Taller Demostra
Sessió 3: Jocs matemàtics

Edgar Moreno && Silvia García

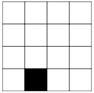
31 de març 2022

Que farem?

Problemes del primer dia

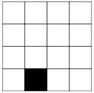
Que farem?

Problemes del primer dia



Que farem?

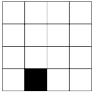
Problemes del primer dia



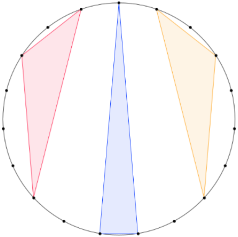
Invariants

Que farem?

Problemes del primer dia

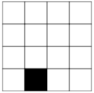


Invariants

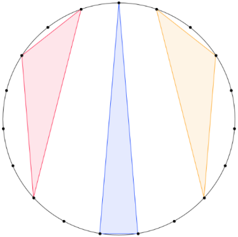


Que farem?

Problemes del primer dia



Invariants



Estratègies

Problema 1

Hi ha dos jugadors: l'Abel i la Berta. Al principi, hi ha un 0 apuntat a la pissarra. Per torns (començant Abel) escriuen l'últim número escrit sumant-li entre 1 i 9. Guanya qui dibuixa el número 100. Qui us agradaria ser?

Solució problema 1

Guanyarà Berta. Si Abel suma x Berta sumarà $10 - x$. Per tant tindrem:

$$0 \to x \to 10 \to 10 + x \to 20 \to ... \to 90 \to 90 + x \to 100$$

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).
- Sempre acaben.

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).
- Sempre acaben.
- No hi ha factor aleatori.

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).
- Sempre acaben.
- No hi ha factor aleatori.
- Tothom sap tota la informació en tot moment.

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).
- Sempre acaben.
- No hi ha factor aleatori.
- Tothom sap tota la informació en tot moment.
- Són "simètrics".

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).
- Sempre acaben.
- No hi ha factor aleatori.
- Tothom sap tota la informació en tot moment.
- Són "simètrics".
- Normalment guanya / perd el primer que no pot jugar.

Variació problema 1

Què passaria si poguéssim sumar entre 0 i 9?
Si algú anés a perdre podria sumar 0 i seria un empat!

Joc 2 de jugadors perfecte i determinista

Condicions dels jocs que estudiarem:

- Entre dos jugadors (de vegades poden ser més).
- Sempre acaben.
- No hi ha factor aleatori.
- Tothom sap tota la informació en tot moment.
- Són "simètrics".
- Normalment guanya / perd el primer que no pot jugar.

Sabeu exemples?

Min-max theorem

Aquests jocs sempre tenen una estratègia guanyadora per algun dels dos jugadors.

”Demostració”

Per cada jugador i ”estat”del joc podem explorar totes les possibles jugades.
Hi ha uns estats que sabem que perden. Si explorant algun moviment veiem que arribem a un estat perdedor fem aquest moviment i guanyarem (l'altre està a un estat perdedor).
Si cap moviment arriba a un estat perdedor, fem el que fem l'altre serà el guanyador.
Com hem suposat que els jocs acaben sempre, aquest ”algorisme”sempre ens dona la resposta (i forma de jugar) en temps finit.

Problema 2

L'Alba i la Blanca juguen al següent joc:
Hi ha dues piles de fitxes amb 25 i 26 fitxes. Per torns cadascuna pot: treure una fitxa d'una de les piles, treure una fitxa de les dues piles o moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya qui treu l'última fitxa.
Qui guanya?

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Sigui $f(m, n) = 1$ si guanya qui juga o 0 si perd.

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Sigui $f(m, n) = 1$ si guanya qui juga o 0 si perd.

Sabem $f(m, n) = f(n, m)$, i $f(0, 0) = 0$ (l'altre acaba de treure l'última fitxa). Direm que si $m < 0$ o $n < 0$ llavors $f(n, m) = 1$ (l'altre ha fet quelcom sense sentit).

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Sigui $f(m,n) = 1$ si guanya qui juga o 0 si perd.

Sabem $f(m,n) = f(n,m)$, i $f(0,0) = 0$ (l'altre acaba de treure l'última fitxa). Direm que si $m < 0$ o $n < 0$ llavors $f(n,m) = 1$ (l'altre ha fet quelcom sense sentit).
De (n,m) fitxes ens podem moure a:

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Sigui $f(m,n) = 1$ si guanya qui juga o 0 si perd.

Sabem $f(m,n) = f(n,m)$, i $f(0,0) = 0$ (l'altre acaba de treure l'última fitxa). Direm que si $m < 0$ o $n < 0$ llavors $f(n,m) = 1$ (l'altre ha fet quelcom sense sentit).
De (n,m) fitxes ens podem moure a:

- $(n-1,m)$ o $(n,m-1)$ si treus una fitxa.

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Sigui $f(m, n) = 1$ si guanya qui juga o 0 si perd.

Sabem $f(m, n) = f(n, m)$, i $f(0, 0) = 0$ (l'altre acaba de treure l'última fitxa). Direm que si $m < 0$ o $n < 0$ llavors $f(n, m) = 1$ (l'altre ha fet quelcom sense sentit).
De (n, m) fitxes ens podem moure a:

- $(n - 1, m)$ o $(n, m - 1)$ si treus una fitxa.
- $(n - 1, m - 1)$ si treus una fitxa de cara.

Forma general

Si sabem la solució, donades dues piles amb m i n fitxes respectivament, podem saber si qui juga guanya o no.

Sigui $f(m, n) = 1$ si guanya qui juga o 0 si perd.

Sabem $f(m, n) = f(n, m)$, i $f(0, 0) = 0$ (l'altre acaba de treure l'última fitxa). Direm que si $m < 0$ o $n < 0$ llavors $f(n, m) = 1$ (l'altre ha fet quelcom sense sentit).
De (n, m) fitxes ens podem moure a:

- $(n - 1, m)$ o $(n, m - 1)$ si treus una fitxa.
- $(n - 1, m - 1)$ si treus una fitxa de cara.
- $(n + 1, m - 1)$ o $(n - 1, m + 1)$ si canvies una fitxa de lloc.

Forma general

Per tant $f(m,n)=1$ si $f(n-1,m)=0$ o $f(n,m-1)=0$ o $f(n-1,m-1)=0$ o $f(n+1,m-1)=0$ o $f(n-1,m+1)=0$, és a dir estem a un estat guanyador si podem anar a un estat perdedor.

Forma general

Per tant $f(m, n) = 1$ si $f(n-1, m) = 0$ o $f(n, m-1) = 0$ o $f(n-1, m-1) = 0$ o $f(n+1, m-1) = 0$ o $f(n-1, m+1) = 0$, és a dir estem a un estat guanyador si podem anar a un estat perdedor.

Si no, $f(m, n) = 0$ ja que fem el que fem guanyarà el següent jugador.

Algun cas petit

Si comencem amb $2, 0$:

Algun cas petit

Si comencem amb $2, 0$: guanya el segon.

Algun cas petit

Si comencem amb $2, 0$: guanya el segon.
Si comencem amb $2, 0$ o $3, 1$:

Algun cas petit

Si comencem amb $2, 0$: guanya el segon.
Si comencem amb $2, 0$ o $3, 1$: guanya el primer.

Algun cas petit

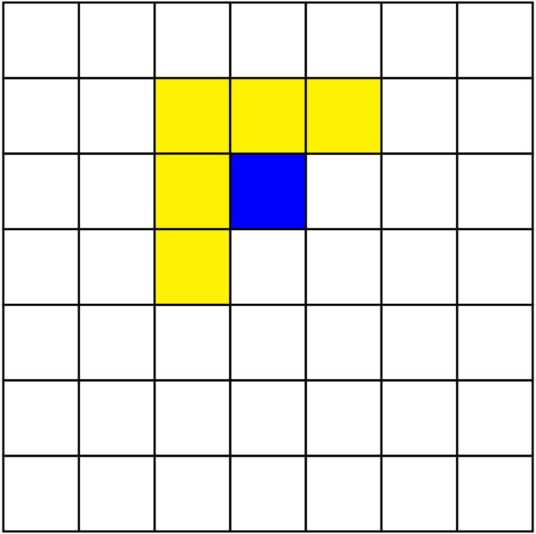
Si comencem amb $2, 0$: guanya el segon.
Si comencem amb $2, 0$ o $3, 1$: guanya el primer.
Si comencem amb $2, 2$:

Algun cas petit

Si comencem amb $2, 0$: guanya el segon.
Si comencem amb $2, 0$ o $3, 1$: guanya el primer.
Si comencem amb $2, 2$: guanya el segon.

Gràficament

Si estem al blau podem anar als grocs.



Gràficament

	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0,1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
0,2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Gràficament

		2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
		2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
0,2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Gràficament

			3,0	4,0	5,0	6,0
		2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Gràficament

				4,0	5,0	6,0
				4,1	5,1	6,1
		2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
		2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Gràficament

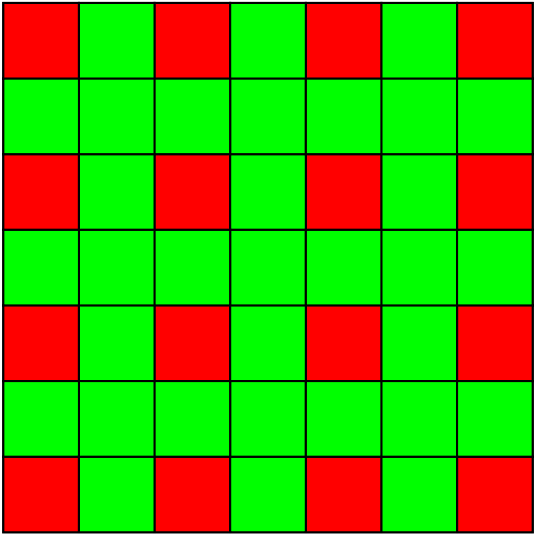
					5,0	6,0
				4,1	5,1	6,1
			3,2	4,2	5,2	6,2
		2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Gràficament

						6,0
						6,1
				4,2	5,2	6,2
				4,3	5,3	6,3
		2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
		2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Patró?

Patró?



Demostració!

Solució

Les úniques posicions perdedores són aquelles on les dues coordenades són parelles.

Demostració!

Solució

Les úniques posicions perdedores són aquelles on les dues coordenades són parelles.

Demostració per inducció

Sabem que $(0,0)$ és perdedor.
Ara volem veure que si el contrari juga des de $(2a, 2b)$, faci el que faci podem tornar-li a una casella de la forma $(2a', 2b')$ amb $a' + b' < a + b$.
Això demostra que en un nombre finit de passos acabarem arribant a $(0,0)$ i guanyant.

Demostració!

Solució

Les úniques posicions perdedores són aquelles on les dues coordenades són parelles.

Demostració per inducció

Sabem que $(0,0)$ és perdedor.
Ara volem veure que si el contrari juga des de $(2a,2b)$, faci el que faci podem tornar-li a una casella de la forma $(2a',2b')$ amb $a'+b'<a+b$.
Això demostra que en un nombre finit de passos acabarem arribant a $(0,0)$ i guanyant.

Casos

- Si $(2a,2b)\to(2a-1,2b)$ fem $(2a-1,2b)\to(2a-2,2b)$.

Demostració!

Solució

Les úniques posicions perdedores són aquelles on les dues coordenades són parelles.

Demostració per inducció

Sabem que $(0,0)$ és perdedor.
Ara volem veure que si el contrari juga des de $(2a, 2b)$, faci el que faci podem tornar-li a una casella de la forma $(2a', 2b')$ amb $a' + b' < a + b$.
Això demostra que en un nombre finit de passos acabarem arribant a $(0,0)$ i guanyant.

Casos

- Si $(2a, 2b) \to (2a-1, 2b)$ fem $(2a-1, 2b) \to (2a-2, 2b)$.
- Si $(2a, 2b) \to (2a-1, 2b-1)$ fem $(2a-1, 2b-1) \to (2a-2, 2b-2)$.

Demostració!

Solució

Les úniques posicions perdedores són aquelles on les dues coordenades són parelles.

Demostració per inducció

Sabem que $(0,0)$ és perdedor.
Ara volem veure que si el contrari juga des de $(2a,2b)$, faci el que faci podem tornar-li a una casella de la forma $(2a',2b')$ amb $a'+b'<a+b$.
Això demostra que en un nombre finit de passos acabarem arribant a $(0,0)$ i guanyant.

Casos

- Si $(2a,2b) \to (2a-1,2b)$ fem $(2a-1,2b) \to (2a-2,2b)$.
- Si $(2a,2b) \to (2a-1,2b-1)$ fem $(2a-1,2b-1) \to (2a-2,2b-2)$.
- Si $(2a,2b) \to (2a+1,2b-1)$ fem $(2a+1,2b-1) \to (2a,2b-2)$.

I el problema que deia?

L'Alba i la Blanca juguen al següent joc:
Hi ha dues piles de fitxes amb 25 i 26 fitxes. Per torns cadascuna pot: treure una fitxa d'una de les piles, treure una fitxa de les dues piles o moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya qui treu l'última fitxa.
Qui guanya?

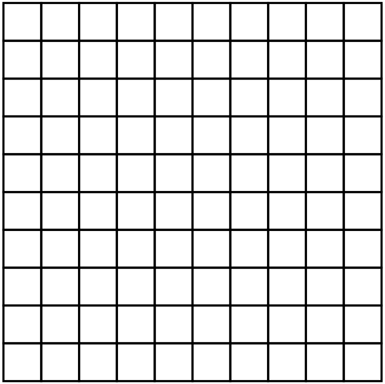
I el problema que deia?

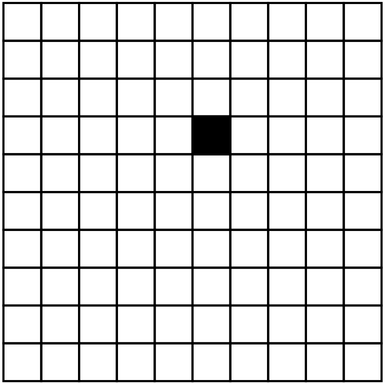
L'Alba i la Blanca juguen al següent joc:
Hi ha dues piles de fitxes amb 25 i 26 fitxes. Per torns cadascuna pot: treure una fitxa d'una de les piles, treure una fitxa de les dues piles o moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya qui treu l'última fitxa.
Qui guanya?

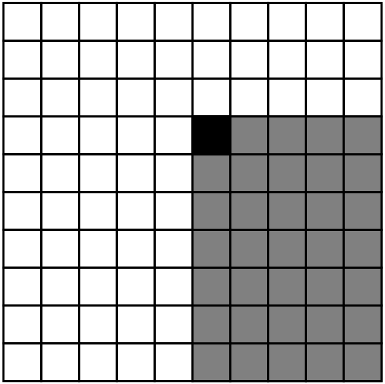
L'Alba treurà una fitxa, pel que deixarà la posició amb 24 i 26 respectivament. Donat que les dues coordenades són parelles, pel que acabem de veure l'Alba guanyarà.

Problema 3

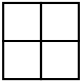
L'Albert i la Bet juguen a un joc. Tenen una graella $10x10$ i juguen per torns. A cada torn un jugador treu una casella i totes les que estiguin a sota i a la dreta. Qui tregui l'última casella guanya.



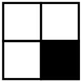




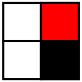
Casos petits?



Casos petits?

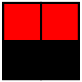


Casos petits?

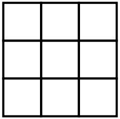


Casos petits?

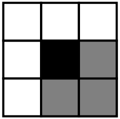
Casos petits?



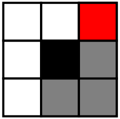
Casos petits?



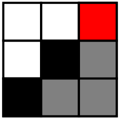
Casos petits?



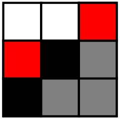
Casos petits?



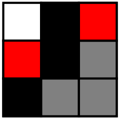
Casos petits?



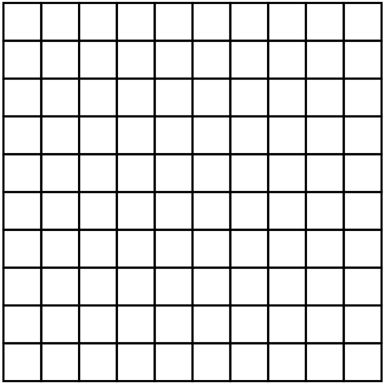
Casos petits?



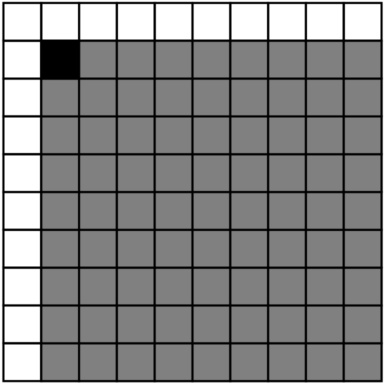
Casos petits?



Estratègia?



Estratègia?



Variació

El primer sempre guanya si el taulell és quadrat.

Què passa altrament?

Variació

El primer sempre guanya si el taulell és quadrat.

Què passa altrament?

Solució

Sempre guanya el primer.

Variació

El primer sempre guanya si el taulell és quadrat.

Què passa altrament?

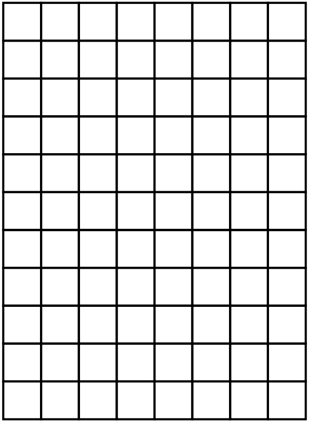
Solució

Sempre guanya el primer.

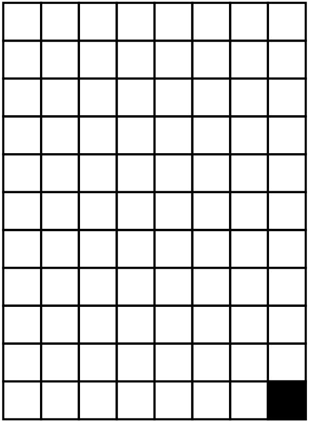
Demostració (Reducció a l'absurd)

Si el segon guanyés, hauria de tenir una estratègia guanyadora faci el que faci el primer.
Fem que el primer jugui abaix a la dreta i mirem que fa el segon.
El primer podria haver jugat això abans i guanyar!

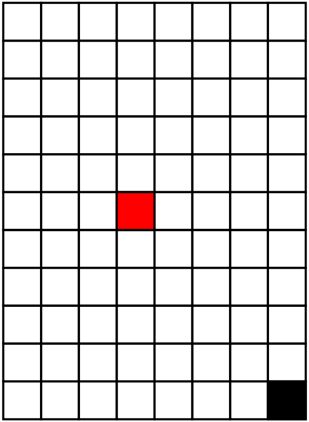
Gràficament



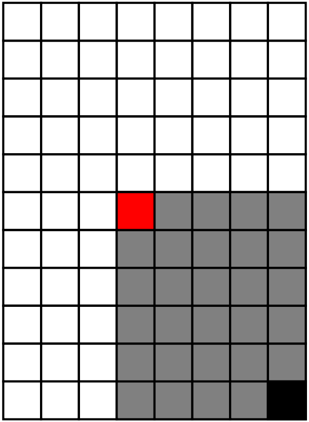
Gràficament



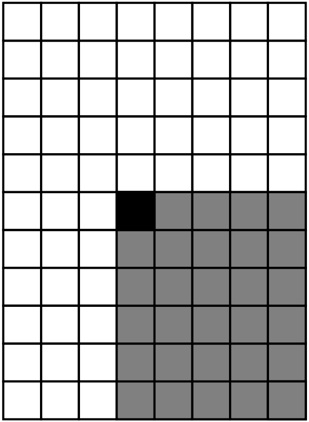
Gràficament



Gràficament



Gràficament



Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.
Per $n = 2$ guanya el Bernat.

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.
Per $n = 2$ guanya el Bernat.
Per $n = 3$ guanya l'Andrea.

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.
Per $n = 2$ guanya el Bernat.
Per $n = 3$ guanya l'Andrea.
Per $n = 4$ guanya el Bernat.

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.
Per $n = 2$ guanya el Bernat.
Per $n = 3$ guanya l'Andrea.
Per $n = 4$ guanya el Bernat.
Per $n = 5$ guanya l'Andrea. (en treu 1 al primer torn)

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?

Casos petits?

Per $n = 1$ guanya el Bernat.

Per $n = 2$ guanya el Bernat.

Per $n = 3$ guanya l'Andrea.

Per $n = 4$ guanya el Bernat.

Per $n = 5$ guanya l'Andrea. (en treu 1 al primer torn)

Per $n = 6$ guanya l'Andrea. (en treu 2 al primer torn)

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.
Per $n = 2$ guanya el Bernat.
Per $n = 3$ guanya l'Andrea.
Per $n = 4$ guanya el Bernat.
Per $n = 5$ guanya l'Andrea. (en treu 1 al primer torn)
Per $n = 6$ guanya l'Andrea. (en treu 2 al primer torn)
Per $n = 7$ guanya l'Andrea. (en treu 3 al primer torn)

Fitxes

L'Andrea i en Bernat juguen al següent joc: hi ha una torre amb N fitxes i n'han de treure per torns. Comença l'Andreu i no les pot treure totes. A més, a cada torn han de treure les mateixes o menys (però no 0) de les tretes al torn anterior. Qui no pot jugar, perd. Qui guanya?
Casos petits?
Per $n = 1$ guanya el Bernat.
Per $n = 2$ guanya el Bernat.
Per $n = 3$ guanya l'Andrea.
Per $n = 4$ guanya el Bernat.
Per $n = 5$ guanya l'Andrea. (en treu 1 al primer torn)
Per $n = 6$ guanya l'Andrea. (en treu 2 al primer torn)
Per $n = 7$ guanya l'Andrea. (en treu 3 al primer torn)
Per $n = 8$ guanya el Bernat.

Solució

Solució

El primer jugador guanya excepte si N és una potència de 2.

Demostració

Podem demostrar que les potències de 2 són "estats"perdedors. Com?

Solució

Solució

El primer jugador guanya excepte si N és una potència de 2.

Demostració

Podem demostrar que les potències de 2 són "estats"perdedors. Com?
Per inducció!

Solució

Solució

El primer jugador guanya excepte si N és una potència de 2.

Demostració

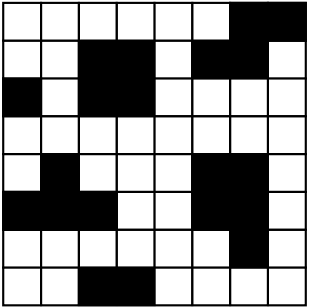
Podem demostrar que les potències de 2 són "estats"perdedors. Com?
Per inducció!
Si $n = 1$ és obvi (no podem jugar).
Suposem que hem demostrat que els estats $1, 2, 4, ..., 2^k$ són perdedors, i la resta d'estats $< 2^k$ guanyadors. Anem a demostrar que 2^{k+1} és perdedor i la resta entre 2^k i 2^{k+1} guanyador.

Solució

Si tenim q fitxes amb $2^k < q < 2^{k+1}$, en treiem $q - 2^k$. El següent jugador estarà en la mateixa situació que si comences a jugar amb 2^k fitxes, i per tant, perdrà.
Mirem ara què passa si comencem amb 2^{k+1}: no podem treure $\geq 2^k$ perquè si no, el següent jugador treuria les restants. Per tant, podem pensar que estem jugant a veure qui no arriba a tenir l'estat 2^k. Però per arribar a l'estat 2^k, hem de treure exactament 2^k fitxes, i és un joc, al que per inducció, el primer jugador perd.

Més quadrats!

L'Aina i l'Àlex juguen a un joc a una quadricula! En aquesta graella les caselles en negre estan bloquejades. L'Aina decideix una casella (no bloquejada) on començar i, per torns, s'han de moure a una casella adjacent (adalt, abaix, esquerra o dreta) que encara no s'hagi visitat. Qui no pot moure perd. Qui guanyarà?



No sempre va d'estats!

Aquí tenim masses estats i molt diferents per intentar per una demostració com abans.

No sempre va d'estats!

Aquí tenim masses estats i molt diferents per intentar per una demostració com abans.

Solució

No sempre va d'estats!

Aquí tenim masses estats i molt diferents per intentar per una demostració com abans.

Solució

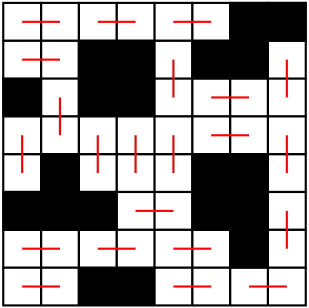
Guanya l'Àlex abans de començar on mourà si la fitxa està a una determinada casella.

No sempre va d'estats!

Aquí tenim masses estats i molt diferents per intentar per una demostració com abans.

Solució

Guanya l'Àlex abans de començar on mourà si la fitxa està a una determinada casella.



Xocolata

Ash and Pikachu want to split a grid-like chocolate bar of size $N \times M$. However, to make things more interesting, they decide to bet the bar on the following game: Ash and Pikachu take turns splitting the bar along any of the $M-1$ horizontal lines or $N-1$ vertical lines. If split horizontally, then all of the chocolate bar below the line is removed; if split vertically, then all of the chocolate bar to the right of the line is removed. Whoever cannot split the bar any longer must forfeit the chocolate to the other player. If Ash starts, for which values of N and M is Ash guaranteed to win?

Luffy

All the whole numbers from 1 to 100 are written on the blackboard. Luffy and Goku take turns erasing each of these numbers. However, whenever they erase a number, they must also erase all its divisors as well. For example, if Luffy chooses the number 6, then Luffy must erase the numbers $1, 2, 3$, and 6. Whoever erases the last number wins the game. If Luffy makes the first move, who has a winning strategy?