

# Processus de Volterra et mémoire : une approche numérique

## Stage de recherche

Université de Padoue, Italie 2025

INSA tuteur : Romain Duboscq

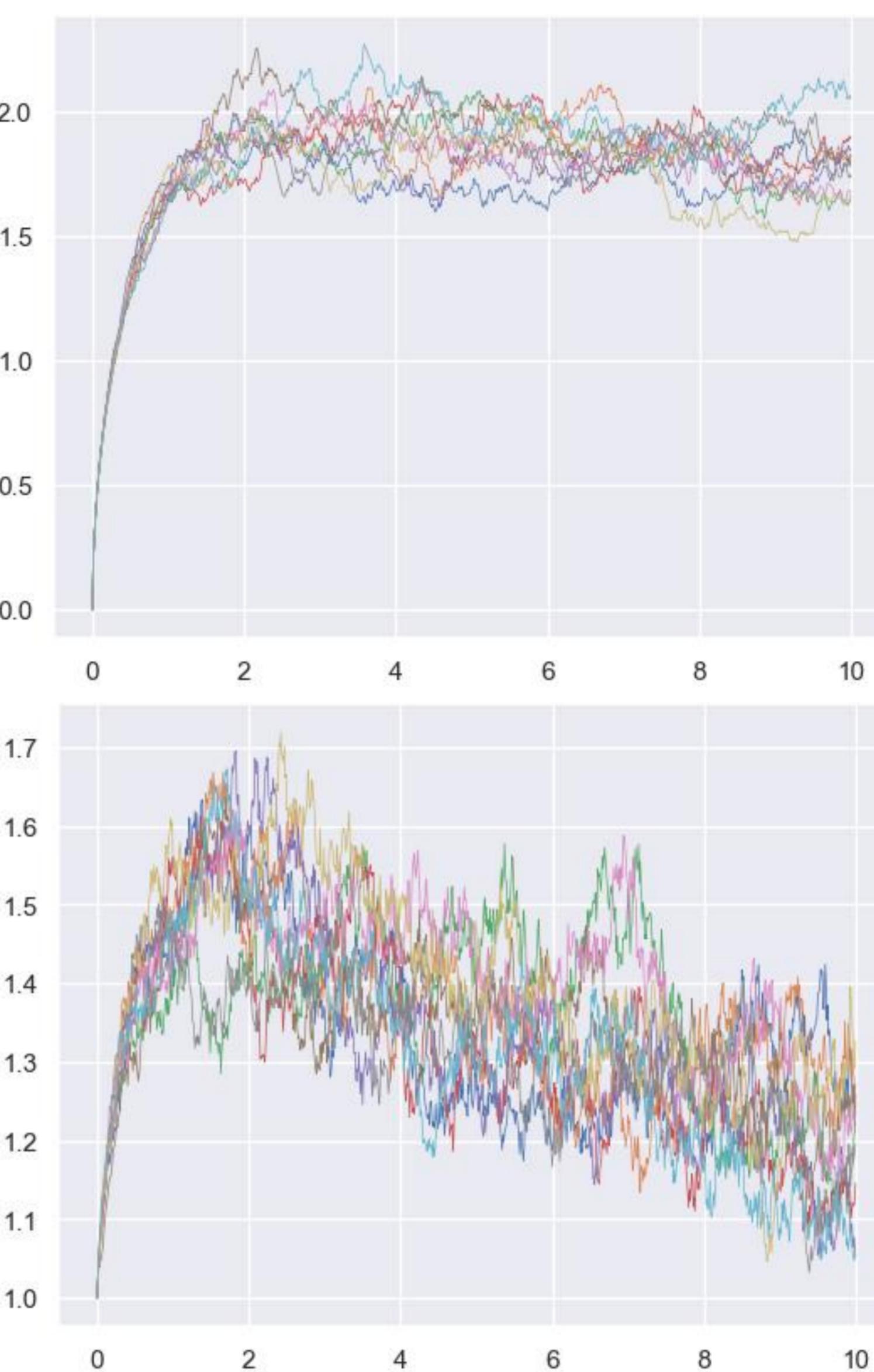
Tuteur de stage : Giorgia Callegaro et Martino Grasselli

## Contexte et Objectifs du stage

**Contexte:** Stage de 4A de 3 mois qui a commencé le 3 juin et a fini le 31 août sous la supervision de deux chercheurs italiens : Giorgia Callegaro et Martino Grasselli au département de maths de l'université de Padoue « Tullio Levi-Civita ». C'est un stage de recherche concernant un nouveau modèle stochastique développé par Ofelia Bonesini, Giorgia Callegaro, Martino Grasselli et Gille Pagès.

**Objectifs:** Le but de ce stage est l'étude d'un schéma numérique de type Euler pour un nouveau type d'équation pour modéliser des processus dit « non-Markovien » donc avec mémoires temporelles (les incrémentations dépendent des incrémentations précédentes). Ce genre de modèle est très difficile à simuler efficacement mais il a été démontré théoriquement que la vitesse forte de convergence du schéma était de 1/2. Les objectifs sont :

1. Illustrer numériquement la vitesse de convergence de 1/2.
2. Simuler rapidement un grand nombre de trajectoires.
3. Illustrer des propriétés des trajectoires (continuité, équivalent asymptotique...)



## Modèle mathématique :

$$X_t = \xi_0 + \int_0^t K(t-s)b(s, \xi_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(s, \xi_s)dW_s.$$

$$\xi_t = \xi_0 \phi(t) + \int_0^t b(s, \xi_s)ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_s)dW_s.$$

➡ 
$$X_{k+1}^N = \xi^0 + \sum_{l=0}^k b(t_l, \bar{\xi}_l^N) \left( \int_{t_l}^{t_{l+1}} K(t_{k+1}-s)ds \right) + \sigma(t_l, \bar{\xi}_l^N) \left( \int_{t_l}^{t_{l+1}} K(t_{k+1}-s)dW_s \right),$$

$$\bar{\xi}_{k+1}^N = \bar{\xi}_k^N + \xi^0(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)) + b(t_k, \bar{\xi}_k^N) \delta t + \sigma(t_k, \bar{\xi}_k^N) \Delta W_{k+1}$$

## Réalisations

1. Implémentation de la méthode numérique via 3 schémas différents (calcul de la quantité en rouge) avec optimisation de la vitesse d'exécution du code pour générer beaucoup de trajectoires.
2. Illustration numérique de la vitesse de convergence via méthode de Monte-Carlo.
3. Illustration de la continuité  $\alpha$ -Hölder et du comportement asymptotique.
4. Introduction d'un nouveau modèle fractionnaire pour la simulation d'un actif financier.



## Notions utilisées :

- Calcul stochastique : équation différentielle stochastique (EDS), processus de Markov et de Volterra, intégral fractionnaire.
- Schéma d'Euler, convergence forte, méthode de Monte Carlo, décomposition de Cholesky.

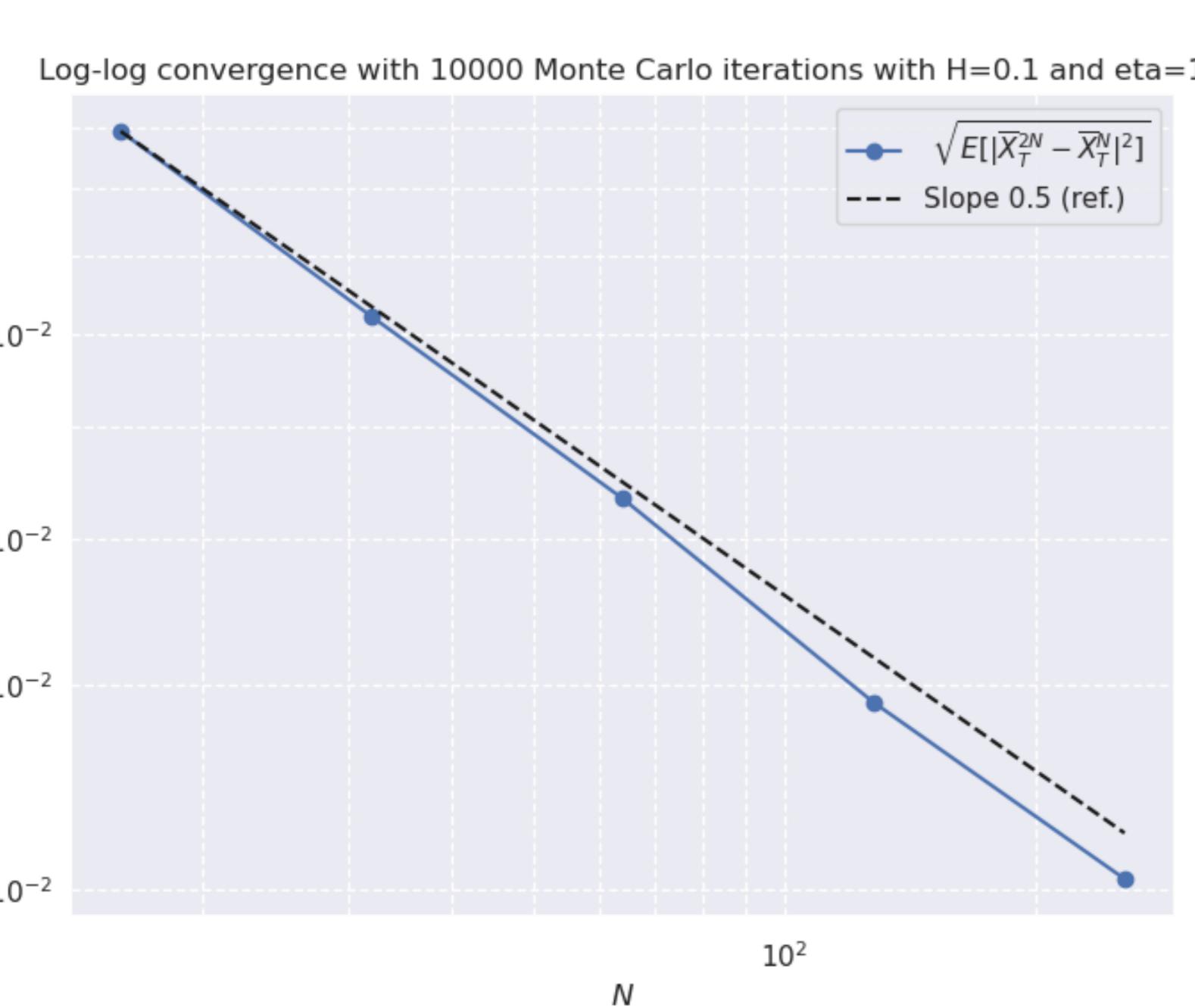
## Noyau fractionnaire :

$$K_H(t-s) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} (t-s)^{H-1/2}, H \in [0, 1/2]$$

H est le paramètre de Hurst qui représente le degré de dépendance du modèle.

## Résultats :

Toutes ces étapes permettent de conclure vis-à-vis des performances du schéma numérique principal : stabilité et convergence. De plus le schéma conserve toutes les propriétés théoriques (ordre fort de  $1/2$ , continuité  $\alpha$ -Hölder, équivalent asymptotique). Le modèle est particulièrement performant dans le cas d'un noyau (fonction K) fractionnaire ce qui est de bon augure pour de futures exploitations applicatives, notamment dans un cas de une simulation d'un actif financier.



N	$H_{num} = H_{denom} = 0.1$	$H_{num} = H_{denom} = 0.4$	$H_{num} = 0.1, H_{denom} = 0.4$	$H_{num} = 0.4, H_{denom} = 0.1$
250	1.663	0.660	8.680	0.126
500	1.655	0.639	10.712	0.105
750	1.701	0.663	12.219	0.091
1000	1.650	0.670	13.213	0.085
1500	1.692	0.658	15.030	0.077
2000	1.637	0.676	16.313	0.067
3000	1.629	0.686	17.866	0.060
5000	1.664	0.659	20.479	0.053
10000	1.645	0.675	25.525	0.042

Table 3: Values of the average ratio (with  $p = 1$ ) vs  $N$  according to  $H_{num} = H_{denom}$  or  $H_{num} \neq H_{denom}$ .

