Fö 3

Idag: existens, entydighet och stabilitet.
& Klassificering av 2:a ordn. PDE.

Existens, entydighet och stabilitet.

Ett problem (rand- och/eller begynnelsevärdesproblem) sägs vara <u>välställt</u> (<u>korrekt ställt</u>) om

- en lösning <u>existerar</u> (d.v.s. det finns en funktion som uppfyller differentialekvationen och <u>alla</u> rand- och begynnelsevillkor.
- lösningen är <u>unik</u> (entydig)
- små förändringar av begynnelse- och randdata ger upphov till små förändringar hos lösningen. Problemet är då <u>stabilt</u>

Existens

Existensfrågan är inte så central för oss då vi nästan alltid kommer att producera explicita lösningar (givna av någon formel) till problemen. (Om vi går lite utöver kursen och tänker på mer realistiska problem, i situationer som inte är lika tillrättalagda (t.ex. randvärdesproblem i mer komplicerade områden än dem vi studerar här) så finns det inga explicita formler för lösningarna, utan man får förlita sig på numeriska metoder. Det är då lämpligt att förvissa sig om att en (unik) lösning existerar, för att den numeriska lösningen ska få legitimitet)

För vissa Neumannproblem kan det dock hända att lösning saknas:

Exempel Låt Ω vara ett enkelt sammanhängande område i rummet. Om

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases}$$

så måste det enligt divergenssatsen gälla att

$$\iint_{\partial\Omega} g \, dS = \iint_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{\nabla u \cdot \hat{n}} \, dS = \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \hat{n} \, dS \underset{\text{divergens-satsen}}{=} \iiint_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{\Delta u} \, dV$$

$$= -\iiint_{\Omega} f \, dV,$$

så vi kan inte välja f och g hur som helst.

T.ex. saknar problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{i } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

lösning eftersom ovanstående integralrelation ger $0 = -V(\Omega)$ (V = volymen)

Entydighet

De problem vi studerar kommer oftast ha endast en lösning eller åtminstone endast en lösning som är fysikaliskt rimlig. I boken finns en sats (Sats 1.1, sid 36) som säger att lösningen alltid är entydig, förutom för Neumannproblem, där den är entydig så när som på en additiv konstant.

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (eller $\mathbb{R}^2$): Problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \quad \text{(Poissons ekvation)} \\ u = g & \text{på } \partial\Omega \quad \text{(Dirichletvillkor)} \end{cases}$$

har <u>högst</u> en lösning.

<u>Lösning</u>: Antag att u_1 & u_2 löser randvärdesproblemet.

Vi vill visa att $u_1 = u_2$ (Typiskt tillvägagångsätt för att visa entydighet.).

Låt $w = u_1 - u_2$. Vi vill alltså visa att $w = 0$.
w löser randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{i } \Omega \\ w = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

(Så $w=0$ är en lösning. Finns det fler?)

Bilda energiintegralen

$$\iiint_\Omega \underbrace{|\nabla w|^2}_{\geq 0 \text{ för alla } \bar{r} \in \Omega} dV$$

Greens formel I ger: (Se anteckningar till S1.)

$$\iiint_\Omega \nabla w \cdot \nabla w \, dV = \iint_{\partial\Omega} \underbrace{w}_{=0 \text{ på } \partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} dS - \iiint_\Omega w \underbrace{\Delta w}_{=0 \text{ i } \Omega} dV = 0$$

Då är $|\nabla w(\bar{r})|^2 = 0$, d.v.s. $\nabla w = 0$ i Ω. $\Longleftrightarrow$
$w =$ konst. i Ω. Eftersom $w=0$ på $\partial\Omega$ måste konstanten vara 0, d.v.s $u_1 = u_2$. V.S.B.

Anm. Om vi byter ut Dirichletvillkoret mot ett Neumann-villkor $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ på $\partial\Omega$ kan vi göra ett bevis med samma steg som ovan, d.v.s. Sätt $w = u_1 - u_2$ och bilda energiintegralen som ovan. Båda integralerna i HL (Greens formel I) är fortfarande 0, men vi kan endast säga att $w = C$, inte att $C = 0$.

Slutsatsen blir då $u_1 = u_2 + C$, d.v.s. lösningen är unik sånär som på en additiv konstant.

<u>Ex.</u> (Entydighet för vågekvationen med Dirichletvillkor)

Problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f & 0<x<1,\ t>0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x) & 0<x<1. \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t) & t>0, \end{cases}$$

har högst en lösning.

Lösning Antag att det finns 2 lösningar u_1 och u_2 och bilda $w = u_1 - u_2$. Då satisfierar w problemet

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Vi ska visa att $w_t = w_x = 0$, från vilket det följer att $w = \text{konst}$. Eftersom $w = 0$ på randen till det 2-dim området så måste $w = 0$ överallt i området.

För att visa att $w_t = w_x = 0$ så studerar vi energiintegralen

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(w_t(x,t)^2 + w_x(x,t)^2\right) dx.$$ Derivering ger

$$E'(t) = \int_0^1 \left(w_t w_{tt} + w_x w_{xt}\right) dx.$$ Partialintegrera den andra termen:

$$\int_0^1 w_x w_{xt}\, dx = \underbrace{\left[w_x w_t\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 w_{xx} w_t \, dx.$$ Sätt in ovan.

$=0$ p.g.a randvillkoren ($w(0,t) = 0 \Rightarrow w_t(0,t) = 0$ etc)

$$E'(t) = \int_0^1 w_t (\underbrace{w_{tt} - w_{xx}}_{=0})\, dx = 0 \implies$$

$$E(t) = E(0) = \int_0^1 \Big(\underbrace{w_t(x,0)}_{=0}^2 + \underbrace{w_x(x,0)}_{=0 \text{ eftersom } w(x,0)=0}^2\Big)\, dx,$$

Så $E(t) = 0$. Från detta följer nu att $w_t(x,t) = w_x(x,t) = 0$ för alla $x \in [0,1]$ och alla $t > 0$ $\implies$ $w = 0$ p.g.a. begynnelsevillkoret.

<u>Ex.</u> (Entydighet för diffusionsekvationen med Dirichletvillkor)

Problemet
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(1,t) = \beta(t), & t > 0. \end{cases}$$

har högst en lösning.

Lösning. Vi antar att u_1 och u_2 löser problemet, och låter $w = u_1 - u_2$. Då uppfyller w

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0<x<1, \quad t>0 \\ w(x,0) = 0, & 0<x<1, \\ w(0,t)=0, \quad w(1,t)=0, & t>0. \end{cases}$$

Låt $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w(x,t)^2\,dx$, och notera att $E(t) \geq 0$ och $E(0)=0$. Derivera $E(t)$!

$$E'(t) = \int_0^1 w(x,t)\,w_t(x,t)\,dx \overset{\text{PDE:n}}{=} \int_0^1 w(x,t)\,w_{xx}(x,t)\,dx \overset{\text{partiell integration}}{=}$$

$$= \underbrace{\Big[w(x,t)\,w_x(x,t) \Big]_0^1}_{=0 \text{ p.g.a randvillkor}} - \int_0^1 w_x(x,t)^2\,dx \leq 0.$$

Därför gäller $E(t) = 0$ för alla $t \geq 0 \Rightarrow w(x,t) = 0$ för $x \in [0,1]$ & $t \geq 0$.

Så $u_1 = u_2$ för dessa x & t.

Stabilitet

Exempel Antag att u_A och u_B löser

$$A: \begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = \phi_A & \text{på } \partial\Omega, \end{cases} \qquad B: \begin{cases} -\Delta u = f \\ u = \phi_B & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

och att det finns en konstant $C > 0$ sådan att

$$\|\phi_A - \phi_B\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C.$$

Då gäller det att $\|u_A - u_B\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

I tillämpade problem där randvärdena inte kan antas vara exakta, är det viktigt att veta att det problem man löser, med approximativa randvärden har lösning som ligger nära lösningen till det problem man egentligen vill studera. Detta motiverar varför stabilitet är en önskvärd egenskap.

<u>Lösning</u> Inför $w = u_A - u_B$. Då löser w:

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{i } \Omega \\ w = \Phi_A - \Phi_B & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Harmonisk funktion.

$\bar{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$ etc

Maximumprincipen ger att max och min för w i $\overline{\Omega}$ antas på $\partial\Omega$. Därför gäller $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\bar{r}\in\Omega} |w(\bar{r})| \leq \max_{\bar{r}\in\partial\Omega} |w(\bar{r})| =$

$$= \|\Phi_A - \Phi_B\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C.$$

V.S.B.

<u>Superposition</u> (sparas till S2)

Problem som innefattar (endast) linjära operatorer kan delas upp i enklare delproblem enligt superpositionsprincipen:

Linjär operator:
L är linjär om
$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$
T.ex är Δ (Laplace-operatorn) linjär, men $u \xmapsto{R} u u_x$ är inte linjär.

Om L och R är linjära operatorer så kan randvärdes-problemet
$$\begin{cases} L(u) = f & \text{i } \Omega \\ R(u) = g & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$
delas upp i två (enklare) delproblem:

$$A: \begin{cases} L(u) = f & \text{i } \Omega \\ R(u) = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases} \qquad B: \begin{cases} L(u) = 0 & \text{i } \Omega \\ R(u) = g & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Om u_A löser problem A och u_B löser problem B så löser $u = u_A + u_B$ det ursprungliga problemet eftersom
$$L(u) = L(u_A + u_B) = L(u_A) + L(u_B) = f + 0 = f \quad \text{i } \Omega$$
$$R(u) = R(u_A + u_B) = R(u_A) + R(u_B) = 0 + g = g \quad \text{på } \partial\Omega.$$

Klassifikation (sparas till S 2)

Andra ordningens PDE:er delas in i tre olika klasser. PDE:ernas lösningar har helt olika kvalitativa beteenden beroende på vilken klass ekvationen tillhör. De tre klasserna är

- paraboliska PDE:er (typexempel diffusionsekvationen)
- hyperboliska PDE:er (typexempel: vågekvationen)
- elliptiska PDE:er (typexempel Laplaces ekvation)

En allmän andra ordningens linjär PDE i 2 variabler kan skrivas

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g$$

där koefficienterna kan bero av x och y.

Studera den kvadratiska formen (i 2 variabler ξ, η)

$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ Vi gör indelningen att PDE:n är

- parabolisk om $ac-b^2=0$ (semidefinit)
- hyperbolisk om $ac-b^2<0$ (indefinit)
- elliptisk om $ac-b^2>0$. (positivt/negativt definit)

Testa för våra standardekvationer:

- Diffusionsekvationen.
  Kvadratisk form: ξ^2. D.v.s. $a=1$, $b=c=0$.
  (Positivt) semidefinit, d.v.s. parabolisk
- Vågekvationen
  Kvadratisk form: $\xi^2-\eta^2$. D.v.s. $a=1$, $b=0$, $c=-1$.
  (indefinit) d.v.s. hyperbolisk
- Laplaces ekv.
  Kvadratisk form: $\xi^2+\eta^2$ d.v.s. $a=c=1$, $b=0$.
  (Positivt) definit. d.v.s elliptisk

Koefficienterna tillåts bero på x, y, och därför kan klassificeringen bli olika i olika områden i planet.

Exempel

Karakterisera ekvationen $y u_{xx} - 2 u_{xy} + x u_{yy} = 0$.

Lösning. Den kvadratiska formen är $y \xi^2 - 2 \xi \eta + x \eta^2$

d.v.s. $a = y$, $b = -1$, $c = x$.

Uttrycket $ac - b^2 = xy - 1$ har olika tecken i olika delar av xy-planet: