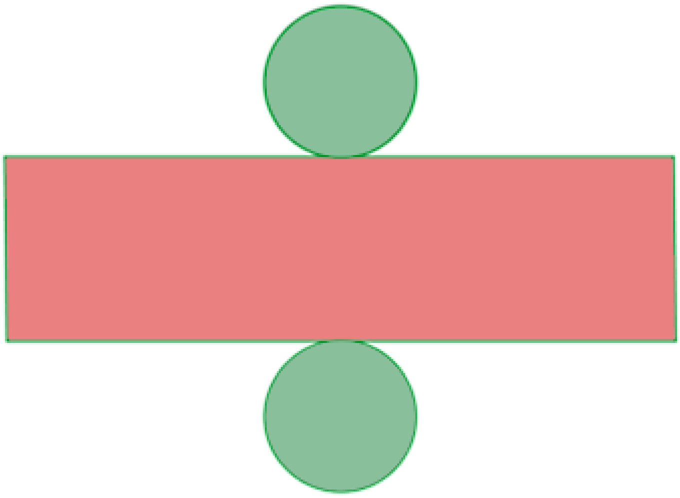
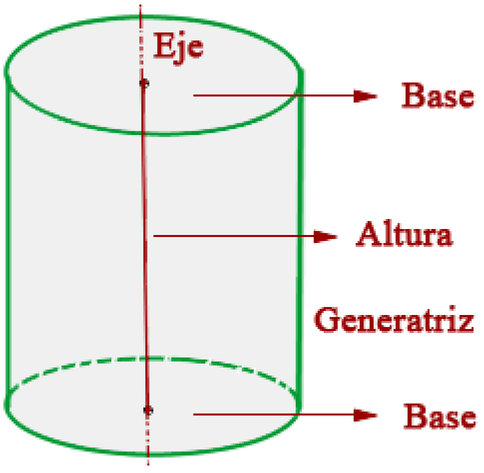
Definición de cilindro

Un **cilindro** es un **cuerpo geométrico** engendrado por un **rectángulo** que gira alrededor de uno de sus **lados**.

Desarrollo del cilindro



Elementos del cilindro



Eje

Es el **lado** fijo alrededor del cual gira el **rectángulo**.

Bases

Son los **círculos** que engendran los l**ados perpendiculares** al eje.

Altura

Es la distancia entre las dos bases.

Generatriz

Es el **lado opuesto** al eje, y es el **lado** que engendra el **cilindro**.

La **generatriz** del **cilindro** es igual a la **altura**.

h = g

Área lateral del cilindro

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Área del cilindro

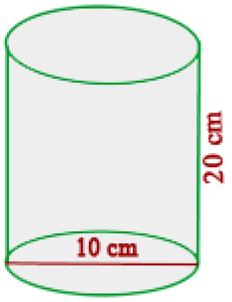
$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Volumen del cilindro

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejercicios del cilindro

Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.



$$A = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (20 + 5) = 785.398\ cm^2$$

$$785.398 \cdot 10 = 7853.98\ cm^2$$

Un **cilindro** tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm. Calcular el **área total y volumen**:

$$125.66 = 2 \cdot \pi \cdot r \qquad r = \frac{125.66}{2 \cdot \pi} = 20\ cm$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 125.66 \cdot (125.66 + 20) = 2\ 300\ 102.68\ cm^2$$

$$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 125.66 = 157\ 909.01\ cm^3$$

En una probeta de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

$$V_H = 4 \cdot 4^3 = 256\ cm^3$$

$$256 = \pi \cdot 6^2 \cdot h \qquad h = \frac{256}{\pi \cdot 36} = 2.26\ cm$$

Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y y 10 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1570.80\ cm^3$$

$$1570.80\ cm^3 = 1.57080\ dm^3$$

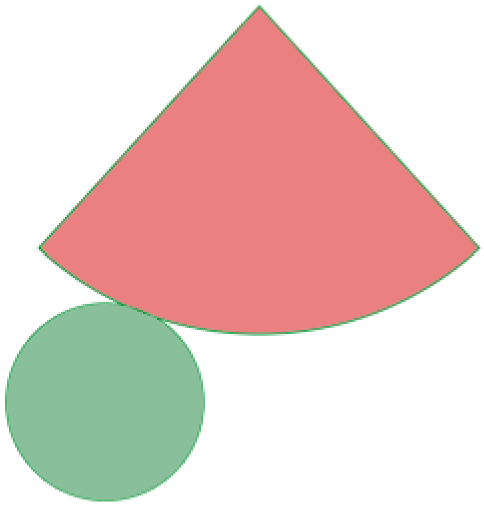
$$1.57\ dm^3 \rightarrow 1.57\ kg$$

$$\text{peso del recipiente} = 2 - 1.57 = 0.43\ kg$$

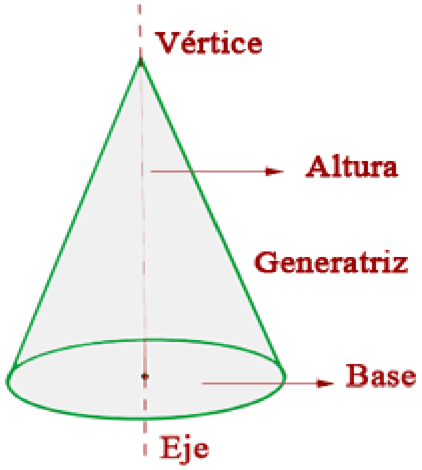
Definición de cono

Es el **cuerpo de revolución** obtenido al hacer **girar** un **triángulo rectángulo** alrededor de uno de sus **catetos**.

Desarrollo del cono



Elementos del cono



Eje

Es el **cateto** fijo alrededor del cual **gira** el **triángulo**.

Base

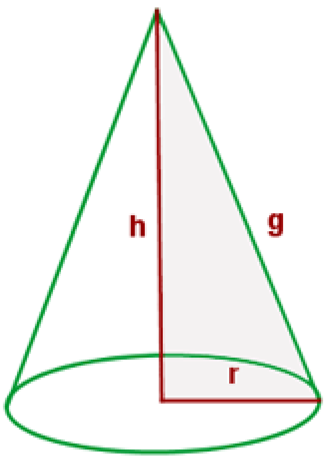
Es el **círculo** que forma el otro **cateto**.

Altura

Es la distancia del vértice a la base.

Generatriz

Es la **hipotenusa** del triángulo **rectángulo**.



Por el teorema de Pitágoras la **generatriz** del **cono** será igual a:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Área lateral de un cono

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

Área de un cono

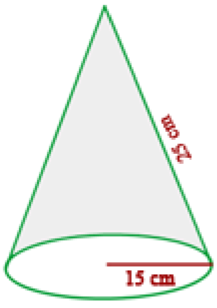
$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

Volumen de un cono

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Ejercicios de conos

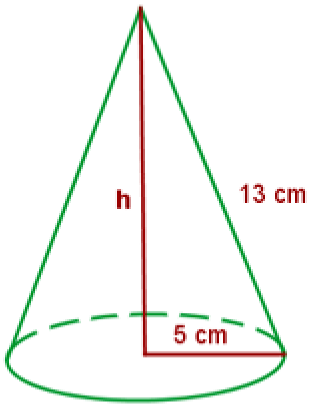
Para una fiesta, Luís ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?



$$A_l = \pi \cdot 15 \cdot 25 = 1178.097\ cm^2$$

$$1178.097 \cdot 10 = 11780.97\ cm^2$$

Calcula el **área lateral, total y el volumen de un cono** cuya **generatriz** mide 13 cm y el **radio** de la base es de 5 cm.



$$A_l = \pi \cdot 13 \cdot 5 = 204.20\ cm^2$$

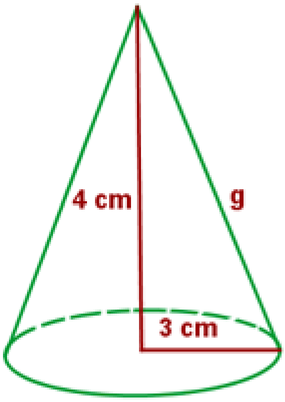
$$A_T = \pi \cdot 13 \cdot 5 + \pi \cdot 5^2 = 282.74\ cm^2$$

$$13^2 = h^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ cm$$

$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 314.159\ cm^3$$

Calcula el **área lateral, total y el volumen de un cono** cuya **altura** mide 4 cm y el **radio** de la base es de 3 cm.



$$g^2 = 4^2 + 3^2$$

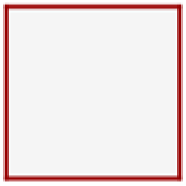
$$g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ cm$$

$$A_l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 204.20\ cm^2$$

$$A_T = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 28.26\ cm^2$$

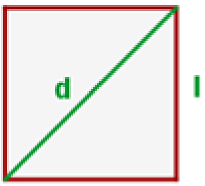
$$V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 37.70\ cm^3$$

Definición de cuadrado



El **cuadrado** es un **paralelogramo** que tiene los **4 lados iguales** y los **4 ángulos rectos**.

Diagonal del cuadrado

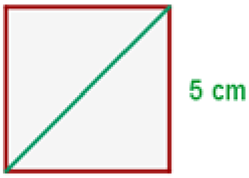


$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Calcular la **diagonal** de un **cuadrado** de 5 cm de lado.



$$d^2 = 5^2 + 5^2$$

$$d = \sqrt{50} = 7.07 \text{ cm}$$

Área de un cuadrado

$$A = l^2$$

Perímetro del cuadrado

$$P = 4 \cdot l$$

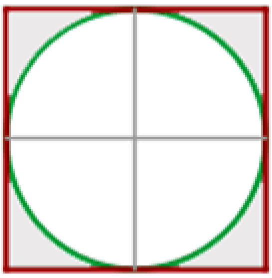
Ejercicios de cuadrados

Calcular el **área** y el **perímetro** de un **cuadrado** de 5 cm de lado.

$P = 4 \cdot 5 = 20$ cm

$A = 5^2 = 25$ cm^2

Calcula el **área sombreada**, sabiendo que el **lado de cuadrado** es 6 cm y el **radio del círculo** mide 3 cm.

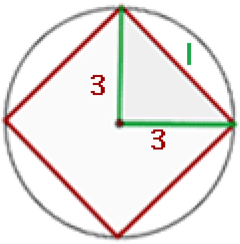


$$A_o = \pi \cdot 3^2 = 28.26\ \text{cm}^2$$

$$A_{\square} = 6^2 = 36\ \text{cm}^2$$

$$A = 36 - 28.26 = 7.74\ \text{cm}^2$$

Calcular el **área** del **cuadrado inscrito** en una **circunferencia** de longitud 18.84 cm.

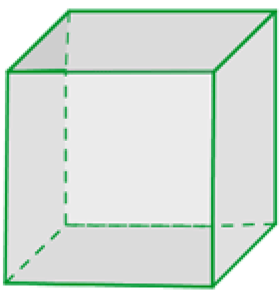


$$18.84 = 2 \cdot \pi \cdot r \quad r = \frac{18.84}{2 \cdot \pi} = 3\ cm$$

$$l = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

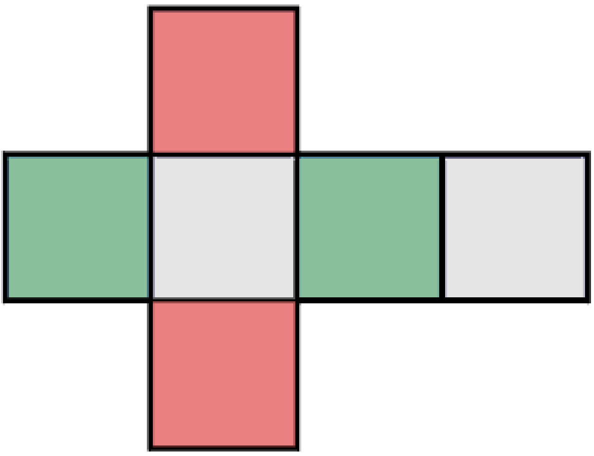
$$A = \left(\sqrt{18}\right)^2 = 18\ cm^2$$

Definición de cubo



Un **cubo o hexaedro** es un **poliedro regular** formado por **6 cuadrados iguales**.

Desarrollo del Cubo



Propiedades del cubo

Número de caras: 6.

Número de vértices: 8.

Número de aristas: 12.

Nº de aristas concurrentes en un vértice: 3.

Área del cubo

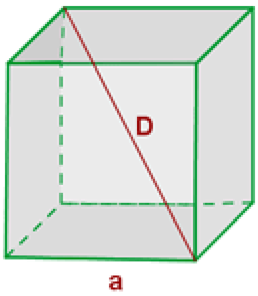
$$A_L = 4 \cdot a^2$$

$$A_T = 6 \cdot a^2$$

Volumen del cubo

$$V = a^3$$

Diagonal del cubo

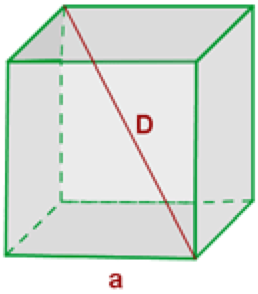


$$D = \sqrt{a^3 + a^3 + a^3}$$

$$D = \sqrt{3} \cdot a$$

Ejercicio de cubo

Calcular la **diagonal**, el **área lateral**, el **área total** y el **volumen** de un **cubo** de 5 cm de **arista**.



$$D = 5^2 + 5^2 + 5^2$$

$$D = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 8.66\ c$$

$$A_L = 4 \cdot 5^2 = 100\ cm^2$$

$$A_T = 6 \cdot 5^2 = 150\ cm^2$$

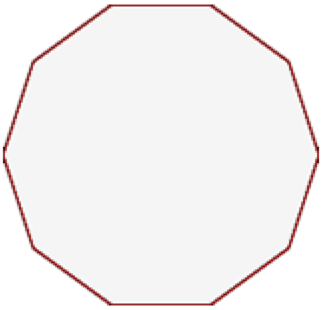
$$A_T = 5^3 = 125\ cm^3$$

Decágono

Un **decágono** es un polígono de **diez lados** y diez vértices.

Decágono regular

Un **decágono regular** es un **polígono** de **diez lados** y **diez ángulos iguales**.



Ángulos del decágono

Suma de ángulos interiores de un decágono = (10 − 2) · 180° = **1440°**

El valor de un **ángulo interior del decágono regular** es 1440º : 10 = **144º**

El **ángulo central** del **decágono regular** mide: 360º : 10 = **36º**

Diagonales del decágono

Número de diagonales = 10 · (10 − 3) : 2 = **35**

Perímetro del decágono regular

Perímetro = 10 · l

Área del decágono regular

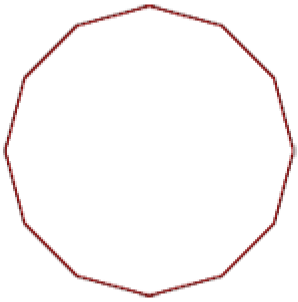
$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Dodecágono

Un **dodecágono** es un polígono de **12 lados** y 12 vértices.

Dodecágono regular

Un **dodecágono regular** es un **polígono** de **12 lados** y **12 ángulos iguales**.



Ángulos del dodecágono

Suma de ángulos interiores de un dodecágono = (12 − 2) · 180° = **1800°**

El valor de un **ángulo interior del dodecágono regular** es 1800º : 12 = **150º**

El **ángulo central** del **dodecágono regular** mide: 360º : 12 = **30º**

Diagonales del dodecágono

Número de diagonales = 12 · (12 − 3) : 2 = **54**

Perímetro del dodecágono regular

Perímetro = 12 · l

Área del dodecágono regular

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

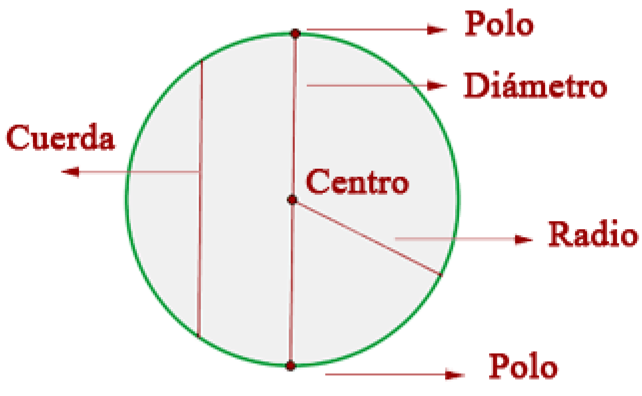
Definición de superficie esférica

Una **superficie esférica** es la **superficie** engendrada por una **circunferencia** que gira sobre su **diámetro**.

Definición de esfera

Una **esfera** es la **región del espacio** que se encuentra en el **interior de una superficie esférica**.

Elementos de la esfera



Centro

Punto interior que equidista de cualquier **punto** de la **superficie** de la **esfera**.

Radio

Distancia del **centro** a un **punto** de la superficie de la **esfera**.

Cuerda

Segmento que une **dos puntos** de la **superficie esférica**.

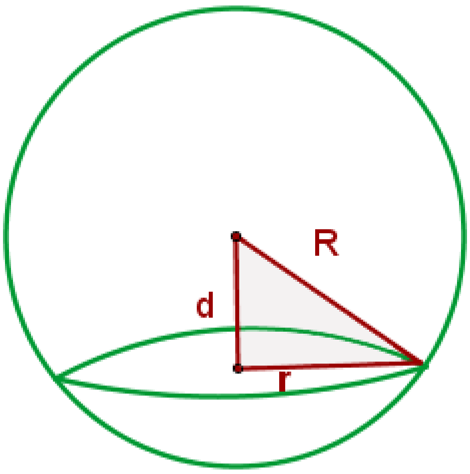
Diámetro

Cuerda que pasa por el **centro**.

Polos

Son los **puntos del eje** de giro que quedan sobre la **superficie esférica**.

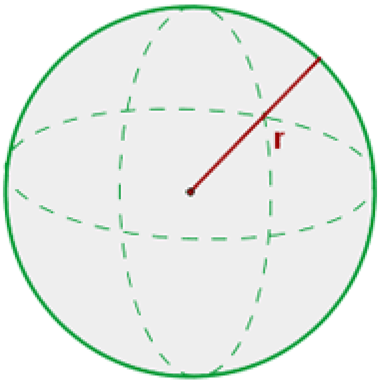
Cálculo del radio de una esfera



Calculamos la **radio de la esfera**, conociendo la **distancia de un plano que corta la esfera** y el **radio de la sección**, aplicando el **teorema de Pitágoras** en el triángulo sombreado:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

$$R = \sqrt{d^2 + r^2}$$



Área de la superficie esférica

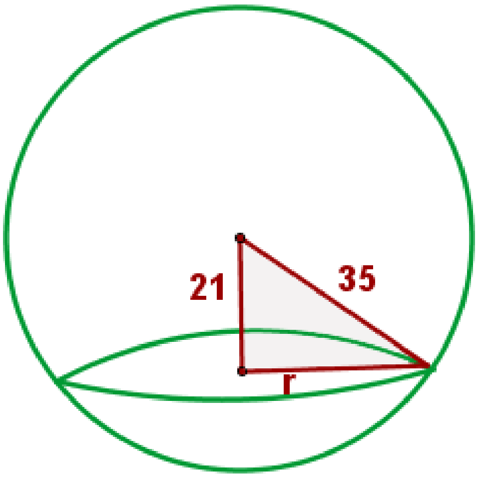
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Ejercicios de esferas

Calcular el **área del círculo** resultante de cortar una **esfera** de 35 cm de radio mediante un plano cuya distancia al centro de la esfera es de 21 cm.



$$35^2 = 21^2 + r^2$$

$$A = \pi \cdot 28^2 = 2\ 461.76\ cm^2$$

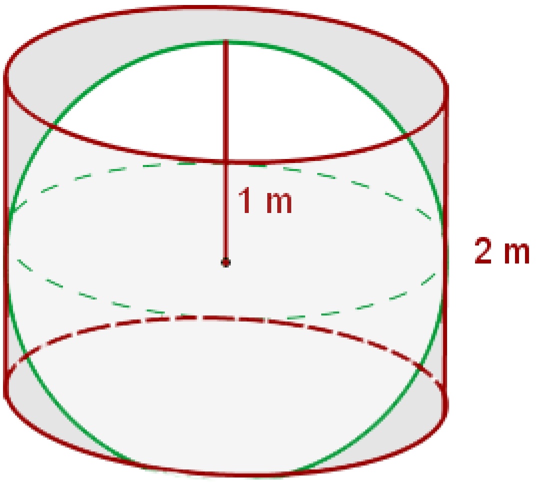
Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

$$V_C = 20^3 = 8\,000\ cm^3$$

$$V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 = 33\ 510.32\ cm^3$$

Sí

Calcular el **área y el volumen** de una **esfera** inscrita en un cilindro de 2 m de altura.



$$A = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 12.57\ m^2$$

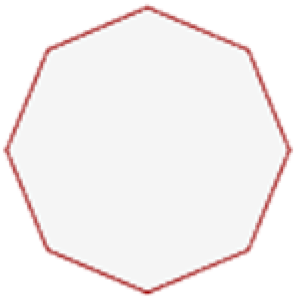
$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 4.19\ m^3$$

Octágono

Un **octágono** u octógono es un polígono de **ocho lados** y ocho vértices.

Octágono regular

Un **octágono regular** es un **polígono** de **ocho lados** y **ocho ángulos iguales**.



Ángulos del octágono

Suma de ángulos interiores de un octágono = (8 − 2) · 180° = **1080°**

El valor de un **ángulo interior del octágono regular** es 1080º : 8 = **135º**

El **ángulo central** del **octágono regular** mide: 360º : 8 = **45º**

Diagonales del octágono

Número de diagonales = 8 · (8 − 3) : 2 = **20**

Perímetro del octágono regular

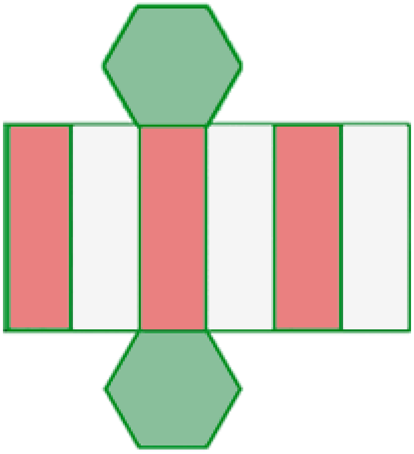
Perímetro = 8 · l

Área del octágono regular

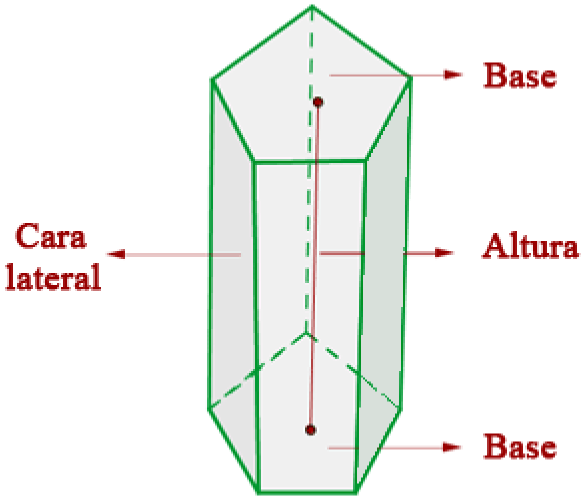
$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Un **prisma es** un **poliedro** que tienen **dos caras** paralelas e iguales llamadas **bases** y sus **caras laterales** son **paralelogramos**.

Desarrollo del prisma



Elementos de un prisma



Altura de un **prisma** es la **distancia entre las bases**.

Los **lados** de las **bases** constituyen las **aristas básicas** y los **lados** de las **caras laterales** las **aristas laterales**, éstas son iguales y paralelas entre sí.

Área lateral de un prisma

$P_B = \text{Perímetro de la base}$

$A_L = P_B \cdot h$

Área total de un prisma

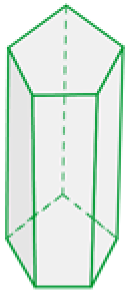
$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

Volumen de un prisma

$V = A_B \cdot h$

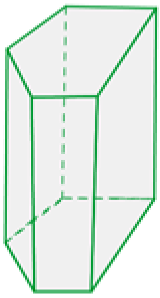
Tipos de prismas

Prismas regulares



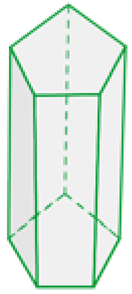
Son los **prismas** cuyas **bases** son **polígonos regulares**.

Prismas irregulares



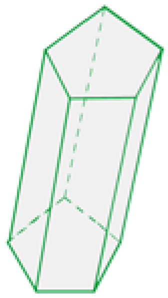
Son los **prismas** cuyas **bases** son **polígonos irregulares**.

Prismas rectos



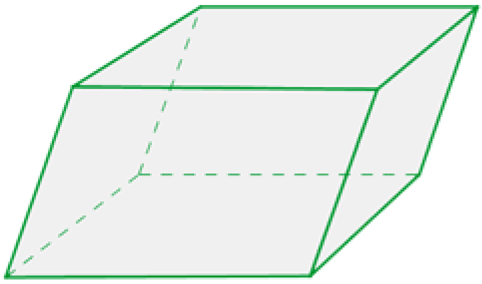
Son los **prismas** cuyas **caras laterales** son **rectángulos** o **cuadrados**.

Prismas oblicuos



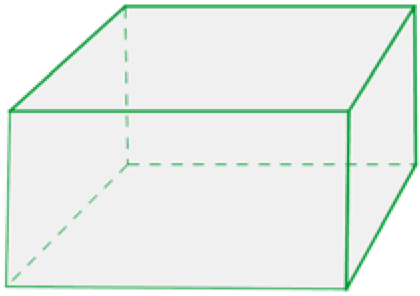
Son los **prismas** cuyas **caras laterales** son **romboides** o **rombos**.

Paralelepípedos



Los **paralelepípedos** son los **prismas** cuyas bases son **paralelogramos**.

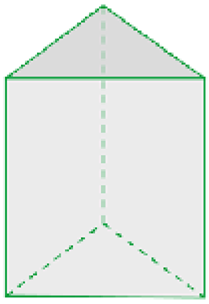
Ortoedros



Los **ortoedros** son **paralelepípedos** que tienen todas sus **caras rectangulares**.

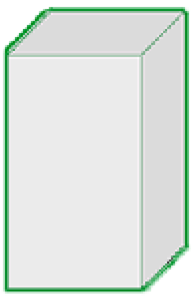
Tipos de prismas según su base

Prisma triangular



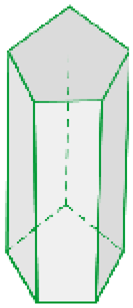
Sus bases son **triángulos**.

Prisma cuadrangular



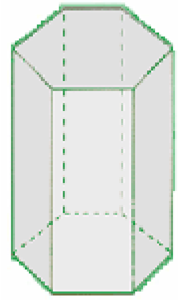
Sus bases son **cuadrados**.

Prisma pentagonal



Sus bases son **pentágonos**.

Prisma hexagonal



Sus bases son **hexágonos**.

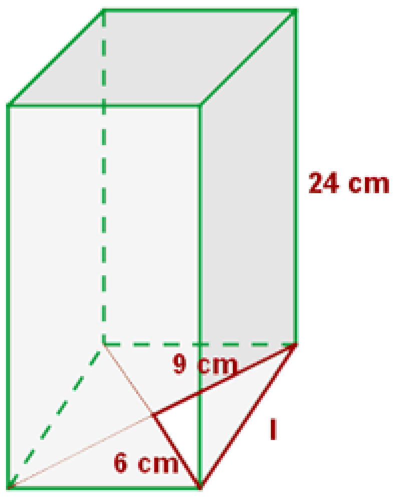
Ejercicios

Calcula la **altura** de un **prisma** que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 l de capacidad.

$$48\ l = 48\ dm^3$$

$$48 = 12 \cdot h \qquad h = \frac{48}{12} = 4\ dm$$

Calcula el **área lateral, el área total y el volumen** de un **prisma** cuya base es un rombo de de diagonales 12 y 18 cm.



$$l^2 = 9^2 + 6^2$$

$$l = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10.82\ cm$$

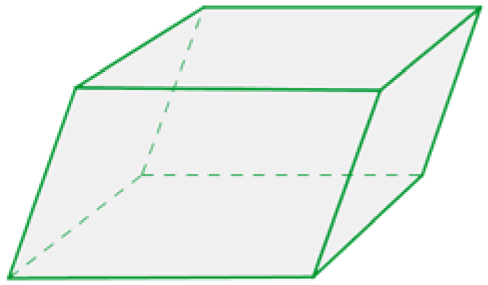
$$A_L = 4 \cdot (24 \cdot 10.82) = 1038.72\ cm^2$$

$$A_T = 1038.72 + 2 \cdot \frac{18 \cdot 12}{2} = 1254.72\ cm^2$$

$$V = \frac{18 \cdot 12}{2} \cdot 24 = 1592\ cm^3$$

Paralelepípedos

Un **paralelepípedo** es un **prisma** de **seis caras**, cuyas **bases** son **paralelogramos**, iguales y paralelos dos a dos.



Área lateral

$P_B = \text{Perímetro de la base}$

$A_L = P_B \cdot h$

Área total

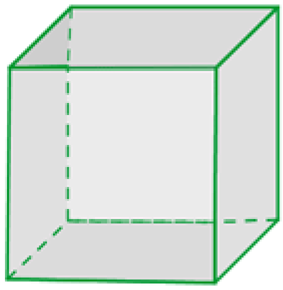
$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

Volumen

$V = A_B \cdot h$

Tipos especiales de paralelepípedos

Cubo o hexaedro regular



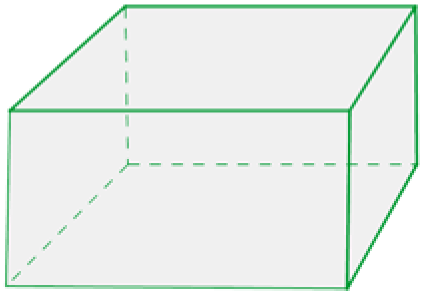
El **cubo** es un **paralelepípedo** en el que todas sus **caras** son **cuadrados**.

$A_L = 4 \cdot a^2$

$A_T = 6 \cdot a^2$

$V = a^3$

Ortoedro



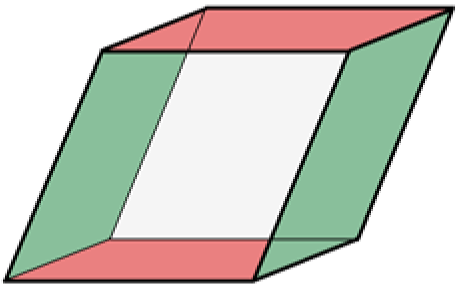
El **ortoedro** es un **paralelepípedo** en el que todas sus **caras** son

rectángulos y perpendiculares entre sí.

$$A = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Romboedro



El **romboedro** es un **paralelepípedo** en el que todas sus **caras** son **rombos** iguales.

Volumen del paralelepípedo II

Geométricamente, el valor absoluto del producto mixto representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

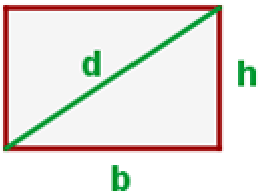
$$\vec{u} = (3, -2, 5) \quad \vec{v} = (2, 2, -1) \quad w = (-4, 3, 2)$$

$$V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

Definición de rectángulo

El **rectángulo** es un **paralelogramo** que tiene **los lados iguales dos a dos** y los **4 ángulos rectos**.

Diagonal del rectángulo

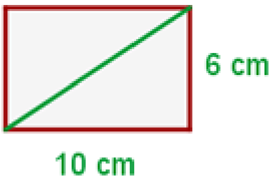


$$d^2 = b^2 + h^2$$

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

Ejemplo

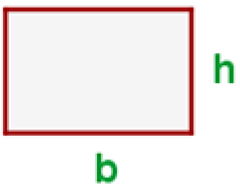
Calcular la **diagonal** de un **rectángulo** de 10 cm de base y 6 cm de altura.



$$d^2 = 10^2 + 6^2$$

$$d = \sqrt{136} = 11.66 \ \text{cm}$$

Área del rectángulo



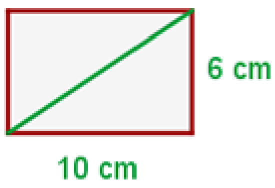
$$A = b \cdot h$$

Perímetro del rectángulo

$$P = 2 \cdot (b + h)$$

Ejemplo

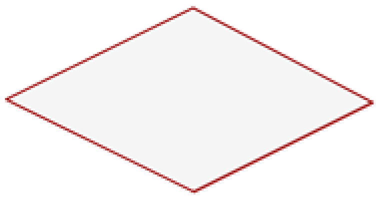
Calcular el **área** y el **perímetro** de un **rectángulo** de 10 cm de base y 6 cm de altura.



P = 2 · (10 + 6) = 32 cm

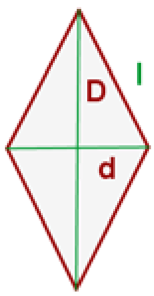
A = 10 · 6 = 60 cm^2

Definición de rombo



El **rombo** es un **paralelogramo** que tiene los c**uatro lados iguales** y **ángulos iguales dos a dos**.

Área de un rombo



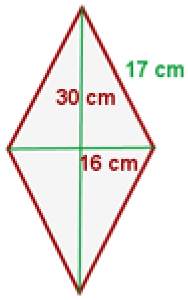
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Perímetro de un rombo

$$P = 4 \cdot l$$

Ejercicios de rombos

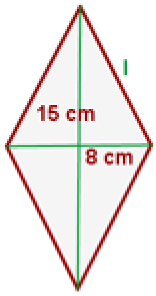
Calcular el **área y el perímetro** de un **rombo** cuyas **diagonales** miden 30 y 16 cm, y su **lado** mide 17 cm.



$$P = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$$

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

Calcular el **lado** de un **rombo** sabiendo que la **diagonales** miden 30 y 16 cm.



$$l^2 = 15^2 + 8^2$$

$$l = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ cm}$$

Definición de trapecio

Los **trapecios** son los **cuadriláteros** que tienen **dos lados paralelos**, llamados **base mayor y base menor**.

Clases de trapecios

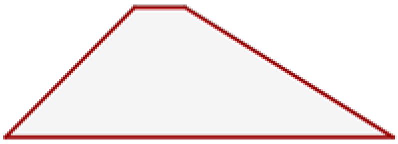
Trapecio rectángulo

Tiene un ángulo recto.

Trapecio isósceles

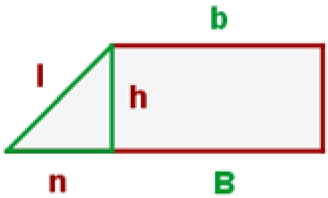
Tiene dos lados no paralelos iguales.

Trapecio escaleno



No tiene ningún lado igual ni ángulo recto.

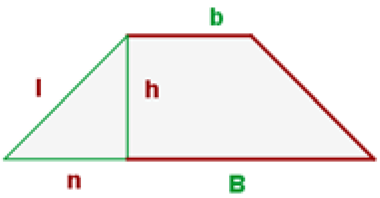
Lado oblicuo del trapecio rectángulo



$$n = B - b$$

$$l = \sqrt{h^2 + n^2}$$

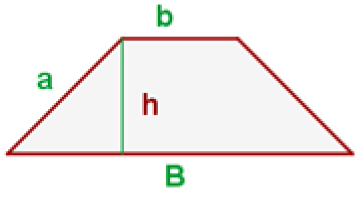
Altura del trapecio isósceles



$$n = B - b$$

$$h = \sqrt{l^2 - n^2}$$

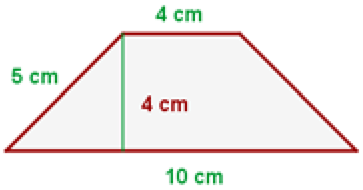
Área del trapecio



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

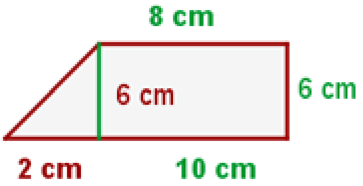
Ejercicios de trapecios

Calcular el **área** del siguiente **trapecio**:



$$A = \frac{(10 + 4) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$

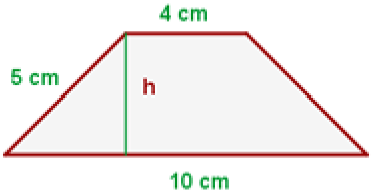
Calcular el **lado oblicuo** del siguiente **trapecio rectángulo**:



$$l^2 = 6^2 + 2^2$$

$$l = \sqrt{40} = 6.32 \text{ cm}$$

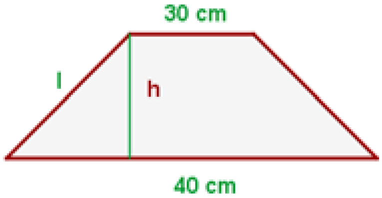
Calcular la **altura** del siguiente **trapecio isósceles**:



$$5^2 = h^2 + 3^2$$

$$h = \sqrt{16} = 4\ \text{cm}$$

El **perímetro de un trapecio isósceles** es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcular los **lados** no paralelos y el **área**.



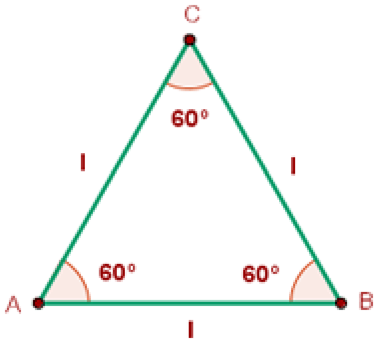
$$110 = 40 + 30 + 2l \qquad l = 20\ m$$

$$h = \sqrt{20^2 - 5^2} = 19.36\ \text{m}$$

$$A = \frac{(40+30)\cdot 19.36}{2} = 677.77\ \text{m}^2$$

Triángulo equilátero

Un **triángulo equilátero** tiene los t**res lados y ángulos iguales**.



Perímetro de un triángulo equilátero

$$P = 3 \cdot l$$

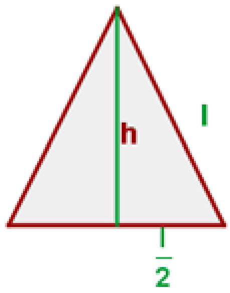
Ejemplo

Calcular el **perímetro de un triángulo equilátero** de 10 cm de lado.

P = 3 · 10 = 30 cm

Altura de un triángulo equilátero

Aplicando el teorema de Pitágoras podemos calcular la **altura**:



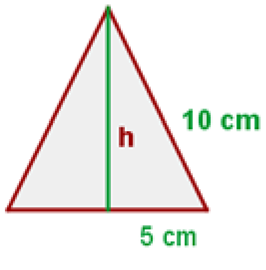
$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

Ejemplo

Calcular la **altura de un triángulo equilátero** de 10 cm de lado.



$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{100 - 25} = 8.66 \quad \text{cm}$$

Área de un triángulo equilátero

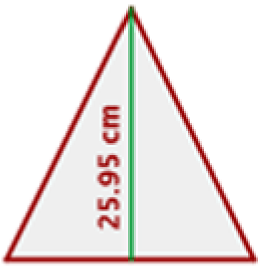
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$$

Ejercicios

Calcular el **área de un triángulo equilátero** de 10 cm de lado.

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2 = 43.30\ cm^2$$

El **perímetro** de un **triángulo equilátero** mide 0.9 dm y la altura mide 25.95 cm. Calcula el **área** del triángulo.

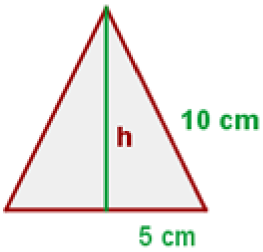


P = 0.9 dm = 90 cm

l = 90 : 3 = 30 cm

A = (30 · 25.95) : 2 = 389.25 cm²

Hallar el perímetro y el área del triángulo rectángulo:



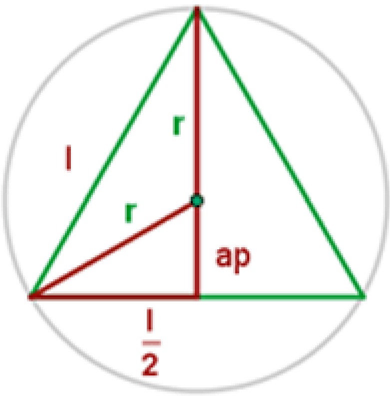
$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{100 - 25} = 8.66\ \ cm$$

P = 3 · 10 = 30 cm

$$A = \frac{10 \cdot 8.66}{2} = 43.30\ cm^2$$

Apotema del triángulo equilátero



El Lado de un triángulo equilátero inscrito es:

$$l = \sqrt{3} \cdot r$$

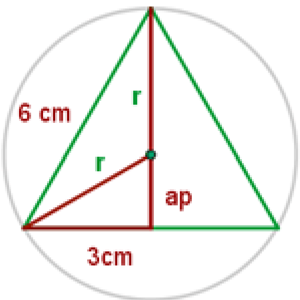
Despejamos el radio y aplicamos el teorema de Pitágoras

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} \qquad \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 = ap^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$ap = \frac{\sqrt{3}}{6} l$$

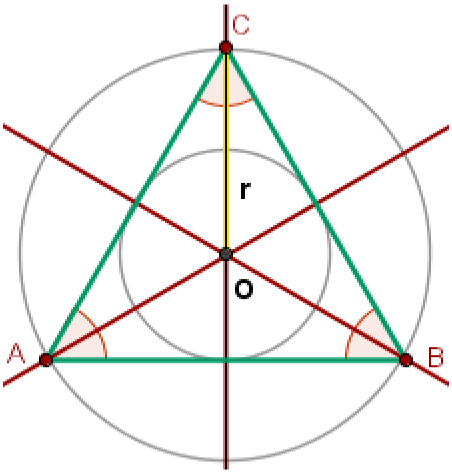
Ejemplo

Calcular la **apotema** de un **triángulo equilátero** de 6 cm de lado.



$$ap = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6 = 1.73\ cm$$

Elementos notables del triángulo equilátero



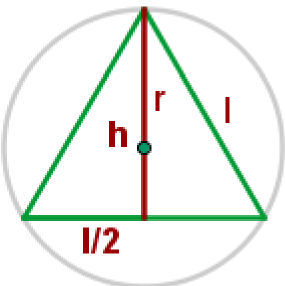
En un **triángulo equilátero** coinciden el **ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro**.

El **centro de la circunferencia** es el **baricentro** y la **altura** coincide con la **mediana**, por tanto el **radio** de la **circunferencia circunscrita** es igual a **dos tercios de la altura**.

$$r = \frac{2 \cdot h}{3}$$

Ejercicios

Calcular el **área** de un **triángulo equilátero inscrito en una circunferencia** de radio 6 cm.



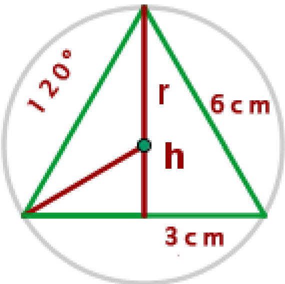
$$r = \frac{2 \cdot h}{3} \qquad 6 = \frac{2 \cdot h}{3} \qquad h = 9\ cm$$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} \qquad l = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 10.39 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10.39 \cdot 9}{2} = 46.77 \text{ cm}^2$$

Dado un **triángulo equilátero** de 6 m de lado, hallar el **área** de uno de los **sectores** determinado por la **circunferencia circunscrita** y por los radios que pasan por los vértices.

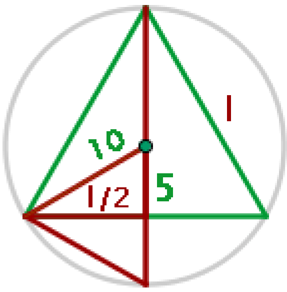


$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5.17 \text{ cm}$$

$$r = \frac{2}{3} \cdot 5.17 = 3.46 \text{ cm}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 3.46^2 \cdot 120}{360} = 12.57 \text{ cm}^2$$

Calcular el **lado** de un **triángulo equilátero inscrito** en una **circunferencia** de 10 cm de radio.



$$10^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 5^2$$

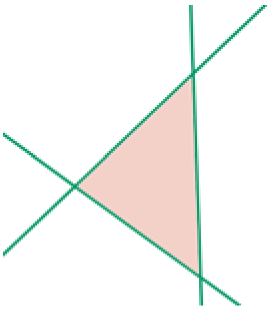
$$\left(\frac{l}{2}\right) = \sqrt{75}$$

$$l = 2 \cdot \sqrt{75} = 17.32$$

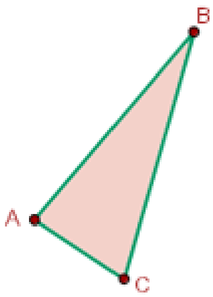
Definción de triángulo

Un **triángulo** es un **polígono** de **tres lados**.

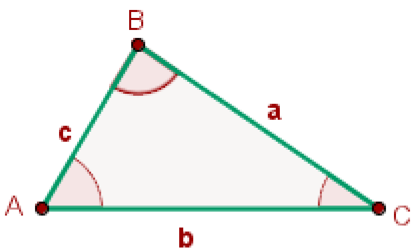
Un **triángulo** está determinado por:



1. Tres **segmentos** de recta que se denominan **lados**.



2. Tres **puntos** no alineados que se llaman **vértices**.



Los **vértices** se escriben con letras **mayúsculas**.

Los **lados** se escriben en **minúscula**, con la mismas letras de los vértices opuestos.

Los **ángulos** se escriben igual que los **vértices**.

Propiedades de los triángulos

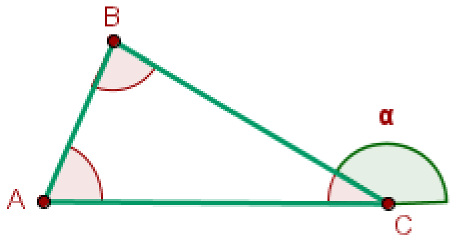
1 Un **lado** de un **triángulo** es **menor** que la **suma** de los **otros dos** y **mayor** que su **diferencia**.

a < b + c

a > b - c

2La **suma** de los **ángulos interiores** de un **triángulo** es igual a **180°**.

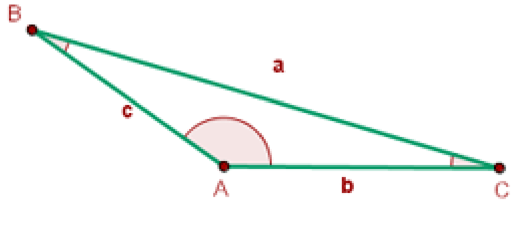
A + B + C =180º



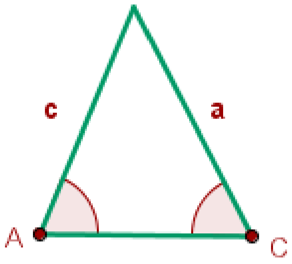
3 El valor de un **ángulo exterior** de un **triángulo** es igual a la **suma** de los **dos interiores no adyacentes**.

α = A + B

α = 180º - C



4En un **triángulo** a **mayor lado** se opone **mayor ángulo**.



5 Si un triángulo tiene **dos lados iguales**, sus **ángulos opuestos** también son **iguales**.

Triángulos iguales

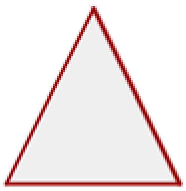
1Dos **triángulos** son **iguales** cuando tienen **iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes**.

2Dos **triángulos** son **iguales** cuando tienen **dos lados iguales y el ángulo comprendido**.

3Dos **triángulos** son **iguales** cuando tienen los **tres lados iguales**.

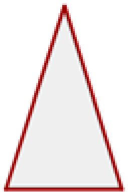
Clases de triángulos según sus lados

Triángulo equilátero



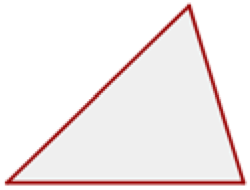
Tres lados iguales.

Triángulo isósceles



Dos lados iguales.

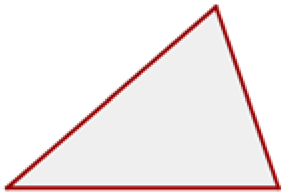
Triángulo escaleno



Tres lados desiguales

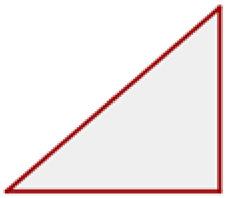
Clases de triángulos según sus ángulos

Triángulo acutángulo



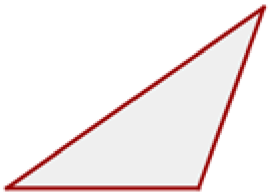
Tres ángulos agudos

Triángulo rectángulo



Un ángulo recto
El lado mayor es la hipotenusa.
Los lados menores son los catetos.

Triángulo obtusángulo

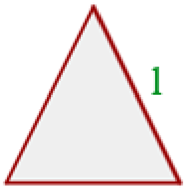


Un ángulo obtuso.

Perímetro de un triangulo

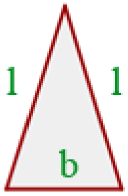
Triángulo Equilátero

$P = 3 \cdot l$



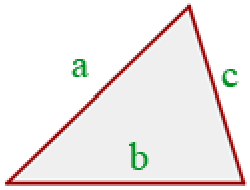
Triángulo Isósceles

$P = 2 \cdot l + b$

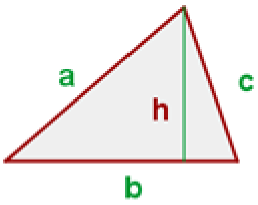


Triángulo Escaleno

$P = a + b + c$



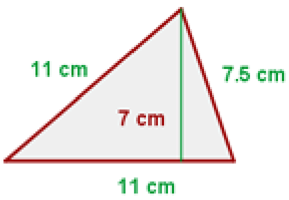
Área de un triángulo



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ejemplo

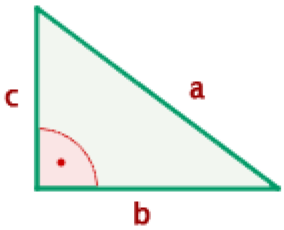
Hallar el **área** del siguiente **triángulo**:



$$A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5 \text{ cm}^2$$

Área de un triángulo rectángulo

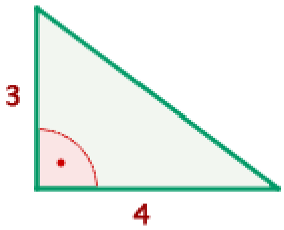
El área de un **triángulo rectángulo** es igual al **producto de los catetos partido por 2**.



$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

Ejemplo

Hallar el **área del triángulo rectángulo** cuyos catetos miden 3 y 4 cm.



$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ cm^2$$

Semiperímetro

El **semiperímetro de un triángulo** es igual a la **suma de sus lados partido por 2**.

Se denota con la letra **p**.

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Fórmula de Herón

La **fórmula de Herón** se utiliza para hallar el **área de un triángulo** conociendo sus **tres lados**.

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Ejemplo

Hallar el **área del triángulo** cuyos lados miden 3, 4 y 5 cm.

$$p = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\ cm$$

$$A = \sqrt{6 \cdot (6 - 3) \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2} = 6\ cm^2$$

ECUACION CUADRATICA

Las **ecuaciones cuadráticas o de segundo grado** son las expresiones de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Para **resolver ecuaciones de segundo grado** utilizamos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Si es $a<0$, multiplicamos los dos miembros por (-1).

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$(-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Ecuaciones cuadráticas incompletas

Una **ecuación cuadrática o de segundo grado** es **incompleta** si alguno de los coeficientes, b o c, o ambos, son iguales a cero.

$ax^2 = 0$

La solución es $x = 0$.

$$2x^2 = 0 \qquad x = 0$$

$$\frac{2}{5}x^2 = 0 \qquad x = 0$$

$ax^2 + bx = 0$

Extraemos factor común x:

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0$$

$$ax + b = 0 \qquad x = \frac{-b}{a}$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 5 = 0 \qquad x = 5$$

$ax^2 + c = 0$

Despejamos:

$$ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \begin{cases} \nearrow x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \searrow x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \begin{cases} \nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5 \\ \searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{cases}$$

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8 \qquad x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Soluciones de la ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones. Podemos distinguir tres casos:

$b^2 - 4ac > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$b^2 - 4ac = 0$

La ecuación tiene una solución doble.

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$b^2 - 4ac < 0$

La ecuación no tiene soluciones reales.

$x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{1} \notin \mathbb{R}$$

Propiedades de las soluciones de la ecuaciones cuadráticas

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación cuadrática a partir de sus soluciones

Si conocemos las raíces de una ecuación, podemos escribir ésta como:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Siendo S = $x_1 + x_2$ y P = $x_1 \cdot x_2$

Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y −2.

S= 3 − 2 = 1

P = 3 · 2 = 6

$x^2 - x + 6 = 0$

Factorización de la ecuaciones cuadráticas

$a x^2 + bx + c = 0$

$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

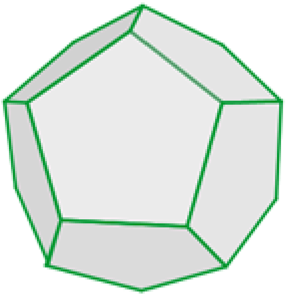
$$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$X = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

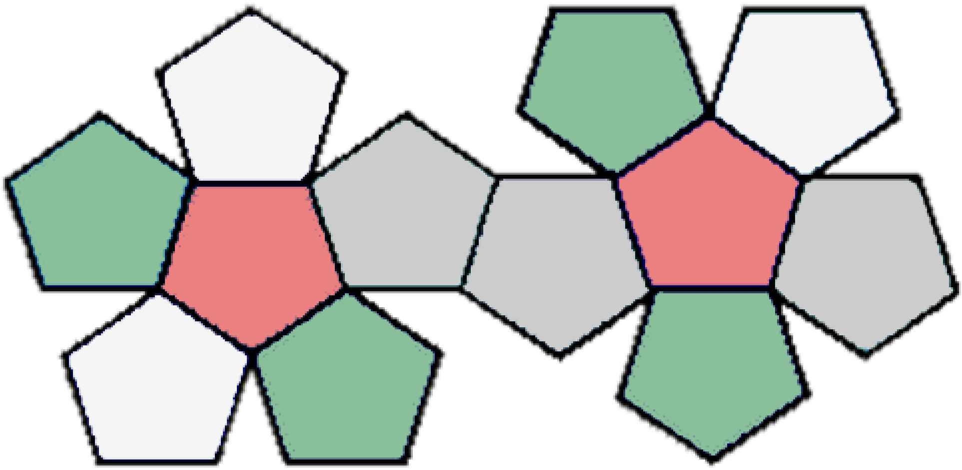
$$(X+2)^2 = 0$$

Definición de dodecaedro



Un **dodecaedro regular** es un **poliedro regular** formado por **12 pentágonos regulares iguales**.

Desarrollo del dodecaedro



Propiedades del dodecaedro

Número de caras: 12.

Número de vértices: 20.

Número de aristas: 30.

Nº de aristas concurrentes en un vértice: 3.

Área del dodecaedro

$$A = 30 \cdot a \cdot ap$$

Volumen del dodecaedro

$$V = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right) a^3$$

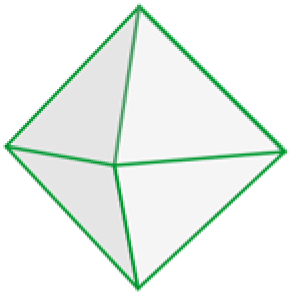
Ejercicio de dodecaedro

Calcula el **área** y el **volumen** de un **dodecaedro** de 10 cm de **arista**, sabiendo que la **apotema** de una de sus caras mide 6.88 cm.

$$A = 30 \cdot 10 \cdot 6.88 = 2064\ cm^2$$

$$V = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right) 10^3 = 7663.12\ cm^3$$

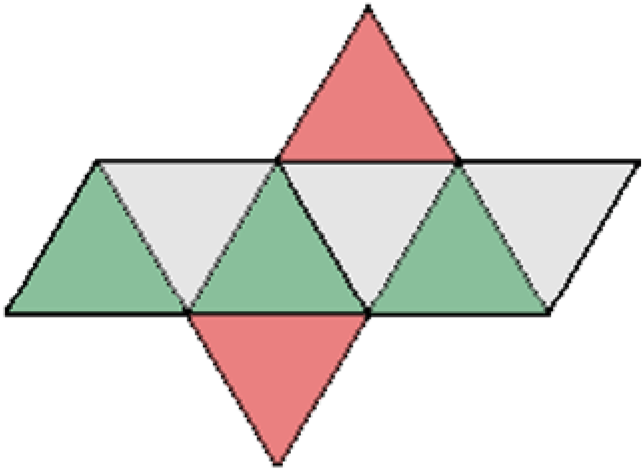
Definición de octaedro



Un **octaedro** es un **poliedro regular** formado por **8 triángulos equiláteros iguales**.

Se puede considerar formado por la unión, desde sus bases, de **dos pirámides cuadrangulares regulares iguales**.

Desarrollo del octaedro



Propiedades del octaedro

Número de caras: 8.

Número de vértices: 6.

Número de aristas: 12.

Nº de aristas concurrentes en un vértice: 4.

Área del octaedro

$$A = 2\sqrt{3} \cdot a^2$$

Volumen del octaedro

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

Ejercicio de octaedro

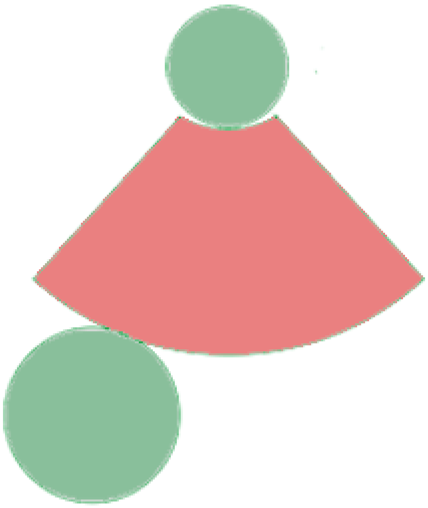
Calcula el **área** y el **volumen** un **octaedro** de 5 cm de arista.

$$A = 2\sqrt{3} \cdot 5^2 = 86.60\ cm^2$$

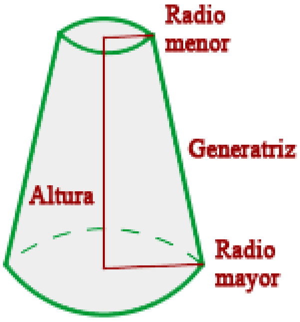
$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} 5^3 = 58.92\ cm^3$$

Cono truncado

El **cono truncado** o **tronco de cono** es el **cuerpo geométrico** que resulta al cortar un **cono** por un **plano paralelo** a la **base** y separar la parte que contiene al vértice.



Elementos del cono truncado

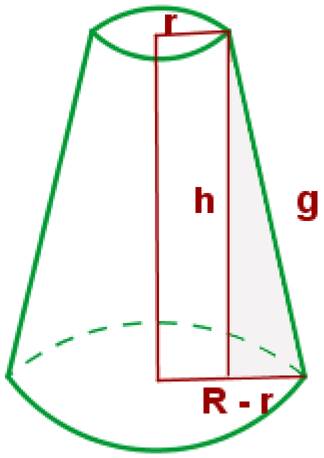


La sección determinada por al corte es la **base menor**.

La **altura** es el **segmento** que **une** perpendicularmente las **dos bases**

Los **radios** son los radios de sus bases.

La **generatriz** es el segmento que une dos puntos del borde de las dos bases.



Obtenemos la **generatriz del cono truncado** aplicando el **teorema de Pitágoras** en el triángulo sombreado:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Área lateral de un cono truncado

$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g$$

Área de un cono truncado

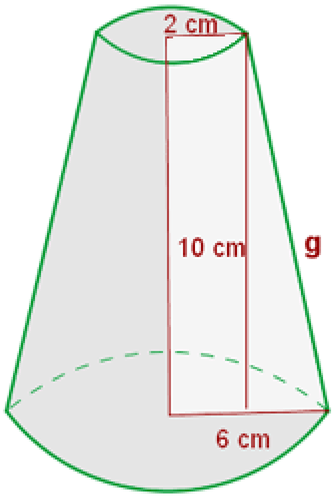
$$A_T = \pi\left[g(R + r) + R^2 + r^2\right]$$

Volumen de un cono truncado

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$$

Ejemplos

Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de cono de radios 6 y 2 cm, y de altura 10 cm.



$$g^2 = 10^2 + (6-2)^2$$

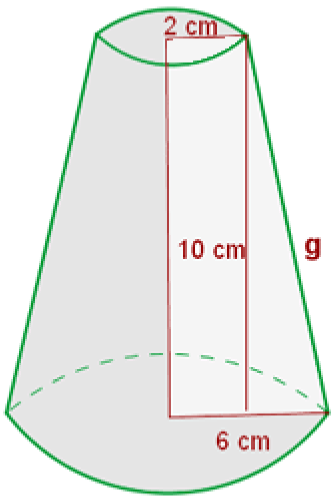
$$g = \sqrt{10^2 + (6-2)^2} = 9.165\ cm$$

$$A_L = \pi \cdot (6+4) \cdot 9.165 = 287.93\ cm^2$$

$$A_T = 287.93 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 4^2 = 451.29\ cm^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10 \cdot \left(6^2 + 4^2 + \sqrt{6^2 \cdot 4^2}\right) = 544.54\ c$$

Calcular el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono de radios 12 y 10 cm, y de generatriz 15 cm.



$$A_L = \pi \cdot (12+10) \cdot 15 = 1036.73\ cm^2$$

$$A_T = 1036.72 + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 10^2 = 1803.27\ c$$

$$15^2 = h^2 + (12 - 10)^2$$

$$h = \sqrt{15^2 - 2^2} = 14.866\ cm$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 14.866 \cdot \left(12^2 + 10^2 + \sqrt{12^2 \cdot 10^2}\right) = 5666.65\ c$$