Kombinatorik = Die Kunst des Zählens

Frage: Anzahl von Möglichkeiten / Anzahl von Objekten mit gewissen Eigenschaften

> **Beispiel:** **5Az3wQ52$E&eYz0**
> Wie viele 15-stellige Passwörter gibt es, die an der ersten und letzten Stelle eine Zahl benutzen und mindestens eines der vier Sonderzeichen „!, &, $, ?" beinhalten?

Objekte mit gewissen Eigenschaften kann man mathematisch als Menge betrachten.

Eigenschaften, die über „mindestens" bzw. „(einschließendes) oder", „nicht", „sowohl als auch" formuliert werden, können wir über Vereinigungs-, Komplement-, Durchschnittsmenge abbilden.

Erinnerung: Anzahl der Elemente einer Menge = Mächtigkeit der Menge

Hier zunächst grundlegende Zählverfahren, die über Summe und Differenz arbeiten.

Die im folgenden Abschnitt auftretenden Mengen besitzen nur endlich viele Elemente.

Zählverfahren für ODER, MINDESTENS – NICHT – UND (Teil 1)

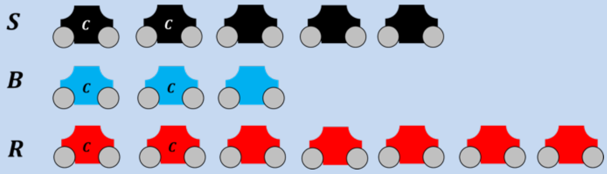
Frage: Anzahl Objekte	**Darstellung als Menge**	**Geeignetes Zählverfahren**	
A ODER B (oder beide) **MINDESTENS** eine von mehreren Eigenschaften	**Vereinigungsmenge**	**Inklusion-Exklusion:** $\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|$ Nur falls A, B **disjunkt** gilt die einfachere **Summenregel:** $\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$	Ermöglicht alle Elemente zu zählen, die zu (**mindestens**) einer der Mengen A **oder** B gehören.
NOT: Nicht A…, Kein… **MINDESTENS Anzahl…**	**Komplement bzw. Differenzmenge** (G eine Obermenge von A)	**Komplementregel:** $\|\overline{A}\| = \|G\| - \|A\| = \text{Alle} - \|A\|$ $\|A\| = \|G\| - \|\overline{A}\| = \text{Alle} - \|\overline{A}\|$	
Wissen über Gegenteil nutzen für **NICHT BEIDE** **NICHT (A ODER B)** **UND (beide)** falls Wissen über Gegenteil bekannt **ODER / MIND. ein…** falls Wissen über Gegenteil bekannt	**Regel von de Morgan**	$\|A \cap B\| = \text{Alle} - \|\overline{A \cap B}\|$ $= \text{Alle} - \|\overline{A} \cup \overline{B}\|$ $\|A \cup B\| = \text{Alle} - \|\overline{A \cup B}\|$ $= \text{Alle} - \|\overline{A} \cap \overline{B}\|$	„**Mindestens** in einer der Mengen" = **ALLE** minus „in keiner der Mengen"

In einer Schule gibt es 100 Schüler, von denen 60 in einem Sportverein, 50 in einem Musikverein und 30 in beiden Vereinen aktiv sind. Wie viele Schüler sind in mindestens einem der beiden Vereine aktiv?

A) 60
B) 70
C) 80
D) 110

Ein Autohändler hat 15 Autos zu bieten:

5 schwarze, 3 blaue,
7 andersfarbige.



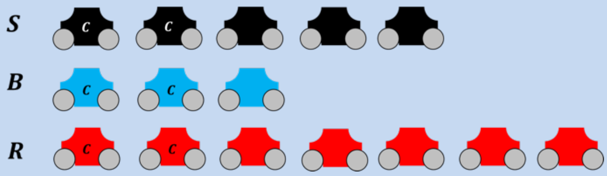
Es gibt 5 Neuwagen, 10 Gebrauchte.
8 Diesel, 7 Benziner.
Von den 7 Benzinern sind 3 Neuwagen.

Sie wollen einen gebrauchten Diesel kaufen. Aus wie vielen Fahrzeugen können Sie wählen? Können Sie Ihre Antwort mit einer Formel begründen?

A) 2
B) 6
C) 12
D) 18

Ein Autohändler hat 15 Autos zu bieten:

5 schwarze, 3 blaue,
7 andersfarbige.



Es gibt 5 Neuwagen, 10 Gebrauchte.
8 Diesel, 7 Benziner.
Von den 7 Benzinern sind 3 Neuwagen.

Sie wollen ein gebrauchtes Auto **oder** einen Diesel. Aus wie vielen Fahrzeugen können Sie wählen? Können Sie Ihre Antwort mit einer Formel begründen?

E) 2
F) 6
G) 12
H) 18

Fall A: Anordnung von Elementen mit Beachtung der Reihenfolge: Variationen & Permutationen

Bekannt aus Studierauftrag: Produktregel

Anwendung: Anordnung von Elementen mit Beachtung der Reihenfolge

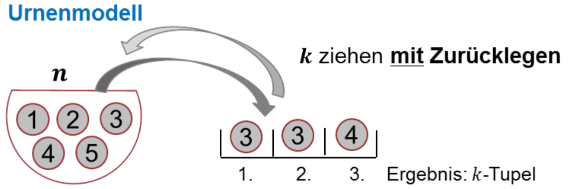
Variationen: Anordnungen mit Beachtung der Reihenfolge
VmW: k aus n mit Wiederholung

Für die Wahl von k aus n Objekten
- mit Beachtung der Reihenfolge und
- mit Wiederholungen

gibt es $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k\text{-fach}} = n^k$ Möglichkeiten.

Variationen mit Wiederholung (VmW)

Urnenmodell



$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ Möglichkeiten

Variationen: Anordnungen mit Beachtung der Reihenfolge
VoW: k aus n ohne Wiederholung / PoW: n aus n ohne Wiederholung

Für die Wahl von k aus n Objekten
- mit Beachtung der Reihenfolge und
- ohne Wiederholungen

beträgt die Anzahl der Möglichkeiten:

$$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

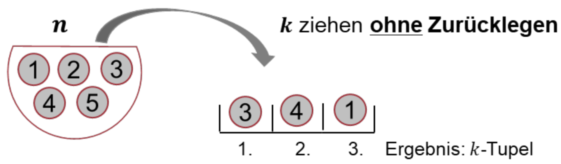
Variation ohne Wiederholung (VoW)

Die Anzahl der Möglichkeiten k verschiedene Elemente (bzw. ein k-Tupel) **umzuordnen**, beträgt $\boldsymbol{k}!$

Umordnung = **Permutation**

PoW = Permutation ohne Wiederholung
Alle n Elemente o. Wiederholung anordnen

Urnenmodell



$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = 60$ Möglichkeiten

Baumdiagramm

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben a, b, c anzuordnen (ohne Wiederholung)?

Betrachten Sie Passwörter aus Buchstaben oder Ziffern. Umlaute sind nicht erlaubt, Groß-Klein-Schreibung wird unterschieden.

Wie viele achtstellige Passwörter gibt es, wenn mindestens eines der Zeichen eine Ziffer sein muss?

A) $62^8 - 1$
B) $52^7 + 10^1$
C) $52^7 + 10^8$
D) $62^8 - 52^8$

Betrachten Sie Passwörter aus Buchstaben oder Ziffern. Umlaute sind nicht erlaubt, Groß-Klein-Schreibung wird unterschieden.

Wie viele achtstellige Passwörter gibt es, wenn kein Zeichen doppelt vorkommt?

A) 62^8
B) $62!$
C) $62!/8!$
D) $62!/54!$

Betrachten Sie Passwörter aus Buchstaben oder Ziffern. Umlaute sind nicht erlaubt, Groß-Klein-Schreibung wird unterschieden.

Wie viele achtstellige Passwörter gibt es mit genau 2 Ziffern?

A) $\binom{8}{2}$

B) $\binom{8}{2} \cdot 10^2 \cdot 52^6$

C) $\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{1} \cdot 10^2 \cdot 52^6$

D) $10^2 \cdot 52^6$

Fall B: Die Reihenfolge spielt keine Rolle: Kombinationen

Wenn beim Ziehen von k aus n die Reihenfolge keine Rolle spielt, sind im vorigen Urnenmodell alle Umordnungen der k gezogenen Elemente (somit jeweils $k!$ Resultate) als gleichwertig anzusehen. Die Anzahl der zu unterscheidenden Resultate ist also nur der $k!$-Anteil der Möglichkeiten mit Beachtung der Reihenfolge.

Kombinationen: Ohne Beachtung der Reihenfolge

KoW: k aus n ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge

Für die Wahl von k aus n Objekten

- ohne Wiederholungen
- ohne Beachtung der Reihenfolge

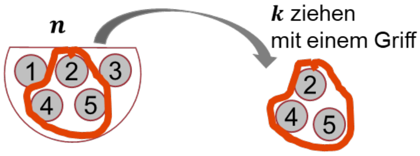
beträgt die Anzahl der Möglichkeiten:

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

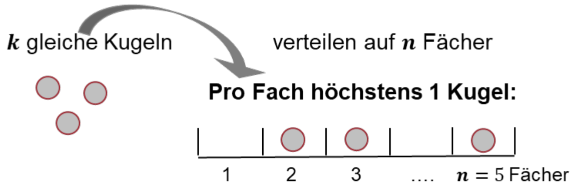
k-Kombinationen ohne Wiederh. (KoW)

Dies entspricht (und so rechnet man auch oft) der Anzahl aller k-VoW (welche die Reihenfolge beachten) geteilt durch die Anzahl $k!$ der möglichen Umordnungen der k gewählten Elemente.

Urnenmodell:



Fächermodell:



Summenmodell:

Möglichkeiten, **aus n Ziffern 0,1 die Summe k zu bilden**:

$\{(z_1, \ldots, z_n) |\ z_1 + \cdots + z_n = k\ ;\ z_i \in \{0,1\}\}$

1 Beispiele KoW

1.1	Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 aus 49 (verschiedenen) Zahlen zu ziehen (Lotterie-Aufgabe)?
1.2	Wie viele „Wörter“ können Sie aus den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden? (Permutation mit Wiederholungen, PmW)

Auswahl k aus $M + N$

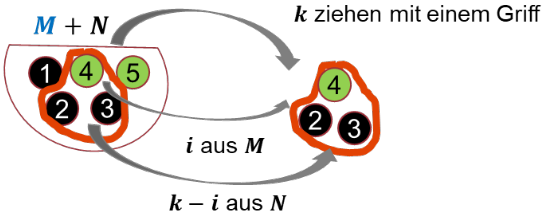
Markierte Elemente auswählen:

Eine Menge bestehe aus $M + N$ unterscheidbaren Elementen, wobei davon M Stück eine gewisse Eigenschaft besitzen („markiert sind“), die andern N nicht.

Die Anzahl der Möglichkeiten, dass bei Auswahl von k Elemente genau i die Markierung besitzen, ist nach Produktregel

$$\binom{M}{i} \cdot \binom{N}{k-i}$$

Urnenmodell:



2 Beispiel Auswahl

2.1	**Wareneingangskontrolle. Qualitätssicherung.** Eine Lieferung von 10 PCs enthält 3 fehlerhafte Geräte. Man entnimmt dieser Lieferung eine Stichprobe vom Umfang 5 (= 5-elementige Teilmenge). a) Wie viele verschiedene Stichproben gibt es? b) Wie viele Stichproben enthalten genau 2 defekte Geräte? c) Wie viele Stichproben enthalten mindestens 1 defektes Gerät?

Satz von der Verteilung von k Kugeln auf n Schachteln

Kombinationen: Ohne Beachtung der Reihenfolge

KmW: k aus n <u>mit</u> Wiederholung und <u>ohne</u> Beachtung der Reihenfolge

Für die Wahl von k aus n Objekten

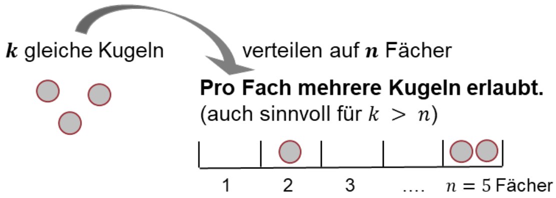
- <u>ohne</u> Beachtung der Reihenfolge
- <u>mit</u> Wiederholungen

Beträgt die Anzahl der Möglichkeiten:

$$\binom{n-1+k}{k}$$

k-Kombinationen mit Wiederh. (KmW)

Fächermodell



Pro Fach mehrere Kugeln erlaubt.
(auch sinnvoll für $k > n$)

Summenmodell

Möglichkeiten, **aus n Ziffern (0 bis k) die Summe k zu bilden**:

$\{(z_1, \dots, z_n) \mid z_1 + \dots + z_n = k \, ; \, z_i \in \mathbb{N}_0\}$

3 Beispiel

3.1	Eine Urne habe eine rote, eine gelbe und eine grüne Kugel. Es wird 4-mal gezogen mit Zurücklegen. Wie viele Resultate sind möglich, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt?

Zusammenfassung: Kombinatorik

Mächtigkeit der Vereinigungsmenge Ermöglicht bei Zählproblemen alle Elemente zu zählen, die zu (**mindestens)** einer der Mengen A **oder** B gehören.	**Inklusion-Exklusion:** $\lvert A\cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A\cap B\rvert$ Nur falls A, B **disjunkt** gilt die einfachere **Summenregel:** $\lvert A\cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$
Mächtigkeit der Komplementmenge (G eine Obermenge von A) Ermöglicht bei Abzählproblemen das Wissen über das Gegenteil zu nutzen. „**Mindestens** in einer der Mengen“ = **ALLE** minus „in keiner der Mengen“	**Komplementregel:** $\lvert\overline{A}\rvert = \lvert G\rvert - \lvert A\rvert$ bzw. $\lvert A\rvert = \lvert G\rvert - \lvert\overline{A}\rvert$ **Komplementregel für Vereinigungsmenge:** $\lvert A\cup B\rvert = \lvert G\rvert - \lvert\overline{A\cup B}\rvert = \lvert G\rvert - \lvert\overline{A}\cap\overline{B}\rvert$ **Komplementregel für Schnittmenge:** $\lvert A\cap B\rvert = \lvert G\rvert - \lvert\overline{A\cap B}\rvert = \lvert G\rvert - \lvert\overline{A}\cup\overline{B}\rvert = \lvert G\rvert - (\lvert\overline{A}\rvert + \lvert\overline{B}\rvert - \lvert\overline{A}\cap\overline{B}\rvert)$
Anzahl aller k-Tupel **Mächtigkeit der Kreuzmenge** Ermöglicht bei Abzählproblemen die Berück-sichtigung einer Reihenfolge bzw. die Abbildung eines Schritt-für-Schritt-Prozesses	**Produktregel für die** Anzahl aller möglichen k-Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ mit $a_i \in A_i$ $\lvert A_1 \times \dots \times A_k\rvert = \lvert A_1\rvert \cdot \lvert A_2\rvert \cdot \dots \cdot \lvert A_k\rvert$ **Spezialfall: Gleiche Menge** $\lvert\underbrace{A\times\cdots\times A}_{k\text{-fach}}\rvert = \underbrace{n\cdot n\ \cdot\dots\cdot n}_{k\text{-fach}} = \boldsymbol{n^k}$

Überblick: Anzahl der Möglichkeiten k aus n

Aus n Objekten (Menge mit n Elementen) sollen **k ausgewählt** werden. Wie viele **Möglichkeiten** gibt es?

Unterscheide 4 Situationen („Stichproben“)	**mit** Beachtung der **Reihenfolge**: „geordnete Auswahl“ **„k-Variation / Permutation“**	**ohne** Beachtung der **Reihenfolge**: „ungeordnete Auswahl“ **„k-Kombination“**
ohne Wiederholungen	**VoW** $\boldsymbol{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Falls $k = n$ (alle Anordnungen): $\boldsymbol{n!}$	**KoW** $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$
mit Wiederholungen	**VmW** $\underbrace{n\cdot\dots\cdot n}_{k\text{-fach}} = \boldsymbol{n^k}$	**KmW** $\boldsymbol{\binom{n-1+k}{k}}$

Statt Auswahl sagt man in der Wahrscheinlichkeitstheorie / Statistik auch „geordnete bzw. ungeordnete **Stichprobe**“.

Dies entspricht (und so rechnet man auch oft) der Anzahl der k-Permutationen geteilt durch die Anzahl der möglichen Anordnungen der k gewählten Elemente (d.h. dividiert durch $k!$)

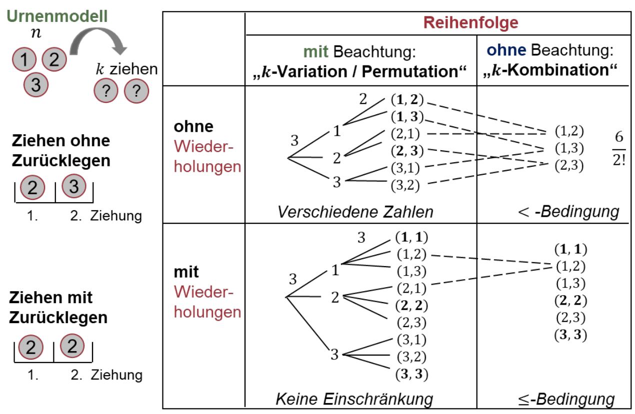
Variation: Baumdiagramm / Produktregel.

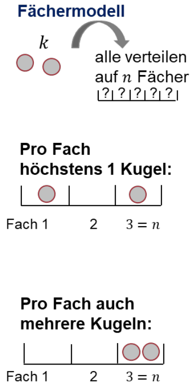
Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln.

Kombination: Mit k Kugeln n Fächer belegen.

Summe k aus n Zahlen bilden.

Variation (Permutation) versus Kombination und die passenden Modelle zu den Abzählproblemen:





Summen-Modell:

Summe k aus n Ziffern bilden.

Aus n Ziffern 0,1 die Summe k bilden:

$\{(z_1, \dots, z_n) \mid z_1 + \dots + z_n = k\ ;\ z_i \in \{0,1\}\}$

Aus n Ziffern (zw. 0 und k) die Summe k bilden:

$\{(z_1, \dots, z_n) \mid z_1 + \dots + z_n = k\ ;\ z_i \in \mathbb{N}_0\}$

Satz von der Verteilung von k Kugeln auf n (alte) Schachteln:

4 schwarze Kugeln sollen auf 10 Fächer verteilt werden (in jedem Fach dürfen mehrere Kugeln liegen). Dabei handelt es sich um

E) Variation mit Wiederholung
F) Variation ohne Wiederholung
G) Kombination mit Wiederholung
H) Kombination ohne Wiederholung

Ihre Lieblingseisdiele bietet 8 verschiedene Sorten Eis an. Sie möchten 3 Kugeln Eis kaufen, wobei Sie (selbstverständlich, Abwechslung schmeckt besser!) nicht zweimal die gleiche Sorte wählen würden.
Um welche Verteilung handelt es sich dabei?

A) Variation mit Wiederholung
B) Variation ohne Wiederholung
C) Kombination mit Wiederholung
D) Kombination ohne Wiederholung

Ihre Lieblingseisdiele bietet 8 verschiedene Sorten Eis an. Sie möchten 3 Kugeln Eis kaufen, wobei Sie (selbstverständlich, Abwechslung schmeckt besser!) nicht zweimal die gleiche Sorte wählen würden.

Wie viele Kombinationsmöglichkeiten haben Sie?

A) 56
B) 120
C) 336
D) 512