Nombre: ____

1. Escriba código en SageMath para determinar un conjunto generador para un subespacio W, el cual está definido por una matriz de relaciones. El subespacio puede ser subespacio de $\mathbb{R}^n$, de polinomios o de matrices. En cualquier, caso W está determinado por una matriz de relaciones $\mathcal{R}$. Los subespacios pueden ser de la forma indicada a continuación:

$$W_1 = N(\mathcal{R}) = \left\{v \in \mathbb{R}^n : \mathcal{R}v = 0\right\}, \qquad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$W_2 = \left\{ a_0 + a_1 T + \cdots + a_{n-1}T^{n-1} \in \mathbb{R}[T] : \mathcal{R}\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{bmatrix} = 0 \right\}, \qquad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$W_3 = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : \mathcal{R}X = 0\right\}, \qquad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{p\times mn}$$

   1) Entradas:
      a) Una matriz de relaciones $\mathcal{R}$;
      b) Un número para indicar el tipo de subespacio (1 subespacio de $\mathbb{R}^n$, 2 subespacio de polinomios, 3 subespacio de matrices).
      c) El tamaño de la matrices cuando se trate de subespacios de tipo 3.
   2) Salida:
      a) Un conjunto generador para el subespacio.

   El código debe apegarse al modelo muestra (Vea el modelo muestra en la última sección del capítulo de matrices). El código tiene que incluir las secciones: Descripción de la función, Entrada, Salida, Ejemplos (suficientes ejemplos para ilustrar los diferentes casos), Autores.

   A continuación ejemplos de los diferentes tipos de subespacios.

   Si W_1 es

$$W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

   después de resolver por los métodos yas estudiados en clase, se obtiene que un conjunto generador para W_1 es $\{(3, -1, 1, 0), (1, -2, 0, 1)\}$.

   Si W_2 es un subespacio de polinomios:

$$W_2 = \left\{ a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 \in \mathbb{R}[T] : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

después de resolver el ejercicio, se concluye que un conjunto generador para W_2 es $\{3 - T + T^2, 1 - 2T + T^3\}$.

Finalmente, si W_3 es un subespacio de matrices

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

, se obtiene, resolviendo el ejercicio, que un conjunto generador para W_3 es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

El conjunto generador para W_1 debe estar formado por vectores de $\mathbb{R}^n$; de manera similar, el conjunto generador para W_2 debe esta formado por polinomios y el conjunto generador para W_3 está formado por matrices de $m \times n$.

Observe que en los casos 1 y 2, el tamaño de la matriz determina el número de entradas del vector $v \in \mathbb{R}^n$ o el número de coeficientes del polinomio. Sin embargo, en el caso tres, si no se indica el tamaño de las matrices en el subespacio, puede haber mal interpretaciones. Por ejemplo, W_3 podría consistir matrices de 2×2 o de matrices de 1×4 o de 4×1 (que es el caso 1)

Calcular un conjunto para generador para los subespacios de tipo 2 y 3 es en esencia calcular un conjunto generador para el espacio nulo de una matriz.

La matriz de relaciones A debe ser construida con la instrucción `matrix`