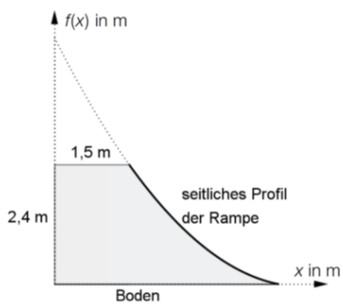
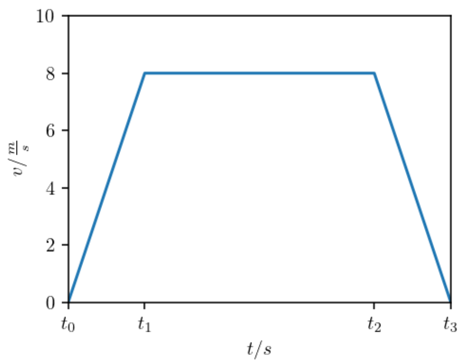
4 Aufgaben: Integration per Substitution (und mit „Substitution-Tipp“)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral		Tipp Substitution	Lösung (machen Sie die Probe durch Differenzieren)
4.1	$\int x\sqrt{x-1}\,dx$	$z = x - 1$	$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$
4.2	$\int \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\,dt$	$z := 1 + t^2$	$= -\frac{1}{2(1+t^2)} + \frac{1}{4(1+t^2)^2} + C$
4.3	$\int \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$	$z = \sqrt{y}$	$= 2\sqrt{y}\ln y - 4\sqrt{y} + C$

5 Aufgaben: Integration mit partieller Integration

5.1	$\int x\ \ln x\,dx$	$\frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) + C$
5.2	$\int \ln x\,dx$ (Tipp: $\ln x = 1 \cdot \ln x$)	$x\ln(x) - x + C$
5.3	$\int_0^1 \ln x\,dx$	-1
5.4	$\int \ln(x^3)\ dx$ (Tipp: Logarithmusgesetze anwenden!)	

6 Anwendungsaufgaben

6.1	Zum Zeitpunkt t = 0 beginnt eine Münze mit Anfangsgeschwindigkeit v0 = 3 m/s von einem Wolkenkratzer zu fallen. In den ersten 6 Sekunden beschleunigt die Münze mit der konstanten Beschleunigung $a = 10\,m/s^2$. a) Stelle eine Funktionsgleichung der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v auf (t in s, $v(t)$ in m/s). Berechne die Geschwindigkeit der Münze nach 6 Sekunden in km/h. b) Stelle eine Funktionsgleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s mit s(0) = 0 auf (t in s, s(t) in m). Berechne den Weg, den die Münze in diesen 6 Sekunden zurücklegt. MmF
6.2	Ein Unternehmen, das Skate-Parks errichtet, plant eine neue Minirampe. Das seitliche Profil der Rampe kann durch eine Parabel 2. Ordnung modelliert werden: $f\,(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4{,}95\ mit\ 1{,}5 \le x \le 4{,}5$ x: waagrechte Entfernung von der Rückwand in Metern (m) $f\,(x)$: Höhe der Rampe in Metern (m) an der Stelle x a) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung. Entnehmen Sie die dazu notwendigen Werte der Abbildung. b) Wie viel Beton wird für eine Rampe der Breite 2m benötigt?  MmF
6.3	Eine Maschinensteuerung bewegt eine Linearachse so, dass sie zu Beginn und zum Ende der Bewegung im Stillstand ist. Die Beschleunigung (positiv und negativ) ist dabei durch den Antrieb auf $a_{max} = 10\frac{m}{s^2}$ begrenzt. Die maximale Geschwindigkeit der Achse beträgt $v_{max} = 8\frac{m}{s}$. Um einen Weg von $s = 5m$ zurückzulegen wird zuerst mit maximaler Beschleunigung beschleunigt, bis die maximale Geschwindigkeit erreicht ist. Dann wird mit konstanter Geschwindigkeit gefahren, bis rechtzeitig vor Erreichen der Endposition wieder mit maximaler (negativer) Beschleunigung gebremst wird. Es ergibt sich ein Drei-Phasen-Profil für die Geschwindigkeit wie in der Abbildung rechts.  a) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem die maximale Geschwindigkeit erreicht ist. b) Berechnen Sie den insgesamt zurückgelegten Weg s, wobei Sie t_2 als Variable stehenlassen. c) Bestimmen Sie jetzt t_2 so, dass $s = 5m$ ist.

7 Übung: Uneigentliche Integrale berechnen.

Stammfunktion können Sie einer Formelsammlung entnehmen!!!!

7.1	$\int_0^\infty x e^{-\lambda x^2} dx \quad (\lambda > 0)$ (z. B. relevant in der Statistik; SF ohne Substitution möglich)	$= \frac{1}{2\lambda}$
7.2	$\int_{-\infty}^\infty x e^{-\lambda x^2} dx \quad (\lambda > 0)$ (z. B. relevant in der Statistik)	$= 0$
7.3	$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ (SF per Kettenregel oder explizite Substitution der inneren Fktn.)	$= 2$
7.4	$\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$	$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
7.5	$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4}\, dx$	$= \infty$

Quellenangabe: MmF Projekt MmF: Aufgabensammlung Integralrechnung
https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Materialien/AS-Integralrechnung.pdf