Logikos pagrindai ir diskretinė matematika. Grafai_3

3. Veiksmai su grafais

Doc. dr. Beatričė Andziulienė

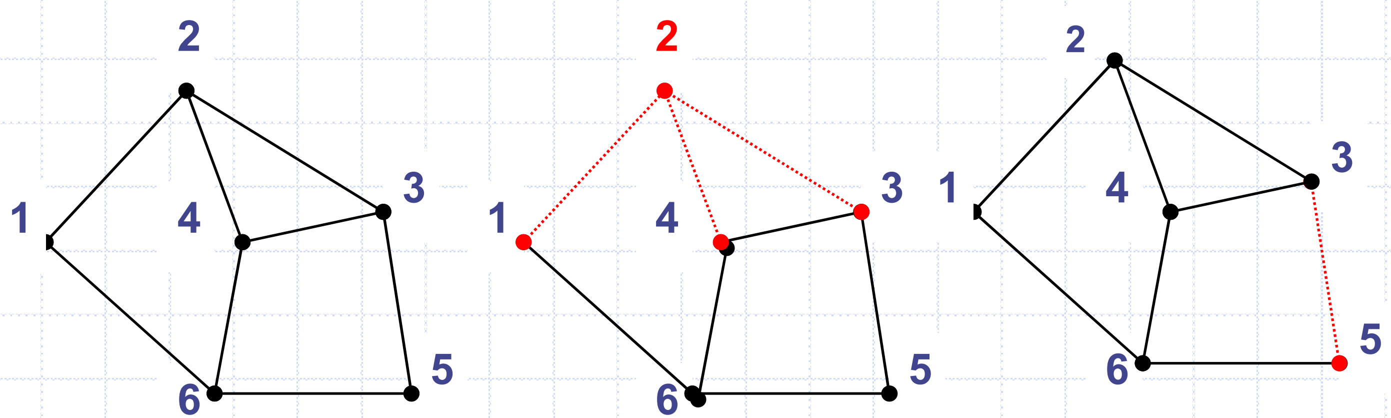
2. Veiksmai su grafais

Viršūnės šalinimas
Briaunos šalinimas
Viršūnių sutapatinimas
Briaunos sutraukimas
Viršūnės išskaidymas
Grafų sąjunga
Grafų sandauga
Grafo papildymas
Briaunainis grafas
Grafų izomorfiškumas

Viršūnės ar briaunos šalinimas

Viršūnės šalinimas. Duotas grafas G(V,E). Pašalinti viršūnę x, tai iš grafo pašalinti šią viršūnę drauge su jai incidentinėmis briaunomis.

Briaunos šalinimas. Iš grafo G(V,E) šalinant briauną (v1, v2), gaunamas grafas, turintis tą pačią viršūnių aibę V ir briaunų aibę **E*=E \ {(v1,v2)}**



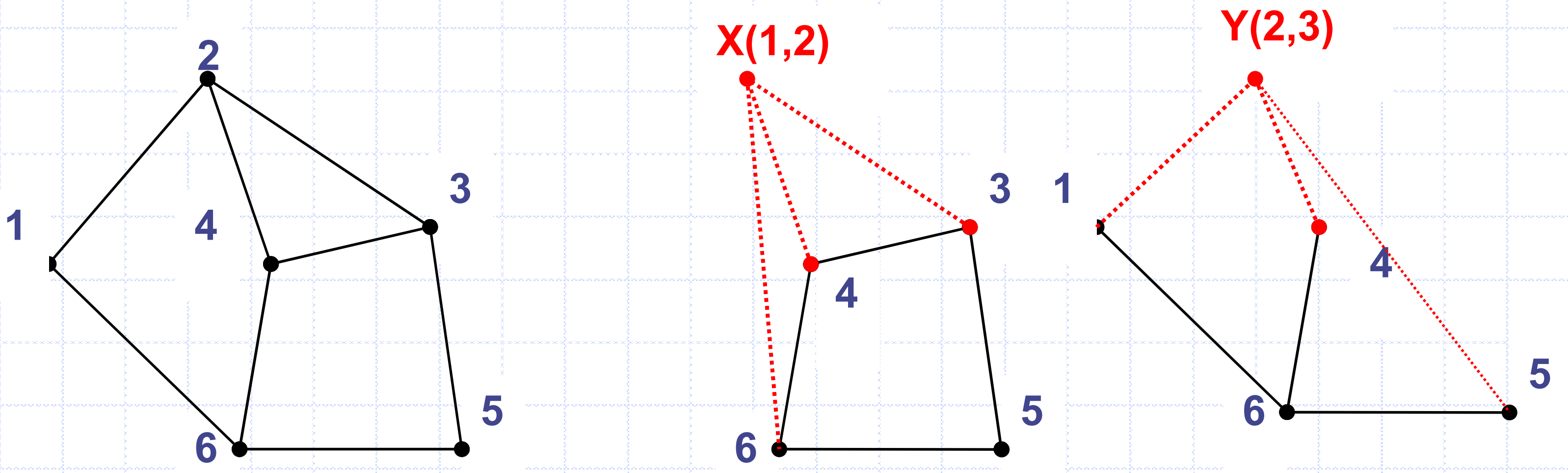
Viršūnių sutapatinimas_1

Grafo G(V,E) viršūnių v_1 ir v_2 sutapatinimas atliekamas taip:

- Iš grafo G pašalinamos viršūnės $\mathbf{v_1}$ ir $\mathbf{v_2}$;
- Įvedama nauja viršūnė **v**;
- Viršūnė v jungiama briaunomis su tomis viršūnėmis, kurios buvo gretimos arba viršūnei v_1, arba viršūnei v_2, t.y.

$$\mathbf{N(v)=N(v_1) \cup N(v_2).}$$

Viršūnių sutapatinimas_2



$N(1)=\{2,6\}$; $N(2)=\{1,4,3\}$

$N(1) \cup N(2) = \{1,2,3,4,6\}$ $X(1,2)=\{3,4,6\}$

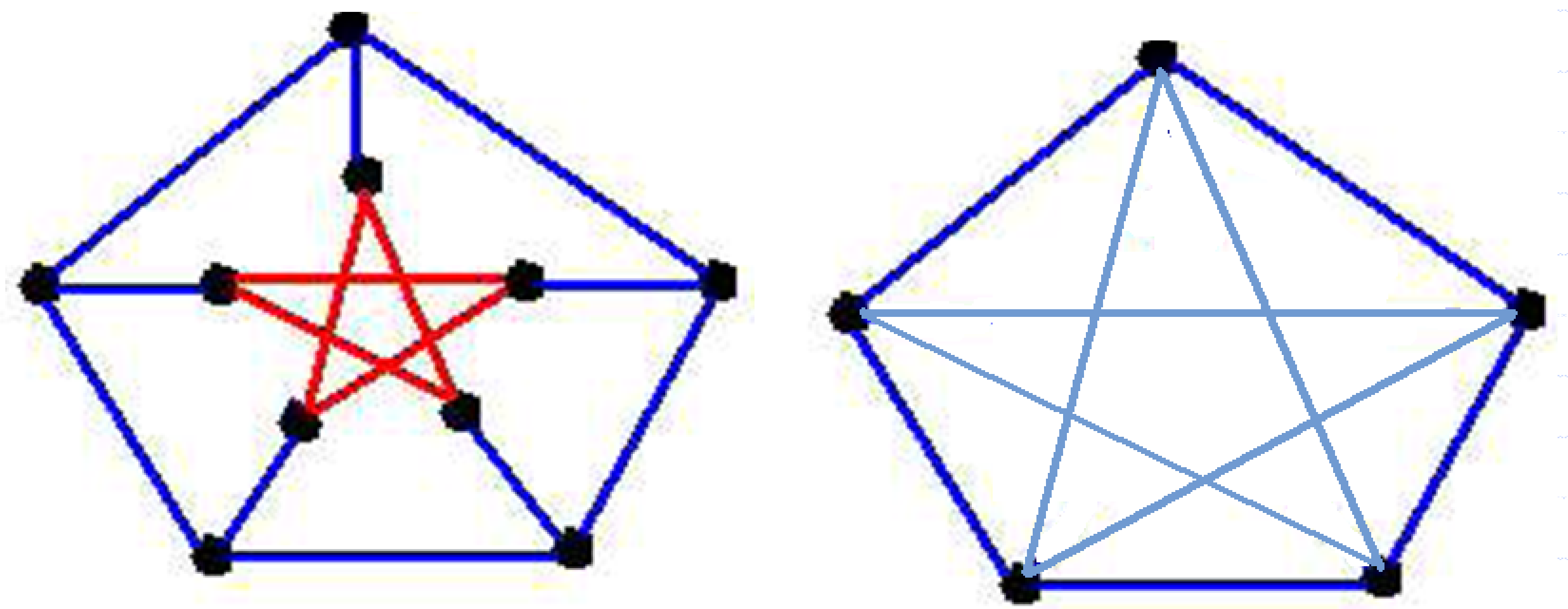
$N(3)=\{2,4,5\}$; $N(2)=\{1,4,3\}$

$N(3) \cup N(2) = \{1,2,3,4,5\}$ $Y(2,3)=\{1,4,5\}$

Briaunos sutraukimas 1

Briaunos sutraukimas. Tarkime (v_1,v_2) yra grafo G(V,E) briauna. Tada briaunos (v_1,v_2) sutraukimas, tai gretimų viršūnių v_1 ir v_2 sutapatinimas.

Briaunos sutraukimas 2



a) b)

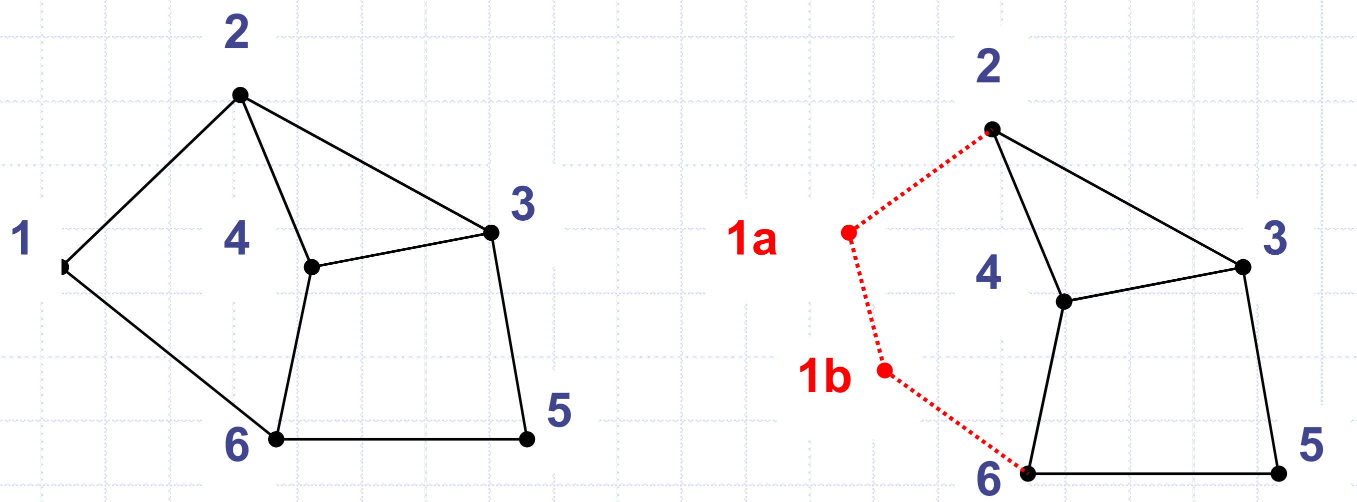
Petersono grafas (a) sutraukiamas iki pilnojo K5 (b) grafo

Viršūnės išskaidymo operacija_1

Tarkime **v** yra viena iš grafo G viršūnių ir viršūnės aplinką **N(v)** išskaidome į du nesikertančius poaibius **$N(v)=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$**. Tada viršūnės išskaidymo operacija atliekama taip:

- Iš grafo G pašalinama viršūnė **v**;
- Įvedamos dvi naujos viršūnės $\mathbf{v_1}$ ir $\mathbf{v_2}$ ir jas jungiančioji briauna.
- Viršūnė $\mathbf{v_1}$, jungiama su aibės A viršūnėmis, o $\mathbf{v_2}$-su aibės B viršūnėmis.

Viršūnės išskaidymo operacija_2



Viršūnės aplinką N(1)={2,6}; išskaidome į du nesikertančius poaibius: N(1)= $A \cup B$, kur $A \cap B = \varnothing$

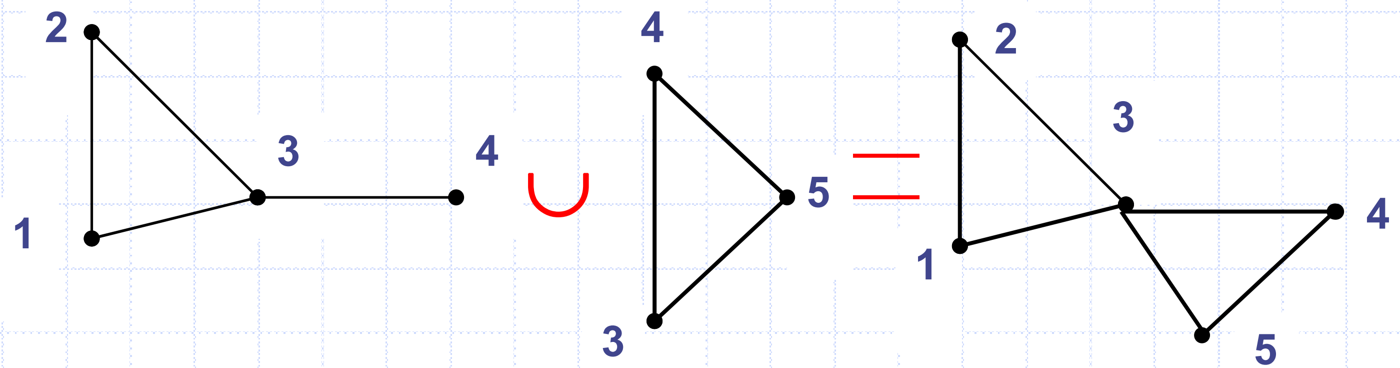
A ={2}; B={6}

Grafų sąjunga

Grafų sąjunga. Tarkime duoti grafai $G_1=(V_1,E_1)$ ir $G_2=(V_2,E_2)$. Tada grafas $G=(V,E)$ yra šių grafų sąjunga (žymime $G=G_1\cup G_2$), jei

$$\mathbf{V = V_1 \cup V_2,}$$

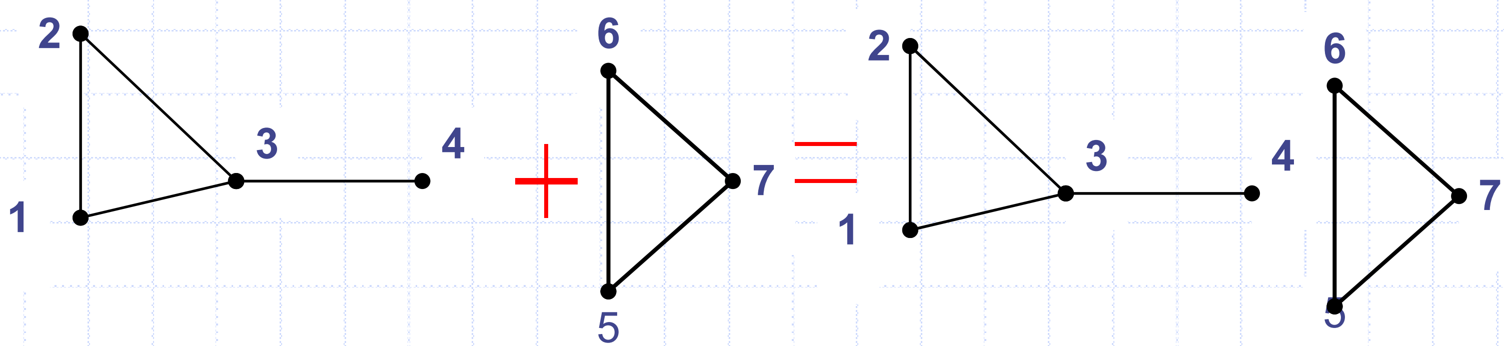
$$\mathbf{E = E_1 \cup E_2}$$



Grafų sąjunga_2

Grafų G1 ir G2 sąjunga vadinama **disjunkcine sąjunga**, jei viršūnių aibės yra nesikertančios: $\mathbf{V1 \cap V2 = \varnothing}$

$\mathbf{E_1 \cap E_2 = \varnothing}$



Grafų sandauga_1

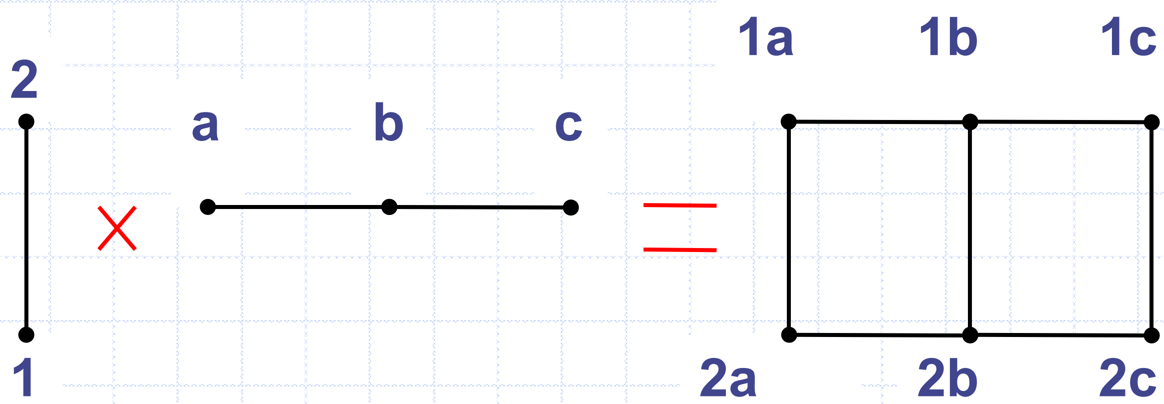
Grafų sandauga. Grafų $G_1=(V_1,E_1)$ ir $G_2=(V_2,E_2)$ sandaugos grafas G =(V,E) (žymime $G=G_1xG_2$) apibrėžiamas taip:

- $\mathbf{V=V_1xV_2}$ – aibių Dekarto sandauga;
- Viršūnė **(a,b)** jungiama su viršūne **(c,d),** kai:
  - **a=c** ir **(b,d)**$\in$$\mathbf{E_2}$ arba
  - **b=d ir (a,c)**$\in$$\mathbf{E_1}$**.**
- Grafo viršūnių ir briaunų skaičius yra lygus :
  - $\mathbf{|V|=|V_1|*|V_2|}$
  - $\mathbf{|E|=|V_1|*|E_2|+|V_2|*|E_1|}$

Grafų sandauga_2

$$|V|=|V_1|*|V_2|$$

$$|E|=|V_1|*|E_2|+|V_2|*|E_1|$$

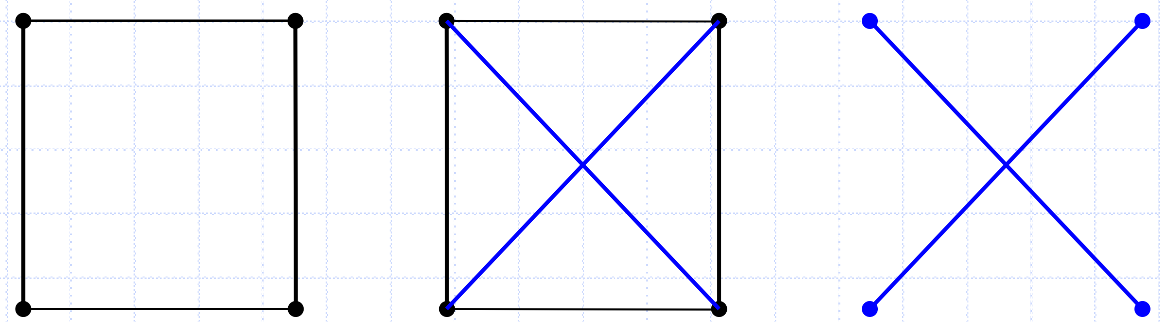


$n\ (V)= n(V_1)+n(V_2)= 2*3=6;$

$n(E)=2*2+3*1=7$

Grafo papildymas

Grafo $G=(V_1,E_1)$ papildymu vadinamas grafas turintis tą pačią viršūnių aibę ir briaunas papildančias duotąjį grafą iki pilnojo $\mathbf{K_n}$



$G(V_1,E_1)$ K_n $\overline{G}(V_1,E_H)$

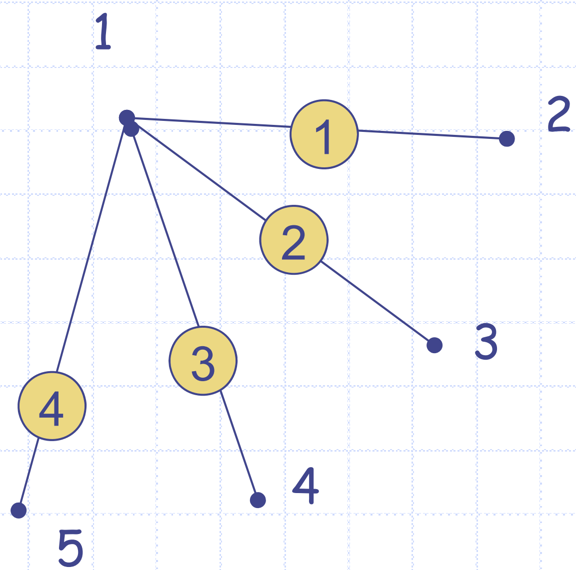
Briaunainis grafas_1

Grafo G(V,E) **briaunainis grafas** H=(A,B) apibrėžiamas taip:

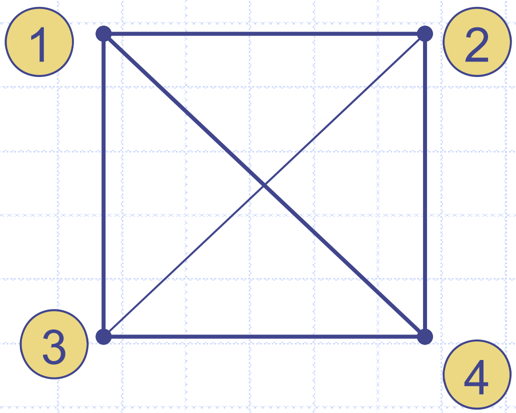
- Briaunainio grafo H viršūnių (aibės A elementų) skaičius yra lygus grafo G briaunų skaičiui, t.y. kiekviena grafo G briauną vaizduoja (atitinka) grafo H viršūnę
- Viršūnės $a_1 \in A$ ir $a_2 \in A$ jungiamos briauna, jeigu toms viršūnėms atitinkančios grafo briaunos yra gretimos.
- Jei $d_1, d_2, .., d_n$ yra grafo **G(n,m)** viršūnių laipsnių seka, tai jo briaunainis grafas **H(m,l),** kur briaunų skaičius: grafas, čia

$$l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m$$

Briaunainis grafas_2



G(V,E)



G(V,E) briaunainis grafas

$$l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m$$

***l* = ½ (4²⁺1²+1²+1²+1²)- 4=10-4=6**

Grafų izomorfiškumas_1

Grafai $\mathbf{G_1(V_1,E_1)}$ **ir** $\mathbf{G_2(V_2,E_2)}$ yra izomorfiniai, jei

- $\mathbf{|V_1|=|V_2|}$**,**
- $\mathbf{|E_1|=|E_2|}$
- ir egzistuoja bijekcija tarp viršūnių aibių t.y. jei grafo G_1 viršūnės v_1 ir v_2 yra gretimos, tai **(** $\mathbf{f\,(v_1)}$ ir $\mathbf{f\,(v_2)}$**)** yra gretimos grafo G_2 viršūnės.

Grafų izomorfizmas_2

Grafo invariantas - skaitinė grafo charakteristika t.y. grafo briaunų ir viršūnių skaičius

- Izomorfinių grafų invariantai vienodi
- Viršūnių ir briaunų skaičius, bei gretimų kiekvienai viršūnei viršūnių skaičius neapibrėžia grafo izomorfiškumo

Grafų izomorfizmo nustatymas

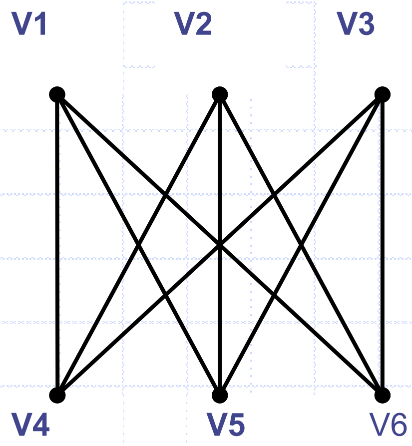
Du žymėtieji grafai yra izomorfiniai, jei galima vieno grafo viršūnes pernumeruoti taip, kad abiejų grafų briaunų aibės sutaptų. Šis pernumeravimas apibrėžia bijekciją.

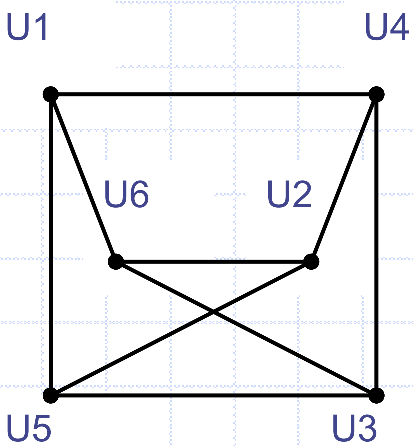
Žymėtieji grafai, jei kiekvienai grafo viršūnei priskiriama žymė, pvz., {1,2,..n}

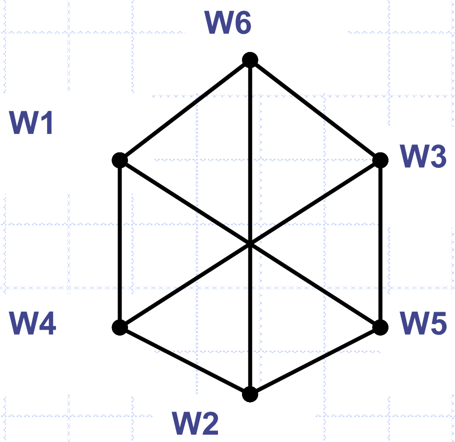
Izomorfizmo sąlygos:

- izomorfinių grafų viršūnių laipsnių, išrikiuotų mažėjimo (didėjimo) tvarka, sekos sutampa;
- izomorfinių grafų gretimumo matricos yra panašios, t. y. jų tikrinės reikšmės yra lygios

Grafų izomorfizmas_3







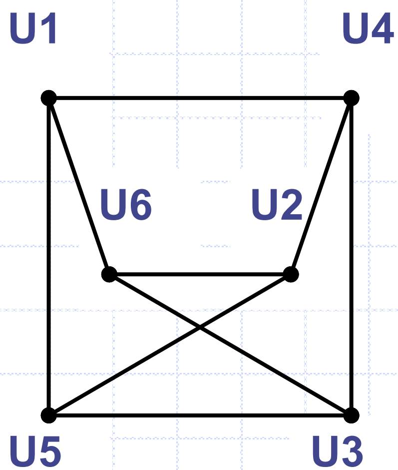
(v2,v4); (v2,v5); (v2,v6)

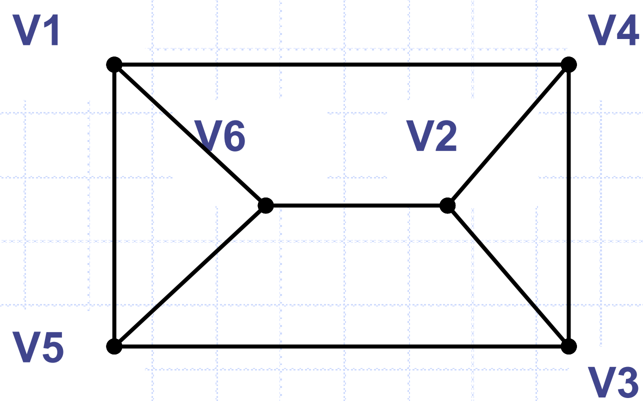
(w2,w4); (w2.w5); w2,w6)

(u2,u4); (u2,u5); u2.u6)

Visi šie grafai izomorfiniai

Grafų izomorfizmas_4



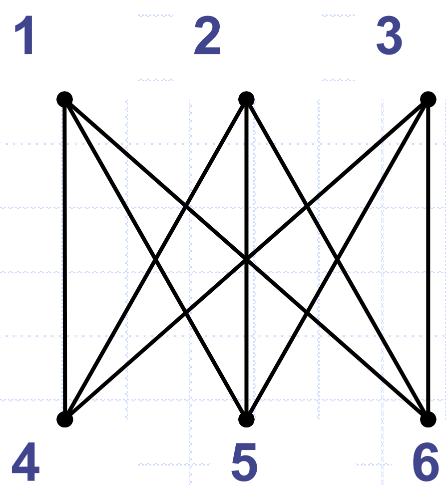


(u2,u4); (u2,u5); u2.u6)

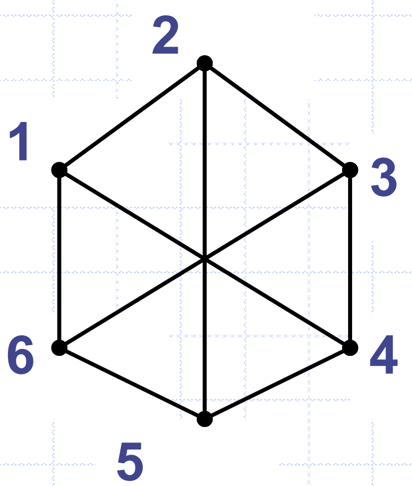
(v2,v4); (v2,v3); (v2,v6)

Šie grafai <u>nėra izomorfiniai</u>

Grafų izomorfizmas_5



a)



b)

Nesunku pastebėti, kad iš b) grafo gausime a) grafą, b) grafo viršūnes pernumeravę taip: a) 123456 b) 153426

t.y. b) grafo 2 – osios viršūnės numerį pakeisim 5 – uoju numeriu 5-osios viršūnės numerį pakeisime 2-uoju numeriu.