Logikos pagrindai ir diskretinė matematika. Sąryšiai ir funkcijos

Doc. dr. Beatričė Andziulienė

Dekarto (tiesioginė) sandauga

Dekarto sandauga pavadinta prancūzų matematiko **Renė Dekarto** (1596 -1650), įvedusio koordinačių sistemą plokštumoje, vardu

Dekarto sandauga dviejų aibių **A** ir **B** yra aibė porų arba dvejetų **(a, b),** kuriuose **a** yra bet kuris aibės **A** elementas, **b** yra bet kuris aibės **B** elementas.

Žymima **A x B**

$$A \times B := \left\{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \right\}$$

Dekarto sandaugos savybės

Duota: $A = \{ a, b \}$, $B = \{ x, y, z \}$

$A \times B = \{ (a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z) \}$.

$B \times A = \{ (x, a), (y, a), (z, a), (x, b), (y, b), (z, b) \}$

- nėra komutatyvi : **$A \times B \neq B \times A$**
- nėra asociatyvi : **$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$**
- yra distributyvi

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (B \cap C) \times (B \cap D)$$

Aibės laipsnis

Dekarto sandaugą galima apibendrinti didesniam aibių skaičiui.

- <u>Aibės laipsnis</u> **–** t.y. aibės sandauga iš jos pačios

$$A^n = A \times A \times A \times \ldots \times A$$

$$A^1 = A \qquad A^2 = A \times A \qquad A^n = A \times A^{n-1}$$

- **A** × **A** vadinama **<u>Dekarto kvadratu</u>** , ji taip pat žymima **A^2.**

Aibės laipsnio apskaičiavimas

Dviejų aibių Dekarto sandaugos galia lygi tų aibių galių sandaugai:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A^n| = |A|^n$$

Pvz.: Duota: A = { 4,5,7 }, tai galia |A| = 3

Dekarto kvadrato $A \times A = A^2$ galia:

$|A^2| = |A|^2 = 3^2 = 9$

Sąryšiai

Sąryšis – atitiktis, ryšis, priklausomybė. Jis gali sieti du arba kelis tos pačios aibės ar skirtingų aibių elementus.

- **aibės elementų sąryšis** – sieja du arba kelis tos pačios aibės elementus.
- **sąryšis tarp aibių** – sieja skirtingų aibių elementus.
- ***n–naris* sąryšis** – sąryšis siejantis tris ir daugiau (n) elementus
- ***Binarinis* sąryšis** – sąryšis siejantis du elementus

Sąryšiu R tarp aibių $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ ... elementų vadinamas bet kuris tų aibių Dekarto sandaugos poaibis:

$\mathbf{R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}$

Trinariniai ir n-nariai sąryšiai

A x B x C={(a_i, b_j, c_k)}

Pastebėsime, kad negalioja komutatyvumo dėsnis (1,2,3)≠(3,2,1)

Du sąryšiai (a, b, c)=(d, e, f) bus lygūs

tada ir tik tada, kai a=d, b=e, c=f.

N=nariam sąryšiui apibendrintai galime užrašyti taip:

(a_1, ..., a_n)=(b_1, ... , b_n)

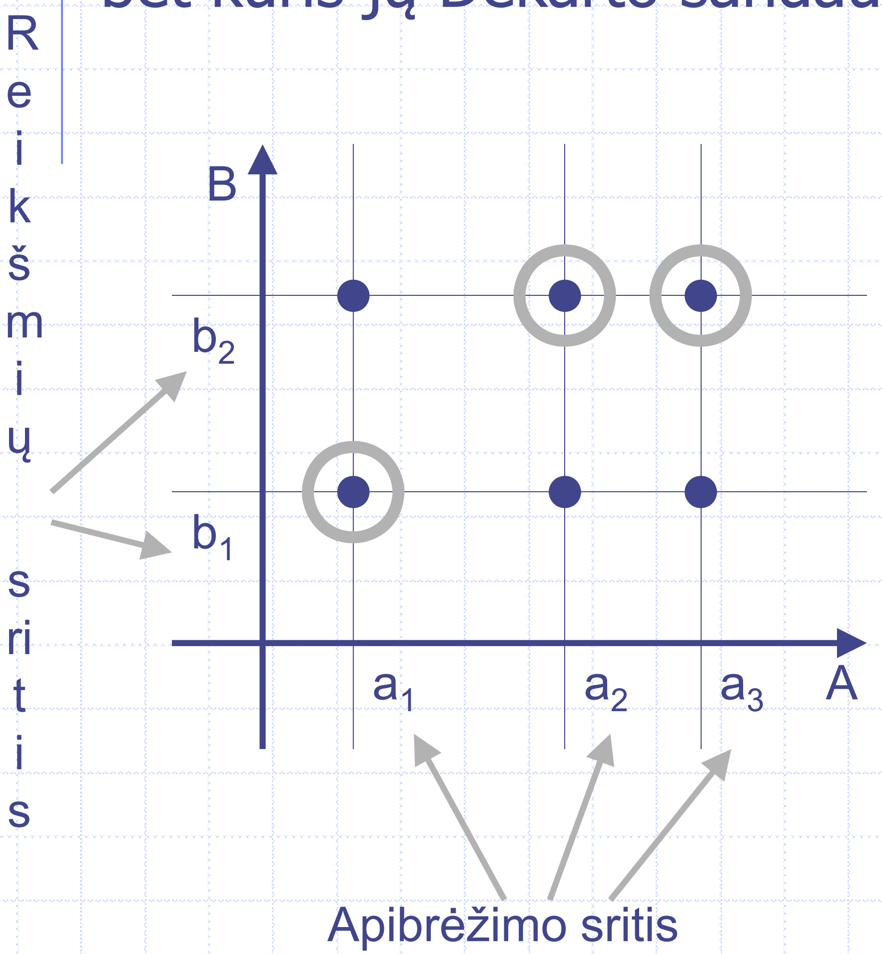
tada ir tik tada, kai a_i=b_i, ∀=1...n

n–naris sąryšis:

$$R \subset A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$$

Binariniai sąryšiai

Binariniu sąryšiu R tarp aibių A ir B elementų vadinamas bet kuris jų Dekarto sandaugos poaibis: $R \subset A \times B$



$\{(a_1, b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_2)\}$

Sąryšio $R \subset A \times B$ ***apibrėžimo sritis***

$D(R) = \{x: \ \exists\, y \ \ (x, y) \in R\} \subset A$

Sąryšio $R \subset A \times B$ ***reikšmių sritis***

$E(R) = \{y: \ \exists\, x \ \ (x, y) \in R\} \subset B$

Binariniai sąryšiai: pvz.

- Pvz.:
- *Dalumo sąryšis* – natūrinių skaičių dalumas – **n\m;** simbolis **** yra dalumo sąryšio ženklas. Natūrinis skaičius **n** dalijasi iš natūrinio skaičiaus **m**, kai galima rasti tokį natūrinį skaičių **k**, su kuriuo teisinga lygybė **m = n k**. Taigi šiuo sąryšiu susietos skaičių poros **(nk, n)**.

- *Sąryšis "mažiau*" natūrinių skaičių aibėje. **n < m** simbolis **<** - sąryšio "mažiau" ženklas. Natūrinis skaičius **n** mažesnis už natūrinį skaičių **m**, kai yra toks natūrinis skaičius **k**, su kuriuo teisinga lygybė **m= n+k**.

- Tiesių *statmenumo sąryšis*. Tiesė a statmena tiesei b, jei jų susikirtimo kampas yra statusis.

Binariniai sąryšiai: pvz.

Pvz.:

1. Duota: $A = \{ 1, 2, 3 \}$, tai

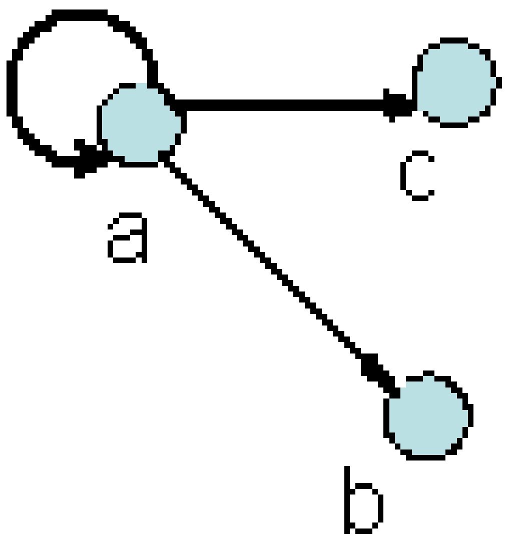
$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

2. Duota: $(a,b) \subset \{ (n, n+k) \mid n \in N, k \in N \}$, tai $a < b$

Binarinių sąryšių atvaizdavimas

Binariniai sąryšiai gali būti pavaizduoti grafais arba matricomis.

Pvz., turime aibę A={a,b,c} ir sąryšį **R={(a,a), (a,b), (a,c)}**



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Binarinių sąryšių vaizdavimas

Matrica $M_R = || m_{ij} ||_{n \times m}$ su elementais

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & kai \quad (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & kai \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

vadinama ***binariojo sąryšio*** $R \subset A \times B$ ***matrica.***

Čia $n = | A |$, $m = | B |$.

Pavyzdys. Aibėje A={b, v, r, e} apibrėžtas sąryšis

U = {(b, b), (b, v), (b, r), (v, e), (r, b), (r, v), (r, r), (r, e), (e, v), (e, e)}.

Sudaryti šio sąryšio matricą.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} b & v & r & e \end{array} \\
\begin{array}{c} b \\ v \\ r \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(b, b) (b, v) (b, r)

(v, e)

(r, b) (r, v) (r, r) (r, e)

(e, v) (e, e)

Kitų elementų nėra, todėl atitinkamas pozicijas užpildome nuliais

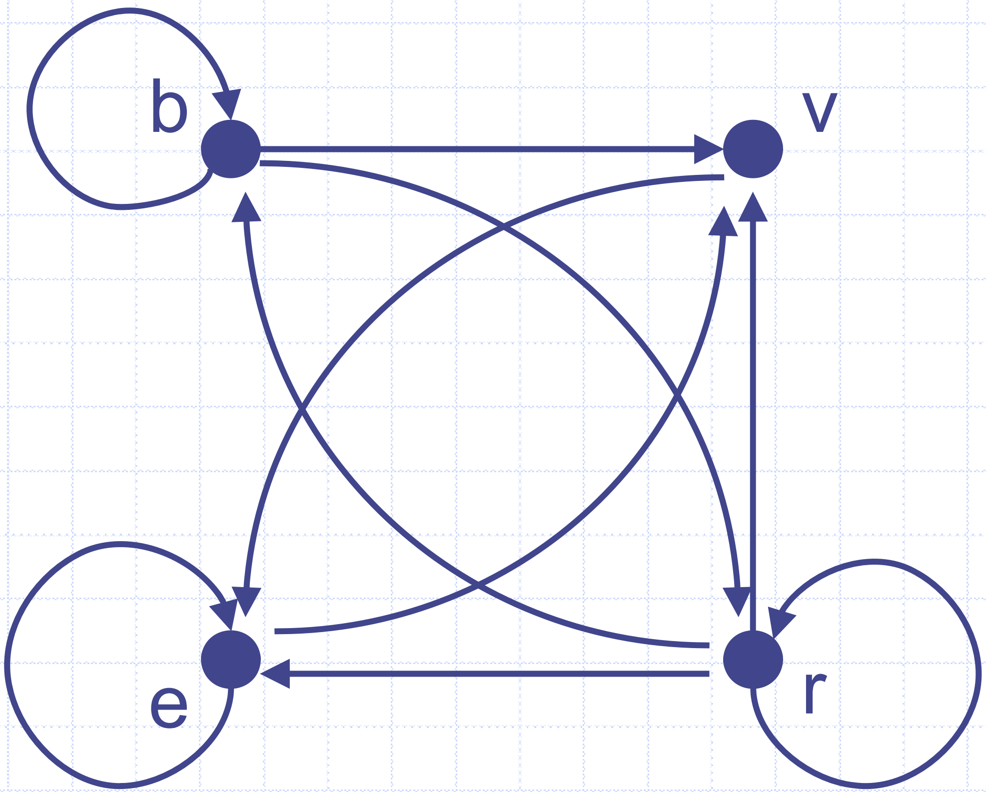
Pavyzdys. Aibėje A= {b, v, r, e} apibrėžtas sąryšis

U = {(b, b), (b, v), (b, r), (v, e), (r, b), (r, v), (r, r), (r, e), (e, v), (e, e)}.

Pavaizduoti sąryšį grafu

1. Pradedame nuo viršūnių

2. Žymime ryšius tarp viršūnių:



(b, b), (b, v), (b, r)

(v, e)

(r, b), (r, v), (r, r), (r, e)

(e, v), (e, e)

Sąryšių tipai. Atvirkštinis sąryšis

Tegu R būna sąryšis iš A į B $\mathbf{R \subseteq A \times B}$, tada **atvirkštinis sąryšis** $\mathbf{R^{-1} \subseteq B \times A}$ apibrėžiamas taip:

$$R^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in R \}$$

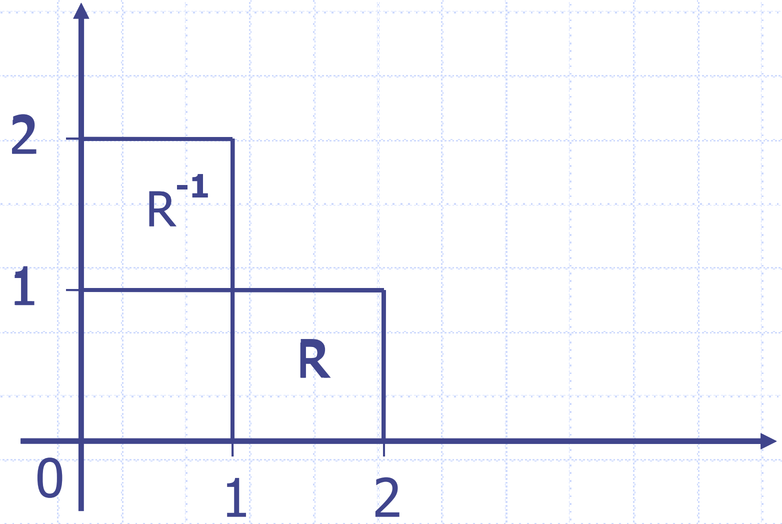
Pvz.: 1) $A = \{1,2\}$; $B = \{4,5\}$

$R = \{ (1,4), (1,5), (2,4), (2,5) \}$

$R^{-1} = \{ (4,1), (4,2), (5,1), (5,2) \}$

2) $R \in [0, 2] \times [0, 1]$

$R^{-1} \in [0, 1] \times [0, 2]$



Sąryšių tipai. Ypatingieji sąryšiai

Tapatusis sąryšis

Turime sąryšį $R \subseteq A \times A$. *Tapatus sąryšis* žymimas $\mathbf{I_A}$

$\mathbf{I_A = \{ (a, a): a \in A \}}$ - porą sudaro vienodi elementai.

Pvz., turime aibę $A = \{ 1, 2, 3 \}$, tai

$\mathbf{I_A} = \{ (1,1), (2,2), (3, 3) \}$. $\mathbf{I_A} = \{ (2,2), (3, 3) \}$.

- "$\leq$" santykis taip pat yra tapatus, nes $(x,x) \in R$.
- "$<$" santykis niekada nebus tapatus, nes niekada x nebus mažiau už x, t.y. $(x,x) \notin R$

Sąryšių tipai. Ypatingieji sąryšiai

<u>Universalusis sąryšis</u>

Turime sąryšį $R \subseteq AxA$. *Universalus sąryšis žymimas* U_A

U = {(a, b)| a∈A, b∈A } - poros elementus visi aibės elementai.

Pvz., turime aibę A = { 1, 2, 3 }, tai universalus sąryšis bus :

U_A = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (3,3) }.

Sąryšių tipai. Sąryšio papildymas

Į **sąryšio papildymą** (nagrinėjame universalaus sąryšio atžvilgiu) įeina visos Dekarto sandaugos poros, kurios neįeina į sąryšį R:

$$\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$$

Pvz.: A = {1, 2, 3}

$R \subseteq$ A×A = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2),(3,3) } - universalusis sąryšis

R = {(1,3), (2,1), (2,3)}

$\overline{R}$ = {(1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)}

Binarinių sąryšių savybės

Sąryšių savybės (1)

Refleksyvus sąryšis

Sąryšis R aibėje A yra vadinamas **refleksyviu**, jei **kiekvienas** aibės A elementas a yra surištas su pačiu savimi, t.y. jei kiekvienam aibės A elementui $\mathbf{(a,a)}\in\mathbf{R}$. Šis sąryšis yra tapatus $\mathbf{I}\subset\mathbf{R}$, nes porą sudaro vienodi elementai

Pavyzdžiai,

✓ Lygybės sąryšis yra refleksyvus, nes kiekvienam a, a=a.
Turime aibę A={ 1, 2, 3 } tai lygybės sąryšis:

A x A= { (1,1), (2,2), (3, 3) }.

✓ panašumo sąryšis: kiekvienas panašus pats į save

Sąryšių savybės (2)

Nerefleksyvus (antirefleksyvus) sąryšis – tai sąryšis, kur visi **A** aibės <u>ne</u> **a** elementai atspindimi į **a** elementus.

$$(a,a) \notin R$$

Nerefleksyviame sąryšyje nėra tapačių porų, todėl

$$\dot{I} \cap \dot{R} = \varnothing$$

Pvz.: Turime sąryšius aibėje A = { 1, 2, 3 }

R = { (1,2), (1,3), (2,3), (3,2)} –nerefleksyvus

I = { (2, 2), (3, 3), (1,1)}- tapatus; $\dot{I} \cap \dot{R} = \varnothing$

- ✓ sąryšis “daugiau”, “mažiau” yra nerefleksyvūs
- ✓ Tiesių statmenumas yra nerefleksyvus sąryšis

Sąryšių savybės (3)

Simetrinis sąryšis

Aibės A elementų sąryšis R vadinamas **simetriniu**, jei aibės A elementų porą (a,b), susietą sąryšiu R, atitinka pora (b,a), taip pat susieta tuo pačiu sąryšiu:

$$(a,b)\in R \rightarrow (b,a)\in R$$

$$R = R^{-1}$$

Pavyzdžiai,

- Žmogus p yra susijęs su žmogumi q, jei jie yra susiję šeimyniniais santykiais, pvz., Jonas yra Anos vyras, tai Ana yra Jono žmona;
- turim aibę A={1, 2, 3}, tai simetrinis sąryšis: R={(1,2), (2, 1), (2,3), (3, 2), (2,2)};
- lygybė taip pat yra simetrinis sąryšis.
- Panašumo sąryšis yra simetrinis

Sąryšių savybės (4)

Antisimetrinis sąryšis

Aibės A elementų sąryšis R vadinamas **antisimetriniu**, jei kiekvienai R sąryšio porai $(a, b) \in R$, atvirkštinė pora (b, a) nepriklauso sąryšiui $(b, a) \notin R$, kai $\mathbf{a \neq b}$.

Tikriname pagal sankirtos rezultatą: $\mathbf{R \cap R^{-1} \subset I}$

Pavyzdžiai,

- $R = \{ (1,2), (1,3), (2,3), (2,2), (1,1)\}$
- $R^{-1} = \{ (2,1), (3,1), (3,2), (2,2), (1,1)\}$; $\mathbf{R \cap R^{-1} =} \{(2,2), (1,1)\}$
- Sąryšis "$\leq$" yra antisimetrinis;
- Antisimetrinis sąryšis nereiškia simetrinio sąryšio neigimo.
- palyginimas yra antisimetrinis sąryšis, nes jis yra teisingas tik vieninteliu atveju, kai a=b.

Sąryšių savybės (5)

Asimetrinis sąryšis

Aibės A elementų sąryšis R vadinamas **asimetriniu**, jei $(a,b) \in R$, tai $(b,a) \notin R$ ir $(a,a) \notin R$.

Tikriname: $R \cap R^{-1} = \varnothing$

Asimetrinis sąryšis t.y. sąryšis , kuris neturi tapačių porų

Pvz.:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$R = \{ (1,2), (1,3), (2,3) \}$

$R^{-1} = \{ (2,1), (3,1), (3,2)\}$ $\quad R \cap R^{-1} = \varnothing$

Sąryšių savybės (6)

Tranzityvus sąryšis

Aibės A elementų sąryšis vadinamas **tranzityviu,** jei elementams a ir b bei b ir c esant susietiems tuo sąryšiu, susieti ir elementai a ir c, t.y.

$$\forall (a,b) \in R \text{ ir } (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

Pavyzdžiai,

✓Sąryšiai =, <, >, ≤, ≥, ⊂ yra tranzityvūs;

✓ Tarkim turime aibę A = { 1, 2, 3 }, tai sąryšis “<“ yra

R = {(1, 2),(2, 3), (1, 3)} - šis sąryšis yra tranzityvus

✓ Panašumo sąryšis yra tranzityvus

Sąryšių savybės (7)

Ekvivalentumo sąryšis – tai aibės **A** elementų sąryšis $\mathbf{A^2}$, kuris yra *refleksyvus, simetrinis, tranzityvus*. Žymimas: $\equiv$

$$aRa$$

$$aRb \Rightarrow bRa$$

$$aRb \text{ ir } bRc \Rightarrow aRc$$

Pvz.:

- ✓ Lygybė yra ekvivalentus sąryšis
- ✓ Panašumas pvz.,trikampių, žmonių ir pan.
- ✓ Tiesių lygiagretumas

Tiesių statmenumas, sąryšis "mažiau" skaičių aibėse nėra ekvivalentiniai sąryšiai.

Sąryšių savybės (8)

Jeigu aibėje **M** apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis ≡, kur **x**∈ **M**, tai visuma aibės **M** elementų, kurie susieti su **x** ekvivalentumo sąryšiu vadiname **ekvivalentumo klase.**

$$K_x = [x]_{\equiv} := \{y \mid y \in M \text{ ir } y \equiv x\}$$

Sąryšių klasifikavimas.Tvarkos sąryšiai

Sąryšio savybės	Sąryšio pavadinimas
antisimetrinis ir tranzityvusis	tvarkos sąryšis
refleksyvusis	negriežtosios tvarkos
antirefleksyvusis	griežtosios tvarkos
pilnasis	visiškosios (pilnosios) tvarkos
nėra pilnasis	dalinės tvarkos

Sąryšis

$\{(v, x), (z, x), (f, v), (f, z), (f, x), (f, u), (u, z), (u, x)\}$

______________ tvarkos sąryšis.

① yra dalinės;
② yra griežtosios dalinės;
③ nėra;
④ yra negriežtosios visiškosios;
⑤ yra visiškosios;
⑥ yra negriežtosios dalinės;
⑦ yra griežtosios visiškosios.

1 būdas

1. Sąryšis apibrėžtas aibėje {v, z, f, x, u}. Tikriname, ar jis yra **tvarkos sąryšis**, t.y. ar jis antisimetrinis ir tranzityvus:

a) tikriname ar antisimetrinis:

yra (v, x), o (x, v) nėra;

yra (z, x), o (x, z) nėra;

yra (f, v), o (v, f) nėra;

yra (f, z), o (z, f) nėra ....

patikriname visas poras ir įsitikiname, kad sąryšis ***yra antisimetrinis***

Sąryšis
$\{(v,x),(z,x),(f,v),(f,z),(f,x),(f,u),(u,z),(u,x)\}$
________ tvarkos sąryšis.

① yra dalinės;
② yra griežtosios dalinės;
③ nėra;
④ yra negriežtosios visiškosios;
⑤ yra visiškosios;
⑥ yra negriežtosios dalinės;
⑦ yra griežtosios visiškosios.

b) <u>tikriname ar tranzityvusis</u>:

sąryšis yra tranzityvusis, t.y. jis yra tvarkos sąryšis

pirmoji pora (v, x), bet nėra nei vienos, kuri prasidėtų x;

taip pat patikriname (z, x), (f, x) ir (u, x);

tikriname (f, v): yra viena pora, kuri prasideda v: (v, x). Sąryšiui priklauso (f, x);

tikriname (f, z): yra viena pora, kuri prasideda z: (z, x). Sąryšiui priklauso (f, x);

tikriname (f, u): yra dvi poros, kurios prasideda u: (u, z) ir (u, x).

Sąryšiui priklauso (f, z) ir (f, x);

tikriname (u, z): yra viena pora, kuri prasideda z: (z, x). Sąryšiui priklauso (u, x);

Sąryšis
$\{(v,x),(z,x),(f,v),(f,z),(f,x),(f,u),(u,z),(u,x)\}$
__________ tvarkos sąryšis.

1. yra dalinės;
2. yra griežtosios dalinės;
3. nėra;
4. yra negriežtosios visiškosios;
5. yra visiškosios;
6. yra negriežtosios dalinės;
7. yra griežtosios visiškosios.

2. **Nustatome tvarkos tipą**. Tikriname, ar sąryšis refleksyvusis, ar antirefleksyvusis

Kadangi sąryšis apibrėžtas aibėje {v, z, f, x, u}, tai ieškome porų

(v, v), (z, z), (f, f), (x, x), (u, u)

nėra nei vienos tokios poros, taigi sąryšis yra antirefleksyvusis ir tvarka yra griežtoji

griežtosios tvarkos sąryšis

Sąryšis
$\{(v,x),(z,x),(f,v),(f,z),(f,x),(f,u),(u,z),(u,x)\}$
__________ tvarkos sąryšis.

① yra dalinės;
② yra griežtosios dalinės;
③ nėra;
④ yra negriežtosios visiškosios;
⑤ yra visiškosios;
⑥ yra negriežtosios dalinės;
⑦ yra griežtosios visiškosios.

3. Tikriname, ar sąryšis yra pilnasis

sąryšis apibrėžtas 5 elementų aibėje {v, z, f, x, u},

tada pilnasis sąryšis turėtų turėti (5*4)/2 = 10 porų. Sąryšyje jų yra 8 -

trūksta (v, z) arba (z, v),

o taip pat (v, u) arba (u, v)

Sąryšis nėra pilnasis

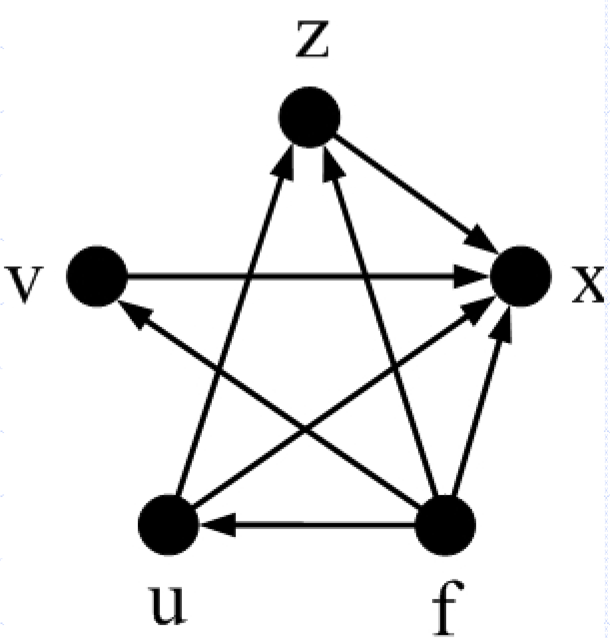
dalinės griežtosios tvarkos sąryšis

Sąryšis
$\{(v,x),(z,x),(f,v),(f,z),(f,x),(f,u),(u,z),(u,x)\}$
__________ tvarkos sąryšis.

① yra dalinės;
② yra griežtosios dalinės;
③ nėra;
④ yra negriežtosios visiškosios;
⑤ yra visiškosios;
⑥ yra negriežtosios dalinės;
⑦ yra griežtosios visiškosios.

2būdas.

Darome brėžinį ir tiriame jį:

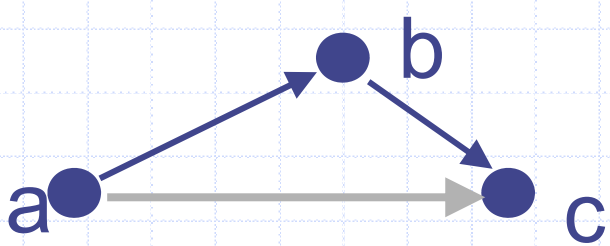


sąryšis apibrėžtas aibėje {v, z, f, x, u}, t.y. turi 5 viršūnes

kilpų nėra, t.y. sąryšis antirefleksyvusis;

visi sujungimai yra “viengubi”, t.y. sąryšis antisimetrinis;

yra ne visi sujungimai, t.y. sąryšis nėra pilnasis



sąryšis yra tranzityvusis, taigi jis yra ***dalinės griežtosios tvarkos sąryšis***

Sąryšis
$\{(v,x),(z,x),(f,v),(f,z),(f,x),(f,u),(u,z),(u,x)\}$
__________ tvarkos sąryšis.

① yra dalinės;
② yra griežtosios dalinės;
③ nėra;
④ yra negriežtosios visiškosios;
⑤ yra visiškosios;
⑥ yra negriežtosios dalinės;
⑦ yra griežtosios visiškosios.

3būdas.

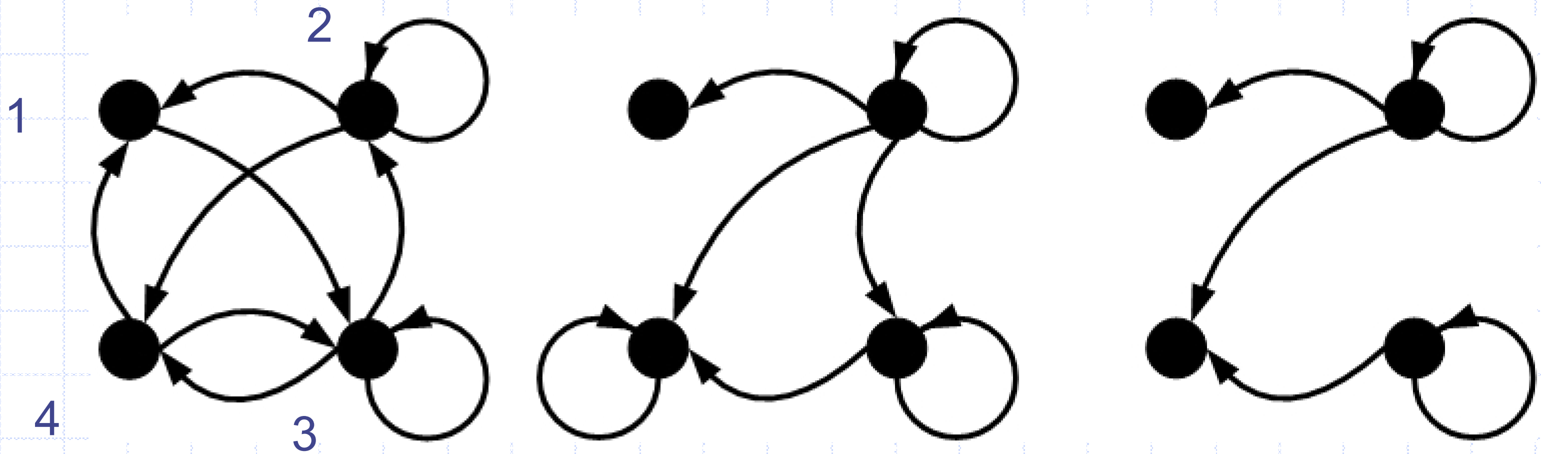
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sudarome sąryšio matricą ir tiriame ją (sąryšis apibrėžtas aibėje {v, z, f, x, u})

sąryšis yra antisisimetrinis, antirefleksyvusis, tranzityvusis ir nėra pilnasis taigi jis yra ***dalinės griežtosios tvarkos sąryšis***

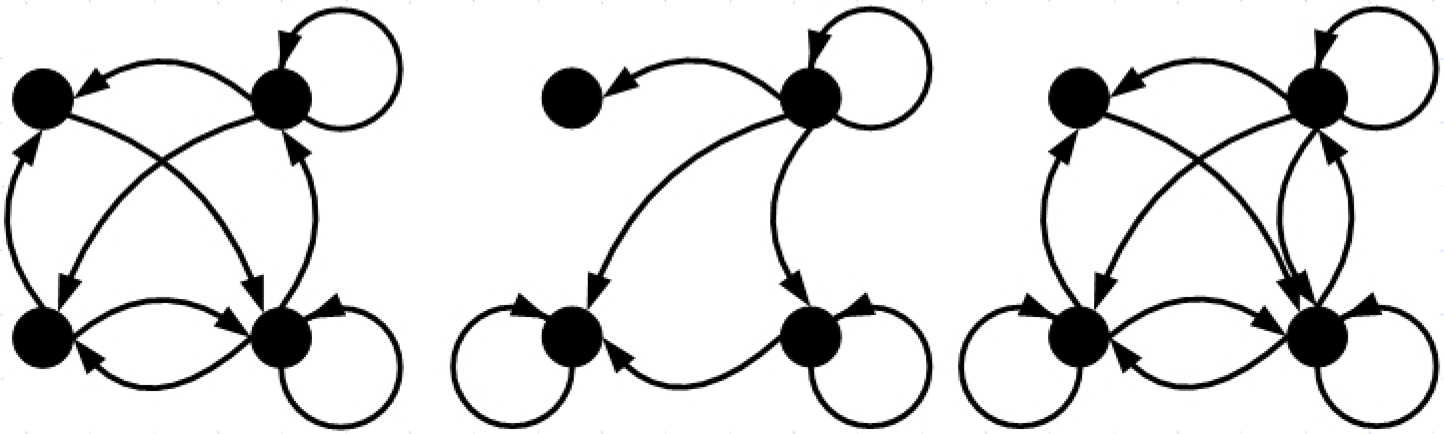
Operacijos su sąryšiais

Sankirta



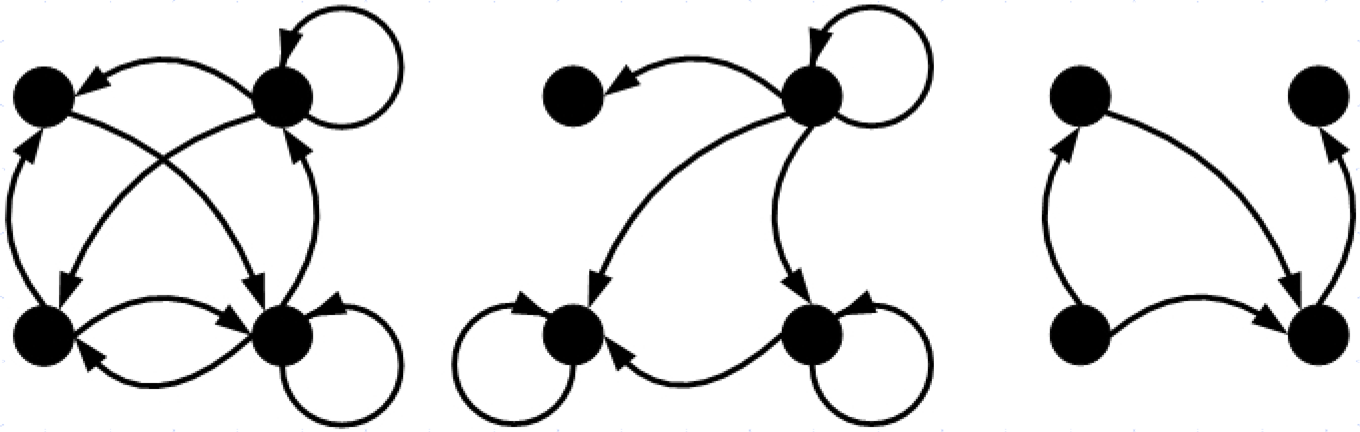
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sąjunga



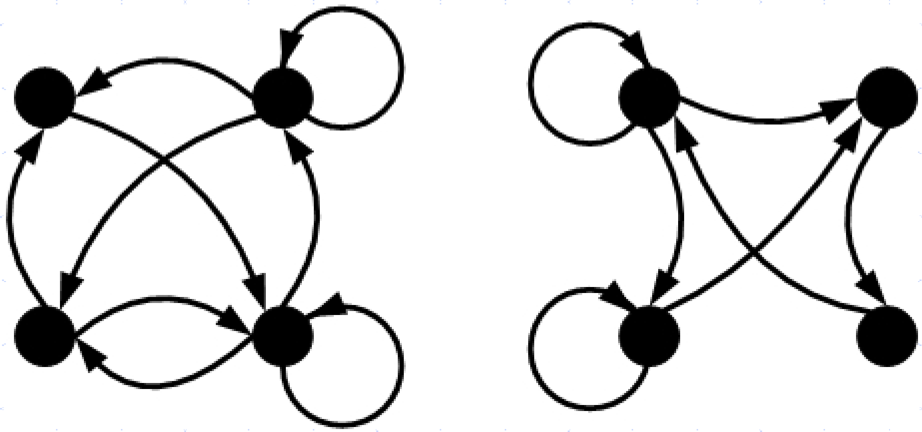
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skirtumas



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Papildinys



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sąryšių kompozicija

Sakykime, turime tris aibes A, B ir C, ir sąryšius $R_1 \subset A \times B$ ir $R_2 \subset B \times C$. Tai tuomet sąryšis $R \subset A \times C$ yra vadinamas ***sąryšių kompozicija*** ir žymimas

$$R = R_1 \circ R_2 = \{ (a, c) \mid a \in A \text{ ir } c \in C, \exists\, b \in B \ (a,b) \in R_1 \text{ ir } (b,c) \in R_2 \}.$$

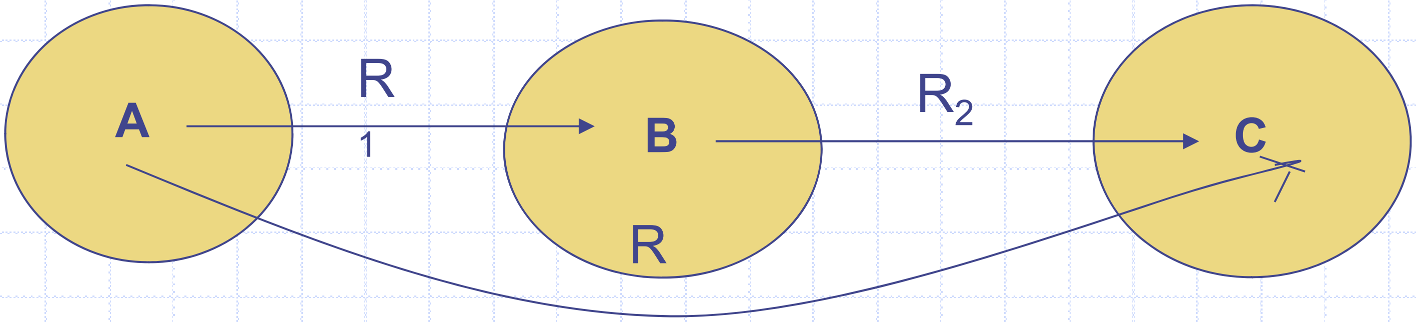
Pvz., turime aibes A = { 1, 2 }, B = { 2, 4 } ir C = { 7, 8 }, tai

R_1 = { (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)},

R_2 = { (2,7), (2, 8), (4,7),(4,8)},

tai sąryšių kompozicija

$R = R_1 \circ R_2$ = {(1,7),(1,8),(2,7),(2,8)}

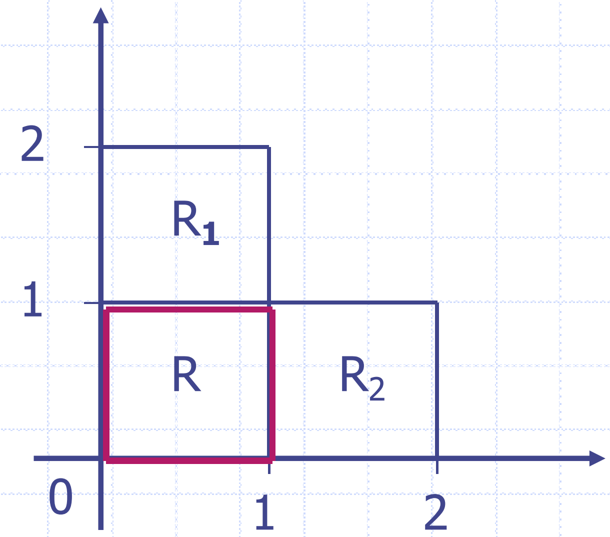


Sąryšių kompozicija:pvz.

$R_1 = [0, 1] \times [0, 2]$

$R_2 = [0, 2] \times [0, 1]$

$R = R_1 \circ R_2 = [0, 1] \times [0, 1]$

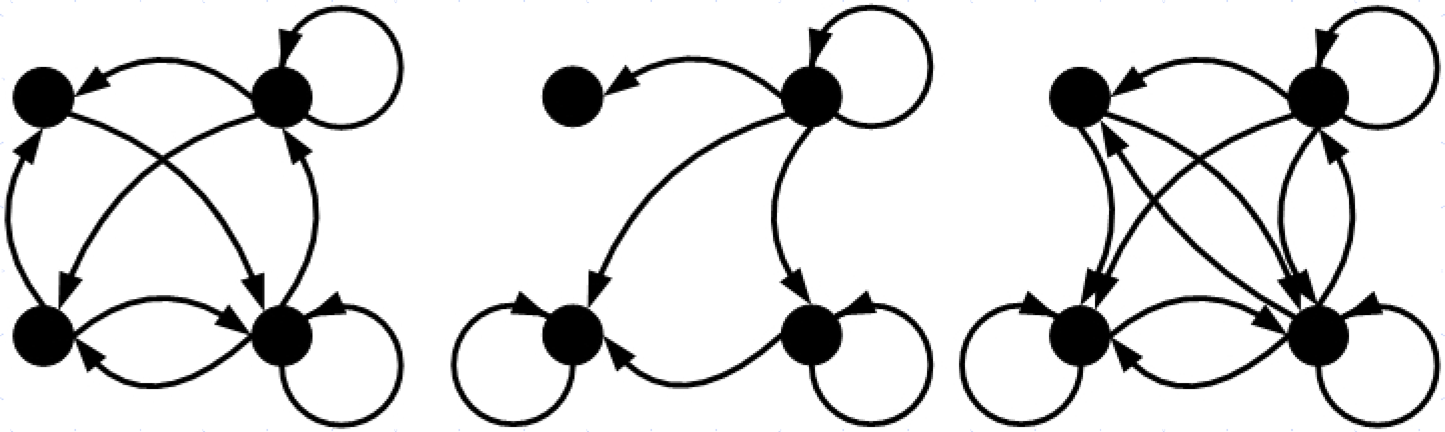


Sąryšiams galioja *asociatyvumo dėsnis*:

$$\mathbf{R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3}$$

Kompozicija (sąryšiai R ir T apibrėžti aibėje A)

$$R \circ T = \{(a, b) \;:\; \exists\, c \in A \quad (a, c) \in R \quad \& \quad (c, b) \in T\}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sąryšio laipsnis, sąryšio branduolys

Sąryšio R laipsnis aibėje A - kompozicija su pačiu savimi:

$$\mathbf{R \circ R \circ \ldots \circ R = R^n}$$

Sakykime turime dvi aibes A ir B ir sąryšį R, tai **<u>sąryšio</u>** ***<u>branduolys</u>*** yra sąryšio ir atvirkštinio sąryšio kompozicija –

$$\mathbf{R \circ R^{-1}}.$$

<u>Aibių A ir B sąryšio branduolys yra sąryšis aibėje A.</u>

Pavyzdžiui, turime aibes A = { 1, 2 } ir B = { 5, 8 },

$R \subset \{(1, 5),(1,8),(2, 5),(2, 8)\}$

$R^{-1} \subset \{(5, 1), (5,2), (8, 1), (8, 2)\}$.

Taigi

$R \circ R^{-1} = \{ (1,1),(1,2),(2,1), (2, 2) \}$.

Kompozicijos savybės

Kiekvienam sąryšiui aibėje A

$\forall$ R, T, S $\subset A^2$ galioja:

1) $R \circ I_A = I_A \circ R = R$;

2) $R \circ \varnothing = \varnothing \circ R = \varnothing$;

3) $(R \circ T) \circ S = R \circ (T \circ S)$;

4) $(R \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ R^{-1}$.

Funkcinis sąryšis (Funkcijos)

Funkcinis sąryšis (1)

Funkcinis sąryšis – atskiras binarinio sąryšio atvejis.

Funkcija (funkciniu sąryšiu), iš aibės A į aibę B yra vadinamas sąryšis, kuris <u>kiekvieną elementą x</u> iš aibės A sujungia <u>su vienu ir tik vienu elementu y</u> iš aibės B.

Funkcinis sąryšis (2)

Sąryšis **f** $\subset$ **A×B** tarp aibių **A** ir **B** elementų vadinamas **funkcija** (funkciniu sąryšiu), jei

$$\forall a \ \ (a,b)\in f \ ir \ (a,c)\in f \ \rightarrow b=c$$

$$f : A \rightarrow B \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

$$b = f(a)$$

a – argumentas, **b** – funkcija

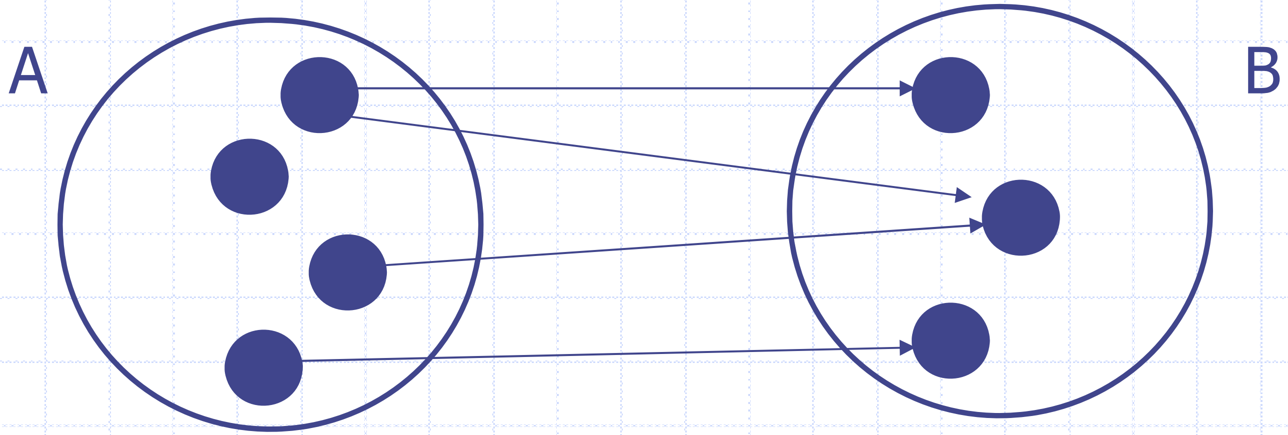
Funkcija suriša kiekvieną elementą x iš aibės A su vienu ir tik vienu elementu y iš aibės B.

Funkcinis sąryšis. Pvz.

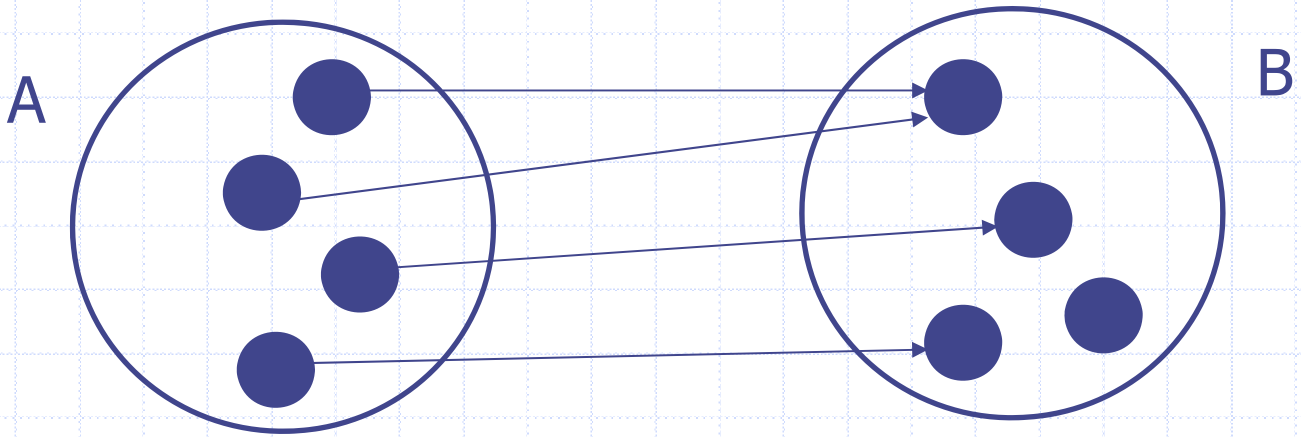
Pvz., turime aibę **A={1,2,3,4}** ir **B={5,6,7,8,9}.** Tada,

- **f={(1,5),(2,8),(3,7),(4,5)}** yra funkcija iš A į B, nes kiekvienas x $\in$A, yra sujungtas su vienu y $\in$B.
- **g={(1,5),(1,6),(2,7),(3,8),(4,9)}** nėra funkcija, nes su elementu 1 yra susiję daugiau nei vienas y, t.y. 5 ir 6.
- **h={(1,5),(2,6),(4,7)}** nėra funkcija, nes nėra tokio elemento aibėje B, kuris būtų susijęs su elementu 3 iš aibės A.

Funkcinis sąryšis. Pvz.



Sąryšis, bet ne funkcija



Funkcinis sąryšis (funkcija)

Sąvokos (1)

Funkcijos $f \subset A \times B$ **apibrėžimo** (argumento) **sritimi** vadinama aibė:

$$D_f = \{a \in A \mid \exists\, b \in B \quad b = f(a)\}$$

D_f= A yra sąryšio f elementų porų pirmųjų elementų aibė

Funkcijos $f \subset A \times B$ **reikšmių sritimi** vadinama aibė:

$$E_f = \{b \in B \mid \exists\, a \in A \quad b = f(a)\}$$

E_f – sąryšio f elementų porų antrųjų elementų aibė. **$E_f \subset B$**

Sąvokos (2)

- Aibės B elementai b yra vadinami aibės A elementų a **vaizdu**.
- Aibės A elementai a yra vadinami aibės B elementų b **pirmvaizdžiu**.
  - Pirmvaizdžių paprastai gali būti daugiau nei vienas, o x vaizdų gali būti tik vienas.
- Atvaizdis gali būti dvejopas:
  - Kai visi aibės B elementai yra aibės A elementų vaizdai – sakoma A **<u>atvaizduojama į aibę B.</u>**
  - Kai aibėje B yra elementų, kurie nėra aibės A elementų vaizdai – sakoma aibė A **<u>atvaizduojama aibėje B.</u>**

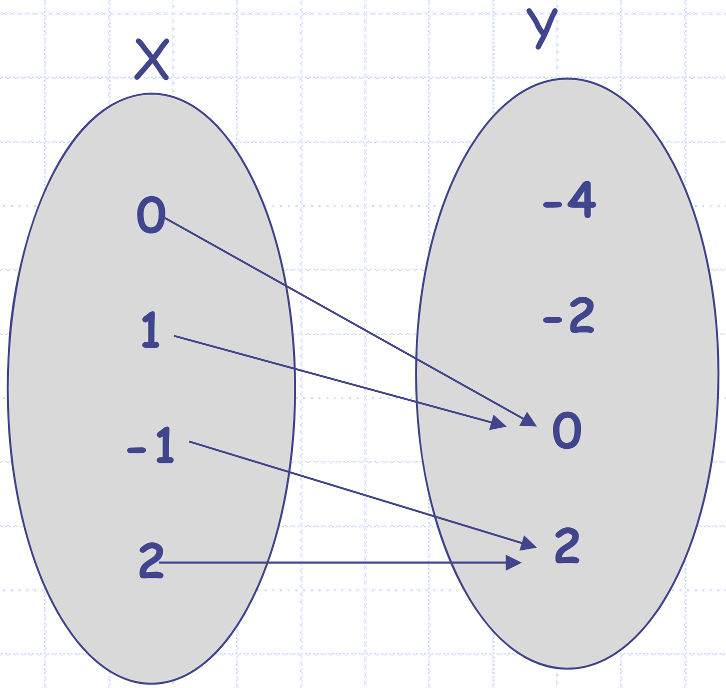
Sąvokos. Pavyzdys

Turime X={-1,0,1,2} ir Y={-4,-2,0,2}.

Funkcija f:X→Y apibrėžta kaip **$f(x)=x^2-x$.**

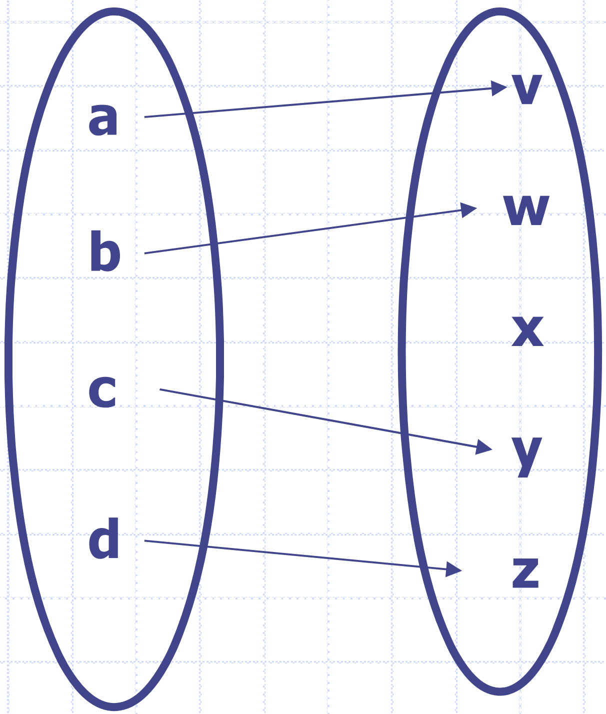
Todėl f(-1)=2, f(0)=0, f(1)=0, f(2)=2.

- -1 ir 2 vaizdas yra 2;
- 0 ir 1 vaizdas yra 0
- 0 pirmvaizdžiai yra 0 ir 1;
- Apibrėžimo sritis
- D_f={-1,0,1,2};
- Reikšmių sritis E_f={0,2};



Funkcijų savybės. Injekcija

Funkcija f⊂A×B vadinama **injekcija**, jei kiekvieno x vaizdas yra unikalus, t.y. f(x)≠f(y) tada ir tik tada, kai x≠y. Be to **|A|≤|B|**



$$D_f = A$$

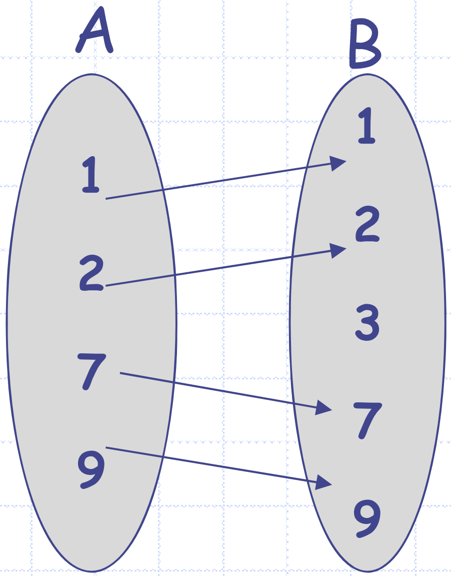
$$E_f \subset B$$

$$(a,b)\in f \ ir \ (c,b)\in f \quad \Rightarrow a=c$$

$$b=f(a_1) \ ir \ b=f(a_2) \quad \Rightarrow a_1=a_2$$

Injekcija pvz.

Funkcija $f(x)=x$ yra injekcija, nes $f(x)\neq f(y)$, tada kai $x\neq y$.



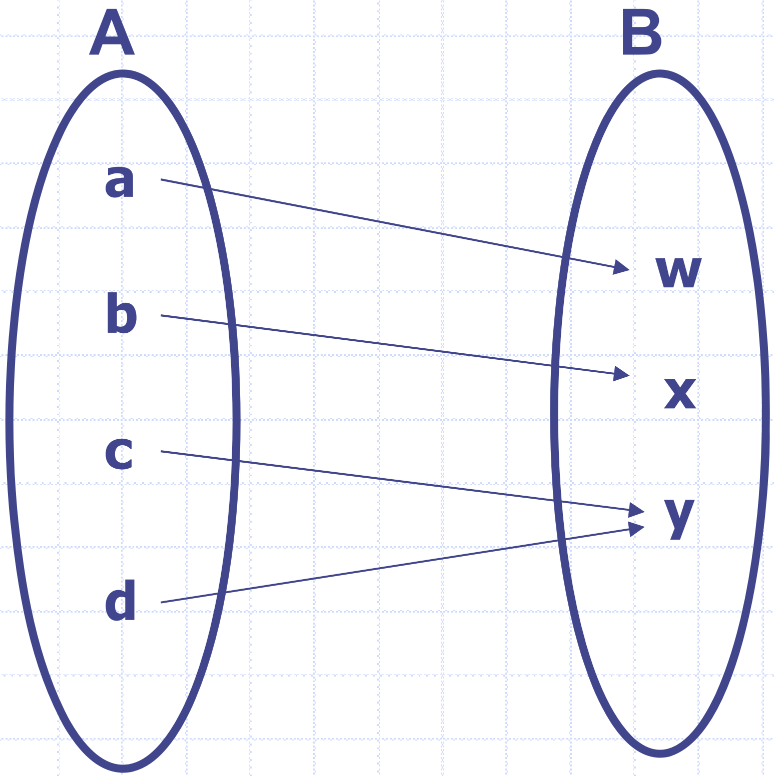
Funkcija $f(x)=x^2$ (sveikų skaičių aibėje), nėra injekcija, nes $f(1)=f(-1)=1$, bet $1 \neq -1$.

Surjekcija

Funkcinis sąryšis iš aibės A į B f⊂A×B vadinamas **surjekcija**, jei kiekvienas aibės B elementas turi pirmvaizdį, t.y. f(x)=y. Be to **|A|≥|B|.**

$$D_f = A$$

$$E_f = B$$



Surjekcija. Pavyzdys (1)

- Funkcija $\mathbf{f(x)=x}$ yra surjekcija (sveikų skaičių aibėje), nes kiekvienam y egzistuoja toks sveikas x skaičius, kad f(x)= y.
- Funkcija $\mathbf{f(x)=x^2}$ (sveikų skaičių aibėje), nėra surjekcija, nes nėra tokio sveiko skaičiaus x su kuriuo $x^2=-1$.

Surjekcija. Pavyzdys (2)

Funkcija $f = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in R, y \in [-1, 1]\}$

$\sin(0)=\sin(\pi)= \sin(2\pi)= \ldots=\sin(n\pi)=1$

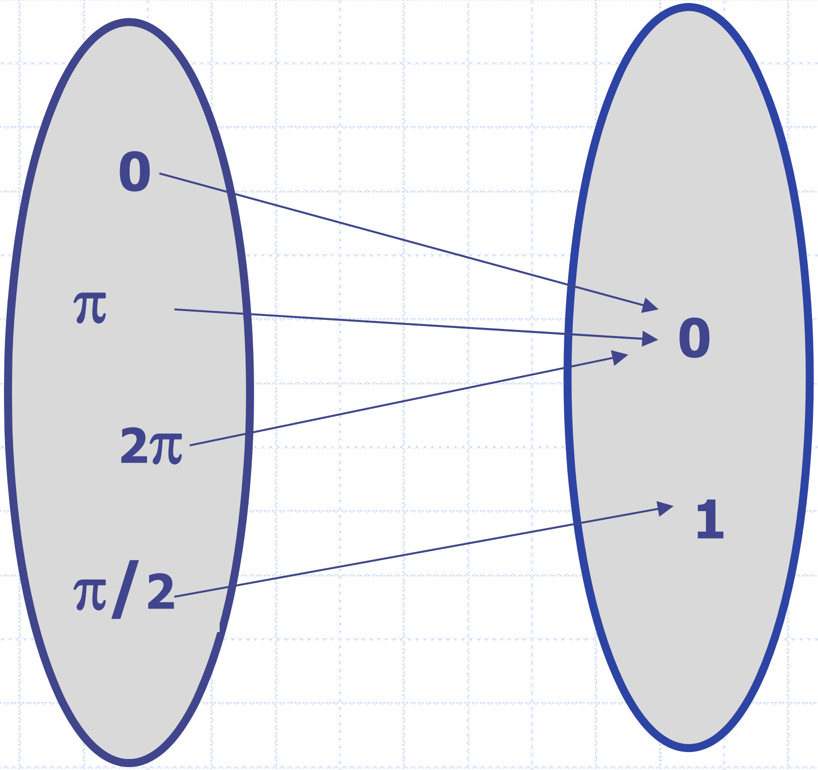
Apibrėžimo sritis:

$D_f = = R,$

Reikšmių sritis:

$E_f = \{-1, 1\}$

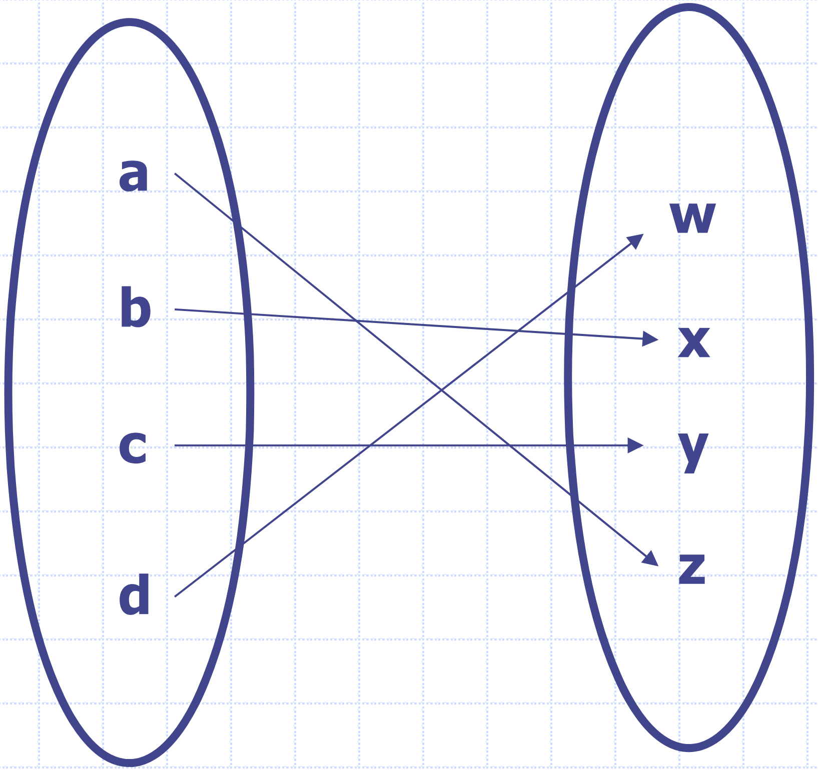
Kiekvienai argumento reikšmei būtinai egzistuoja ir tik viena funkcijos reikšmė, ir atvirkščiai, bet kiekvienai funkcijos reikšmei galima rasti vieną ar daugiau argumento reikšmių



Bijekcija

- Funkcija $f \subset A \times B$ vadinama **bijekcija**, jei ji yra injekcija ir surjekcija, o tai reikalauja, kad abi aibės turėtų tą patį elementų skaičių, t.y. **$|A|=|B|$.**

Pvz., funkcija $f(x)=x$ yra bijekcija, nes ji yra ir surjekcija, ir injekcija.



Bijekcija. Pavyzdys

Turime A ={a,d,c,d}; ir B={w,x,y,z}

Funkcija f: A→B apibrėžta kaip atitiktis

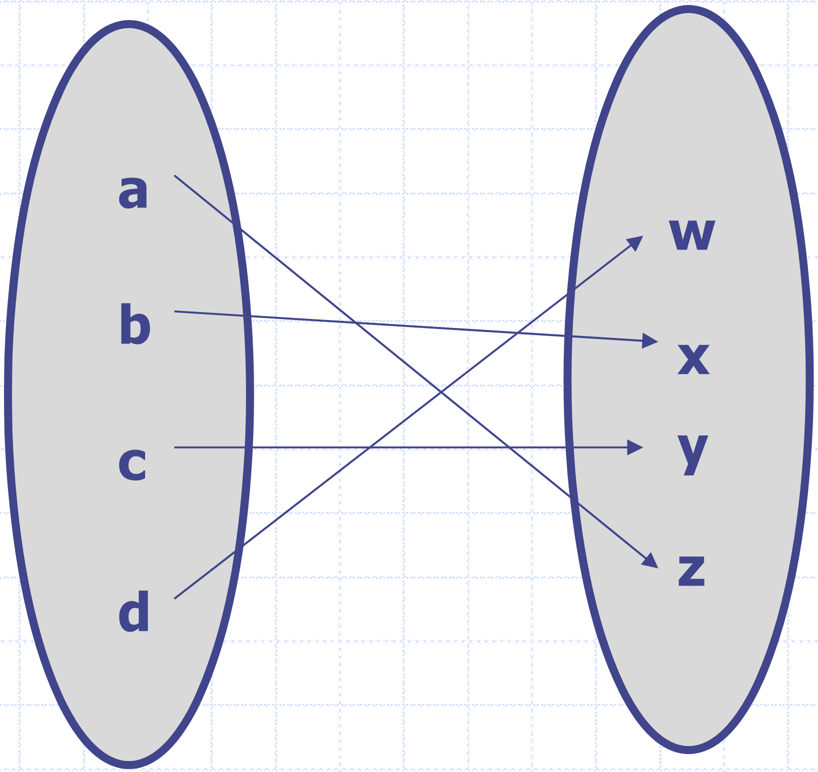
f={(a,z), (b,x), (c,y), (d,w)}

Apibrėžimo sritis:

D_f= ={a,b,c,d};

Reikšmių sritis:

E_f ={w,x,y,z}



Kiekvienai argumento reikšmei būtinai egzistuoja ir tik viena funkcijos reikšmė ir atvirkščiai - kiekvienai funkcijos reikšmei būtinai galima rasti, tik vieną argumento reikšmę