- Abzugeben sind handschriftlichen Ausarbeitungen mit ausführlichen, nachvollziehbaren Lösungswegen.
- Bearbeiten Sie das JiTT-Quiz direkt in Moodle.
- Die Abgabe der restlichen Aufgaben erfolgt im PDF-Format als Moodle-Abgaben. Dafür
  Ausarbeitung auf Papier und als PDF einscannen
  **oder** Ausarbeitung mit digitalem Stift und die digitale Schrift
  „einbetten" / „verschmelzen" / drucken als PDF, …)
- Pro Moodle-Abgabe nur die relevanten Seiten hochladen.
- Geben Sie auf den Seiten rechts oben Ihre Matrikelnummer an.
- Sofern nichts anderes gesagt wird, rechnen Sie bitte exakt oder auf 4 Nachkommastellen genau.

**ACHTUNG:** Ersetzen Sie in den folgenden Aufgaben $a$ jeweils durch die letzte Stelle Ihrer Matrikelnummer (Das ist die 6. Ziffer, ignorieren Sie die hintere Versionsnummer -01!). Anstelle von 0 bzw. 1 wählen Sie bitte 5 bzw. 6.

## Aufgabe 1 (50 Punkte)

Bearbeiten Sie den in Moodle bereitgestellten Studierauftrag und bestehen Sie das zugehörige JiTT-Quiz.

## Aufgabe 2 (12 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Folgen eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift an. Die erste angegebene Zahl ist jeweils das Folgenglied $a_0$.

a) 1, -3, 1, -3, … ( 4P )

b) 2, 1, ½, ¼, … ( 4P )

c) $2, 4a, 8a^2, 16a^3, \ldots$ ( 4P )

## Aufgabe 3 (16 Punkte)

Kreuzen Sie für jede der folgenden Folgen an, welche der Eigenschaften zutreffen (je 1P pro Antwort).

| | | Monoton | Beschränkt | Konvergent | Bestimmt divergent |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $a_n = (1 - \exp(n^2))$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| b) | $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = a_n^{0,2}$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| c) | $a_n = -\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{n}$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| d) | $a_n = \left(\sqrt{n^4 + 8n^3 - 1} - (n^2 + 2)\right)$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**Aufgabe 4 (22 Punkte)**

Als SIR-Modell (susceptible-infected-removed model) bezeichnet man in der mathematischen Epidemiologie, einem Teilgebiet der theoretischen Biologie, einen klassischen Ansatz zur Beschreibung der Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten mit Immunitätsbildung, der eine Erweiterung des SI-Modells darstellt. Benannt ist es nach der Gruppeneinteilung der Population in Suszeptible (S), das heißt Ansteckbare, Infizierte (I) und aus dem Infektionsgeschehen entfernte Personen (R). (Wikipedia).

In vereinfachter Form lässt sich das SIR-Modell als gekoppeltes System von drei Folgen formulieren, wobei der Index n in diesem Fall die Tage seit Beginn der Epidemie angibt.

$$S_{n+1} = S_n - \beta \frac{S_n}{N} \cdot I_n$$
$$R_{n+1} = R_n + \gamma I_n$$
$$I_{n+1} = I_n + \left(\beta \frac{S_n}{N} - \gamma\right) I_n$$

Dabei ist $\gamma$ die Rate, mit der inifzierte Personen an einem Tag genesen oder sterben (Übergang von $I$ nach $R$) und $\beta$ die Rate neuer Infektionen durch Ansteckungen. Man bezeichnet $\frac{\beta}{\gamma}$ als Basisreproduktionszahl (vielleicht kennen Sie diesen Ausdruck noch aus Zeiten der Corona-Pandemie).
Die (konstante) Gesamtzahl der Individuen $N$ ist die Summe $N = S + R + I$.

Wir wählen für diese Aufgabe eine Populationsgröße $N = 10.000$ und als Startwerte $S_0 = 9.999, R_0 = 0$ und $I_0 = 1$, das heißt es gibt eine infizierte Person und keine genesenen/gestorbenen. Weiterhin setzen wir $\beta = 0{,}2$ fest.

a) Welche Bedeutung hat der Grenzwert $S_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$? ( 2P )

b) (Ohne Berechnung, nur durch nachdenken) ( 2P )
Welchen Wert erwarten Sie im Modell für $I_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$? Warum?

c) Wählen Sie eine Basisreproduktionszahl von $\frac{\beta}{\gamma} = a$ (die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnr.). ( 14P )

Schreiben Sie ein Python-Programm, mit dem Sie die drei gekoppelten Folgen berechnen und plotten können.

Bestimmen Sie (grafisch) den Grenzwert $S_\infty$ (gerundet auf ganze Zahlen) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Erstellen Sie Plots der drei Größen $S, R$ und $I$ als Funktion von $n$ und geben Sie diese ab.
Wählen Sie dabei den Maximalwert von $n$ so, dass der Verlauf der Epidemie und die Grenzwerte gut erkennbar sind.

d) Wählen Sie jetzt eine Basisreproduktionszahl von $\frac{1}{a}$. Welchen Grenzwert erhalten Sie jetzt für $S_\infty$ und wie können Sie dieses Ergebnis interpretieren? ( 4P )