



Dinámica de Fluidos Computacional en Astrofísica
SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA EXPANSIÓN DE
UN REMANENTE DE SUPERNOVA



Muñoz Sánchez Edgar

13 de diciembre de 2023

INTRODUCCIÓN

Una *supernova* (SN) corresponde al evento cuando una estrella de masa inicial de secuencia principal que supera ocho veces la masa del Sol (es decir. las estrellas de tipo O y las más tempranas de tipo B) llega a su última etapa de vida de forma explosiva. Este evento ocurre luego de un intenso brillo estelar seguido de un gran relativo decaimiento. El brillo es tal que puede compararse con el brillo de su galaxia huésped (Dyson, J. E., & Williams, D. A., 2021) (Kartunnen, H., *et. al.*, 2017).

En lo que respecta a la dinámica, el *remanente de supernova* (RSN) corresponde con el medio interestelar (MIE) que es barrido, comprimido, calentado y puesto en movimiento a una fracción significativa de la velocidad de la luz ($\sim 1/100 c$) por la onda de choque producida en la explosión. La energía cinética total del material eyectado es típicamente del orden de $E_{SN} \sim 10^{50} - 10^{51}$ erg. Tal inyección puntual y colosal sobre el medio interestelar puede tener efectos muy importantes. (Choudhuri, A. R., 2010).

Según los modelos más simples, una supernova se puede modelar como una liberación instantánea y gigantesca de energía en un punto del medio interestelar de densidad uniforme n_0 (partículas/cm³). El radio $R_s = R_s(t)$ de la onda de choque avanza a una tasa de expansión que transiciona por distintas fases que se describen a continuación (Arthur, S. J., 2012).:

Expansión Libre: Inmediatamente después de la explosión de una supernova, la onda de choque inicial se propaga a través del espacio sin encontrar una resistencia significativa del MIE circundante. En esta fase, la expansión sigue un comportamiento semejante al de una explosión puntual en un medio vacío. La energía cinética es dominante, pero se va convirtiendo en energía térmica. Esta fase suele tener emisión de rayos X debido a las altas temperaturas alcanzadas y en radio debido a la emisión sincrotrón producida en la zona turbulenta detrás de la onda de choque (**Figura 1**).

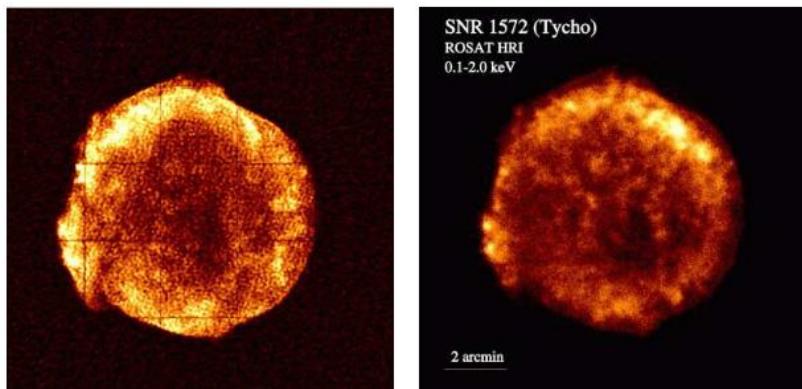


Figura 1. El remanente de la supernova Tycho, en su fase de expansión libre. (Izquierda) Observaciones en radio. (derecha) Observación en rayos X.

Fase adiabática de Taylor-Sedov (TS): Esta fase se describe con similitud a los modelos teóricos de Taylor y Sedov en la investigación de las explosiones de bombas atómicas durante la Segunda Guerra Mundial (Sedov, L. I., 1946; Taylor, G. I., 1950). Estos modelos describen cómo la onda de choque interactúa con el medio circundante. Esta fase comienza cuando una masa significativa del RSN ha sido barrida por la onda de choque. La forma de expresar el radio del remanente como función del tiempo según el modelo de Taylor-Sedov es:

$$R_s(t) = \left(\frac{2.02E_0}{\rho_{MIE}} \right)^{1/5} t^{\frac{2}{5}} \quad (1)$$

Donde E_0 es la energía de la explosión, ρ_{MIE} es la densidad del medio interestelar y la constante de proporcionalidad se obtiene por considerar la energía total del remanente.

Fase Radiativa: La fase adiabática dura hasta que las pérdidas por enfriamiento radiativo se vuelven significativas. La temperatura detrás de una onda de choque adiabática está dada por:

$$kT_c = \frac{3}{16} \mu v^2 \quad (2)$$

Donde k es la constante de Boltzmann, μ es la masa promedio por partícula del gas y v es la velocidad de la onda de choque ($= \dot{R}_s$ en este caso). De la diferenciación de la **ecuación (1)** obtenemos entonces que:

$$T_c = \frac{3}{16} \frac{\mu}{k} \frac{4}{25} \left(\frac{2.02E_0}{\rho_{MIE}} \right)^{-6/5} \quad (3)$$

Es decir, el gas se enfriá más rápido cuando la temperatura justo detrás del choque cae hasta unos $10^5 K$. A esta temperatura nos encontramos en el pico de la función de enfriamiento $\Lambda(T)$ (expresada en $erg cm^3/s$) que ofrece la tasa de emisión de radiación como función de la temperatura como la que se muestra en la **Figura 2**. A juzgar por la curva de enfriamiento muestra de hecho que el gas empieza a enfriarse cuando su temperatura es menor que $10^7 K$, es decir cuando la velocidad del choque cae debajo de unos 500 km/s.

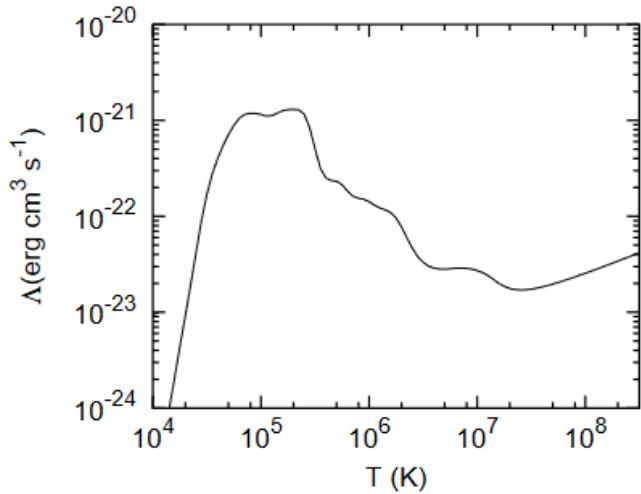


Figura 2. Curva de enfriamiento para un gas ópticamente delgado en equilibrio de ionización colisional.

El objetivo de este proyecto consiste en simular la expansión de un RSN durante 50 mil años para comparar la tasa de expansión del choque con el modelo de Sedov-Taylor.

SOLUCIÓN NUMÉRICA

Ecuaciones, método y parámetros generales.

Se dio solución numérica a las ecuaciones de Euler en dos dimensiones de la dinámica de gases en un código de *Fortran 95* aprovechando su eficiencia de cómputo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + IP) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}(E + P)) = G - L \quad (6)$$

Donde $E = \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + \frac{P}{\gamma-1}$ es la energía total y γ es el factor adiabático. Estas ecuaciones se pueden escribir en su forma conservativa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + S = 0 \quad (7)$$

Donde U es el vector de conservadas y F son los vectores de flujo en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, dadas por:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ u(E + P) \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ v(E + P) \end{pmatrix}, E = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \frac{P}{\gamma-1} \quad (8)$$

Donde nombramos las componentes de velocidad como $\vec{u} = (u, v, w)$.

Para ello, se implementó el método de MacCormack (MacCormack, R. W. 2014), un método de diferencias finitas consistente de dos etapas, una predictora donde se calcula un vector de conservadas temporal:

$$\tilde{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n}{4} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n) \quad (9)$$

y otra correctora:

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{U_{i,j}^n + \tilde{U}_{i,j}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\tilde{F}_{i,j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (\tilde{G}_{i,j}^{n+1} - \tilde{G}_{i,j-1}^{n+1}) \quad (10)$$

Donde $\tilde{F}_{i,j}^{n+1} = F(\tilde{U}_{i,j}^{n+1})$ y $\tilde{G}_{i,j}^{n+1} = G(\tilde{U}_{i,j}^{n+1})$ son los vectores de flujo implementados sobre las conservadas temporales del predictor. La primera etapa ofrece una aproximación de las derivadas espaciales mediante una diferencia progresiva y la segunda mediante una diferencia regresiva. Despues se realiza una media aritmética entre ambas generando una aproximación de segundo orden equivalente a la diferencia central. Las diferencias temporales se aproximan mediante la

diferencia progresiva. Se aplica además un término de viscosidad artificial para reducir las dispersiones numéricas (oscilaciones espurias) del método de MacCormack.

$$U'_{i,j} = U_{i,j} + \eta(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}) \quad (11)$$

Donde para la estabilidad se implementó una viscosidad artificial $\eta = 0.05$. Finalmente, los pasos temporales fueron determinados mediante la condición de Courant-Friedrichs-Levy (Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H., 1928) necesaria para la convergencia de la solución numérica.

$$\Delta t = CFL \frac{\min(\Delta t_x, \Delta t_y)}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

donde $\Delta t_q = \frac{\Delta x_d}{\max_q(|u_{q,i,j}| + c_{s,i,j})}$ es el paso temporal en la dirección $q \in \{x, y\}$ y $c_{s,i,j}$ es la velocidad de sonido en la celda ij :

$$c_{s,i,j} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (13)$$

Se usó como número CFL un valor de 0.9.

Se simuló sólo la mitad del RSN para ahorrar tiempo de cómputo. La otra mitad debería ser simétrica. Se trabajó con una caja computacional de 500x250 celdas que abarcan un espacio físico de 60x30 pársecs (pc)¹. El eje x es el eje de simetría correspondiente al eje z de coordenadas cilíndricas.

Se estableció que el MIE, inicialmente en reposo, tuviese una densidad numérica de $n_0 = 1\text{cm}^{-3}$, una temperatura de $T_0 = 100\text{ K}$ y compuesto de 90% hidrógeno y 10% helio. Al ser monoatómico se tiene un factor adiabático de $\gamma = 5/3$. Se impusieron condiciones de frontera de salida libre en los bordes izquierdo, superior y derecho de la caja, así como condiciones reflectivas en el borde inferior para tomar en cuenta la simetría en torno al eje x.

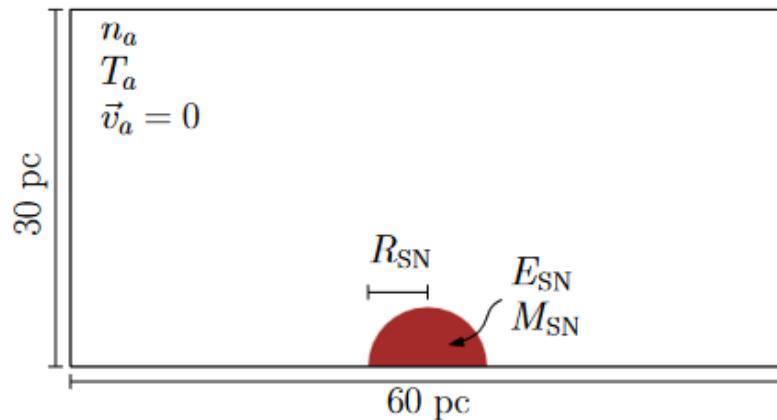


Figura 3. Esquema de la simulación.

¹ 1pc = 3.26 años-luz.

Según los valores típicos mencionados anteriormente, se impone la condición inicial creando una pequeña región semicircular ($R_s(0) = 1pc$) en la que se inyecta una cantidad de energía $E_{SN} \sim 10^{51} erg$ y una masa adicional igual a $M_{SN} \sim 1M_\odot$ correspondiente a el gas de las capas externas de la estrella que fue eyectado por la explosión (**Figura 3**). Las cantidades primitivas iniciales ($\rho_{SN}, P_{SN}, u_{SN}, v_{SN}$) quedan definidas por estos dos parámetros suponiendo que la energía de la explosión queda distribuida como 50% térmica y 50% cinética.

La simulación se deja correr por 50yr y se observa la tasa con la que crece el RSN y la estructura interna que aparece en dos casos: primero sin enfriamiento radiativo y luego con él. La función de enfriamiento implementada en la simulación está dada por las siguientes interpolaciones simples

$T < 10^4 K$: No hay enfriamiento

$10^4 K \leq T \leq 10^5 K$: Rampa lineal desde $10^{-25} \leq \Lambda < 10^{-21}$

$T > 10^5 K$: Fórmula de Drain & Wood (1972) que contempla la suma de líneas atómicas de emisión (principalmente hidrógeno, carbono, oxígeno, nitrógeno, neón y hierro) y la emisión libre-libre de bremsstrahlung las cuales dominan a altas temperaturas.

El enfriamiento radiativo es aplicado en una subrutina del código implementado sobre todas las celdas calculando la cantidad de energía térmica perdida por radiación en el intervalo de tiempo Δt y reduciendo la presión acorde. Para evitar presiones negativas, el gas no se dejará enfriar a menos de $10^3 K$.

RESULTADOS

Se obtuvieron los campos de densidad, magnitud de la velocidad, presión y temperatura en la caja computacional en intervalos de 1000 años. En la **Figura 4** se muestran las condiciones iniciales de a la simulación como fueron anteriormente descritas. En las **Figuras 5 y 6**, se despliegan estos campos al término de la expansión con el enfriamiento radiativo desactivado y activado, respectivamente. Se señalan además la presencia de la onda de choque (flecha roja), una discontinuidad de contacto (flecha azul) y una onda de rarefacción (flecha verde).

En las **Figura 7**, se encuentran los gráficos de evolución temporal del radio de expansión del RSN, $R_s(t)$, de ambos casos analizados. Los radios fueron medidos con un código en *Python 3.8* diseñado para determinar la celda con el máximo cambio de velocidad sobre el eje x de la caja en cada iteración. A partir de su posición se encuentra la distancia al centro de la explosión de supernova (establecida con coordenadas $(x_{SN}, y_{SN}) = (0,0)$ en este caso). Así mismo, se compara dicha tasa de expansión con los modelos de Taylor-Sedov. Los resultados de todas las iteraciones realizadas pueden encontrarse adjuntas en la carpeta comprimida *SNR.zip*.

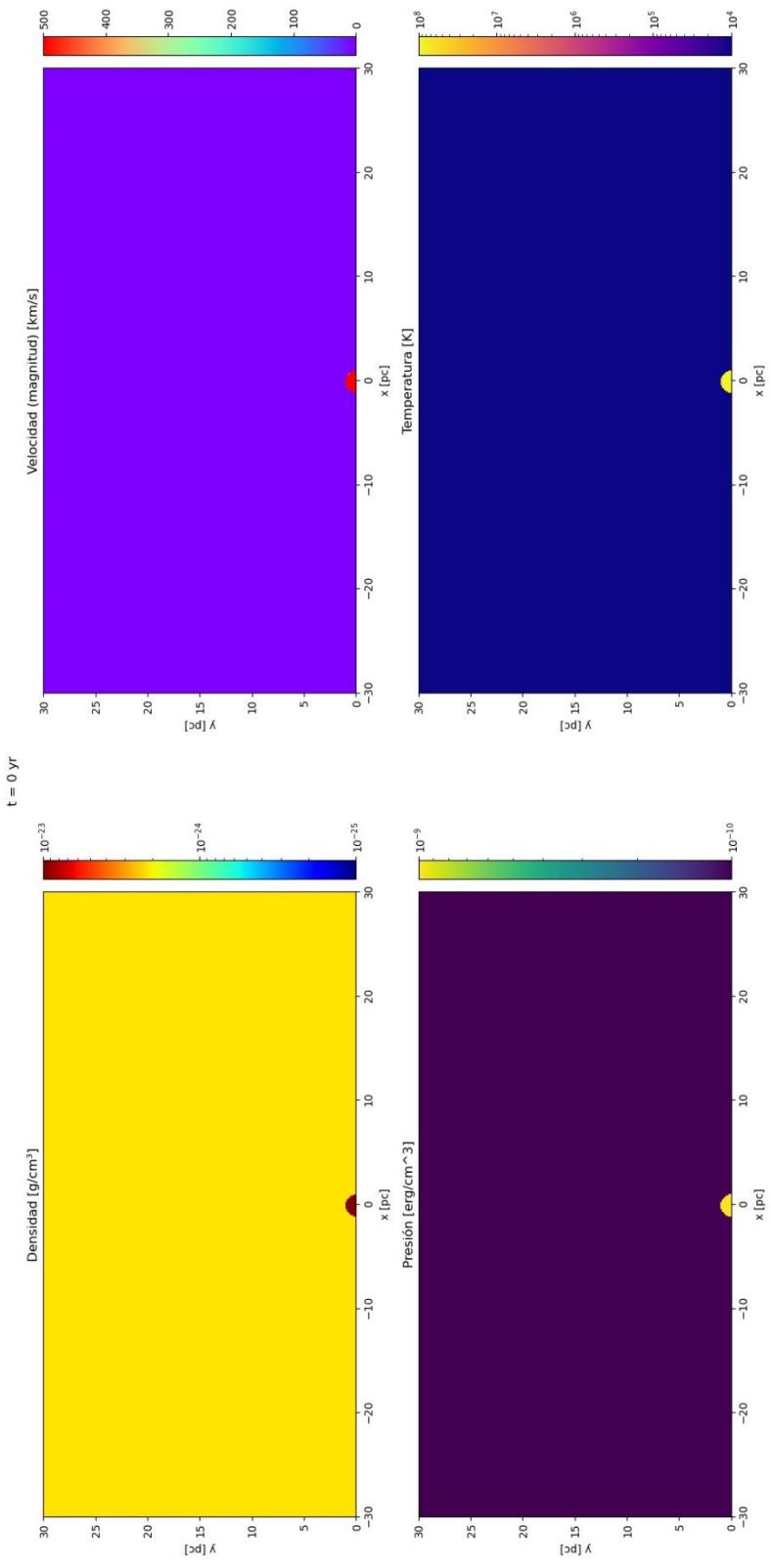


Figura 4. Condiciones iniciales de la simulación. Campos de densidad, magnitud de la velocidad, presión y temperatura.

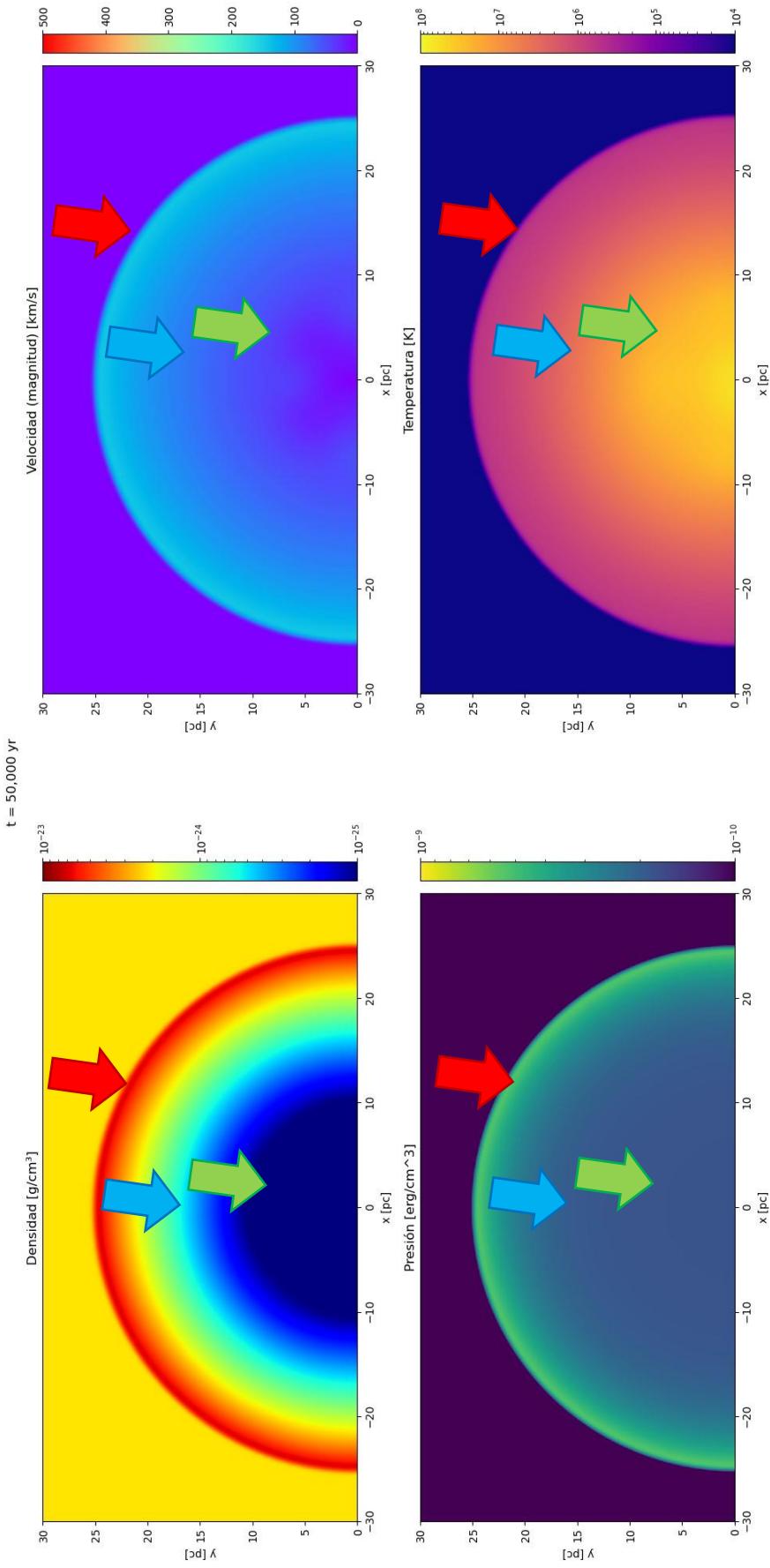


Figura 5. Culminación de la simulación numérica de la expansión del RSN con el enfriamiento radiativo desactivado. ($t=50,00$ años)

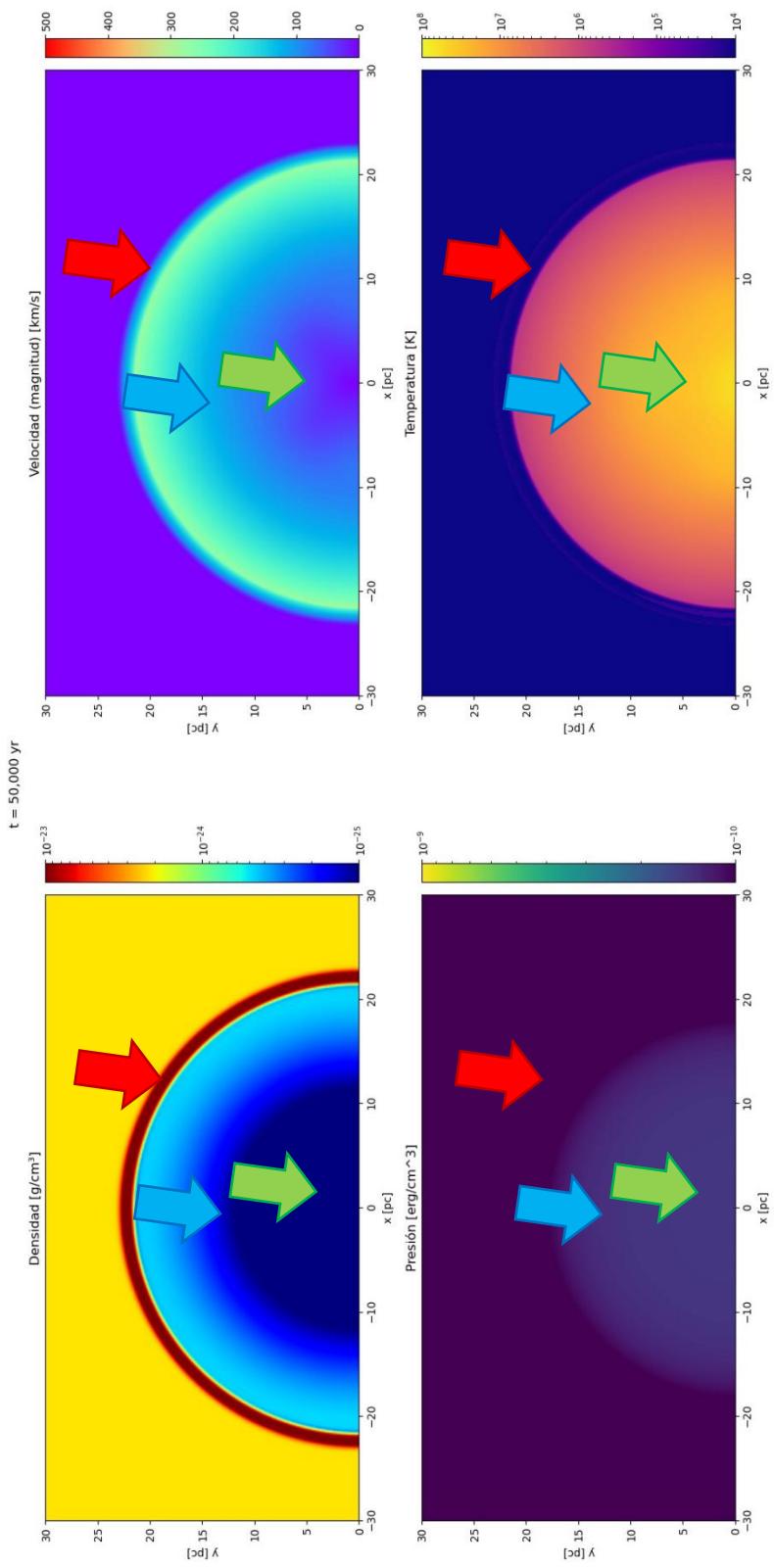


Figura 6. Culminación de la simulación numérica de la expansión del RSN con el enfriamiento radiativo activado. ($t=50,00$ años)

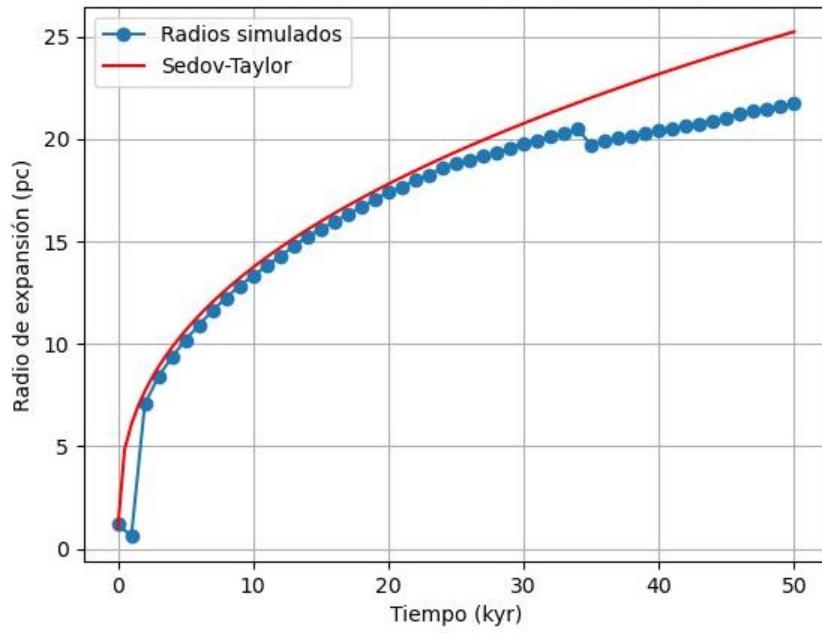
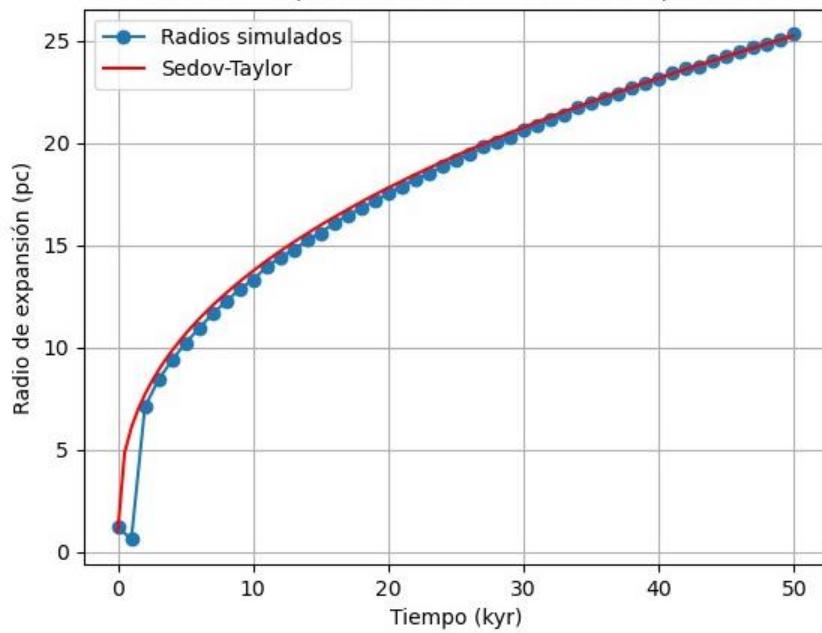


Figura 7. Evolución temporal del radio del RSN. (Arriba) con enfriamiento radiativo desactivado.
(Abajo) con enfriamiento radiativo activado.

DISCUSIÓN

En el caso de enfriamiento desactivado, la solución de Taylor-Sedov ajusta perfectamente a la tasa de expansión del RSN a partir de los primeros 2000 años después de la fase de expansión libre. El radio final de la simulación fue de 25 pc. Este sería un caso irreal de una expansión adiabática permanente donde el enfriamiento radiativo es despreciado.

Sin embargo, cuando el enfriamiento es activado la simulación predice la tasa de expansión comienza a desprenderse del modelo TS después de 25,000 años de evolución. El radio final del RSN fue de 22 pc, menor que el caso anterior. Se nota en el gráfico una discontinuidad alrededor de los 35 pc que bien puede deberse a una mala detección del radio.

En ambos casos, la temperatura en el interior del RNS corresponde a $10^6 - 10^7 K$, que corresponde a temperaturas donde el enfriamiento radiativo es significativo. Una gran diferencia entre los dos casos analizados es la presión al interior en el RSN: la presión en el caso de enfriamiento es mucho menor por al menos casi un orden de magnitud. Es este gradiente de presión menor con respecto al MIE que ralentiza la expansión del RSN con respecto al modelo TS. El enfriamiento radiativo es entonces responsable de transformar principalmente energía cinética del RSN a energía de radiación.

Se puede hacer una discusión de las otras variables primitivas. Por un lado, la velocidad del gas dentro del RSN parece tener un comportamiento lineal con el radio. Es decir, el gas más cerca a la onda de choque es el gas que se está moviendo más rápido. La velocidad final de la expansión fue de ~ 300 km/s (con enfriamiento). La presión dentro de la burbuja es casi constante y se vuelve homogénea respecto al MIE circundante rápidamente durante la fase radiativa. La temperatura del gas es menor justo detrás de la onda de choque. Entonces es en esta zona que primero empieza el proceso de enfriamiento. El interior del remanente es la parte más caliente, porque consta de gas chocado en épocas tempranas de la vida del remanente y el enfriamiento para este gas es muy ineficiente. Es por esta razón que los interiores de los remanentes se observan en rayos X.

Se concluye entonces que el modelo TS predice fielmente la tasa de expansión del RSN típico simulado durante la fase adiabática comprendida entre los 2,000 y los 25,000 años de evolución. Así mismo, el enfriamiento radiativo es responsable de frenar la tasa de expansión del RSN con respecto a la fase adiabática de Taylor-Sedov.

REFERENCIAS

- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (Eds.). (2007). *Fundamental astronomy*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. Pp. 308-312
- Dyson, J. E., & Williams, D. A. (2021). *The physics of the interstellar medium* (3ra ed.). CRC Press. pp. 157-163.
- Choudhuri, A. R. (2010). *Astrophysics for physicists*. Cambridge University Press.
- Arthur, J. S. (2012) *El medio interestelar*. Centro de Radioastronomía y Astrofísica, UNAM. pp. 34-39.
- Sedov, L. I. (1946). Propagation of strong shock waves. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 10, 241-250.
- Taylor, G. I. (1950). The formation of a blast wave by a very intense explosion I. Theoretical discussion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1065), 159-174.
- Taylor, G. I. (1950). The formation of a blast wave by a very intense explosion. -II. The atomic explosion of 1945. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1065), 175-186.
- MacCormack, R.W, Numerical computation of compressible and viscous flow, AIAA education series, 2014
- Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H. (1928), "Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik", *Mathematische Annalen* (in German), 100 (1): 32–74, Bibcode:1928MatAn.100...32C, doi:10.1007/BF01448839, JFM 54.0486.01, MR 1512478, S2CID 120760331.