Logikos pagrindai ir diskretinė matematika. Grafai_2

2. Metrinės grafo charakteristikos

Doc. dr. Beatričė Andziulienė

Kelias

Keliu vadinama besikeičianti viršūnių ir briaunų seka, kur du gretimi elementai yra incidentiški

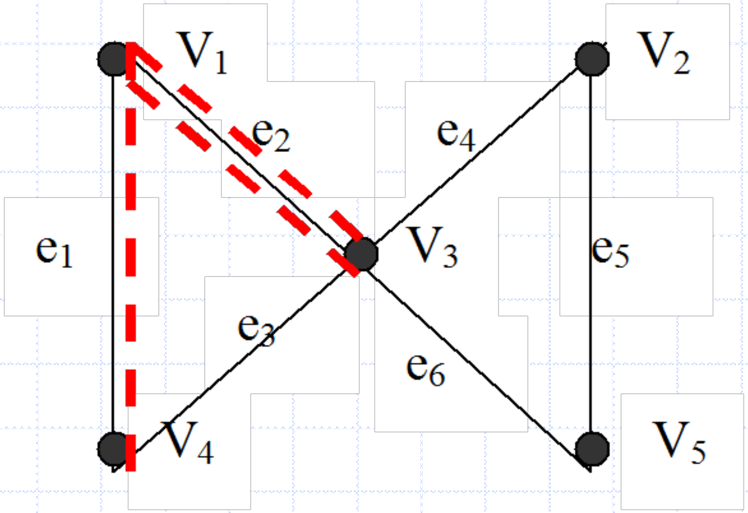
$$\mu = \mathbf{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3 \ldots, e_k, v_k}$$

$e_j = (v_{i-1}\ v_i) \quad v_i \ni V,$

$i = 1 \ldots k,$

k – kelio ilgis

v_1, v_k – kelio galai

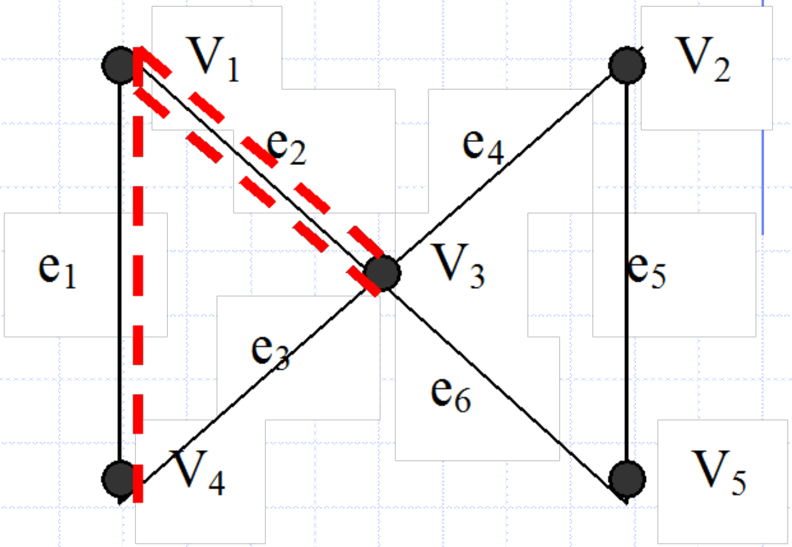


Kelias, kurio galai sutampa, vadinamas **uždaru keliu:** $\mathbf{v_1 = v_k}$

Kelio pvz.

Kelyje viršūnės ir briaunos gali kartotis:

$\mu = v_1 e_2\ v_3\ e_2\ v_1 e_1\ v_4$



Uždaras kelias:

$\mu = (v_1 e_2\ v_3\ e_2\ v_1 e_1\ v_4\ e_3\ v_3\ e_3\ v_4\ e_1\ v_1)$

Kelio ilgiu vadinama briaunų skaičius jame, įskaitant pasikartojančias briaunas. Žymimas *k*

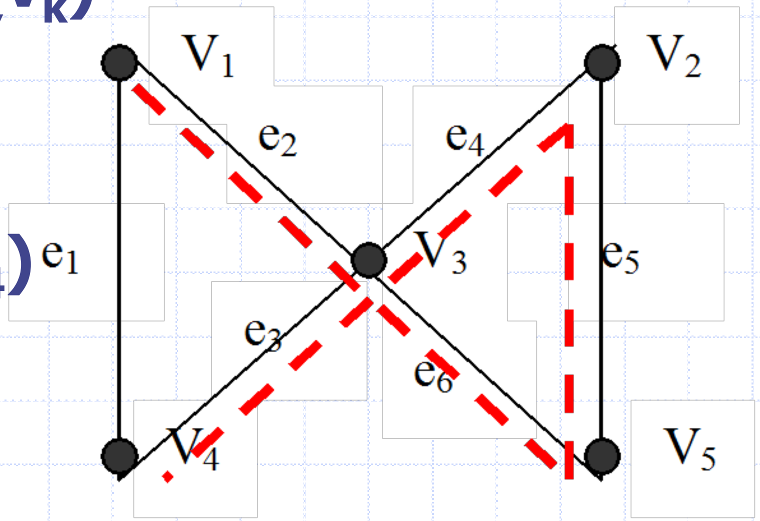
Grandinė_1

Grandine vadinamas kelias, kuriame visos briaunos yra skirtingos:

$\mu=(v_1,v_2)\ (v_2,v_3)\ (v_3,v_4)\ldots\ (v_{k-1},v_k)$

Pvz.:

$\mu=(v_1 e_2\ v_3\ e_6\ v_5\ e_5\ v_2\ e_4 v_3 e_3\ v_4)$



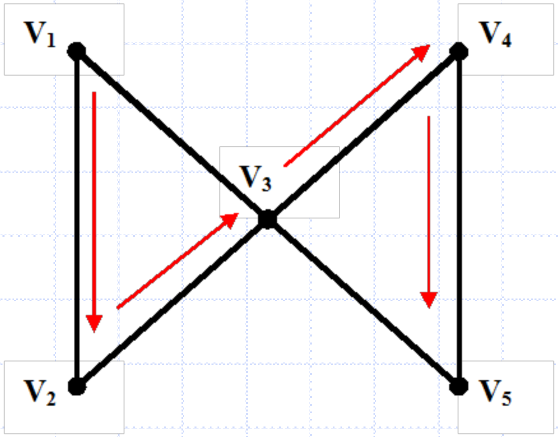
Galime užrašyti sutrumpintai

$\mu=(v_1 v_3\ v_5\ v_2\ v_3\ v_4\ )$

Grandinė_2

Paprasta grandine (***taku)*** vadinamas *kelias, kurio* visos viršūnės ir briaunos yra skirtingos: **($v_1 e_1$ v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 $e_5 v_5$)** ; **(v_1 v_2 v_3 v_4 v_5)**

Hamiltono grandinė t.y. paprasta grandinė apimanti visas grafo viršūnes



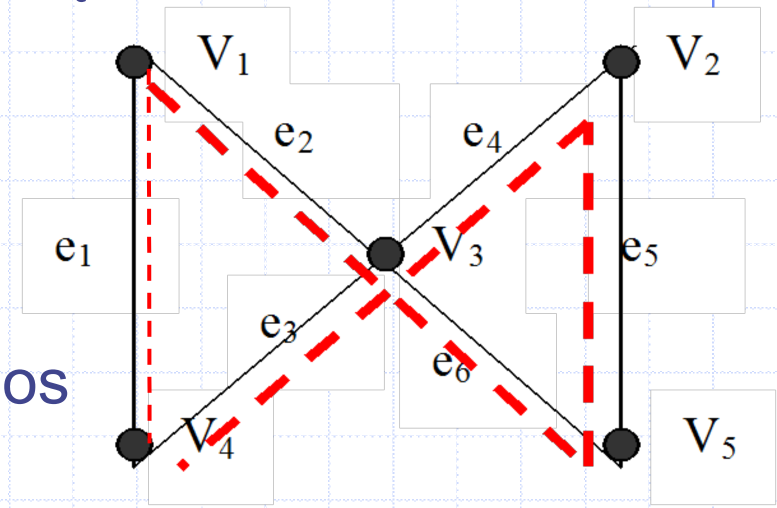
Oilerio grandinė – paprasta grandinė, apeinanti visas grafo *briaunas po vieną kartą.*

Ciklai 1

Ciklu vadinama uždara grandinė. Ciklą sudaro bent 3 viršūnės.

pvz.: ($v_1 v_3$ v_5 v_2 v_3 v_4 v_1)

Paprastu ciklu vadinama uždara paprasta grandinė (viršūnės ir briaunos yra skirtingos), pvz.: ($v_1 v_3$ v_4 v_1)



Grafas, kuris neturi ciklų, vadinamas **acikliniu.**

Ciklas 2

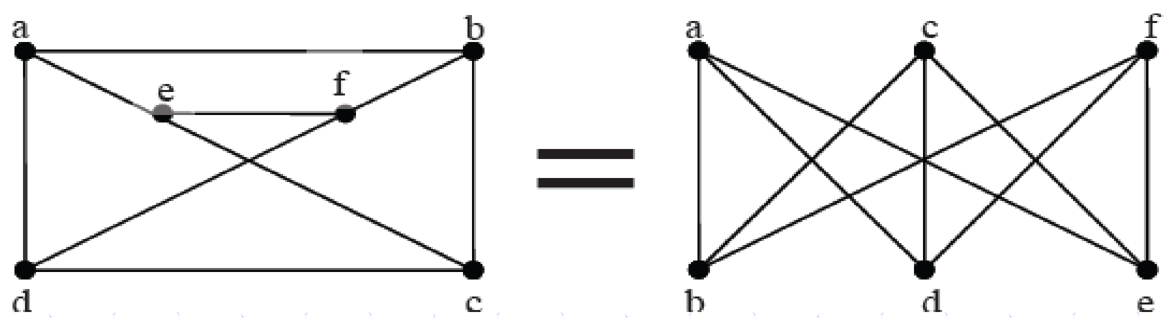
Kai grafo paprasti ciklai turi lyginį ilgį, tada ir tik tada grafas yra dvidalus

Sprendimas:

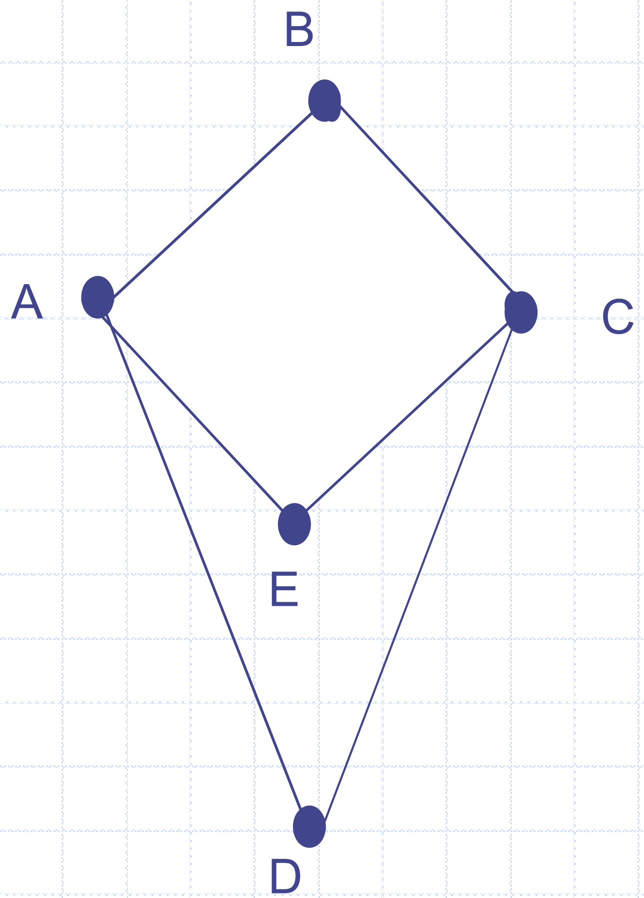
1. Mūsų grafas: $\boldsymbol{G} = (V, E)$; $\boldsymbol{V} = \{a, b, c, d, e, f\}$
2. Išsirenkame viršūnę – pvz. viršūnę a ir ją įrašome į pirmąjį poaibį: $\boldsymbol{V'} = \{a\}$
3. Visas gretimas viršūnes viršūnei a, surašome į antrąjį poaibį: $\boldsymbol{V''} = \{b, d, e\}$
4. Paskirstome, kitas viršūnes į poaibius taip, kai joms gretimos viršūnės priklausytų kitam poaibiui.
5. Gavome du viršūnių poaibius:

$$\boldsymbol{V'} = \{a, c, f\}$$
$$\boldsymbol{V''} = \{b, d, e\}$$

6. Patikriname ar tikrai kiekvienai viršūnei gretimos viršūnės yra iš kito poaibio.
7. Kadangi prieštaravimų neradome – vadinasi mūsų grafas yra dvidalis.
8. Kad aiškiau matytųsi, jog duotas grafas – dvidalis, perbraižome jį taip: aibės $\boldsymbol{V'}$ viršūnes žymime viršuje, o aibės $\boldsymbol{V''}$ – apačioje. *(Iš brėžinio dešinėje)* matome, kad tai pilnasis dvidalis grafas $\boldsymbol{K_{3,3}}$. Jis lygus pradiniam grafui G *(brėžinys kairėje)*.



Ar grafas dvidalis?

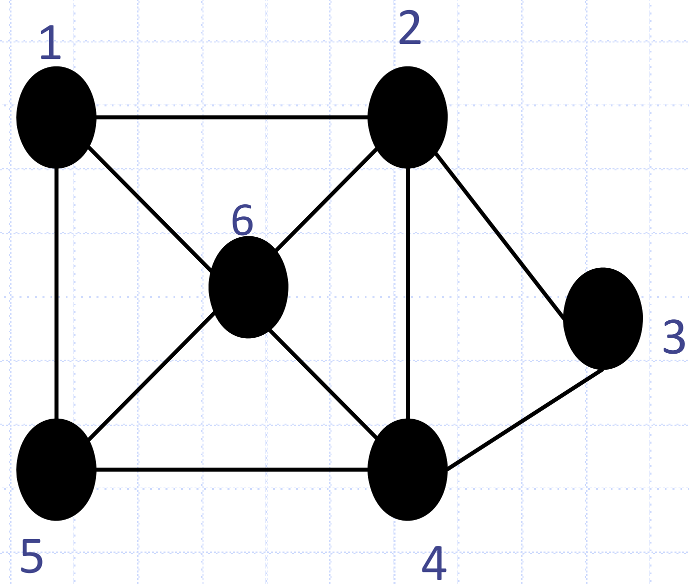


Pasirenkame viršūnę A jai gretimos viršūnea atskiriame {E, B, D} viršūnės ir likusi C viršūnė eina į kitą poaibį t.y. kitas poaibis {A,C}. Grafas yra dvidalis

Hamiltono grafas

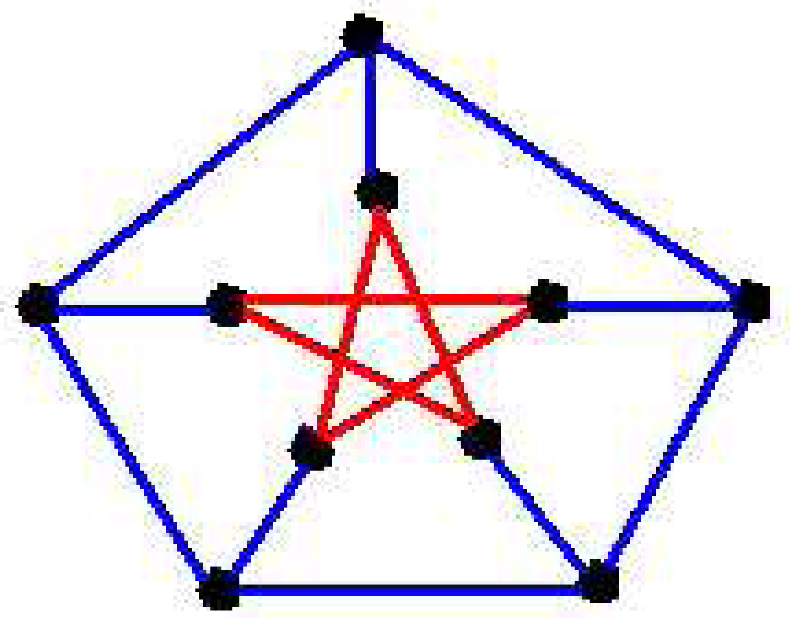
Grafas turintis Hamiltono ciklą vadinamas **Hamiltono grafu.**

- **Hamiltono ciklas** – tai paprastas ciklas apimantis visas grafo viršūnes
- Kad grafas turėtų Hamiltono ciklą viršūnių laipsnis turi $d(v_i) >= 2$



Hamiltono ciklas:
(1, 2, 3, 4, 5, 6)
(1, 2, 6, 5, 4, 3)

Petersono grafas



Petersono grafas neturi Hamiltono ciklo, bet turi Hamiltono grandinę

Oilerio (Euler`io) grafas

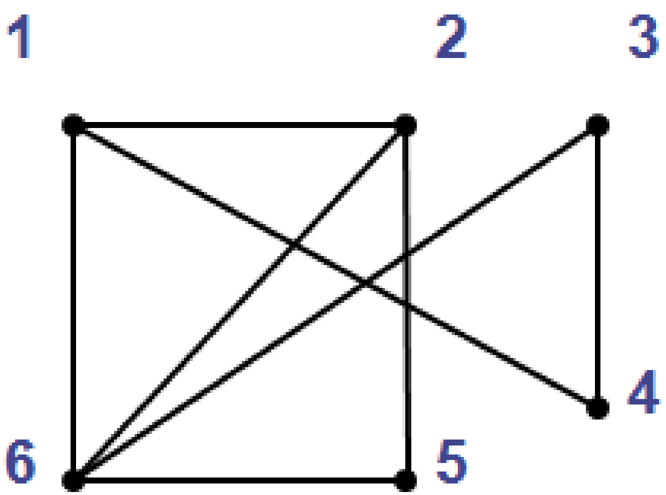
Grafas turintis Eulerio ciklą vadinamas **Oilerio grafu**

- **Oilerio ciklas** (Euler`io ciklas) - ciklas, apeinantis visas grafo briaunas po vieną kartą.

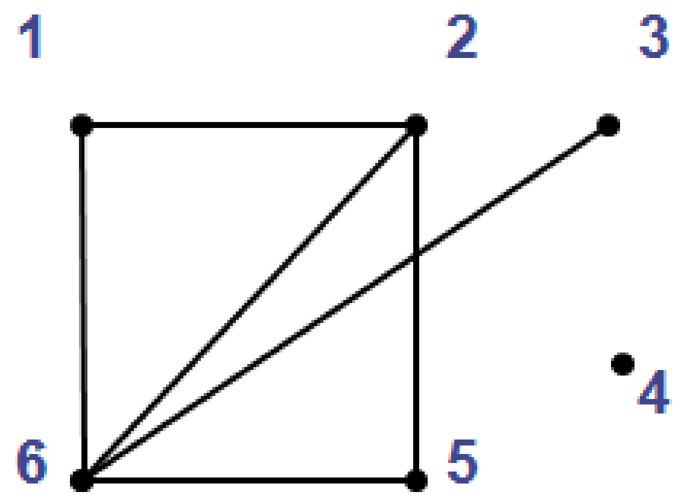
- Būtina ir pakankama sąlyga kad grafas turėtų Oilerio ciklą yra:
  1) Grafas G turi būti jungus;
  2) Visų viršūnių laipsniai turi būti lyginiai
- Jei grafas G turi tik 2 nelyginio laipsnio viršūnes, jis turi Oilerio grandinę

Dalinis grafas

Grafo G(V,E) **dalinis grafas** t.y. grafas turintis tą pačią viršūnų aibę ir dalį pradinio grafo briaunų (lankų)



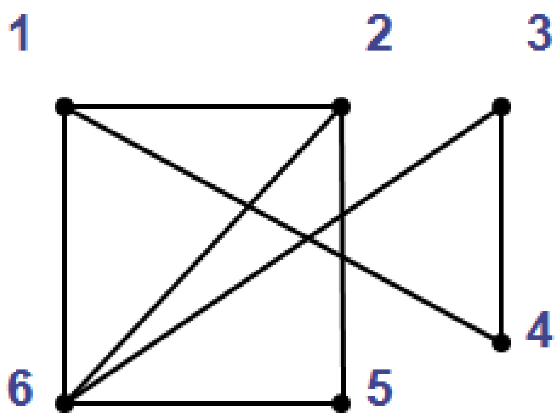
G(V,E); G(6,9)

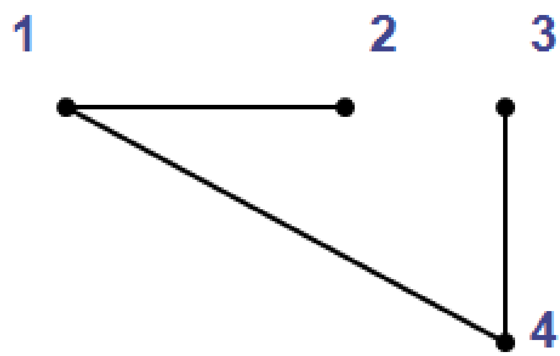


Dalinis grafas
G(V,E`) G(6,7)

Pografis

Sakykime, kad A yra grafo viršūnių aibės poaibis **A** $\subset$ **V**, tai grafas, kurį indukuoja viršūnių aibė A vadinamas šio grafo **pografiu**



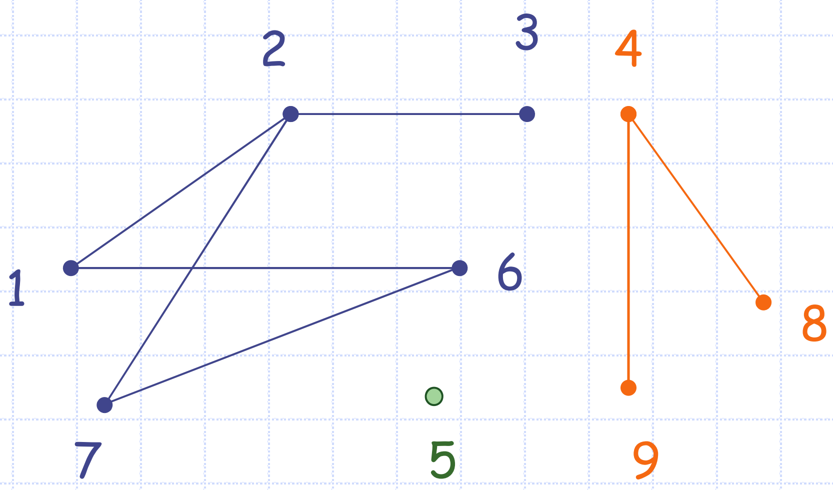


G(V,E); G(6,9)

A={1,2,3,4}
Pografis G(A,E`); G(4,3)

Koks grafas jungus? Jungumas_1

- Grafas yra jungus, jei bet kurias dvi viršūnes jungia kelias
- Grafą gali sudaryti kelios jungiosios komponentės. Kiekvienas grafas yra jo jungiųjų komponenčių sąjunga



Grafo G (n, m) jungiųjų komponenčių skaičius žymimas **k(G)**

Grafas turi 3 jungiasias komponentes:

1) pirmąją komponentę sudaro pografis, kurį indukuoja viršūnių aibė {1,2,3,6,7},

2) antrąją – {4,8,6}

3) trečiąją – {5}.

Jungumas_2

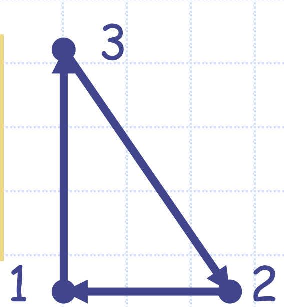
- Grafo G={V,U) **jungioji komponentė**, tai pografis, kurį indukuoja aibė sudaryta iš bet kurios grafo G viršūnės v ir visų tų viršūnių, į kurias galima keliauti iš viršūnės v.
  - Kai **grafas jungus**, jungiųjų komponenčių skaičius **k(G)=1**
  - **Grafas nejungus**, kai **k(G)≥1**
  - **Grafas pilnai nejungus**, kai jo visos viršūnės izoliuotos **k(G)=n(G)**

Jungumas_2

Orientuotas grafas gali būti:

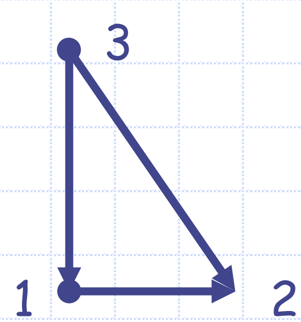
- **Stipriai jungus**, jei bet kokios dvi viršūnės pasiekiamos viena iš kitos
- **Vienkrypčiai jungus**, jei bet kokiai viršūnių porai jos pasiekiamos bent viena kryptimi
- **Silpnai jungus**, jei yra jungus neorientuotas grafas gautas lankus pakeitus briaunomis

1-2; 2-1
3-1; 1-3
2-3;3-2

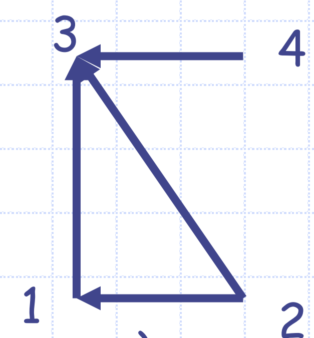


a)

1-2;
3-1
3-2



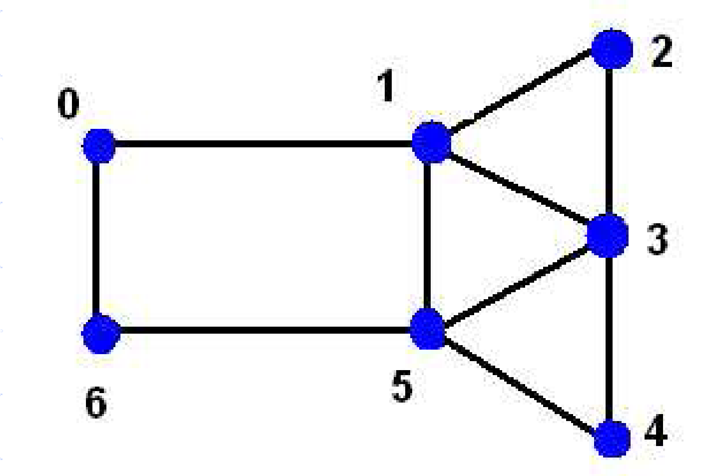
b)



c)

1-4

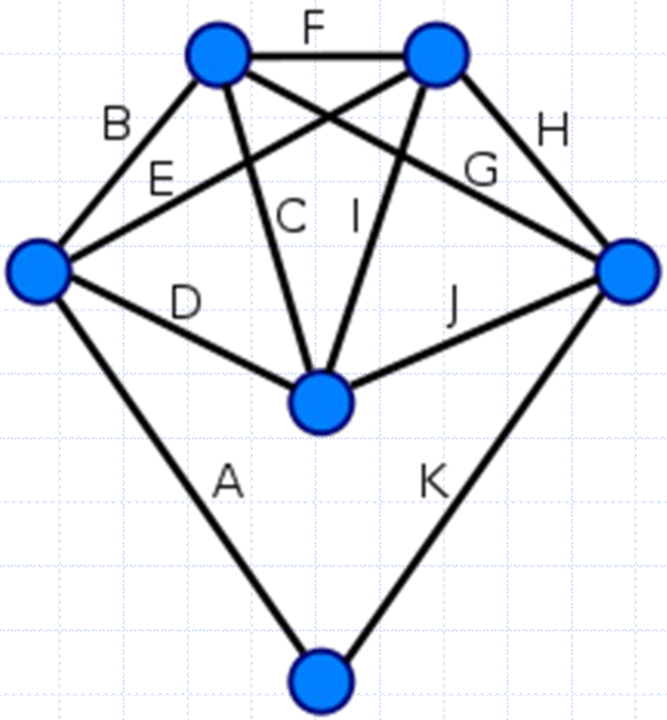
Kaip rasti Eulerio ciklą

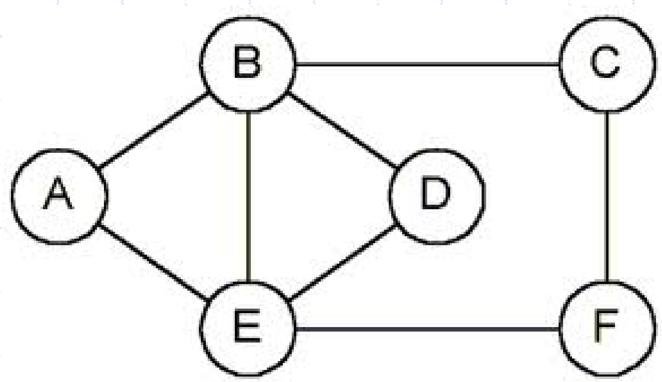


Grafas jungus, viršūnių laipsniai lyginiai

1. Pradedame nuo 3 ir apeiname ciklą (3,5,4,3).
2. Pradedame nuo 3 ir apeiname ciklą (3,2,1,3)
3. Apjungiame į vieną (3, 5, 4, 3, 2, 1, 3)
4. Pradedame nuo 1 ir apeiname ciklą (1,0,6,5,1)
5. Apjungiame į vieną (3, 5, 4, 3, 2,1, 0, 6, 5, 1, 3)

Euler`io grafo pvz.





Oilerio ciklas
(A,B); (B,C); (C,F); (F,E);
(E,D); (D,B); (B,E); (E,A)

Oilerio ciklas
A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K

Metrinės charakteristikos_1

Atstumu tarp viršūnių *u* ir *v* vadinamas trumpiausias grandinės ilgis, žymimas **d (u, v)**

- **d (u, v) ≥ 0**
- **d (u, v)= 0, kai u = v**
- **d (u, v)= d (v, u)**
- **d (u, x)+ d (x, v) ≥ d (u, v)**

Viršūnės ekscentricitetu vadinamas atstumas iki labiausiai nutolusios grafo viršūnės:

e (v) = max d (u, v)

Metrinės charakteristikos_2

Grafo spindulys – t. y. skaičius lygus mažiausiam viršūnių ekscentricitetui, apibrėžiamas formule:

$$r(G) = \min_{v \in V} e(v)$$

Grafo skersmuo –skaičius, lygus didžiausiam viršūnių ekscentricitetui, jį nusako formulė:

$$d(G) = \max_{v \in V} e(v)$$

Metrinės charakteristikos_3

Skersmens grandine - grandinė, kurios ilgis lygus skersmeniui

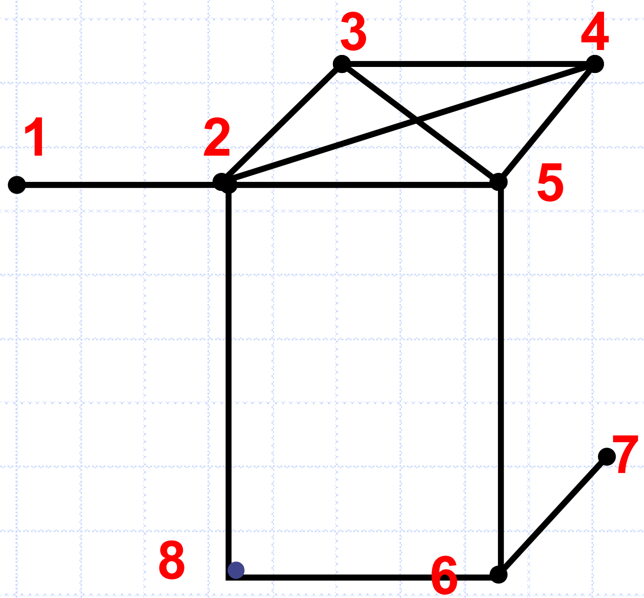
Centro viršūnės - viršūnės, kurių ekscentricitetas lygus spinduliui,

Grafo centras - aibė, kurią sudaro centro viršūnės

Periferinės viršūnės - viršūnės, kurių ekscentricitetas lygus skersmeniui

Metrinės charakteristikos_4

e(1)=max(d(1,1); d(1,2); d(1,3); d(1,4); d(1,5); d(1,6); d(1,7); d(1,8))



e_1=max (0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 2) = 4

e_2=max (1, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 1) = 3

e_3=max (2, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 2) = 3

e_4=max (2, 1, 1, 0, 1, 2, 3, 2) = 3

e_5=max (2, 1, 1, 1, 0, 1, 2, 2) = 2

e_6=max (3, 2, 2, 2, 1, 0, 1, 1) = 3

e_7=max (4, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 2) = 4

e_8=max (2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 0) = 2

Grafo skersmuo: d (G) = 4, grafo spindulys: r (G) = 2

Metrinės charakteristikos_5

Periferinės viršūnės (viršūnės, kurių ekscentricitetas lygus skersmeniui) - $\mathbf{v_1, v_7}$

Centro viršūnės **(**viršūnės, kurių ekscentricitetas lygus spinduliui) - $\mathbf{v_5, v_8}$

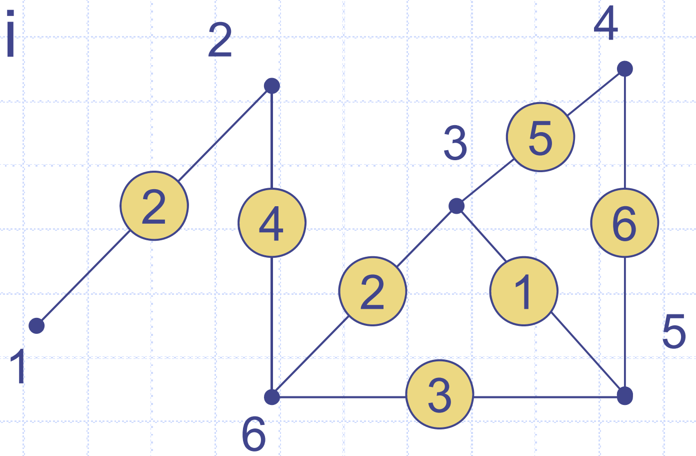
Grafo centras - aibė, kurią sudaro centro viršūnės - $\mathbf{\{v_5, v_8\}}$

Skersmens grandine - grandinė, kurios ilgis lygus skersmeniui - **(1,2,5,6,7); (1,2,8,6,7)**

Svorinis grafas_1

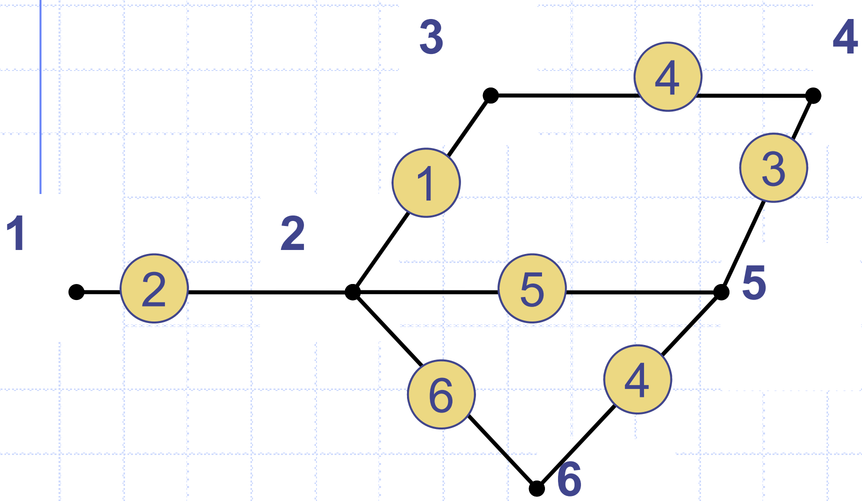
Svorinio grafo kiekvienai briaunai priskiriamas svoris

- pvz., atstumas, varža, tilto keliamoji galia



Grandinės jungiančios svorinio grafo viršūnes ilgis tai šią grandinę sudarančių <u>briaunų svorių suma</u>

Svorinis grafas_2



e_1=max (0, 2, 3, 7, 7, 8) = **8**

e_2=max (2, 0, 1, 5, 5, 6) = **6**

e_3=max (3, 1, 0, 4, 6, 7) = 7

e_4=max (7, 5, 4, 0, 3, 7) = 7

e_5=max (7, 5, 6, 3, 0, 4) = 7

e_6=max (8, 6, 7, 7, 4, 0) = **8**

d (G) = 8, *r (G)* = 6

Periferinės viršūnės - v_1, v_6; *centro viršūnė* – v_2 ;
grafo centras - {v_2 }; *skersmens grandinė* - (1,2,6);

Grafo peržiūros metodai

Grafo peržiūra tai sistemingas grafo viršūnių ir briaunų išvardijimas. Skiriami du būdai:

- ***Paieška gilyn*** – einama iki pirmos neaplankytos viršūnės
- P***aieška platyn*** – peržiūrimos visos tai viršūnei gretimos viršūnės, pradedant nuo paskutinės sąraše

Pradžioje visos viešūnės yra neaplankytos. Kiekviena viršūnė nagrinėjama vieną kartą.

Paieškos gilyn metodas

angl. Depth first search

Metodo idėja:
Pradžioje visos grafo viršūnės yra naujos (neaplankytos), tarkime, kad paieška pradedama iš viršūnės v_o , viršūnė   tampa nenauja, ir išrenkame viršūnę u, kuri yra gretima viršūnei v_o . Jei viršūnė u yra nauja, peržiūros procesą tęsiame iš viršūnės u. Tarkime, kad esame viršūnėje v jei yra nauja dar neaplankyta viršūnė u gretima viršūnei v tai nagrinėjame viršūnę u ir paiešką tęsiame iš viršūnės u. Jei nėra nė vienos naujos viršūnės gretimos viršūnei v tai sakome, kad viršūnė v išsemta. Grįžtame į viršūnę iš kurios patekome į viršūnę v ir paiešką tęsiame iš viršūnės v. Paiešką baigiame kai pradinė paieškos viršūnė   tampa išsemta.

Paieškos platyn metodas

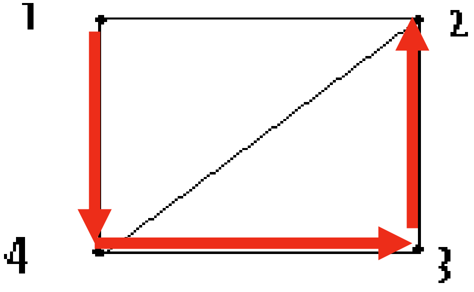
angl. Breadth first search

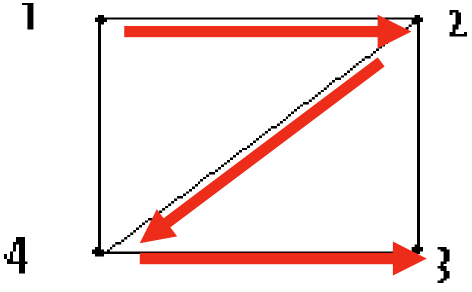
.

Metodo idėja:
Pradžioje visos grafo viršūnės yra naujos. Tarkime paiešką pradedame iš viršūnės v_o ji tampa nenauja. Toliau nagrinėjamos viršūnės gretimos viršūnei t.y. nutolusios nuo viršūnės atstumu 1, aišku jos tampa nenaujomis. Po to nagrinėjamos ir tampa nenaujomis visos naujos viršūnės gretimos anksčiau nagrinėtoms viršūnėms, t.y. viršūnės nutolusios nuo viršūnės atstumu 2. k-tajame žingsnyje nagrinėjamos ir tampa nenaujomis visos naujos viršūnės gretimos k-1 žingsnyje nagrinėtoms viršūnėms, t.y. viršūnės nutolusios nuo viršūnės atstumu k. Paieška baigiama, kai visos grafo viršūnės tampa nenaujomis

Grafo peržiūra

Kairėje lentelės pusėje pavaizduota pperžiūra platyn, dešinėje gilyn. Tarkime, kad viršūnė 1 pradinė, $v_0 = 1$



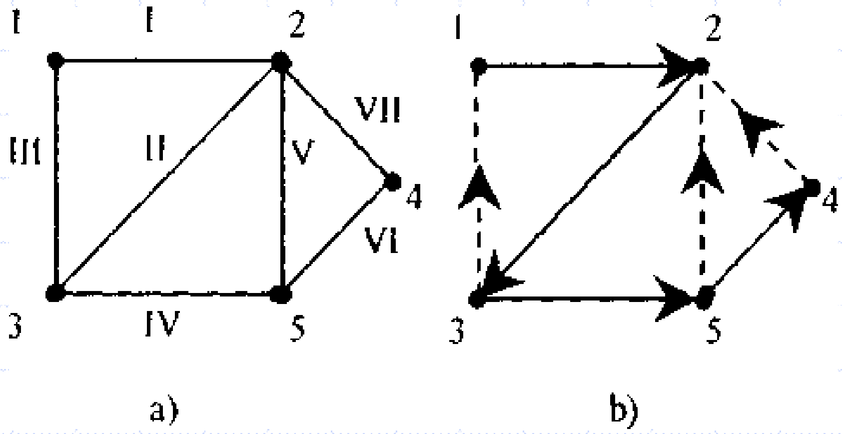


v	T	v	T
1	2, 4	1	2, 4
4	2, 3	2	4, 3
3	2	4	3
2	Ø	3	Ø

Paieška gilyn, pvz.

Pavyzdys. Panagrinėkime, kaip bus peržiūrėtos a) paveiksle pavaizduoto grafo viršūnės, jei paieška pradedama iš viršūnės v_0 = I, o bet kokiai viršūnei gretimos viršūnės gretimumo struktūroje išdėstytos jų numerių didėjimo tvarka:

1:2,3
2:1,3,4,5
3: 1,2,5
4:2,5
5:2,3,4



Viršūnių apėjimo iš 1 – osios viršūnės seka **1, 2, 3, 5, 4** (ištisinė linija)