UNIDAD 5. SISTEMAS CON MÁS DE UN GRADO DE LIBERTAD

VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

Para comenzar se admite un sistema no amortiguado con dos grados de libertad. Los resultados obtenidos se extenderán a sistemas con múltiples grados de libertad.

Sea el sistema con dos grados de libertad mostrado en la Figura (1). Admitiendo que: $f_1(t) = f_2(t) = 0$ y $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ la ecuación de movimiento es:

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \qquad (1)$$

Que se puede escribir en forma matricial como:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0} \qquad (2)$$

En el cual:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \text{ y } \quad \vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Asumiendo que es posible admitir un movimiento armónico para ambas masas, m_1 y m_2, con la misma frecuencia, ω, y el mismo ángulo de fase, ϕ, la solución de la ecuación de movimiento Ec.(1) es:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi) \qquad (4)$$

En el cual X_1 y X_2 son contantes que denotan la amplitud del movimiento de cada masa, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y, ϕ es el ángulo de fase. Sustituyendo Ec.(4) en Ec.(1) se tiene:

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$
$$[-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0 \qquad (5)$$

Dada que la Ec.(5) se debe satisfacer para todos los instantes de tiempo, t; los términos entre corchetes deben ser nulos. Esto conduce a:

$$\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 = 0$$
$$-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 = 0 \qquad (6)$$

La Ec(6) representa dos ecuaciones algebraicas simultaneas y homogéneas con incógnitas X_1 y X_2.

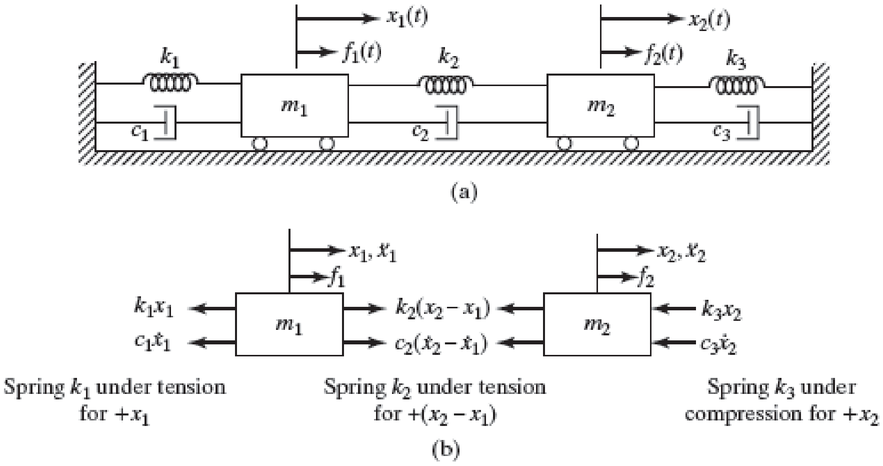

Figura (1). Sistema dinámico con dos grados de libertad.

En forma matricial la Ec.(6) se puede escribir como:

$$\left[[k] - \omega^2[m]\right]\vec{X} = \vec{0} \tag{7}$$

LA Ec.(7) es el clásico **problema de autovalores y autovectores o problema de valores propios** y representa, en este caso, un sistema de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas. En general para un sistema de N grados de libertad, será un sistema de N ecuaciones algebraicas con N incógnitas correspondientes a las amplitudes de los movimientos de cada grado de libertad. En el caso que $[m]$ y $[k]$ sean simétricas se dice que es un problema de autovalores y autovectores simétrico.

En el cual el vector incógnito es:

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{Bmatrix}$$ o bien para dos grados de libertad es: $\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$ (8)

El vector $\vec{X}$, es conocido como **forma modal del sistema**.

Dado que la Ec.(7) representa, en este caso, un sistema de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas la solución trivial es $X_1 = X_2 = 0$ o bien, para N grados de libertad es $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$. lo que implica que el sistema está en reposo y no hay vibración.

Para obtener una solución no trivial en la Ec.(7), el determinante de la matriz $\left[[k] - \omega^2[m]\right]$ llamada **rigidez dinámica**, debe ser nulo. Es decir que:

$$\Delta = \left|k_{ij} - \omega^2 m_{ij}\right| = \left|[k] - \omega^2[m]\right| = 0 \tag{9}$$

La expansión de la Ec.(9) es llamada **ecuación característica** o **ecuación de la frecuencia**, $\lambda = \omega^2$ es llamado **autovalor o valor característico** y ω es llamada **frecuencia natural del sistema no amortiguado**. La Ec.(9) posee, en general, N raíces en ω^2. Se puede demostrar que las N raíces son reales y positivas cuando las matrices $[m]$ y $[k]$ son simétricas y definidas positivas. Si $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$ denotan las N raíces ordenadas de menor a mayor, la raíz cuadrada positiva de cada una, resulta, en las N frecuencias naturales del sistema $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$. La menor es llamada **frecuencia natural fundamental** o primera frecuencia natural. En general las ω_i son distintas, aunque en algunos casos dos frecuencias naturales pueden resultar iguales.

Para el caso particular de dos grados de libertad dado por la Ec.(6), la Ec.(9) queda:

$$\det\begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

O bien

$$(m_1 m_2)\omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \qquad (10)$$

Cuyas raíces son:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\} \mp \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}^2 - 4\left\{\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2}\right\}\right]^{1/2} \qquad (11)$$

La Ec.(11) muestra que es posible para el sistema de la Ec.(1) tener una solución armónica no trivial a partir de la Ec.(4), cuando $\omega = \omega_1$ y $\omega = \omega_2$ dadas por la Ec.(11). Es decir que se obtienen dos frecuencias naturales para el sistema de dos grados de libertad. Para cada frecuencia natural existirá un **vector propio** o **autovector** asociado llamado **vector modal, modo normal** o simplemente **modo de vibración**. Al autovector asociado a ω_1 lo llamaremos $\overrightarrow{X^{(1)}} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix}$ y al vector asociado a ω_2 lo llamaremos $\overrightarrow{X^{(2)}} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix}$. Además dado que la matriz $\left[[k] - \omega^2[m]\right]$ es singular (su determinante es nulo, Ec(9)) cuando $\omega = \omega_1$ y cuando $\omega = \omega_2$; el sistema de ecuaciones dado por Ec.(7) es indeterminado y solo las relaciones $r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}$ y $r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}$ entre los elementos de los vectores incógnitos, $\overrightarrow{X^{(1)}}$ y $\overrightarrow{X^{(2)}}$, pueden ser encontradas para cada frecuencia natural.

A partir de la Ec.(6) se tiene:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)} \qquad (12)$$

Los modos de vibración del sistema correspondientes a ω_1 y ω_2 se pueden expresar respectivamente como:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

Así la solución de la ecuación de movimiento del sistema dada por Ec.(1) o Ec.(2) en vibraciones libres que había sido propuesta en Ec.(4), tiene, en el caso de dos grados de libertad, dos respuestas posibles que se pueden escribir como:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{first mode}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \text{second mode} \tag{14}$$

Y también su combinación lineal, que en general para N grados de libertad, se puede escribir como:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

o bien

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)} \tag{15}$$

En el cual: $\vec{X}^{(i)}$ y ω_i son el *i-ésimo* vector modal y su correspondiente frecuencia natural; las funciones del tiempo $q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ se las llama **coordenadas modales o normales**; A_i y ϕ_i son constantes a ser determinadas a partir de las condiciones iniciales (y excitación si hubiese) del sistema dadas por:

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(0) \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Con lo cual en $t = 0s$, la Ec.(15) queda:

$$\vec{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} A_i \cos \phi_i$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} A_i \omega_i \sin \phi_i \tag{17}$$

La Ec.(17) representa en forma escalar, $2N$ ecuaciones simultaneas que se resuelven para encontrar los N valores de: $A_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ y de $\phi_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$.

En sistemas con varios de grados de libertad, la determinación de las frecuencias naturales y formas modales (autovalores y autovectores) a partir de la solución del problema de valores propios se torna tediosa por lo que se puede llevar a cabo a partir de programas computacionales específicos como MATLAB o MAPLE.

CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD de los MODOS DE VIBRACIÓN

La frecuencia natural ω_i y su correspondiente modo normal $\vec{X}^{(i)}$ satisfacen el problema de valores propios dado por la Ec.(7), de forma tal que :

$$\omega_i^2[m]\overrightarrow{X}^{(i)} = [k]\overrightarrow{X}^{(i)} \tag{18}$$

Si se considera ahora la frecuencia natural ω_j y su correspondiente modo normal $\overrightarrow{X}^{(j)}$ también satisface la Ec.(7):

$$\omega_j^2[m]\overrightarrow{X}^{(j)} = [k]\overrightarrow{X}^{(j)} \tag{19}$$

Multiplicando Ec.(18) y Ec.(19) por $\overrightarrow{X}^{(j)^T}$ y $\overrightarrow{X}^{(i)^T}$ respectivamente, y considerando que $[m]\ y\ [k]$ son simétricas se tiene:

$$\omega_i^2\,\overrightarrow{X}^{(j)T}[m]\overrightarrow{X}^{(i)} = \overrightarrow{X}^{(j)T}[k]\overrightarrow{X}^{(i)} \equiv \overrightarrow{X}^{(i)T}[k]\overrightarrow{X}^{(j)} \tag{20}$$

$$\omega_j^2\,\overrightarrow{X}^{(i)T}[m]\overrightarrow{X}^{(j)} \equiv \omega_j^2\overrightarrow{X}^{(j)T}[m]\overrightarrow{X}^{(i)} = \overrightarrow{X}^{(i)T}[k]\overrightarrow{X}^{(j)} \tag{21}$$

Sustrayendo Ec.(21) y Ec.(20) se tiene:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\overrightarrow{X}^{(j)T}[m]\overrightarrow{X}^{(i)} = 0 \tag{22}$$

En general como $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ de la Ec.(22) se tiene:

$$\overrightarrow{X}^{(j)T}[m]\overrightarrow{X}^{(i)} = 0, \qquad i \neq j \tag{23}$$

1ra CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD

A partir de la Ec.(20) y Ec.(21) y teniendo en cuenta Ec.(23) se tiene:

$$\overrightarrow{X}^{(j)T}[k]\overrightarrow{X}^{(i)} = 0, \qquad i \neq j \tag{24}$$

2d**a CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD**

Las Ec.(23) y Ec.(24) indican que $\overrightarrow{X}^{(i)}$ y $\overrightarrow{X}^{(j)}$ son **ortogonales** con respecto a las matrices de masa $[m]$ y rigidez $[k]$, respectivamente.

Cuando $i = j,$ el lado izquierdo de las Ec.(23) y Ec.(24) (no es nulo), da por resultado un escalar, llamado masa y rigidez generalizada o **masa modal o normal** y **rigidez modal o normal**, respectivamente. Así se tiene:

$$M_{ii} = \overrightarrow{X}^{(i)T}[m]\overrightarrow{X}^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{25}$$

$$K_{ii} = \overrightarrow{X}^{(i)T}[k]\overrightarrow{X}^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{26}$$

Para todos los valores de i, las Ec.(25) y Ec.(26) se pueden escribir en forma matricial como:

$$[{}^\nwarrow M_\searrow] = \begin{bmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T[m][X] \tag{27}$$

$$[{}^\nwarrow K_\searrow] = \begin{bmatrix} K_{11} & & 0 \\ & K_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & K_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T[k][X] \tag{28}$$

En el cual $[X]$ es llamada **matriz modal** en la cual la *i-ésima* columna corresponde al *i-ésimo* vector modal:

$$[X] = [\overrightarrow{X}^{(1)}\overrightarrow{X}^{(2)} \cdots \overrightarrow{X}^{(n)}] \tag{29}$$

Es conveniente normalizar a los vectores normales $\overrightarrow{X}^{(i)}$ de manera tal que la matriz de masa modal $[{}^\nwarrow M_\searrow] = [I]$ es decir:

$$\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{30}$$

Con los vectores normales así normalizados, y teniendo en cuenta la Ec. (18), la matriz de rigidez modal $[\nwarrow K \searrow]$ se reduce a:

$$[\nwarrow K \searrow] = [\nwarrow \omega_i^2 \searrow] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Si el vector $\vec{X}^{(i)}$ satisface la Ec.(30) se dice que es **ortonormal** con respecto a la matriz de masa.

VIBRACIONES FORZADAS DE SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

Se dice que un sistema de múltiples grados libertad está en vibración forzada cuando actúan en él fuerzas externas. Para un sistema con N grados de libertad, la ecuación de movimiento es un conjunto de N ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas. La solución del sistema de N ecuaciones se torna muy complejo cuando el número de grados de libertad es muy grande y/o cuando las funciones de la carga son no periódicas. En tales casos, para resolver el problema se puede usar un método muy conveniente conocido como **método de descomposición modal**. En este método, los desplazamientos asociados a los grados de libertad se expresan como una combinación lineal de los modos normales del sistema. Esta transformación lineal desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales original, de manera de obtener un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden desacoplado (independientes). La solución de cada una de estas ecuaciones corresponde a cada modo de vibración y es similar a la solución de la ecuación diferencial de un sistema de un grado de libertad la cual se puede resolver con relativa facilidad.

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN MODAL

La ecuación de movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad bajo cargas externas es:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{32}$$

En el cual $\vec{F}$ es el vector de cargas externas. Para resolver la Ec.(32) se necesita primero, encontrar las frecuencias naturales $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ y los correspondientes modos normales $\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}, \ldots, \vec{X}^{(n)}$ resolviendo el problema de valores propios dado por (Ecuación de movimiento homogénea, Ec.2):

$$\omega^2[m]\vec{X} = [k]\vec{X} \tag{33}$$

Teniendo en cuenta la Ec.(15), la solución de la Ec.(32) se puede expresar mediante una combinación lineal como:

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)} \tag{34}$$

En el cual: las funciones dependientes del tiempo $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$(dada por $q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$) son conocidas como **coordenadas principales, coeficientes de participación modal o coordenadas modales o normales.**

Teniendo en cuenta la matriz modal, $[X]$, dada por Ec.(29), la Ec.(34) se puede escribir en forma compacta como:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t) \tag{35}$$
En el cual, el vector de coordenadas modales se escribe como:

$$\vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \tag{36}$$
Dado que $[X]$ no es función del tiempo, se tiene:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [X]\ddot{\vec{q}}(t) \tag{37}$$
Reemplazando las Ec.(35) y Ec.(37) en la Ec.(32) se obtiene:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}} + [k][X]\vec{q} = \vec{F} \tag{38}$$
Premultiplicando la Ec.(38) por $[X]^T$ se obtiene:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \tag{39}$$
Si los modos normales son normalizados de acuerdo a las Ec.(30) y Ec(31) se tiene:

$$[X]^T[m][X] = [I] \tag{40}$$
$$[X]^T[k][X] = [\nwarrow \omega^2 \searrow] \tag{41}$$

Se define el vector de fuerzas generalizadas o vector de carga modal, $\vec{Q}(t)$, asociado a la coordenada generalizada $\vec{q}(t)$ como:

$$\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}(t) \tag{42}$$
Usando las Ec.(40), Ec.(41) y Ec.(42), la Ec.(39) se puede escribir como:

$$\ddot{\vec{q}}(t) + [\nwarrow \omega^2 \searrow]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \tag{43}$$
La Ec.(43) representa un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden desacopladas (independientes) en la cual cada una de ellas se puede expresar como:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{44}$$
La Ec.(44) tiene la forma de una ecuación diferencial de segundo orden similar a la de un sistema de un grado de libertad no amortiguado. La solución puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_i(0)\cos\omega_i t + \left(\frac{\dot{q}(0)}{\omega_i}\right)\sin\omega_i t \\ &\quad + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t Q_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau, \\ &\quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{45}$$
Las condiciones iniciales en coordenadas modales ($q_i(0)$ y $\dot{q}_i(0)$) se pueden obtener a partir de las condiciones iniciales dadas en coordenadas geométricas (físicas) ($x_i(0)$ y $\dot{x}_i(0)$) teniendo en cuenta la Ec.(35) evaluada en *t = 0 s* y Ec.(30), como:

$$\vec{q}(0) = [X]^T[m]\vec{x}(0)$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = [X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) \tag{46}$$

En el cual:

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix}, \dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix}, \vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix}, \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix} \tag{47}$$

Una vez que los desplazamientos generalizados, $q_i(t)$, son determinados por Ec.(45) junto a la Ec.(46), los desplazamientos en coordenadas geométricas (físicos) $x_i(t)$ se determinan por Ec.(35).

En muchos casos es posible aproximar el vector solución de la Ec.(34), $\vec{x}(t)$, solo con los primeros $r < N$ vectores modales, es decir que la Ec.(35) queda:

$$\underset{n\times 1}{\vec{x}(t)} = \underset{n\times r}{[X]}\underset{r\times 1}{\vec{q}(t)} \tag{48}$$

En el cual:

$$[X] = [\vec{X}^{(1)}\,\vec{X}^{(2)} \ldots \vec{X}^{(r)}] \quad \text{and} \quad \vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_r(t) \end{Bmatrix} \tag{49}$$

La que conduce a r ecuaciones diferenciales desacopladas en vez de N:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{50}$$

Con lo cual el costo para obtener una respuesta suficientemente aproximada se reduce enormemente.

VIBRACIONES FORZADAS DE SISTEMAS AMORTIGUADOS

En muchos casos la influencia del amortiguamiento en la respuesta del sistema vibratorio puede ser despreciado. Sin embargo, es necesario considerarlo en casos en el cual la respuesta debe ser determinada durante un periodo de tiempo relativamente largo respecto al período natural del sistema. Además, si la frecuencia de excitación, en el caso de tener una carga periódica, está cerca de una de las frecuencias naturales del sistema, el amortiguamiento tiene primordial importancia y debe ser considerado. La ecuación de movimiento de un sistema de N grados de libertad con amortiguamiento viscoso, es:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{51}$$

En el cual, $[c]$ es llamada matriz de amortiguamiento viscoso.

En general, por simplicidad y para aprovechar las propiedades de ortogonalidad (diagonalización de $[m]$ y $[k]$ y desacople de las ecuaciones diferenciales) dadas por la Ec.(23) y Ec.(24) (o Ec.27 y Ec.28), , la matriz de amortiguamiento conviene expresarla como una combinación lineal de la matriz de masa y de rigidez:

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k] \tag{52}$$

En el cual α y β son constantes a determinar. Esta forma de definir el amortiguamiento se conoce con el nombre de **amortiguamiento proporcional** debido a que $[c]$ es proporcional a $[m]$ y $[k]$. Reemplazando Ec.(52) en Ec.(51) se tiene:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [\alpha[m] + \beta[k]]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{53}$$

Expresando el vector solución $\vec{x}$ como una combinación de los modos normales, Ec.(35):

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}t) \tag{54}$$

La Ec.(53) se puede escribir como:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}}(t) + [\alpha[m] + \beta[k]][X]\,\dot{\vec{q}}(t) \\ + [k][X]\vec{q}(t) = \vec{F}(t) \tag{55}$$

Premultiplicando por $[X]^T$ conduce a:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + [\alpha[X]^T[m][X] + \beta[X]^T[k][X]]\dot{\vec{q}} \\ + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \tag{56}$$

Si los autovectores, $\vec{X}^{(j)}$, están normalizados (Ec.(30) y Ec.(31)), la Ec.(56) queda:

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + \left[\alpha[I] + \beta\left[\nwarrow\omega^2\searrow\right]\right]\dot{\vec{q}}(t) + \left[\nwarrow\omega^2\searrow\right]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \tag{57}$$

Es decir:

$$\ddot{q}_i(t) + (\alpha + \omega_i^2\beta)\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{58}$$

En el cual: ω_i es la frecuencia natural del sistema no amortiguado, y:

$$\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}(t) \tag{59}$$

Y escribiendo:

$$\alpha + \omega_i^2\beta = 2\zeta_i\omega_i \tag{60}$$

En el cual ζ_i se llama **relación de amortiguamiento modal para *i-ésimo* modo de vibración**.

Así la Ec.(58) se puede escribir como:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{61}$$

La Ec.(61) representa un sistema de N ecuaciones diferenciales desacopladas. Por lo tanto, se puede encontrar la respuesta del *i-ésimo* modo de vibración de la misma manera que para sistemas de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso. Apelando a la solución para sistemas subamortiguados en el cual $\zeta_i < 1$ se tiene:

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i\omega_i t}\left\{\cos\omega_{di}t + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}\sin\omega_{di}t\right\}q_i(0)$$

$$+ \left\{\frac{1}{\omega_{di}}e^{-\zeta_i\omega_i t}\sin\omega_{di}t\right\}\dot{q}_i(0)$$

$$+ \frac{1}{\omega_{di}}\int_0^t Q_i(\tau)e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_{di}(t-\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (62)$$

En el cual:

$$\omega_{di} = \omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \qquad (63)$$

es la frecuencia natural del sistema amortiguado.

En general, a fin de resolver la Ec.(61), la relación de amortiguamiento modal, ζ_i, se adopta mediante un criterio o experiencia del especialista o bien, se determina experimentalmente a partir de un análisis de vibraciones.

En caso de ser necesario, es posible reconstruir la matriz de amortiguamiento viscoso proporcional, $[c]$, Ec.(52), a partir de la Ec.(60). En efecto, si se conoce la frecuencia natural circular para dos modos de vibración, ω_1 y ω_i (en general el primero y el último modo de vibración a ser considerado en la determinación de la respuesta del sistema), y se adopta, con criterio para seleccionar las relaciones de amortiguamiento crítico correspondientes, ζ_1 y ζ_i, se puede formular un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en, α y β.

Es importante destacar los siguientes aspectos:

1.- En la mayoría de los problemas prácticos, se torna difícil la identificación de las fuentes y la magnitud del amortiguamiento. Más de un tipo de amortiguamiento, tales como amortiguamiento de Coulomb, viscoso e histerético, pueden estar presentes en algunos sistemas dinámicos reales. El general se recomienda determinar experimentalmente el amortiguamiento mediante el uso de análisis de vibraciones. En muchos estudios de sistemas vibrantes, el amortiguamiento se puede despreciar o bien, ser asumido como proporcional a la matriz de masa y matriz de rigidez con el objetivo de simplificar el análisis. En muchas aplicaciones prácticas, tales como suspensión de vehículos, trenes de aterrizaje y aislación de máquinas, el amortiguamiento es introducido deliberadamente.

2.- En casos de sistemas con amortiguamiento arbitrario, la matriz de amortiguamiento no puede ser diagonalizada simultáneamente con la matriz de masa y rigidez. En esos casos los autovalores del sistema son reales y negativos o bien complejos conjugados con parte real negativa. Los autovalores complejos existen de a pares conjugados; los autovectores asociados también aparecen de pares complejos conjugados. Un procedimiento común para encontrar los autovalores y autovectores complejos de un sistema amortiguado consiste en transformar un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas, en $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas usando la formulación espacio-estado. Este último procedimiento está fuera del alcance de este curso.

Formulación alternativa para obtener $[c]$

Admitiendo que se conoce la frecuencia natural circular, ω_i, y la relación de amortiguamiento modal, ζ_i, para cada modo de vibración considerado en la respuesta del sistema, es posible formar la matriz diagonal de amortiguamiento modal, C_M:

$$[C_M] = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_i \omega_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \tag{64}$$

La cual puede ser determinada a partir de la Ec.(56) como:

$$[C_M] = [X]^T [c]\,[X] \tag{65}$$

Siendo $[X]$, la matriz modal normalizada de acuerdo a Ec.(40).

Por lo tanto para determinar $[c]$ es posible premultiplicar por $[X]^{-T}$ y posmultiplicar por, $[X]^{-1}$la Ec.(65):

$$[c] = [X]^{-T}[X]^T[c]\,[X][X]^{-1} = [X]^{-T}[C_M]\,[X]^{-1} \tag{66}$$

Observando la Ec.(40) se puede deducir que:

$$[X]^{-1} = [X]^T[m] \tag{67}$$

La Ec.(66) se puede escribir:

$$[c] = [m][X][C_M]\,[X]^T[m] \tag{68}$$

Así la **matriz de amortiguamiento proporcional** del sistema, $[c]$, se puede obtener por la Ec.(68) con un bajo costo computacional y menor error numérico (no se calculan matrices inversas) a partir del conocimiento de la frecuencia natural circular, ω_i, y la relación de amortiguamiento modal, ζ_i, de todos los modos de vibración considerados en la respuesta del sistema.

VENTAJAS DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN MODAL

Menor Costo Computacional:

- Para determinar la respuesta de un sistema de *N* grados de libertad se necesita resolver *N* ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes en vez de *N* ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas.
- En reiteradas oportunidades para alcanzar una respuesta con precisión aceptable es necesario resolver solo r ($r < N$) ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes (solo las primeras r respuestas modales tienen mayor participación en la respuesta del sistema).