

## UNIDAD 2 SISTEMAS CON UN (1) GRADO DE LIBERTAD

### FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Como fue mencionado en la unidad anterior, el objetivo fundamental del análisis determinístico de vibraciones es la evaluación de los desplazamientos a lo largo del tiempo de los grados de libertad del sistema bajo una carga dinámica. En la mayoría de los casos, un análisis que involucra un número limitado de grados de libertad provee suficiente aproximación, así el problema se reduce a la determinación de los desplazamientos a lo largo del tiempo de esos grados de libertad. Las expresiones matemáticas que definen el comportamiento del sistema son llamadas ECUACIONES DE MOVIMIENTO del sistema. La solución de esas ecuaciones provee los desplazamientos requeridos.

La formulación de las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico es, probablemente la etapa más importante, y a veces lo más difícil, del análisis de las vibraciones. Aquí solo se muestran tres métodos para formular estas ecuaciones de movimiento con sus ventajas dependiendo del tipo de problema, Segunda Ley de Newton (Principio de D'Alembert), Principio de los desplazamientos virtuales y Ecuaciones de Lagrange.

#### - SEGUNDA LEY DE NEWTON. PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

En esta sección se considera la formulación de la ecuación de movimiento (ecuación de equilibrio dinámico), usando la segunda ley de movimiento de Newton. El procedimiento se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Seleccione una coordenada adecuada para describir la posición de cada masa o cuerpo rígido en el sistema. Utilice una coordenada lineal para describir el movimiento lineal de cada masa puntual o la del centroide de un cuerpo rígido y, una coordenada angular para describir el movimiento angular de un cuerpo rígido.
2. Determine la configuración de equilibrio estático del sistema y mida el desplazamiento de cada masa o cuerpo rígido a partir de su posición de equilibrio estático.
3. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada masa o cuerpo rígido cuando se le da un desplazamiento y velocidad positivo (convención de signos, sentidos de los vectores). Indique todas las fuerzas activas y reactivas que actúan sobre cada masa o cuerpo rígido.
4. Aplicar la segunda ley de movimiento de Newton a cada masa o cuerpo rígido a partir del diagrama de cuerpo libre. La segunda ley del movimiento de Newton se puede establecer de la siguiente manera:

*La tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una masa es igual a la fuerza que actúa sobre ella.*

Por lo tanto, si la masa "m" se desplaza una distancia  $\vec{x}(t)$  cuando actúa sobre ella una fuerza resultante  $\vec{F}(t)$  en la misma dirección, la segunda ley de movimiento de Newton resulta:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right)$$

Si se admite una masa "m" constante a lo largo del tiempo, esta ecuación se reduce a:

$$\vec{F}(t) = m \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = m \ddot{\vec{x}} \quad (1)$$

En el cual la aceleración de la masa es:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2}$$

Para un cuerpo rígido que experimenta un movimiento de rotación, la ley segunda de Newton resulta

$$\vec{M}(t) = J\ddot{\theta} \quad (2)$$

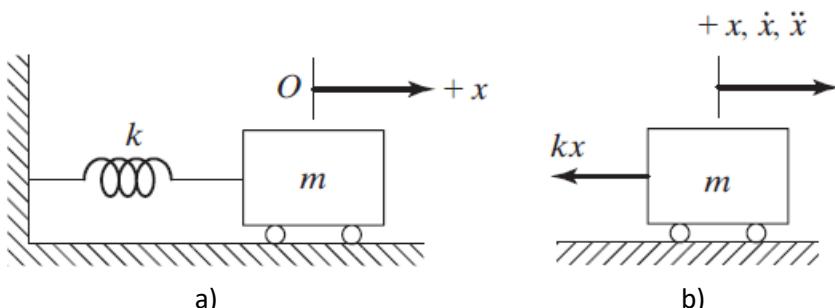
En el cual  $\vec{M}$  es el momento resultante que actúa sobre el cuerpo y  $\vec{\theta}$  y  $\ddot{\theta} = \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$  son el desplazamiento angular y la aceleración angular resultantes, respectivamente. Ecuación (1), o (2), representa la ecuación de movimiento del sistema vibratorio.

El procedimiento se aplica ahora a un sistema de un solo grado de libertad no amortiguado mostrado en la Figura 1a. Aquí, la masa se apoya sobre rodillos sin fricción y solo puede tener movimiento de traslación en la dirección horizontal. Cuando la masa se desplaza una distancia  $+x$  desde su posición de equilibrio estático, la fuerza en el resorte es  $kx$ , y el diagrama de cuerpo libre de la masa se pueden representar como se muestra en la Figura 1b. La aplicación de la Ec. (1) a la masa “ $m$ ” produce la ecuación de movimiento:

$$F(t) = -kx = m\ddot{x}$$

o

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3)$$



**Figura (1). Sistema de un grado de libertad**

#### - Principio de D'Alembert

Las ecuaciones de movimiento, Ecs. (1) y (2), se pueden reescribir como

$$\vec{F}(t) - m\ddot{x} = 0 \quad (4a)$$

$$\vec{M}(t) - J\ddot{\theta} = 0 \quad (4b)$$

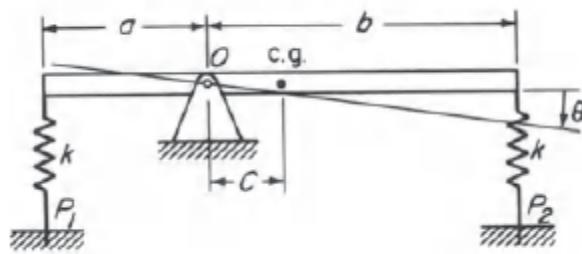
Estas ecuaciones pueden considerarse ecuaciones de equilibrio siempre que  $-m\ddot{x}$  y  $-J\ddot{\theta}$  sean tratados como una fuerza y un momento, respectivamente. Esta fuerza (o momento) **ficticio** se conoce como la fuerza de inercia (o momento de inercia) y el estado artificial de equilibrio implicado por Ec. (4a) o Ec. (4b)

se conoce como equilibrio dinámico. Este principio, implícito en la ecuación (4a) o (4b), se llama **principio de D'Alembert**. Aplicarlo al sistema que se muestra en la Fig. 1b produce la ecuación de movimiento:

$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad \text{or} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

### Ejemplo. Segunda Ley de Newton, Principio de D'Alembert

La Figura 2 muestra una barra uniforme con un pivot en el punto  $O$  soportada con resortes de igual rigidez " $k$ " en cada extremo. La barra es horizontal en la posición de equilibrio con las fuerzas de cada resorte  $P_1$  y  $P_2$ . Determine la ecuación de movimiento y su frecuencia natural.



**Figura (2)**

**Solución:** durante la rotación  $\theta$ , la fuerza del resorte de la izquierda aumenta en tracción y la de la derecha aumenta en compresión. Con  $J_O$  como el momento de inercia de la barra alrededor de  $O$ , la ecuación de momentos alrededor de  $O$  es:

$$\sum M_O = -(P_1 + ka\theta)a + mgc - (P_2 + kb\theta)b = J_O \ddot{\theta} \quad (6)$$

sin embargo, en la posición de equilibrio

$$-P_1a + mgc - P_2b = 0$$

y por lo tanto necesitamos considerar solo el momento de las fuerzas debido al desplazamiento  $\theta$ , que resulta:

$$\sum M_O = (-ka^2 - kb^2)\theta = J_O \ddot{\theta} \quad (7)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\ddot{\theta} + \frac{k(a^2 + b^2)}{J_O} \theta = 0 \quad (8)$$

y, por inspección, la frecuencia natural de oscilación es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k(a^2 + b^2)}{J_O}} \quad (9)$$

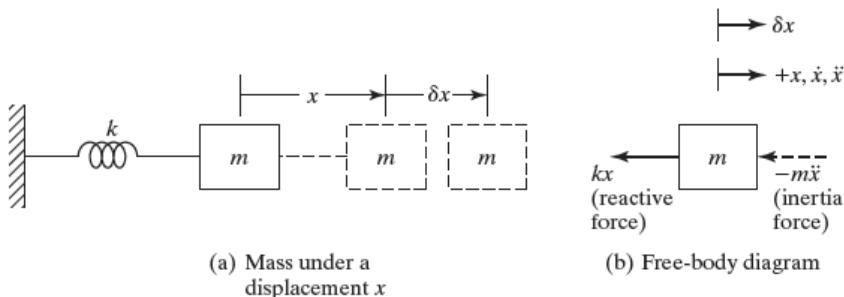
### - PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS (TRABAJOS) VIRTUALES.

El principio de los desplazamientos virtuales establece que "Si un sistema dinámico que está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, se somete a un desplazamiento virtual, entonces el trabajo virtual total realizado por las todas las fuerzas, incluyendo la fuerza de inercia, es igual a cero ". Aquí, el desplazamiento virtual se define como un desplazamiento infinitesimal imaginario dado instantáneamente. Debe ser un desplazamiento físicamente posible que sea compatible con las condiciones de borde del sistema. El trabajo virtual, se define como el trabajo realizado por todas las fuerzas, incluida las fuerzas de inercia, actuantes en un sistema dinámico, durante un desplazamiento virtual.

Considere un sistema masa-resorte en una posición desplazada como se muestra en la Figura 3a, donde " $x$ " denota el desplazamiento de la masa. La Figura 3b muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa con las fuerzas reactivas y de inercia indicadas. Cuando a la masa se le da un desplazamiento virtual  $\delta x$ , como se muestra en la Figura 3b, el trabajo virtual realizado por cada fuerza se puede calcular como:

$$\text{Trabajo virtual realizado por la fuerza elástica del resorte} = \delta W_s = -kx \delta x$$

$$\text{Trabajo virtual realizado por la fuerza de inercia} = \delta W_i = -m\ddot{x} \delta x$$



**Figura (3)**

Cuando el trabajo virtual total realizado por todas las fuerzas se iguala a cero, se tiene

$$-m\ddot{x}\delta x - kx\delta x = 0 \quad (10)$$

Dado que el desplazamiento virtual puede tener un valor arbitrario,  $\delta x \neq 0$ , la Ec. (10) resulta en la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte como:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (11)$$

### Ejemplo.

Usando el método basado en el principio de los desplazamientos virtuales (trabajos virtuales), determine la ecuación de movimiento para la viga rígida de masa "M" cargada como se muestra en la Figura 4.

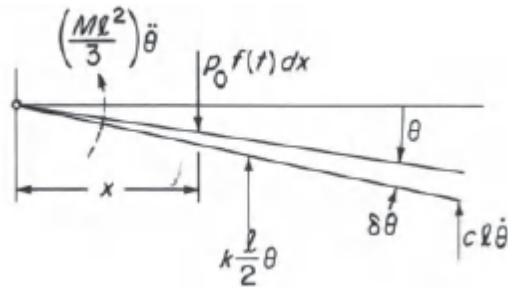
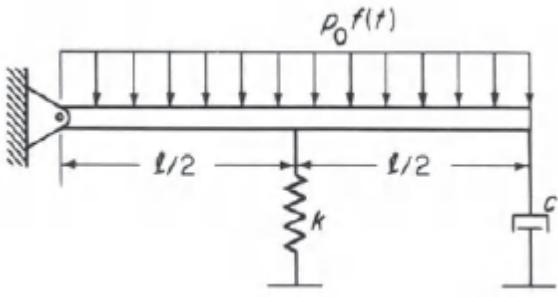


Figura (4)

**Solución:** Dibuje la viga en la posición desplazada  $\theta$  y coloque las fuerzas que actúan sobre ella, incluyendo las fuerzas de inercia y de amortiguamiento. De a la viga un desplazamiento virtual  $\delta\theta$  y determine el trabajo realizado por cada fuerza.

Trabajo producido por la fuerza de inercia:

$$\delta W = - \left( \frac{Ml^2}{3} \ddot{\theta} \right) \delta\theta$$

Trabajo producido por la fuerza elástica:

$$\delta W = - \left( k \frac{l}{2} \theta \right) \frac{l}{2} \delta\theta$$

Trabajo producido por la fuerza disipativa:

$$\delta W = - (cl\dot{\theta})l \delta\theta$$

Trabajo producido por la fuerza externa:

$$\delta W = \int_0^l (p_0 f(t) dx) x \delta\theta = p_0 f(t) \frac{l^2}{2} \delta\theta$$

Sumando el trabajo virtual e igualando a cero resulta en la siguiente ecuación de movimiento:

$$\left( \frac{Ml^2}{3} \right) \ddot{\theta} + (cl^2) \dot{\theta} + k \frac{l^2}{4} \theta = p_0 \frac{l^2}{2} f(t) \quad (12)$$

## - PRINCIPIO DE HAMILTON. FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

### COORDENADAS GENERALIZADAS

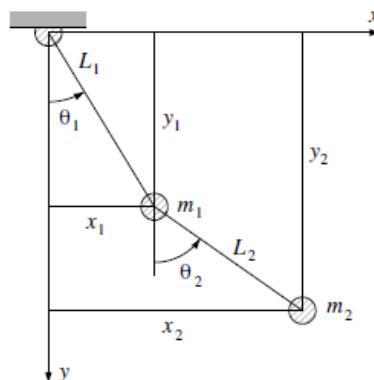
Es importante destacar las ventajas significativas de describir la respuesta de los sistemas dinámicos por medio de coordenadas generalizadas, en lugar de simplemente expresar los desplazamientos de puntos discretos en el sistema por medio de las coordenadas usuales.

Las coordenadas generalizadas para un sistema con  $N$  grados de libertad se definen aquí como cualquier conjunto de  $N$  cantidades independientes que especifiquen completamente la posición de cada punto dentro del sistema. O en otras palabras, el nombre de coordenadas generalizadas se les da a cualquier conjunto de cantidades independientes que completamente especifican el estado del sistema. Al ser completamente independientes, las coordenadas generalizadas no deben estar relacionadas de ninguna manera a través de restricciones geométricas impuestas al sistema.

Por ejemplo, en el péndulo doble clásico que se muestra en esta Figura 5, la posición de las dos masas  $m_1$  y  $m_2$  podrían especificarse usando las coordenadas  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  y  $y_2$ ; sin embargo, se deben imponer dos condiciones de restricción geométrica en estas coordenadas, a saber,

$$x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0$$



**Figura (5). Péndulo doble**

Debido a estas relaciones de restricción,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  y  $y_2$  no son independientes y por tanto, no pueden considerarse como coordenadas generalizadas.

Supongamos, por otro lado, que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se especificaran como coordenadas para ser utilizadas en la definición de las posiciones de las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Claramente, cualquiera de estas coordenadas puede variar mientras se mantiene la otra constante; por lo tanto, son completamente independientes y constituyen un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas.

Es importante destacar que las coordenadas generalizadas:

- No necesariamente tienen que ser dadas en coordenadas cartesianas u otro sistema coordenado.

- Se pueden elegir y combinar a partir de diferentes sistemas coordenados. No necesitan compartir las mismas dimensiones (unidades).
- No hay una única forma particular de definir al conjunto de coordenadas generalizadas, sin embargo algunos conjuntos poseen ventajas (con relación a la obtención de la respuesta del sistema) respecto a otros dependiendo del problema en cuestión.

## PRINCIPIO VARIACIONAL DE HAMILTON

El funcional de Hamilton se define como:

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} [T(t) - V(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{nc}(t) dt \quad (13)$$

En el cual:

$W_{nc}(t)$ : es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (externas y disipativas),  $F_{nc}(t)$ .

$T(t)$ : es la energía cinética y,

$V(t)$ : es energía potencial, de manera tal que el vector de fuerza conservativa  $F_{c,qi}(t)$ , asociada a la coordenada generalizada, “ $q_i$ ”, por definición, debe satisfacer la siguiente relación para cada coordenada generalizada:

$$\frac{\partial V(t)}{\partial q_i(t)} = -F_{c,qi}(t)$$

El **principio variacional de Hamilton** se enuncia así:

Un sistema está en equilibrio dinámico si la variación del funcional de Hamilton es igual a cero. Lo que corresponde a que el funcional de Hamilton conduce a un mínimo.

Es decir:  $\pi \rightarrow \min$ ,  $\delta \Pi = 0$  o bien:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[T(t) - V(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}(t) dt = 0 \quad (14)$$

Esto quiere decir que, la variación de la diferencia entre energía cinética y potencial, y el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, sobre cualquier intervalo de tiempo  $t_1$  a  $t_2$  es igual a cero.

El enunciado es válido para cualquier sistema complejo, lineal o no lineal, siempre que las cantidades  $T(t)$ ,  $V(t)$  y  $W_{nc}(t)$  involucren la suma de tales cantidades correspondientes a todas las coordenadas generalizadas del sistema.

El procedimiento variacional anterior difiere del procedimiento de trabajo virtual utilizado anteriormente en que la carga externa, así como las fuerzas de inercia y elásticas, no están involucradas explícitamente; en su lugar, se utilizan las variaciones de los términos de energía cinética y potencial, respectivamente. Por lo tanto, tiene la ventaja de tratar solo con cantidades de energía puramente escalares, mientras que las fuerzas y los desplazamientos utilizados para representar los efectos correspondientes en el procedimiento basado en el principio de los trabajos virtuales son todos de carácter vectorial, incluso aunque los términos de trabajo en sí mismos son escalares. Algo similar se puede decir con la Segunda Ley de Newton.

La aplicación de este principio conduce directamente a las ecuaciones de movimiento para cualquier sistema dinámico.

### ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE LAGRANGE

Las ecuaciones de movimiento para un sistema de  $N$  grados de libertad pueden derivarse directamente de la ecuación de Hamilton, Ec. (14), simplemente expresando la energía cinética total  $T(t)$ , la energía potencial total  $V(t)$  y el trabajo total virtual de las fuerzas no conservativas,  $W_{nc}(t)$  en términos de un conjunto de coordenadas generalizadas,  $q_1, q_2, \dots, q_N$ .

Para la mayoría de los sistemas mecánicos o estructurales, la energía cinética se puede expresar en términos de las coordenadas generalizadas y sus primeras derivadas, y la energía potencial solamente puede expresarse en términos de las coordenadas generalizadas. Además, el trabajo virtual que realizan las fuerzas no conservativas, cuando actúan a través de los desplazamientos virtuales provocados por un conjunto arbitrario de variaciones en las coordenadas generalizadas, puede expresarse como una función lineal de esas variaciones. En términos matemáticos, las tres afirmaciones anteriores se expresan en la forma:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \quad (15)$$

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (16)$$

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \quad (17)$$

En el cual los coeficientes  $Q_1, Q_2, Q_N$  son las funciones de fuerzas generalizadas no conservativas correspondientes a las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, q_N$ , respectivamente.

Introduciendo las Ecs. (15 a 17) en la Ec. (14) y explicitando la variación del primer término resulta:

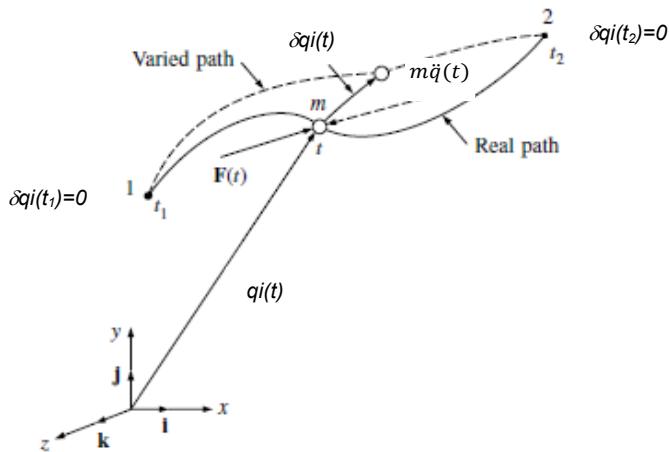
$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial V}{\partial q_N} \delta q_N + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \right) dt = 0 \quad (18)$$

Integrando por partes cada término dependiente de la velocidad en la Eq. (18), conduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (19)$$

El primer término del lado derecho de la Ec. (19) es igual a cero para cada coordenada, ya que

$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  es la condición básica impuesta a las variaciones. Ver Figura 6.



**Figura (6)**

Sustituyendo la Ec. (19) en la Ec. (18), después de reordenar los términos, resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \quad (20)$$

Dado que todas las variaciones  $\delta q_i$  ( $i = 1; 2; \dots; N$ ) son arbitrarias, la Ec. (20) puede satisfacerse en general solo cuando el término entre paréntesis desaparece, es decir,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (21)$$

Las Ecs. (21) son las conocidas **ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE LAGRANGE**, que han encontrado una amplia aplicación en varios campos de la ciencia y la ingeniería. Note que hay una Ecuación de Lagrange para cada coordenada generalizada, “ $i$ ”.

El estudiante debe tomar nota especial del hecho de que las ecuaciones de Lagrange son un resultado directo de la aplicación del principio variacional de Hamilton, bajo la condición específica de que los términos de energía y trabajo pueden expresarse en términos de coordenadas generalizadas y de sus derivadas y variaciones temporales, como se indica en las Ecs. (15 a 17). Por tanto, las ecuaciones de Lagrange son aplicables a todos los sistemas que satisfacen estas restricciones, y pueden ser tanto lineales como no lineales. El siguiente ejemplo debe aclarar la aplicación de las ecuaciones de Lagrange en el análisis de sistemas dinámicos.

#### Caso de Fuerza disipativa proveniente de un amortiguador viscoso. Función de disipación de Rayleigh.

La fuerza disipativa generada por un amortiguador viscoso asociado a la coordenada generalizada  $q_i$  es dada por:

$$Q_{v,i} = -c \dot{q}_i(t)$$

En el cual:  $c$ : es el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador viscoso y,  $\dot{q}_i(t)$  es la velocidad relativa entre los extremos del amortiguador asociado a la coordenada,  $q_i$ . Esta fuerza disipativa puede ser derivada en términos de una función  $D_{vi}$ , conocida como función de disipación de *Rayleigh* definida como:

$$D_{vi}(t) = \frac{1}{2} c \dot{q}_i^2(t)$$

A partir de esta definición es claro que:

$$Q_{v,qi}(t) = -\frac{\partial D_{v,qi}(t)}{\partial \dot{q}_i(t)}$$

Por lo tanto las ecuaciones de Lagrange, Ec.(21), para sistemas con fuerza disipativas del tipo viscosas pueden escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D_v}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (22)$$

En el cual  $Q_i$ : indican las fuerzas no conservativas excepto las disipativas viscosas que están incluidas a través de la función de disipación de Rayleigh,  $D_v$ .

Así las funciones escalares  $T(t)$ ,  $V(t)$  y  $Q_{v,qi}(t)$  deben ser especificadas para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema.

### Ejemplo 1.

Usando el método de Ecuaciones de Lagrange, formular las ecuaciones de movimiento para el sistema que se muestra en la Figura 7.

Nota: en este ejemplo se usa la letra U para nombrar la energía potencial en lugar de V.

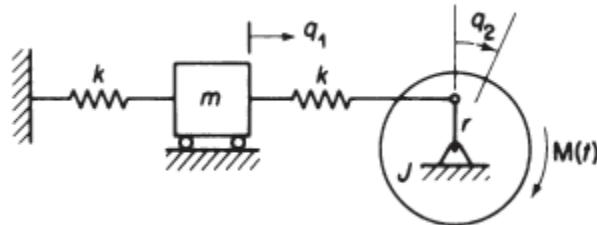


Figura (7)

Solución: Las energías cinética y potencial en término de las coordenadas generalizadas,  $q_1$  (asociada a una translación) y  $q_2$  (asociada a una rotación) son:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_2^2 \\ U &= \frac{1}{2}kq_1^2 + \frac{1}{2}k(rq_2 - q_1)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

y el trabajo realizado por la fuerza generalizada,  $Q_2$  (momento externo asociado a  $q_2$ ) es:

$$\delta W = \mathfrak{M}(t) \delta q_2 \quad \therefore Q_2 = \mathfrak{M}(t) \quad (24)$$

Sustituyendo en la ECUACIÓN DE LAGRANGE, (Ec. 21), las ecuaciones de movimiento resultan:

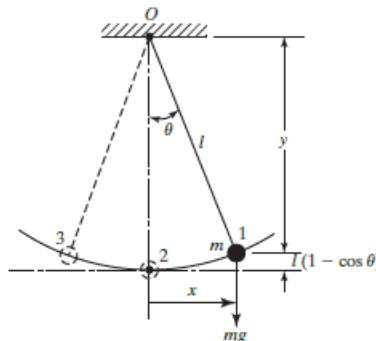
$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - krq_2 &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - krq_1 + kr^2q_2 &= \mathfrak{M}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

que se puede reescribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -kr \\ -kr & kr^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M(t) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

### Ejemplo 2.

Usando el método de Ecuaciones de Lagrange, formular las ecuaciones de movimiento para el sistema “péndulo simple” que se muestra en la Figura 8.



**Figura (8)**

Solución: Las energías cinética y potencial en término de la coordenada generalizada,  $\theta$ , son:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos(\theta))$$

Sustituyendo en la ECUACIÓN DE LAGRANGE, (Ec. 21), las ecuaciones de movimiento resultan:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$$

Aproximando  $\sin(\theta) \approx \theta$  se tiene:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \theta = 0$$

O bien:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Cuya frecuencia natural queda:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### Ejemplo 3.

Usando el método de Ecuaciones de Lagrange, formular las ecuaciones de movimiento para el sistema “Trailer y péndulo compuesto” que se muestra en la Figura 9.

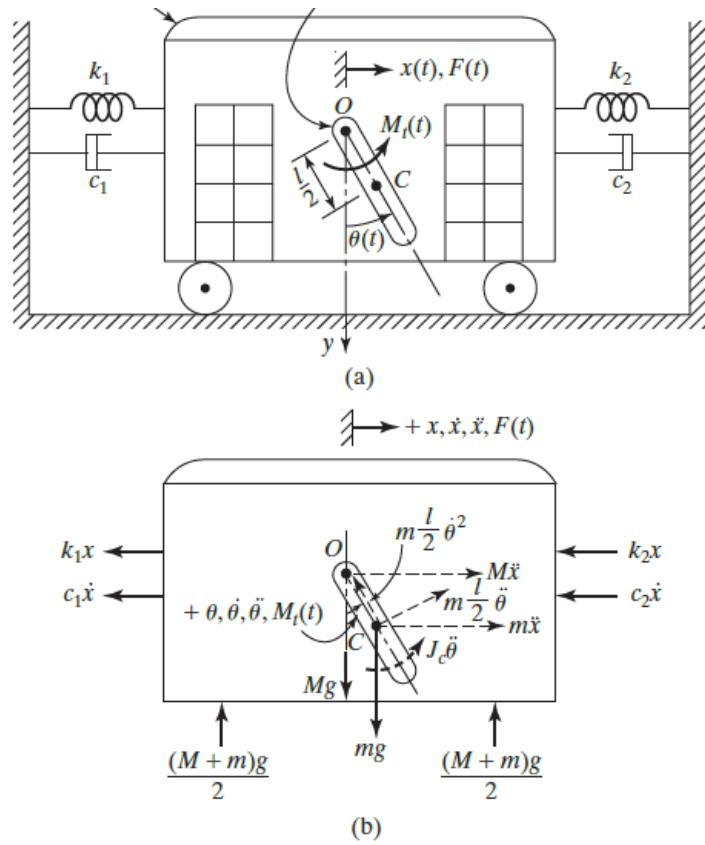


Figura (9)

Solución: Las energías cinética y potencial en términos de las coordenadas generalizadas,  $x(t)$  (asociada a la translación del trailer) y  $\theta$  (asociada a la rotación del péndulo compuesto) son:

Las coordenadas del centro de masa del péndulo compuesto en términos de las coordenadas generalizadas son:

$$x_C = x + \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$y_C = \frac{l}{2} \cos \theta$$

Las velocidades, respectivamente, son:

$$\dot{x}_C = \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y}_C = -\frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2$$

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2$$

En el cual:

Por lo tanto se tiene:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{4} + \dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2}_{\text{1ro}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\theta}^2}_{\text{2do}} + \underbrace{\frac{1}{2}(ml \cos \theta)\dot{x}\dot{\theta}}_{\text{3ro}}$$

La energía potencial del sistema, debido a la deformación de los resortes y al potencial gravitacional es:

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 + mg\frac{l}{2}(1 - \cos \theta)$$

La función de disipación de *Rayleigh* para el sistema es (amortiguadores viscosos):

$$D_v = \frac{1}{2}c_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}c_2\dot{\theta}^2$$

Las fuerzas no conservativas externas asociadas a cada coordenada generalizada son:

$$Q_1^{(n)} = F(t)$$

$$Q_2^{(n)} = M_t(t)$$

En el cual;  $q_1 = x$  y  $q_2 = \theta$

Sustituyendo en la ECUACIÓN DE LAGRANGE, (Ec. 22), las ecuaciones de movimiento resultan:

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}(ml \cos \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + k_1x + k_2x + c_1\dot{x} + c_2\dot{\theta} = F(t)$$

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}(ml \cos \theta)\ddot{x} - \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}mgl \sin \theta = M_t(t)$$

Aclaracion de las derivadas del 3er término de la  $T$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(3)}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ml \cos \theta \dot{x}}{2}\right) = -\frac{ml \sin \theta \dot{\theta}}{2}\dot{x} + \frac{ml \cos \theta}{2}\ddot{x} ; \quad -\frac{\partial T(3)}{\partial \theta} = \frac{ml \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta}{2}$$

Se observa que ambas ecuaciones son no lineales debido a la presencia de los términos que involucran:  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ , and  $(\dot{\theta})^2 \sin \theta$ . Las mismas pueden ser linealizadas si se desprecian los términos “cruzados” (productos de variables independientes y sus derivadas) y los desplazamientos se admiten pequeños con lo cual se aproxima  $\cos \theta \approx 1$  y  $\sin \theta \approx \theta$ .

Así las ecuaciones de movimiento linealizadas quedan:

$$(M+m)\ddot{x} + \left(m\frac{l}{2}\right)\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x + (c_1 + c_2)\dot{x} = F(t)$$

$$\left(\frac{ml}{2}\right)\ddot{x} + \left(\frac{ml^2}{3}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{mgl}{2}\right)\theta = M_t(t)$$

- **INFLUENCIA DE LA FUERZA DE GRAVEDAD**  
**Ecuación de movimiento de un Sistema masa-resorte en posición vertical.**

Considere la configuración del sistema masa - resorte que se muestra en la Figura 10. La masa cuelga en el extremo inferior de un resorte, que a su vez, está unido a un soporte rígido en su extremo superior. En reposo, la masa colgará en una posición llamada posición de equilibrio estático, en la que la fuerza del resorte hacia arriba equilibra exactamente la fuerza gravitacional (peso,  $W$ ) hacia abajo. En esta posición, la longitud del resorte es  $l_0 + \delta_{st}$ , donde  $\delta_{st}$  es la deflexión estática (alargamiento debido al peso "W" de la masa "m"). De la Figura 10a, encontramos que del equilibrio estático se tiene:

$$W = mg = k\delta_{st} \quad (27)$$

donde " $g$ " es la aceleración debida a la gravedad.

Si la masa se desvía una distancia  $+x$  de su posición de equilibrio estático (Figura 10b); entonces la fuerza del resorte es  $-k(x + \delta_{st})$ , como se muestra en la Figura 8c. La aplicación de la segunda ley del movimiento de Newton a la masa "m" resulta:

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W \quad (28)$$

y como  $k\delta_{st} = W$ , obtenemos

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (29)$$

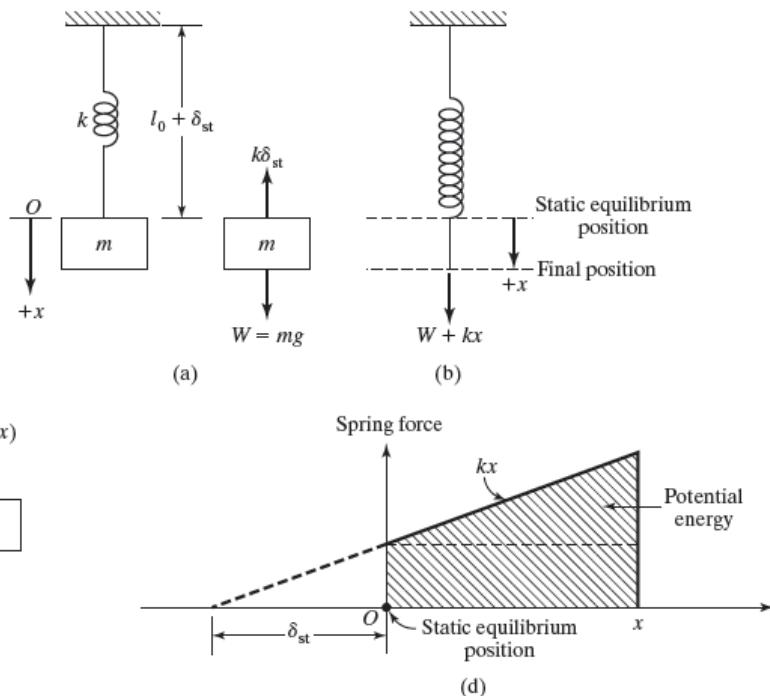


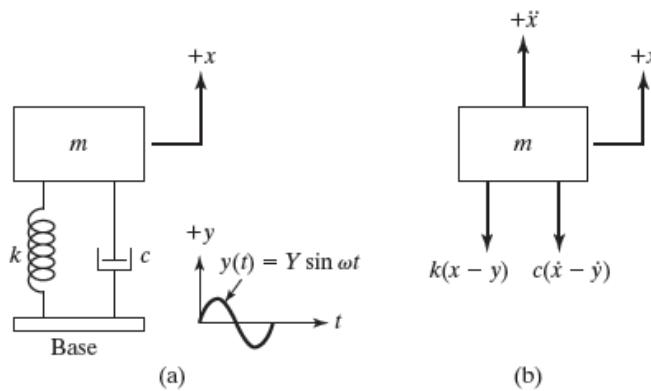
Figura (10)

Note que las Ec.(3) y Ec.(29) son idénticas. Esto indica que cuando una masa se mueve en una dirección vertical, podemos ignorar su peso, siempre que la fuerza peso no sea restitutiva (caso de un péndulo) y se mida el desplazamiento de la masa, "x" desde su posición de equilibrio estático.

### - INFLUENCIA DE LA EXCITACIÓN DEL SOPORTE

A veces, la base o soporte de un sistema de masa-resorte-amortiguador experimenta un movimiento, como se muestra en la Figura 11a. Sea  $y(t)$  el desplazamiento absoluto de la base (soporte) y  $x(t)$  el desplazamiento absoluto de la masa desde su posición de equilibrio estático en el instante de tiempo  $t$ . Entonces, el alargamiento relativo (neto) entre los extremos del resorte es  $x - y$  y la velocidad relativa entre los extremos del amortiguador es  $\dot{x} - \dot{y}$ . Del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la Figura 11b, obtenemos la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (30)$$



**Figura (11). Movimiento del soporte**

### En términos de Movimiento Relativo

Si  $z = x - y$  denota el movimiento de la masa en relación con la base, la Ec.(30), se puede reescribir como:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (31)$$

La Ec.(31) es similar a la ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador con soporte fijo bajo una carga externa efectiva,  $P_{ef} = -m\ddot{y}(t)$ . En el cual  $\ddot{y}(t)$  es la aceleración del soporte la cual en general en la práctica es simple de medir.

### En términos de Movimiento Absoluto

La Ec.(30), se puede reescribir como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -c\dot{y} + ky \quad (32)$$

En este caso la carga externa efectiva es  $P_{ef} = c\dot{y} + ky$ . En el cual  $\dot{y}(t)$  e  $y(t)$  son la velocidad y desplazamiento del soporte, las cuales en la práctica, requieren sensores más costosos para ser medidos que en el caso de la aceleración.