ANALISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

1. REPASO

⊙ VALORES PROPIOS : λ_l

$\underline{C}$ matriz de $L \times L$ elementos

$|\underline{C} - \lambda_l \underline{I}| = 0$ $\quad \lambda_l$: valores propios de $\underline{C}$, $l = 1, 2, \ldots L$

Ejemplo: $\underline{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$|\underline{C} - \lambda \underline{I}| = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0$

$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 1$

⊙ VECTORES PROPIOS : $\underline{v}_l$

$\underline{C}\,\underline{v}_l = \lambda_l \underline{v}_l$ $\quad \underline{v}_l$: vectores propios, $L \times 1$ elementos

Como hay infinitas soluciones : s.t. $\|\underline{v}_l\| = 1$

$\{\underline{v}_l\}$ son ortonormal : $\underline{v}_l^T \underline{v}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$

Se define la matriz de vectores propios:

$$\underline{A} = \left[\underline{v}_1 \; \underline{v}_2 \; \cdots \; \underline{v}_L \right] \quad \text{de } L \times L$$

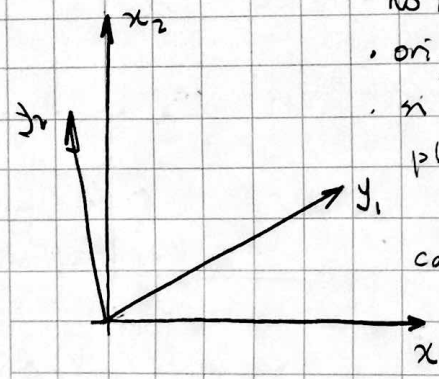
$$\underline{A}\,\underline{A}^T = \underline{I}$$

$$\underline{C}\,\underline{A} = \left[\lambda_1 \underline{v}_1 \quad \lambda_2 \underline{v}_2 \cdots \lambda_L \underline{v}_L \right]$$

⊙ TRANSFORMACIONES LINEALES

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1N} x_N$$
$$\vdots$$
$$y_N = a_{N1} x_1 + a_{N2} x_2 + \cdots a_{NN} x_N$$

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$$



- ángulo entre y_1 e y_2 no necesariamente ⊥
- origen coincide
- si se necesita desplazamiento agregar a_{i0} en cada fila

⊙ PROMEDIO Y VARIANZA

$$\underline{x} = \left[x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_N \right]^T$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sigma_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2$$

$\frac{1}{N-1}$: unbiased estimator → ver Anexo

⊙ COVARIANZA

$$\underline{X} = \left[\underline{x}_1 \; \underline{x}_2 \; \cdots \; \underline{x}_L \right] = \begin{bmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{NL} \end{bmatrix}$$

$\underline{X}$: $N \times L$

$$\bar{\underline{X}} = \left[\bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \; \cdots \; \bar{x}_L \right]$$

$$\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & & x_{1L} - \bar{x}_L \\ x_{21} - \bar{x}_1 & \cdots & x_{2L} - \bar{x}_L \\ \vdots & & \\ x_{N-1} - \bar{x}_1 & & x_{NL} - \bar{x}_L \end{bmatrix}$$

$$= \underline{X} - \underline{M}_x \quad \text{donde } M_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \bar{\underline{X}}$$

La covariancia se define como:

$$\underline{C}_x = \frac{1}{N-1} \underline{X}_0^T \underline{X}_0$$

$$= cov(\underline{X})$$

$$C_x(l,l) = \sigma^2_{x_l}$$

$C_x(l,k)$ = covariancia de $\underline{x}_l$ con $\underline{x}_k$

- > 0 dependencia lineal positiva
- $= 0$ no hay dependencia
- < 0 dependencia negativa

→ ver PAT03_CovarianceVisualization.m

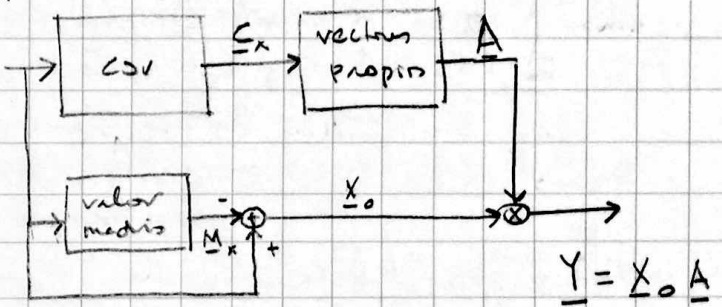
2. TRANSFORMACIÓN KARHUNEN-LOEVE

1947

$$\underset{NXL}{\underline{X}} = \left[\underset{NX1}{\underline{x}_1} \quad \underset{LXL}{\underline{x}_2} \cdots \underline{x}_L \right] \qquad \underline{X}_0 = \underline{X} - \underline{M}_x$$

$$\underset{NXL}{\underline{Y}} = \underline{X}_0 \underline{A}$$

¿Qué pasa si $\underline{A}$ es la matriz de vectores propios de $\underline{C}_x$?



$\underline{Y}$ es una transformación lineal de $\underline{X}_0$

Covariancia de $\underline{Y}$

$$\underline{C}_Y = \frac{1}{N-1} \underline{Y}_0^T \underline{Y}_0$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{Y} - \underline{M}_Y$$

como $\underline{Y} = \underline{X}_0 \underline{A}$ y la media de las columnas de $\underline{X}_0$ es cero entonces $\underline{M}_Y = \underline{0}$

$$\underline{Y}_0 = \underline{Y} \iff$$

entonces

$$\underline{C}_Y = \frac{1}{N-1}\underline{Y}^T\underline{Y}$$

$$= \frac{1}{N-1}(\underline{X}_0\underline{A})^T(\underline{X}_0\underline{A})$$

$$= \frac{1}{N-1}\underline{A}^T\underline{X}_0^T\underline{X}_0\underline{A}$$

como

$$\underline{C}_X = \frac{1}{N-1}\underline{X}_0^T\underline{X}_0$$

entonces

$$\underline{C}_Y = \underline{A}^T\underline{C}_X\underline{A}$$

como $\underline{A}$ son los valores propios de $\underline{C}_X$

$$\underline{C}_Y = [v_1\ v_2 \cdots v_L]^T[\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_L v_L]$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_L^T \end{bmatrix}[\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_L v_L]$$

$$\underline{C}_Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1^T v_1 & \lambda_2 v_1^T v_2 & \cdots \\ & \ddots & \\ & & \lambda_L v_L^T v_L \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_L \end{bmatrix}$$

Generalmente se ordena de tal forma que $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_L$

3. SIGNIFICADO

(1) $\underline{Y}$ es una nueva representación de $\underline{X}$ (es una transformación LINEAL de $\underline{X}$).

(2) Las columnas de Y no tienen dependencia lineal $C_Y(k,l) = 0$ si $k \neq l$.

(3) Ordenado de mayor a menor, las columnas de Y están ordenadas por importancia.

→ ver PATØ3_PCA_2D y PCA_5D.

4. APLICACIÓN A LA EXTRACCIÓN Y SELECCIÓN DE CARACTERÍSTICAS

$\underline{X}$ ← características extraídas NXL
(N muestras L características)

↓

[PCA]

↓

$\underline{Y}$ ← nuevas características NXL
las primeras p son las más importantes ← componentes principales

↓

Clasificador

Las decisiones se pueden tomar a partir de las primeras p características de $\underline{Y}$

ver → PAT03_PCA_FaceRecognition.m

Ventajas:
- La representación de muchas características es mucho más sencilla ya que se reduce la dimensionalidad (los gráficos son más simples).
- La clasificación usando los primeros componentes es más simple y más rápida para el clasificador.

Desventajas: Las características PCA dependen de todas las características extraídas (es necesario extraer todas las características para obtener Y, no hay ahorro de cómputo en la extracción de X).

ver → PAT03_PCA_DataCompression.m

BESSEL CORRECTION - ANEXO -

Fecha / Date:

Estimación de $\sigma^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$E(s^2) = E\left\{ \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum (\overbrace{x_i - \mu}^{a} + \overbrace{\mu - \bar{x}}^{b})^2 \right.$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum (x_i - \mu)^2 + 2(x_i - \mu)(\mu - \bar{x}) + (\mu - \bar{x})^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum (x_i - \mu)^2 + 2(\mu - \bar{x}) \sum (x_i - \mu) + n(\mu - \bar{x})^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum (x_i - \mu)^2 - 2(-\mu + \bar{x})(n\bar{x} - n\mu) + n(\mu - \bar{x})^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum (x_i - \mu)^2 - 2n(\bar{x} - \mu)^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum (x_i - \mu)^2 - n(\bar{x} - \mu)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum E\{(x_i - \mu)^2\} - n\, E\left((\bar{x} - \mu)^2\right) \right\}$$

$$E\{(x_i - \mu)^2\} = \sigma^2$$

$$Var(\bar{x}) = E\left((\bar{x} - \mu)^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1} \left(\sum \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \left(n\sigma^2 - \sigma^2 \right) = \sigma^2$$

Notas / Notes:

RHEIN