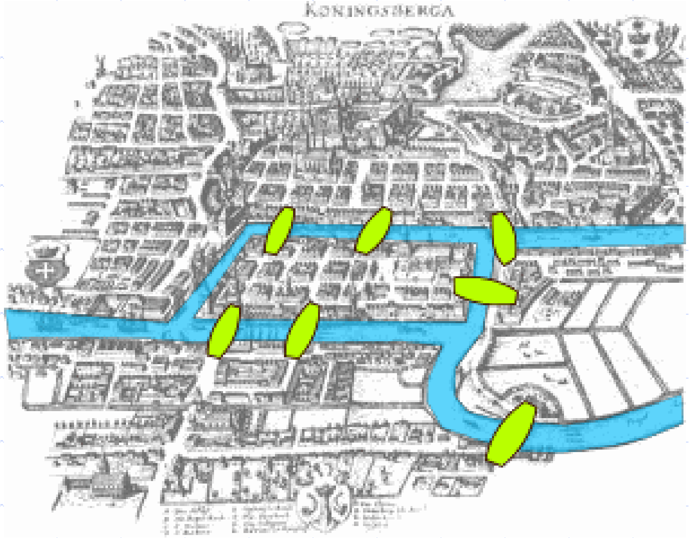
Logikos pagrindai ir diskretinė matematika. Grafai_1

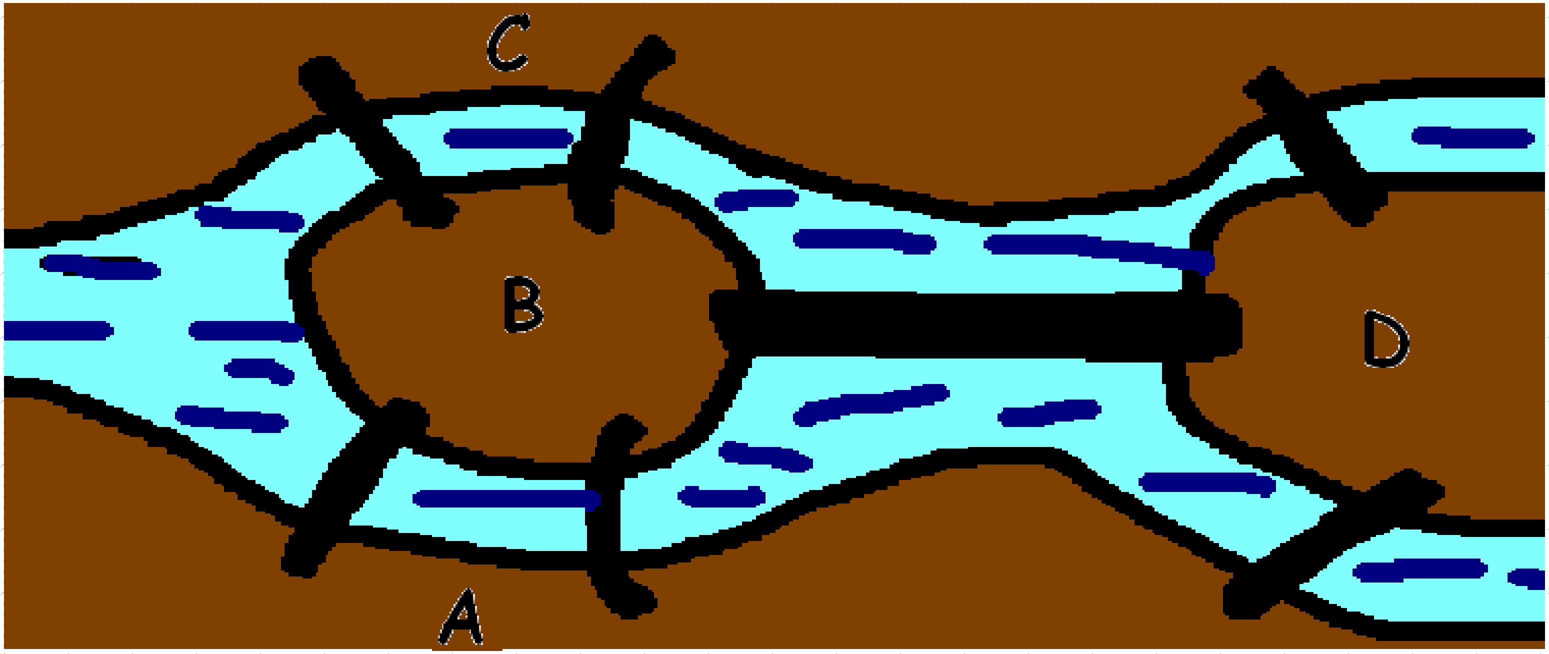
Doc. dr. Beatričė Andziulienė

Grafų teorijos pradininku laikomas **Euler'is** (1707-1782), 1736 m. išsprendęs žinomą tuomet uždavinį apie Karaliaučiaus tiltus.



Karaliaučiuje buvo dvi salos, sujungtos septyniais tiltais su upės Prėgliaus krantais ir tarpusavyje taip, kaip parodyta piešinyje.

Karaliaučiaus tiltai



Reikėjo sugalvoti, kaip būtų galima pereiti visas keturias sausumos dalis (pradedant bet kuria iš jų), pereinant per kiekvieną tiltą tik po vieną kartą ir grįžtant į tą pačią sausumos dalį. Atrodytų, lengva būtų surasti tokį kelią bandymų būdu, bet visos pastangos baigdavosi nesėkmingai. Euler'is įrodė, kad tokio kelio nėra.

Leonardas Euleris (Leonhard Euler)

Leonhard Euler (Leonardas Euleris; 1707-1783) – šveicarų matematikas bei fizikas

- Gimė 1707 m. balandžio 15 d. Bazelyje. Nuo 1727 dėstė matematiką Sankt Peterburge, kur 1730 metais tapo fizikos profesoriumi. Nuo 1741 metų dėstė Berlyne, o nuo 1760 vėl grįžo į Sankt Peterburgą.
- Septyniolika paskutinių metų jis buvo visiškai aklas, bet per šį laikotarpį parašė apie pusę iš visų savo matematinių veikalų, iš viso užimančių 75 tomus.
- Per 56 savo mokslinio darbo metus Euleris parašė nemažiau kaip 756 traktatus ir straipsnius.


SCHWEIZERISCHE NATIONALBANK
BANCA NAZIUNALA SVIZRA
10
Leonhard Euler
1707–1783
Zehn Franken
Diesch Francs
10

1. Pagrindinės sąvokos

Grafo sąvoka (1)

Grafu vadiname sunumeruotų aibių porą **G(V,E),** kur **V**- sunumeruotų viršūnių netuščia aibė, **E** yra briaunų arba viršūnių porų aibė. Grafą galima apibrėžti dviem būdais.

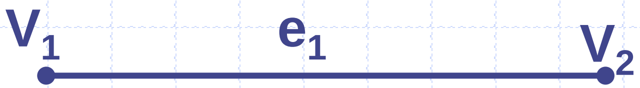
Pirmas būdas. Sakoma, kad grafas žinomas, jeigu:

a) duota netuščia grafo viršūnių aibė

$$\mathbf{V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots v_n\}\ (V\neq\emptyset),}$$

b) duotas aibės V atvaizdis E, kur E vadinama briaunų aibe

$$\mathbf{E=\{e_1,e_2,e_3,\ldots e_n\}}$$



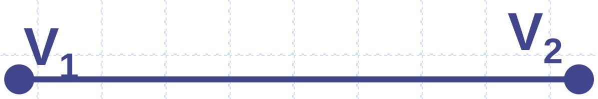
Grafo sąvoka (2)

Antras būdas. Sakoma, kad grafas G(V,E) yra žinomas, jeigu:

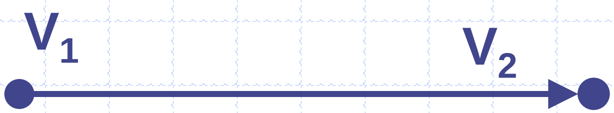
a) duota netuščia grafo viršūnių aibė.

b) aibė E yra viršūnių aibės V elementų visų galimų binarinių porų aibė:

$$\mathbf{E} = \{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \mid \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{V} \wedge \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j\}.$$



Briauna (v_1,v_2)



Lankas (v_1,v_2)

Briauna turinti kryptį vadinama **lanku**

Vienodas ribines viršūnes turinčios briaunos vadinamos **kartotinėmis.**

Grafo eilė, grafo didumas

Aibė **V** vadinama grafo **viršūnių aibe**. Aibės **V** elementų skaičius yra lygus grafo viršūnių skaičiui ir vadinamas **grafo eile**

$$|\mathbf{V}| = \mathbf{n}$$

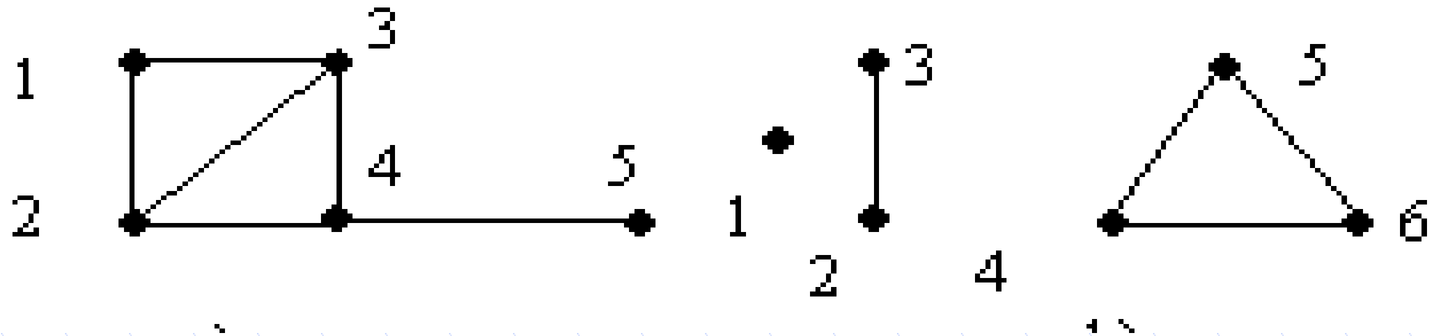
Aibė **E** vadinama grafo **briaunų aibe**. Aibės **E** elementų skaičius yra lygus grafo briaunų skaičiui ir vadinamas **grafo didumu**

$$|\mathbf{E}| = \mathbf{m}$$

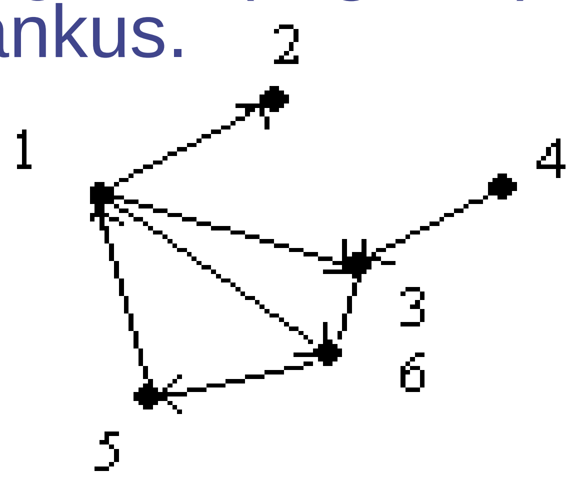
Tuomet grafą galime žymėti **G (n, m).**

Orientuotas grafas

Neorientuotu grafu vadinamas grafas turintis tik briaunas.

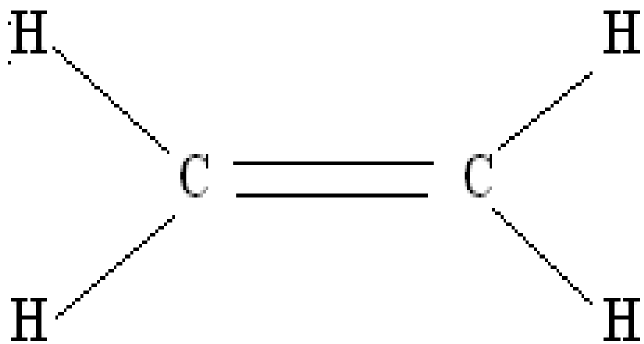


Orientuotu grafu (**orgrafu**) vadinamas grafas turintis tik lankus.

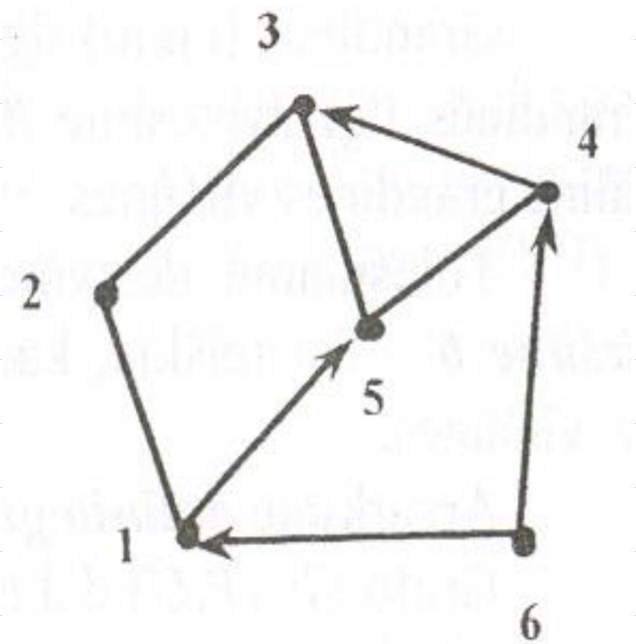


Multigrafas

Multigrafu vadinamas grafas turintis bent vieną viršūnių porą, kuri jungiama keliomis briaunomis t.y. grafas turintis **kartotines** briaunas (lankus)



g) etilenas

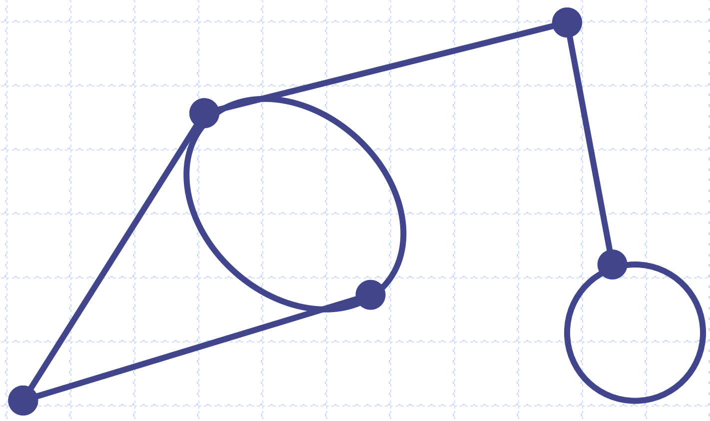


Mišrusis grafas t.y. grafas turintis ir briaunų ir lankų

Pseudografas

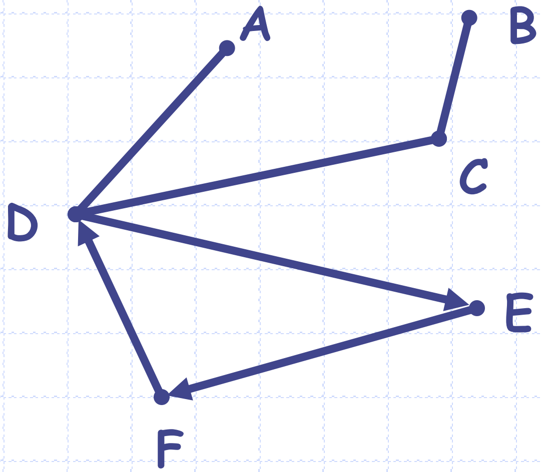
Briauna, turinti vieną viršūnę, vadinama **kilpa.**

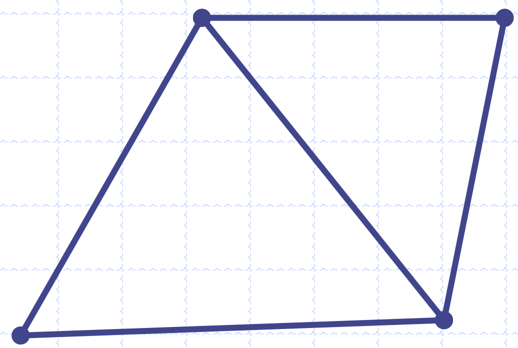
Pseudografu vadinamas grafas turintis kartotines briaunas (lankus) ir kilpas.



Kanoninis (paprastasis) grafas

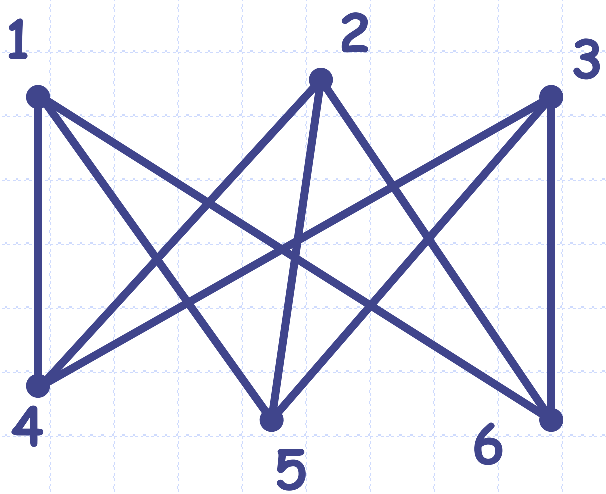
Kanoniniu (paprastu) grafu vadinamas grafas neturintis nei kartotinių briaunų (lankų) nei kilpų.





Dvidalis grafas

Grafas, kurio viršūnių aibę galima išskaidyti į du poaibius A ir B taip, kad kiekvienos briaunos galai priklausytų skirtingiems poaibiams, vadinamas **dvidaliu grafu**. Žymimas $\mathbf{K_{s,t}}$



V={1,2,3,4,5,6}

A={1,2,3}

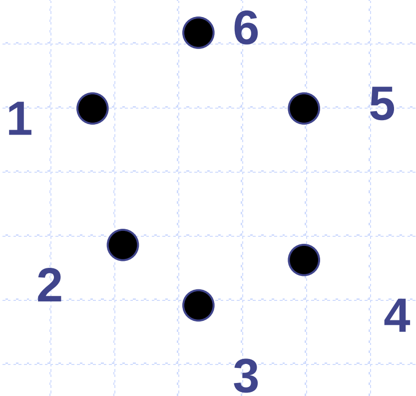
B={4,5,6}

$\mathbf{V=A\cup B}$

Grafas $\mathbf{K_{33}}$

Tuščiasis grafas

Tuščiasis grafas tai grafas, kurio briaunų aibė yra tuščioji aibė **E = ∅.** Žymimas $\mathbf{O_n}$.



Grafas $\mathbf{O_6}$

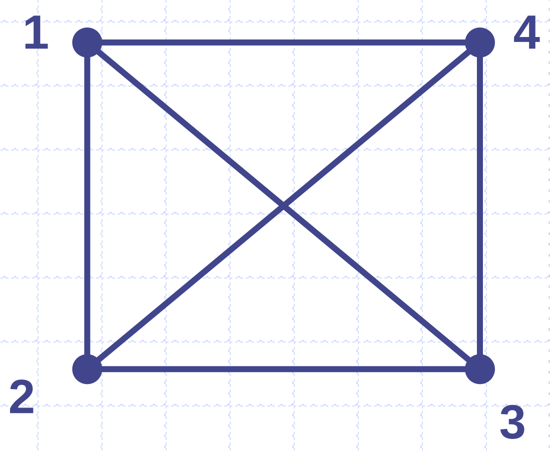
Grafo viršūnė , kuri nėra susieta briaunomis vadinama **izoliuota viršūne.**

Tuščiame grafe visos viršūnės yra izoliuotos.

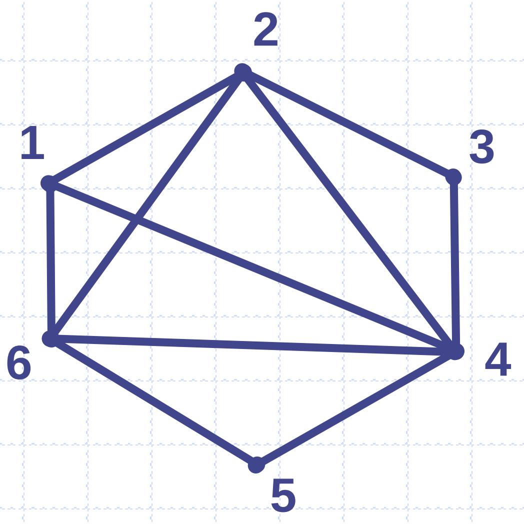
Pilnasis grafas

Pilnasis grafas tai grafas, kurio kiekviena viršūnė sujungta briaunomis su visomis likusiomis viršūnėmis. Žymimas $\mathbf{K_n}$

Pilnasis grafas yra maksimalaus didumo grafas.



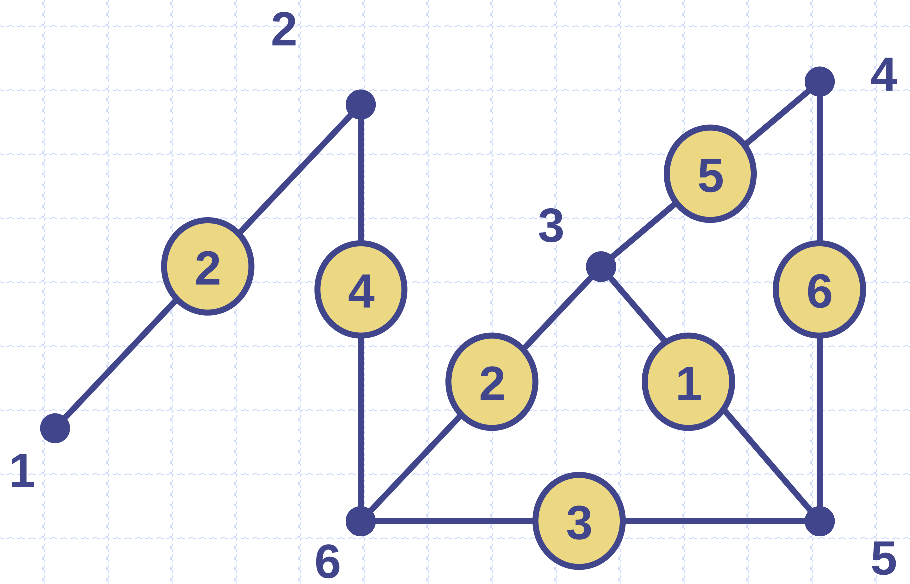
Grafas $\mathbf{K_4}$



Grafas nėra pilnasis, trūksta briaunų (6,3);(2,5);(1,5);(3,5) ...

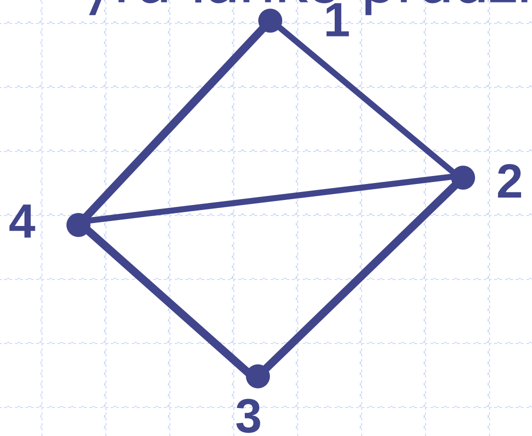
Svorinis grafas

Svorinis grafas t.y. grafas, kurio briaunoms (lankams) priskirti svoriai



Incidentiškumas

- Incidentiškumo sąvoka naudojama , kai kalbama apie skirtingus objektus. Jei turime briauną (lanką) (v_1, v_2), tai sakome, kad viršūnė v_1 ar v_2 incidentiška briaunai (lankui) (v_1, v_2) ir atvirkščiai.
  - briauna incidentiška viršūnei, jei nagrinėjama viršūnė yra jos galas;
  - lankas incidentiškas viršūnei, jei nagrinėjama viršūnė yra lanko pradžia arba galas.



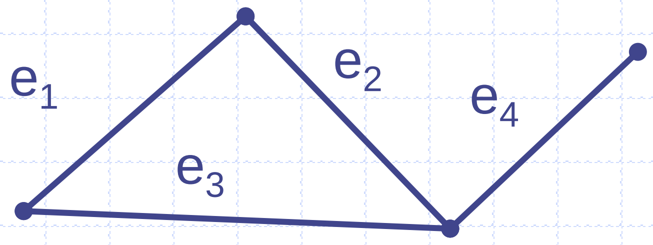
V_1 ir (V_1,V_4) - incidentiškos

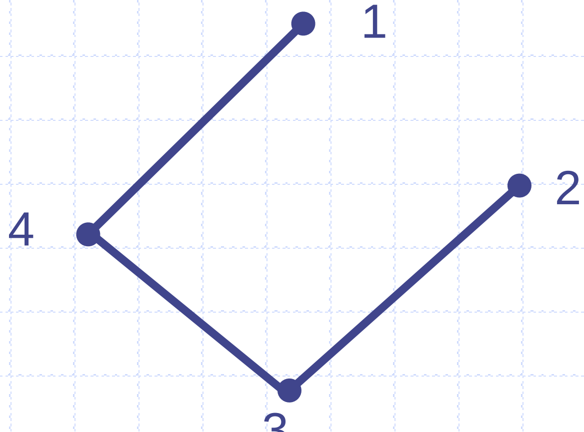
V_3 ir (V_1,V_4)- neincidentiškos

Gretimumas

Gretimumo sąvoka naudojama , kai kalbama apie vienodus objektus: viršūnes, briaunas, lankus:

- dvi briaunos yra **gretimos**, jei jos turi bendrą galą;
- dvi **viršūnės** yra **gretimos**, jei jas jungia briauna.





$\mathbf{e_1,e_2}$; $\mathbf{e_1,e_3}$; $\mathbf{e_2,e_3}$ **–** gretimos briaunos

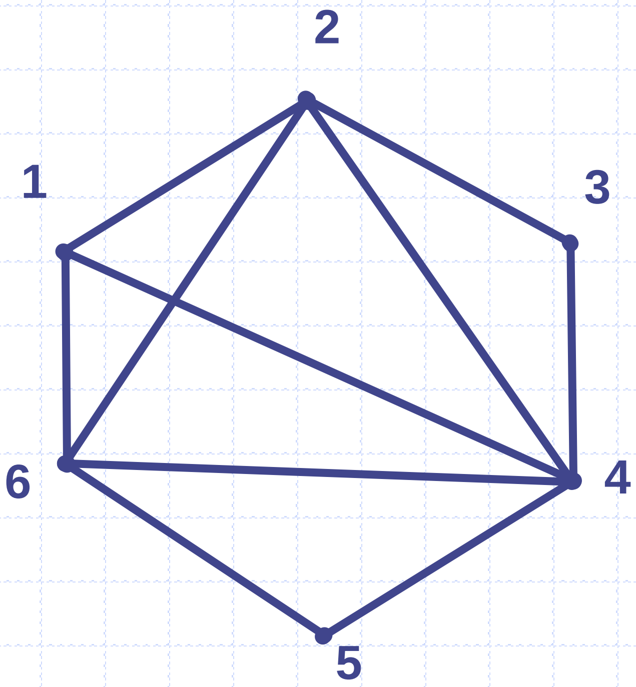
$\mathbf{e_1,e_4}$ nėra gretimos

$\mathbf{V_1,V_4}$; $\mathbf{V_2,V_3}$ **– gretimos viršūnės**

$\mathbf{V_1,V_2}$; $\mathbf{V_1,V_3}$ **nėra gretimos**

Viršūnės aplinka

Grafo G (V, E) viršūnės **v aplinka N(v)** vadinama visų jai gretimų viršūnių aibė.



N(1)= {2, 4, 6}

N(2)= {1, 3,4, 6}

N(3)= {2, 4}

N(4)= {1,2,3, 5, 6}

N(5)= {4, 6}

N(6)= {1, 2, 4, 5}

Viršūnės laipsnis (1)

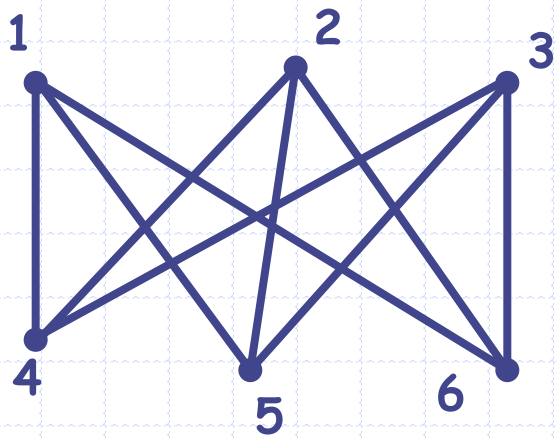
Viršūnės laipsnis – skaičius viršūnių gretimų nagrinėjamai viršūnei v. Žymimas **d(v).**

Orientuoto grafo atveju skiriami **viršūnės įėjimo ir išėjimo puslaipsniai:**

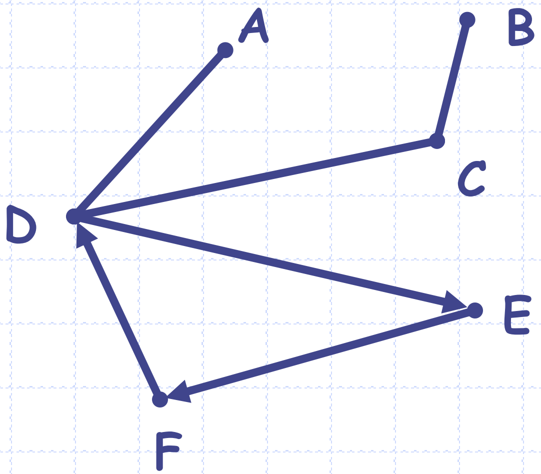
- **įėjimo puslaipsnis**, tai skaičius lankų, įeinančių į viršūnę,
- **išėjimo puslaipsnis** – skaičius lankų, išeinančių iš viršūnės.

Seka $\mathbf{d(v_1), d(v_2),\ldots d(v_n)}$ vadinama **grafo viršūnių laipsnių seka.**

Viršūnės laipsnis (2)



1



2

Grafų viršūnių laipsniai

G(1): d(1)=3; d(2)=3; d(3)=3; d(4)=3; d(5)=3; d(6)=3

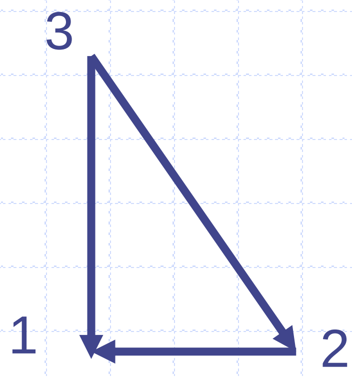
Viršūnių laipsnių seka : **(3,3,3,3,3,3)**

G(2): d(A)=1; d(B)=1; d(C)=2; d(D)=4; d(E)=2; d(F)=2

Viršūnių laipsnių seka : **(1,1,2,4,2,2)**

Viršūnės laipsnis (3)

Apskaičiuosime, orientuoto grafo viršūnių įėjimo ir išėjimo puslaipsnius



1 viršūnė – įėjimo puslaipsnis $d^{+}(v) = 2$, išėjimo $d^{-}(v) = 0$;

2 viršūnė – įėjimo puslaipsnis $d^{+}(v) = 1$, išėjimo $d^{-}(v) = 1$;

3 viršūnė – įėjimo puslaipsnis $d^{+}(v) = 0$, išėjimo $d^{-}(v) = 2$,

Viršūnių laipsniai lygūs:

$d(v_1)=2+0=2$; $d(v_2)= 2$; $d(v_3)=2$

Grafo briaunų skaičius

Grafo briaunų skaičius lygus visų jo viršūnių laipsnių sumos pusei:

$$m = \frac{1}{2}\sum d(v)$$

Pilnojo grafo visų viršūnių laipsniai yra lygūs ir lygūs (n-1).

Vadinasi, **pilnojo grafo briaunų skaičius**:

m = n (n-1) / 2.

Grafas, kurio visų viršūnių laipsniai yra lygūs, vadinamas **reguliariuoju grafu**.

Uždaviniai

Kiek briaunų turės grafai, kai duotos grafo viršūnių laipsnių sekos:

a) (1, 1, 2, 2)

$$m = \frac{1}{2}(1+1+2+2) = 3$$

b) (2, 2, 3, 3, 2)

$$m = \frac{1}{2}(2+2+3+3+2) = 6$$

c) (3, 3, 3, 3)

m = ½ n(n-1)

m = ½ *4*(4-1)= 6