechten Strichen oder Wellenlinien verbreitet.

Achtung Beim Übergang zu einer neuen Integrationsvariablen ist es manchmal praktisch, alte und neue Variablen während ein oder zwei Zwischenschritten gemeinsam zu verwenden; das ist natürlich legitim, allerdings sollte man dabei nie auf die Idee

Beispiel: Integration mittels Substitution

Wir präsentieren eine salopp formulierte, kochrezeptartige Anleitung für die Integration per Substitution, die sofort am konkreten Beispiel

$$I = \int \ln(\cos^2 x)\ \cos x\ \sin x \,\mathrm{d}x$$

durchexerziert wird.

Problemanalyse und Strategie:

1. Den Ausdruck im Integranden suchen, der einerseits so aussieht, als würde er bei der Integration Ärger machen, andererseits aber noch vernünftig handhabbar sein, und ihn durch eine neue Variable ersetzen. Die Umkehrbarkeit überprüfen und eventuell auch gleich die Umkehrfunktion bestimmen.
2. Per Kettenregel das Differenzial umrechnen, also die Ableitung der neuen nach der alten Variablen oder umgekehrt berechnen und formal wie aus einer algebraischen Gleichung das Differenzial bestimmen.
3. Im Fall bestimmter Integrale die Integrationsgrenzen umrechnen oder zumindest kennzeichnen, dass sich der Integrationsbereich verändert hat.
4. Neue Variable, neues Differenzial und eventuell neue Grenzen einsetzen. Falls die alte Variable noch vorkommt, mittels Umkehrfunktion durch den entsprechenden Ausdruck in der neuen ersetzen.
5. Das neue, hoffentlich einfachere, Integral lösen, unter Umständen auch durch noch eine Substitution, oder im schlimmsten Fall einen ganz anderen Weg suchen.
6. Bei Erfolg die alte Variable per **Rücksubstitution** wieder einführen. Wurden bei einem bestimmten Integral die Grenzen umgerechnet, können diese natürlich direkt eingesetzt werden und man erspart sich die Rücksubstitution.

Lösung: Wir spielen unser Programm für

$$I = \int \ln(\cos^2 x)\ \cos x\ \sin x \,\mathrm{d}x$$

durch:

1. In unserem Beispiel ist es naheliegend, eine der Winkelfunktionen zu substituieren, vorzugsweise den Kosinus, der ja auch im Argument des Logarithmus auftaucht:

$$I = \int \ln(\cos^2 x)\ \cos x\ \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin x} \end{matrix} \right| =$$

   In einem geeigneten Intervall, etwa $[0,\ b]$ mit $b < \pi/2$ ist der Kosinus umkehrbar, und man erhält $x = \arccos u$.
2. Umrechnen des Differenzials liefert

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin x}\,.$$

3. Da wir es mit einem unbestimmten Integral zu tun haben, entfällt die Umrechnung der Integrationsgrenzen.
4. Unter der Voraussetzung $u = \cos x$ erhalten wir

$$I = -\int \ln(u^2)\, u \,\mathrm{d}u\,.$$

   Damit ist das Integral rein in der neuen Variable u formuliert und kann mit den bekannten Integrationstechniken weiterbehandelt werden:
5. In unserem Beispiel haben wir ein einfacheres Integral erhalten, das sich mit einer weiteren Substitution lösen lässt:

$$\begin{aligned} I &= -\int \ln(u^2)\, u \,\mathrm{d}u = \left| \begin{matrix} v = u^2 \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 2u \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{1}{2}\int \ln v \,\mathrm{d}v \overset{(12.3)}{=} \frac{1}{2}(v - v\,\ln v)\,. \end{aligned}$$

6. Die Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left(u^2 - u^2\,\ln(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - \cos^2 x\,\ln(\cos^2 x)\right)\,. \end{aligned}$$

kommen, eine der beiden als Konstante zu betrachten. Die funktionalen Abhängigkeiten sind immer gegeben und dürfen nicht unter den Tisch fallen gelassen werden. ◀

Auch eine weitere Integrationsregel, der wir bereits in Kap. 10 begegnet sind, kann man als Spezialfall der Substitutionsmethode auffassen. Ist

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

so folgt daraus sofort

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{12.4}$$

Selbstfrage 2

Beweisen Sie (12.4) mittels einer geeigneten Substitution!

Beispiel Wir bestimmen die beiden Integrale

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\ln^2 x)}\,,$$
$$I_2 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,\sin\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei erhalten wir

$$I_1 = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan \ln x + C\,.$$

Analog, nur ein wenig komplizierter, gelangen wir zu:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\sin\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left| \begin{matrix} v = \sqrt{1+u^2} \\ \mathrm{d}v = \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} \end{matrix} \right| = \int \sin v\,\mathrm{d}v = -\cos v + C \\ &= -\cos\sqrt{1+u^2} + C = -\cos\sqrt{1+\sin^2 x} + C\,. \end{aligned}$$ ◀

Auch bei bestimmten Integralen ist Substitution möglich

Auch bestimmte Integrale kann man mittels Substitution lösen, allerdings muss man dabei Folgendes beachten: Substituiert man im Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die Integrationsvariable durch $x = x(u)$, muss man auch die Grenzen entsprechend transformieren. Die neuen Grenzen sind $c = u(a)$ und $d = u(b)$. Man erhält also das Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x(u))\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Eine andere Möglichkeit ist, nach dem Lösen des Integrals, aber noch vor dem Einsetzen der Grenzen, die ursprünglichen Variablen mitsamt ursprünglichen Grenzen wieder einzuführen.

Beispiel Wir bestimmen das Integral

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\ln x)}.$$

Dazu substituieren wir $u = \ln x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\ln x)} = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ x = \mathrm{e}^u & \mathrm{e} \to 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u & 1 \to 0 \end{matrix} \right| = \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u\,(1+u)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln|1+u|\Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

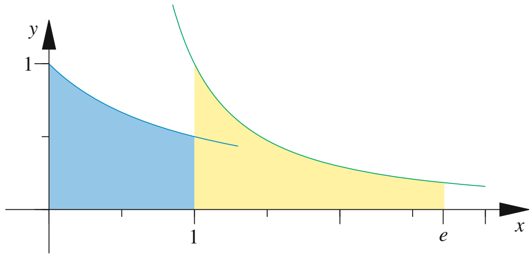

Abb. 12.3 Die Substitution $u = \ln x$ ändert den Verlauf des Integranden und die Integrationsgrenzen, lässt die Fläche unter der Kurve jedoch unverändert

Alternativ hätte man natürlich auch die Grenzen nicht berechnen brauchen, dafür dann aber rücksubstituieren müssen,

$$I = \int_B \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_B = \ln|1+\ln x|\Big|_1^{\mathrm{e}} = \ln 2.$$

Dabei bezeichnet B den nicht näher bestimmten Integrationsbereich in der neuen Variablen u. Der Vergleich der Flächen unter den Funktionsgraphen vor und nach der Substitution ist in Abb. 12.3 dargestellt.

Als weiteres Beispiel ermitteln wir das Integral

$$J = \int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hier setzen wir $u = x^2$ und erhalten

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2,\ x = \sqrt{u} & \sqrt{\pi} \to \pi \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = 2\,x\,\mathrm{d}x & 0 \to 0 \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\cos u\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

In Abb. 12.4 stellen wir wieder den Vergleich der beiden Flächen dar. ◀

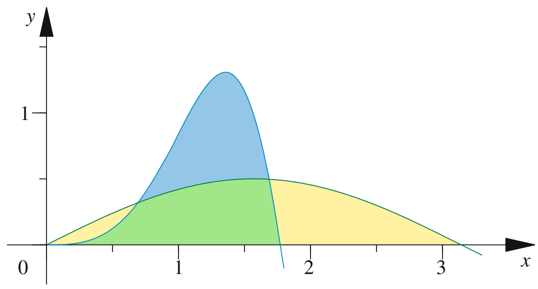

Abb. 12.4 Die Substitution $u = x^2$ ändert den Verlauf des Integranden und die Integrationsgrenzen, lässt die Fläche unter der Kurve jedoch unverändert

Teil II

Die Substitution $x \to u(x)$ hat dann ihre Tücken, wenn u keine injektive Funktion von x ist. In diesem Fall gibt es einerseits keine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $x(u)$, andererseits gibt es im Fall des bestimmten Integrals bei den Integrationsgrenzen Probleme.

Hier ist es meist am besten, die Integration auf mehrere Intervalle aufzuteilen, in denen u dann jeweils injektiv ist. Das ist sicher der Fall, wenn dort $u' \neq 0$ ist. Daher wurde dies bereits beim Aufstellen der Substitutionsformel verlangt. Allerdings gibt es auch Fälle, wo zwar an einer oder mehreren Stellen $u' = 0$ wird, $u(x)$ aber trotzdem streng monoton ist, z. B. $u(x) = x^3$.

Beispiel Wir bestimmen das Integral

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei benutzen wir die Substitution

$$u = \sin x\,, \quad u' = \cos x\,, \quad \mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$

Der Kosinus hat eine Nullstelle bei $x = \pi/2$, an dieser Stelle muss man den Integrationsbereich auftrennen. Transformation der Integrationsgrenzen ergibt $0 \to 0$, $\pi/2 \to 1$ und $\pi \to 0$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u + \int_1^0 u^2 \,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u - \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u = 0 \end{aligned}$$

◀

Anwendungsbeispiel Wir betrachten eine physikalische Größe f, die von der Geschwindigkeitsverteilung eines Ensembles von Teilchen abhängig ist. Nun wollen wir von der Geschwindigkeit v zur kinetischen Energie $E = \frac{m}{2}v^2$ mit der Teilchenmasse m übergehen: Im Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \,\mathrm{d}v$$

substituieren wir also $E = \frac{m}{2}v^2$. Das ergibt $v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$, für die Ableitung von E erhalten wir $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = mv$, also genau den Impuls p. Damit gilt für das Differenzial:

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}E}{mv} = \pm\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}}.$$

Zwei Probleme sind nun ganz offensichtlich: Sowohl die untere Grenze $v = -\infty$ als auch die obere $v = +\infty$ entsprechen dem gleichen Wert $E = \infty$. Außerdem ist keineswegs klar, welches Vorzeichen für $\pm$ wirklich zu wählen ist.

Beide Probleme haben ihren Ursprung in der Tatsachen, dass $E = \frac{m}{2}v^2$ eben nicht injektiv ist:

Als Abhilfe betrachten wir die v-Intervalle $(-\infty, 0)$ und $[0, +\infty)$ getrennt: Im ersten Fall kommt das negative Vorzeichen der Wurzel zum Tragen, im zweiten das positive:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{0} f(v)\,\mathrm{d}v + \int_0^{+\infty} f(v)\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_{\infty}^{0} f\left(-\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} + \int_0^{\infty} f\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} \\ &= \int_0^{\infty} f\left(-\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} + \int_0^{\infty} f\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)}{\sqrt{2mE}}\,\mathrm{d}E = \int_0^{\infty} g(E)\,\mathrm{d}E \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt

$$g(E) = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)}{\sqrt{2mE}}$$

gesetzt. ◀