<u>Idag</u> Separation av variablerna – Metod för att lösa PDE:er

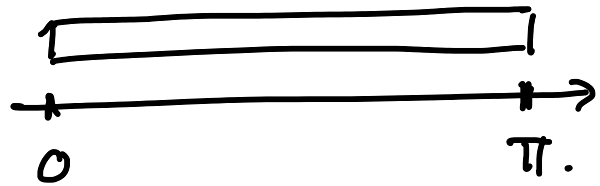
Vi börjar direkt med ett exempel.

<u>Ex</u> Värmeledning med homogena Dirichletvillkor

En metallstav med isolerad mantelyta har temperaturen 100°C.
Då ($t=0$) placeras de båda oisolerade ändarna i smältande is.
Bestäm stavens temperaturfördelning då $t>0$.

<u>Lösning</u>

Inför ett koordinatsystem längs staven:



Vi kan välja längdenhet så att längden blir π.
Låt $u(x,t)$ beteckna stavens temperatur vid x och tid t.
Vi får modellen: (Vi antar här att värmediffusiviteten $a=1$).

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} & 0<x<\pi, \quad t>0 \\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t>0 \\
u(x,0) = 100 & 0<x<\pi.
\end{cases}
$$

Vi försöker hitta en enkel typ av lösning och ansätter en lösning på formen $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, d.v.s. lösningar som är en produkt av en x-beroende och t-beroende del. Vi kräver att u ska uppfylla PDE:n och randvillkoren, och att X & T inte är nollfunktioner. Sätt in ansatsen i PDE:n:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Longleftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

(Dividera med $X(x) \cdot T(t)$. Vi använder att de inte är $\equiv 0$)

VL beror inte på t och HL beror inte på x.

De måste båda vara lika med samma konstant. $-\lambda$

Vi får två (separerade) <u>ordinära</u> differentialekvationer

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Vårt (svåra) PDE-problem har ersatts med två (lättare) ODE-problem.

Vi tittar på den första ekvationen först och studerar tre fall beroende på tecknet på λ:

$\underline{\lambda < 0:}$ Skriv $\lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0$.

Diffekvationen $X'' - \mu^2 X$ har lösningen $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$.

Villkoret $X(0) = 0$ ger $A + B = 0$, så $B = -A$, d.v.s

$X(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$. Villkoret $X(\pi) = 0$ ger nu

$$X(\pi) = A\underbrace{(e^{\pi\mu} - e^{-\pi\mu})}_{\neq 0} = 0 \implies A = 0.$$

Den enda lösningen är därför $X(x) = 0$.

$\underline{\lambda = 0:}$ Diffekvationen $X'' = 0$ har lösningen $X(x) = Ax + B$.

Villkoret $X(0) = 0$ ger $B = 0$, så $X(x) = Ax$

Villkoret $X(\pi) = 0$ ger $A\pi = 0 \implies A = 0$. $X(x) = 0$ är den enda lösningen.

$\lambda > 0$: Skriv $\lambda = \omega^2$ med $\omega > 0$. Diffekvationen $X'' + \omega^2 X = 0$ har lösningar $X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$. $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan ger $X(\pi) = 0$ att $X(\pi) = B\sin\omega\pi = 0 \Longrightarrow \omega = k$, $k \in \mathbb{N}$, för att inte B ska bli 0. Vi vill ju ha icketriviala lösningar!

Alltså: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ har icketriviala lösningar precis då $\lambda = k^2$, och dessa är $X_k(x) = \sin kx$ (och nollskilda konstanter multiplicerade med dessa)..

För dessa $\lambda = k^2$ försöker vi nu lösa den t-beroende delen $T'(t) + k^2 T(t) = 0$. Lösningarna är $T_k(t) = e^{-k^2 t}$ (multiplicerat med en godtycklig konstant)

$k = 1, 2, 3, \ldots$

Vi har hittat lösningar $U_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \sin kx\, e^{-k^2 t}$ till PDE:n + randvillkor. Begynnelsevillkoret är dock inte uppfyllt för någon av dessa funktioner. Idén är nu att använda linearitet (superposition) och hitta en (oändlig) linjärkombination av U_k som uppfyller begynnelsevillkoret. (Linjärkombinationen kommer att uppfylla PDE + randvillkor eftersom PDE & randvillkor är homogena & p.g.a linearitet. Förhoppningsvis ska det gå bra även för oändliga linjärkombinationer. Var optimistiska!)

Vi ansätter en lösning

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \, e^{-k^2 t}.$$

Sätter in $t=0$ för vi $0<x<\pi$, $t>0$.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx ,$$

vilket vi känner igen som en sinusserie. Vi vill ha $u(x,0) = 100$.

Idén är därför att välja b_k så att de stämmer med koefficienterna i sinusserien för denna funktion.

Dessa koefficienter är $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100 \sin kx\,dx = \frac{200}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{200}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)$. Vi har alltså hittat en lösning

$$\boxed{u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}e^{-k^2t}\sin kx}$$

till rand- & begynnelsevärdesproblemet.

Anm. Det är snabb konvergens för serien då $t>0$, vilket gör att termvis derivering är tillåten (så att u verkligen uppfyller PDE:n.

Anm. De homogena Dirichletvillkoren gjorde att vi fick en sinusserie i utvecklingen. Detta är bra att lägga på minnet till problemlösningen för att spara jobb. Det hade gått att från början ansätta en sinusserie med t-beroende koefficienter $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(t)\sin kx$. Derivera och ta fram ODE:n för $\beta_k(t)$.

I nästa exempel har vi istället homogena Neumannvillkor. Vi tar samma exempel som ovan men låter nu staven ändar vara isolerande så att vi får homogena Neumann-villkor på randen $x=0$ & $x=\pi$:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0<x<\pi, \quad t>0. \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t>0 \\ u(x,0) = 100, & 0<x<\pi. \end{cases}$$

Vi testar nu att (i förhoppning om att spara arbete) direkt ansätta en cosinusserie. Detta eftersom $\cos kx$ uppfyller ODE:n $X''(x) + k^2 X(x) = 0$ och randvillkoren $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Vi ansätter alltså

$$u(x,t) = \gamma_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \cos kx.$$

Derivera för att hitta diffekvationer för $\gamma_0(t)$ och $\alpha_k(t)$:

$$u_t(x,t) = \gamma_0'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k'(t) \cos kx$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\, k^2 \cos kx.$$

Insättning i PDE:n ger $\gamma_0'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k'(t) + k^2 \alpha_k(t)\right) \cos kx = 0.$

vilket ger (entydighet för cosinusserier) att

$$\begin{cases} \gamma_0'(t) = 0 \\ \alpha_k'(t) + k^2 \alpha_k(t) = 0. \qquad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

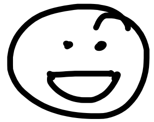
Detta ger att $\gamma_0(t) = c_0$ (konst.) och $\alpha_k(t) = a_k e^{-k^2 t}$.

Vi har alltså $u(x,t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \cos kx.$

Begynnelsevillkoret kräver att $u(x,0) = 100$.

Alltså är $c_0 = 100$, $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ (entydighet för Fourierkoefficienter)

Vår lösning är därför $u(x,t) = 100$.



en konstant! Verkar det rimligt?

<u>Övning</u> Att fundera på.

Vad händer om man har ett homogent Dirichletvillkor i ena änden av staven och ett homogent Neumannvillkor i den andra? I övrigt som i exemplen ovan.

<u>Ex.</u> (En svängande fast inspänd sträng.)

Betrakta en sträng av längd $L=\pi$, ej utsatt för yttre krafter. Strängen är fastspänd vid $x=0$ och $x=\pi$. Vid tiden $t=0$ har strängen formen $g(x)$ och den transversella hastigheten $h(x)$. Vågutbredningskonstanten är $c>0$. Bestäm strängens rörelse $u=u(x,t)$ för $0<x<\pi$ och $t>0$.

<u>Lösning:</u> Vi använder modellen

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0<x<\pi, \quad t>0. \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. & t>0 \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), & t>0. \end{cases}$$

Randvillkoren (homogena Dirichlet) leder oss att testa en ansatz i form av en sinusserie:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx.$$

Derivera och sätt in i PDE:n (Vi utgår från att detta är tillåtet)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k''(t) + c^2 k^2 \beta_k(t)\right) \sin kx = 0.$$

(P.g.a entydighet!)

Sinusserien $= 0$ $\Longleftrightarrow$ Koefficienterna är 0. Alltså:

$$\beta_k''(t) + c^2 k^2 \beta_k(t) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Detta ger $\beta_k(t) = c_k \cos(ckt) + d_k \sin(ckt)$

Vi får alltså $u(x,t)$ på formen

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos(ckt) + d_k \sin(ckt)\right) \sin kx$$

För $t=0$ har vi $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx. = g(x)$ begynnelsevillkor

$\longrightarrow$ c_k är koefficienterna i sinusserien för $g(x)$.

Derivera uttrycket för $u(x,t)$ och sätt in $t=0$. Vi får

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} ck\, d_k \sin kx = h(x).$$

$\Rightarrow$ $ck\, d_k$ är koefficienterna för sinusserien för h. (p.g.a. entydighet för Fourierkoeff.)

Men vi kan säga mera!

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)\cos(ckt) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx)\sin(ckt)$$

Vi ska använda produktformlerna

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$

på ovanstående uttryck. Vi får

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k(x+ct)) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k(x-ct))$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\cos(k(x+ct)) - \cos(k(x-ct))\right).$$

Serierna i första raden i uttrycket kan skrivas om till

$$\frac{1}{2}\left(g(x+ct)+g(x-ct)\right),$$

där g är den funktion på $\mathbb{R}$ som skapas genom att utvidga g udda till $(-\pi,\pi)$ och sedan 2π-periodiskt till $\mathbb{R}$. Vi behåller samma beteckning för utvidgningen.

Vidare gäller att

$$\cos(k(x+ct))-\cos(k(x-ct)) = -\int_{x-ct}^{x+ct} k\sin(ky)\,dy,$$

och därför kan serien i den andra raden i uttrycket för $u(x,t)$ skrivas som $\frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x-ct}^{x+ct} c\,k\,d_k \sin ky\,dy$

sinuskoefficienterna för h.

Byt plats på summa och integral (utvidga h på samma sätt som g) ger

$$\frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x-ct}^{x+ct} c\,k\,d_k \sin ky\,dy = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy.$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+ct) - g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy.$$

Sätt gärna in denna lösning i randvärdesproblemet och kontrollera att det verkligen är en lösning.