Mathematik für Informatiker 2 – SS 2024
Studiengang Angewandte Informatik

Gemischte Übungen: Grenzwerte, Un-/Stetigkeit, Polynome

1 Grenzwerte berechnen, um das Näherungsverhalten am Rand des Definitionsbereiches zu bestimmen

Bestimmen Sie für die angegebenen Funktionen das Verhalten bei Annäherung an den Rand ihres Definitionsbereiches. Falls dies mit den bisherigen Mitteln nicht möglich ist, z.B. weil ein unbestimmter Ausdruck für das Rechnen mit Unendlich entsteht, erläutern Sie, welcher Ausdruck vorliegt.		Spezial-situation?
1.1	**Die Gauß-Funktion** $y(x) = a \cdot e^{-b(x-x_0)^2}$ **mit Konstanten** $a, b > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ **Beispiel:** $y(x) = 3 \cdot e^{-0.1(x-2)^2}$	
1.2	**Aperiodische Schwingungen / Kriechbewegungen** $y(t) = 10 \cdot e^{-2t} - 5 \cdot e^{-3t}$	
1.3	**Polynom * Exp** $y(t) = (2 - 10t) \cdot e^{-3t}$	
1.4	$y(x) = x \cdot \ln x$	

1.5	$y(x) = \frac{\ln x}{x}$	

2 Spezialfall Grenzwerte von Polynomen bzw. gebrochen-rationalen Funktionen für $x \to \pm\infty$

Bestimmen Sie für die folgenden Polynome bzw. gebrochen-rationalen Funktionen die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Hinweis: Weshalb können wir in diesem Fall auch (schon) Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$ „zu Ende rechnen" bzw. „vermeiden"?	
2.1	$y(x) = 2x - 5x^3 + 7x^2$
2.2	$y(x) = \frac{2 - 3x - 4x^3}{6x^3 - 5x^2 + 1}$

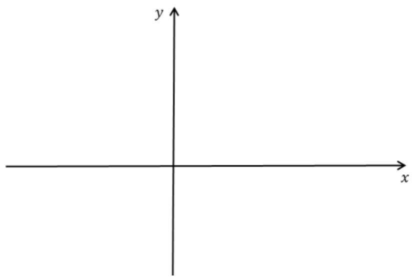
3 Übung: Stetigkeit bzw. die Arten von Unstetigkeitsstellen begründen

<table>
<tr><td colspan="2">
a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der Funktion
b) An welchen Stellen bestehen Zweifel bzgl. der Stetigkeit der Funktion? Ermitteln Sie dafür den links- und rechtsseitigen Grenzwert und entscheiden Sie, ob bzw. welche Art von Unstetigkeit vorliegt.
c) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten bei Annäherung an den Rand des Definitionsbereichs ($x \to \pm\infty$ und bei inneren Punkten Annäherung von beiden Seiten!)
</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>

$f(x) = \sqrt{1+x}\, e^x + \cos x$

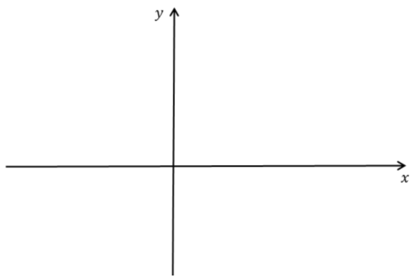
</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



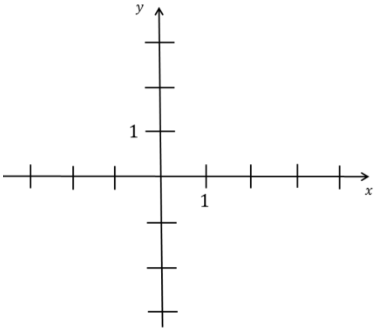
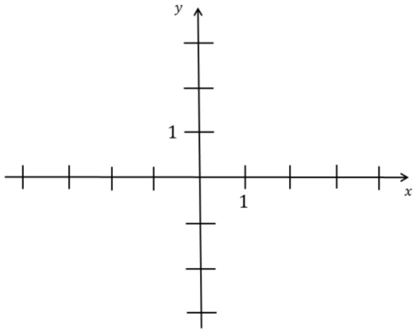
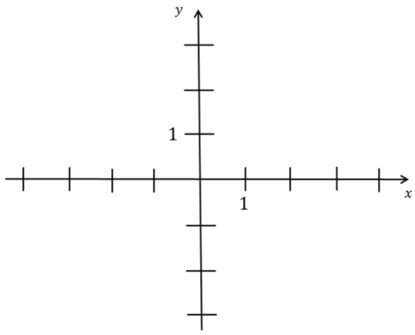
</td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+8}{(x+1)(x+2)} & \text{für } x \neq -2, -1 \\ 0 & \text{für } x = -1 \\ -4 & \text{für } x = -2 \end{cases}$$



</td></tr>
</table>

4 Grafischer Verlauf von Polynomen

Beispiel 1:	Beispiel 2:	Beispiel 3:
$P_1(x) = 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 48x$ $P_1(x) = 2x(x-3)(x-4)(x+2)$	$P_2(x) = -x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x + 9$ $P_2(x) = (-1)(x-1)(x-3)^2(x+1)$	$P_3(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6$ $P_3(x) = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$
Nullstellen	Nullstellen	Nullstellen
Randverhalten (GWe)	Randverhalten (GWe)	Randverhalten (GWe)
Grobe Skizze 	Grobe Skizze 	Grobe Skizze 

„Höcker“ mit Hoch- oder Tiefpunkten (Maxima/Minima) erst über Differentialrechnung exakt ermittelbar.

5 Anwendungsbeispiel: Mit Grenzwerten Näherungs- / asymptotisches Verhalten beschreiben

Verbreitung innovativer Produkte, z.B. Internetanschlüsse: Neue technische Produkte wie Internetanschlüsse, das Mobiltelefon oder Flachbildschirme verbreiten sich wie Bakterienkulturen oder Krankheiten zunächst langsam und steigern dann die Geschwindigkeit. Später verlangsamt sich das Verbreitungstempo, bis letztendlich eine gewisse Sättigung erreicht ist. Derartige Wachstumsvorgänge mit beschränkten Ressourcen lasen sich oft durch die logistische Wachstumsfunktion sehr gut beschreiben.

Logistisches Wachstum gegen das Niveau S (Sättigung)

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{S}{1+Ae^{-bt}}} \qquad \text{mit } S, A, b > 0 \qquad \text{Hier gilt: } A = \frac{S}{y_0} - 1$$

Die Zunahme der Internetanschlüsse in Österreichs Haushalten könnte durch eine **logistische Wachstumsfunktion** modelliert werden. Der Ausstattungsgrad $y(t)$ gibt dabei an, wie viele von S Haushalten nach t Jahren im Durchschnitt einen Internetanschluss besitzen. Es sei oben S = 100, a = 9, b = 0.3.

Argumentieren Sie das Monotonieverhalten.

Argumentieren und das Verhalten bei immer späteren Zeitpunkten (d.h. für $t \to \infty$) durch Grenzwertbestimmung.

Argumentieren und das Verhalten für $t \to -\infty$ durch Grenzwertbestimmung

Erstellen Sie eine **grobe** Skizze des Graphen von $y(t)$.

Nach wie vielen Jahren besitzen nach diesem Modell 80% aller Haushalte einen Internetanschluss?

Lösung:
11.945
≈ 12 J

6 Grenzwerte von Funktionen

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

6.1	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-(1+x)^2}{x}$	$-\infty$
6.2	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-(1+x)^2}{x^3}$	0
6.3	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{3x+1}\right)^{-\frac{3x^2+2}{5x-3}}$	0
6.4	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{18x^2+1}}{\sqrt{32x^2}-3}$	$\frac{3}{4}$

7 Zwischenwertsatz

7.1	Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 4x - 15$ eine Nullstelle im Intervall $[1,2]$ besitzt. Können Sie begründen, wieso das die einzige Nullstelle in diesem Intervall ist?
7.2	Es gibt viele sog. transzendente Gleichungen, die sich nicht analytisch lösen lassen. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes können wir aber oft feststellen, ob es in einem Intervall eine Lösung gibt, die dann numerisch bestimmt werden kann. Zeigen Sie: Die Gleichung $\ln(x) = 3x - x^2$ hat eine Lösung im Intervall $[1,3]$.
7.3	Ein Fixpunkt einer Funktion ist ein Wert x_p, für den $f(x_p) = x_p$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x + 3x$ einen Fixpunkt im Intervall $[-1,1]$ besitzt.