



UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

Filtros activos de 2do Orden

Medición e Instrumentación

Autor: Lara Arellano Edgar
laraae2018@licifug.ugto.mx

Profesor: Dr. José Marco Balleza Ordaz

23 de noviembre de 2020

Índice

1. Introducción	1
2. Objetivos	1
3. Metodología y resultados	1
3.1. Filtro activo pasa-bajas 2do orden	1
3.1.1. Función de transferencia	2
3.1.2. Diseño de filtro (clase)	2
3.1.3. Diseño de filtro (literatura)	3
3.1.4. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-bajas	4
3.2. Filtro activo pasa-altas 2do orden	5
3.2.1. Función de transferencia	5
3.2.2. Diseño de filtro (clase)	6
3.2.3. Diseño de filtro (literatura)	7
3.2.4. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-bajas	8
3.3. Filtro activo pasa-banda 2do orden	9
3.3.1. Función de transferencia	9
3.3.2. Diseño de filtro (literatura)	11
3.3.3. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-banda	12
3.4. Filtro activo rechaza-banda 2do orden	13
3.4.1. Función de transferencia	13
3.4.2. Diseño de filtro (literatura)	16
3.4.3. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-banda	16
4. Discusión de los resultados	17
4.1. Filtro pasa-bajas	17
4.2. Filtro pasa-altas	17
4.3. Filtro pasa-banda	17
4.4. Filtro rechaza-banda	17
5. Conclusiones	18
Bibliografía	19
6. Anexos	20
6.1. Programa Filtro Pasa-Bajas	20
6.2. Programa Filtro Pasa-Altas	22
6.3. Programa Filtro Pasa-Banda	24
6.4. Programa Filtro Rechaza-Banda	26

Índice de figuras

1.	Diagrama de filtro activo pasa-bajas de 2do Orden	1
2.	Comparación de las respuestas en un filtro activo pasa-bajas de 2do orden.	5
3.	Diagrama de filtro activo pasa-altas de 2do Orden	6
4.	Comparación de las respuestas en un filtro activo pasa-altas de 2do orden.	9
5.	Diagrama de filtro activo pasa-banda de 2do Orden	10
6.	Comparación de las respuestas en el filtro pasa-banda usando la ecn. (15).	12
7.	Comparación de las respuestas en el filtro pasa-banda usando la ecn (17).	12
8.	Diagrama de filtro activo rechaza-bandas de 2do Orden	13
9.	Comparación de las respuestas en el filtro rechaza-banda usando la ecn. (28).	16

1. Introducción

Los filtros de segundo orden son otro tipo importante de diseño de filtro activo porque, junto con los filtros RC activos de primer orden que vimos anteriormente, los circuitos con filtros de alto orden se pueden diseñar a partir de estos.

En los tutoriales de esta sección de filtros analógicos, hemos analizado los diseños de filtros pasivos y activos y hemos visto que los filtros de primer orden se pueden convertir fácilmente en filtros de segundo orden simplemente usando una red RC adicional dentro de la ruta de entrada o retroalimentación. Entonces podemos definir los filtros de segundo orden simplemente como: "dos filtros de primer orden en cascada junto con la amplificación".

La mayoría de los diseños de filtros de segundo orden generalmente llevan el nombre de su inventor, siendo los tipos de filtro más comunes: Butterworth, Chebyshev, Bessel y otros más. Todos estos tipos de diseños de filtros están disponibles como: filtro pasa-bajas, filtro pasa-altas, filtro paso-banda y configuraciones de rechaza-banda.

Es importante señalar que:

1. Chebyshev ($\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$). Tiene una respuesta más abrupta. Optimiza, por tanto, la transición
2. Butterworth ($\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Optimiza la respuesta plana en la banda de paso
3. Bessel ($\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$). Optimiza la respuesta en fase

2. Objetivos

- Caracterizar filtros activos de 2do orden
- Analizar matemáticamente para obtener la función de transferencia
- Diseñar filtros y comparar teoría de clase respecto a literatura
- Graficar el comportamiento de los filtros a partir de diagrama de Bode

3. Metodología y resultados

3.1. Filtro activo pasa-bajas 2do orden

Los filtros de paso bajo de segundo orden son fáciles de diseñar y se utilizan ampliamente en muchas aplicaciones.

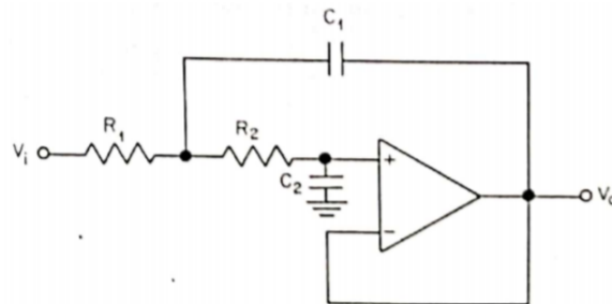


Figura 1: Diagrama de filtro activo pasa-bajas de 2do Orden

3.1.1. Función de transferencia

Los siguientes cálculos fueron hechos a partir del circuito de la Figura 1.

Para realizar los cálculos primero debemos considerar lo siguientes:

$$R_1 = R_2 = R$$

$$V^+ = V^- = V_o$$

Nodo V_1

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_{in}}{R} + \frac{V_1 + V^+}{R} + \frac{V_1 - V_o}{1/SC_1} &= 0 \\ V_1\left(\frac{2}{R} + SC_1\right) - \frac{V_{in}}{R} - V_o\left(\frac{1}{R} + SC_1\right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Nodo V^+

$$\begin{aligned} \frac{V^+ - V_1}{R} + \frac{V^+ - 0}{1/SC_2} &= V^+\left(\frac{1}{R} + SC_2\right) - \frac{V_1}{R} = 0 \\ V_1 &= V_o(1 + SC_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Sustituyendo en (2) en (1)

$$\begin{aligned} V_o(1 + SC_2)\left(\frac{2}{R} + SC_1\right) - \frac{V_{in}}{R} - V_o\left(\frac{1}{R} + SC_1\right) &= 0 \\ V_o\left(\frac{2}{R} + SC_1 + 2SC_2 + S^2RC_1C_2 - \frac{1}{R} - SC_1\right) &= V_o\left(\frac{1}{R} + 2SC_2 + S^2RC_1C_2\right) = \frac{V_{in}}{R} \\ \frac{V_o}{V_{in}} &= \frac{1}{S^2R^2C_1C_2 + 2SRC_2 + 1} \cdot \frac{1/R^2C_1C_2}{1/R^2C_1C_2} \\ \frac{V_o}{V_{in}} &= \frac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2 + s\left(\frac{2}{RC_1}\right) + \frac{1}{R^2C_1C_2}} \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación 3 es la función de transferencia del circuito de la Figura 1. Esta función puede ser expresada en su forma teórica para ayudarnos al momento de diseñar el filtro, dicha forma se encuentra a continuación:

$$F(s) = \frac{w^2}{s^2 + 2s\zeta w + w^2} \quad (4)$$

3.1.2. Diseño de filtro (clase)

1. Definir las condiciones iniciales, es decir, los valores de f_c , ζ y C_1 .
2. Igualar el coeficiente lineal de la función teórica (4) y de la de transferencia (3). Se procede a hacer lo mismo con los términos independientes.

$$\frac{2}{RC_1} = 2\zeta\omega_o$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R^2C_1C_2}$$

3. Obtener los valores de R , y C_2 .

4. Introducir los valores en la función de transferencia (3).¹

¹En la sección de anexos se encuentra el código en Matlab para el diseño de este filtro.

3.1.3. Diseño de filtro (literatura)

Type of two-pole low-pass filter	ζ	$C_1''F$	$C_2''F$
Bessel	0.8659	0.9066	0.6799
Butterworth	0.7072	1.414	0.7071
Chebyshev (0.1-dB peak)	0.6516	1.638	0.6955
Chebyshev (0.25-dB peak)	0.6179	1.778	0.6789
Chebyshev (0.5-dB peak)	0.5789	1.949	0.6533
Chebyshev (1-dB peak)	0.5228	2.218	0.6061
Chebyshev (2-dB peak)	0.4431	2.672	0.5246
Chebyshev (3-dB peak)	0.3833	3.103	0.4558

Tabla 1: Unscaled Capacitor Values for Fig. 1

1. Elegir los valores para C_1'' y C_2'' de la *Tabla 1*.

2. Realizar los siguientes cálculos:

$$C_1' = \frac{C_1''}{2\pi f_c}$$

$$C_2' = \frac{C_2''}{2\pi f_c}$$

3. Elegir un valor de R y calcular los valores de los capacitores de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

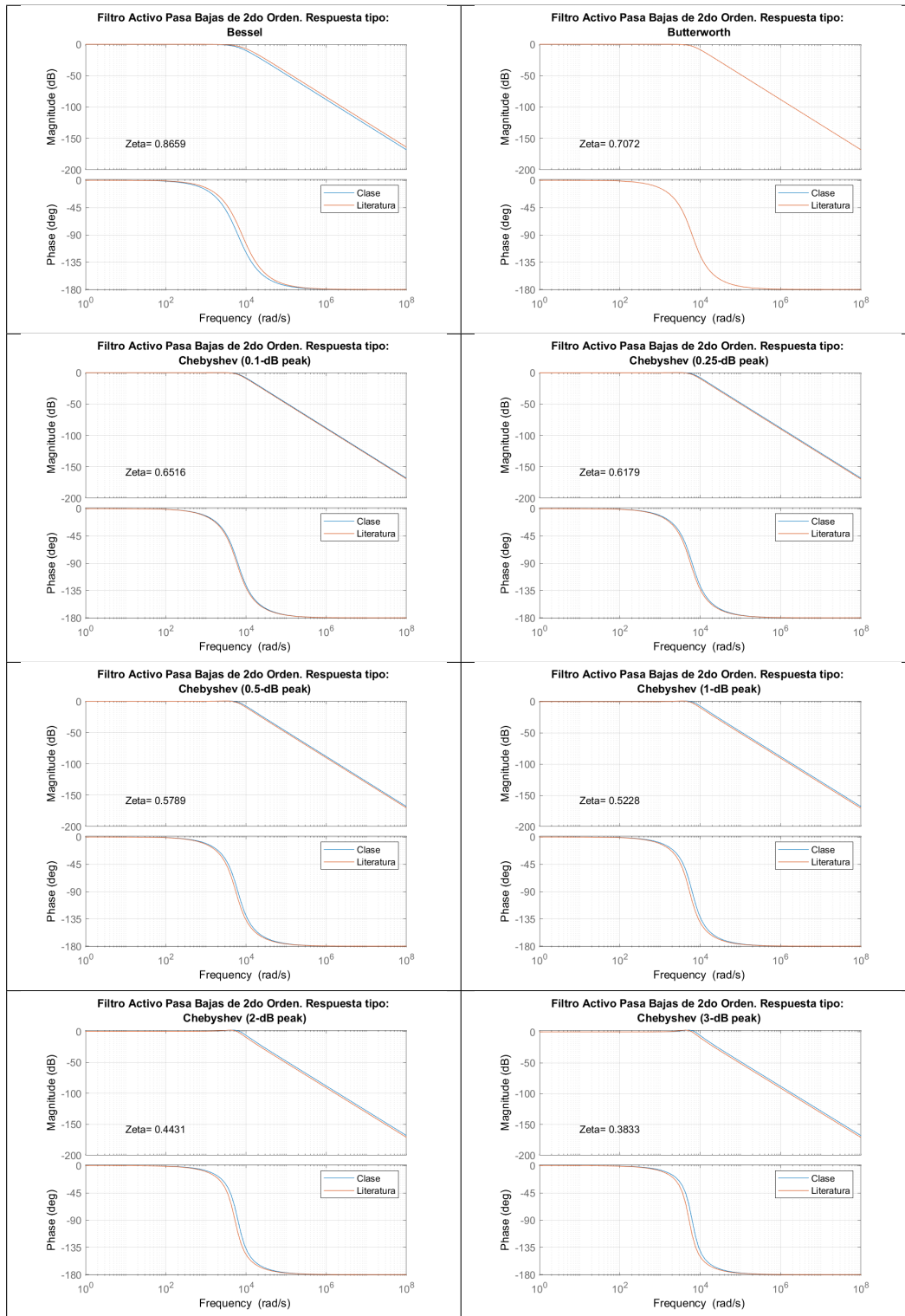
$$C_1 = \frac{C_1'}{R}$$

$$C_2 = \frac{C_2'}{R}$$

4. Introducir los valores en la función de transferencia (3).²

²En la sección de anexos se encuentra el código en Matlab para el diseño de este filtro.

3.1.4. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-bajas



En la matriz de imágenes anterior podemos encontrar una comparación del *filtro pasa-bajas* del diseño visto en clase respecto al que se encuentra en la literatura, donde *c/uno* de estos gráficos es para *c/una* de las ζ 's.

Además en la Figura (2) podemos ver claramente cómo va cambiando la gráfica al es-

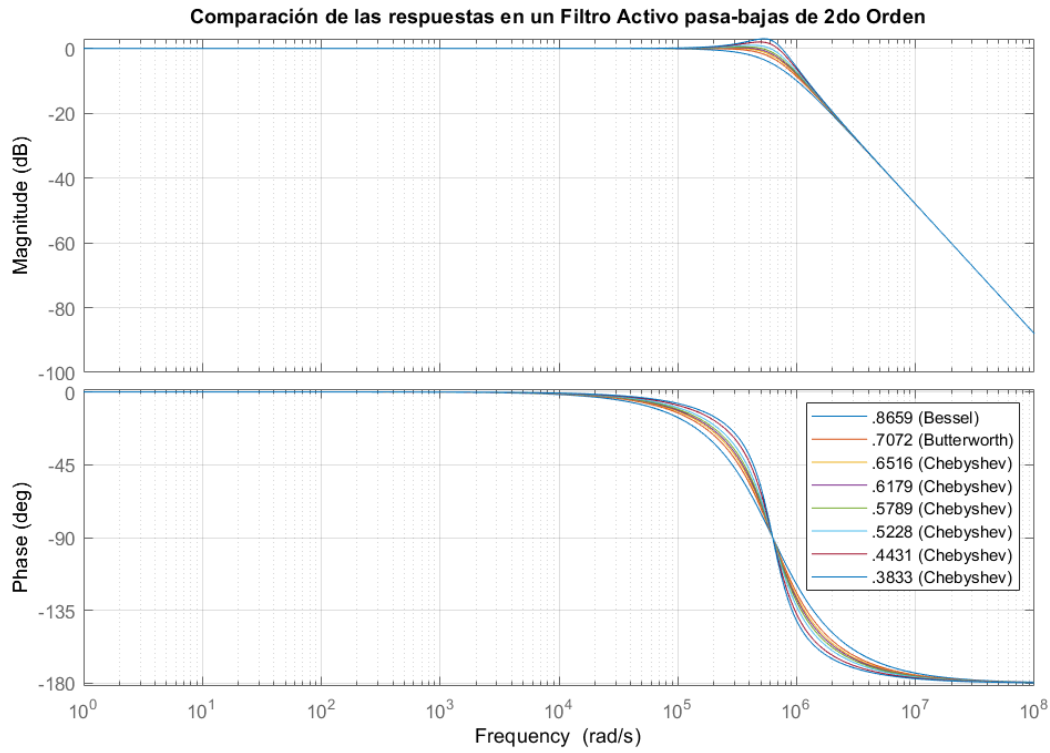


Figura 2: Comparación de las respuestas en un filtro activo **pasa-bajas** de 2do orden.

tar variando las ζ 's. De esta manera vemos los diferentes tipos de filtros (Bessel, Butterworth, Chebyshev) y sus variantes.

3.2. Filtro activo pasa-altas 2do orden

Hay muy poca diferencia entre la configuración del filtro de paso bajo de segundo orden y la configuración del filtro de paso alto de segundo orden, lo único que ha cambiado es la posición de las resistencias y los condensadores.

Dado que los filtros de paso alto y paso bajo de segundo orden son los mismos circuitos, excepto que las posiciones de las resistencias y los condensadores se intercambian, el diseño y los procedimientos de escalado de frecuencia para el filtro de paso alto son exactamente los mismos que los del filtro pasa-bajas anterior

3.2.1. Función de transferencia

Los siguientes cálculos fueron hechos a partir del circuito de la Figura 3. Para realizar los cálculos primero debemos considerar lo siguientes:

$$C_1 = C_2 = C$$

$$V^+ = V^- = V_o$$

Nodo V_1

$$\frac{V_1 - V_{in}}{1/SC} + \frac{V_1 - V^-}{1/SC} + \frac{V_1 - V_o}{R_1} = 0$$

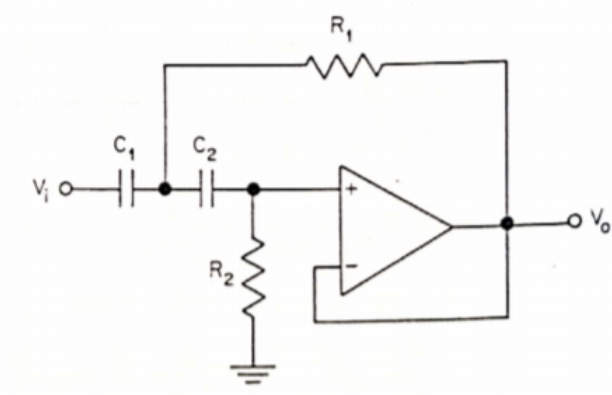


Figura 3: Diagrama de filtro activo pasa-altas de 2do Orden

$$V_1(2SC + \frac{1}{R_1}) - V_{in}SC - V_o(SC + \frac{1}{R_1}) = 0 \quad (5)$$

Nodo V^+

$$\frac{V^+ - V_1}{1/SC} + \frac{V^+ - 0}{R_2} = V^+(SC + \frac{1}{R_2}) - V_1SC = 0$$

$$V_1 = V_o(1 + \frac{1}{SCR_2}) \quad (6)$$

(2)en(1)

$$V_o(1 + \frac{1}{SCR_2})(2SC + \frac{1}{R_1}) - V_{in}SC - V_o(SC + \frac{1}{R_1}) = 0$$

$$V_o(2SC + \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{1}{SCR_1R_2} - SC - \frac{1}{R_1}) = V_o(SC + \frac{2}{R_2} + \frac{1}{SCR_1R_2}) = V_{in}SC$$

$$V_o(1 + \frac{2}{SCR_2} + \frac{1}{s^2C^2R_1R_2}) = V_{in}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{SCR_2} + \frac{1}{s^2C^2R_1R_2}} \cdot \frac{s^2}{s^2} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2s}{CR_2} + \frac{1}{C^2R_1R_2}}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{s^2}{s^2 + 2s(\frac{1}{CR_2}) + \frac{1}{C^2R_1R_2}} \quad (7)$$

La ecuación 7 es la función de transferencia del circuito de la Figura 3. Esta función puede ser expresada en su forma teórica para ayudarnos al momento de diseñar el filtro, dicha forma se encuentra a continuación:

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_o + \omega_o^2} \quad (8)$$

3.2.2. Diseño de filtro (clase)

1. Para comenzar a diseñar el filtro pasa-altas, debemos predefinir los valores de frecuencia de corte (f_c), el coeficiente (ζ) y el valor del capacitor (C).
2. A continuación procederemos a igualar los términos de la ecn. teórica (8) con la ecn. de transferencia (7).

$$\frac{2}{R_2C} = 2\zeta\omega_o$$

$$\frac{1}{R_2 C} = \zeta \omega_o \quad (9)$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C^2} \quad (10)$$

3. En seguida, y con un poco de álgebra en las enc's anteriores (ec. 9 y 10), procederemos a calcular los valores de R_1 , y R_2 , de esto obtenemos:

$$R_2 = \frac{1}{C \zeta \omega_o}$$

$$R_2 = \frac{1}{C \zeta 2\pi f_c} \quad (11)$$

$$R_1 = \frac{1}{C^2 R_2 \omega_o^2}$$

$$R_1 = \frac{1}{C^2 R_2 \omega_o^2}$$

$$R_1 = \frac{1}{C^2 R_2 (2\pi)^2 F_c^2} \quad (12)$$

4. Finalmente, los valores obtenidos en las enc's (11) y (12), junto que el valor de capacitor C (el cual fue predefinido como dijimos en el primer punto de esta sección) serán sustituidos en la función de transferencia (7).³

3.2.3. Diseño de filtro (literatura)

Type of two-pole high-pass filter	ζ	R	R'_2
Bessel	0.8659	1.103	1.471
Butterworth	0.7072	0.7072	1.414
Chebyshev (0.1-dB peak)	0.6516	0.6105	1.438
Chebyshev (0.25-dB peak)	0.6179	0.5624	1.473
Chebyshev (0.5-dB peak)	0.5789	0.5131	1.531
Chebyshev (1-dB peak)	0.5228	0.4509	1.650
Chebyshev (2-dB peak)	0.4431	0.3743	1.906
Chebyshev (3-dB peak)	0.3833	0.3223	2.194

Tabla 2: Unscaled Resistor Values for Fig. 3

1. Elegir los valores de R'_1 y R'_2 de la *Tabla 2*.
2. Realizar los siguientes cálculos:

$$C = \frac{1}{2\pi f_c}$$

$$K = \frac{1}{\omega_o C}$$

3. Con el valor de K , calcular los valores de R

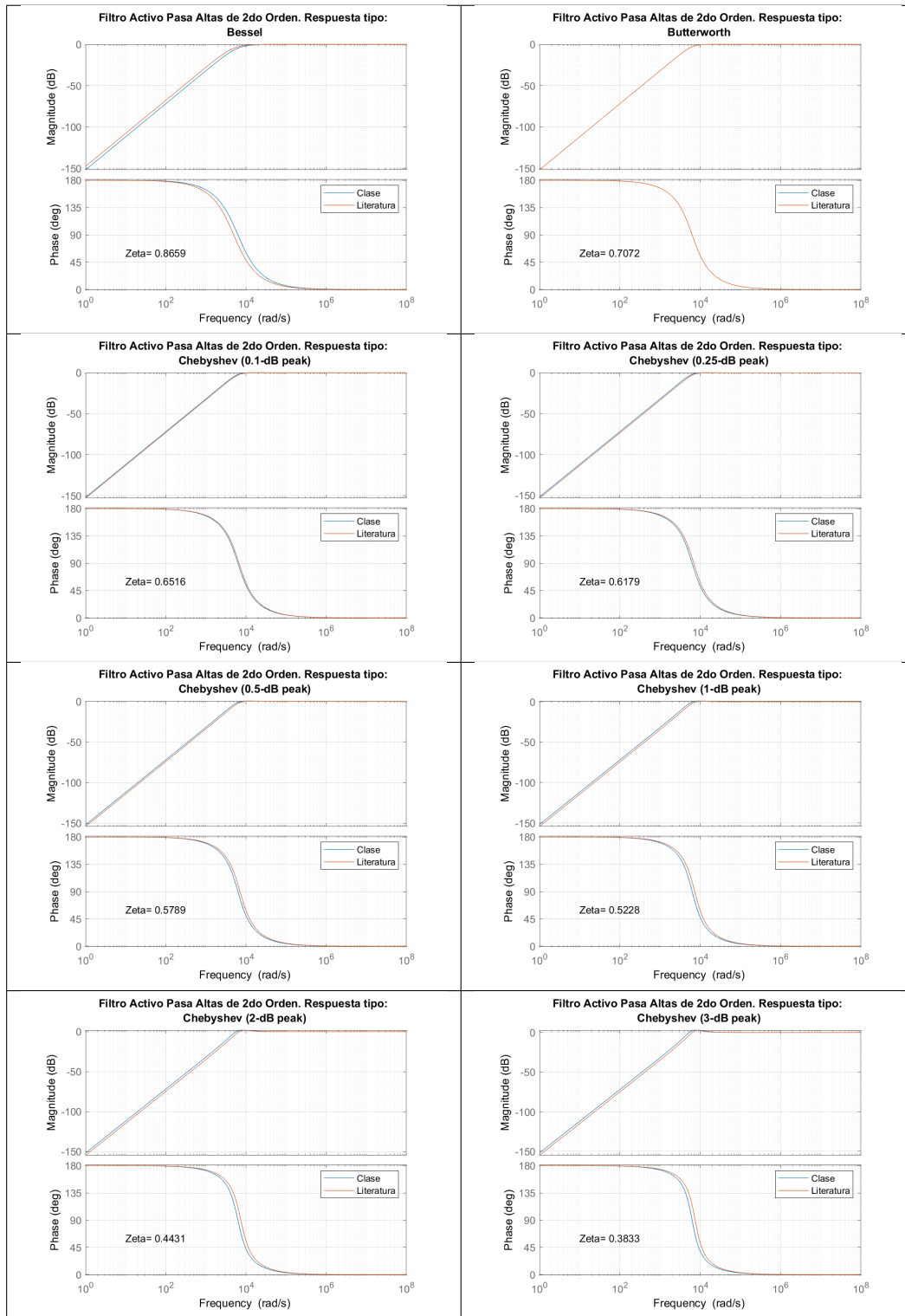
$$R_1 = K R'_1$$

$$R_2 = K R'_2$$

4. Introducir los valores en la función de transferencia (7).

³En la sección de anexos se encuentra el código en Matlab para el diseño de este filtro.

3.2.4. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-bajas



En la matriz de imágenes anterior podemos encontrar una comparación del *filtro pasa-altas* del diseño visto en clase respecto al que se encuentra en la literatura, donde c/uno de estos gráficos es para c/una de las ζ 's.

Además en la Figura (4) podemos ver claramente cómo va cambiando la gráfica al estar variando las ζ 's. De esta manera vemos los diferentes tipos de filtros (Bessel, Butterworth,

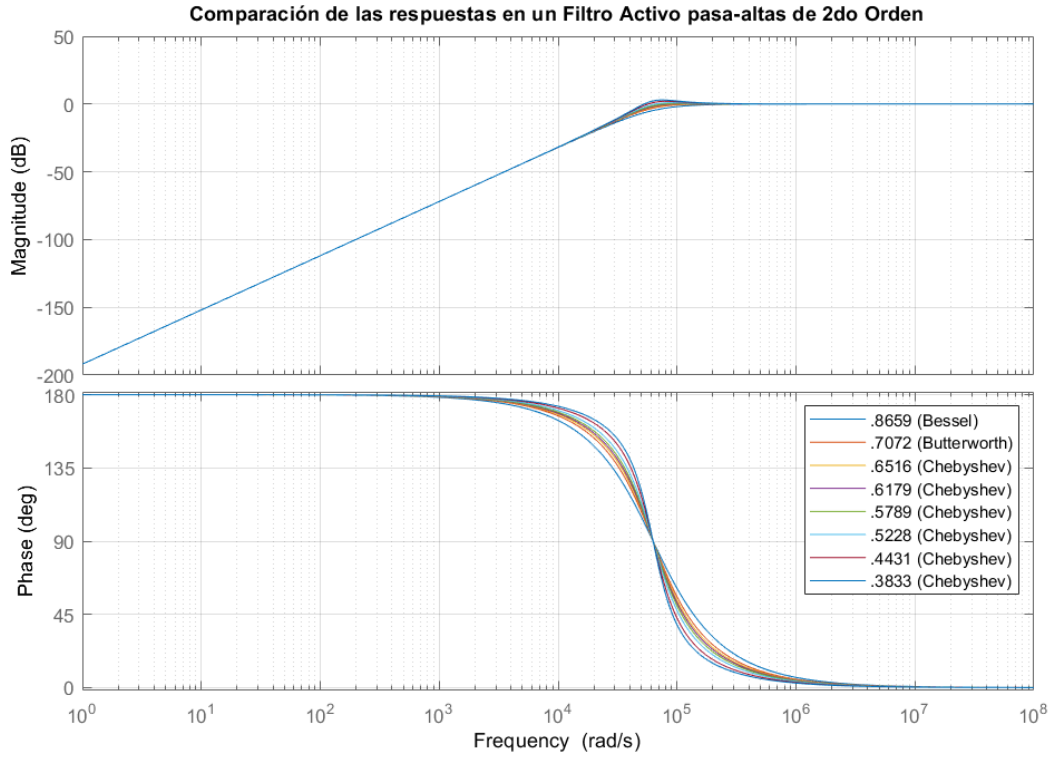


Figura 4: Comparación de las respuestas en un filtro activo **pasa-altas** de 2do orden.

Chebyshev) y sus variantes.

3.3. Filtro activo pasa-banda 2do orden

3.3.1. Función de transferencia

Los siguientes cálculos fueron hechos a partir del circuito de la Figura 5. Para realizar los cálculos primero debemos considerar que:

$$V^+ = V^- = V_o$$

Nodo V_1

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_{in}}{R_1} + \frac{V_1 - V^+}{R_2} + \frac{V_1 - V_o}{1/SC_1} + \frac{V_1 - V^+}{1/SC_2} &= \frac{V_1 - V_{in}}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_o}{1/SC_1} + \frac{V_1}{1/SC_2} = 0 \\ V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + SC_1 + SC_2 \right) - \frac{V_{in}}{R_1} - V_o SC_1 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Nodo V^-

$$\begin{aligned} \frac{V^- - V_o}{R_3} + \frac{V^- - V_1}{1/SC_2} &= V^- \left(\frac{1}{R_3} + SC_2 \right) - \frac{V_o}{R_3} - V_1 SC_2 = 0 \\ V_1 &= V^- \left(\frac{1}{SC_2 R_3} + 1 \right) - \frac{V_o}{SC_2 R_3} \end{aligned}$$

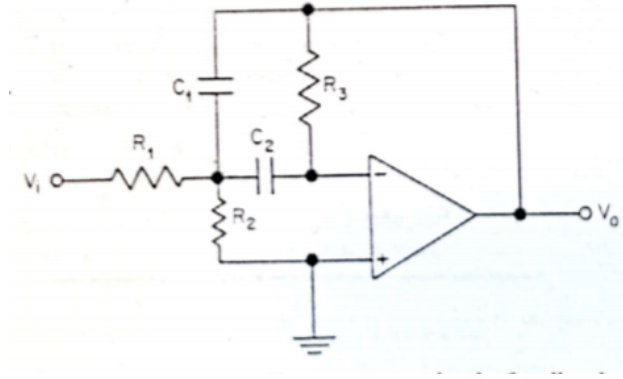


Figura 5: Diagrama de filtro activo pasa-banda de 2do Orden

$$V_1 = -\frac{V_o}{SC_2R_3} \quad (14)$$

(2)en(1)

$$-V_o\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + SC_1 + SC_2\right)\left(\frac{1}{SC_2R_3}\right) - \frac{V_{in}}{R_1} - V_oSC_1 = 0$$

$$-V_o\left(\frac{1}{SC_2R_1R_3} + \frac{1}{SC_2R_2R_3} + \frac{C_1}{C_2R_3} + \frac{1}{R_3} + SC_1\right) = \frac{V_{in}}{R_1}$$

$$-V_o\left(\frac{1}{SC_2R_3} + \frac{R_1}{SC_2R_2R_3} + \frac{C_1R_1}{C_2R_3} + \frac{R_1}{R_3} + SC_1R_1\right) = V_{in}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-1}{\frac{1}{SC_2R_3} + \frac{R_1}{SC_2R_2R_3} + \frac{C_1R_1}{C_2R_3} + \frac{R_1}{R_3} + SC_1R_1} \cdot \frac{S/C_1R_1}{S/C_1R_1}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-S/C_1R_1}{\frac{1}{C_1C_2R_1R_3} + \frac{1}{C_1C_2R_2R_3} + \frac{S}{C_2R_3} + \frac{S}{C_1R_3} + S^2}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-S/C_1R_1}{S^2 + S\left(\frac{1}{C_2R_3} + \frac{1}{C_1R_3}\right) + \left(\frac{1}{C_1C_2R_1R_3} + \frac{1}{C_1C_2R_2R_3}\right)}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{S\left(\frac{-1}{C_1R_1}\right)}{S^2 + S\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R_3}\right) + \left(\frac{R_1+R_2}{C_1C_2R_1R_2R_3}\right)}$$

Ahora bien, si definimos $C_1 = C_2 = C$ entonces:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{S\left(\frac{-1}{CR_1}\right)}{S^2 + S\left(\frac{2}{CR_3}\right) + \left(\frac{R_3}{C^2}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \quad (15)$$

La ecuación 15 es la función de transferencia del circuito de la Figura 5. Esta función puede ser expresada en su forma teórica para ayudarnos al momento de diseñar el filtro, dicha forma se encuentra a continuación:

$$F(s) = \frac{-As}{s^2 + sB + C} \quad (16)$$

La literatura nos dice que el *factor de calidad* Q es igual a:

$$Q = \frac{[R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)]^{1/2}}{\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2}}$$

Debido a que ya definimos $C = C_1 = C_2$, entonces:

$$Q = [R_3(\frac{1}{R_1}) + \frac{1}{R_2}]^{1/2}$$

Para introducir el *factor de calidad* (Q) a esta función, multiplicamos todo por el término $\frac{C^2 R_3^2/4}{C^2 R_3^2/4}$:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-sCR_3^2/4R_1}{\frac{s^2C^2R_3^2}{4} + s\left(\frac{R_3C}{2}\right) + \left(\frac{R_3}{4}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

Tomando nuestro factor Q como $Q = \left(\frac{R_3}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-sCR_3^2/4R_1}{Q^2 + \left(\frac{R_3C}{2}\right)s + \frac{s^2C^2R_3^2}{4}}$$

Multiplicando todo por el término $(4/C^2R_3^2) / (4/C^2R_3^2)$, nos queda la siguiente ecuación:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-s\left(\frac{1}{CR_1}\right)}{s^2 + \left(\frac{2}{R_3C}\right)s + \frac{4Q^2}{C^2R_3^2}} \quad (17)$$

La ecuación 17 es la función de transferencia de la *Figura 5* en relación al *factor de calidad* Q .

3.3.2. Diseño de filtro (literatura)

1. Definir las condiciones iniciales, es decir, los valores de f_c , H , Q y C .
2. Encontrar R_1 , R_2 y R_3 :

$$R_3 = \frac{2Q}{2\pi f_c C}$$

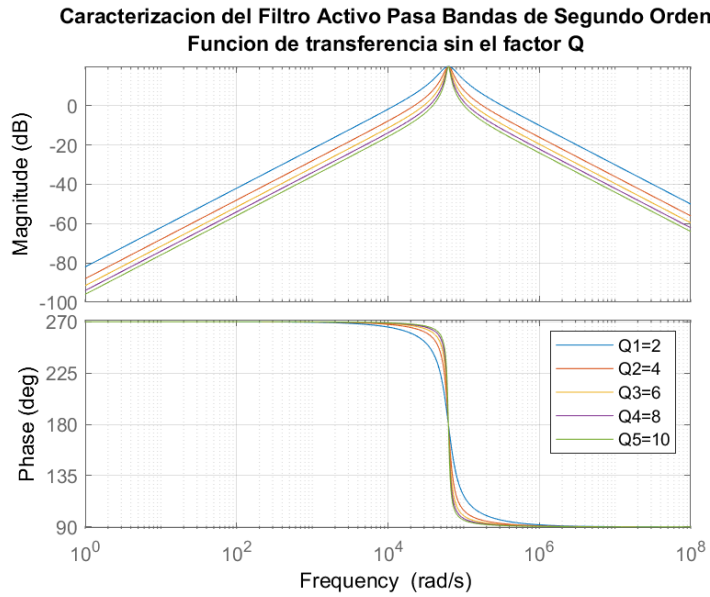
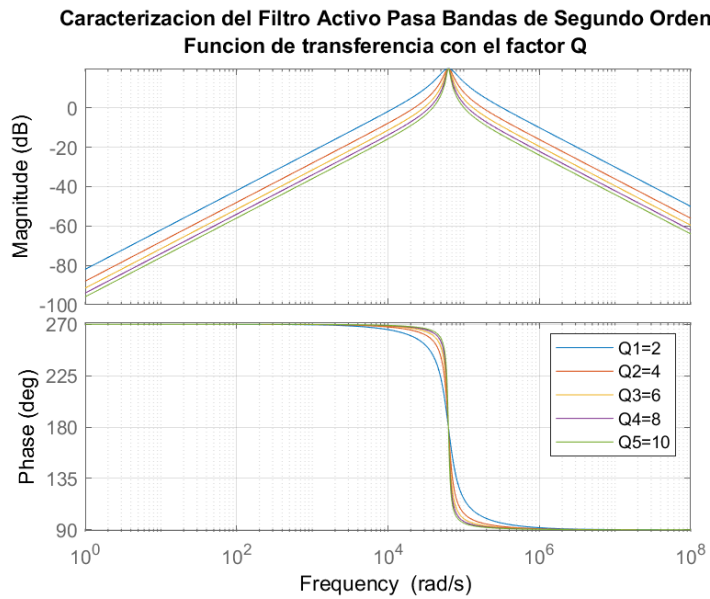
$$R_1 = \frac{Q}{2\pi f_c C H}$$

$$R_2 = \frac{Q}{(2\pi f_c C H)(2Q^2 - H)}$$

3. Introducir los valores en la función de transferencia (ecn. 15) que no contiene el *factor de calidad* Q .
4. Introducir los valores en la función de transferencia (ecn. 17) que contiene el *factor de calidad* Q .⁴

⁴En la sección de anexos se encuentra el código en Matlab para el diseño de este filtro.

3.3.3. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-banda

Figura 6: Comparación de las respuestas en el filtro **pasa-banda** usando la ecn. (15).Figura 7: Comparación de las respuestas en el filtro **pasa-banda** usando la ecn (17).

Podemos notar que ambas imágenes, la Figura 6 y la Figura 7 son exactamente las mismas, esto tiene lógica debido a que tanto la ecn. (15) como la ecn. (17) son equivalentes, solo que una incluye explícitamente el *factor de calidad* Q .

3.4. Filtro activo rechaza-banda 2do orden

Este filtro es otro tipo de circuito selectivo de frecuencia que funciona exactamente de manera opuesta al filtro de paso de banda que vimos antes. El filtro rechaza-banda, también conocido como filtro de parada de banda, pasa todas las frecuencias con la excepción de aquellas dentro de una banda de parada específica que están muy atenuadas.

Además, al igual que el filtro pasa-banda, el filtro rechaza-banda es un filtro de segundo orden (dos polos) que tiene dos frecuencias de corte, comúnmente conocidas como puntos de -3dB o de media potencia que producen un ancho de banda de rechaza-banda entre estos dos puntos de -3dB.

Entonces, la función de un filtro de parada de banda es pasar todas esas frecuencias desde cero hasta su primer punto de frecuencia de corte (inferior) f_L , y pasar todas esas frecuencias por encima de su segunda frecuencia de corte (superior) f_H , pero bloquee o rechace todas esas frecuencias intermedias. Entonces, el ancho de banda de los filtros, BW se define como: $(f_H - f_L)$.

Entonces, para un filtro de rechazo de banda ancha, la banda de rechazo real del filtro se encuentra entre sus puntos inferior y superior de -3dB a medida que atenúa o rechaza cualquier frecuencia entre estas dos frecuencias de corte.

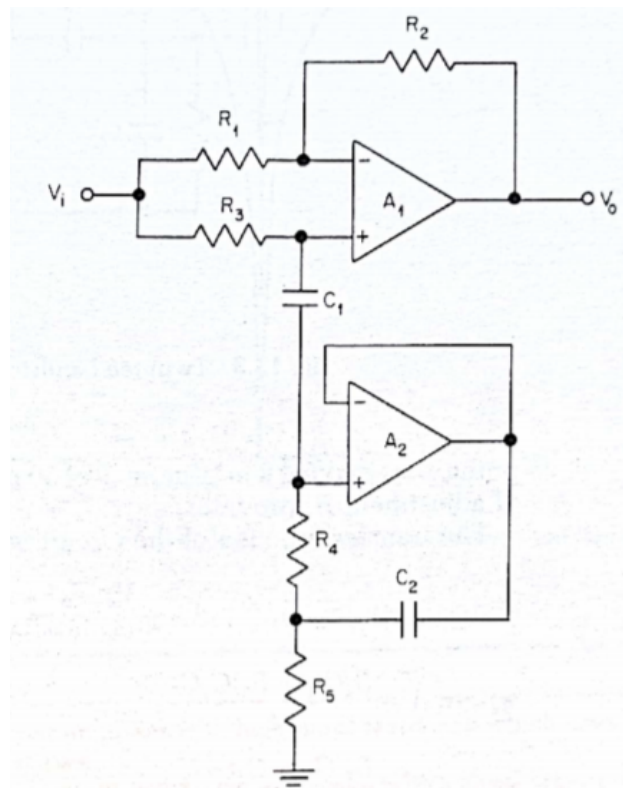


Figura 8: Diagrama de filtro activo rechaza-bandas de 2do Orden

3.4.1. Función de transferencia

Los siguientes cálculos fueron hechos a partir del circuito de la Figura 8. A partir de este circuito se obtiene el siguiente análisis matemático:

Los siguientes cálculos fueron hechos a partir del circuito de la Figura3. Para realizar los cálculos primero debemos considerar que:

$$R_1 = R_2 = R_3$$

$$R = R_4 = R_5 = \frac{R_1}{2}$$

$$V_2^+ = V_2^-$$

Nodo V_1

$$V_1 \left(\frac{1}{R_5} + sC_2 + \frac{1}{R_4} \right) + V_2^- (-sC_2) + V_2^+ \left(-\frac{1}{R_4} \right) = 0 \quad (18)$$

Nodo V_1^-

$$V^+ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + V_{in} \left(-\frac{1}{R_1} \right) + V_0 \left(-\frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (19)$$

Nodo V_1^+

$$V^+ \left(\frac{1}{R_3} + sC_1 \right) + V_2^+ (-sC_1) + V_{in} \left(-\frac{1}{R_3} \right) = 0 \quad (20)$$

Nodo V_2^+

$$V_2^+ \left(sC_1 + \frac{1}{R_4} \right) + V^+ (-sC_1) + V_1 \left(-\frac{1}{R_4} \right) = 0 \quad (21)$$

Ya que tenemos como consideración inicial que: $V_2^+ = V_2^-$

$$V_1 \left(\frac{1}{R_3} + sC_2 + \frac{1}{R_4} \right) = V_2^+ \left(sC_2 + \frac{1}{R_4} \right)$$

$$V_1 (R_4 + R_5 + R_4 R_5 sC_2) = V_2^+ (R_4 R_5 sC_2 + R_5) \quad (22)$$

Despejando V_1 de la ecn. 22 y sustituyendo en la enc. 21

$$V_1 = \frac{V_2^+ (R_4 R_5 sC_2 + R_5)}{(R_4 + R_5 + R_4 R_5 sC_2)}$$

$$V_1 = V_2^+ \left(1 - \frac{R_4}{R_5 + R_4 + R_4 R_5 sC_2} \right) \quad (23)$$

$$V_2^+ \left(sC_1 + \frac{1}{R_4} \right) + V^+ (-sC_1) + V_2^+ \left(1 - \frac{R_4}{R_4 R_5 + R_4 R_5 sC_2} \right) \left(-\frac{1}{R_4} \right) = 0$$

Despejamos V_2^+

$$V_2^+ \left(sC_1 + \frac{1}{R_4 + R_5 + R_4 R_5 sC_2} \right) = V_1^+ (sC_1)$$

$$V_2^+ = \frac{V_1^+}{\frac{1}{sC_1(R_4 + R_5 + R_4 R_5 sC_2)} + 1} \quad (24)$$

Sustituimos (24) en la ecuación (20), considerando que $V_1^+ = V_1^-$

$$V^+(1 + sC_1R_3) = V_{in} + \frac{V_1^+ sC_1R_3}{1 + \frac{1}{sC_1(R_4+R_5+R_4R_5sC_2)}}$$

$$V_{in} = V^+(1 + sC_1R_3) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_1(R_4+R_5+R_4R_5sC_2)}} \right) \quad (25)$$

Despejamos V_1^+

$$V^+ = \frac{V_{in}}{1 + sC_1R_3 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_1(R_4+R_5+R_4R_5sC_2)}} \right)} \quad (26)$$

Tomamos la sig. ecuación :

$$V^- [R_2 + R_1] = V_{in}[R_2] + V_{out}[R_2] \quad (27)$$

Sustituimos la ecuación (26) en la (27) recordando la condición inicial de que $V^+ = V^-$

$$V_{in} \left[\frac{R_2 + R_1}{1 + sC_1R_3 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_1(R_4+R_5+R_4R_5sC_2)}} \right]} - R_2 \right] = V_{out}[R_1]$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 + sC_1R_3R_1 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_1(R_4+R_5+R_4R_5sC_2)}} \right]} - \frac{R_2}{R_1}$$

$$x = 1 + sC_1[R_4 + R_5 + R_4R_5sC_2]$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 + sC_1R_3R_1 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right]} - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \left[\frac{x + R_3sC_1}{x} \right]} - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{x(R_1 + R_2)}{R_1[x + sC_1R_3]} - \frac{R_2[x + sC_1R_3]}{R_1[X + R_3sC_1]}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{xR_1 - R_2R_3sC_1}{R_1[X + R_3sC_1]} \cdot \frac{\frac{1}{R_4R_5C_1C_2}}{\frac{1}{R_4R_5C_1C_2}}$$

Por lo tanto, la función de transferencia es:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{s^2 + \frac{s[R_4+R_5-\frac{R_2R_3}{R_1}]}{R_3R_5C_2} + \frac{1}{R_4R_5C_1C_2}}{s^2 + \frac{s[R_3+R_4+R_5]}{R_4R_5C_2} + \frac{1}{R_4R_5C_1C_2}} \quad (28)$$

3.4.2. Diseño de filtro (literatura)

1. Definir las condiciones iniciales, es decir, los valores de f_c , Q y R_{in} .

2. Encontrar R_1, R_2 y R_3 :

$$R_1 = R_2 = R_3 = 2(R_{in})$$

3. Encontrar R_4 y R_5 :

$$R = R_4 = R_5 = \frac{R_1}{2}$$

4. Encontrar C_2 :

$$C_2 = \frac{2Q}{\pi f_c R}$$

5. Encontrar C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi f_c R)^2 C_2}$$

6. Finalmente, solo debemos sustituir en la ecn (28) dichos valores.⁵

3.4.3. Gráficas del comportamiento del filtro pasa-banda

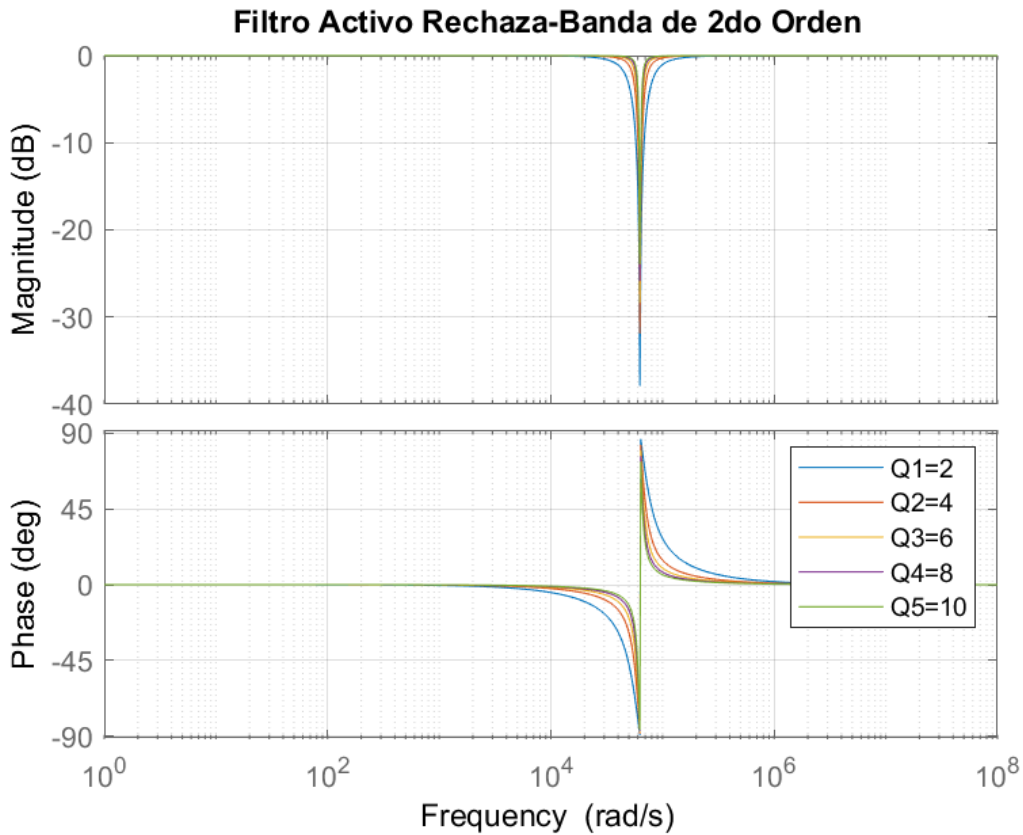


Figura 9: Comparación de las respuestas en el filtro **rechaza-banda** usando la ecn. (28).

⁵En la sección de anexos se encuentra el código en Matlab para el diseño de este filtro.

4. Discusión de los resultados

4.1. Filtro pasa-bajas

Desde la matriz de gráficos (3.1.4) a la Fig. (2) se puede apreciar cómo es el comportamiento de un filtro pasa-bajas activo de 2do orden.

Es notable que no existe una variación muy grande en la respuesta al momento de diseñar el filtro, ya sea que se haya optado por el método visto en clase, o por el método que se encuentra en la literatura esto quiere decir que ambos son correctos.

Según la literatura, la aproximación Butterworth da la respuesta más plana posible hasta la frecuencia de corte, la aproximación Chebyshev genera una cresta que hace que la pendiente sea más rápida en la banda de paso, y la aproximación Bessel presenta una fase lineal. Lo anterior lo podemos confirmar con los diagramas de bode que se realizaron para este filtro.

Ahora bien es notorio que solo permite el paso de frecuencias bajas y atenúa las frecuencias altas y que deja pasar desde 0 Hz hasta la frecuencia de corte f_c y bloquea todas las frecuencias por encima de ésta.

4.2. Filtro pasa-altas

Al igual que con los filtros pasivo, un filtro activo pasa-altas de 1er orden se puede convertir en un filtro de pasa-altas de 2do orden simplemente usando una red RC adicional en la ruta de entrada. La respuesta de frecuencia del filtro de pasa-altas de 2do orden es idéntica a la del tipo de 1er orden, excepto que la atenuación de la banda de parada será el doble de los filtros de primer orden a 40 dB/decade.

Hay muy poca diferencia entre la configuración del filtro de pasa-bajas de 2do orden y la configuración del filtro de pasa-altas, lo único que ha cambiado es la posición de las resistencias y los capacitores. Entonces, el diagrama de Bode para un filtro pasa-altas de 2do orden es la inclinación de la caída en la banda de parada es -40 dB/decade.

4.3. Filtro pasa-banda

Este tipo de filtro, de pasa-banda está diseñado para tener una banda de paso **mucho más estrecha**. La frecuencia central y el ancho de banda del filtro están relacionados con los valores de R_1 , R_2 , C_1 y C_2 . La salida del filtro se toma nuevamente de la salida del amplificador operacional.

Este tipo de diseño de paso de banda activo produce un circuito en el cual se presenta una *caída pronunciada a ambos lados de su frecuencia central*. Debido a que la respuesta de frecuencia del circuito es similar a la de un circuito de resonancia, esta frecuencia central se conoce como frecuencia de resonancia.

4.4. Filtro rechaza-banda

Podemos ver que tanto el filtro de pasa-banda como el rechaza-banda son bastante similares en sus características. El filtro de rechaza-banda es simplemente una forma invertida o complementada del filtro pasa-banda estándar. De hecho, las definiciones utilizadas para ancho de banda, banda de paso, banda de rechazo, frecuencia central y frecuencia de corte son las mismas que antes, y podemos usar las mismas fórmulas para calcular el ancho de banda, BW (bandwidth), frecuencia central y factor de calidad Q .

El filtro rechaza-banda ideal tendría atenuación infinita en su banda de parada y atenuación cero en cualquier banda de paso. La transición entre las dos bandas de paso y la banda de rechazo sería vertical). Hay varias formas en que podemos diseñar un "filtro rechaza-banda", y

todas cumplen el mismo propósito.

Generalmente, los filtros rechaza-banda se construyen combinando un filtro de pasa-bajas en serie con un filtro pasa-altas. Los filtros rechaza-banda se crean combinando las secciones de filtro de pasa-bajas y pasa-altas en una configuración de tipo "paralelo" como se muestra en la Figura (8).

5. Conclusiones

Finalmente, podemos llegar a conclusiones bastante sustanciosas al relizar este trabajo de investigación. La mayoría de los filtros activos constan solo de amplificadores operacionales, resistencias y capacitores, y el punto de la frecuencia de corte se logra mediante el uso de retroalimentación, lo que elimina la necesidad de inductores como se usa en los circuitos de filtros pasivo de 1er orden, los cuales fueron vistos previo a estos.

Los filtros activos de 2do orden (dos polos), ya sean pasa-bajas o pasa-altas, son importantes en electrónica porque podemos usarlos para diseñar filtros de orden mucho más alto con reducciones muy pronunciadas, además de poder conectar en cascada filtros de 1er y 2do orden, filtros analógicos con un valor de enésimo orden, ya sea par o impar, se puede construir hasta cualquier valor, dentro de lo razonable, y de esta manera adecuar el circuito a nuestras necesidades.

El diagrama de Bode de respuesta de frecuencia anterior es básicamente el mismo que el de un filtro de primer orden. Sin embargo, los filtros de segundo orden pueden exhibir una variedad de respuestas dependiendo del factor de aumento de voltaje de los circuitos, además de que el *factor de calidad* Q influye de manera significativa, debido a que afecta justo en el punto de frecuencia de corte, donde lo que cambia es la inclinación de la caída.

En los filtros activos de segundo orden, normalmente se utiliza el factor de amortiguación, ζ (zeta), que es el inverso de Q . Tanto Q como ζ están determinados independientemente por la ganancia del amplificador. A, de modo que a medida que Q disminuye, aumenta el factor de amortiguación. En términos simples, un filtro pasa-bajas siempre será pasa-bajas por naturaleza, pero puede exhibir un pico resonante en las proximidades de la frecuencia de corte, es decir, la ganancia puede aumentar rápidamente debido a los efectos de resonancia de la ganancia de los amplificadores.

Entonces Q , el factor de calidad, representa el "pico" de este pico de resonancia, es decir, su altura y estrechez alrededor del punto de frecuencia de corte, f_c . Pero la ganancia de un filtro también determina la cantidad de su retroalimentación y, por lo tanto, tiene un efecto significativo en la respuesta de frecuencia del filtro.

La literatura indica que generalmente, para mantener la estabilidad, la ganancia de un filtro activo no debe ser superior a 3. Para complementar aún más este trabajo, es necesario hablar de los dB (decibelios) que aparecen en las gráficas de Bode que hemos presentado. Al analizar circuitos en el dominio de la frecuencia, es más conveniente comparar la relación de amplitud de los valores de salida con los de entrada en una escala logarítmica que en una escala lineal. Entonces, si usamos la razón logarítmica de dos cantidades, P_1 y P_2 , terminamos con una nueva cantidad o nivel que se puede presentar usando decibelios.

Como el voltaje o la corriente que se mide en voltios y amperios respectivamente, el decibel, o dB simple para abreviar, es solo una relación de dos valores, para ser más específicos, en realidad es la relación de un valor contra otro valor conocido o fijo, por lo tanto, el decibel es un cantidad adimensional, pero tiene el "Bel" como sus unidades después del inventor del teléfono, Alexander Graham Bell.

La relación de dos valores cualesquiera, donde uno es fijo o conocido y de la misma cantidad o unidades, ya sea potencia, voltaje o corriente, se puede representar usando decibelios (dB) donde "deci" significa una décima (1/10) de un Bel. Claramente, entonces hay 10 decibelios (10dB) por Bel o 1 Bel = 10 decibelios.

Para cerrar no queda más que enunciar unas de las cuentas aplicaciones que tienen este

tipo de filtros, los cuales se emplean en redes eléctricas con la finalidad de reducir perturbaciones en la red, debido a la conexión de cargas no lineales. Estas perturbaciones pueden ser permeadas mediante la combinación de filtros activos y pasivos, y la variación de las impedancias de entrada y configuraciones RC a lo largo del montaje.

En las redes eléctricas de potencia, los filtros activos se emplean para reducir los armónicos de corriente que circulan a través de la red entre en filtro activo y el nodo de generación de energía eléctrica.

Así mismo, los filtros activos ayudan a equilibrar las *corrientes de retorno* que circulan a través del neutro, y los armónicos asociados a esta circulación de corriente y a la tensión del sistema. (Recordar que las corrientes de retorno fue un tema con el que comenzamos este curso).

En complemento, los filtros activos cumplen una excelente función en lo que respecta a la corrección del factor de potencia de los sistemas eléctricos interconectados.

Referencias

- [1] **Second Order Filters. (sin fecha).** *Electronics tutorials* noviembre 22, 2020. Sitio Web: <https://www.electronics-tutorials.ws/filter/second-order-filters.html>.
- [2] **Decibels. (sin fecha).** *Electronics tutorials* noviembre 22, 2020. Sitio Web: <https://www.electronics-tutorials.ws/filter/decibels.html>
- [3] **Tobey, G.E., J.G. Graeme, and L.P. Huelsman:** *Operational amplifiers - Design and Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.

6. Anexos

6.1. Programa Filtro Pasa-Bajas

```

clear all;
clc;

f_corte=1e3;
C_1=22e-9;
Zetas = [.8659, .7072, .6516, .6179, .5789, .5228, .4431, .3833];
Respuestas = {'Bessel' ; 'Butterworth'; 'Chebyshev (0.1-dB peak)'; 'Chebyshev (0.25-dB p

for n=1:1:8
    Zeta=Zetas(n);
    %----- %
    %Clase
    R_s=1/(C_1*2*pi*f_corte*Zeta);
    C_2=1/((R_s^2)*C_1*(2*pi*f_corte)^2);

    a=1/((R_s^2)*C_1*C_2);
    b=2/(R_s*C_1);
    numc=[a];
    denc=[1 b a];
    %----- %
    %Literatura:
    %Se escogen los valores de la tabla para C1'' y C2''.
    Capacitores_1 = [.9066, 1.414, 1.638, 1.778, 1.949, 2.218, 2.672, 3.103];
    C_1_b = Capacitores_1(n);
    Capacitores_2 = [.6799, .7071, .6955, .6789, .6533, .6061, .5246, .4558];
    C_2_b = Capacitores_2(n);
    %Definimos el valor de R y de la frecuencia de corte
    R= 1e3;
    Wo = f_corte*2*pi();

    %Aplicamos las ecuaciones que nos indica la bibliografia para encontrar C1 y C2
    C1 = (C_1_b/Wo)/R;
    C2 = (C_2_b/Wo)/R;

    A = C1*C2*R^2;
    B = C2*2*R;
    num = [0 0 1];
    den = [A B 1];
    %----- %
    w=logspace(0,8,100);
    [Mag,Fase,w]=bode(num,den,w);
    %Agregar Magnitud en decibels
    MagdB = 20*log10(Mag);

    %Graficas
    figure (n)

    hold on
    bode(numc,denc,w)
    bode(num,den,w)
    grid on

```

```
Respuesta = string(Respuestas(n,1));
title(['Filtro Activo Pasa Bajas de 2do Orden. Respuesta tipo: ', Respuesta]);
legend('Clase','Literatura')
str = {'Zeta= ',num2str(Zetas(n))',' '};
text(10,50,str)
hold off
saveas(gcf, ['P_bajas_comparacion_',num2str(n),'.png'])
end
```


6.2. Programa Filtro Pasa-Altas

```

clear all;
clc;

f_corte=1e3;
C=22e-9;
Zetas = [.8659, .7072, .6516, .6179, .5789, .5228, .4431, .3833];
Respuestas = {'Bessel' ; 'Butterworth'; 'Chebyshev (0.1-dB peak)'; 'Chebyshev (0.25-dB p

for n=1:1:8
    %Obtenemos los valores de R1 y R2
    wo=2*pi()*f_corte;
    Zeta=Zetas(n);
    R2_c = 1/(Zeta*wo*C);
    R1_c = 1/((wo^2)*R2_c*(C^2));

    %Funcion de transferencia
    Ac=2/(C*R2_c);
    Bc=1/(R1_c*R2_c*(C^2));
    numc=[1 0 0];
    denc=[1 Ac Bc];

    %Diseño de Literatura:
    %-----%
    %Tomamos los valores de R1' y R2' del cuadro 2
    Resistencias_1 = [1.103, .7072, .6105, .5624, .5131, .4509, .3743, .3223];
    Resistencias_2 = [1.471, 1.414, 1.438, 1.473, 1.531, 1.650, 1.906, 2.194];

    c = 1/wo;
    K = 1/(wo*c);
    R1 = K*Resistencias_1(n);
    R2 = K*Resistencias_2(n);

    %Funcion de transferencia
    A = 2/(R2*c);
    B = 1/(R1*R2*c^2);
    num = [1 0 0];
    den = [1 A B];

    %-----%

    w=logspace(0, 8, 1000);
    [Mag, Fase, w]=bode(num, den, w);
    MagdB=20*log10(Mag);

    %-----%
    %Graficamos:
    figure (n)
    hold on
    bode(numc, denc, w)
    bode(num, den, w)
    grid on

    Respuesta = string(Respuestas(n,1));

```

```
title(['Filtro Activo Pasa Altas de 2do Orden. Respuesta tipo: ', Respuesta]);  
legend('Clase','Literatura')  
str = {'Zeta= ', num2str(Zetas(n))},''};  
text(10,50,str)  
hold off  
saveas(gcf, ['P_altas_comparacion_',num2str(n),'.png'])  
end
```

6.3. Programa Filtro Pasa-Banda

```
% Filtro Pasa Bajas.
```

```
clear all;
clc;
```

```
fc=10e3;
Cap = 10e-8;
Q= [2, 4, 6, 8, 10];
H=10;
wo=2*pi()*fc;
```

```
for n=1:1:5
%----- %
%Diseño con el factor Q
R3= (2*Q(n))/(wo*Cap);
R1= (Q(n))/(wo*Cap*H);
R2= (Q(n))/((wo*Cap)*((2*Q(n)^2)-H));
A_Q=(-1)/(R1*Cap);
B_Q=(2/Cap)/(R3);
C_Q=((1/R1)+(1/R2))/(R3*Cap^2);
numQ=[0 A_Q 0];
denQ=[1 B_Q C_Q];
```

```
%----- %
%Diseño sin el factor Q
A_12 = -1/(Cap*R1);
B_12 = 2/(R3*Cap);
C_12 = (4*Q(n)^2)/(Cap^2*(R3^2));
num = [0 A_12 0];
den= [1 B_12 C_12];
```

```
%----- %
w=logspace(0, 8, 1000);
[Mag, Fase, w]=bode(numQ,denQ,w);
MagdB=20*log10(Mag);
%----- %
```

```
figure (1)
hold on
bode(numQ,denQ,w)
grid on
title({'Caracterizacion del Filtro Activo Pasa Bandas de Segundo Orden' ; 'Funcion de tr
legend('Q1=2','Q2=4','Q3=6','Q4=8','Q5=10')
hold off
```

```
figure (2)
hold on
bode(num,den,w)
grid on
title({'Caracterizacion del Filtro Activo Pasa Bandas de Segundo Orden' ; 'Funcion de tr
legend('Q1=2','Q2=4','Q3=6','Q4=8','Q5=10')
```

```
hold off
end

figure(1)
saveas(gcf, ['P_banda_con_Q.png'])
figure(2)
saveas(gcf, ['P_banda_sin_Q.png'])
```

6.4. Programa Filtro Rechaza-Banda

```

clear all;
clc;

fc=10e3;
Q= [2, 4, 6, 8, 10];
wo=2*pi()*fc;

Rin=10e3;
R1 = (2*Rin);
R2 = (2*Rin);
R3 = (2*Rin);
R=Rin;
R4 = R;
R5 = R;
hold on
for n=1:1:5
    C2= 2*Q(n)/(pi()*fc*R);
    C1= 1/((2*pi()*fc*R)^2*(C2));

    A=R4+R5-((R2*R3)/R1);
    B=1/(R4*R5*C1*C2);
    C=(R3+R4+R5)/(R4*R5*C2);

    num=[1 A B];
    den=[1 C B];

    w=logspace(0, 8, 1000);
    [Mag, Phase, w]=bode(num, den, w);
    MagdB=20*log10(Mag);

    bode(num, den, w)
end
grid on
title('Filtro Activo Rechaza-Banda de 2do Orden')
legend('Q1=2', 'Q2=4', 'Q3=6', 'Q4=8', 'Q5=10')
hold off
saveas(gcf, ['R_banda.png'])

```