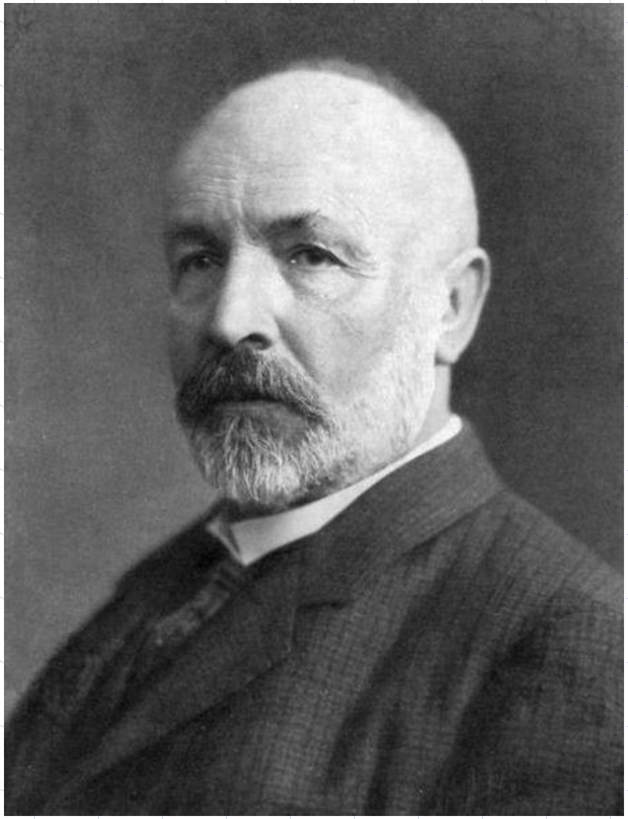
Logikos pagrindai ir diskretinė matematika. AIBĖS

Doc. dr. Beatričė Andziulienė

Aibės sąvoka

Diskrečioji matematika nagrinėja objektus, kurie yra tam tikra prasme atskirti vienas nuo kito, pavieniai. Paprasčiausi diskretūs objektai yra baigtinės ir skaisčiosios aibės.



Aibių teorijos kūrėjas vokiečių matematikas G. Kontoras (1845-1918)

- Rusija, Sankt Peterburgas 1845-1856
- Vokietija, Saksonija 1856-1918

Aibės sąvoka

Aibė *- tai objektų, kuriems būdingas tam tikras požymis, visuma*. Žymima: **A, B, M** ir pan.

- **N** - natūraliųjų skaičių aibė – {1, 2, 3… **}**
- **Z** - sveikųjų skaičių aibė –{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 **}**
- **R** – realių skaičių aibė,
- **Ø** - tuščioji aibė
- **U** – universalioji aibė

Aibės elementai

Aibės elementai – tai objektai, kurie įeina į aibę:

- $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ - x yra aibės M elementas
- $\mathbf{x} \notin \mathbf{M}$ - x nepriklauso aibei M
- $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$ **-** aibės elementais gali būti kita aibė

Pvz., aibė, kurios elementai yra kitos aibės:

$$\mathbf{M=\{0, 1, A, \{x\}, \{0, 1, B\}\}}$$

Aibės nusakymo būdai (1)

- **Išvardinimo**
  - $\mathbf{A = \{a_1, a_2, a_3\}}$,
  - $\mathbf{X = \{x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\}}$
- **Aprašymo -** nusakant savybes, kurios išskiria tuos elementus iš kitų:
  - $\mathbf{X = \{x \mid p(x)\}}$

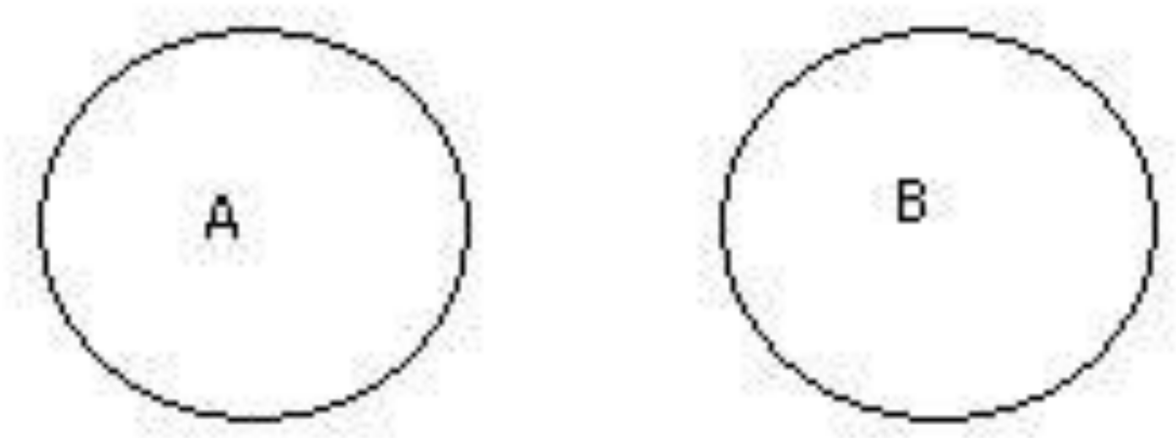
  p(x)- predikatas. tam tikra loginė sąlyga išreikšta loginiu teiginiu arba procedūra galinčia grąžinti reikšmę t.y. taisyklė, nusakanti, kurie elementai įeina į aibę

  - $A = \{a \in N \mid 6 \leq a \leq 10\}$,
  - $B = \{x \in R \mid x^2-5x+6=0\}$,
  - $C = \{x \mid x \text{ yra IF-1 grupės pirmūnas}\}$

Aibės nusakymo būdai (2)

- **Grafiniu - Veno (Oilerio) diagramos**

Veno diagrama - tai aibė plokštumos taškų, apribotų uždarąja kreive (paprastai apskritimu).

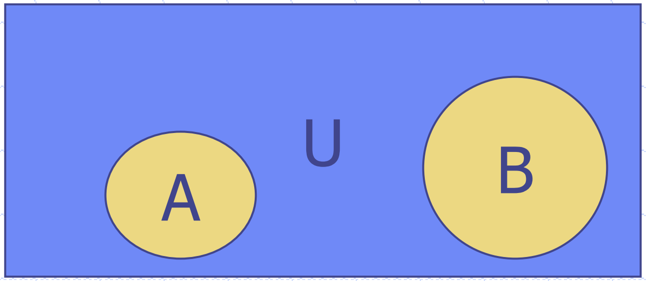


Aibių klasifikacija (1)

- **Baigtinė** aibė, kai aibės elementų skaičių galima suskaičiuoti t.y. jis baigtinis:
  - **P = {x $\in$ N |1≤x≤ 100 ir p(x) = x yra pirminis skaičius}**
- **Begalinės** aibės, kai elementų skaičiaus suskaičiuoti neįmanoma.
- Aibė yra **skaiti**, jei yra būdas išvardinti visus jos elementus vienu ar kitu būdu.
  - Visos baigtinės aibės yra skaičios. Realiųjų skaičių aibė *nėra* skaisti
- **Tuščioji aibė** t.y. aibė, neturinti nei vieno elemento žymima simboliu **Ø.**
  - tuščia aibė atitinka nuliui aritmetikoje

Aibių klasifikacija (2)

- **Universali aibė** – pakankamai plati aibė iš kurios imami visi elementai
  - žymima **U**
  - Grafiškai



- **Klasė** (taip pat yra vartojamas terminas šeima) t.y. aibė, kurios elementai yra kitos aibės
  - **M={A, {x}, {0, 1, B}}**

Multiaibė

- **Multiaibė** t.y. aibė, kuri turi pasikartojančių elementų, pvz.: {*a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *c*} elementas a kartojasi 2, b-3; c-1 kartą.
  - Baigtinę multiaibę turinčią m elementų, vadiname m-multiaibe.
- Sutvarkytą multiaibę vadiname **seka**Sekoje turi reikšmę, ne tik pats objektas, bet ir jo vieta. Sukeitę du skirtingus objektus vietomis, gauname kitą seką.

$$A = \{0, 1, 1,1\}$$

$$B = \{1, 1, 0,1\}$$

Vektorius

Baigtines sekas iš m objektų, dar vadina m-**vektoriais**, o begalines sekas - tiesiog sekomis. Sekos elementai rašomi paprastuose skliaustuose. Pvz., du skirtingi 4-vektoriai :

α**= (0,1,0,0);**

β**= (1,0,0,0);**

- m-vektoriaus $\alpha = (1, \ldots, m)$ i-ąjį elementą α_i vadina vektoriaus i-*ąja koordinate.*

Veiksmai su aibėmis. Sąjunga

Dabar apibrėšime pagrindines aibių operacijas (naudodami antrą aibių apibrėžimo būdą):

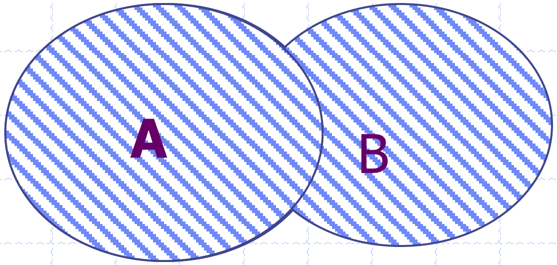
Sąjunga – *tai visų aibės A ir aibės B elementų aibė.* Žymima $\cup$

$$\mathbf{A \cup B := \{x \mid x \in A \vee \text{(arba) } x \in B\}}$$

- A={1, 2, 3, 4}, B ={2,3}.

A $\cup$ B={ 1,2,3,4}.

- { a, b} $\cup$ {a, b}={a, b}
- {x, y} $\cup$ {u, v}={x, y, u, v}

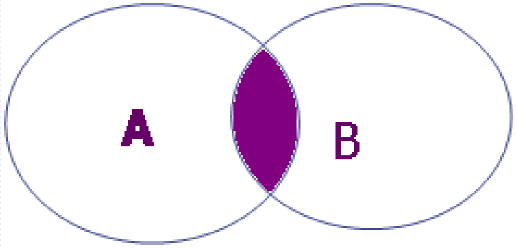


Veiksmai su aibėmis. Sankirta

Sankirta - *tai aibė, kurią sudaro elementai priklausantys tiek aibei A tiek aibei B, t.y. jie yra abiejose aibėse.* Žymime $\cap$.

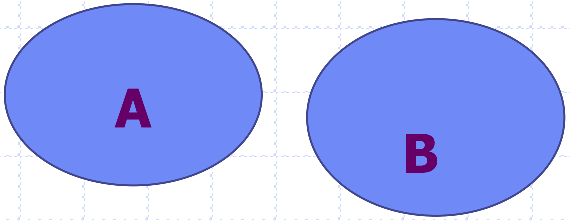
$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge$ (ir) $x \in B\}$

- $A := \{1, 2, 3, 4\}$ $B := \{2,3,5\}$. $A \cap B := \{2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$
- $\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$



Jei A ir B yra nesusikertančios, tai $A \cap B = \emptyset$

- $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$



Veiksmai su aibėmis. Skirtumas

Skirtumas - *aibės A ir B skirtumas yra aibė, kurią sudaro aibės A elementai, kurių nėra aibėje B*. Žymimas **** arba **-**

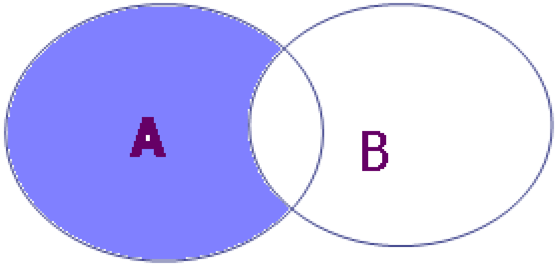
$$\mathbf{A \setminus B := \{x} \in \mathbf{A} \wedge \text{(ir)}\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B\}}$$

- A:={ 1,2,3,4}   B:={l,4}. A\B:={2, 3}

Negalioja komutatyvumo dėsnis

$$\mathbf{A \setminus B} \neq \mathbf{B \setminus A}$$

- B \ A:=∅   A - B:={2, 3}

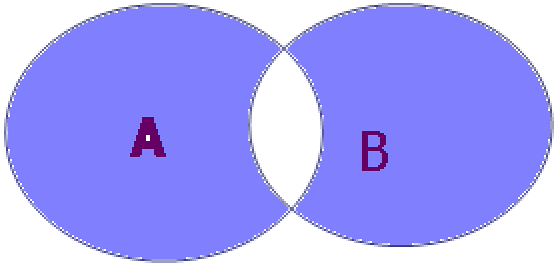


Veiksmai su aibėmis. Simetrinis skirtumas

Simetrinis skirtumas – *tai aibė visų elementų, kurie priklauso aibei A arba aibei B, tačiau nepriklauso abiem aibėm kartu.* Žymima - ⊕.

$\mathbf{A \oplus B := \{x \mid x \in A}$ $\wedge$ (ir) $\mathbf{x \notin B}$ $\vee$ (arba) $\mathbf{x \in B}$ $\wedge$ (ir) $\mathbf{x \notin A\}}$

- $\{1, 2, 3\} \oplus \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 5, 7\}$.
- $\{a, b\} \oplus \{a, b\} = \emptyset$.
- $\{x, y\} \oplus \{u, v\} = \{x, y, u, v\}$



$\mathbf{A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$

Veiksmai su aibėmis. Papildinys

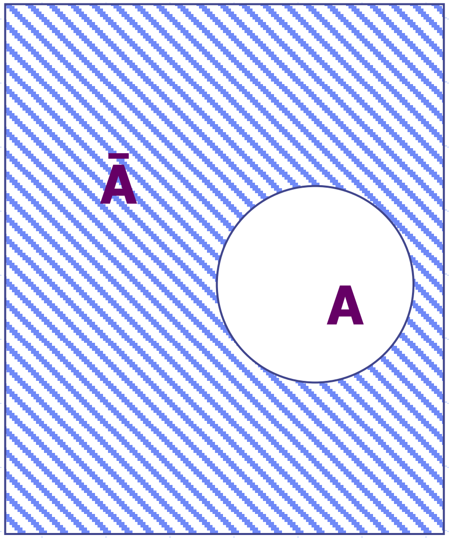
Aibių papildinys (inversija). *Sąvoka įvedama, kai kalbama apie universumą. Jei aibė* ***A*** $\in$ ***U.*** *Tai tuomet aibės A papildinys yra viskas išskyrus aibę A.* Žymimas: $\bar{\mathbf{A}}$ arba **A'**.

$\bar{\mathbf{A}} := \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \}$

$\bar{\mathbf{A}} := \mathbf{U} \setminus \mathbf{A}$

U={1, 2, 3, 4} A={1,4}.

$\bar{\mathbf{A}}$ ={2, 3}



Aibių operacijų dėsniai

Aibių operacijos $\cup$, $\cap$ ir \ atitinka aritmetines operacijas +, × ir −. Todėl aibių operacijos tenkina kelis dėsnius, kuriuos jau žinote iš aritmetikos

1. Komutatyvumo dėsnis: $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$

$$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$$

2.Asociatyvumo dėsnis: $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$

$$\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$$

3.Distributyvumo dėsnis:

$$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

4.Vieneto taisyklė: $\mathbf{A \cup U = U;\ A \cap U = A}$

5.Nulio taisyklė: $\mathbf{A \cup \varnothing = A\ ;\ A \cap \varnothing = \varnothing}$

Aibių algebros dėsniai

Aibių visumą, kurioje apibrėžtos sąjungos, sankirtos ir papildinio operacijos, vadina *aibių algebra. Aibių algebroje galioja ir kiti dėsniai, neturintys analogų aritmetikoje:*

5.Idenpotentiškumo dėsnis: $\mathbf{A \cup A = A; A \cap A = A}$

6. Antras distributyvumo dėsnis:

$$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

7. de Morgano dėsniai

Aibių dėsnių suvestinė

Komutatyvumo dėsnis	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociatyvumo dėsnis	$A \cup (B \cup C) =$ $= (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) =$ $= (A \cap B) \cap C$
Distributyvumo dėsnis	$A \cup (B \cap C) =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Prisijungimo (absorbcijos) dėsnis	$(A \cap B) \cup A = A$	$(A \cup B) \cap A = A$
Idenpotentiškumo dėsnis	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Vieneto taisyklė	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
Nulio taisyklė	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Morgano dėsnis	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Papildymo savybė	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Invaliutyvumas	$\overline{\overline{A}} = A$	

Dualumo principas

Dualumo principas. Jei turime teisingą aibių lygybę, sudarytą iš universalios aibės U poaibių ir operacijų ∪**,** ∩ bei ¯ (papildinio), tai pakeitę abiejose lygybės pusėse ženklus:

∩ į ∪**;** ∪ i¸ ∩;

∅ į¸ U ir U i¸ ∅,

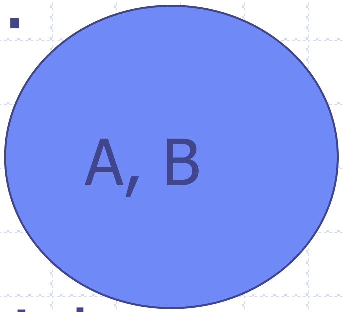
vėl gausime teisingą aibių lygybę

pvz.,

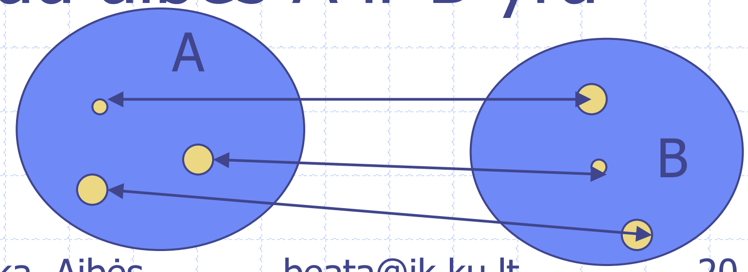
A ∩ U=A; galime gauti teisingą lygybę **A ∪ U = U**

Aibių palyginimas

- Aibės A ir B yra ***identiškos (lygios*)**, jei jos sudarytos iš tų pačių elementų. **A=B**:
  - $A = B \leftrightarrow \exists\, x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$
  - A={a, b, c} ir B= {b, a, c} A=B

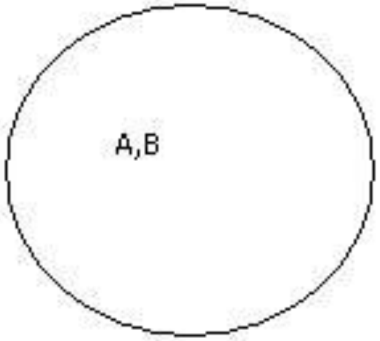


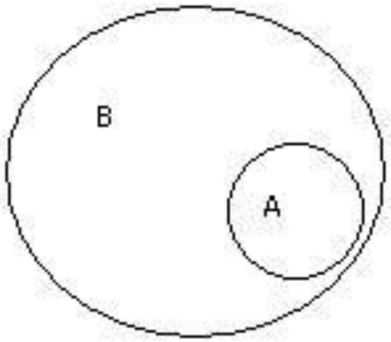
- Kai vieną aibės A elementą $a \in A$ atitinka vienas aibės B elementas $b \in B$ ir atvirkščiai t.y. atvaizdis abipusiai vienareikšmis A atvaizdis tai sakome, kad aibės A ir B yra ***ekvivalenčios* A~B**



Poaibiai 1

- Kai kiekvienas aibės A elementas yra ir aibės B elementas, tai sakoma, kad
  - aibė A yra aibės B dalis (A įeina į B) arba aibės B **poaibis: $A \subseteq B$, $A \subset B$**
  - arba aibė B yra aibės A **viršaibis**: **$B \supseteq A$, $B \supset A$**





Tikriniai ir netikriniai poaibiai

- Kai kiekvienas aibės A elementas yra ir aibės B elementas, tačiau egzistuoja bent vienas aibės B elementas, kuris nėra aibės A elementas t. y. $A \neq B$, tai aibė A vadinama aibės B **tikriniu (griežtuoju) poaibiu** rašome $\mathbf{A \subset B}$
  - $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$.
  - $\{\{x\}\} \subset \{a, b, \{x\}, E\}$
- aibės M **netikriniais poaibiais** vadinami tuščioji aibė $\varnothing$ ir pati aibė M

$$\mathbf{A \subset B,\ \ A = B\ \leftrightarrow A \subseteq B}$$

  - $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c,\}$.

Poaibių savybės

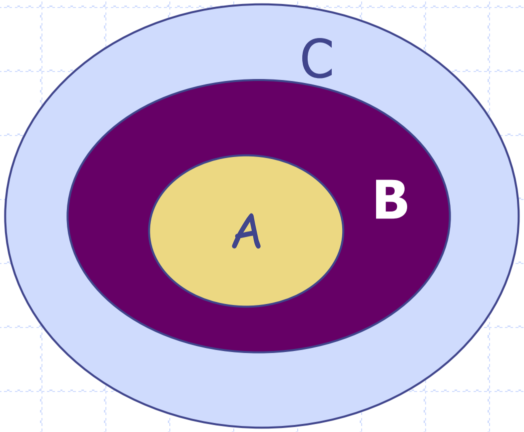
- Kiekviena aibė M yra savo pačios poaibis

$$\forall \mathbf{M} \quad \mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}$$

- Tuščioji aibė yra kiekvienos aibės poaibis:

$$\forall \mathbf{M} \quad \boldsymbol{\varnothing} \subseteq \mathbf{M}$$

- Jei $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai $A=B$.
- Jei $A \subset B$ ir $B \subset C$, tai $A \subset C$.
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$ **, kai** $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$**, kai** $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$



Poaibiai ir elementai

Turime aibę A= {1, 2, 8, { 3, 7, 12}} jos elementai ir poaibiai :

$\{1\} \subset A$

$\{1\} \notin A$

$1 \in A$

$\{1, 2, 8, \{3, 7, 12\}\} \subseteq A$

$\{3, 7, 12\} \cancel{\subseteq} A$

$\{\{3, 7, 12\}\} \subset A$

$\{3, 7, 12\} \in A$

Poaibių aibė

Aibės A visų galimų poaibių aibė P(A) aprašoma kaip aibių šeima, kurią sudaro aibės A poaibiai:

$P(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$

Poaibių skaičius:

$|P(A)| = 2^n$, kai aibės A galia $n = |A|$

Pvz.,

$A = \{1, 2, 3\}$, $|A| = 3$

Aibės A poaibių aibės galia $|P(A)| = 2^3 = 8$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.

Grėjaus kodas

Grėjaus kodas – dvejetainis kodas parodantis, kurie aibės elementai įeina į poaibį:

$$C(i)=\begin{cases}1 & kai \quad a_i \in A \\ 0 & kai \quad a_i \notin A\end{cases}$$

Kodas	Poaibio elementai	Aibės $\{4, 5, 6\}$ poaibiai
000		Ø
001	a_3	$\{6\}$
010	a_2	$\{5\}$
011	a_2 , a_3	$\{5, 6\}$
100	a_3	$\{6\}$
101	a_1 , a_3	$\{4, 6\}$
110	a_1, a_2	$\{4, 5\}$
111	a_1 , a_2 , a_3	$\{4, 5, 6\}$

Grėjaus kodas

A={1, 2, 3, 7, 8, 12},

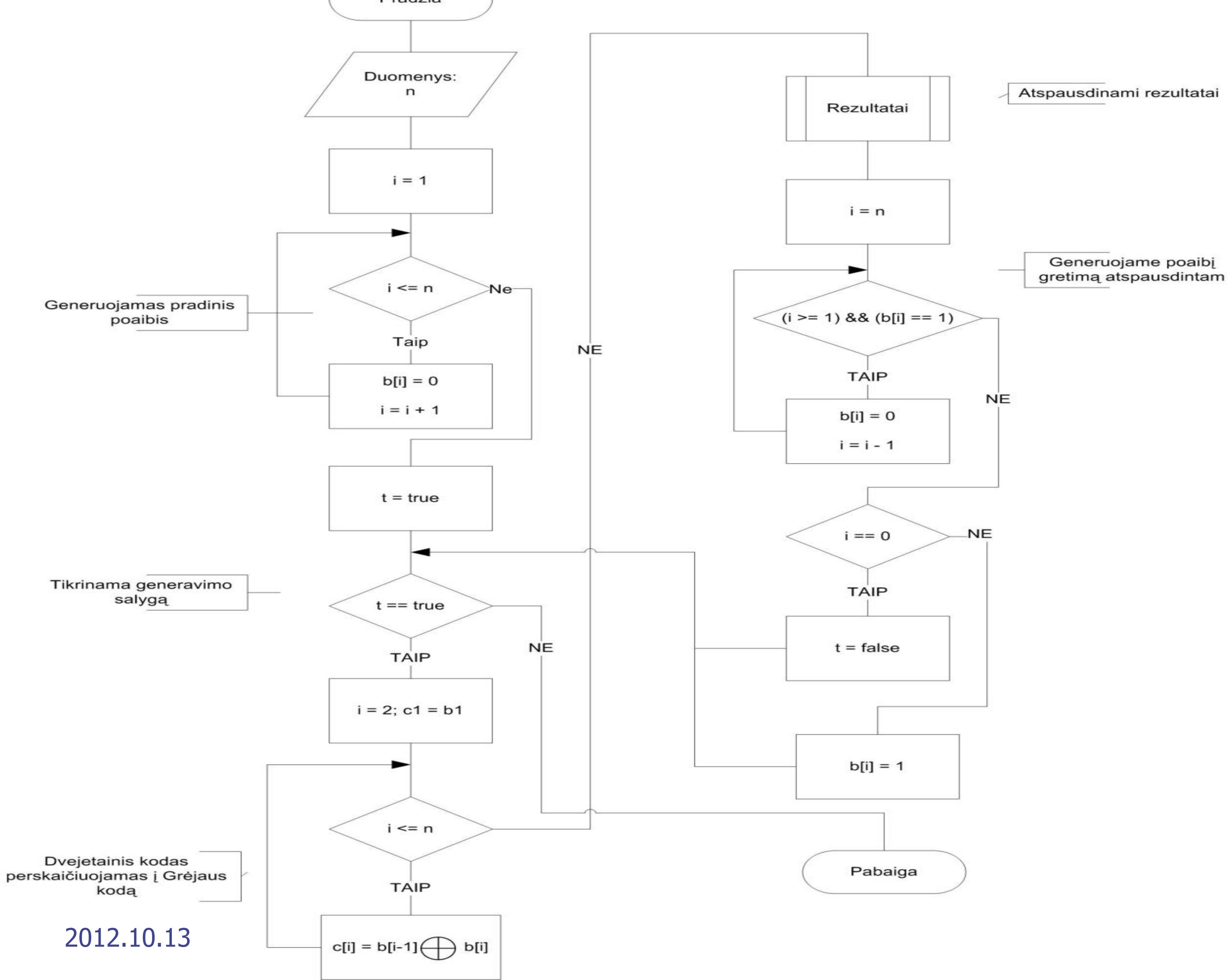
000000 $\rightarrow \varnothing$

110011 $\rightarrow$ **{1, 2, 8, 12},**

B ={4, 6, 8, 10, 12, C, {3,5,7}, 20 },

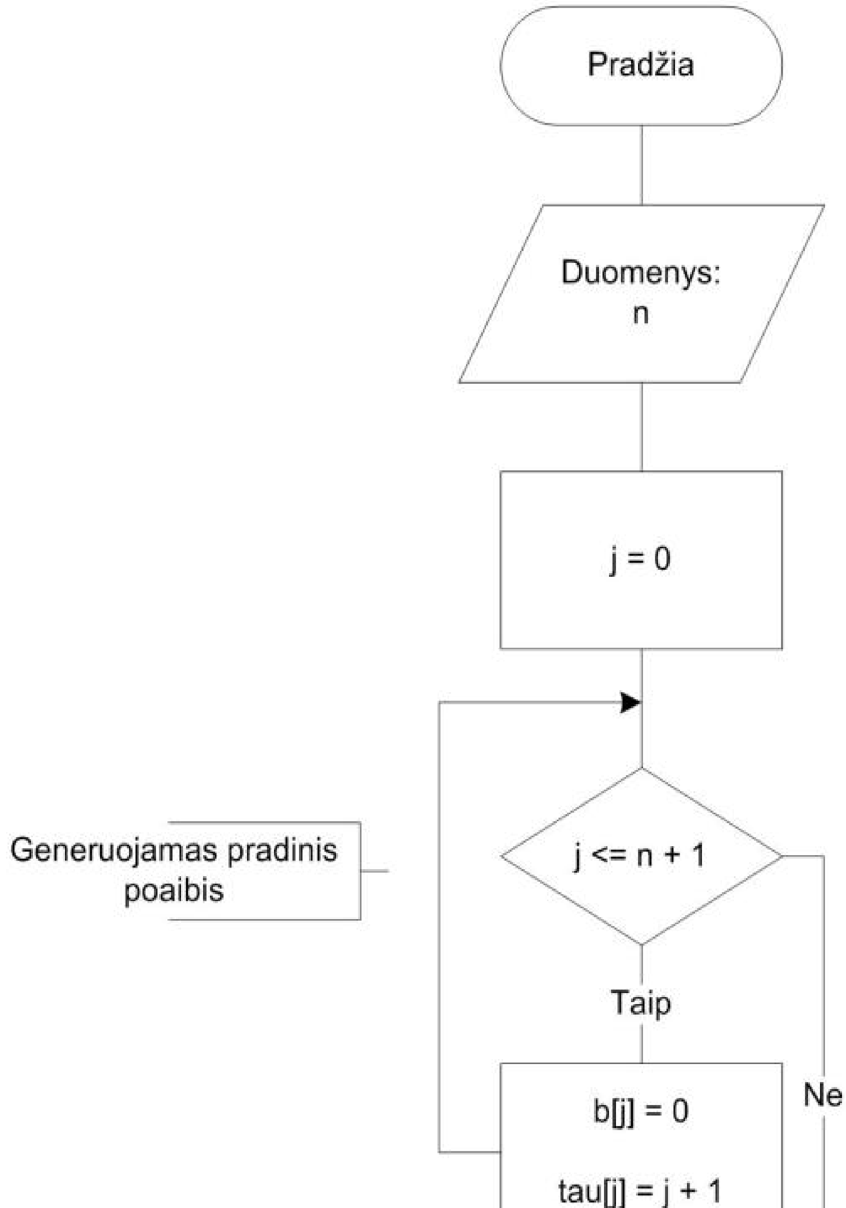
11111111

00000010 $\rightarrow$ **{{3,5,7}}**


Pradžia
Duomenys:
n
i = 1
i <= n
Ne
Generuojamas pradinis poaibis
Taip
b[i] = 0
i = i + 1
t = true
Tikrinama generavimo salygą
t == true
TAIP
NE
i = 2; c1 = b1
i <= n
TAIP
Dvejetainis kodas perskaičiuojamas į Grėjaus kodą
c[i] = b[i-1] ⊕ b[i]
NE
Rezultatai
Atspausdinami rezultatai
i = n
Generuojame poaibį gretimą atspausdintam
(i >= 1) && (b[i] == 1)
TAIP
b[i] = 0
i = i - 1
NE
i == 0
NE
TAIP
t = false
b[i] = 1
Pabaiga

2012.10.13

Grėjaus kodų generavimo trečiojo algoritmo schema



Realiųjų skaičių poaibiai

Tarkime, kad a ir b yra realieji skaičiai ir $a < b$. Tada žemiau išvardinti realiųjų skaičių aibės poaibiai turi vardus.

- **Intervalas** (atkarpa, atvirasis intervalas).

  $$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

- **Segmentas** (uždarasis intervalas)

  $$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}.$$

- **Pusiau atvirieji intervalai**:

  $$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}.$$

  $$[a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}.$$

Aibės galia (kardinalumas)

Baigtinės aibės galia - tai elementų skaičius aibėje, žymima |A| arba n(A)

- A={1, 2, 3, 4} |A|=4

- Tuščios aibės galia: **|Ø|=0**
- Aibės sudarytos iš tuščios aibės galia: **|{Ø}|** =1
- Aibėsyra vienodo galingumo kai jos turi vienodą elementų skaičių: |A| **=**|B|
  - A={4, 5, 6,7} |A|=4;
  - B={x, y, a, z} |B|=4

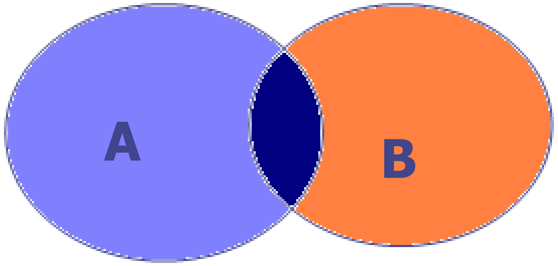
Aibių galios paskaičiavimas 1

- Nesikertančių aibių galia lygi tų aibių galių sumai:

$$\mathbf{n\,(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

Teorema. Bet kuriems universalios aibės U poaibiams A ir B, tai aibės A\B, B\A ir $A \cap B$ nesikerta. Tai:

$$\mathbf{A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).}$$



Aibių galios paskaičiavimas 2

Teorema. **Bet kuriems universalios aibės poaibiams galioja tokia lygybė:**

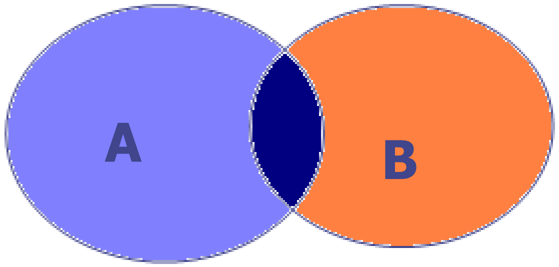
$$\mathbf{n\,(A \cup B) = n\,(A) + n\,(B) - n\,(A \cap B)}$$

- $n(A \setminus B) = n(A) - n\,(A \cap B)$,
- $n(B \setminus A) = n(B) - n\,(A \cap B)$,

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B) =}$$

$$\mathbf{= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B) =}$$

$$\mathbf{n(A) + n(B) - n(A \cap B).}$$



Aibių galios paskaičiavimas 2

Apklausus 150 studentų 80 moka anglų k., 50 - vokiečių, 20 - abi kalbas. Kiek studentų moka užsienio kalbą?

$n(A)=80; n(V)=50; n(A \cap V)=20$

$$\mathbf{n\,(A \cup B) = n\,(A) + n\,(B) - n\,(A \cap B)}$$

$n\,(A \cup B)= 80+ 50- 20=110$

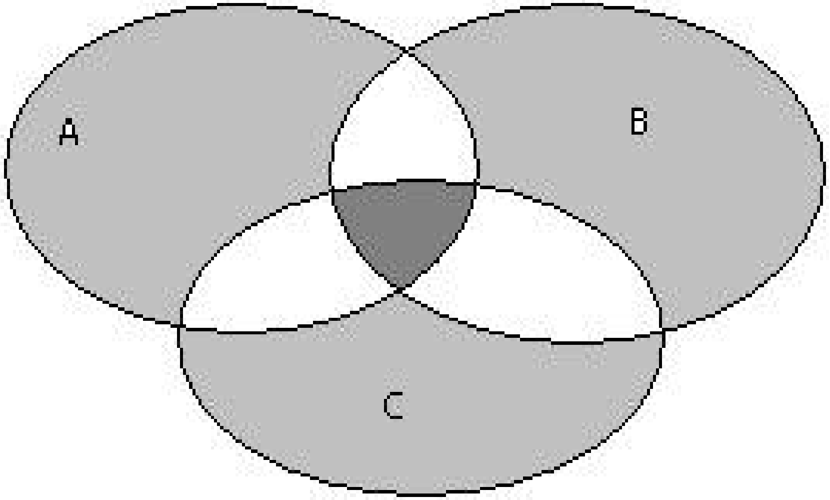
Aibių galios paskaičiavimas 3

Teorema. **Jei A, B, C yra universalios aibės poaibiai tai:**

$$\mathbf{n\,(A \cup B \cup C) = n\,(A) + n\,(B) + n\,(C)}$$

$$\mathbf{-\,n\,(A \cap B) - n\,(B \cap C) - n(A \cap C)}$$

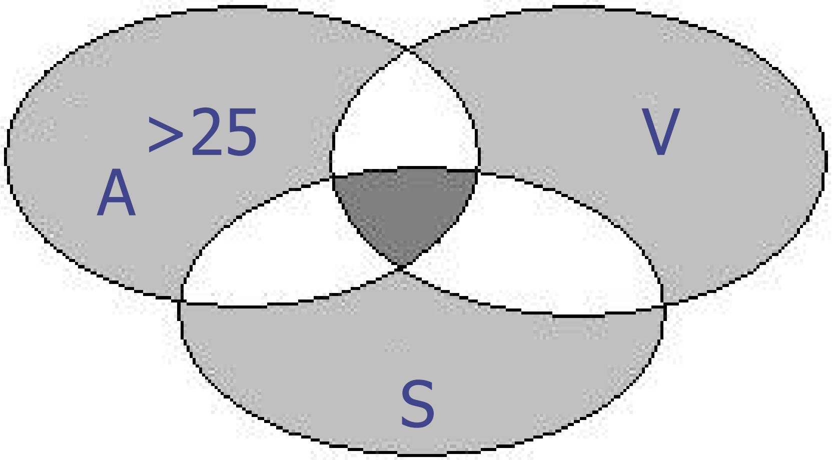
$$\mathbf{+\,n\,(A \cap B \cap C)}$$



Galios paskaičiavimas 4

Draudžiami klientai skirstomi pagal lytį, amžių, šeimyninę padėtį. Apdrausta 500 žmonių.Kiek apdrausta vyrų?

350 - susituokę
240 -vyresni 25 m.
230 -susituokę vyrai
110 –susituokę, > 25 m.
100 - vyrai >25 m.
40 - susituokę vyrai > 25 m.
10 – **vienišos moterys**



$$n(V \cup S \cup A) = n(V) + n(S) + n(A) - n(V \cap S) - n(V \cap A) - n(S \cap A) + n(V \cap S \cap A)$$

$$490 = n(V) + 350 + 240 - 230 - 100 - 110 + 40 = n(V) - 190$$

$$n(V) = 300$$