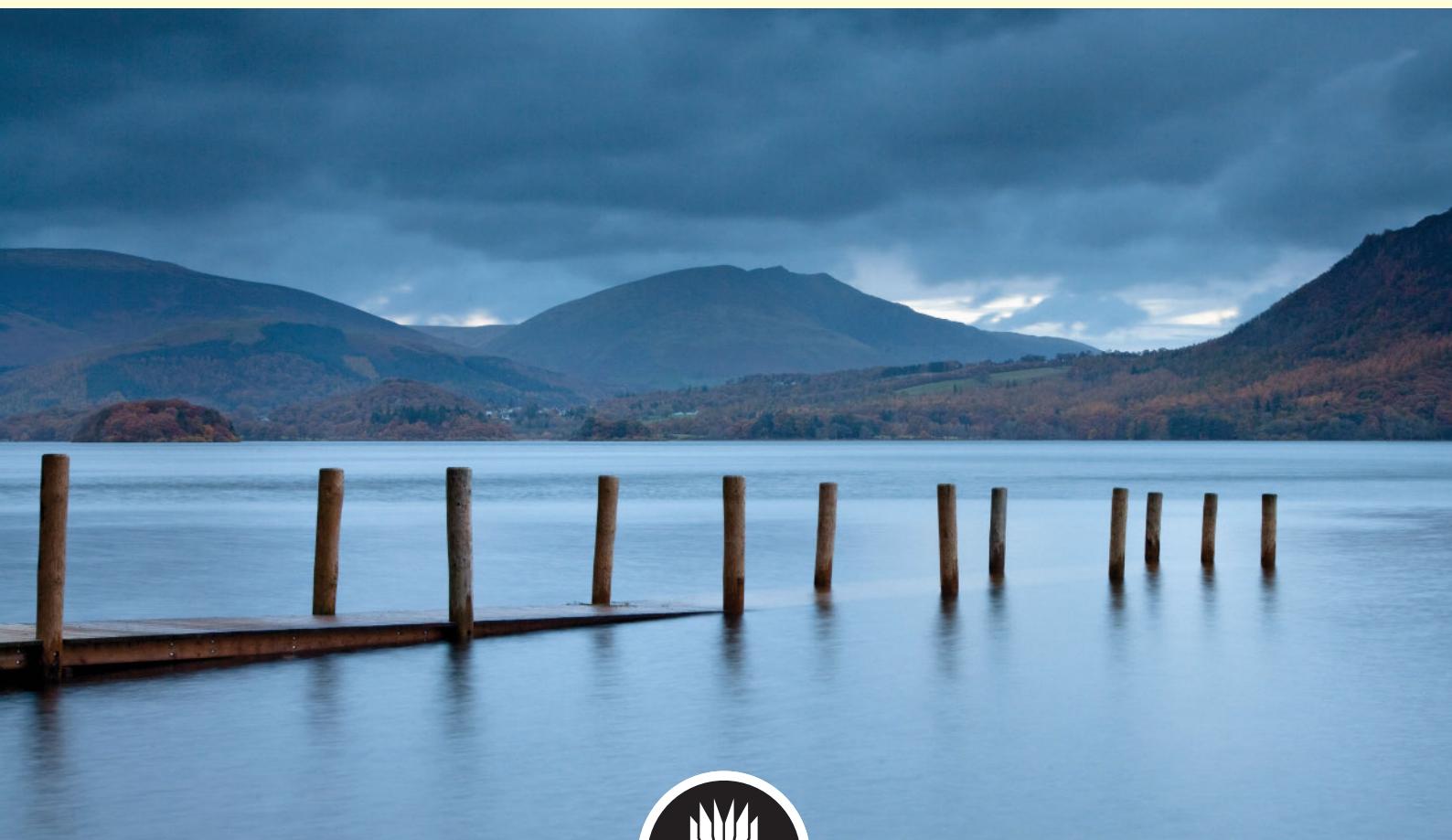


CÁLCULO

ANTON BIVENS DAVIS

VOLUME I 10^a EDIÇÃO





A635c Anton, Howard.

Cálculo [recurso eletrônico] / Howard Anton, Irl Bivens,
Stephen Davis ; tradução: Claus Ivo Doering. – 10. ed. – Porto
Alegre : Bookman, 2014.

v.1

Editado também como livro impresso em 2014.
ISBN 978-85-8260-226-3

1. Cálculo. I. Bivens, Irl. II. Davis, Stephen. III. Título.

CDU 510

HOWARD ANTON
Drexel University

IRL BIVENS
Davidson College

STEPHEN DAVIS
Davidson College

CÁLCULO

VOLUME I 10^a EDIÇÃO

Tradução

Claus Ivo Doering
Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Versão impressa
desta obra: 2014



2014

Obra originalmente publicada sob o título
Calculus Early Transcendentals, 10th Edition
ISBN 9780470647691 / 0470647698

copyright © 2012, John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation published under license with the original publisher
John Wiley & Sons, Inc.

Gerente editorial: *Arysinha Jacques Affonso*

Colaboraram nesta edição:

Editora: *Denise Weber Nowaczyk*

Capa: *Maurício Pamplona (arte sobre capa original)*

Imagen da capa: *David Henderson/Getty Images*

Leitura final: *Amanda Jansson Breitsameter*

Editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
BOOKMAN EDITORA LTDA., uma empresa do GRUPO A EDUCAÇÃO S.A.
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer
formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web
e outros), sem permissão expressa da Editora.

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

SOBRE HOWARD ANTON

Howard Anton é Bacharel em Matemática pela Lehigh University, Mestre em Matemática pela University of Illinois e Doutor em Matemática pela Polytechnic University of Brooklyn. No início da década de 1960, trabalhou na Burroughs Corporation e na Avco Corporation em Cabo Canaveral, na Flórida, onde esteve envolvido com o programa espacial tripulado. Em 1968, entrou para o Departamento de Matemática da Drexel University, onde lecionou em tempo integral até 1983. Desde então, é professor emérito da Drexel e dedica a maior parte de seu tempo a escrever livros didáticos e a atividades junto a associações matemáticas. Foi presidente da seção do leste do estado da Pensilvânia e do estado de Delaware da Mathematical Association of America (MAA), foi membro do conselho diretor daquela organização e orientou a criação das subdivisões estudantis da MAA. Publicou vários trabalhos de pesquisa em Análise Funcional, Teoria da Aproximação e Topologia, bem como artigos pedagógicos. É especialmente conhecido por seus livros didáticos em Matemática, que estão entre os mais utilizados no mundo. Existe, atualmente, mais de uma centena de versões de seus livros, inclusive traduções para o espanhol, árabe, português, italiano, indonésio, francês, japonês, chinês, hebraico e alemão. Seu livro de Álgebra Linear recebeu o prêmio de Excelência de Livro Didático e o Prêmio McGuffey, ambos da Associação dos Autores de Livros Didáticos dos E.U.A. Em seu tempo de lazer, o Dr. Anton gosta de viajar e fotografia.

SOBRE IRL BIVENS

Irl C. Bivens, agraciado com a Medalha George Polya e o Prêmio Merten M. Hasse de Texto Didático de Matemática, é Bacharel em Matemática pelo Pfeiffer College e Doutor em Matemática pela University of North Carolina, em Chapel Hill. Desde 1982, leciona no Davidson College, onde atualmente ocupa a posição de professor de Matemática. Em um ano acadêmico típico, leciona Cálculo, Topologia e Geometria. Também é apreciador de história da Matemática, e seu seminário anual de História da Matemática é um dos mais concorridos entre os formandos de Matemática de Davidson. Publicou vários artigos sobre Matemática do Ensino Superior, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Geometria Diferencial. Foi membro dos comitês editoriais das séries Problem Books e Dolciani Mathematical Expositions da Mathematical Association of America (MAA) e do *College Mathematical Journal*. Quando não está fazendo Matemática, o Prof. Bivens gosta de leitura, malabarismo, natação e caminhadas.

SOBRE STEPHEN DAVIS

Stephen L. Davis é Bacharel em Matemática pelo Lindenwood College e Doutor em Matemática pela Rutgers University. Tendo lecionado na Rutgers University e na Ohio State University, chegou ao Davidson College em 1981, onde atualmente é professor de Matemática. Leciona regularmente disciplinas de Cálculo, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata e Computação. No ano letivo de 1995-1996, foi professor associado visitante no Swarthmore College. Publicou vários artigos sobre o ensino e a avaliação do Cálculo, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Teoria de Grupos Finitos. Ocupou vários postos, inclusive de presidente e tesoureiro, na seção sudeste da Mathematical Association of America (MAA). Atualmente, é professor consultor do Serviço de Avaliação Educacional de Cálculo Avançado, membro da diretoria da Associação da Carolina do Norte de Professores de Matemática Avançada e ativamente envolvido no treinamento, no Clube de Matemática de Charlotte, de estudantes matematicamente talentosos do Ensino Médio. Em seu tempo de lazer, ele joga basquete, faz malabarismos e viaja. O Prof. Davis e sua esposa Elisabeth têm três filhos, Laura, Anne e James, todos ex-alunos de Cálculo.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

Para
minha esposa, Pat, e meus filhos, Brian, David e Lauren

Em memória de
minha mãe, Shirley
meu pai, Benjamin
meu orientador de tese e inspiração, George Bachman
Stephen Girard (1750-1831), filantropo

—H.A.

Para
meu filho, Robert
—I.B.

Para
minha esposa, Elisabeth
meus filhos, Laura, Anne e James
—S.D.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

AGRADECIMENTOS

Tivemos a sorte de contar com a orientação e o apoio de muita gente talentosa, cujo conhecimento e habilidade enriqueceram este livro de muitas formas. Por sua valiosa ajuda, agradecemos às seguintes pessoas.

Revisores da décima edição

Frederick Adkins, *Indiana University of Pennsylvania*
Gerardo Aladro, *Florida International University*
Mike Albanese, *Central Piedmont Community College*
Faiz Al-Rubaee, *University of North Florida*
Mahboub Baccouch, *University of Nebraska at Omaha*
Jim Brandt, *Southern Utah University*
Elizabeth Brown, *James Madison University*
Michael Brown, *San Diego Mesa College*
Christopher Butler, *Case Western Reserve University*
Nick Bykov, *San Joaquin Delta College*
Hongwei Chen, *Christopher Newport University*
David A. Clark, *Randolph-Macon College*
Dominic P. Clemence, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Michael Cohen, *Hofstra University*
Hugh Cornell, *Salt Lake Community College*

Kyle Costello, *Salt Lake Community College*
Walter Czarneck, *Framingham State University*
Michael Daniel, *Drexel University*
Judith Downey, *University of Nebraska, Omaha*
Artur Elezi, *American University*
David James Ellingson, *Napa Valley College*
Elaine B. Fitt, *Bucks County Community College*
Greg Gibson, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Yvonne A. Greenbaum, *Mercer County Community College*
Jerome I. Heaven, *Indiana Tech*
Kathryn Lesh, *Union College*
Eric Matsuoka, *Leeward Community College*
Ted Nirgiotis, *Diablo Valley College*
Mihaela Poplicher, *University of Cincinnati*
Adrian R. Ranic, *Erie Community College–North*
Thomas C. Redd, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
R. A. Rock, *Daniel Webster College*

John Paul Roop, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Philippe Rukimbira, *Florida International University*
Dee Dee Shaulis, *University of Colorado at Boulder*
Michael D. Shaw, *Florida Institute of Technology*
Jennifer Siegel, *Broward College–Central Campus*
Thomas W. Simpson, *University of South Carolina Union*
Maria Siopsis, *Maryville College*
Mark A. Smith, *Miami University, Ohio*
Alan Taylor, *Union College*
Kathy Vranicar, *University of Nebraska, Omaha*
Anke Walz, *Kutztown University*
Zhi-Qiang Wang, *Utah State University*
Tom Wells, *Delta College*
Greg Wisloski, *Indiana University of Pennsylvania*

Revisores e colaboradores da nona edição

Frederick Adkins, *Indiana University of Pennsylvania*
Bill Allen, *Reedley College–Clovis Center*
Jerry Allison, *Black Hawk College*
Seth Armstrong, *Southern Utah University*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
David Bradley, *University of Maine*
Wayne P. Britt, *Louisiana State University*
Dean Burbank, *Gulf Coast Community College*
Jason Cantarella, *University of Georgia*

Yanzhao Cao, *Florida A&M University*
Kristin Chatas, *Washtenaw Community College*
Michele Clement, *Louisiana State University*
Ray Collings, *Georgia Perimeter College*
David E. Dobbs, *University of Tennessee, Knoxville*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
T. J. Duda, *Columbus State Community College*

Jim Edmondson, *Santa Barbara City College*
Nancy Eschen, *Florida Community College, Jacksonville*
Reuben Farley, *Virginia Commonwealth University*
Michael Filasetta, *University of South Carolina*
Jose Flores, *University of South Dakota*
Mitch Francis, *Horace Mann*
Berit N. Givens, *California State Polytechnic University, Pomona*

X Agradecimentos

Zhuang-dan Guan, <i>University of California, Riverside</i>	John McCuan, <i>Georgia Tech</i>	Paul Seeburger, <i>Monroe Community College</i>
Jerome Heaven, <i>Indiana Tech</i>	Daryl McGinnis, <i>Columbus State Community College</i>	Charlotte Simmons, <i>University of Central Oklahoma</i>
Greg Henderson, <i>Hillsborough Community College</i>	Michael Mears, <i>Manatee Community College</i>	Don Soash, <i>Hillsborough Community College</i>
Patricia Henry, <i>Drexel University</i>	John G. Michaels, <i>SUNY Brockport</i>	Bradley Stetson, <i>Schooloraft College</i>
Danrun Huang, <i>St. Cloud State University</i>	Jason Miner, <i>Santa Barbara City College</i>	Bryan Stewart, <i>Tarrant County College</i>
Alvaro Islas, <i>University of Central Florida</i>	Darrell Minor, <i>Columbus State Community College</i>	Walter E. Stone, Jr., <i>North Shore Community College</i>
Micah James, <i>University of Illinois</i>	Kathleen Miranda, <i>SUNY Old Westbury</i>	Eleanor Storey, <i>Front Range Community College, Westminster Campus</i>
Bin Jiang, <i>Portland State University</i>	Carla Monticelli, <i>Camden County College</i>	Stefania Tracogna, <i>Arizona State University</i>
Ronald Jorgensen, <i>Milwaukee School of Engineering</i>	Bryan Mosher, <i>University of Minnesota</i>	Helene Tyler, <i>Manhattan College</i>
Mohammad Kazemi, <i>University of North Carolina, Charlotte</i>	Ferdinand O. Orock, <i>Hudson County Community College</i>	Pavlos Tzermias, <i>University of Tennessee, Knoxville</i>
Raja Khoury, <i>Collin County Community College</i>	Altay Ozgener, <i>Manatee Community College</i>	Raja Varatharajah, <i>North Carolina Agricultural and Technical State University</i>
Przemko Kranz, <i>University of Mississippi</i>	Chuang Peng, <i>Morehouse College</i>	Francis J. Vasko, <i>Kutztown University</i>
Carole King Krueger, <i>The University of Texas at Arlington</i>	Joni B. Pirnot, <i>Manatee Community College</i>	David Voss, <i>Western Illinois University</i>
Steffen Lempp, <i>University of Wisconsin, Madison</i>	Elise Price, <i>Tarrant County College</i>	Jim Voss, <i>Front Range Community College</i>
Thomas Leness, <i>Florida International University</i>	David Price, <i>Tarrant County College</i>	Anke Walz, <i>Kutztown Community College</i>
Kathryn Lesh, <i>Union College</i>	Holly Puterbaugh, <i>University of Vermont</i>	Richard Watkins, <i>Tidewater Community College</i>
Wen-Xiu Ma, <i>University of South Florida</i>	Hah Suey Quan, <i>Golden West College</i>	Xian Wu, <i>University of South Carolina</i>
Behailu Mammo, <i>Hofstra University</i>	JosephW. Rody, <i>Arizona State University</i>	Yvonne Yaz, <i>Milwaukee School of Engineering</i>
Vania Mascioni, <i>Ball State University</i>	Jan Rychtar, <i>University of North Carolina, Greensboro</i>	Richard A. Zang, <i>University of New Hampshire</i>
	John T. Saccoman, <i>Seton Hall University</i>	Xiao-Dong Zhang, <i>Florida Atlantic University</i>
	Constance Schober, <i>University of Central Florida</i>	Diane Zych, <i>Erie Community College</i>
	Kurt Sebastian, <i>United States Coast Guard</i>	

Também gostaríamos de agradecer a Celeste Hernandez e Roger Lipsett pela cuidadosa revisão da décima edição. Igualmente agradecemos a Tamas Wiandt pela revisão do manual de soluções e a Przemyslaw Bogacki pela revisão das soluções daquele manual; Brian Camp e Lyle Smith pela revisão do Guia de Estudo do Estudante; Jim Hartman pela revisão do Manual do Professor; Ann Ostberg pela revisão dos *slides* de *PowerPoint*; Beverly Fusfield por criar novos tutoriais GO e Mark McKibben por conferir esses novos tutoriais. Também agradecemos o retorno recebido de Mark Dunster, Cecelia Knoll e Michael Rosenthal a respeito de problemas selecionados de *WileyPlus*.

PREFÁCIO

Nesta décima edição de *Cálculo*, mantivemos aqueles aspectos das edições anteriores que levaram ao sucesso desta série: continuamos buscando a compreensão do estudante sem sacrificar a precisão matemática, e os conjuntos de exercícios são cuidadosamente projetados de modo a evitar surpresas desagradáveis que podem desestruturar uma classe de Cálculo.

Todas as modificações introduzidas nesta décima edição foram revisadas cuidadosamente por um grupo de destacados professores, tanto usuários de edições anteriores, quanto não usuários. A missão desse grupo de professores foi a de garantir que as mudanças não alterassem aqueles aspectos que atraíram os usuários das edições anteriores e, ao mesmo tempo, apresentar novidades que pudessem atrair novos usuários.

A seguir, algumas características do livro:

Flexibilidade Esta edição foi construída com uma flexibilidade planejada para servir um amplo espectro de filosofias do Cálculo, desde a mais tradicional até a mais “reformista”. Os recursos computacionais podem ser enfatizados, ou não, e a ordem de muitos tópicos pode ser permutada livremente para acomodar as necessidades específicas do professor.

Rigor O desafio de escrever um bom livro de Cálculo está em equilibrar corretamente o rigor e a clareza. Nossa objetivo é apresentar a mais rigorosa Matemática possível num tratamento introdutório. Quando a clareza e o rigor colidem, escolhemos clareza; contudo, acreditamos que é importante o estudante entender a diferença entre uma demonstração precisa e um argumento informal, de modo que informamos o leitor quando os argumentos apresentados são informais ou para motivação. A teoria envolvendo argumentos de ϵ e δ aparece em seções separadas, podendo ser estudada ou não, de acordo com a preferência do professor.

Regra dos quatro A “regra dos quatro” diz respeito à apresentação dos conceitos dos pontos de vista verbal, algébrico, visual e numérico. De acordo com a filosofia pedagógica atual, sempre que indicado, utilizamos essa abordagem.

Exercícios Cada conjunto de exercícios desenvolvido para esta edição foi planejado visando à prática do aluno. Exercícios com respostas proporcionam a verificação imediata do conhecimento adquirido, exercícios de compreensão focam os conceitos principais e os identificados com um ícone requerem a utilização de recursos tecnológicos, como calculadora gráfica ou sistemas computacionais.

Aplicabilidade do cálculo Um dos objetivos primários desta edição é o de estabelecer relações do Cálculo com o mundo real e com a experiência própria do estudante. Esse tema é mantido ao longo de exemplos e exercícios.

Preparação profissional Este texto foi escrito num nível matemático que prepara os estudantes para uma variedade de carreiras profissionais que requeiram um fundamento matemático sólido, incluindo as engenharias, várias ciências e a administração.

Revisão de trigonometria Muitos alunos são atormentados por deficiências em Trigonometria, de modo que incluímos uma revisão substancial de Trigonometria no Apêndice B.

Apêndice de equações polinomiais Como muitos estudantes têm dificuldades em resolver equações polinomiais, o Apêndice C traz uma revisão do Teorema da Fatoração, do Teorema do Resto e do procedimento para encontrar raízes racionais.

Princípios do cálculo de integrais O tradicional capítulo de Técnicas de Integração é denominado “Princípios do Cálculo de Integrais” para refletir uma abordagem mais moderna do material. Esse capítulo enfatiza métodos gerais e o papel de recursos computacionais no lugar de truques específicos para calcular integrais complicadas ou obscuras.

Materiais adicionais

Os materiais adicionais foram especialmente desenvolvidos para o aluno potencializar seu estudo e para o professor enriquecer suas aulas, e estão disponíveis no site www.grupoa.com.br.

Para o aluno Procure por este livro no site do Grupo A e, depois de cadastrado, acesse livremente os seguintes materiais:

Em inglês

Additional Materials
Graphing Video Tutorial
Student Study Guide
Web Appendices

Em português

Colisão com Cometa
Iteração e Sistemas Dinâmicos
Kabum, o Homem Bala
Modelando Furacões
Planejamento de Estradas de Ferro
Robótica

Para o professor Cadastre-se no site do Grupo A, busque por este livro, clique no link Material para o Professor e acesse os seguintes materiais (em inglês):

Student Solutions Manual
The Student Study Guide
Instructor's Solutions Manual
Instructor's Manual
Computerized Test Bank
Printable Test Bank
PowerPoint Presentations
Image Gallery

SUMÁRIO

VOLUME I

0 ANTES DO CÁLCULO 1

- 0.1 Funções 1
- 0.2 Funções novas a partir de antigas 15
- 0.3 Famílias de funções 27
- 0.4 Funções inversas; funções trigonométricas inversas 38
- 0.5 Funções exponenciais e logarítmicas 52

1 LIMITES E CONTINUIDADE 67

- 1.1 Limites (uma abordagem intuitiva) 67
- 1.2 Calculando limites 80
- 1.3 Limites no infinito; comportamento final de uma função 89
- 1.4 Limites (discutidos mais rigorosamente) 100
- 1.5 Continuidade 110
- 1.6 Continuidade de funções trigonométricas, exponenciais e inversas 121

2 A DERIVADA 131

- 2.1 Retas tangentes e taxas de variação 131
- 2.2 Função derivada 143
- 2.3 Introdução a técnicas de diferenciação 155
- 2.4 Regras do produto e do quociente 163
- 2.5 Derivadas de funções trigonométricas 169
- 2.6 Regra da cadeia 174

3 TÓPICOS EM DIFERENCIAÇÃO 185

- 3.1 Derivação implícita 185**
 - 3.2 Derivadas de funções logarítmicas 192**
 - 3.3 Derivadas de funções exponenciais e trigonométricas inversas 197**
 - 3.4 Taxas relacionadas 204**
 - 3.5 Aproximação linear local; diferenciais 212**
 - 3.6 Regra de L'Hôpital; formas indeterminadas 219**
-

4 A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES 232

- 4.1 Análise de funções I: crescimento, decrescimento e concavidade 232**
 - 4.2 Análise de funções II: extremos relativos; gráficos de polinômios 244**
 - 4.3 Análise de funções III: funções racionais, cúspides e retas tangentes verticais 254**
 - 4.4 Máximos e mínimos absolutos 266**
 - 4.5 Problemas de máximos e de mínimos em aplicações 274**
 - 4.6 Movimento retilíneo 288**
 - 4.7 Método de Newton 296**
 - 4.8 O teorema de Rolle; o teorema do valor médio 302**
-

5 INTEGRAÇÃO 316

- 5.1 Uma visão geral do problema de área 316**
 - 5.2 A integral indefinida 322**
 - 5.3 Integração por substituição 332**
 - 5.4 A definição de área como um limite; notação de somatório 340**
 - 5.5 A integral definida 353**
 - 5.6 O teorema fundamental do cálculo 362**
 - 5.7 Movimento retilíneo revisto usando integração 376**
 - 5.8 Valor médio de uma função e suas aplicações 385**
 - 5.9 Calculando integrais definidas por substituição 390**
 - 5.10 Funções logarítmicas e outras funções definidas por integral 396**
-

6 APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA GEOMETRIA, NAS CIÊNCIAS E NA ENGENHARIA 413

- 6.1 Área entre duas curvas 413**
- 6.2 Volumes por fatiamento; discos e arruelas 421**
- 6.3 Volumes por camadas cilíndricas 432**
- 6.4 Comprimento de uma curva plana 438**
- 6.5 Área de uma superfície de revolução 444**
- 6.6 Trabalho 449**
- 6.7 Momentos, centros de gravidade e centroides 458**
- 6.8 Pressão e força de fluidos 467**
- 6.9 Funções hiperbólicas e cabos pendentes 474**

7 PRINCÍPIOS DO CÁLCULO DE INTEGRAIS 488

- 7.1 Uma visão geral dos métodos de integração 488**
 - 7.2 Integração por partes 491**
 - 7.3 Integração de funções trigonométricas 500**
 - 7.4 Substituições trigonométricas 508**
 - 7.5 Integração de funções racionais por frações parciais 514**
 - 7.6 O uso de sistemas algébricos computacionais e de tabelas de integrais 523**
 - 7.7 Integração numérica; regra de Simpson 533**
 - 7.8 Integrais impróprias 547**
-

A APÊNDICES

- A GRÁFICOS DE FUNÇÕES UTILIZANDO CALCULADORAS E RECURSOS COMPUTACIONAIS A1**
- B REVISÃO DE TRIGONOMETRIA B1**
- C RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMINAIS C1**

Respostas dos exercícios ímpares **R1**

Índice **I1**

VOLUME II

8 MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 561

- 8.1 Equações diferenciais de primeira ordem e aplicações 561**
 - 8.2 Separação de variáveis 568**
 - 8.3 Campos de direções; método de Euler 579**
 - 8.4 Equações diferenciais de primeira ordem e aplicações 586**
-

9 SÉRIES INFINITAS 596

- 9.1 Sequências 596**
- 9.2 Sequências monótonas 607**
- 9.3 Séries infinitas 614**
- 9.4 Testes de convergência 623**
- 9.5 Testes de comparação, da razão e da raiz 631**
- 9.6 Séries alternadas; convergência absoluta e condicional 638**
- 9.7 Polinômios de Maclaurin e de Taylor 648**
- 9.8 Séries de Maclaurin e de Taylor; séries de potências 659**
- 9.9 Convergência de séries de Taylor 668**
- 9.10 Derivação e integração de séries de potências; modelando com séries de Taylor 678**

10 CURVAS PARAMÉTRICAS E POLARES; SEÇÕES CÔNICAS 692

- 10.1** Equações paramétricas; retas tangentes e comprimento de curvas paramétricas **692**
10.2 Coordenadas polares **705**
10.3 Retas tangentes, comprimento de arco e área com curvas polares **719**
10.4 Seções cônicas **730**
10.5 Rotação de eixos; equações de segunda ordem **748**
10.6 Seções cônicas em coordenadas polares **754**
-

11 ESPAÇO TRIDIMENSIONAL; VETORES 767

- 11.1** Coordenadas retangulares no espaço; esferas; superfícies cilíndricas **767**
11.2 Vetores **773**
11.3 Produto escalar; projeções **785**
11.4 Produto vetorial **795**
11.5 Equações paramétricas de retas **805**
11.6 Planos no espaço tridimensional **813**
11.7 Superfícies quádricas **821**
11.8 Coordenadas cilíndricas e esféricas **832**
-

12 FUNÇÕES VETORIAIS 841

- 12.1** Introdução às funções vetoriais **841**
12.2 Cálculo de funções vetoriais **848**
12.3 Mudança de parâmetro; comprimento de arco **858**
12.4 Vetores tangente, normal e binormal unitários **868**
12.5 Curvatura **873**
12.6 Movimento ao longo de uma curva **882**
12.7 Leis de Kepler do movimento planetário **895**
-

13 DERIVADAS PARCIAIS 906

- 13.1** Funções de duas ou mais variáveis **906**
13.2 Limites e continuidade **917**
13.3 Derivadas parciais **927**
13.4 Diferenciabilidade, diferenciais e linearidade local **940**
13.5 Regra da cadeia **949**
13.6 Derivadas direcionais e gradientes **960**
13.7 Planos tangentes e vetores normais **971**
13.8 Máximos e mínimos de funções de duas variáveis **977**
13.9 Multiplicadores de Lagrange **989**

14 INTEGRAIS MÚLTIPLAS 1000

- 14.1 Integrais duplas 1000**
 - 14.2 Integrais duplas em regiões não retangulares 1009**
 - 14.3 Integrais duplas em coordenadas polares 1018**
 - 14.4 Área de superfície; superfícies paramétricas 1026**
 - 14.5 Integrais triplas 1039**
 - 14.6 Integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas 1048**
 - 14.7 Mudança de variáveis em integrais múltiplas; jacobianos 1058**
 - 14.8 Centros de gravidade usando integrais múltiplas 1071**
-

15 TÓPICOS DO CÁLCULO VETORIAL 1084

- 15.1 Campos vetoriais 1084**
 - 15.2 Integrais de linha 1094**
 - 15.3 Independência do caminho; campos vetoriais conservativos 1111**
 - 15.4 Teorema de Green 1122**
 - 15.5 Integrais de superfície 1130**
 - 15.6 Aplicações de integrais de superfície; fluxo 1138**
 - 15.7 Teorema da divergência 1148**
 - 15.8 Teorema de Stokes 1158**
-

A APÊNDICE**D PROVAS SELECIONADAS D1****Respostas dos exercícios ímpares R1****Índice I1**

AS RAÍZES DO CÁLCULO

As excitantes aplicações atuais do Cálculo têm raízes que remontam ao trabalho do matemático grego Arquimedes, mas a descoberta dos princípios fundamentais do Cálculo foi feita independentemente por Isaac Newton (inglês) e Gottfried Leibniz (alemão) ao final do século XVII. O trabalho de Newton e de Leibniz foi motivado por quatro grandes classes de problemas científicos e matemáticos daquela época:

- Encontrar a reta tangente a uma curva arbitrária num dado ponto.
- Encontrar a área de uma região, o comprimento de uma curva e o volume de um sólido arbitrários.
- Encontrar os valores máximo e mínimo de uma quantidade – por exemplo, as distâncias máxima e mínima de um planeta ao Sol ou o alcance máximo possível de um projétil variando o ângulo de disparo.
- Dada uma fórmula para a distância percorrida por um objeto num certo tempo especificado, encontrar a velocidade e a aceleração desse objeto num dado instante. Reciprocamente, dada uma fórmula que especifique a

aceleração e a velocidade num dado instante, encontrar a distância percorrida pelo objeto num determinado período de tempo.

Newton e Leibniz encontraram uma relação fundamental entre os problemas de determinar uma reta tangente a uma curva e o de determinar a área de uma região. A descoberta dessa relação é considerada a “descoberta do Cálculo”. Embora Newton tivesse visto a relação entre esses dois problemas dez anos antes de Leibniz, este publicou seu trabalho vinte anos antes daquele, numa circunstância que levou a um conflituoso debate sobre quem teria sido o autêntico descobridor do Cálculo. Esse debate envolveu a Europa durante meio século, com os cientistas do continente europeu apoiando Leibniz e os da Inglaterra, Newton. O conflito foi extremamente infeliz, porque a notação inferior de Newton barrou muito o desenvolvimento científico na Inglaterra, e o continente, por sua vez, perdeu por quase cinquenta anos o benefício das descobertas de Newton em Astronomia e na Física. Apesar disso tudo, Newton e Leibniz foram admiradores sinceros do trabalho um do outro.



ISAAC NEWTON (1642-1727)

Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe, na Inglaterra. Seu pai faleceu antes de seu nascimento e sua mãe criou-o na fazenda da família. Quando jovem, mostrou pouca evidência de seu brilho como adulto, exceto por um talento pouco comum com aparelhos mecânicos; aparentemente, ele construiu um relógio movido a água e um moinho de farinha movido por um camundongo. Em 1661, ele entrou no Trinity College em Cambridge sabendo pouca Geometria. Fortuitamente, chamou a atenção de Isaac Barrow, um matemático talentoso que era professor daquela instituição. Guiado por Barrow, Newton se dedicou à Matemática e às Ciências, mas graduou-se sem distinção especial. Em razão da peste bubônica que se espalhou rapidamente por Londres, voltou para sua casa em Woolsthorpe e lá permaneceu durante os anos de 1665 e 1666. Nesses dois anos momentosos, todo o arcabouço da ciência moderna foi criado miraculosamente na mente de Newton. Ele descobriu o Cálculo, reconheceu os princípios básicos do movimento planetário e da gravitação e determinou que a “luz branca” do Sol era composta por todas as cores, desde o vermelho até o violeta. Por alguma razão, manteve para si mesmo todas as suas descobertas. Em 1667, retornou a Cambridge para obter o título de Mestre e, depois de graduado, tornou-se professor em Trinity. Em 1669, sucedeu seu professor, Isaac Barrow, na assim chamada cátedra lucasiana de Matemática de Trinity, que é um dos mais honrados postos de matemático do mundo.

Daí em diante, o fluxo de suas descobertas brilhantes foi contínuo. Newton formulou a lei da gravitação e usou-a para explicar o movimento da Lua, dos planetas e das marés; formulou as leis básicas da luz, da termodinâmica e da hidrodinâmica; projetou e construiu o primeiro telescópio refletor moderno. Ao

longo de sua vida, ele hesitava em publicar suas principais descobertas, talvez temendo críticas ou controvérsias, revelando-as somente para amigos de um círculo seletivo. Em 1687, somente após intensa persuasão do astrônomo Edmond Halley (o descobridor do cometa Halley), Newton publicou sua obra-prima, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*

[Imagem: domínio público de <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hw-newton.jpg>. A imagem foi fornecida por cortesia da Biblioteca da Universidade do Texas em Austin.]

(Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural). Esse trabalho é considerado por muitos como o livro científico mais importante e influente jamais escrito. Nele, Newton explicou o funcionamento do sistema solar e formulou as leis básicas do movimento, que até hoje são fundamentais na Engenharia e na Física. Entretanto, nem mesmo o apelo de seus amigos convenceu-o a tornar pública sua descoberta do Cálculo. Somente após Leibniz ter publicado seus resultados, Newton condescendeu e publicou seus trabalhos sobre a área.

Depois de 25 anos como professor, Newton entrou em depressão e teve um esgotamento nervoso. Ele desistiu da pesquisa em 1695 para aceitar uma posição na casa da moeda de Londres. Durante os 25 anos que lá trabalhou, ele praticamente não fez nenhum trabalho científico ou matemático. Newton foi nomeado cavaleiro em 1705 e, quando morreu, foi enterrado na abadia de Westminster com todas as honras que seu país poderia prestar. É interessante notar que ele era um teólogo instruído que viu o valor de seu trabalho como sendo o seu apoio à existência de Deus. Por toda sua vida, trabalhou apaixonadamente para datar eventos bíblicos, relacionando-os a fenômenos astronômicos. Essa paixão o consumia tanto que gastou anos procurando indícios do fim do mundo e da geografia do inferno no Livro de Daniel.

Newton descrevia sua brilhante realização da seguinte forma: “Eu tenho a impressão de ter sido apenas uma criança brincando numa praia, divertindo-me aqui e acolá e descobrindo uma pedrinha mais redonda ou uma conchinha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade está todo a ser descoberto à minha frente.”



[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg]

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Esse talentoso gênio foi uma das últimas pessoas a dominar a maior parte dos campos de conhecimento, uma realização impossível em nossa época de especialização. Ele foi um especialista em Direito, Religião, Filosofia, Literatura, Política, Geologia, Metafísica, Alquimia, História e Matemática.

Leibniz nasceu em Leipzig, na Alemanha. Seu pai, um professor de Filosofia Moral na Universidade de Leipzig, faleceu quando ele tinha seis anos de idade. A criança precoce teve, então, acesso à biblioteca de seu pai e começou a ler vorazmente sobre uma grande variedade de assuntos, um hábito que manteve durante toda sua vida. Com 15 anos, entrou na Universidade de Leipzig como estudante de Direito e, aos 20, obteve um título de Doutor da Universidade de Altdorf. Subsequentemente, Leibniz seguiu uma carreira em Direito e em Política Internacional, tendo sido conselheiro de reis e príncipes. Durante suas inúmeras missões no exterior, entrou em contato com renomados matemáticos e cientistas que estimularam seu interesse pela Matemática, mais notadamente o físico Christian Huygens. Leibniz foi autodidata em Matemática, aprendendo o assunto com a leitura de artigos e periódicos. Como um resultado dessa educação matemática fragmentada, ele frequentemente redescobria os trabalhos de outros, o que ajudou a acender o debate sobre a descoberta do Cálculo.

Leibniz nunca se casou. Ele tinha hábitos moderados e era irascível, mas facilmente acalmado e benevolente em seu julgamento acerca do trabalho de outros. Apesar de suas grandes realizações, Leibniz nunca recebeu as honras

dadas a Newton e passou seus últimos anos como um homem solitário e amargurado. Em seu funeral havia uma só pessoa enlutada, sua secretária. Uma testemunha observou: “Ele foi enterrado mais como um ladrão do que o que ele realmente era, um ornamento de seu país.”

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.



© Arco Images/Alamy

O desenvolvimento do Cálculo nos séculos XVII e XVIII foi motivado pela necessidade de entender fenômenos físicos como as marés, as fases da Lua, a natureza da luz e a gravidade.

0

ANTES DO CÁLCULO

Um dos temas mais importantes do Cálculo é a análise das relações entre quantidades físicas ou matemáticas. Tais relações podem ser descritas em termos de gráficos, fórmulas, dados numéricos ou palavras. Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de “função”, que é a ideia básica subjacente a quase todas as relações matemáticas e físicas, não importando como são expressas. Estudaremos as propriedades de algumas das funções mais básicas que ocorrem no Cálculo, incluindo as funções polinomiais, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciais e logarítmicas.

0.1 FUNÇÕES

Nesta seção, definiremos e desenvolveremos o conceito de “função”, que é o objeto matemático básico utilizado por cientistas e matemáticos para descrever relações entre quantidades variáveis. As funções desempenham um papel central no Cálculo e em suas aplicações.

■ DEFINIÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Muitas leis científicas e muitos princípios de Engenharia descrevem como uma quantidade depende de outra. Em 1673, essa ideia foi formalizada por Leibniz, que cunhou o termo *função* para indicar a dependência de uma quantidade em relação a uma outra, conforme a definição a seguir.

0.1.1 DEFINIÇÃO Se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y , então dizemos que y é *uma função de x* .

Quatro maneiras usuais de representar funções são:

- Numericamente com tabelas
- Geometricamente com gráficos
- Algebricamente com fórmulas
- Verbalmente

Tabela 0.1.1

VELOCIDADES DE QUALIFICAÇÃO
NAS 500 MILHAS DE INDIANÁPOLIS

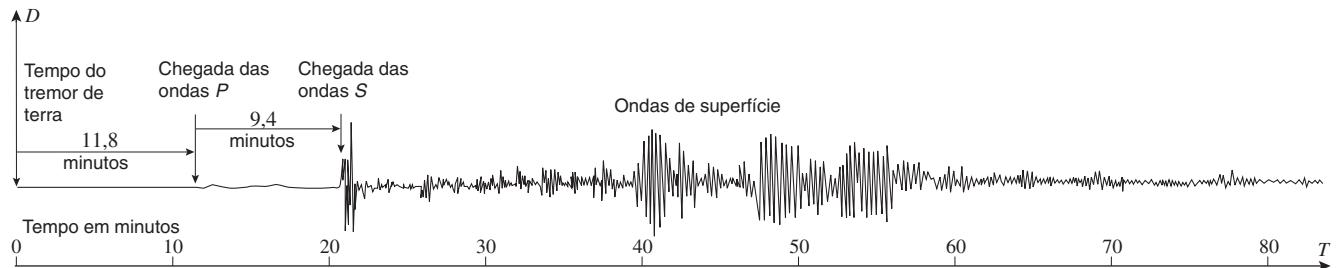
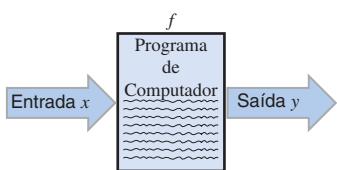
ANO t	VELOCIDADE S (milhas/hora)
1994	228,011
1995	231,604
1996	233,100
1997	218,263
1998	223,503
1999	225,179
2000	223,471
2001	226,037
2002	231,342
2003	231,725
2004	222,024
2005	227,598
2006	228,985
2007	225,817
2008	226,366
2009	224,864
2010	227,970
2011	227,472

O método de representação muitas vezes depende de como surgiu a função. Por exemplo:

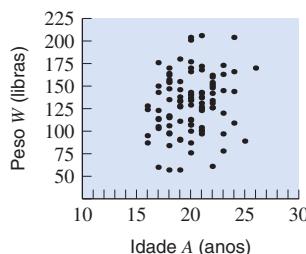
- A Tabela 0.1.1 mostra a velocidade de qualificação S para a *pole* na corrida de 500 milhas de Indianápolis como uma função do ano t . Há exatamente um valor de S para cada valor de t .
- A Figura 0.1.1 é um registro gráfico de um terremoto feito por um sismógrafo. O gráfico descreve a deflexão D da agulha do sismógrafo como uma função do tempo T decorrido desde o instante em que o abalo deixou o epicentro do terremoto. Há exatamente um valor de D para cada valor de T .
- Algumas das mais conhecidas funções surgem de fórmulas; por exemplo, a fórmula $C = 2\pi r$ expressa o comprimento da circunferência C de um círculo como uma função do raio r do círculo. Há exatamente um valor de C para cada valor de r .
- Algumas vezes, as funções são descritas em palavras. Por exemplo, a Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton é, frequentemente, enunciada da seguinte forma: a força gravitacional de atração entre dois corpos no Universo é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Esta é a descrição verbal da fórmula:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

a qual F é a força de atração, m_1 e m_2 são as massas, r é a distância entre os corpos e G é uma constante. Se as massas são constantes, então a descrição verbal define F como uma função de r . Há exatamente um valor de F para cada valor de r .

**Figura 0.1.1****Figura 0.1.2**

Na metade do século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (pronuncia-se “oiler”) concebeu a ideia de denotar funções pelas letras do alfabeto, tornando possível, desse modo, trabalhar com funções sem apresentar fórmulas específicas, gráficos ou tabelas. Para entender a ideia de Euler, pense numa função como sendo um programa de computador que toma uma *entrada* x , opera com ela de alguma forma e produz exatamente uma *saída* y . O programa de computador é um objeto por si só, assim podemos dar-lhe um nome, digamos f . Dessa forma, a função f (o programa de computador) associa uma única saída y a cada entrada x (Figura 0.1.2). Isso sugere a definição a seguir.

**Figura 0.1.3**

0.1.2 DEFINIÇÃO Uma *função* f é uma regra que associa uma única saída a cada entrada. Se a entrada for denotada por x , então a saída é denotada por $f(x)$ (leia-se “ f de x ”).

Nessa definição, o termo *única* significa “exatamente uma”. Assim, uma função não pode produzir duas saídas diferentes com a mesma entrada. Por exemplo, a Figura 0.1.3 mostra um gráfico de dispersão de pesos *versus* idade para uma amostra aleatória de 100 estudantes universitários. Esse gráfico de dispersão *não* descreve o peso W como uma fun-

ção da idade A , pois há alguns valores de A com mais de um valor correspondente de W . Isso é esperado, uma vez que duas pessoas com a mesma idade não têm, necessariamente, o mesmo peso.

■ VARIÁVEIS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Para uma dada entrada x , a saída de uma função f é denominada **valor** de f em x , ou **imagem** de x por f . Muitas vezes, denotamos a saída de uma função por uma letra, digamos y , e escrevemos

$$y = f(x)$$

Essa equação expressa y como uma função de x ; a variável x é denominada **variável independente** (ou **argumento**) de f , e a variável y é denominada **variável dependente** de f . Essa terminologia tem o objetivo de sugerir que x está livre para variar, mas, uma vez dado um valor específico para x , o valor correspondente de y está determinado. Por enquanto, consideramos apenas funções em que as variáveis independente e dependente são números reais, caso em que dizemos que f é uma **função real de uma variável real**. Adiante consideraremos outros tipos de funções.

Tabela 0.1.2

x	0	1	2	3
y	3	4	-1	6

► **Exemplo 1** A Tabela 0.1.2 descreve uma relação funcional $y = f(x)$ em que

$f(0) = 3$	f associa $y = 3$ a $x = 0$
$f(1) = 4$	f associa $y = 4$ a $x = 1$
$f(2) = -1$	f associa $y = -1$ a $x = 2$
$f(3) = 6$	f associa $y = 6$ a $x = 3$

► **Exemplo 2** A equação

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

está na forma $y = f(x)$ em que a função f é dada pela fórmula

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$$



Leonhard Euler (1707-1783) Euler foi, provavelmente, o mais prolífico de todos os matemáticos. Foi dito que “Euler fazia matemática tão facilmente quanto a maioria dos homens respira”. Ele nasceu em Basileia, Suíça, e era filho de um ministro protestante, o qual, por sua vez, já estudara Matemática. O gênio de Euler se desenvolveu cedo. Ele frequentou a Universidade de Basileia e, aos 16 anos, obteve simultaneamente os títulos de Bacharel em Artes e Mestre em Filosofia. Enquanto estava em Basileia, teve a sorte de ser orientado um dia por semana pelo notável matemático Johann Bernoulli. Sob a pressão do pai, começou a estudar Teologia. Contudo, o fascínio pela Matemática era muito grande e, aos 18 anos, começou a pesquisar. Não obstante, a influência do pai era muito forte, e seus estudos teológicos persistiram; assim, por toda a vida Euler foi profundamente religioso e simples. Em períodos diferentes, lecionou na Academia de Ciências de São Petersburgo (Rússia), na Universidade de Basileia e na Academia de Ciências de Berlim. A energia e a capacidade de trabalho de Euler eram praticamente ilimitadas. Seus trabalhos acumulados formam mais de 100 volumes in-quarto (folha de papel dobrada duas vezes) e acredita-se que

muito de seu trabalho tenha sido perdido. É particularmente esparto que nos últimos 17 anos de sua vida, quando mais produziu, estava cego! A memória impecável de Euler era fenomenal. Mais cedo em sua vida, memorizou a *Eneida* de Virgílio e, com 70 anos, era capaz de recitar a obra inteira. Além disso, podia dar a primeira e a última sentença de cada página do livro memorizado. Sua habilidade em resolver problemas de cabeça era inacreditável. Ele solucionava de cabeça grandes problemas do movimento lunar que frustravam Isaac Newton e, em certa ocasião, fez um complicado cálculo de cabeça para encerrar uma discussão entre dois estudantes, cujos cálculos diferiam na quinquagésima casa decimal.

A partir de Leibniz e Newton, os resultados em Matemática se desenvolveram rápida e desordenadamente. O gênio de Euler deu uma coerência à paisagem Matemática. Ele foi o primeiro matemático a trazer toda a força do Cálculo para resolver problemas da Física. Fez contribuições importantes a praticamente todos os ramos da Matemática, bem como à teoria da óptica, dos movimentos planetários, da eletricidade, do magnetismo e da mecânica geral.

[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_by_Handmann_.png]

Para cada entrada x , a saída correspondente y é obtida substituindo x nessa fórmula. Por exemplo,

$$f(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 2 = 2$$

f associa y = 2 a x = 0

$$f(-1,7) = 3(-1,7)^2 - 4(-1,7) + 2 = 17,47$$

f associa y = 17,47 a x = -1,7

$$f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 2 = 8 - 4\sqrt{2}$$

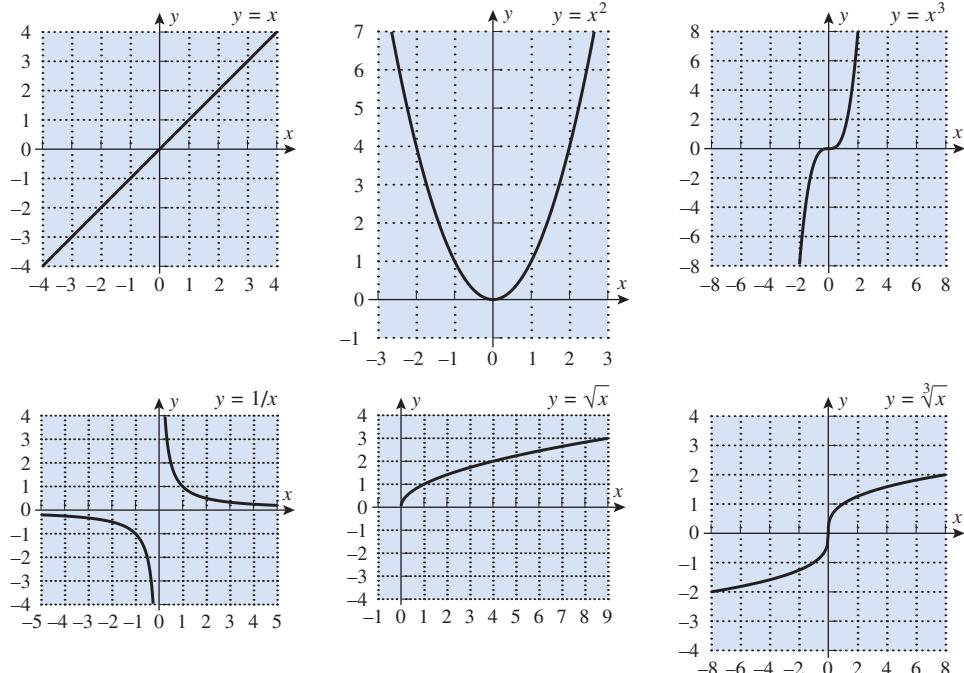
f associa y = 8 - 4\sqrt{2} a x = \sqrt{2}



A Figura 0.1.4 mostra apenas partes dos gráficos. Quando for o caso, e a menos de indicação em contrário, deve ser entendido que os gráficos exibidos neste texto se estendem indefinidamente para além das margens da figura dada.

■ GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Se f for uma função de uma variável real a valores reais, então o **gráfico** de f no plano xy é definido como sendo o gráfico da equação $y = f(x)$. Por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x$ é o gráfico da equação $y = x$ que aparece na Figura 0.1.4. Essa figura também mostra os gráficos de algumas outras funções básicas, possivelmente conhecidas. No Apêndice A, vamos discutir técnicas para a construção de gráficos de funções usando computadores e calculadoras.



Como \sqrt{x} é imaginário para valores negativos de x , não há pontos no gráfico de $y = \sqrt{x}$ na região em que $x < 0$.

Figura 0.1.4

Os gráficos podem fornecer informação visual importante sobre uma função. Por exemplo, como o gráfico de uma função f no plano xy é o gráfico da equação $y = f(x)$, os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$; ou seja, a coordenada y de um ponto do gráfico de f é o valor de f na coordenada x correspondente (Figura 0.1.5). Os valores de x nos quais $f(x) = 0$ são as ordenadas x dos pontos nos quais o gráfico de f intersecta o eixo x (Figura 0.1.6). Esses valores são denominados *zeros* de f , *raízes* de $f(x) = 0$ ou *pontos de corte* de $y = f(x)$ com o eixo x .

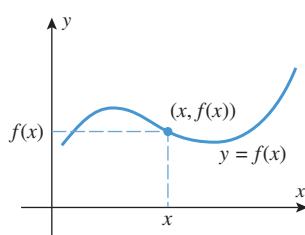


Figura 0.1.5 A coordenada y de um ponto no gráfico de $y = f(x)$ é o valor de f na coordenada x correspondente.

■ O TESTE DA RETA VERTICAL

Nem toda curva no plano xy é o gráfico de uma função. Por exemplo, considere a curva na Figura 0.1.7, que é cortada em dois pontos distintos (a, b) e (a, c) por uma reta vertical. Essa curva não pode ser o gráfico de $y = f(x)$, qualquer que seja a função f , senão teríamos

$$f(a) = b \quad e \quad f(a) = c$$

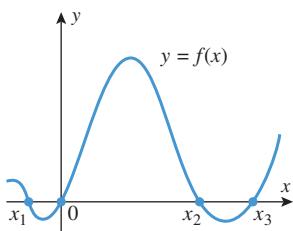


Figura 0.1.6 f tem zeros em x_1 , 0, x_2 e x_3 .

o que é impossível, uma vez que f não pode atribuir dois valores diferentes para a . Assim, não existe uma função f cujo gráfico seja a curva dada. Isso ilustra o seguinte resultado geral, denominado **teste da reta vertical**.

0.1.3 TESTE DA RETA VERTICAL *Uma curva no plano xy é o gráfico de alguma função se, e somente se, nenhuma reta vertical intersecta a curva mais de uma vez.*

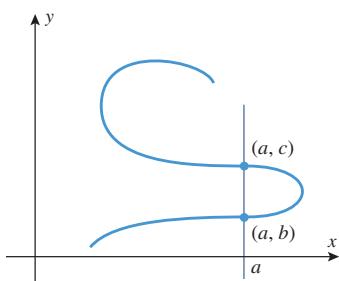


Figura 0.1.7 Esta curva não pode ser o gráfico de uma função.

Símbolos tais como $+x$ e $-x$ são enganosos, uma vez que é tentador concluir ser $+x$ positivo e $-x$ negativo. Porém, isso não precisa ser assim, pois x pode ser positivo ou negativo. Por exemplo, se x for negativo, digamos $x = -3$, então $-x = 3$ é positivo e $+x = -3$ é negativo.

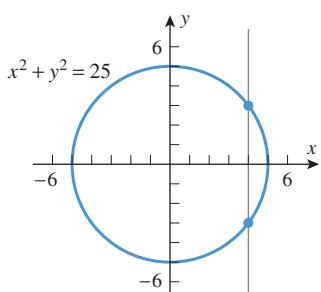


Figura 0.1.8

ADVERTÊNCIA

Para denotar a raiz quadrada negativa, precisamos escrever $-\sqrt{x}$. Por exemplo, a raiz quadrada positiva de 9 é $\sqrt{9} = 3$, enquanto a raiz quadrada negativa é $-\sqrt{9} = -3$. (Não cometa o erro de escrever $\sqrt{9} = \pm 3$.)

► Exemplo 3

O gráfico da equação

$$x^2 + y^2 = 25$$

é um círculo de raio 5, centrado na origem; assim existem retas verticais que cortam o gráfico mais de uma vez (Figura 0.1.8) e essa equação não define y como uma função de x . ◀

■ A FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO

Lembre-se de que o **valor absoluto** ou a **grandeza** de um número real x é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

O efeito de considerar o valor absoluto de um número é tirar o sinal menos, se o número for negativo, ou deixá-lo como está, se for não negativo. Assim,

$$|5| = 5, \quad \left| -\frac{4}{7} \right| = \frac{4}{7}, \quad |0| = 0$$

A seguir, um resumo de suas propriedades algébricas.

0.1.4 PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO

Se a e b são números reais, então

- (a) $|-a| = |a|$ Um número e seu negativo têm o mesmo valor absoluto.
- (b) $|ab| = |a| |b|$ O valor absoluto de um produto é igual ao produto dos valores absolutos.
- (c) $|a/b| = |a|/|b|, b \neq 0$ O valor absoluto de uma razão é a razão dos valores absolutos.
- (d) $|a + b| \leq |a| + |b|$ A *desigualdade triangular*.

O gráfico da função $f(x) = |x|$ pode ser obtido representando separadamente as duas partes da equação

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Combinando as duas partes, obtemos o gráfico em forma de V da Figura 0.1.9.

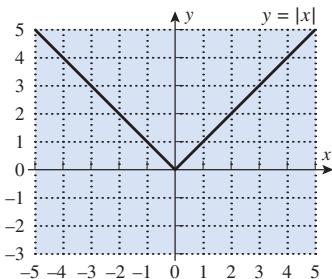
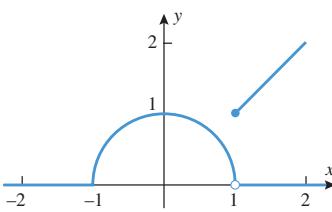
Valores absolutos guardam relações importantes com raízes quadradas. Para ver isso, lembre-se de que, pela Álgebra, todo número real positivo x tem duas raízes quadradas, uma positiva e a outra negativa. Por definição, o símbolo \sqrt{x} denota a raiz quadrada *positiva* de x .

Ao simplificar as expressões da forma $\sqrt{x^2}$, é necessário cuidado, pois nem sempre é verdade que $\sqrt{x^2} = x$. Essa equação é correta se x for não negativo, porém é falsa se x for negativo. Por exemplo, se $x = -4$, então

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq x$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Verifique (1) usando uma calculadora gráfica para mostrar que as equações $y = \sqrt{x^2}$ e $y = |x|$ têm o mesmo gráfico.

**Figura 0.1.9****Figura 0.1.10****OBSERVAÇÃO**

Na Figura 0.1.10, no ponto de mudança $x = 1$, a bola sólida está na reta, enquanto a bola vazia está no semicírculo, enfatizando que o ponto está na reta e não no semicírculo. Não há ambiguidade no ponto $x = -1$, pois as duas partes do gráfico juntam-se continuamente aí.



© Brian Horisk/Alamy

O índice de sensação térmica mede a sensação de resfriamento que sentimos com o efeito combinado de temperatura e velocidade do vento.

Uma afirmação que é correta com todos os valores reais de x é

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (1)$$

■ FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

A função valor absoluto $f(x) = |x|$ é um exemplo de uma função definida *por partes*, no sentido de que a fórmula para f muda dependendo do valor de x .

► **Exemplo 4** Esboce o gráfico da função definida por partes pela fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & -1 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

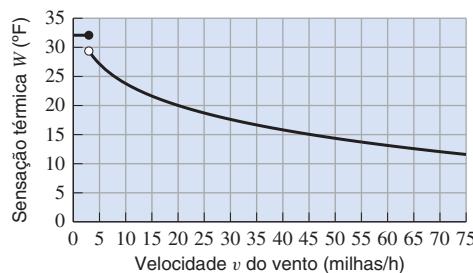
Solução A fórmula para f muda nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ (denominados *pontos de mudança* para a fórmula). Um bom procedimento para elaborar os gráficos de funções definidas por partes é fazê-lo separadamente sobre os intervalos determinados pelos pontos de mudança e depois nos próprios pontos. Para a função f deste exemplo, o gráfico é o segmento da reta horizontal $y = 0$ sobre o intervalo $(-\infty, -1]$, o semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ sobre o intervalo $(-1, 1)$ e o segmento da reta $y = x$ sobre o intervalo $[1, +\infty)$. A fórmula para f especifica que a equação $y = 0$ se aplica ao ponto de mudança -1 [assim, $y = f(-1) = 0$] e que a equação $y = x$ se aplica ao ponto de mudança 1 [assim, $y = f(1) = 1$]. O gráfico de f aparece na Figura 0.1.10. ▲

Na Figura 0.1.10, no ponto de mudança $x = 1$, a bola sólida está na reta, enquanto a bola vazia está no semicírculo, enfatizando que o ponto está na reta e não no semicírculo. Não há ambiguidade no ponto $x = -1$, pois as duas partes do gráfico juntam-se continuamente aí.

► **Exemplo 5** Aumentando a velocidade na qual o ar passa sobre a pele de uma pessoa, aumenta também a taxa de evaporação da umidade da pele, produzindo uma sensação de resfriamento. (Por isso utilizamos ventiladores no verão.) O *índice de sensação térmica* em um dado instante (definido pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA) é a temperatura em graus Fahrenheit a uma velocidade de vento de 4 milhas por hora que produziria a mesma sensação de resfriamento sobre a pele exposta que a combinação de temperatura do ar e velocidade do vento no dado instante. Uma fórmula empírica, isto é, baseada em dados experimentais, para o índice de sensação térmica W a 32°F com uma velocidade do vento de v milhas por hora é

$$W = \begin{cases} 32, & 0 \leq v \leq 3 \\ 55,628 - 22,07v^{0,16}, & 3 < v \end{cases}$$

Um gráfico de $W(v)$ gerado por computador é dado na Figura 0.1.11. ▲

**Figura 0.1.11** Sensação térmica versus velocidade do vento a 32°F.

■ DOMÍNIO E IMAGEM

Se x e y estão relacionados pela equação $y = f(x)$, então o conjunto de todas as entradas permitidas (os valores de x) é denominado **domínio** de f , e o conjunto de todas as saídas (os valores de y) que resultam quando x varia sobre o domínio é denominado **imagem** de f . Por exemplo, se f é a função definida pela tabela no Exemplo 1, então o domínio é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ e a imagem é o conjunto $\{-1, 3, 4, 6\}$.

Às vezes, considerações físicas ou geométricas impõem restrições sobre as entradas permitíveis de uma função. Por exemplo, se y denota a área de um quadrado de lado x , então essas variáveis estão relacionadas pela equação $y = x^2$. Embora essa equação produza um único valor de y para cada número real x , o fato de que os comprimentos devem ser números não negativos impõe a exigência que $x \geq 0$.

Quando uma função está definida por uma fórmula matemática, a fórmula em si pode impor restrições sobre as entradas permitíveis. Por exemplo, se $y = 1/x$, então $x = 0$ não é uma entrada válida, pois divisão por zero não está definida, e se $y = \sqrt{x}$, então valores negativos de x não são entradas válidas, pois produzem valores imaginários de y , e havíamos concordado em considerar somente funções reais de variável real. Em geral, temos a seguinte definição.

0.1.5 DEFINIÇÃO Se uma função de variável real a valores reais for definida por uma fórmula, e se não houver um domínio explicitado, então deve ser entendido que o domínio consiste em todos os números reais com os quais a fórmula fornece um valor real. Isso é denominado o **domínio natural** da função.

O domínio e a imagem de uma função f podem ser identificados projetando o gráfico de $y = f(x)$ sobre os eixos coordenados, como mostra a Figura 0.1.12.

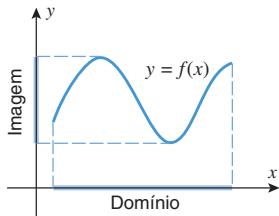


Figura 0.1.12 A projeção de $y = f(x)$ sobre o eixo x é o conjunto de valores x permitíveis para f , e a projeção sobre o eixo y é o conjunto de valores y correspondentes.

Veja no Apêndice B uma revisão de trigonometria.

► **Exemplo 6** Encontre o domínio natural de

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $f(x) = x^3$ | (b) $f(x) = 1/[(x - 1)(x - 3)]$ |
| (c) $f(x) = \operatorname{tg} x$ | (d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ |

Solução (a) A função f tem valores reais com qualquer x real, assim seu domínio natural é o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Solução (b) A função f tem valores reais com qualquer x real, exceto $x = 1$ e $x = 3$, onde ocorrem divisões por zero. Dessa forma, o domínio natural é

$$\{x : x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Solução (c) Uma vez que $f(x) = \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, a função f tem valores reais exceto onde $\cos x = 0$, e isso ocorre quando x for um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$. Assim, o domínio natural consiste em todos os números reais, exceto

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Solução (d) A função f tem valores reais, exceto quando a expressão dentro do radical for negativa. Assim, o domínio natural consiste em todos os números reais x tais que

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) \geq 0$$

Essa desigualdade é satisfeita se $x \leq 2$ ou $x \geq 3$ (verifique), de modo que o domínio natural de f é

$$(-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \quad \blacktriangleleft$$

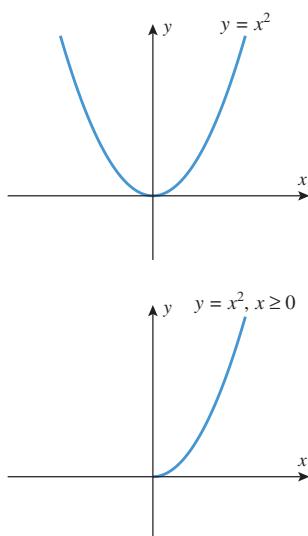


Figura 0.1.13

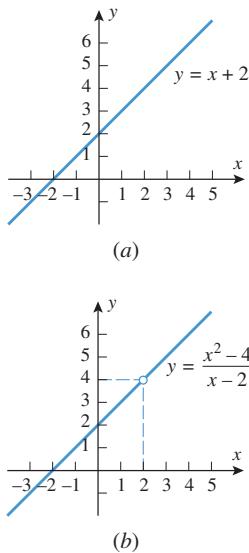


Figura 0.1.14

Em alguns casos, explicitamos o domínio ao definir uma função. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ é a área de um quadrado de lado x , então podemos escrever

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

para indicar que tomamos o domínio de f como sendo o conjunto dos números reais não negativos (Figura 0.1.13).

■ O EFEITO DE OPERAÇÕES ALGÉBRICAS SOBRE O DOMÍNIO

As expressões algébricas são, frequentemente, simplificadas cancelando fatores comuns no numerador e no denominador. Entretanto, deve-se tomar cuidado com tais simplificações, pois elas podem alterar o domínio.

► Exemplo 7 O domínio natural da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (2)$$

consiste em todos os números reais x , exceto $x = 2$. Contudo, fatorando o numerador e cancelando o fator comum ao numerador e ao denominador, obtemos

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad (3)$$

Como o lado direito de (3) tem um valor de $f(2) = 4$, mas $f(2)$ não está definido em (2), vemos que a simplificação algébrica alterou a função. Geometricamente, o gráfico de (3) é a reta da Figura 0.1.14a, enquanto o gráfico de (2) é a mesma reta, mas com um buraco em $x = 2$, já que a função não está definida nesse ponto (Figura 0.1.14b). Resumindo, o efeito geométrico do cancelamento algébrico foi eliminar um buraco do gráfico original. ◀

As alterações no domínio de uma função que resultam de simplificações algébricas são, às vezes, irrelevantes para o problema que estamos tratando, podendo ser ignoradas. Contudo, se o domínio deve ser preservado, devemos impor explicitamente as restrições sobre a função simplificada. Por exemplo, se quisermos preservar o domínio da função no Exemplo 7, devemos expressar a forma simplificada da função como

$$f(x) = x + 2, \quad x \neq 2$$

► Exemplo 8 Encontre o domínio e a imagem de

$$(a) f(x) = 2 + \sqrt{x - 1} \quad (b) f(x) = (x + 1)/(x - 1)$$

Solução (a) Como nenhum domínio foi explicitado, o domínio de f é o domínio natural $[1, +\infty)$. À medida que x varia sobre o intervalo $[1, +\infty)$, o valor de $\sqrt{x - 1}$ varia sobre o intervalo $[0, +\infty)$; assim, o valor de $f(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$ varia sobre o intervalo $[2, +\infty)$, que é a imagem de f . O domínio e a imagem estão destacados nos eixos x e y da Figura 0.1.15.

Solução (b) A função f dada está definida em todos os x reais, exceto $x = 1$; assim, o domínio natural de f é

$$\{x : x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

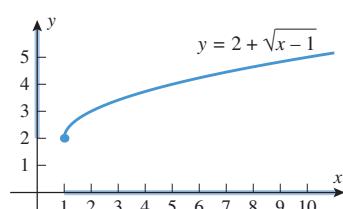


Figura 0.1.15

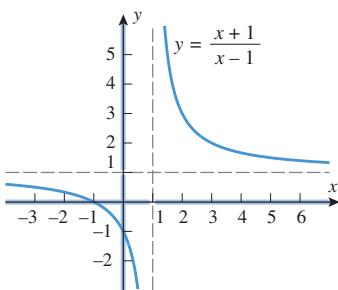


Figura 0.1.16

Para determinar a imagem, é conveniente introduzir uma variável dependente

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad (4)$$

Embora o conjunto de valores possíveis de y não seja imediatamente evidente a partir dessa equação, o gráfico de (4), que aparece na Figura 0.1.16, sugere que a imagem de f consiste em todos os y , exceto $y = 1$. Para ver isso, vamos resolver (4) para x em termos de y :

$$\begin{aligned} (x-1)y &= x+1 \\ xy-y &= x+1 \\ xy-x &= y+1 \\ x(y-1) &= y+1 \\ x &= \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Agora fica evidente pelo segundo membro da equação que $y = 1$ não está na imagem; caso contrário, teríamos uma divisão por zero. Nenhum outro valor de y é excluído por essa equação; dessa forma, a imagem da função f é $\{y : y \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, que está de acordo com o resultado obtido graficamente. ▲

■ O DOMÍNIO E A IMAGEM EM PROBLEMAS APLICADOS

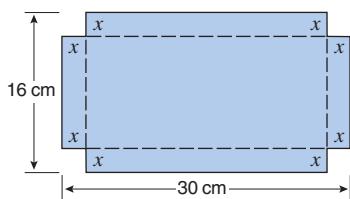
Em aplicações, considerações físicas frequentemente impõem restrições sobre o domínio e a imagem de uma função.

► Exemplo 9 Uma caixinha aberta é feita de pedaços de papelão com 16 por 30 cm, cortando fora quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando para cima os lados (Figura 1.1.17a).

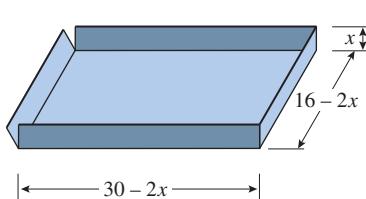
- Seja V o volume da caixa que resulta quando os quadrados tiverem lados de comprimento x . Determine uma fórmula para V como uma função de x .
- Encontre o domínio de V .
- Use o gráfico de V dado na Figura 0.1.17c para estimar a imagem de V .
- Descreva em palavras o que o gráfico diz sobre o volume.

Solução (a) Conforme mostra a Figura 0.1.17b, a caixa resultante tem dimensões $16 - 2x$ por $30 - 2x$ por x , logo o volume $V(x)$ é dado por

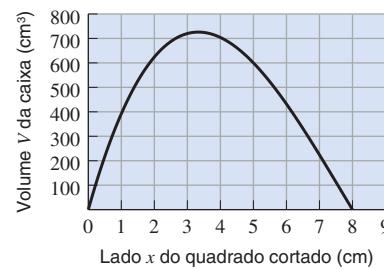
$$V(x) = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3$$



(a)



(b)



(c)

Figura 0.1.17

Solução (b) O domínio é o conjunto dos valores de x , enquanto a imagem é o conjunto dos valores de V . Uma vez que x é uma medida de comprimento, deve ser não negativa, e uma vez que não podemos cortar quadrados com lados maiores do que 8 cm (por quê?), os valores de x no domínio devem satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

Solução (c) A partir do gráfico de V versus x na Figura 0.1.17c, estimamos que os valores de V na imagem satisfazem

$$0 \leq V \leq 725$$

Note que se trata de uma aproximação. Mais adiante, mostraremos como determinar exatamente a imagem.

Solução (d) O gráfico nos mostra que a caixa com volume máximo ocorre para um valor de x entre 3 e 4 cm e que o volume máximo é de aproximadamente 725 cm^3 . Além disso, o volume decresce a zero quando x se aproxima de 0 ou 8, o que deveria fazer sentido intuitivamente. ◀

Nas aplicações que envolvem tempo, as fórmulas para as funções são, frequentemente, expressas em termos de uma variável t , cujo valor inicial é considerado como sendo $t = 0$.

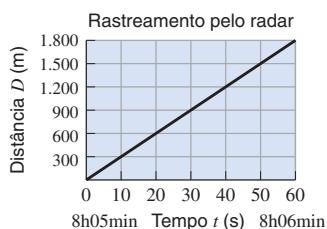


Figura 0.1.18

► **Exemplo 10** Às 8h05min da manhã, um carro é detectado a uma velocidade de 30 m/s por um radar que está posicionado no acostamento de uma estrada reta. Supondo que o carro mantenha uma velocidade constante entre 8h05min e 8h06min da manhã, determine uma função $D(t)$ que expresse a distância percorrida pelo carro durante esse intervalo de tempo, como uma função do tempo t .

Solução Seria incômodo usar como variável t o tempo em horas; assim, vamos medir o tempo decorrido em segundos, começando com $t = 0$ às 8h05min e terminando com $t = 60$ às 8h06min. Em cada instante, a distância percorrida (em metros) é igual à velocidade do carro (em metros por segundo) multiplicada pelo tempo decorrido (em segundos). Então,

$$D(t) = 30t, \quad 0 \leq t \leq 60$$

O gráfico de D versus t está na Figura 0.1.18. ◀

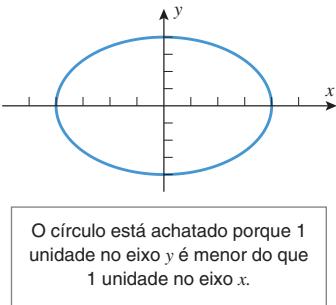


Figura 0.1.19

Nas aplicações em que as variáveis sobre os dois eixos têm unidades não relacionadas (p. ex., centímetros sobre o eixo y e segundos sobre o eixo x), então nada se obtém requerendo que as unidades tenham igual comprimento; escolha os comprimentos que tornem o gráfico tão claro quanto possível.

■ QUESTÕES DE ESCALAS E DE UNIDADES

Em problemas geométricos nos quais desejamos preservar a “verdadeira” forma de um gráfico, é necessário usar unidades de igual comprimento em ambos os eixos. Por exemplo, fazendo o gráfico de um círculo em um sistema de coordenadas em que a unidade no eixo dos y é menor do que a unidade no eixo dos x , o círculo será achatado verticalmente, resultando em uma elipse (Figura 0.1.19).

Porém, há situações nas quais é inconveniente ou impossível apresentar um gráfico usando unidades de igual comprimento. Por exemplo, consideremos a equação

$$y = x^2$$

Se quisermos mostrar a parte do gráfico no intervalo $-3 \leq x \leq 3$, não há problemas em usarmos unidades iguais, pois y varia somente entre 0 e 9 naquele intervalo. Entretanto, se quisermos mostrar a parte do gráfico sobre o intervalo $-10 \leq x \leq 10$, ocorre um problema em manter unidades de igual comprimento, uma vez que os valores de y variam entre 0 e 100. Nesse caso, a única maneira razoável de mostrar todo o gráfico sobre o intervalo $-10 \leq x \leq 10$ é comprimir a unidade de comprimento ao longo do eixo y , conforme ilustrado na Figura 0.1.20.

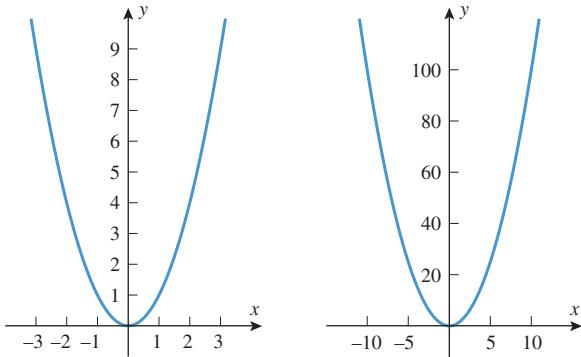


Figura 0.1.20

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.1 (Ver página 15 para respostas.)

1. Seja $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$.
 - (a) O domínio natural de f é _____.
 - (b) $f(3) =$ _____.
 - (c) $f(t^2 - 1) =$ _____.
 - (d) $f(x) = 7$ se $x =$ _____.
 - (e) A imagem de f é _____.
2. Os segmentos de retas no plano xy formam letras, conforme indicado.



- (a) Se o eixo y for paralelo à letra I, quais das letras representam o gráfico de $y = f(x)$ para alguma função f ?
- (b) Se o eixo y é perpendicular à letra I, quais das letras representam o gráfico de $y = f(x)$ para alguma função f ?
3. A figura dada mostra o gráfico completo de $y = f(x)$.
 - (a) O domínio de f é _____.
 - (b) A imagem de f é _____.
 - (c) $f(-3) =$ _____.
 - (d) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.
 - (e) As soluções de $f(x) = -\frac{3}{2}$ são $x =$ _____ e $x =$ _____.

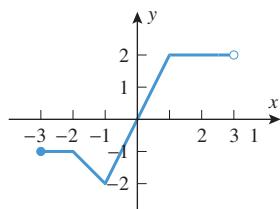


Figura Ex-3

4. A tabela a seguir dá a previsão de cinco dias de temperaturas máximas e mínimas em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$).
 - (a) Suponha que x e y denotem, respectivamente, as previsões de temperaturas máxima e mínima para cada um dos cinco dias. Será y uma função de x ? Se for, dê o domínio e a imagem dessa função.
 - (b) Suponha que x e y denotem, respectivamente, as previsões de temperaturas mínima e máxima para cada um dos cinco dias. Será y uma função de x ? Se for, dê o domínio e a imagem dessa função.

	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA
MÁXIMA	25	21	15	19	23
MÍNIMA	16	18	14	15	16

5. Sejam c , l e A o comprimento, a largura e a área de um retângulo, respectivamente, e suponha que a largura do retângulo seja a metade do comprimento.
 - (a) Se c for expresso como uma função de l , então $c =$ _____.
 - (b) Se A for expressa como uma função de c , então $A =$ _____.
 - (c) Se l for expressa como uma função de A , então $l =$ _____.

EXERCÍCIOS 0.1  Recurso Gráfico

1. Use o gráfico abaixo para responder às seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis quando for necessário.
- Com quais valores de x vale $y = 1$?
 - Com quais valores de x vale $y = 3$?
 - Com quais valores de y vale $x = 3$?
 - Com quais valores de x vale $y \leq 0$?
 - Quais são os valores máximo e mínimo de y e em quais valores de x eles ocorrem?

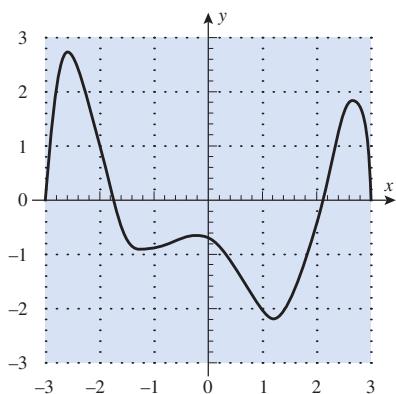


Figura Ex-1

2. Use a tabela abaixo para responder às questões propostas no Exercício 1.

Tabela Ex-2

x	-2	-1	0	2	3	4	5	6
y	5	1	-2	7	-1	1	0	9

3. Em cada parte da figura abaixo, determine se o gráfico define y como uma função de x .

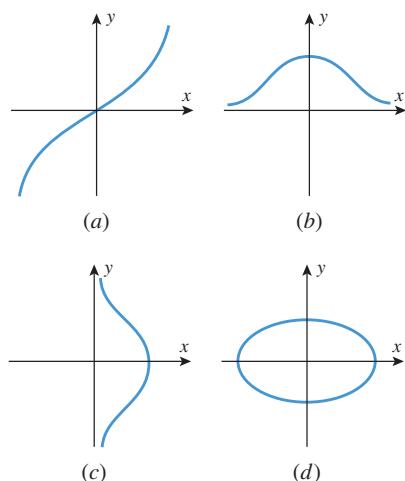


Figura Ex-3

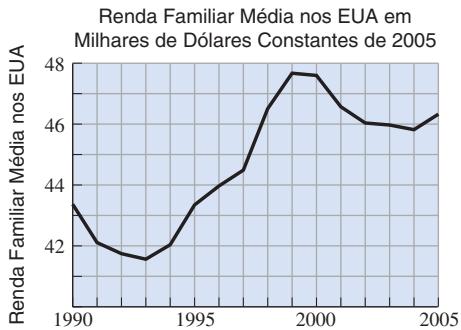
4. Em cada parte, compare os domínios naturais de f e de g .

$$(a) f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}; g(x) = x$$

$$(b) f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + 1}; g(x) = \sqrt{x}$$

ENFOCANDO CONCEITOS

5. O gráfico a seguir mostra a renda familiar média nos EUA (ajustada pela inflação) entre 1990 e 2005. Use-o para responder às seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis quando for necessário.
- Quando a renda média atingiu seu valor máximo e qual foi a renda média quando isso ocorreu?
 - Quando a renda média atingiu seu valor mínimo e qual foi a renda média quando isso ocorreu?
 - A renda média estava diminuindo durante os anos de 2000 e 2002. Ela estava diminuindo mais rapidamente durante o primeiro ou o segundo ano daquele período? Explique seu raciocínio.



Fonte: U.S. Census Bureau, August 2006.

Figura Ex-5

6. Use o gráfico da renda média do Exercício 5 para responder às seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis quando for necessário.
- Qual foi o crescimento anual médio da renda média entre 1993 e 1999?
 - A renda média cresceu durante o período de seis anos entre 1993 e 1999. A renda média cresceu mais rapidamente durante os três primeiros anos ou durante os últimos três anos desse período? Explique seu raciocínio.
 - Considere a afirmação: "Depois de anos de declínio, a renda média deste ano foi finalmente maior do que a do ano passado". Em quais anos essa afirmação estaria correta?

7. Encontre $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$, $f(\sqrt{2})$ e $f(3t)$.

(a) $f(x) = 3x^2 - 2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 3 \\ 2x, & x \leq 3 \end{cases}$

8. Encontre $g(3)$, $g(-1)$, $g(\pi)$, $g(-1, 1)$ e $g(t^2 - 1)$.

(a) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 1 \\ 3, & x < 1 \end{cases}$

9-10 Determine o domínio natural e a imagem da função algebraicamente e confirme seu resultado com o gráfico produzido por seu recurso gráfico. [Nota: Ajuste seu recurso gráfico para radianos quando se tratar de funções trigonométricas.] ■

9. (a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

(b) $F(x) = \frac{x}{|x|}$

(c) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

(d) $G(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

(e) $h(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

(f) $H(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}}$

10. (a) $f(x) = \sqrt{3-x}$

(b) $F(x) = \sqrt{4-x^2}$

(c) $g(x) = 3 + \sqrt{x}$

(d) $G(x) = x^3 + 2$

(e) $h(x) = 3 \sin x$

(f) $H(x) = (\sin \sqrt{x})^{-2}$

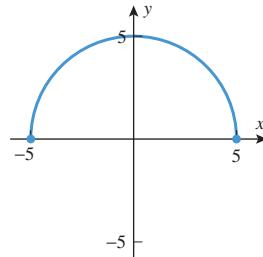
ENFOCANDO CONCEITOS

11. (a) Se você tivesse uma máquina que pudesse registrar a população mundial continuamente, você esperaria obter um gráfico da população *versus* o tempo que fosse uma curva contínua (não interrompida)? Explique o que poderia causar interrupções na curva.
 (b) Suponha que um paciente de um hospital receba uma injeção de um antibiótico a cada oito horas e que, entre as injeções, a concentração C de antibiótico na corrente sanguínea decresce à medida que ele é absorvido pelos tecidos. Como poderia ser o gráfico de C *versus* o tempo t decorrido? Explique seu raciocínio.
12. (a) Caso você tivesse uma máquina que pudesse medir a temperatura de um quarto continuamente por um período de 24 horas, você esperaria obter um gráfico contínuo (não quebrado) da temperatura *versus* o tempo? Explique seu raciocínio.
 (b) Se você tivesse um computador que pudesse acompanhar continuamente o número de caixas de cereal nas prateleiras de um supermercado durante uma semana, você esperaria obter um gráfico de curva contínua (sem interrupções) do número de caixas *versus* o tempo? Explique seu raciocínio.
13. Um bote balança para cima e para baixo sob a ação de ondas fracas. De repente, é atingido por uma onda grande e afunda. Esboce um gráfico aproximado da altura do bote acima do fundo do mar como uma função do tempo.

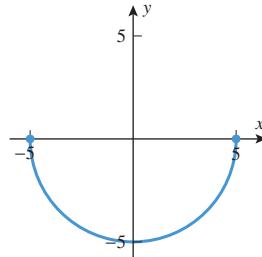
14. Uma xícara com café quente está sobre a mesa. Você despeja leite frio nela e espera por uma hora. Esboce um gráfico aproximado da temperatura do café como uma função do tempo.

15-18 Conforme vimos no Exemplo 3, a equação $x^2 + y^2 = 25$ não define y como uma função de x . Cada gráfico nestes exercícios é uma porção do círculo $x^2 + y^2 = 25$. Em cada caso, determine se o gráfico define y como uma função de x e, se isso ocorrer, dê uma fórmula para y em termos de x . ■

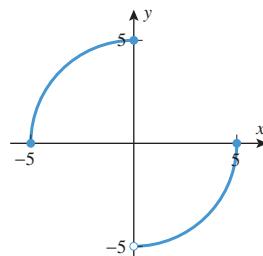
15.



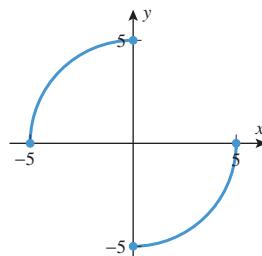
16.



17.



18.



19-22 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. Uma curva que cruza o eixo x em dois pontos distintos não pode ser o gráfico de uma função.

20. O domínio natural de uma função real definida por uma fórmula consiste em todos os números reais com os quais a fórmula fornece um valor real.

21. A imagem da função valor absoluto é o conjunto de todos os números reais positivos.

22. Se $g(x) = 1/\sqrt{f(x)}$, então o domínio de g consiste em todos os números reais x com os quais $f(x) \neq 0$.

23. Use a equação $y = x^2 - 6x + 8$ para responder às questões.

- (a) Com quais valores de x vale $y = 0$?

- (b) Com quais valores de x vale $y = -10$?

- (c) Com quais valores de x vale $y \geq 0$?

- (d) Terá y um valor mínimo? Um valor máximo? Se assim for, determine-os.

24. Use a equação $y = 1 + \sqrt{x}$ para responder às seguintes questões.

- (a) Com quais valores de x vale $y = 4$?

- (b) Com quais valores de x vale $y = 0$?

- (c) Com quais valores de x vale $y \geq 6$?

- (d) Terá y um valor mínimo? Um valor máximo? Se assim for, determine-os.
- 25.** Conforme mostra a figura abaixo, um pêndulo de comprimento constante L faz um ângulo θ com sua posição vertical. Expressse a altura h como uma função do ângulo θ .
- 26.** Expresse o comprimento L da corda de um círculo com raio de 10 cm como função do ângulo central θ (veja a figura abaixo).

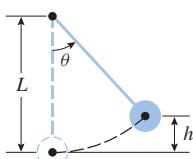


Figura Ex-25

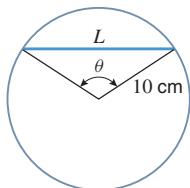


Figura Ex-26

- (c) Qual é o domínio da função em (b)?
 (d) Esboce o gráfico da função em (b) e estime as dimensões da área retangular que minimizem a quantidade de cerca necessária.

- 32.** Conforme mostra a figura abaixo, uma câmara é montada em um ponto a 900 m da base de lançamento de um foguete. Quando lançado, o foguete sobe verticalmente, e o ângulo de elevação da câmara é constantemente ajustado para seguir a base do foguete.
- (a) Expresse a altura x como uma função do ângulo θ de elevação.
 (b) Determine o domínio da função em (a).
 (c) Gere o gráfico da função em (a) e use-o para estimar a altura do foguete, quando seu ângulo de elevação for $\pi/4 \approx 0,7854$ radianos. Compare essa estimativa com a altura exata.

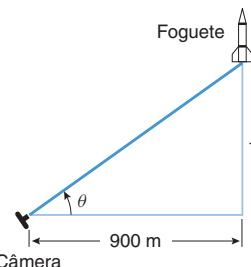


Figura Ex-32

- 27-28** Expresse a função na forma por partes, sem usar valores absolutos. [Sugestão: Pode ser útil gerar o gráfico da função.] ■
- 27.** (a) $f(x) = |x| + 3x + 1$ (b) $g(x) = |x| + |x - 1|$
- 28.** (a) $f(x) = 3 + |2x - 5|$ (b) $g(x) = 3|x - 2| - |x + 1|$
- 29.** Conforme mostra a figura abaixo, uma caixa aberta deve ser construída de uma folha retangular de metal com 8 por 15 cm, cortando fora quadrados com lados de comprimento x de cada canto e dobrando os lados.
- (a) Expresse o volume V como uma função de x .
 (b) Encontre o domínio de V .
 (c) Esboce o gráfico da função V obtida em (a) e estime a imagem dessa função.
 (d) Com palavras, descreva como o volume V da caixa varia com x e discuta como poderiam ser construídas caixas com volume máximo.

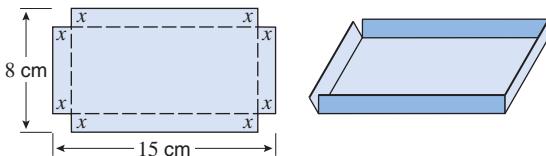


Figura Ex-29

- 30.** Repita o Exercício 29 supondo que a caixa seja construída da mesma maneira a partir de uma folha quadrada de metal com 6 cm de lado.
- 31.** Uma empresa de construções acrescentou uma área retangular de mil metros quadrados à sua sede. Três lados da área estão cercados. O lado da sede que é adjacente à área mede 100 metros, e uma parte desse lado é utilizada como o quarto lado da área acrescentada. Sejam x e y as dimensões da área retangular, onde x é medido paralelamente à sede, e L o comprimento da cerca necessária para essas dimensões.
- (a) Encontre uma fórmula para L em termos de x e y .
 (b) Encontre uma fórmula que expresse L somente em termos de x .

- 32.** Conforme mostra a figura abaixo, uma câmara é montada em um ponto a 900 m da base de lançamento de um foguete. Quando lançado, o foguete sobe verticalmente, e o ângulo de elevação da câmara é constantemente ajustado para seguir a base do foguete.
- (a) Expresse a altura x como uma função do ângulo θ de elevação.
 (b) Determine o domínio da função em (a).
 (c) Gere o gráfico da função em (a) e use-o para estimar a altura do foguete, quando seu ângulo de elevação for $\pi/4 \approx 0,7854$ radianos. Compare essa estimativa com a altura exata.
- 33.** Uma companhia de sopa deseja fabricar uma lata na forma de um cilindro circular reto que tenha capacidade para 500 cm^3 de líquido. O material para a tampa e a base custa $0,02$ centavos/cm 2 , enquanto o material para a lateral custa $0,01$ centavo/cm 2 .
- (a) Estime o raio r e a altura h da lata que custa menos para ser fabricada. [Sugestão: Expresse o custo C em termos de r .]
 (b) Suponha que a tampa e a base de raio r sejam tiradas de folhas quadradas, cujos lados têm comprimento $2r$, e os retalhos são descartados. Levando em conta o custo das folhas quadradas, você esperaria que o custo da lata mais barata seja maior ou menor do que em (a)? Explique.
 (c) Estime o raio, a altura e o custo da lata em (b) e determine se sua conjectura estava certa.
- 34.** Um construtor de dependências esportivas quer colocar uma pista de corrida de um quarto de milha – 396 metros – em torno de um campo de futebol americano, conforme a figura a seguir. O campo de futebol tem 108 metros de comprimento (incluindo as zonas finais) por 48 metros de largura. A pista consiste em duas retas e dois semicírculos, sendo que as redes se estendem pelo menos ao longo do campo de futebol.
- (a) Mostre que é possível construir a pista de um quarto de milha em torno do campo de futebol. [Sugestão: Encontre a menor pista que pode ser construída em torno do campo.]
 (b) Seja L o comprimento de uma das partes retas (em metros) e x uma distância (em metros) entre a lateral do campo e a parte reta da pista. Faça um gráfico de L versus x .

- (c) Use o gráfico para estimar o valor de x que produz a parte reta mais curta e então encontre exatamente esse valor.
 (d) Use o gráfico para estimar o comprimento da maior parte reta possível e encontre exatamente esse comprimento.

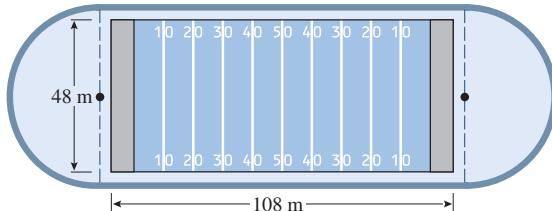


Figura Ex-34

- 35-36** (i) Explique por que a função f tem um ou mais buracos em seu gráfico e estabeleça os valores de x nos quais esses buracos ocorrem. (ii) Determine uma função g cujo gráfico seja idêntico ao de f , mas sem os buracos. ■

$$35. f(x) = \frac{(x+2)(x^2 - 1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$36. f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|}$$

- 37.** Em 2001, o Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA introduziu um novo índice de sensação térmica (WCT). Para uma dada temperatura externa T em graus Fahrenheit e velocidade do vento igual a v milhas por hora, o índice de sensação térmica WCT é a temperatura em graus Fahrenheit a uma velocidade de vento de 3 milhas por hora que produziria a mesma sen-

sação de resfriamento sobre a pele exposta que a combinação de temperatura externa T e velocidade do vento v . Utilizando um modelo mais preciso de resfriamento devido ao vento, a nova fórmula é dada por

$$WCT = \begin{cases} T, & 0 \leq v \leq 3 \\ 35,74 + 0,6215T - 35,75v^{0,16} + 0,4275Tv^{0,16}, & 3 < v \end{cases}$$

onde T é a temperatura em °F, v é a velocidade do vento em milhas por hora e WCT é a temperatura equivalente em °F. Encontre o índice de sensação térmica até o grau mais próximo se $T = 25^\circ\text{F}$

- (a) $v = 3$ milhas/hora (b) $v = 15$ milhas/hora
 (c) $v = 46$ milhas/hora

Fonte: Adaptado de UMAP Module 658, *Windchill*, de W. Bosch e L. Coob, COMAP, Arlington, MA.

- 38-40** Use a fórmula para o índice de sensação térmica descrita no Exercício 37. ■

- 38.** Encontre a temperatura do ar até o grau mais próximo se o WCT for de -60°F e a velocidade do vento for de 48 milhas/h.
39. Encontre a temperatura do ar até o grau mais próximo se o WCT for de -10°F e a velocidade do vento for de 48 milhas/h.
40. Encontre a velocidade do vento até a milha por hora mais próxima se o WCT for de 5°F com uma temperatura do ar de 20°F .

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.1

- 1.** (a) $[-1, +\infty)$ (b) 6 (c) $|t| + 4$ (d) 8 (e) $[4, +\infty)$ **2.** (a) M (b) I **3.** (a) $[-3, 3]$ (b) $[-2, 2]$ (c) -1 (d) 1 (e) $-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}$
4. (a) sim; domínio: $\{15, 19, 21, 23, 25\}$; imagem: $\{14, 15, 16, 18\}$ (b) não **5.** (a) $c = 2l$ (b) $A = c^2/2$ (c) $l = \sqrt{A/2}$

0.2 FUNÇÕES NOVAS A PARTIR DE ANTIGAS

Da mesma forma que números podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos, produzindo outros números, também funções podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas, produzindo outras funções. Nesta seção, vamos discutir essas operações e algumas outras sem análogos em aritmética ordinária.

■ OPERAÇÕES ARITMÉTICAS SOBRE FUNÇÕES

Duas funções, f e g , podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas de forma natural para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g . Por exemplo, $f + g$ é definida pela fórmula

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (1)$$

que indica que, para cada entrada, o valor de $f + g$ é obtido adicionando-se os valores de f e g . A equação (1) dá uma fórmula para $f + g$, porém não diz nada sobre o domínio de $f + g$. Entretanto, para que o lado direito da equação esteja definido, x precisa estar no domínio de f e no domínio de g . Assim, definimos o domínio de $f + g$ como sendo a intersecção desses dois domínios. Contudo, geralmente, temos a seguinte definição.

Se f for uma função constante, digamos $f(x) = c$, então o produto de f e g será cg . Dessa forma, multiplicar uma função por uma constante é um caso particular da multiplicação de duas funções.

0.2.1 DEFINIÇÃO

Dadas as funções f e g , definimos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Para as funções $f + g$, $f - g$ e fg , definimos o domínio como sendo a intersecção dos domínios de f e g ; para a função f/g , definimos o domínio como sendo a intersecção dos domínios de f e g , excluídos os pontos onde $g(x) = 0$ (para evitar a divisão por zero).

► Exemplo 1

Sejam

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

Encontre o domínio e a fórmula das funções $f + g$, $f - g$, fg , f/g e $7f$.

Solução Primeiro, determinaremos as fórmulas para as funções e, depois, os domínios. As fórmulas são:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) + (x - 3) = x - 2 + \sqrt{x-2} \quad (2)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) - (x - 3) = 4 - x + \sqrt{x-2} \quad (3)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (1 + \sqrt{x-2})(x - 3) \quad (4)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x-3} \quad (5)$$

$$(7f)(x) = 7f(x) = 7 + 7\sqrt{x-2} \quad (6)$$

Os domínios de f e g são $[2, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$, respectivamente (os domínios naturais). Assim, segue da Definição 0.2.1 que os domínios de $f + g$, $f - g$ e fg são a intersecção desses domínios, a saber,

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, +\infty) = [2, +\infty) \quad (7)$$

Além disso, como $g(x) = 0$ se $x = 3$, o domínio de f/g é (7) com $x = 3$ removido, ou seja,

$$[2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Finalmente, o domínio de $7f$ é igual ao domínio de f . ◀

Nesse último exemplo, ocorreu que os domínios das funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g foram os domínios naturais resultantes das fórmulas obtidas para essas funções. Isso nem sempre ocorre, e aqui temos um exemplo.

► Exemplo 2

Mostre que se $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x$, então o domínio de fg não é igual ao domínio natural de h .

Solução O domínio natural de $h(x) = x$ é $(-\infty, +\infty)$. Observe que

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = x = h(x)$$

no domínio de fg . Os domínios de f e de g são ambos $[0, +\infty)$, de modo que o domínio de fg é

$$[0, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

pela Definição 0.2.1. Como os domínios de fg e h são diferentes, não é correto escrever $(fg)(x) = x$ sem incluir a restrição de que essa fórmula só vale com $x \geq 0$. ◀

■ COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Vamos considerar agora uma operação sobre funções, denominada *composição*, que não tem análogo direto em aritmética usual. Informalmente, a operação de composição é executada substituindo-se em uma dada função a variável independente por alguma função. Por exemplo, suponha que

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

Se substituirmos x por $g(x)$ na fórmula de f , obtemos uma nova função

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2$$

a qual denotamos por $f \circ g$. Assim,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2$$

Em geral, temos a seguinte definição.

Embora à primeira vista o domínio de $f \circ g$ possa parecer complicado, intuitivamente faz sentido: para computar $f(g(x))$, necessita-se de x no domínio de g para computar $g(x)$ e, depois, $g(x)$ no domínio de f para computar $f(g(x))$.

0.2.2 DEFINIÇÃO Dadas as funções f e g , a *composição* de f e g , denotada por $f \circ g$, é a função definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Por definição, o domínio de $f \circ g$ consiste em todo x no domínio de g com o qual $g(x)$ está no domínio de f .

► **Exemplo 3** Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre

- (a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$

Solução (a) A fórmula para $f(g(x))$ é

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 + 3 = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$$

Como o domínio de g é $[0, +\infty)$ e o de f é $(-\infty, +\infty)$, o domínio de $f \circ g$ consiste em todo x em $[0, +\infty)$ com o qual $g(x) = \sqrt{x}$ está em $(-\infty, +\infty)$; assim, o domínio de $f \circ g$ é $[0, +\infty)$. Logo,

$$(f \circ g)(x) = x + 3, \quad x \geq 0$$

Solução (b) A fórmula para $g(f(x))$ é

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Como o domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o de g é $[0, +\infty)$, o domínio de $g \circ f$ consiste em todo x em $(-\infty, +\infty)$ com o qual $f(x) = x^2 + 3$ está em $[0, +\infty)$. Assim, o domínio de $g \circ f$ é $(-\infty, +\infty)$. Logo,

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Não há necessidade de indicar que o domínio é $(-\infty, +\infty)$, pois esse é o domínio natural de $\sqrt{x^2 + 3}$. ◀

Note que as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ do Exemplo 3 não são iguais. Assim, a ordem em que efetuamos uma composição pode fazer (e geralmente faz) uma diferença no resultado final.

As composições também podem ser definidas para três ou mais funções; por exemplo, $(f \circ g \circ h)(x)$ é computada como

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Em outras palavras, primeiro encontramos $h(x)$, depois $g(h(x))$ e, finalmente, $f(g(h(x)))$.

► **Exemplo 4** Encontre $(f \circ g \circ h)(x)$ se

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1/x, \quad h(x) = x^3$$

Solução

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^3)) = f(1/x^3) = \sqrt{1/x^3} = 1/x^{3/2} \quad \blacktriangleleft$$

■ EXPRESSANDO UMA FUNÇÃO COMO UMA COMPOSIÇÃO

Muitos problemas em Matemática são abordados pela “decomposição” de funções em uma composição de funções mais simples. Por exemplo, considere a função h dada por

$$h(x) = (x + 1)^2$$

Para calcular $h(x)$ em um dado valor de x , computaríamos primeiro $x + 1$ e, então, o quadrado do resultado. Essas duas operações são executadas pelas funções

$$g(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad f(x) = x^2$$

Podemos expressar h em termos de f e g escrevendo

$$h(x) = (x + 1)^2 = [g(x)]^2 = f(g(x))$$

e, assim, conseguimos expressar h como a composição $h = f \circ g$.

O processo de raciocínio neste exemplo sugere um procedimento geral de decomposição de uma função h em uma composição $h = f \circ g$:

- Pense sobre como poderíamos calcular $h(x)$ com um valor específico de x , tentando dividir os cálculos em dois passos executados sucessivamente.
- A primeira operação no cálculo determinará uma função g e a segunda, uma função f .
- A fórmula para h pode, então, ser escrita como $h(x) = f(g(x))$.

Para fins de descrição, iremos nos referir a g como a “função de dentro” e a f como a “função de fora” na expressão $f(g(x))$. A função de dentro executa a primeira operação e a de fora executa a segunda.

► **Exemplo 5** Expresse $\sin(x^3)$ como uma composição de duas funções.

Solução Para computar $\sin(x^3)$, calcularíamos primeiro x^3 e, então, o seno do resultado; assim, $g(x) = x^3$ é a função de dentro e $f(x) = \sin x$, a de fora. Logo,

$$\sin(x^3) = f(g(x)) \quad g(x) = x^3 \text{ e } f(x) = \sin x \quad \blacktriangleleft$$

A Tabela 0.2.1 dá mais exemplos de decomposições de funções em composições.

Tabela 0.2.1

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

FUNÇÃO	$g(x)$ DE DENTRO	$f(x)$ DE FORA	COMPOSIÇÃO
$(x^2 + 1)^{10}$	$x^2 + 1$	x^{10}	$(x^2 + 1)^{10} = f(g(x))$
$\operatorname{sen}^3 x$	$\operatorname{sen} x$	x^3	$\operatorname{sen}^3 x = f(g(x))$
$\operatorname{tg}(x^5)$	x^5	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(x^5) = f(g(x))$
$\sqrt{4 - 3x}$	$4 - 3x$	\sqrt{x}	$\sqrt{4 - 3x} = f(g(x))$
$8 + \sqrt{x}$	\sqrt{x}	$8 + x$	$8 + \sqrt{x} = f(g(x))$
$\frac{1}{x+1}$	$x+1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+1} = f(g(x))$

OBSERVAÇÃO

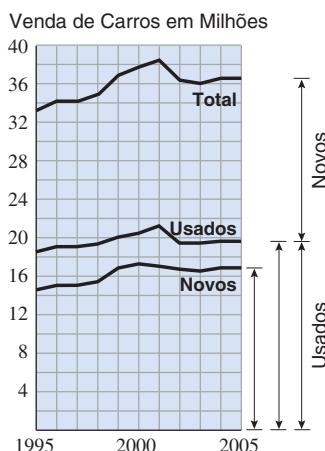
Sempre há mais de uma maneira de expressar uma função como uma composição. Por exemplo, aqui estão duas maneiras de expressar $(x^2 + 1)^{10}$ como composições diferentes daquela da Tabela 0.2.1:

$$(x^2 + 1)^{10} = [(x^2 + 1)^2]^5 = f(g(x))$$

$$g(x) = (x^2 + 1)^2 \text{ e } f(x) = x^5$$

$$(x^2 + 1)^{10} = [(x^2 + 1)^3]^{10/3} = f(g(x))$$

$$g(x) = (x^2 + 1)^3 \text{ e } f(x) = x^{10/3}$$



Fonte: NADA.

Figura 0.2.1

Use a técnica do Exemplo 6 para esboçar o gráfico da função

$$\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

Figura 0.2.2 Somando as coordenadas y de \sqrt{x} e de $1/x$, obtemos a coordenada y de $\sqrt{x} + 1/x$.

■ FUNÇÕES NOVAS A PARTIR DE ANTIGAS

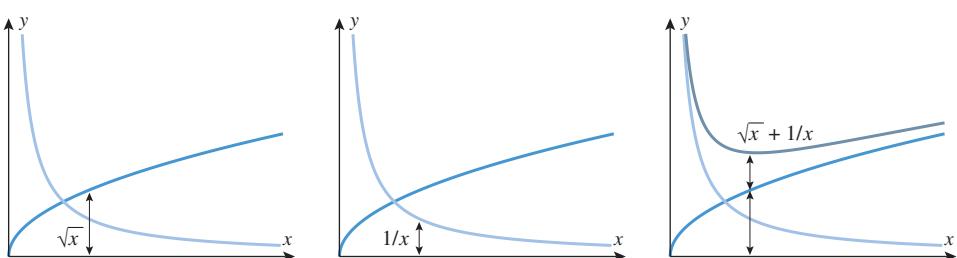
O restante desta seção será dedicado a considerar o efeito geométrico de efetuar operações básicas com funções. Isso nos permitirá utilizar gráficos conhecidos de funções para visualizar ou esboçar gráficos de funções relacionadas. Por exemplo, a Figura 0.2.1 mostra os gráficos de vendas anuais de carros novos $N(t)$ e usados $U(t)$ ao longo de um certo período. Esses gráficos podem ser usados para construir o gráfico do total de vendas anuais de carros

$$T(t) = N(t) + U(t)$$

somando os valores de $N(t)$ e $U(t)$ para cada valor de t . Em geral, o gráfico de $y = f(x) + g(x)$ pode ser construído a partir dos gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$ somando os valores de y correspondentes a cada x .

► **Exemplo 6** Na Figura 0.1.4, observe os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$ e faça um esboço que mostre a forma geral do gráfico $y = \sqrt{x} + 1/x$ com $x > 0$.

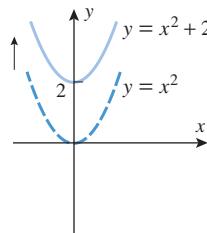
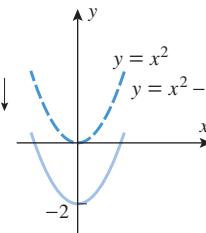
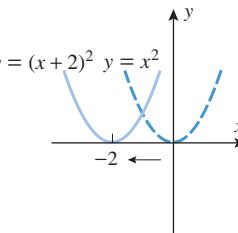
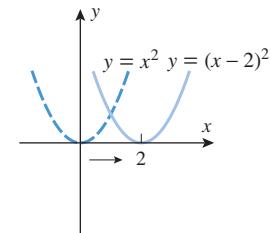
Solução Para somar os valores de y correspondentes de $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$ graficamente, basta imaginar que eles estejam “empilhados” um em cima do outro. Isso dá lugar ao esboço da Figura 0.2.2. ◀

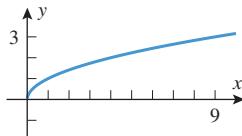


■ TRANSLAÇÕES

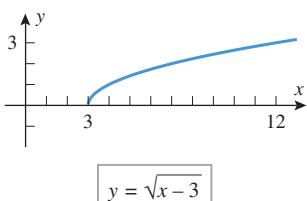
Na Tabela 0.2.2, ilustramos o efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ de somar a f ou à sua variável independente x uma constante *positiva* c , bem como o efeito de subtrair essa constante de f ou de x . Por exemplo, o primeiro resultado na tabela ilustra que somar uma constante positiva c à função f soma c a cada coordenada y de seu gráfico, transladando o gráfico c unidades para cima. Analogamente, subtrair c de f translada o gráfico c unidades para baixo. Por outro lado, se uma constante positiva c é somada a x , então o valor de $y = f(x + c)$ em $x - c$ é $f(x)$; e como o ponto $x - c$ está c unidades à esquerda de x no eixo x , o gráfico de $y = f(x + c)$ necessariamente é o de $y = f(x)$ transladado c unidades para a esquerda. Analogamente, subtrair c de x translada o gráfico c unidades para a direita.

Tabela 0.2.2
PRINCÍPIOS DE TRANSLAÇÃO

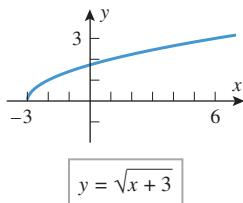
OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Somar uma constante positiva c a $f(x)$	Subtrair uma constante positiva c de $f(x)$	Somar uma constante positiva c a x	Subtrair uma constante positiva c de x
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$	$y = f(x + c)$	$y = f(x - c)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para cima	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para baixo	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a esquerda	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a direita
EXEMPLO				



$$y = \sqrt{x}$$



$$y = \sqrt{x - 3}$$



$$y = \sqrt{x + 3}$$

Antes de passar aos próximos exemplos, é conveniente rever os gráficos das Figuras 0.1.4 e 0.1.9.

► **Exemplo 7** Esboce o gráfico de

$$(a) y = \sqrt{x - 3} \quad (b) y = \sqrt{x + 3}$$

Solução Usando os princípios de translação da Tabela 0.2.2, o gráfico da equação $y = \sqrt{x - 3}$ pode ser obtido transladando 3 unidades para a direita o gráfico de $y = \sqrt{x}$. O gráfico de $y = \sqrt{x + 3}$ pode ser obtido transladando o de $y = \sqrt{x}$ 3 unidades para a esquerda (Figura 0.2.3). ◀

► **Exemplo 8** Esboce o gráfico de $y = x^2 - 4x + 5$.

Solução Completando o quadrado dos dois primeiros termos, obtemos

$$y = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

Dessa forma, vemos que o gráfico pode ser obtido transladando 2 unidades para a direita o gráfico de $y = x^2$ devido ao $(x - 2)$ e 1 unidade para cima devido ao $+1$ (Figura 0.2.4). ◀

Figura 0.2.3

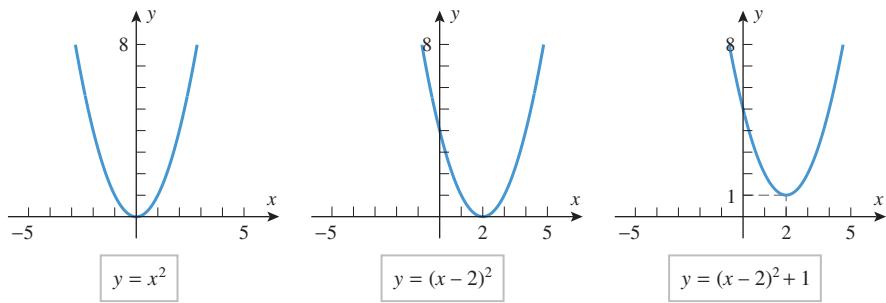
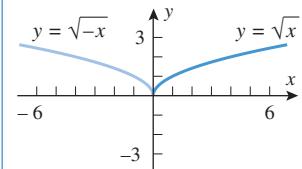
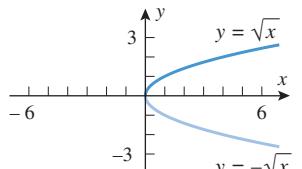


Figura 0.2.4

■ REFLEXÕES

O gráfico de $y = f(-x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(-x, y)$. Analogamente, o gráfico de $y = -f(x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo x porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(x, -y)$ [a equação $y = -f(x)$ é equivalente a $-y = f(x)$]. Isso está resumido na Tabela 0.2.3.

Tabela 0.2.3
PRINCÍPIOS DE REFLEXÃO

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Substituir x por $-x$	Multiplicar $f(x)$ por -1
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(-x)$	$y = -f(x)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Reflete o gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y	Reflete o gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo x
EXEMPLO	$y = \sqrt{-x}$ 	$y = \sqrt{x}$  $y = -\sqrt{x}$ 

► **Exemplo 9** Esboce o gráfico de $y = \sqrt[3]{2 - x}$.

Solução Usando os princípios de translação e de reflexão mostrados nas Tabelas 0.2.2 e 0.2.3, o gráfico pode ser obtido por uma reflexão seguida por uma translação: primeiro refletimos o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ pelo eixo y para obter o gráfico de $y = \sqrt[3]{-x}$, então transladamos 2 unidades para a direita para obter o gráfico da equação $y = \sqrt[3]{-(x - 2)} = \sqrt[3]{2 - x}$ (Figura 0.2.5). ◀

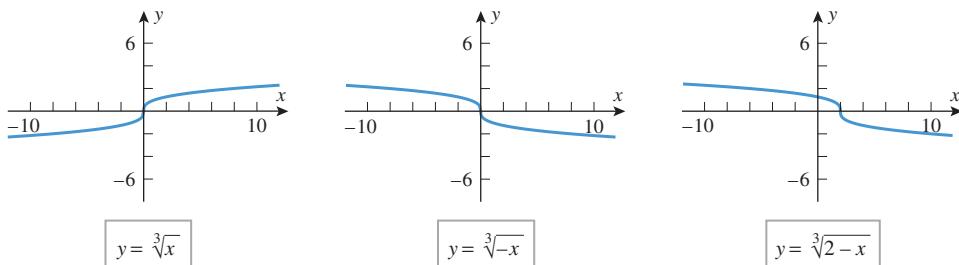


Figura 0.2.5

► **Exemplo 10** Esboce o gráfico de $y = 4 - |x - 2|$.

Solução O gráfico pode ser obtido por uma reflexão e por duas translações: primeiro, transladamos 2 unidades para a direita o gráfico de $y = |x|$ para obter o gráfico de $y = |x - 2|$; depois, refletimos pelo eixo x para obter o gráfico de $y = -|x - 2|$; então, transladamos 4 unidades para cima para obter o gráfico da equação $y = -|x - 2| + 4 = 4 - |x - 2|$ (Figura 0.2.6). ▲

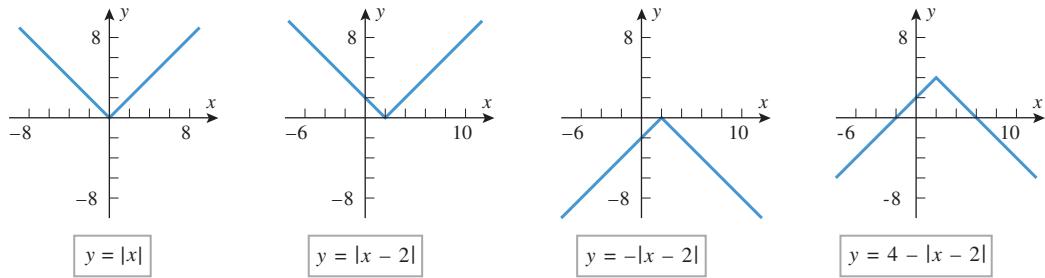


Figura 0.2.6

■ ALONGAMENTOS E COMPRESSÕES

Descreva o efeito geométrico de multiplicar uma função f por uma constante *negativa* em termos de reflexões, alongamentos e compressões. Qual é o efeito geométrico de multiplicar a variável independente de uma função f por uma constante *negativa*?

Multiplicar $f(x)$ por uma constante *positiva* c tem o efeito geométrico de alongar o gráfico de $y = f(x)$ na direção y por um fator de c se $c > 1$ e de comprimí-lo na direção y por um fator de $1/c$ se $0 < c < 1$. Por exemplo, multiplicar $f(x)$ por 2 dobra cada coordenada y , portanto alonga o gráfico verticalmente por um fator de 2, enquanto multiplicar por $\frac{1}{2}$ corta cada coordenada y pela metade, portanto comprime o gráfico verticalmente por um fator de 2. Analogamente, multiplicar x por uma constante *positiva* c tem o efeito geométrico de comprimir o gráfico de $y = f(x)$ na direção x por um fator de c se $c > 1$ e de alongá-lo na direção x por um fator de $1/c$ se $0 < c < 1$. [Se isso parece um pouco ao contrário, pense assim: o valor de $2x$ varia duas vezes mais rápido do que x , de modo que um ponto que se move ao longo do eixo x a partir da origem só precisa viajar a metade da distância para que $y = f(2x)$ tenha o mesmo valor que $y = f(x)$, com isso criando uma compressão horizontal do gráfico.] Tudo isso está resumido na Tabela 0.2.4.

Tabela 0.2.4
PRINCÍPIOS DE ALONGAMENTO E COMPRESSÃO

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Multiplicar $f(x)$ por c ($c > 1$)	Multiplicar $f(x)$ por c ($0 < c < 1$)	Multiplicar x por c ($c > 1$)	Multiplicar x por c ($0 < c < 1$)
NOVA EQUAÇÃO	$y = cf(x)$	$y = cf(x)$	$y = f(cx)$	$y = f(cx)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Alonga o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c	Comprime o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de $1/c$	Comprime o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c	Alonga o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de $1/c$
EXEMPLO				

SIMETRIA

A Figura 0.2.7 ilustra três tipos de simetrias: *simetria em relação ao eixo x*, *simetria em relação ao eixo y* e *simetria em relação à origem*. Como mostra a figura, a curva é simétrica em relação ao eixo x se, com cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(x, -y)$ também está no gráfico; e é simétrica em relação ao eixo y se, com cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(-x, y)$ também está no gráfico. Uma curva é simétrica em relação à origem se, com cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(-x, -y)$ também está no gráfico. (Equivalentemente, a curva é simétrica em relação à origem se permanecer inalterada por uma rotação de 180° em torno da origem.) Isso sugere os testes de simetria a seguir.

Explique por que o gráfico de uma função não nula não pode ser simétrico em relação ao eixo x.

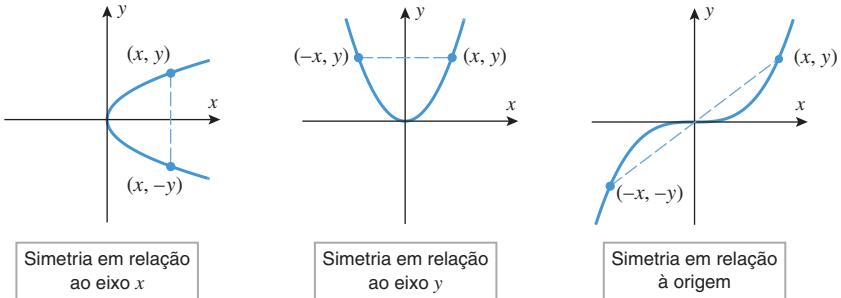


Figura 0.2.7

0.2.3 TEOREMA (Testes de simetria)

- Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo y se, e somente se, substituindo-se x por $-x$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.*
- Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo x se, e somente se, substituindo-se y por $-y$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.*
- Uma curva plana é simétrica em relação à origem se, e somente se, substituindo-se x por $-x$ e y por $-y$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.*

► **Exemplo 11** Use o Teorema 0.2.3 para identificar simetrias no gráfico de $x = y^2$.

Solução Substituir y por $-y$ dá $x = (-y)^2$, que simplifica para a equação original $x = y^2$. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x. O gráfico não é simétrico em relação ao eixo y pois substituir x por $-x$ dá $-x = y^2$, que não é equivalente à equação original $x = y^2$. Analogamente, o gráfico não é simétrico em relação à origem pois substituir x por $-x$ e y por $-y$ dá $-x = (-y)^2$, que simplifica para $-x = y^2$, que de novo não é equivalente à equação original. Esses resultados são consistentes com o gráfico de $x = y^2$ mostrado na Figura 0.2.8. ◀

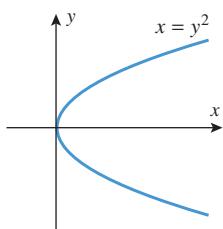


Figura 0.2.8

FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Dizemos que uma função f é uma *função par* se

$$f(-x) = f(x) \quad (8)$$

e uma *função ímpar* se

$$f(-x) = -f(x) \quad (9)$$

Geometricamente, os gráficos de funções pares são simétricos em relação ao eixo y, porque substituindo x por $-x$ na equação $y = f(x)$ dá $y = f(-x)$, que é equivalente à equação original $y = f(x)$ por (8) (ver Figura 0.2.9). Analogamente, segue a partir de (9) que

os gráficos de funções ímpares são simétricos em relação à origem (ver Figura 0.2.10). Alguns exemplos de funções pares são x^2 , x^4 , x^6 e $\cos x$; alguns exemplos de funções ímpares são x^3 , x^5 , x^7 e $\sin x$.

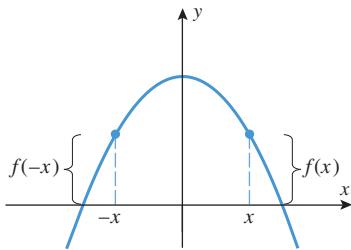


Figura 0.2.9 Este é o gráfico de uma função par, pois $f(-x) = f(x)$.

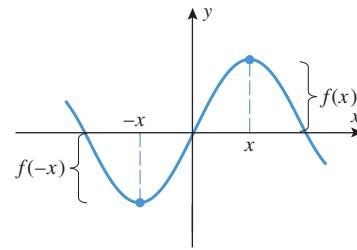


Figura 0.2.10 Este é o gráfico de uma função ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 0.2 (Ver página 27 para respostas.)

- Sejam $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ e $g(x) = |x|$. Em cada parte, dê a fórmula para a função e o correspondente domínio.
 - $f + g$: _____ Domínio: _____
 - $f - g$: _____ Domínio: _____
 - fg : _____ Domínio: _____
 - f/g : _____ Domínio: _____
- Sejam $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Em cada parte, dê a fórmula para a composição e o correspondente domínio.
 - $f \circ g$: _____ Domínio: _____
 - $g \circ f$: _____ Domínio: _____
- O gráfico de $y = 1 + (x - 2)^2$ pode ser obtido transladando o gráfico de $y = x^2$ para a _____ (esquerda/direita) por _____ unidade(s) e depois transladando o novo gráfico para _____ (cima/baixo) por _____ unidade(s).
- Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1|, & -2 \leq x \leq 0 \\ |x - 1|, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$
 - A letra do alfabeto que mais se parece com o gráfico de f é _____.
 - f é uma função par?

EXERCÍCIOS 0.2 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

- O gráfico de uma função f está na figura abaixo. Esboce os gráficos das seguintes equações:
 - $y = f(x) - 1$
 - $y = f(x - 1)$
 - $y = \frac{1}{2}f(x)$
 - $y = f(-\frac{1}{2}x)$

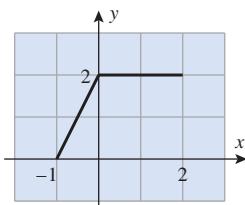


Figura Ex-1

- Use o gráfico do Exercício 1 para esboçar os gráficos das seguintes equações:
 - $y = -f(-x)$
 - $y = f(2 - x)$
 - $y = 1 - f(2 - x)$
 - $y = \frac{1}{2}f(2x)$

- O gráfico de uma função f está na figura abaixo. Esboce os gráficos das seguintes equações:

- $y = f(x + 1)$
- $y = f(2x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = 1 - |f(x)|$

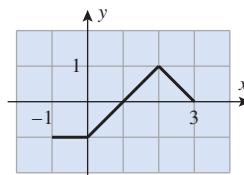


Figura Ex-3

- Use o gráfico do Exercício 3 para esboçar o gráfico da equação $y = f(|x|)$.

- 5-24** Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$, $y = |x|$ ou $y = \sqrt[3]{x}$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto. ■

5. $y = -2(x+1)^2 - 3$ 6. $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

7. $y = x^2 + 6x$

8. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)$

9. $y = 3 - \sqrt{x+1}$

10. $y = 1 + \sqrt{x-4}$

11. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$

12. $y = -\sqrt{3x}$

13. $y = \frac{1}{x-3}$

14. $y = \frac{1}{1-x}$

15. $y = 2 - \frac{1}{x+1}$

16. $y = \frac{x-1}{x}$

17. $y = |x+2| - 2$

18. $y = 1 - |x-3|$

19. $y = |2x-1| + 1$

20. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

21. $y = 1 - 2\sqrt[3]{x}$

22. $y = \sqrt[3]{x-2} - 3$

23. $y = 2 + \sqrt[3]{x+1}$

24. $y + \sqrt[3]{x-2} = 0$

25. (a) Esboce o gráfico de $y = x + |x|$ adicionando as correspondentes coordenadas y nos gráficos de $y = x$ e $y = |x|$.
 (b) Expresse a equação $y = x + |x|$ na forma por partes, sem valores absolutos e confirme que o gráfico obtido em (a) com essa equação é consistente.

26. Esboce o gráfico de $y = x + (1/x)$ adicionando as correspondentes coordenadas y nos gráficos de $y = x$ e $y = 1/x$. Use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

27-28 Determine as fórmulas para $f+g$, $f-g$, fg e f/g e obtenha os domínios das funções. ■

27. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

28. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

29. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Determine
 (a) $f(g(2))$ (b) $g(f(4))$ (c) $f(f(16))$
 (d) $g(g(0))$ (e) $f(2+h)$ (f) $g(3+h)$.

30. Seja $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre
 (a) $g(5s+2)$ (b) $g(\sqrt{x}+2)$ (c) $3g(5x)$
 (d) $\frac{1}{g(x)}$ (e) $g(g(x))$ (f) $(g(x))^2 - g(x^2)$
 (g) $g(1/\sqrt{x})$ (h) $g((x-1)^2)$ (i) $g(x+h)$.

31-34 Determine as fórmulas para $f \circ g$ e $g \circ f$ e estabeleça os domínios das compostas. ■

31. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

32. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \sqrt{x^2+3}$

33. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$

34. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

35-36 Encontre uma fórmula para $f \circ g \circ h$. ■

35. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x^3$

36. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \frac{1}{x^3}$

37-42 Expresse f como uma composição de duas funções; isto é, encontre g e h tais que $f = g \circ h$. [Nota: Cada exercício tem mais de uma solução.] ■

37. (a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (b) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$

38. (a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

39. (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (b) $f(x) = \frac{3}{5 + \cos x}$

40. (a) $f(x) = 3 \operatorname{sen}(x^2)$ (b) $f(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x$

41. (a) $f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x^2))^3$ (b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$

42. (a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f(x) = |5 + 2x|$

43-46 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

43. O domínio de $f+g$ é a interseção dos domínios de f e de g .

44. O domínio de $f \circ g$ consiste em todos os valores de x no domínio de g nos quais $g(x) \neq 0$.

45. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y .

46. O gráfico de $y = f(x+2) + 3$ é obtido transladando o gráfico de $y = f(x)$ duas unidades para a direita e três para cima.

ENFOCANDO CONCEITOS

47. Use a tabela abaixo para fazer um gráfico de $y = f(g(x))$.

Tabela Ex-47

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	0	1	2	3	-2	-3

48. Encontre o domínio de $f \circ g$ para as funções f e g do Exercício 47.

49. Esboce o gráfico de $y = f(g(x))$ para as funções cujos gráficos estão na figura abaixo.

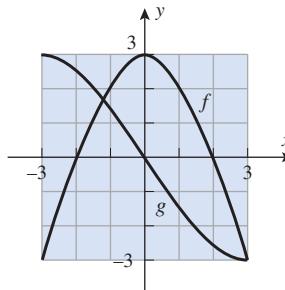


Figura Ex-49

50. Esboce o gráfico de $y = g(f(x))$ para as funções cujos gráficos estão no Exercício 49.

51. Use os gráficos de f e g do Exercício 49 para estimar as soluções das equações $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$.

52. Use a tabela do Exercício 47 para resolver as equações $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$.

53-56 Encontre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \frac{f(w) - f(x)}{w-x}$$

e simplifique tanto quanto possível. ■

53. $f(x) = 3x^2 - 5$

54. $f(x) = x^2 + 6x$

55. $f(x) = 1/x$

56. $f(x) = 1/x^2$

57. Classifique em pares, ímpares ou nenhuma dessas as funções cujos valores estão dados na tabela a seguir.

Tabela Ex-57

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	3	2	3	1	-3	5
$g(x)$	4	1	-2	0	2	-1	-4
$h(x)$	2	-5	8	-2	8	-5	2

58. Complete a tabela da figura abaixo de forma que o gráfico de $y = f(x)$ seja simétrico em relação ao eixo y (a) ou à origem (b).

Tabela Ex-58

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1		-1	0		-5	

59. A figura abaixo mostra uma parte de um gráfico. Complete o gráfico de forma que todo ele seja simétrico em relação ao eixo x (a), ao eixo y (b) ou à origem (c).

60. A figura abaixo mostra uma parte do gráfico de uma função f . Complete o gráfico supondo que

- (a) f é uma função par (b) f é uma função ímpar

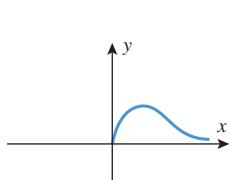


Figura Ex-59

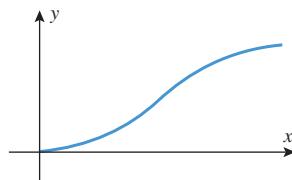
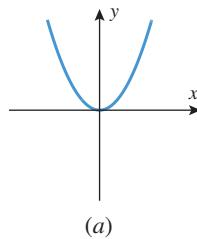


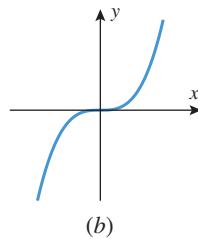
Figura Ex-60

61-62 Classifique as funções cujos gráficos estão nas figuras a seguir como pares, ímpares ou nenhum desses casos. ■

61.



(a)



(b)

Figura Ex-61

62.

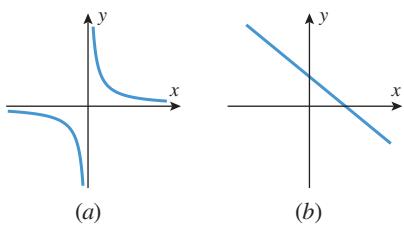


Figura Ex-62

63. Em cada parte, classifique a função como par, ímpar ou nenhum desses casos.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = x + 1$

(e) $f(x) = \frac{x^5 - x}{1 + x^2}$

(f) $f(x) = 2$

64. Suponha que a função f tenha por domínio todos os números reais. Determine se cada uma das funções a seguir pode ser classificada como par ou ímpar. Explique.

(a) $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ (b) $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

65. Suponha que a função f tenha por domínio todos os números reais. Mostre que f pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar. [Sugestão: Ver Exercício 64.]

66-67 Use o Teorema 0.2.3 para determinar se os gráficos têm simetrias em relação ao eixo x , ao eixo y ou à origem. ■

66. (a) $x = 5y^2 + 9$ (b) $x^2 - 2y^2 = 3$
(c) $xy = 5$

67. (a) $x^4 = 2y^3 + y$ (b) $y = \frac{x}{3+x^2}$
(c) $y^2 = |x| - 5$

68-69 (i) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da equação no primeiro quadrante. [Nota: Para isso, resolva a equação para y em termos de x .] (ii) Use a simetria para fazer um esboço à mão de todo o gráfico. (iii) Confirme o que foi feito gerando o gráfico da equação nos demais quadrantes. ■

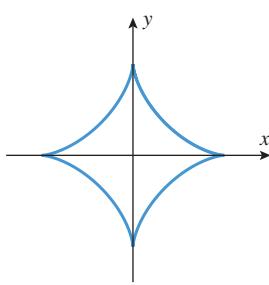
68. $9x^2 + 4y^2 = 36$ 69. $4x^2 + 16y^2 = 16$

70. O gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que aparece na figura abaixo, é denominado **hipocicloide quadricúspide**.

(a) Use o Teorema 0.2.3 para confirmar que esse gráfico é simétrico em relação ao eixo x , ao eixo y e à origem.

(b) Encontre uma função f cujo gráfico no primeiro quadrante coincide com a hypocicloide quadricúspide e use um recurso computacional gráfico para confirmar o que foi feito.

(c) Repita (b) para os demais quadrantes.



Hipocicloide quadricúspide

Figura Ex-70

71. A equação $y = |f(x)|$ pode ser escrita como

$$y = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

que mostra que o gráfico de $y = |f(x)|$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$, retendo a parte que está sobre ou acima do eixo x e refletindo por esse eixo a parte que está abaixo. Use esse método para obter o gráfico de $y = |2x - 3|$ a partir de $y = 2x - 3$.

- 72-73 Use o método descrito no Exercício 71. ■

72. Esboce o gráfico de $y = |1 - x^2|$.

73. Esboce o gráfico de

(a) $f(x) = |\cos x|$ (b) $f(x) = \cos x + |\cos x|$

74. A *função maior inteiro*, $\lfloor x \rfloor$, é definida como sendo o maior inteiro que é menor do que ou igual a x . Por exemplo: $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor -2,3 \rfloor = -3$ e $\lfloor 4 \rfloor = 4$. Em cada parte, esboce o gráfico de $y = f(x)$.

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$
(c) $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$ (d) $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$

75. É alguma vez verdade que $f \circ g = g \circ f$ se f e g forem funções não constantes? Se não, prove; se afirmativo, dê alguns exemplos para os quais é verdade.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.2

1. (a) $(f + g)(x) = 3\sqrt{x} - 2 + x$; $x \geq 0$ (b) $(f - g)(x) = 3\sqrt{x} - 2 - x$; $x \geq 0$ (c) $(fg)(x) = 3x^{3/2} - 2x$; $x \geq 0$

(d) $(f/g)(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{x}$; $x > 0$ 2. (a) $(f \circ g)(x) = 2 - x$; $x \geq 0$ (b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2 - x^2}$; $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

3. direita; 2; cima; 1 4. (a) W (b) sim

0.3 FAMÍLIAS DE FUNÇÕES

As funções são, frequentemente, agrupadas em famílias de acordo com a forma das fórmulas que as definem ou outras características comuns. Nesta seção, vamos discutir algumas das famílias de funções mais básicas.

■ FAMÍLIAS DE CURVAS

O gráfico de uma função constante $f(x) = c$ é o gráfico da equação $y = c$, que é a reta horizontal mostrada na Figura 0.3.1a. Se variarmos c , obteremos um conjunto, ou uma *família*, de retas horizontais como as da Figura 0.3.1b.

As constantes que variarmos para produzir uma família de curvas são denominadas *parâmetros*. Por exemplo, lembre que uma equação da forma $y = mx + b$ representa uma reta de inclinação m e corte com o eixo y em b . Se mantivermos b fixo e tratarmos m como um parâmetro, obteremos uma família de retas cujos membros têm, todos, o mesmo corte em b com o eixo y (Figura 0.3.2a), e se mantivermos m fixo e tratarmos b como um parâmetro, obteremos uma família de retas paralelas cujos membros têm, todos, a mesma inclinação m (Figura 0.3.2b).

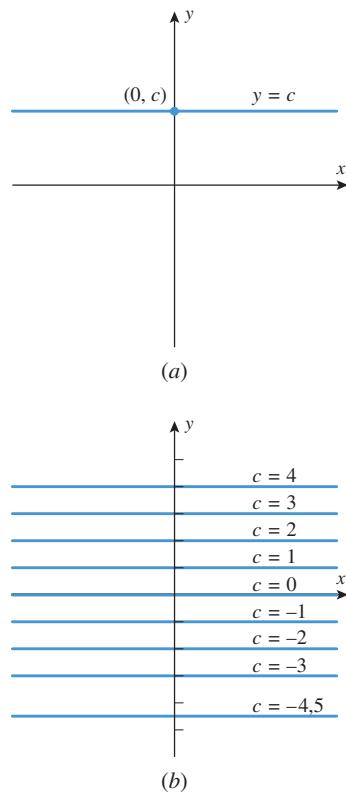


Figura 0.3.1

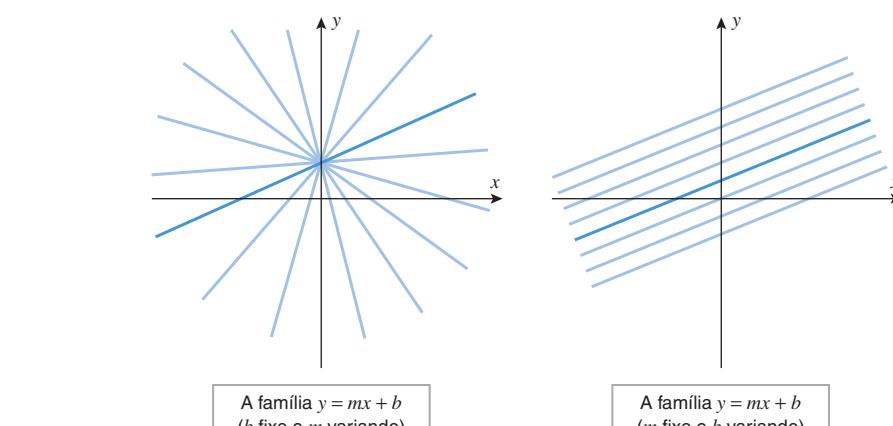


Figura 0.3.2

■ AS FUNÇÕES POTÊNCIA; A FAMÍLIA $y = x^n$

Uma função da forma $f(x) = x^p$, onde p é constante, é denominada **função potênciac**. Por enquanto, vamos considerar o caso em que p é um inteiro positivo, digamos $p = n$. Os gráficos das curvas $y = x^n$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 0.3.3. O primeiro gráfico é o da reta $y = x$, cuja inclinação é 1 e passa pela origem, e o segundo é uma parábola que se abre para cima e tem seu vértice na origem.

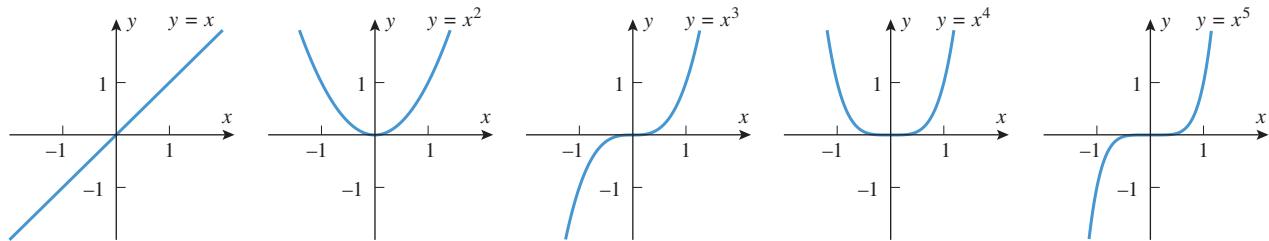


Figura 0.3.3

Para $n \geq 2$, o formato da curva $y = x^n$ depende de n ser par ou ímpar (Figura 0.3.4):

- Para valores pares de n , as funções $f(x) = x^n$ são pares, portanto seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y . Os gráficos têm todos o formato geral da parábola $y = x^2$, e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais achatados no intervalo $-1 < x < 1$ e mais e mais próximos da vertical nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Para valores ímpares de n , as funções $f(x) = x^n$ são ímpares, portanto seus gráficos são simétricos em relação à origem. Os gráficos têm todos o formato geral da cúbica $y = x^3$, e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais achatados no intervalo $-1 < x < 1$ e mais e mais próximos da vertical nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.

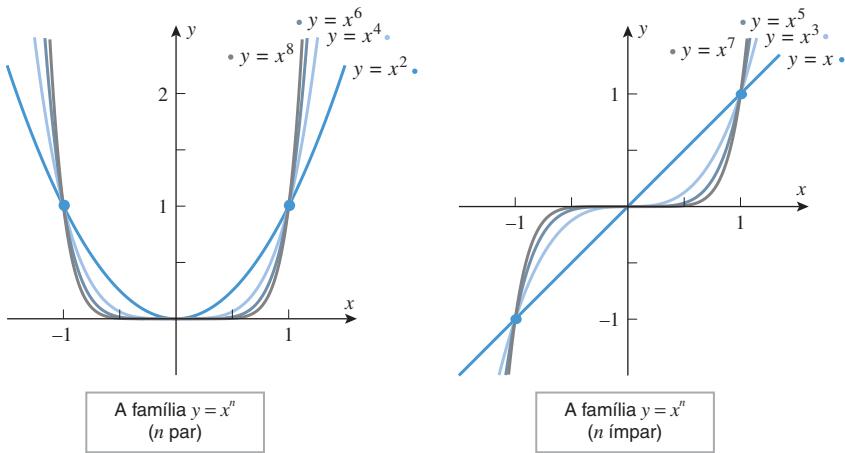


Figura 0.3.4

OBSERVAÇÃO

Os efeitos de achatar e de aproximar a vertical podem ser entendidos considerando o que ocorre quando um número x é elevado a potências mais e mais elevadas: se $-1 < x < 1$, então o valor absoluto de x^n *decrece* com n crescente, fazendo com que os gráficos nesse intervalo sejam achatados com n crescente (tente elevar $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ a potências cada vez mais elevadas). Por outro lado, se $x > 1$ ou se $x < -1$, então o valor absoluto de x^n *cresce* com n crescente, fazendo com que os gráficos nesses intervalos se aproximem da vertical com n crescente (tente elevar 2 ou -2 a potências cada vez mais elevadas).

A FAMÍLIA $y = x^{-n}$

Se p é um inteiro negativo, digamos $p = -n$, então as funções potência $f(x) = x^p$ tomam a forma $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$. A Figura 0.3.5 mostra os gráficos de $y = 1/x$ e $y = 1/x^2$. O gráfico de $y = 1/x$ é denominado uma **hipérbole equilátera** (por razões que serão discutidas adiante).

Como mostra a Figura 0.3.5, o formato da curva $y = 1/x^n$ depende de n ser par ou ímpar:

- Para valores pares de n , as funções $f(x) = 1/x^n$ são pares, portanto seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y . Os gráficos têm todos o formato geral da curva $y = 1/x^2$ e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais próximos da vertical nos intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$ e mais e mais achatados nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Para valores ímpares de n , as funções $f(x) = 1/x^n$ são ímpares, portanto seus gráficos são simétricos em relação à origem. Os gráficos têm todos o formato geral da curva $y = 1/x$ e cada gráfico passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais próximos da vertical nos intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$ e mais e mais achatados nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Tanto para valores pares quanto ímpares de n , o gráfico $y = 1/x^n$ tem uma quebra na origem (denominada **descontinuidade**), que ocorre por não ser permitido dividir por zero.

Considerando os valores de $1/x^n$ para um x fixado com n crescente, explique por que os gráficos ficam mais achatados ou próximos da vertical para valores crescentes de n , conforme descrito no texto.

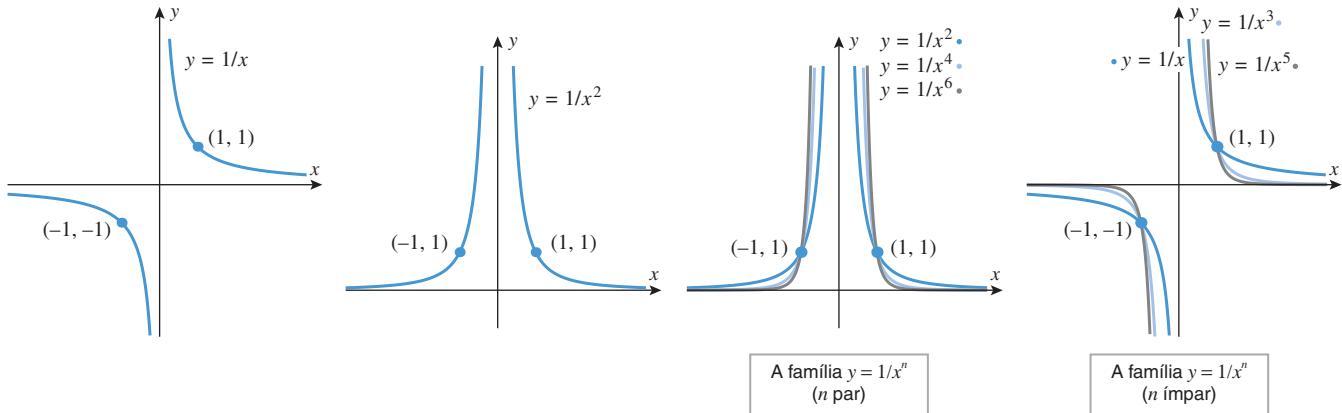


Figura 0.3.5

PROPORÇÕES INVERSAS

Lembre-se de que uma variável y diz-se **inversamente proporcional a uma variável x** se houver uma constante positiva k , denominada **constante de proporcionalidade**, tal que

$$y = \frac{k}{x} \quad (1)$$

Uma vez que se supõe k positiva, o gráfico de (1) tem a mesma forma básica que $y = 1/x$, mas é comprimido ou alongado na direção do eixo y . Também deveria ser evidente a partir de (1) que, duplicando x , multiplicamos y por $\frac{1}{2}$, e, triplicando x , multiplicamos y por $\frac{1}{3}$ e assim por diante.

A Equação (1) pode ser expressa como $xy = k$, que nos diz que o produto de grandezas inversamente proporcionais é uma constante positiva. Essa é uma forma útil de identificar proporcionalidade inversa em dados experimentais.

Tabela 0.3.1

x	0,8	1	2,5	4	6,25	10
y	6,25	5	2	1,25	0,8	0,5

► **Exemplo 1** A Tabela 0.3.1 mostra alguns dados experimentais.

- Explique por que os dados sugerem que y é inversamente proporcional a x .
- Expresse y como uma função de x .
- Faça um gráfico da função e dos dados juntos para $x > 0$.

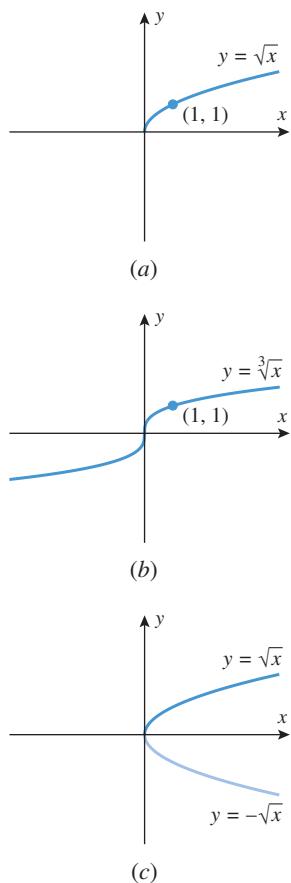


Figura 0.3.8

Solução Para cada ponto dos dados, temos $xy = 5$, portanto y é inversamente proporcional a x e $y = 5/x$. O gráfico dessa equação com os pontos dados está na Figura 0.3.6. ▲

As proporções inversas surgem em várias leis da Física. Por exemplo, a *lei de Boyle* afirma que se uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a uma temperatura constante, então é constante o produto da pressão P exercida pelo gás e o volume V que ele ocupa, ou seja,

$$PV = k$$

Isso implica que as variáveis P e V são inversamente proporcionais uma à outra. A Figura 0.3.7 mostra um típico gráfico de volume *versus* pressão sob as condições da lei de Boyle. Observe como, dobrando a pressão, reduzimos o volume à metade, como era de se esperar.

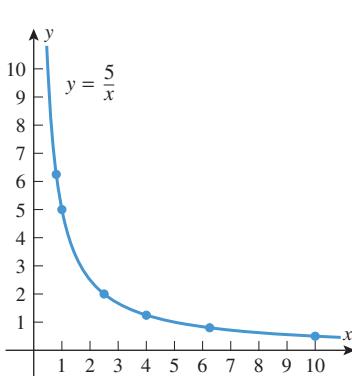


Figura 0.3.6

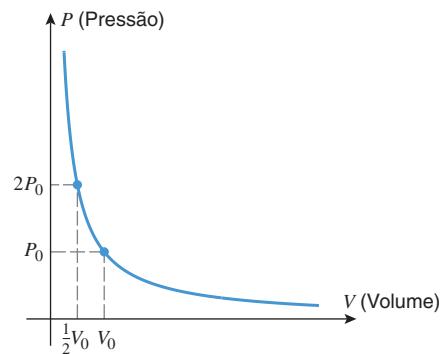


Figura 0.3.7 Dobrando a pressão, reduzimos o volume à metade.

Figura 0.3.9

■ FUNÇÕES POTÊNCIAS COM EXPOENTES NÃO INTEIROS

Se $p = 1/n$, onde n é um inteiro positivo, então as funções potências $f(x) = x^p$ têm a forma

$$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Em particular, se $n = 2$, então $f(x) = \sqrt{x}$; e se $n = 3$, então $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Os gráficos dessas funções estão nas partes (a) e (b) da Figura 0.3.8.

Como cada número real tem uma raiz cúbica, o domínio da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $(-\infty, +\infty)$, de modo que o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ se estende sobre todo o eixo x . Contrastando com esse comportamento, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ se estende somente sobre o intervalo $[0, +\infty)$, pois \sqrt{x} é um número imaginário com x negativo. Como ilustra a Figura 0.3.8c, os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e de $y = -\sqrt{x}$ constituem, respectivamente, as porções superior e inferior da parábola $x = y^2$. Em geral, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ se estende sobre todo o eixo x se n for ímpar, mas somente sobre o intervalo $[0, +\infty)$ se n for par.

As funções potência podem ter outros expoentes fracionários. Alguns exemplos são

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x^3}, \quad f(x) = x^{-7/8} \quad (2)$$

O gráfico de $f(x) = x^{2/3}$ aparece na Figura 0.3.9. Adiante discutiremos expressões envolvendo expoentes irracionais.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Às vezes os recursos gráficos omitem partes de um gráfico de uma função envolvendo expoentes fracionários (ou radicais). Se $f(x) = x^{p/q}$, em que p/q é uma fração positiva em forma irredutível, esse problema pode ser evitado como segue:

- Se p for par e q ímpar, faça o gráfico de $g(x) = |x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.
- Se p e q forem ímpares, faça o gráfico de $g(x) = (|x|/x)|x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.

Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $f(x) = x^{-7/8}$ que exibam todos os seus aspectos significativos.

POLINÔMIOS

Um **polinômio em x** é uma função expressa como uma soma finita de termos da forma cx^n , em que c é uma constante e n é um inteiro não negativo. Alguns exemplos de polinômios são

$$2x + 1, \quad 3x^2 + 5x - \sqrt{2}, \quad x^3, \quad 4 (= 4x^0), \quad 5x^7 - x^4 + 3$$

A função $(x^2 - 4)^3$ é também um polinômio, pois pode ser expandida pela fórmula binomial (veja no final do livro) e expressa, então, como uma soma de termos da forma cx^n :

$$(x^2 - 4)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(4) + 3(x^2)(4^2) - (4^3) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 \quad (3)$$

Uma revisão mais detalhada sobre polinômios é apresentada no Apêndice C.

A constante 0 é um polinômio denominado **polinômio zero ou nulo**. Neste texto, consideramos indefinido o grau do polinômio zero. Outros textos podem adotar convenções distintas.

Um polinômio geral pode ser escrito em qualquer uma das formas a seguir, dependendo se quisermos as potências de x em ordem crescente ou decrescente:

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \\ &c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 \end{aligned}$$

As constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ são denominadas **coeficientes** do polinômio. Quando um polinômio é representado em uma dessas formas, a mais alta potência que ocorre com um coeficiente não nulo é denominada **grau** do polinômio. Os polinômios constantes não nulos são considerados como tendo grau 0, uma vez que podemos escrever $c = cx^0$. Os polinômios de grau 1, 2, 3, 4 e 5 são descritos como **lineares, quadráticos, cúbicos, quárticos e quínticos**, respectivamente. Por exemplo:

$3 + 5x$ tem grau 1 (linear)	$x^2 - 3x + 1$ tem grau 2 (quadrático)	$2x^3 - 7$ tem grau 3 (cúbico)
$8x^4 - 9x^3 + 5x - 3$ tem grau 4 (quártico)	$\sqrt{3} + x^3 + x^5$ tem grau 5 (quíntico)	$(x^2 - 4)^3$ tem grau 6 [veja (3)]

O domínio natural de um polinômio em x é $(-\infty, +\infty)$, já que as únicas operações envolvidas são multiplicações e adições; a imagem depende do polinômio. Já sabemos que os gráficos dos polinômios de grau 0 e 1 são retas e que os gráficos dos polinômios de grau 2 são parábolas. A Figura 0.3.10 mostra os gráficos de alguns polinômios típicos de graus superiores. Discutiremos mais adiante gráficos de polinômios em detalhes; por ora, é suficiente observar que eles são muito bem comportados no sentido de não terem descontinuidades ou bicos agudos. Conforme ilustrado na Figura 0.3.10, os gráficos dos polinômios, durante um certo tempo, vão para baixo e para cima como em uma montanha-russa, para depois subir ou cair indefinidamente, à medida que percorremos a curva em qualquer um dos dois sentidos. Veremos posteriormente que o número de picos e de vales é determinado pelo grau do polinômio.

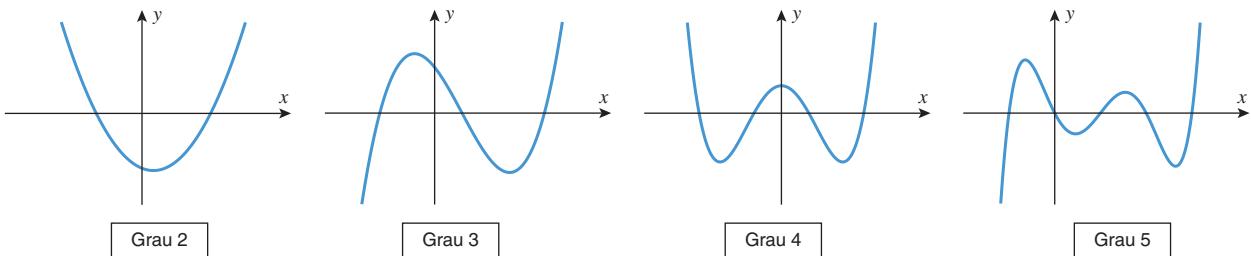


Figura 0.3.10

FUNÇÕES RACIONAIS

Uma função que pode ser expressa como uma razão de dois polinômios é denominada **função racional**. Se $P(x)$ e $Q(x)$ forem polinômios, então o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Por exemplo, o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

consiste em todos os valores de x , exceto $x = 1$ e $x = -1$. Seu gráfico está na Figura 0.3.11, junto aos gráficos de duas outras funções racionais típicas.

Os gráficos das funções racionais com denominadores não constantes diferem dos gráficos dos polinômios de algumas formas essenciais:

- Diferentemente dos polinômios, cujos gráficos são curvas contínuas (não quebradas), os gráficos das funções racionais têm descontinuidades nos pontos onde o denominador é zero.
- Diferentemente dos polinômios, as funções racionais podem ter números nos quais não estão definidas. Perto desses pontos, muitas funções racionais têm gráficos que se aproximam bastante de uma reta vertical, denominada **assíntota vertical**. Na Figura 0.3.11, essas assíntotas estão representadas por linhas tracejadas.
- Diferentemente dos gráficos dos polinômios não constantes, os quais começam e terminam subindo ou descendo indefinidamente, os gráficos de muitas funções racionais podem começar ou terminar cada vez mais perto de uma reta horizontal, denominada **assíntota horizontal**, quando se percorre a curva em qualquer um dos dois sentidos. As assíntotas estão representadas pelas linhas tracejadas horizontais nas duas primeiras partes da Figura 0.3.11. Na terceira parte da figura, uma assíntota horizontal é o eixo x .

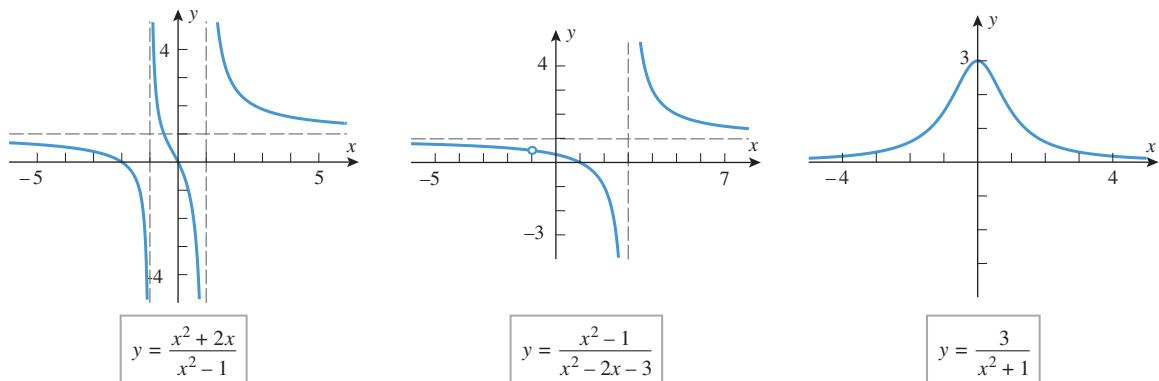


Figura 0.3.11

■ FUNÇÕES ALGÉBRICAS

As funções que podem ser construídas com polinômios, aplicando-se um número finito de operações algébricas (adição, subtração, divisão e extração de raízes), são denominadas **funções algébricas**. Alguns exemplos são:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad f(x) = 3\sqrt[3]{x}(2+x), \quad f(x) = x^{2/3}(x+2)^2$$

Conforme ilustrado na Figura 0.3.12, os gráficos das funções algébricas variam amplamente; assim sendo, é difícil fazer afirmativas genéricas sobre elas. Mais adiante no livro, vamos desenvolver métodos gerais do Cálculo que permitem analisar essas funções.

■ AS FAMÍLIAS $y = A \sen Bx$ E $y = A \cos Bx$

Muitas aplicações importantes levam a funções trigonométricas do tipo

$$f(x) = A \sen(Bx - C) \quad \text{e} \quad g(x) = A \cos(Bx - C) \tag{4}$$

Neste texto, vamos supor que a variável independente de uma função trigonométrica seja dada em radianos, a menos de menção explícita em contrário. Uma revisão de funções trigonométricas pode ser encontrada no Apêndice B.

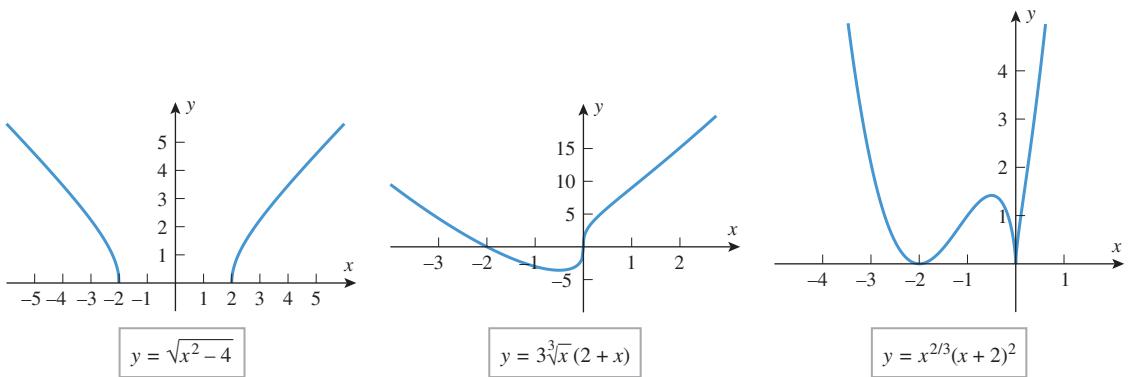


Figura 0.3.12

em que A , B e C são constantes não nulas. Os gráficos dessas funções podem ser obtidos alongando, comprimindo, transladando e refletindo apropriadamente os gráficos de $y = \sin x$ e de $y = \cos x$. Para ver isso, vamos começar com o caso $C = 0$ e considerar como os gráficos das equações

$$y = A \sin Bx \quad \text{e} \quad y = A \cos Bx$$

se relacionam com os gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$. Se A e B forem positivos, então o efeito da constante A é alongar ou comprimir verticalmente os gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$ por um fator A , enquanto o de B é fazer o mesmo, porém horizontalmente por um fator B . Por exemplo, o gráfico de $y = 2 \sin 4x$ pode ser obtido alongando verticalmente o de $y = \sin x$ por um fator 2 e comprimindo horizontalmente por um fator 4. (Lembre-se da Seção 0.2, em que vimos que o multiplicador de x alonga quando for menor que 1 e comprime quando maior que 1.) Assim, como mostra a Figura 0.3.13, o gráfico de $y = 2 \sin 4x$ varia entre -2 e 2 e repete-se a cada $2\pi/4 = \pi/2$ unidades.

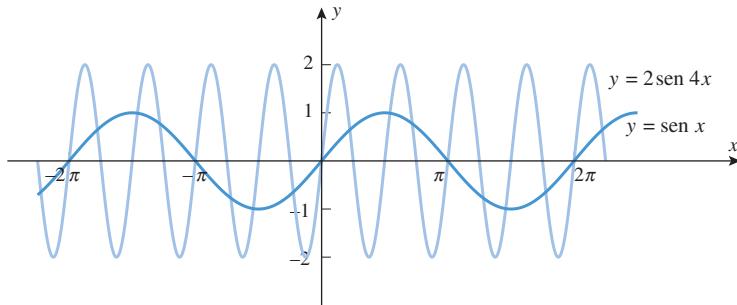


Figura 0.3.13

Em geral, se A e B forem números positivos, então os gráficos de

$$y = A \sin Bx \quad \text{e} \quad y = A \cos Bx$$

oscilam entre $-A$ e A e repetem-se a cada $2\pi/B$ unidades. Assim, dizemos que essas funções têm **amplitude** A e **período** $2\pi/B$. Além disso, definimos a **frequência** dessas funções como sendo o recíproco do período, ou seja, $B/2\pi$. Se A ou B for negativo, além da compressão e do alongamento, teremos reflexões dos gráficos pelos eixos; nesse caso, a amplitude, o período e a frequência são dados por

$$\text{amplitude} = |A|, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{|B|}, \quad \text{frequência} = \frac{|B|}{2\pi}$$

► **Exemplo 2** Faça um esboço dos seguintes gráficos que mostre o período e a amplitude.

- (a) $y = 3 \sin 2\pi x$ (b) $y = -3 \cos 0,5x$ (c) $y = 1 + \sin x$

Solução (a) A equação é do tipo $y = A \operatorname{sen} Bx$ com $A = 3$ e $B = 2\pi$, portanto o gráfico tem a forma de uma função seno, mas com amplitude $A = 3$ e período $2\pi/B = 2\pi/2\pi = 1$ (Figura 0.3.14a).

Solução (b) A equação é do tipo $y = A \cos Bx$ com $A = -3$ e $B = 0,5$, portanto o gráfico tem a forma de uma função cosseno que foi refletida em torno do eixo x (pois $A = -3$ é negativa), mas com amplitude $|A| = 3$ e período $2\pi/B = 2\pi/0,5 = 4\pi$ (Figura 0.3.14b).

Solução (c) O gráfico tem a forma de uma função seno que foi transladada uma unidade para cima (Figura 0.3.14c). ◀

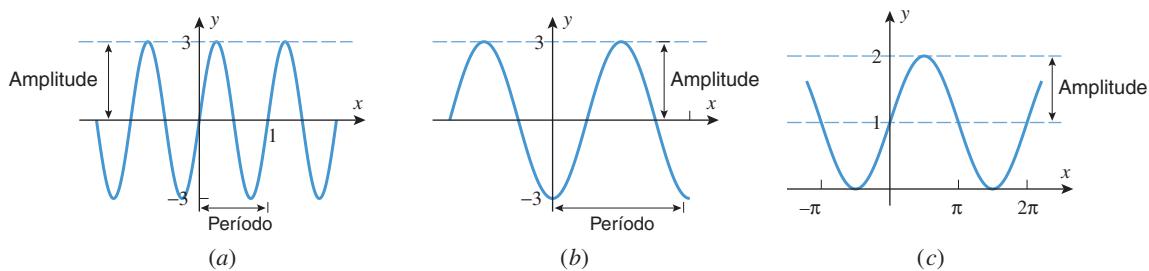


Figura 0.3.14

■ AS FAMÍLIAS $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ E $y = A \cos(Bx - C)$

Para investigar os gráficos das famílias mais gerais

$$y = A \operatorname{sen}(Bx - C) \quad \text{e} \quad y = A \cos(Bx - C)$$

será útil reescrevê-las na forma

$$y = A \operatorname{sen}\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right] \quad \text{e} \quad y = A \cos\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right]$$

Assim, vemos que os gráficos dessas equações podem ser obtidos transladando os gráficos de $y = A \operatorname{sen} Bx$ e $y = A \cos Bx$ para a esquerda ou para a direita, dependendo do sinal de C/B . Por exemplo, se $C/B > 0$, então o gráfico de

$$y = A \operatorname{sen}[B(x - C/B)] = A \operatorname{sen}(Bx - C)$$

pode ser obtido transladando o de $y = A \operatorname{sen} Bx$ para a direita em C/B unidades (Figura 0.3.15). Se $C/B < 0$, o gráfico de $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ é obtido por translação do gráfico de $y = A \operatorname{sen} Bx$ para a esquerda por $|C/B|$ unidades.

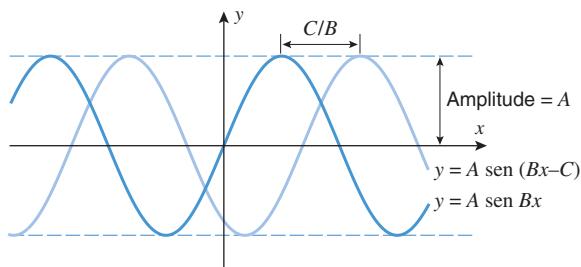


Figura 0.3.15

► **Exemplo 3** Encontre a amplitude e o período de

$$y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

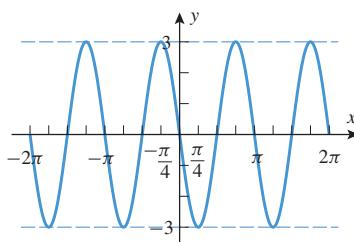


Figura 0.3.16

e determine como deveria ser transladado o gráfico de $y = 3 \cos 2x$ para produzir o gráfico dessa equação. Confirme seu resultado fazendo o gráfico da equação em uma calculadora ou computador.

Solução A equação pode ser reescrita como

$$y = 3 \cos \left[2x - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 3 \cos \left[2 \left(x - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

que é do tipo

$$y = A \cos \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right]$$

com $A = 3$, $B = 2$ e $C/B = -\pi/4$. Segue-se que a amplitude é $A = 3$, o período é $2\pi/B = \pi$ e o gráfico é obtido transladando o gráfico de $y = 3 \cos 2x$ para a esquerda por $|C/B| = \pi/4$ unidades (Figura 0.3.16). ▲

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.3 (Ver página 38 para respostas.)

- Considere a família de funções $y = x^n$, em que n é um inteiro. Os gráficos de $y = x^n$ são simétricos em relação ao eixo y se n for _____. Esses gráficos são simétricos em relação à origem se n for _____. O eixo y é uma assíntota vertical desses gráficos se n for _____.
- Qual é o domínio natural de um polinômio?
- Considere a família de funções $y = x^{1/n}$, em que n é um inteiro não nulo. Encontre o domínio natural dessas funções se n for
 - positivo e par
 - positivo e ímpar
 - negativo e par
 - negativo e ímpar.
- Classifique cada equação como polinomial, racional, algébrica ou não uma função algébrica.
 - $y = \sqrt{x} + 2$
 - $y = \sqrt{3}x^4 - x + 1$
 - $y = 5x^3 + \cos 4x$
 - $y = \frac{x^2 + 5}{2x - 7}$
 - $y = 3x^2 + 4x^{-2}$
- O gráfico de $y = A \operatorname{sen} Bx$ tem amplitude _____ e é periódico de período _____.

EXERCÍCIOS 0.3 Recurso Gráfico

- (a) Encontre uma equação para a família de retas cujos membros têm inclinação $m = 3$.
 (b) Encontre uma equação para o membro da família que passe por $(-1, 3)$.
 (c) Esboce os gráficos de alguns membros da família e marque-os com suas equações. Inclua a reta da parte (b).
- Encontre uma equação para a família de retas cujos membros são perpendiculares àqueles do Exercício 1.
- (a) Encontre uma equação para a família de retas com corte no eixo y igual a $b = 2$.
 (b) Encontre uma equação para o membro da família cujo ângulo de inclinação é 135° .
 (c) Esboce os gráficos de alguns membros da família e marque-os com suas equações. Inclua a reta da parte (b).
- Encontre uma equação para
 - a família de retas passando pela origem.
 - a família de retas com corte no eixo x igual a $a = 1$.
 - a família de retas que passam pelo ponto $(1, -2)$.
 - a família de retas paralelas a $2x + 4y = 1$.
- Encontre uma equação para a família de retas tangentes ao círculo com centro na origem e raio 3.
- Encontre uma equação para a família de retas que passam pela intersecção de $5x - 3y + 11 = 0$ e $2x - 9y + 7 = 0$.
- O Imposto de Renda dos EUA usa um sistema de depreciação linear de 10 anos para determinar o valor de vários itens comerciais. Isso significa que se supõe que um item tenha valor zero no final do décimo ano e que, em tempos intermediários, o valor é uma função linear do tempo decorrido. Esboce algumas retas de depreciação típicas e explique o significado prático do corte com o eixo y .
- Encontre todas as retas por $(6, -1)$ para as quais o produto dos cortes nos eixos x e y seja 3.

ENFOCANDO CONCEITOS

9-10 Estabeleça uma propriedade geométrica comum a todas as retas da família e esboce cinco dessas retas. ■

- a família $y = -x + b$
- a família $y = mx - 1$
- a família $y = m(x + 4) + 2$
- a família $x - ky = 1$

10. (a) a família $y = b$
 (b) a família $Ax + 2y + 1 = 0$
 (c) a família $2x + By + 1 = 0$
 (d) a família $y - 1 = m(x + 1)$

11. Em cada parte, combine a equação com um dos gráficos dados.

- (a) $y = \sqrt[5]{x}$ (b) $y = 2x^5$
 (c) $y = -1/x^8$ (d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
 (e) $y = \sqrt[4]{x - 2}$ (f) $y = -\sqrt[5]{x^2}$

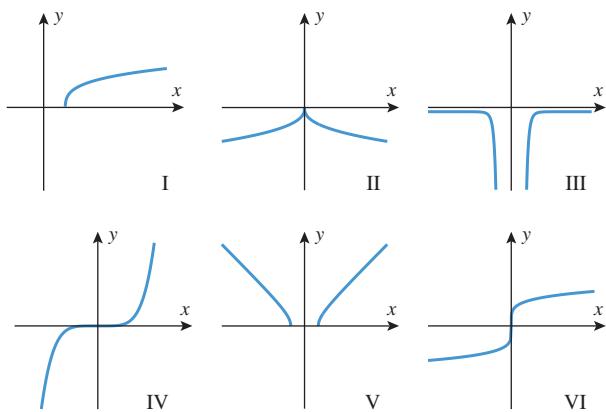


Figura Ex-11

12. A tabela abaixo dá valores aproximados de três funções: uma da forma kx^2 , outra da forma kx^{-3} e a terceira da forma $kx^{3/2}$. Identifique cada uma e dê uma estimativa de k em cada caso.

Tabela Ex-12

x	0,25	0,37	2,1	4,0	5,8	6,2	7,9	9,3
$f(x)$	640	197	1,08	0,156	0,0513	0,0420	0,0203	0,0124
$g(x)$	0,0312	0,0684	2,20	8,00	16,8	19,2	31,2	43,2
$h(x)$	0,250	0,450	6,09	16,0	27,9	30,9	44,4	56,7

- 13-14 Esboce o gráfico da equação para $n = 1, 3$ e 5 em um sistema de coordenadas e para $n = 2, 4$ e 6 em outro sistema de coordenadas. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

13. (a) $y = -x^n$ (b) $y = 2x^{-n}$ (c) $y = (x - 1)^{1/n}$
 14. (a) $y = 2x^n$ (b) $y = -x^n$ (c) $y = -3(x + 2)^{1/n}$
 15. (a) Esboce o gráfico de $y = ax^2$ com $a = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.
 (b) Esboce o gráfico de $y = x^2 + b$ com $b = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.
 (c) Esboce alguns membros típicos da família de curvas $y = ax^2 + b$.
 16. (a) Esboce o gráfico de $y = a\sqrt{x}$ com $a = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.

- (b) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{x} + b$ com $b = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.
 (c) Esboce alguns membros típicos da família de curvas $y = a\sqrt{x} + b$.

- 17-18 Esboce o gráfico da equação fazendo as transformações apropriadas no gráfico de uma função potência básica. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

17. (a) $y = 2(x + 1)^2$ (b) $y = -3(x - 2)^3$
 (c) $y = \frac{-3}{(x + 1)^2}$ (d) $y = \frac{1}{(x - 3)^5}$
 18. (a) $y = 1 - \sqrt{x + 2}$ (b) $y = 1 - \sqrt[3]{x + 2}$
 (c) $y = \frac{5}{(1 - x)^3}$ (d) $y = \frac{2}{(4 + x)^4}$

19. Esboce o gráfico de $y = x^2 + 2x$ completando o quadrado e fazendo as transformações apropriadas no gráfico de $y = x^2$.
 20. (a) Use o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para ajudar a esboçar o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.
 (b) Use o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ para ajudar a esboçar o gráfico de $y = \sqrt[3]{|x|}$.

21. Conforme discutido nesta seção, a lei de Boyle estabelece que, a uma temperatura constante, a pressão P exercida por um gás está relacionada ao volume V pela equação $PV = k$.
 (a) Encontre as unidades apropriadas para a constante k se a pressão (que é força por unidade de área) for em newtons por metro quadrado (N/m^2) e o volume, em metros cúbicos (m^3).
 (b) Encontre k se o gás exercer uma pressão de 20.000 N/m^2 quando o volume for de 1 litro ($0,001 \text{ m}^3$).
 (c) Faça uma tabela que mostre as pressões para volumes de $0,25; 0,5; 1,0; 1,5$ e $2,0$ litros.
 (d) Faça um gráfico de P versus V .

22. Um fabricante de recipientes impermeabilizados de papelão para bebidas quer construí-los na forma de um paralelepípedo fechado com base quadrada e capacidade de $1/10$ litro (100 cm^3). Dê uma estimativa para as dimensões do recipiente que requer a menor quantidade de material para sua fabricação.

- 23-24 Uma variável y se diz ser *inversamente proporcional ao quadrado de uma variável* x se y estiver relacionada com x por uma equação da forma $y = k/x^2$, em que k é uma constante não nula denominada *constante de proporcionalidade*. Essa terminologia é usada nestes exercícios. ■

23. De acordo com a *lei de Coulomb*, a força F de atração entre duas cargas pontuais positiva e negativa é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre elas.
 (a) Supondo que a força de atração entre as cargas seja de $0,0005$ newton quando a distância entre elas for de $0,3$ metro, encontre a constante de proporcionalidade (com unidades apropriadas).
 (b) Encontre a força de atração das cargas pontuais quando elas estiverem a 3 metros uma da outra.
 (c) Faça um gráfico da força versus distância para as duas cargas.

- (d) O que acontece com a força se as partículas ficarem cada vez mais perto uma da outra? O que acontece se ficarem cada vez mais longe uma da outra?
- 24.** Segue a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton que o peso P de um objeto, em relação à Terra, é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre o objeto e o centro da Terra, isto é, $P = C/x^2$.
- Supondo que um satélite meteorológico pese 900 kg na superfície da Terra e que a Terra seja uma esfera com raio de 6.400 km, ache a constante C .
 - Encontre o peso do satélite quando estiver 1.600 km acima da superfície da Terra.
 - Faça um gráfico do peso do satélite *versus* sua distância ao centro da Terra.
 - Há alguma distância do centro da Terra na qual o peso do satélite seja zero? Explique seu raciocínio.
- 25-28 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■
- Cada curva da família $y = 2x + b$ é paralela à reta $y = 2x$.
 - Cada curva da família $y = x^2 + bx + c$ é uma translação do gráfico de $y = x^2$.
 - Se uma curva passa pelo ponto $(2, 6)$ e y é inversamente proporcional a x , então a constante de proporcionalidade é 3.
 - As curvas da família $y = -5 \operatorname{sen}(A\pi x)$ têm amplitude 5 e período $2/|A|$.

ENFOCANDO CONCEITOS

- 29.** Combine a equação com seu gráfico na figura a seguir e determine as equações para as assintotas verticais e horizontais.

$$\begin{array}{ll} (a) y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} & (b) y = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6} \\ (c) y = \frac{2x^4}{x^4 + 1} & (d) y = \frac{4}{(x + 2)^2} \end{array}$$

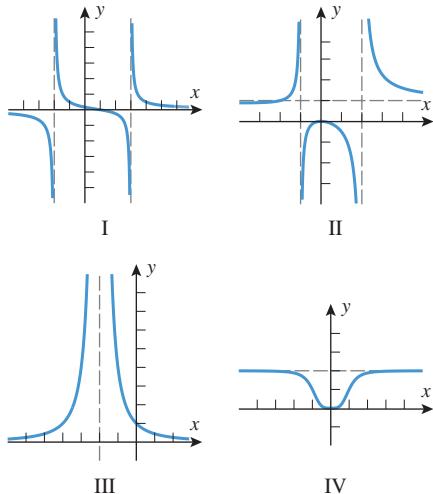


Figura Ex-29

- 30.** Encontre uma equação da forma $y = k/(x^2 + bx + c)$ cujo gráfico se adeque razoavelmente com o da figura abaixo. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

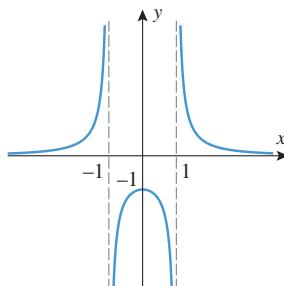


Figura Ex-30

- 31-32** Encontre uma equação da forma $y = D + A \operatorname{sen} Bx$ ou $y = D + A \cos Bx$ para cada gráfico. ■

31.

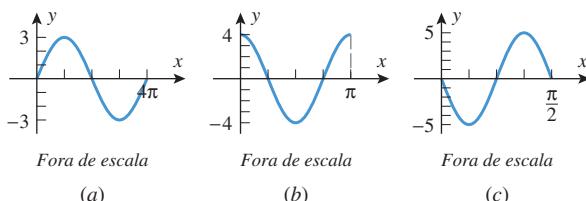


Figura Ex-31

32.

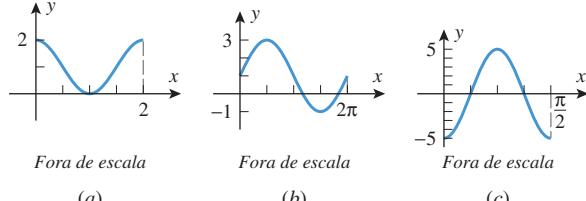


Figura Ex-32

- 33.** Em cada parte, encontre uma equação para o gráfico que tenha a forma $y = y_0 + A \operatorname{sen}(Bx - C)$.

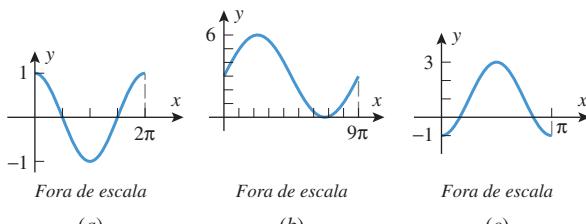


Figura Ex-33

- 34.** Nos EUA, as tomadas elétricas padrão fornecem uma corrente elétrica senoidal com uma voltagem máxima de $V = 120\sqrt{2}$ volts (V), a uma frequência de 60 hertz (Hz). Escreva uma equação que expresse V como uma função do tempo t , supondo que $V = 0$ se $t = 0$. [Nota: 1 Hz = 1 ciclo por segundo.]

35-36 Encontre a amplitude e o período e esboce pelo menos dois períodos do gráfico à mão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

35. (a) $y = 3 \sen 4x$ (b) $y = -2 \cos \pi x$
 (c) $y = 2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

36. (a) $y = -1 - 4 \sen 2x$ (b) $y = \frac{1}{2} \cos(3x - \pi)$
 (c) $y = -4 \sen\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right)$

37. Equações da forma

$$x = A_1 \sen \omega t + A_2 \cos \omega t$$

surgem no estudo de vibrações e de outros movimentos periódicos. Expressa a equação

$$x = 5\sqrt{3} \sen 2\pi t + \frac{5}{2} \cos 2\pi t$$

na forma $x = A \sen(\omega t + \theta)$ e use um recurso gráfico para confirmar que ambas as equações têm o mesmo gráfico.

38. Determine o número de soluções de $x = 2 \sen x$ e use um recurso computacional ou gráfico para obter um valor aproximado dessas soluções.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.3

1. par; ímpar; negativo 2. $(-\infty, +\infty)$ 3. (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, +\infty)$ (c) $(0, +\infty)$ (d) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 4. (a) algébrica (b) polinomial (c) não algébrica (d) racional (e) racional 5. $|A|; 2\pi/|B|$

0.4 FUNÇÕES INVERSAS; FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

*Na linguagem do dia a dia, o termo “inverter” tem a conotação de virar em sentido contrário. Por exemplo, em Meteorologia, uma inversão térmica é uma troca das propriedades de temperaturas usuais das camadas atmosféricas e, em Música, uma inversão melódica troca um intervalo ascendente pelo correspondente intervalo descendente. Em Matemática, o termo **inverter** é utilizado para descrever uma função que troca de volta o que uma outra função faz, ou seja, cada uma desfaz o efeito da outra. Nesta seção, discutiremos essa ideia matemática fundamental. Em particular, introduziremos as funções trigonométricas inversas para atacar o problema de recuperar um ângulo que possa ter produzido um certo valor de uma função trigonométrica.*

■ FUNÇÕES INVERSAS

A ideia de resolver uma equação $y = f(x)$ em x como uma função de y , digamos $x = g(y)$, é uma das mais importantes na Matemática. Às vezes, resolver essa equação é um processo simples; por exemplo, usando álgebra básica, a equação

$$y = x^3 + 1 \quad y = f(x)$$

pode ser resolvida em x como uma função de y :

$$x = \sqrt[3]{y - 1} \quad x = g(y)$$

A primeira equação é melhor para calcular y se x for conhecido, e a segunda é melhor para calcular x se y for conhecido (Figura 0.4.1).

Nosso interesse fundamental nesta seção é identificar relações que possam existir entre as funções f e g quando uma função $y = f(x)$ for expressa como $x = g(y)$, ou ao contrário. Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = x^3 + 1$ e $g(y) = \sqrt[3]{y - 1}$. Quando essas funções forem compostas em qualquer ordem, uma cancela o efeito da outra, ou seja,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{f(x) - 1} = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = x \\ f(g(y)) &= [g(y)]^3 + 1 = (\sqrt[3]{y - 1})^3 + 1 = y \end{aligned} \tag{1}$$

Os pares de funções com essas duas propriedades são tão importantes que há uma terminologia específica para elas.

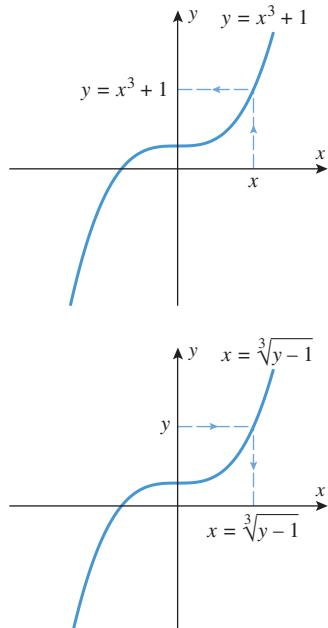


Figura 0.4.1

0.4.1 DEFINIÇÃO Se as funções f e g satisfazem as duas condições

$$g(f(x)) = x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f$$

$$f(g(y)) = y \text{ em cada } y \text{ do domínio de } g$$

dizemos que f e g são **funções inversas** uma da outra, ou então que f é **uma inversa de g** e g é **uma inversa de f** .

ADVERTÊNCIA

Se f é uma função, então o -1 no símbolo f^{-1} sempre denota a inversa, e *nunca* um expoente; ou seja:

$$f^{-1}(x) \text{ nunca significa } \frac{1}{f(x)}$$

Pode ser mostrado (Exercício 62) que, se uma função f tiver uma inversa, então essa inversa será única. Assim, se uma função f tiver uma inversa, teremos o direito de falar “da” inversa de f , caso em que passamos a denotá-la pelo símbolo f^{-1} .

► **Exemplo 1** As contas feitas em (1) mostram que $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ é a inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Assim, podemos escrever g em notação de inversa como

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

e podemos escrever as equações na Definição 0.4.1 como

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f \\ f(f^{-1}(y)) &= y \text{ em cada } y \text{ do domínio de } f^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Referimo-nos a essas equações como as **equações do cancelamento** de f e f^{-1} . ◀

■ MUDANÇA DA VARIÁVEL INDEPENDENTE

As fórmulas em (2) usam x como a variável independente de f e y como a variável independente de f^{-1} . Embora muitas vezes seja conveniente utilizar variáveis diferentes para f e f^{-1} , frequentemente é desejável utilizar a mesma variável independente para ambas. Por exemplo, se quisermos esboçar os gráficos de f e de f^{-1} juntos no mesmo sistema de coordenadas xy , utilizaremos a mesma variável independente x e a mesma variável dependente y para ambas as funções. Assim, para esboçar o gráfico das funções $f(x) = x^3 + 1$ e $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$ do Exemplo 1 no mesmo sistema de coordenadas xy , trocamos a variável independente y para x , usamos y como a variável dependente de ambas as funções e traçamos o gráfico das equações

$$y = x^3 + 1 \quad \text{e} \quad y = \sqrt[3]{x-1}$$

Adiante nesta seção voltaremos a tratar de funções inversas, mas, para referência futura, apresentamos a seguinte reformulação das equações do cancelamento de (2) usando x como a variável independente de f e de f^{-1} :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f \\ f(f^{-1}(x)) &= x \text{ em cada } y \text{ do domínio de } f^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

► **Exemplo 2** Confirme cada uma das seguintes afirmações:

- (a) A inversa de $f(x) = 2x$ é $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.
- (b) A inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

Solução (a)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x$$

Os resultados no Exemplo 2 devem fazer sentido intuitivo, uma vez que as operações de multiplicar por 2 e por $\frac{1}{2}$ em qualquer ordem cancelam uma o efeito da outra, da mesma forma que as operações de elevar ao cubo e extrair a raiz cúbica.

Solução (b)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 3** Sabendo que a função f tem uma inversa e que $f(3) = 5$, encontre $f^{-1}(5)$.

Solução Aplicando f^{-1} a ambos os lados da equação $f(3) = 5$, obtemos

$$f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5)$$

e agora aplicamos a primeira das equações de (3) para concluir que $f^{-1}(5) = 3$. ◀

Em geral, se f tem uma inversa e $f(a) = b$, então o procedimento no Exemplo 3 mostra que $a = f^{-1}(b)$; ou seja, f^{-1} leva cada saída de f de volta para a entrada correspondente (Figura 0.4.2).

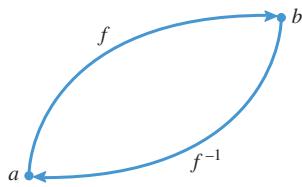


Figura 0.4.2 Se f leva a para b , então f^{-1} leva b de volta para a .

■ DOMÍNIO E IMAGEM DE FUNÇÕES INVERSAS

As equações em (3) implicam a seguinte relação entre os domínios e as imagens de f e de f^{-1} :

$$\text{domínio de } f^{-1} = \text{imagem de } f$$

$$\text{imagem de } f^{-1} = \text{domínio de } f$$

(4)

Uma maneira de mostrar que esses dois conjuntos são iguais é mostrar que cada um está contido no outro. Assim, podemos estabelecer a primeira igualdade em (4) mostrando que o domínio de f^{-1} é um subconjunto da imagem de f e que a imagem de f é um subconjunto do domínio de f^{-1} . Isso pode ser feito da seguinte maneira: a primeira equação em (3) implica que f^{-1} está definido em $f(x)$ com quaisquer valores de x do domínio de f , e isso implica que a imagem de f é um subconjunto do domínio de f^{-1} . Reciprocamente, se x está no domínio de f^{-1} , então a segunda equação em (3) implica que x está na imagem de f , por ser a imagem de $f^{-1}(x)$. Assim, o domínio de f^{-1} é um subconjunto da imagem de f . Deixamos a prova da segunda equação de (4) como um exercício.

■ UM MÉTODO PARA ENCONTRAR FUNÇÕES INVERSAS

No começo desta seção, observamos que a resolução de $y = f(x) = x^3 + 1$ em x como uma função de y produz $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1}$. O teorema seguinte mostra que isso não aconteceu por acaso.

0.4.2 TEOREMA Se uma equação $y = f(x)$ pode ser resolvida em x como uma função de y , digamos $x = g(y)$, então f tem uma inversa, e essa inversa, é $g(y) = f^{-1}(y)$.

DEMONSTRAÇÃO Substituir $y = f(x)$ em $x = g(y)$ dá $x = g(f(x))$, que confirma a primeira equação da Definição 0.4.1, e substituir $x = g(y)$ em $y = f(x)$ dá $y = f(g(y))$, que confirma a segunda equação da Definição 0.4.1. ■

O Teorema 0.4.2 nos dá o seguinte procedimento para encontrar a inversa de uma função.

Um Procedimento para Encontrar a Inversa de uma Função f

Passo 1. Escreva a equação $y = f(x)$.

Passo 2. Se possível, resolva essa equação em x como função de y .

Passo 3. A equação resultante será $x = f^{-1}(y)$, que fornece uma fórmula para f^{-1} com variável independente y .

Passo 4. Se y for aceitável como variável independente da função inversa, problema resolvido; se quisermos ter x como variável independente, precisamos trocar x com y na equação $x = f^{-1}(y)$ para obter $y = f^{-1}(x)$.

Uma maneira alternativa de obter uma fórmula para $f^{-1}(x)$ com x como variável independente é inverter os papéis de x e de y logo no início e, então, resolver a equação $x = f(y)$ para y como função de x .

► **Exemplo 4** Encontre uma fórmula para a inversa de $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ com variável independente x e dê o domínio de f^{-1} .

Solução Seguindo o procedimento dado anteriormente, começamos escrevendo

$$y = \sqrt{3x - 2}$$

Em seguida, resolvemos essa equação em x como função de y :

$$\begin{aligned} y^2 &= 3x - 2 \\ x &= \frac{1}{3}(y^2 + 2) \end{aligned}$$

e obtemos

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y^2 + 2) \quad (5)$$

Como queremos que a variável independente seja x , trocamos x e y em (5) para obter a fórmula

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2) \quad (6)$$

Sabemos, a partir de (4), que o domínio de f^{-1} é a imagem de f . Em geral, isso não precisa ser igual ao domínio natural da fórmula para f^{-1} . De fato, nesse exemplo, o domínio natural de (6) é dado por $(-\infty, +\infty)$, enquanto a imagem de $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ é $[0, +\infty)$. Assim, se quisermos especificar o domínio de f^{-1} , devemos dá-lo explicitamente reescrevendo (6) como

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2), \quad x \geq 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO INVERSA

O procedimento que acabamos de dar para encontrar a inversa de uma função foi baseado na resolução da equação $y = f(x)$ em x como função de y . Esse procedimento pode falhar por duas razões: a função f pode não ter uma inversa, ou tem uma inversa, mas a equação $y = f(x)$ não pode ser resolvida explicitamente em x como função de y . Assim, é importante estabelecer condições que garantam a existência de uma inversa, mesmo se não for possível encontrá-la explicitamente.

Se uma função f tem uma inversa, então ela deve associar saídas distintas a entradas distintas. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ não pode ter uma inversa porque associa o mesmo valor a $x = 2$ e a $x = -2$, a saber,

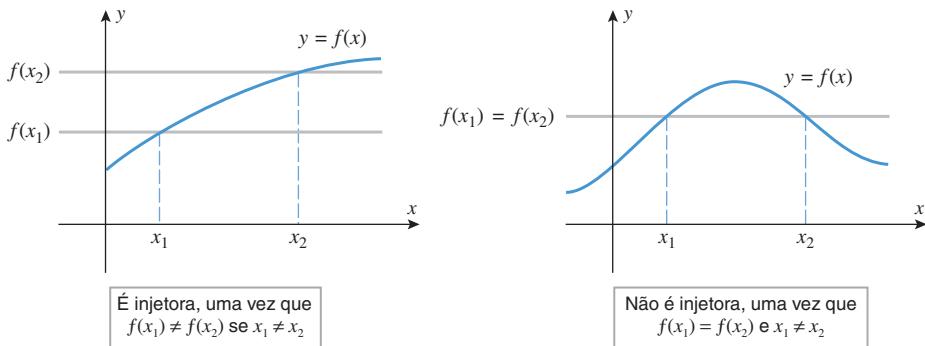
$$f(2) = f(-2) = 4$$

Assim, se $f(x) = x^2$ tivesse uma inversa, então a equação $f(2) = 4$ implicaria que $f^{-1}(4) = 2$ e a equação $f(-2) = 4$ implicaria que $f^{-1}(4) = -2$. No entanto, isso é impossível, porque $f^{-1}(4)$ não pode ter dois valores diferentes. Outra maneira de ver que $f(x) = x^2$ não tem inversa é tentar encontrar uma inversa resolvendo a equação $y = x^2$ em x como função de y . Imediatamente nos deparamos com a equação $x = \pm\sqrt{y}$, que não expressa x como uma função bem definida de y .

Uma função que associa saídas distintas a entradas distintas é denominada *injetora*, ou *invertível*. Pelo que acabamos de discutir, se uma função tem uma inversa, então ela deve ser injetora. A recíproca também é verdadeira, e estabelecemos o seguinte teorema:

0.4.3 TEOREMA Uma função tem uma inversa se, e somente se, f é injetora.

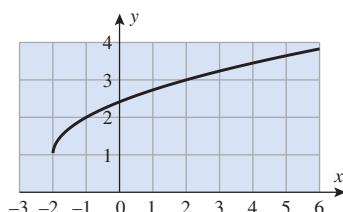
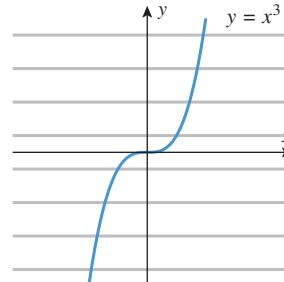
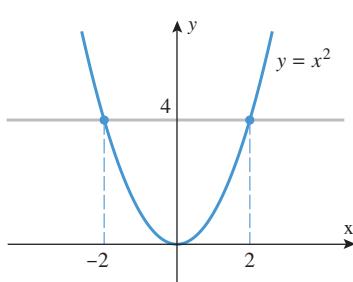
Algebraicamente, isso significa que uma função é injetora se, e somente se, $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$; geometricamente, uma função é injetora se, e somente se, o gráfico de $y = f(x)$ é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal (Figura 0.4.3). Essa última afirmação, junto com o Teorema 0.4.3, produz o seguinte teste geométrico para determinar se uma função tem uma inversa.



0.4.4 TEOREMA (O Teste da Reta Horizontal) Uma função tem uma inversa se, e somente se, seu gráfico é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal.

► **Exemplo 5** Use o teste da reta horizontal para mostrar que $f(x) = x^2$ não tem uma inversa, mas que $f(x) = x^3$ tem.

Solução A Figura 0.4.4 mostra uma reta horizontal que corta o gráfico de $y = x^2$ mais de uma vez, de modo que $f(x) = x^2$ não é invertível. A Figura 0.4.5 mostra que o gráfico de $y = x^3$ é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal, de modo que $f(x) = x^3$ é invertível. [Lembre, do Exemplo 2, que a inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.] ◀



A função $f(x) = x^3$ na Figura 0.4.5 é um exemplo de uma função crescente. Dê um exemplo de uma função decrescente e calcule sua inversa.

► **Exemplo 6** Explique por que a função cujo gráfico está na Figura 0.4.6 tem uma inversa e obtenha $f^{-1}(3)$.

Solução A função f tem uma inversa uma vez que seu gráfico passa pelo teste da reta horizontal. Para calcular $f^{-1}(3)$, consideramos $f^{-1}(3)$ como aquele número x com o qual $f(x) = 3$. A partir do gráfico, vemos que $f(2) = 3$; logo, $f^{-1}(3) = 2$. ◀

■ FUNÇÕES CRESCENTES OU DECRESCENTES SÃO INVERTÍVEIS

Uma função cujo gráfico está sempre crescendo quando percorrido da esquerda para a direita é denominada **função crescente**, e uma função cujo gráfico está sempre decrescendo quando percorrido da esquerda para a direita é denominada **função decrescente**. Se x_1 e x_2 são pontos do domínio de f , então f é crescente se

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

e f é decrescente se

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

(Figura 0.4.7). É geometricamente evidente que funções crescentes e decrescentes passam no teste da reta horizontal e, portanto, são invertíveis.

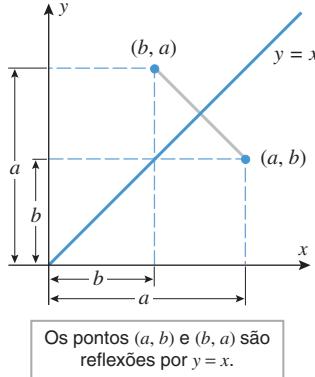


Figura 0.4.8

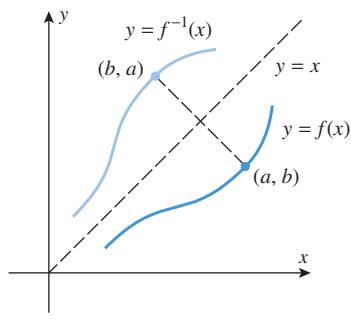
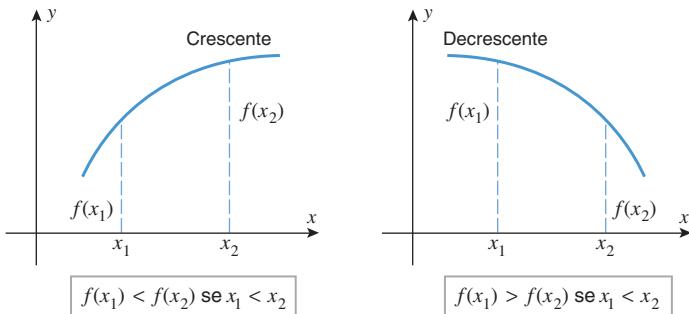


Figura 0.4.9

Figura 0.4.7



■ GRÁFICO DAS FUNÇÕES INVERSAS

Nosso próximo objetivo é explorar a relação entre os gráficos de f e f^{-1} . Com esse propósito, será desejável usar x como a variável independente para ambas as funções, para podermos comparar os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$.

Se (a, b) for um ponto no gráfico $y = f(x)$, então $b = f(a)$. Isso é equivalente à afirmativa de que $a = f^{-1}(b)$, a qual significa que (b, a) é um ponto no gráfico de $y = f^{-1}(x)$. Em resumo, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f produz um ponto no gráfico de f^{-1} . Analogamente, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f^{-1} produz um ponto no gráfico de f (verifique). Contudo, o efeito geométrico de inverter as coordenadas de um ponto é refletir aquele ponto pela reta $y = x$ (Figura 0.4.8), portanto os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação a essa reta (Figura 0.4.9). Em resumo, temos o seguinte resultado.

0.4.5 TEOREMA Se f tiver uma inversa, então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$; isto é, cada um é a imagem espelhada do outro em relação àquela reta.

► **Exemplo 7** A Figura 0.4.10 mostra os gráficos das funções inversas discutidas nos Exemplos 2 e 4. ◀

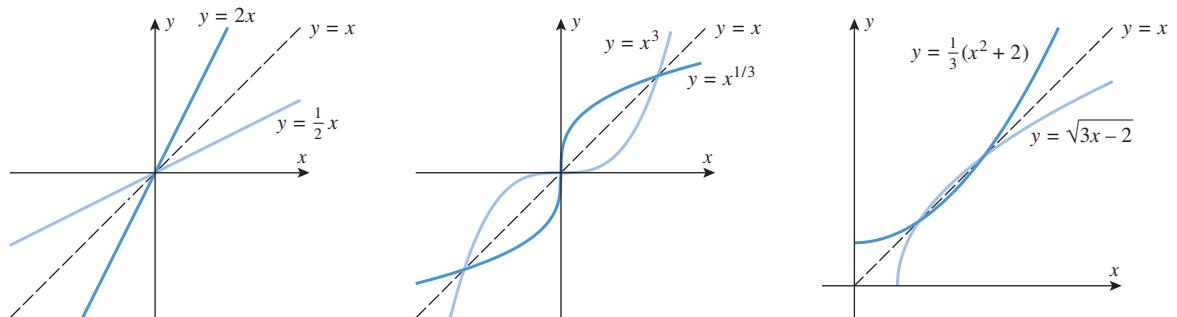


Figura 0.4.10

RESTRINGINDO DOMÍNIOS PARA A INVERTIBILIDADE

Se uma função g for obtida a partir de uma função f pela imposição de restrições sobre o domínio de f , então diremos que g é uma **restrição** de f . Assim, por exemplo, a função

$$g(x) = x^3, \quad x \geq 0$$

é uma restrição da função $f(x) = x^3$. Mais precisamente, dizemos que g é a restrição de x^3 ao intervalo $[0, +\infty)$.

Às vezes é possível criar uma função invertível a partir de uma função que não é invertível pela restrição apropriada do domínio. Por exemplo, já vimos que $f(x) = x^2$ não é invertível. Contudo, considere as funções restritas

$$f_1(x) = x^2, \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad f_2(x) = x^2, \quad x \leq 0$$

A união dos gráficos dessas duas funções é o gráfico completo de $f(x) = x^2$ (Figura 0.4.11). Cada uma dessas funções restritas é injetora (portanto invertível), pois seu gráfico passa no teste da linha horizontal. Como ilustra a Figura 0.4.12, suas inversas são

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

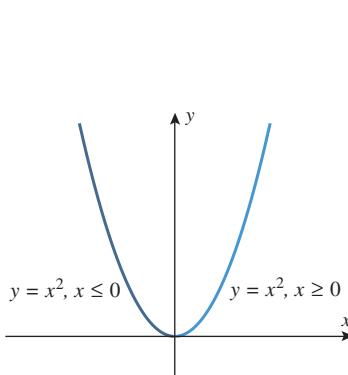


Figura 0.4.11

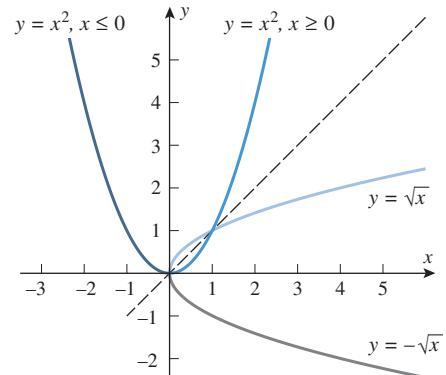


Figura 0.4.12

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Um problema comum em Trigonometria é obter um ângulo x a partir de um valor conhecido de $\sin x$, de $\cos x$ ou de alguma outra função trigonométrica. Lembre-se de que problemas desse tipo envolvem o cálculo de “funções arco”, tais como $\arcsen x$, $\arccos x$ e assim por diante. Vamos terminar esta seção estudando essas funções arco do ponto de vista de funções inversas gerais.

As seis funções trigonométricas básicas não têm inversas pois seus gráficos se repetem periodicamente e, portanto, não passam no teste da reta horizontal. Para evitar esse problema, restringimos os domínios das funções trigonométricas para obter funções injetoras e depois definir as “funções trigonométricas inversas” como as inversas dessas funções restritas. A parte superior da Figura 0.4.13 mostra geometricamente como impor essas restrições a $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$, e a parte inferior mostra o gráfico correspondente das funções inversas

$$\arcsen x, \arccos x, \operatorname{arc tg} x, \operatorname{arc sec} x$$

(que também poderiam ser denotadas por $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, prática que não será adotada aqui). As inversas de $\operatorname{cotg} x$ e de $\operatorname{cosec} x$ são de menor importância e serão consideradas nos exercícios.

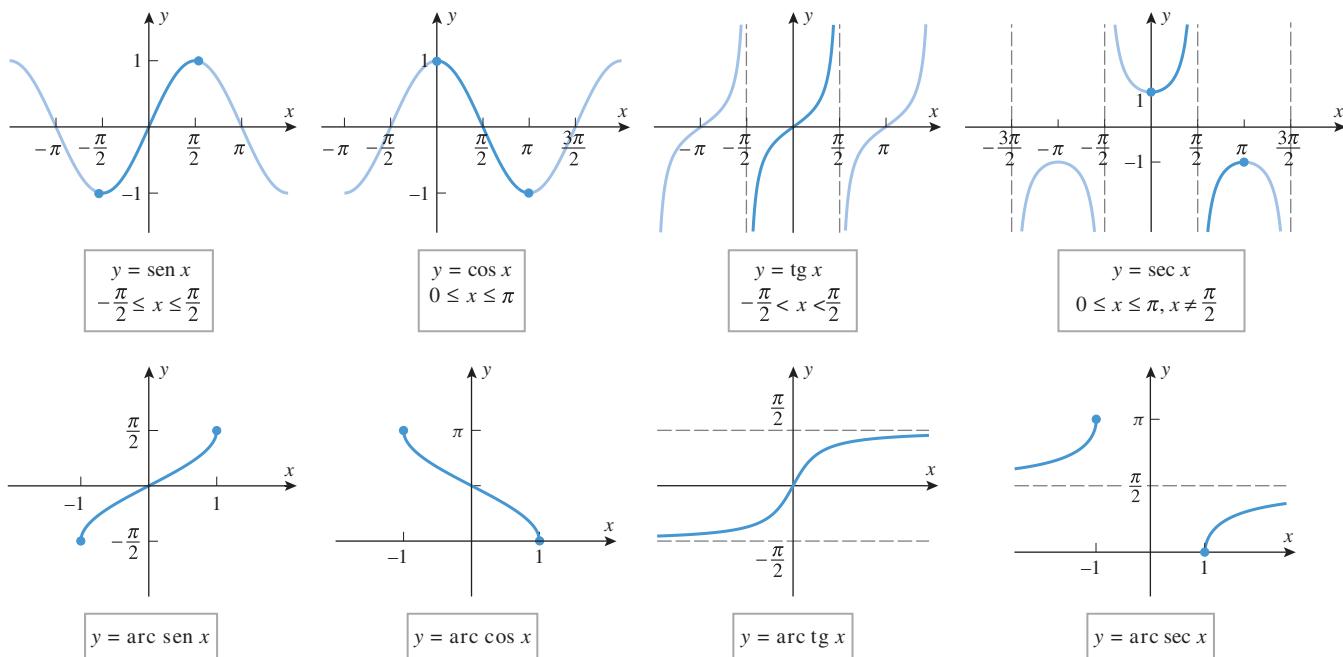


Figura 0.4.13

Se o leitor encontrar dificuldades para visualizar a correspondência entre as partes superior e inferior da Figura 0.4.13, deve lembrar que uma reflexão pela reta $y = x$ transforma retas verticais em retas horizontais e vice-versa, convertendo cortes com o eixo x em cortes com o eixo y e vice-versa.

As definições formais seguintes resumem a discussão precedente.

0.4.6 DEFINIÇÃO A função *arco seno*, denotada por arc sen , é definida como sendo a inversa da função seno restrita

$$\text{sen } x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

0.4.7 DEFINIÇÃO A função *arco cosseno*, denotada por arc cos , é definida como sendo a inversa da função cosseno restrita

$$\cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

0.4.8 DEFINIÇÃO A função *arco tangente*, denotada por arc tg , é definida como sendo a inversa da função tangente restrita

$$\text{tg } x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

0.4.9 DEFINIÇÃO* A função *arco secante*, denotada por arc sec , é definida como sendo a inversa da função secante restrita

$$\sec x, \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ com } x \neq \pi/2$$

* Não há um acordo universal sobre a definição de $\text{arc sec } x$, e alguns matemáticos preferem restringir o domínio de $\sec x$ de tal forma que $0 \leq x < \pi/2$ ou $\pi \leq x < 3\pi/2$, definição usada em algumas edições anteriores deste livro. Cada definição tem vantagens e desvantagens, mas mudamos para a definição corrente por estar de acordo com a convenção usada pelos programas *Mathematica*, *Maple* e *Sage*.

A Tabela 0.4.1 resume as propriedades básicas das funções trigonométricas inversas que vimos. O leitor deve confirmar que os domínios e imagens listados nessa tabela são consistentes com os gráficos mostrados na Figura 0.4.13.

Tabela 0.4.1
PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	RELACIONES BÁSICAS
arc sen	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\text{arc sen}(\sin x) = x \text{ se } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ $\sin(\text{arc sen } x) = x \text{ se } -1 \leq x \leq 1$
arc cos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\text{arc cos}(\cos x) = x \text{ se } 0 \leq x \leq \pi$ $\cos(\text{arc cos } x) = x \text{ se } -1 \leq x \leq 1$
arc tg	$[-\infty, +\infty]$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\text{arc tg}(\tg x) = x \text{ se } -\pi/2 < x < \pi/2$ $\tg(\text{arc tg } x) = x \text{ se } -\infty < x < +\infty$
arc sec	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$\text{arc sec}(\sec x) = x \text{ se } 0 \leq x \leq \pi, x \neq \pi/2$ $\sec(\text{arc sec } x) = x \text{ se } x \geq 1$

■ CALCULANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Um problema comum em Trigonometria é encontrar um ângulo cujo seno seja conhecido. Por exemplo, podemos querer encontrar um ângulo x medido em radianos, tal que

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad (7)$$

e, mais geralmente, para um dado valor de y no intervalo $-1 \leq y \leq 1$ podemos querer resolver a equação

$$\sin x = y \quad (8)$$

Como $\sin x$ repete-se periodicamente, tais equações têm uma infinidade de soluções em x ; entretanto, se resolvemos essa equação como

$$x = \text{arc sen } y$$

então isolamos a solução específica que está no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, uma vez que essa é a variação da inversa do seno. Por exemplo, a Figura 0.4.14 mostra quatro soluções da Equação (7), a saber, $-11\pi/6, -7\pi/6, \pi/6$ e $5\pi/6$. Uma delas, $\pi/6$, é a solução no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, logo

$$\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/6 \quad (9)$$

Em geral, se considerarmos $x = \text{arc sen } y$ como um ângulo medido em radianos cujo seno é y , então a restrição $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ impõe a exigência geométrica de que o ângulo x em posição padrão esteja no primeiro ou no quarto quadrantes, ou em um dos eixos adjacentes a esses quadrantes.

► **Exemplo 8** Encontre os valores exatos de

$$(a) \text{arc sen}(1/\sqrt{2}) \quad (b) \text{arc sen}(-1)$$

por inspeção e confirme numericamente seus resultados usando um recurso computacional.

Solução (a) Como $\text{arc sen}(1/\sqrt{2}) > 0$, podemos ver $x = \text{arc sen}(1/\sqrt{2})$ como aquele ângulo no primeiro quadrante tal que $\sin x = 1/\sqrt{2}$. Assim, $\text{arc sen}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$. Podemos confirmar isso com um recurso computacional, mostrando que $\text{arc sen}(1/\sqrt{2}) \approx 0,785 \approx \pi/4$.

Solução (b) Como $\text{arc sen}(-1) < 0$, podemos ver $x = \text{arc sen}(-1)$ como aquele ângulo no quarto quadrante (ou um eixo adjacente) tal que $\sin x = -1$. Assim, $\text{arc sen}(-1) = -\pi/2$. Podemos confirmar isso com um recurso computacional, mostrando que $\text{arc sen}(-1) \approx -1,57 \approx -\pi/2$. ◀

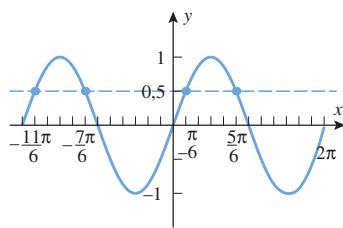


Figura 0.4.14

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use o manual de seu recurso computacional para determinar como calcular inversas de senos, cossenos e tangentes e, então, confirme a Equação (9) numericamente, mostrando que

$$\begin{aligned} \text{arc sen } 0,5 &\approx 0,523598775598... \\ &\approx \pi/6 \end{aligned}$$

Se $x = \text{arc cos } y$ for visto como um ângulo medido em radianos cujo cosseno é y , em qual quadrante pode estar x ? Responda à mesma questão para

$$x = \text{arc tg } y \quad \text{e} \quad x = \text{arc sec } y.$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

A maioria das calculadoras não tem um método direto para calcular a inversa da secante. Em tal situação, a identidade

$$\operatorname{arc sec} x = \operatorname{arc cos}(1/x) \quad (10)$$

é útil (Exercício 50). Use essa fórmula para mostrar que

$$\operatorname{arc sec}(2,25) \approx 1,11 \quad \text{e} \quad \operatorname{arc sec}(-2,25) \approx 2,03$$

Se você tiver um recurso computacional (tal como um CAS) que possa encontrar $\operatorname{arc sec} x$ diretamente, use-o para conferir esses valores.

■ IDENTIDADES PARA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Se interpretarmos $\operatorname{arc sen} x$ como um ângulo medido em radianos cujo seno é x , e se esse ângulo for *não negativo*, então podemos representar $\operatorname{arc sen} x$ geometricamente como um ângulo em um triângulo retângulo no qual a hipotenusa tem comprimento 1 e o lado oposto ao ângulo de $\operatorname{arc sen} x$, comprimento x (Figura 0.4.15a). Além disso, o ângulo sem indicação na Figura 0.4.15a é igual a $\operatorname{arc cos} x$, pois o cosseno daquele ângulo é x e o lado sem indicação daquela figura tem comprimento $\sqrt{1-x^2}$ pelo Teorema de Pitágoras (Figura 0.4.15b) Esse triângulo motiva várias identidades úteis, envolvendo funções trigonométricas inversas que valem com $-1 \leq x \leq 1$. Por exemplo:

$$\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc cos} x = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

$$\cos(\operatorname{arc sen} x) = \sqrt{1-x^2} \quad (12)$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc cos} x) = \sqrt{1-x^2} \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc sen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (14)$$

Não se ganha nada memorizando essas identidades; o importante é compreender o *método* que foi usado para obtê-las.

Analogamente, $\operatorname{arc tg} x$ e $\operatorname{arc sec} x$ podem ser representadas como ângulos dos triângulos retângulos mostrados nas Figuras 0.4.15c e 0.4.15d (verifique). Esses triângulos revelam mais identidades úteis, por exemplo:

$$\sec(\operatorname{arc tg} x) = \sqrt{1+x^2} \quad (15)$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc sec} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad (x \geq 1) \quad (16)$$

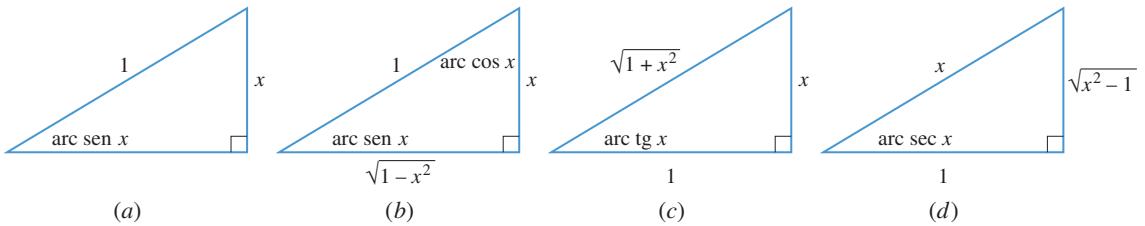


Figura 0.4.15

OBSERVAÇÃO

A técnica do triângulo nem sempre produz a forma mais geral de uma identidade. Por exemplo, no Exercício 61 pedimos para o leitor deduzir a seguinte extensão da Fórmula (16) que é válida tanto para $x \leq -1$ quanto para $x \geq 1$:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc sec} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \quad (|x| \geq 1) \quad (17)$$

A partir da Figura 0.4.13, observe que as inversas do seno e da tangente são funções ímpares; isto é,

$$\operatorname{arc sen}(-x) = -\operatorname{arc sen} x \quad \text{e} \quad \operatorname{arc tg}(-x) = -\operatorname{arc tg} x \quad (18-19)$$

► Exemplo 9 A Figura 0.4.16 mostra um gráfico gerado por computador da função $y = \text{arc sen}(\sin x)$. Seria possível pensar que esse gráfico deva ser a reta $y = x$, uma vez que $\text{arc sen}(\sin x) = x$. Por que isso não acontece?

Solução A relação $\text{arc sen}(\sin x) = x$ é válida no intervalo $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; logo, podemos dizer, com certeza, que os gráficos de $y = \text{arc sen}(\sin x)$ e $y = x$ coincidem nesse intervalo (o que é confirmado pela Figura 0.4.16). Contudo, fora desse intervalo, a relação $\text{arc sen}(\sin x) = x$ não precisa ser válida. Por exemplo, se x estiver no intervalo $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, então a quantidade $x - \pi$ estará no intervalo $-\pi/2 \leq x - \pi \leq \pi/2$ e, portanto,

$$\text{arc sen}[\sin(x - \pi)] = x - \pi$$

Assim, usando a identidade $\sin(x - \pi) = -\sin x$ e o fato de que arc sen é uma função ímpar, podemos expressar $\text{arc sen}(\sin x)$ como

$$\text{arc sen}(\sin x) = \text{arc sen}[-\sin(x - \pi)] = -\text{arc sen}[\sin(x - \pi)] = -(x - \pi)$$

Isso mostra que, no intervalo $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, o gráfico de $y = \text{arc sen}(\sin x)$ coincide com a reta $y = -(x - \pi)$, que tem inclinação -1 e um corte no eixo x em $x = \pi$, o que está de acordo com a Figura 0.4.16. ◀

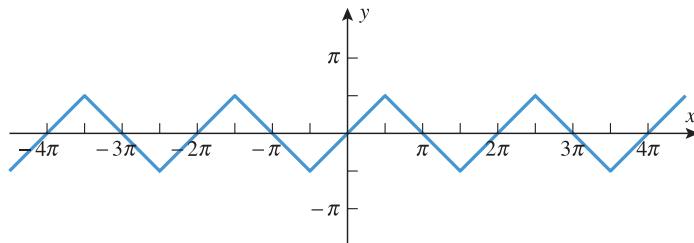


Figura 0.4.16

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.4 (Ver página 52 para respostas.)

- Em cada parte, determine se a função f é injetora.
 - $f(t)$ é o número de pessoas na fila de um cinema no instante de tempo t .
 - $f(x)$ é a temperatura máxima medida (arredondada até o °C mais próximo) em uma cidade no x -ésimo dia do ano.
 - $f(v)$ é o peso de v centímetros cúbicos de chumbo.
- Um estudante digita um número em uma calculadora, toma o dobro, soma 8 ao resultado, divide a soma por 2, subtrai 3 do quociente e, então, toma o cubo da diferença. Se o número resultante for x , então o número original digitado pelo estudante foi _____.
- Se $(3, -2)$ é um ponto no gráfico de uma função f ímpar inversível, então _____ e _____ são pontos no gráfico de f^{-1} .
- Em cada parte, determine o valor exato sem utilizar recursos computacionais.
 - $\text{arc sen}(-1) =$ _____
 - $\text{arc tg}(1) =$ _____
 - $\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$ _____
 - $\text{arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____
 - $\text{arc sec}(-2) =$ _____
- Em cada parte, determine o valor exato sem utilizar recursos computacionais.
 - $\text{arc sen}(\sin \pi/7) =$ _____
 - $\text{arc sen}(\sin 5\pi/7) =$ _____
 - $\text{arc tg}(\tg 13\pi/6) =$ _____
 - $\text{arc cos}(\cos 12\pi/7) =$ _____

EXERCÍCIOS 0.4 Recurso Gráfico

- Em (a)–(d), determine se f e g são funções inversas.
 - $f(x) = 4x$, $g(x) = \frac{1}{4}x$
 - $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3x - 1$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$, $g(x) = x^3 + 2$
 - $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$
- Verifique suas respostas para o Exercício 1 com um recurso gráfico computacional, determinando se os gráficos de f e g são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.
- Em cada parte, use o teste da reta horizontal para determinar se a função f é injetora.

- (a) $f(x) = 3x + 2$ (b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$
 (c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x^3$
 (e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ (f) $f(x) = \sin x$

4. Em cada parte, gere o gráfico da função f com um recurso gráfico computacional e determine se f é injetora.
 (a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Em cada parte, determine se a função f definida pela tabela é injetora.

(a)	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	6	$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3
x	1	2	3	4	5	6									
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3									
(b)	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>4</td><td>-7</td><td>6</td><td>-3</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	6	$f(x)$	4	-7	6	-3	1	4
x	1	2	3	4	5	6									
$f(x)$	4	-7	6	-3	1	4									

6. A face de um relógio quebrado caiu inteira no plano xy com o centro do relógio na origem e as 3 horas na direção do eixo x positivo. Quando o relógio quebrou, a ponta do ponteiro das horas parou no gráfico de $y = f(x)$, onde f é uma função que satisfaz $f(0) = 0$.
- (a) Existem algumas horas do dia que não podem ocorrer em uma tal configuração? Explique.
 (b) Como é afetada sua resposta a (a) se f deve ser uma função invertível?
 (c) Como são afetadas suas respostas a (a) e (b) se foi a ponta do ponteiro dos minutos que parou no gráfico de f ?
7. (a) A figura abaixo mostra o gráfico de uma função f sobre seu domínio $-8 \leq x \leq 8$. Explique por que f tem uma inversa e use o gráfico para encontrar $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(-1)$ e $f^{-1}(0)$.
 (b) Encontre o domínio e a imagem de f^{-1} .
 (c) Esboce o gráfico de f^{-1} .

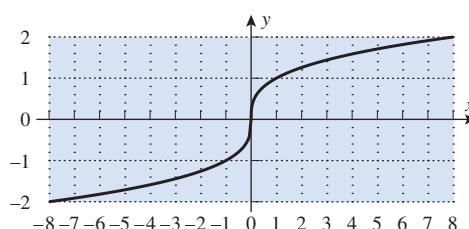


Figura Ex-7

8. (a) Explique por que a função f , cujo gráfico está na figura abaixo, não tem inversa em seu domínio $-3 \leq x \leq 4$.
 (b) Subdivide o domínio em três intervalos adjacentes sobre cada um dos quais a função f tem uma inversa.

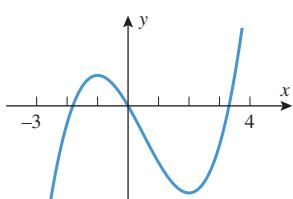


Figura Ex-8

- 9-16 Encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$.

9. $f(x) = 7x - 6$ 10. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

11. $f(x) = 3x^3 - 5$ 12. $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$

13. $f(x) = 3/x^2$, $x < 0$ 14. $f(x) = 5/(x^2 + 1)$, $x \geq 0$

15. $f(x) = \begin{cases} 5/2 - x, & x < 2 \\ 1/x, & x \geq 2 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

- 17-20 Encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$ e dê o domínio da função f^{-1} .

17. $f(x) = (x+2)^4$, $x \geq 0$

18. $f(x) = \sqrt{x+3}$ 19. $f(x) = -\sqrt{3-2x}$

20. $f(x) = x - 5x^2$, $x \geq 1$

21. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Encontre f^{-1} se o domínio de f for restrito a

(a) $x \geq -b/(2a)$ (b) $x \leq -b/(2a)$

ENFOCANDO CONCEITOS

22. A fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$, com $C \geq -273,15$, expressa a temperatura em Fahrenheit F como uma função da temperatura em Celsius C .

- (a) Encontre uma fórmula para a função inversa.
 (b) Descreva em palavras o significado da função inversa.
 (c) Encontre o domínio e a imagem da função inversa.

23. (a) Um metro é aproximadamente $6,214 \times 10^{-4}$ milhas. Encontre uma fórmula $y = f(x)$ que expresse o comprimento x em metros como uma função de mesmo comprimento y em milhas.

- (b) Encontre uma fórmula para a função inversa de f .
 (c) Em termos práticos, o que significa a fórmula $x = f^{-1}(y)$?

24. Sejam $f(x) = x^2$, $x > 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Mostre que $f(g(x)) = x$, $x > 1$ e $g(f(x)) = x$, $x > 1$.
 (b) Mostre que f e g não são inversas uma da outra provando que os gráficos dessas funções não são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.
 (c) As partes (a) e (b) se contradizem? Explique.

25. (a) Mostre que $f(x) = (3-x)/(1-x)$ é a sua própria inversa.
 (b) O que o resultado de (a) diz sobre o gráfico de f ?

26. Esboce o gráfico de uma função que é injetora em $(-\infty, +\infty)$, embora não crescente em $(-\infty, +\infty)$ e não decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

27. Seja $f(x) = 2x^3 + 5x + 3$. Encontre x se $f^{-1}(x) = 1$.

28. Seja $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. Encontre x se $f^{-1}(x) = 2$.

29. Prove que, se $a^2 + bc \neq 0$, então o gráfico de

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

é simétrico em relação à reta $y = x$.

30. (a) Prove que, se f e g forem injetoras, então a composição $f \circ g$ também o é.

- (b) Prove que, se f e g forem injetoras, então

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

- 31-34 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

31. Se f for uma função invertível tal que $f(2) = 2$, então $f^{-1}(2) = \frac{1}{2}$.

32. Se f e g forem funções inversas, então f e g têm o mesmo domínio.

33. Uma função injetora é invertível.

34. A imagem da função arco tangente é o intervalo $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

35. Dado que $\theta = \text{arc tg} \left(\frac{4}{3}\right)$, encontre os valores exatos de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\cotg \theta$, $\sec \theta$ e $\cossec \theta$.

36. Sabendo que $\theta = \text{arc sec } 2,6$, encontre o valor exato de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tg \theta$, $\cotg \theta$ e $\cossec \theta$.

37. Com quais valores de x é verdade que:

- (a) $\text{arc cos}(\cos x) = x$ (b) $\cos(\text{arc cos } x) = x$
 (c) $\text{arc tg}(\tg x) = x$ (d) $\tg(\text{arc tg } x) = x$

- 38-39** Encontre o valor exato da quantidade dada. ■

38. $\sec[\text{arc sen}(-\frac{3}{4})]$

39. $\sin[2 \text{arc cos}(\frac{3}{5})]$

- 40-41** Complete as identidades usando o método do triângulo (Figura 0.4.15). ■

40. (a) $\sin(\text{arc cos } x) = ?$ (b) $\tg(\text{arc cos } x) = ?$
 (c) $\cossec(\text{arc tg } x) = ?$ (d) $\sin(\text{arc tg } x) = ?$

41. (a) $\cos(\text{arc tg } x) = ?$ (b) $\tg(\text{arc cos } x) = ?$
 (c) $\sin(\text{arc sec } x) = ?$ (d) $\cotg(\text{arc sec } x) = ?$

42. (a) Use um recurso gráfico computacional ajustado para medir radianos para fazer tabelas dos valores de $y = \text{arc sen } x$ e $y = \text{arc cos } x$ com $x = -1; -0,8; -0,6; \dots; 0; 0,2; \dots; 1$. Arredonde suas respostas para duas casas decimais.
 (b) Plete os pontos obtidos em (a) e use-os para esboçar os gráficos de $y = \text{arc sen } x$ e $y = \text{arc cos } x$. Confirme que seus esboços estão de acordo com aqueles da Figura 0.4.13.
 (c) Use seu recurso computacional para fazer o gráfico $y = \text{arc sen } x$ e $y = \text{arc cos } x$; confirme que os gráficos estão de acordo com aqueles da Figura 0.4.13.

43. Em cada parte, esboce o gráfico e verifique seu trabalho com um recurso gráfico computacional.

- (a) $y = \text{arc sen } 2x$ (b) $y = \text{arc tg } \frac{1}{2}x$

44. A *lei dos cosenos* afirma que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

onde a , b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo e θ é o ângulo formado pelos lados a e b . Obtenha θ , até o grau mais próximo, para o triângulo com $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.

- 45-46** Use um recurso computacional para aproximar a solução da equação. Quando forem usados radianos, expresse sua resposta com quatro casas decimais; quando forem usados graus, expresse-a até o décimo de grau mais próximo. [Nota: Em cada parte, a solução não está na imagem da função trigonométrica inversa pertinente.] ■

45. (a) $\sin x = 0,37$, $\pi/2 < x < \pi$
 (b) $\sin \theta = -0,61$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$

46. (a) $\cos x = -0,85$, $\pi < x < 3\pi/2$
 (b) $\cos \theta = 0,23$, $-90^\circ < \theta < 0^\circ$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Use um recurso computacional para calcular o valor de $\text{arc sen}(\text{arc sen } 0,25)$ e $\text{arc sen}(\text{arc sen } 0,9)$ e explique o que pode estar acontecendo no segundo cálculo.
 (b) Com quais valores de x no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ seu recurso computacional produz um valor real para a função $\text{arc sen}(\text{arc sen } x)$?
48. Um jogador de futebol chuta uma bola com uma velocidade inicial de 14 m/s em um ângulo θ com o plano horizontal (ver figura abaixo). A bola cai no chão a uma distância de 18 m depois do chute. Se a resistência do ar for desprezada, então a bola terá uma trajetória parabólica e o alcance horizontal R será dado por

$$R = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$$

onde v é a velocidade inicial da bola e g é a aceleração da gravidade. Usando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, aproxime dois valores de θ , até o grau mais próximo, segundo os quais a bola poderia ter sido chutada. Qual ângulo resultaria em um tempo menor de permanência no ar? Por quê?

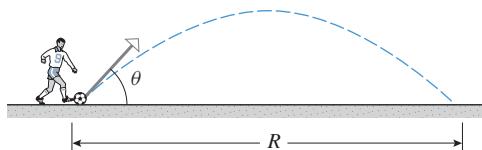


Figura Ex-48

- 49-50** A função $\text{arc cotg } x$ é definida como sendo a inversa da função cotangente restrita

$$\cotg x, \quad 0 < x < \pi$$

e a função $\text{arc cossec } x$ é definida como sendo a inversa da função cossecante restrita

$$\cossec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2, x \neq 0$$

Use essas definições em todos os exercícios subsequentes que envolverem essas funções. ■

- 49.** (a) Esboce os gráficos de $\text{arc cotg } x$ e $\text{arc cossec } x$.
 (b) Obtenha o domínio e a imagem de $\text{arc cotg } x$ e de $\text{arc cossec } x$.

50. Mostre que

$$(a) \text{arc cotg } x = \begin{cases} \text{arc tg}(1/x), & \text{se } x > 0 \\ \pi + \text{arc tg}(1/x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$(b) \text{arc sec } x = \text{arc cos } \frac{1}{x}, \quad \text{se } |x| \geq 1$$

$$(c) \text{arc cossec } x = \text{arc sen } \frac{1}{x}, \quad \text{se } |x| \geq 1$$

51. A maioria das calculadoras científicas tem teclas somente para os valores de $\text{arc sen } x$, $\text{arc cos } x$ e $\text{arc tg } x$. As fórmulas no Exercício 50 mostram como uma calculadora pode ser usada para obter os valores de $\text{arc cotg } x$, $\text{arc sec } x$ e $\text{arc cossec } x$ com valores positivos de x . Use essas fórmulas e uma calculadora para encontrar os valores numéricos para cada uma das funções trigonométricas inversas seguintes. Expressse suas respostas em graus, arredondados para o décimo de grau mais próximo.
- (a) $\text{arc cotg } 0,7$ (b) $\text{arc sec } 1,2$ (c) $\text{arc cossec } 2,3$

52. Um satélite de observação terrestre tem sensores de horizonte que podem medir o ângulo θ mostrado na figura abaixo. Seja R o raio da Terra (supostamente esférica) e h a distância entre o satélite e a superfície da Terra.

$$(a) \text{Mostre que } \theta = \frac{R}{R+h}.$$

- (b) Obtenha θ até o grau mais próximo para um satélite que está a 10.000 km da superfície (use $R = 6.378$ km).

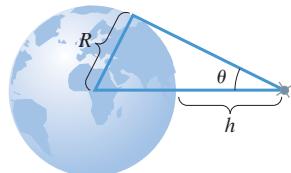


Figura Ex-52

53. O número de horas de claridade em um dado dia e em um dado ponto na superfície terrestre depende da latitude λ do ponto, do ângulo γ através do qual a Terra moveu-se em seu plano orbital durante o período de tempo a partir do equinócio do outono (21 de março) e do ângulo de inclinação ϕ do eixo de rotação da Terra, medido a partir da eclíptica para o norte ($\phi \approx 23,45^\circ$). O número de horas de claridade h pode ser aproximado pela fórmula

$$h = \begin{cases} 24, & D \geq 1 \\ 12 + \frac{2}{15} \text{arc sen } D, & |D| < 1 \\ 0, & D \leq -1 \end{cases}$$

em que

$$D = \frac{\text{sen } \phi \text{ sen } \gamma \text{ tg } \lambda}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \phi \text{ sen}^2 \gamma}}$$

e $\text{arc sen } D$ é medido em graus. Dado que Fairbanks, no Alaska, está localizada à latitude de $\lambda = 65^\circ$ N e também que $\gamma = 90^\circ$ em 20 de junho e $\gamma = 270^\circ$ em 20 de dezembro, aproxime

- (a) o número máximo de horas de claridade em Fairbanks com uma casa decimal;

- (b) o número mínimo de horas de claridade em Fairbanks com uma casa decimal.

Fonte: Este problema foi adaptado de TEAM, A Path to Applied Mathematics. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1985.

54. Uma câmera está posicionada a x pés da base de uma rampa de lançamento de mísseis (ver figura a seguir). Se o míssil de comprimento a pés for lançado verticalmente, mostre que quando a base do míssil estiver b pés acima das lentes da câmera o ângulo θ subentendido nas lentes pelo míssil é

$$\theta = \text{arc cot } \frac{x}{a+b} - \text{arc cot } \frac{x}{b}$$

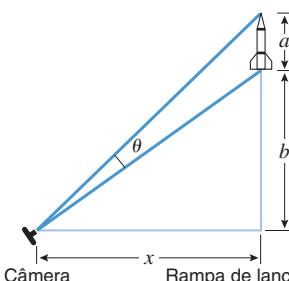


Figura Ex-54

55. Um avião está voando a uma altitude constante de 3.000 pés acima da água, a uma velocidade de 400 pés/s. O piloto deve soltar um pacote de sobrevivência que deve cair na água em um ponto P conhecido. Se a resistência do ar for desprezada, então o pacote irá seguir uma trajetória parabólica, cuja equação em relação ao sistema de coordenadas na figura abaixo é

$$y = 3.000 - \frac{g}{2v^2}x^2$$

onde g é a aceleração da gravidade e v é a velocidade do avião. Usando $g = 32$ pés/s², encontre o ângulo θ da “linha de visão” até o grau mais próximo que resultará no pacote atingindo o alvo.

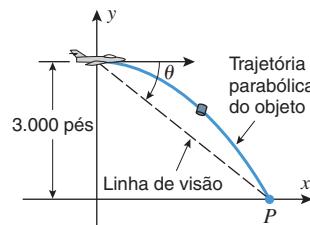


Figura Ex-55

56. Prove:

- (a) $\text{arc sen } (-x) = -\text{arc sen } x$
 (b) $\text{arc tg } (-x) = -\text{arc tg } x$

57. Prove:

- (a) $\text{arc cos } (-x) = \pi - \text{arc cos } x$
 (b) $\text{arc sec } (-x) = \pi - \text{arc sec } x$

58. Prove:

- (a) $\text{arc sen } x = \text{arc tg } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
 (b) $\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

59. Prove:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$$

desde que $-\pi/2 < \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y < \pi/2$. [Sugestão: Use uma identidade para $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.]

60. Use o resultado do Exercício 59 para mostrar que

- (a) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \pi/4$
 (b) $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} = \pi/4$

61. Use as identidades (10) e (13) para obter a identidade (17).

62. Prove que uma função injetora f não pode ter duas inversas diferentes.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.4

1. (a) não é injetora (b) não é injetora (c) é injetora 2. $\sqrt[3]{x} - 1$ 3. $(-2, 3); (2, -3)$ 4. (a) $-\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) $\pi/3$ (d) $\pi/3$ (e) $2\pi/3$
 5. (a) $\pi/7$ (b) $2\pi/7$ (c) $\pi/6$ (d) $2\pi/7$

0.5 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Quando os logaritmos foram introduzidos como uma ferramenta computacional no século XVII, eles forneceram aos cientistas daquela época um poder de cálculo até então inimaginável. Embora os computadores e as calculadoras tenham substituído as tabelas logarítmicas em cálculos numéricos, as funções logarítmicas têm aplicações de longo alcance na Matemática e nas ciências. Nesta seção, vamos rever algumas propriedades de exponenciais e logaritmos e utilizaremos nosso estudo de funções inversas para desenvolver resultados sobre funções exponenciais e logarítmicas.

■ EXPOENTES IRRACIONAIS

Lembre-se da Álgebra, em que as potências *inteiros* não nulas de um dado número real não nulo b são definidas por

$$b^n = b \times b \times \cdots \times b \quad \text{e} \quad b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

e $b^0 = 1$ se $n = 0$. Além disso, se p/q é um número *racional* positivo dado em forma irreduzível, então

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p \quad \text{e} \quad b^{-p/q} = \frac{1}{b^{p/q}}$$

Se b for negativo, então algumas potências fracionárias de b terão valores imaginários, como, por exemplo, a quantidade $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$. Para evitar essa complicação, passamos a supor em toda esta seção que $b > 0$, mesmo se isso não for explicitado.

Existem vários métodos para definir potências *irracionais*, tais como

$$2^\pi, \quad 3^{\sqrt{2}}, \quad \pi^{-\sqrt{7}}$$

Uma abordagem consiste em definir as potências irracionais de b por meio de aproximações sucessivas usando potências racionais de b . Por exemplo, para definir 2^π , considere a representação decimal de π :

$$3,1415926\dots$$

A partir dessa representação decimal, podemos formar uma sequência de racionais que ficam cada vez mais próximos de π , a saber:

$$3,1; \quad 3,14; \quad 3,141; \quad 3,1415; \quad 3,14159$$

e dessa sequência podemos formar uma sequência de potências *racionais* de 2:

$$2^{3,1}; \quad 2^{3,14}; \quad 2^{3,141}; \quad 2^{3,1415}; \quad 2^{3,14159}$$

Tabela 0.5.1

x	2^x
3	8,000000
3,1	8,574188
3,14	8,815241
3,141	8,821353
3,1415	8,824411
3,14159	8,824962
3,141592	8,824974
3,1415926	8,824977

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use uma calculadora para conferir os resultados da Tabela 0.5.1 e, então, confira (1) usando a calculadora para calcular 2^π diretamente.

Como os expoentes dos termos dessa sequência se aproximam cada vez mais de π , parece razoável que os próprios termos também se aproximem sucessivamente de algum número. É esse o número que *definimos* como sendo 2^π . Isso está ilustrado na Tabela 0.5.1, que construímos usando uma calculadora. A tabela sugere que, até a quarta casa decimal, o valor de 2^π é

$$2^\pi \approx 8,8250 \quad (1)$$

Com essa noção de potências irracionais, observamos, sem provar, que as seguintes leis de exponenciação familiares valem com todos os valores reais de p e de q :

$$b^p b^q = b^{p+q}, \quad \frac{b^p}{b^q} = b^{p-q}, \quad (b^p)^q = b^{pq}$$

A FAMÍLIA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Uma função da forma $f(x) = b^x$, em que $b > 0$, é denominada *função exponencial de base b*. Alguns exemplos são:

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad f(x) = \pi^x$$

Note que uma função exponencial tem uma base constante e um expoente variável. Assim, funções tais como $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^\pi$ não seriam classificadas como funções exponenciais, uma vez que têm uma base variável e um expoente constante.

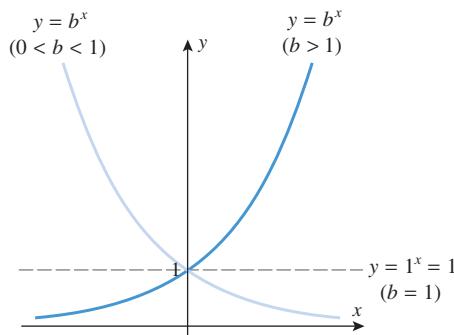
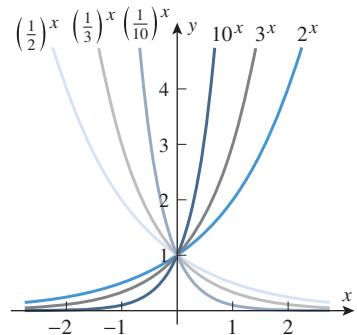
Como pode ser visto na Figura 0.5.1, o gráfico de $y = b^x$ tem uma de três formas gerais, dependendo do valor de b . O gráfico de $y = b^x$ tem as seguintes propriedades:

- O gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$, pois $b^0 = 1$.
- Se $b > 1$, o valor de b^x cresce com x crescente. Percorrendo o gráfico de $y = b^x$ da esquerda para a direita, os valores de b^x crescem indefinidamente. Percorrendo o gráfico da direita para a esquerda, os valores de b^x decrescem em direção a zero, sem nunca atingir zero. Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal do gráfico de b^x .
- Se $0 < b < 1$, o valor de b^x decresce com x crescente. Percorrendo o gráfico de $y = b^x$ da esquerda para a direita, os valores de b^x decrescem em direção a zero, sem nunca atingir zero. Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal do gráfico de b^x . Percorrendo o gráfico da direita para a esquerda, os valores de b^x crescem indefinidamente.
- Se $b = 1$, então o valor de b^x é constante.

Os gráficos de alguns membros típicos da família de funções exponenciais aparecem na Figura 0.5.2. Essa figura mostra que o gráfico de $y = (1/b)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = b^x$ em torno do eixo y . Isso ocorre pois, substituindo x por $-x$ na equação $y = b^x$, obtemos

$$y = b^{-x} = (1/b)^x$$

A figura também dá a entender que, quanto maior a base $b > 1$, mais rapidamente a função $f(x) = b^x$ cresce com $x > 0$.

**Figura 0.5.1****Figura 0.5.2** A família $y = b^x$ ($b > 0$)

O domínio e a imagem da função exponencial $f(x) = b^x$ também podem ser obtidos examinando a Figura 0.5.1:

- Se $b > 0$, então $f(x) = b^x$ está definido e tem um valor real em cada valor real de x , de modo que o domínio natural de cada função exponencial é $(-\infty, +\infty)$.
- Se $b > 0$ e $b \neq 1$, então, como já foi observado, o gráfico de $y = b^x$ cresce indefinidamente quando for percorrido num sentido e decresce em direção a zero, sem nunca atingir zero, quando for percorrido no sentido oposto. Isso implica que a imagem de $f(x) = b^x$ é $(0, +\infty)^*$.

► **Exemplo 1** Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 - 2^x$ e encontre seu domínio e imagem.

Solução Comece com o gráfico de $y = 2^x$. Reflita esse gráfico no eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$, depois translade o gráfico obtido uma unidade para cima para obter o gráfico de $y = 1 - 2^x$ (Figura 0.5.3). A reta tracejada na terceira parte da Figura 0.5.3 é uma assíntota horizontal do gráfico. Deve ficar claro, a partir do gráfico, que o domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem é $(-\infty, 1)$. ◀

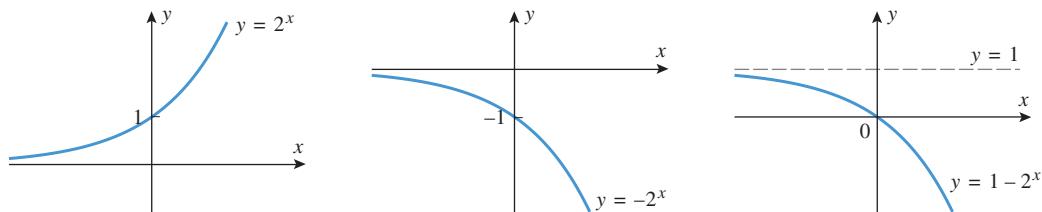


Figura 0.5.3

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Dentre todas as bases possíveis para as funções exponenciais, há uma em particular que desempenha um papel especial no Cálculo. Essa base, denotada pela letra e , é um certo número irracional cujo valor até a sexta casa decimal é

$$e \approx 2,718282 \quad (2)$$

Essa base é importante no Cálculo porque, como veremos adiante, $b = e$ é a única base com a qual a inclinação da reta tangente** à curva $y = b^x$ em qualquer ponto P da curva é igual à coordenada y do ponto P . Assim, por exemplo, a reta tangente a $y = e^x$ em $(0, 1)$ tem inclinação igual a 1 (Figura 0.5.4).

A função $f(x) = e^x$ é denominada **função exponencial natural**. Para simplificar a tipografia, a função exponencial natural também é dada por $\exp(x)$, caso em que a relação $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ seria expressa por

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$$

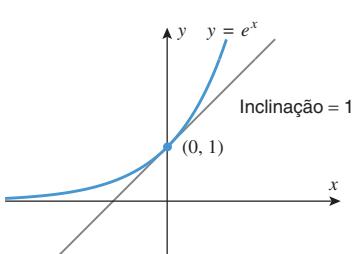


Figura 0.5.4 A reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0, 1)$ tem inclinação 1.

* Estamos supondo, sem demonstrar, que o gráfico de $y = b^x$ seja uma curva sem quebras, lacunas ou buracos.

** A definição precisa de reta tangente será discutida adiante. Por enquanto, basta a intuição do leitor.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

O recurso computacional do leitor deve ter comandos ou teclas para aproximar e e traçar o gráfico da função exponencial natural. Leia seu manual para ver como fazer isso e use o recurso para confirmar (2) e gerar os gráficos das Figuras 0.5.2 e 0.5.4.

A constante e também aparece no contexto do gráfico da equação

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (3)$$

Como mostramos na Figura 0.5.5, $y = e$ é uma assíntota horizontal desse gráfico. Disso decorre que o valor de e pode ser aproximado com a precisão desejada calculando (3) com x suficientemente grande em valor absoluto (Tabela 0.5.2).

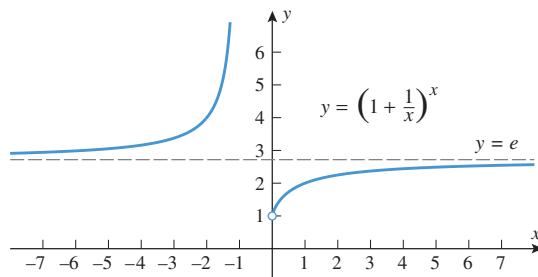


Figura 0.5.5

Tabela 0.5.2

APROXIMAÇÕES DE e POR $(1 + 1/x)^x$
COM VALORES CRESCENTES DE x

x	$1 + \frac{1}{x}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2	≈2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280

■ FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Lembre-se, da Álgebra, de que um logaritmo é um expoente. Mais precisamente, se $b > 0$ e $b \neq 1$, com um valor positivo de x , a expressão

$$\log_b x$$

(que se lê: “o logaritmo de x na base b ”) denota aquele expoente ao qual devemos elevar b para obter x . Assim, por exemplo:

$$\log_{10} 100 = 2, \quad \log_{10}(1/1000) = -3, \quad \log_2 16 = 4, \quad \log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1$$

$10^2 = 100$	$10^{-3} = 1/1000$	$2^4 = 16$	$b^0 = 1$	$b^1 = b$
--------------	--------------------	------------	-----------	-----------

A função $f(x) = \log_b x$ é denominada **função logarítmica de base b** .

As funções logarítmicas também podem ser interpretadas como inversas de funções exponenciais. Para ver isso, observe na Figura 0.5.1 que, se $b > 0$ e $b \neq 1$, então o gráfico de $f(x) = b^x$ passa no teste da reta horizontal, de modo que b^x tem uma inversa. Podemos encontrar uma fórmula para essa inversa com variável independente x resolvendo a equação

$$y = b^x$$

em y como uma função de x . No entanto, essa equação afirma que y é o logaritmo de x na base b , de modo que podemos reescrevê-la como

$$y = \log_b x$$

Assim, estabelecemos o seguinte resultado:

0.5.1 TEOREMA Se $b > 0$ e $b \neq 1$, então b^x e $\log_b x$ são funções inversas.

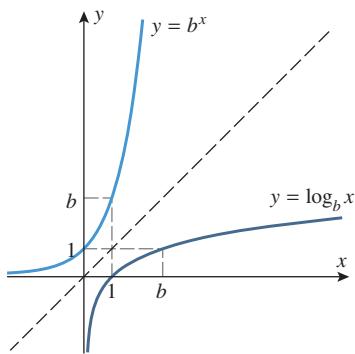
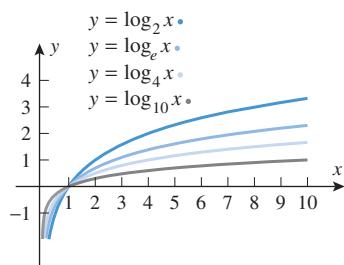


Figura 0.5.6

Figura 0.5.7 A família $y = \log_b x$ ($b > 1$).**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Use seu recurso gráfico para gerar os gráficos de $y = \ln x$ e de $y = \log x$.

Segue desse teorema que os gráficos de $y = b^x$ e $y = \log_b x$ são reflexões um do outro pela reta $y = x$ (ver Figura 0.5.6 para o caso em que $b > 1$). A Figura 0.5.7 mostra os gráficos de $y = \log_b x$ com vários valores de b . Observe que todos esses gráficos passam pelo ponto $(1, 0)$.

O logaritmo mais importante nas aplicações é o de base e , que é denominado **logaritmo natural**, já que a função $\log_e x$ é a inversa da função exponencial natural e^x . É comum denotar o logaritmo natural de x por $\ln x$ (que costuma ser lido como “ele ene de xis”) em vez de $\log_e x$. Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} \ln 1 = 0, & \ln e = 1, & \ln 1/e = -1, \\ \text{pois } e^0 = 1 & \text{pois } e^1 = e & \text{pois } e^{-1} = 1/e \\ & & \text{pois } e^2 = e^2 \end{array}$$

Em geral,

$$y = \ln x \quad \text{se, e somente se,} \quad x = e^y$$

Como mostramos na Tabela 0.5.3, a relação inversa entre b^x e $\log_b x$ dá uma correspondência entre algumas propriedades básicas dessas funções.

Tabela 0.5.3

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

PROPRIEDADE DE b^x	PROPRIEDADE DE $\log_b x$
$b^0 = 1$	$\log_b 1 = 0$
$b^1 = b$	$\log_b b = 1$
Imagem é $(0, +\infty)$	Domínio é $(0, +\infty)$
Domínio é $(-\infty, +\infty)$	Imagem é $(-\infty, +\infty)$
O eixo x é uma assíntota horizontal	O eixo y é uma assíntota vertical

Também segue das propriedades de cancelamento de funções inversas [ver (3) na Seção 0.4] que

$$\begin{aligned} \log_b(b^x) &= x \quad \text{com todos os valores reais de } x \\ b^{\log_b x} &= x \quad \text{com } x > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

No caso especial em que $b = e$, essas equações tornam-se

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \quad \text{com todos os valores reais de } x \\ e^{\ln x} &= x \quad \text{com } x > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Em outras palavras, as funções b^x e $\log_b x$ cancelam o efeito uma da outra quando compostas em qualquer ordem; por exemplo:

$$\log 10^x = x, \quad 10^{\log x} = x, \quad \ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x, \quad \ln e^5 = 5, \quad e^{\ln \pi} = \pi$$

■ RESOLVENDO EQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

As seguintes propriedades algébricas dos logaritmos devem ser familiares de seus estudos anteriores.

0.5.2 TEOREMA (Propriedades Algébricas dos Logaritmos) Se $b > 0, b \neq 1, a > 0, c > 0$ e r é um número real qualquer, então:

- (a) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$ Propriedade do produto
- (b) $\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$ Propriedade do quociente
- (c) $\log_b(a^r) = r \log_b a$ Propriedade da potência
- (d) $\log_b(1/c) = -\log_b c$ Propriedade do recíproco

ADVERTÊNCIA

As expressões da forma $\log_b(u + v)$ e $\log_b(u - v)$ não têm nenhuma simplificação útil. Em particular,

$$\log_b(u + v) \neq \log_b(u) + \log_b(v)$$

$$\log_b(u - v) \neq \log_b(u) - \log_b(v)$$

Essas propriedades são frequentemente usadas para expandir um único logaritmo em somas, em diferenças e em múltiplos de outros logaritmos e, inversamente, para condensar somas, diferenças e múltiplos de logaritmos em um único logaritmo. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \log \frac{xy^5}{\sqrt{z}} &= \log xy^5 - \log \sqrt{z} = \log x + \log y^5 - \log z^{1/2} = \log x + 5 \log y - \frac{1}{2} \log z \\ 5 \log 2 + \log 3 - \log 8 &= \log 32 + \log 3 - \log 8 = \log \frac{32 \cdot 3}{8} = \log 12 \\ \frac{1}{3} \ln x - \ln(x^2 - 1) + 2 \ln(x + 3) &= \ln x^{1/3} - \ln(x^2 - 1) + \ln(x + 3)^2 = \ln \frac{\sqrt[3]{x}(x + 3)^2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Uma equação da forma $\log_b x = k$ pode ser resolvida em x reescrevendo-a na forma $x = b^k$, e uma equação da forma $b^x = k$ pode ser resolvida reescrevendo-a na forma $x = \log_b k$. Alternativamente, a equação $b^x = k$ pode ser resolvida tomando um logaritmo *qualquer* de ambos lados (mas geralmente log ou ln) e aplicando a parte (c) do Teorema 0.5.2. Essas ideias estão ilustradas no exemplo a seguir.

► **Exemplo 2** Encontre x tal que

- (a) $\log x = \sqrt{2}$ (b) $\ln(x + 1) = 5$ (c) $5^x = 7$

Solução (a) Convertendo a equação para a forma exponencial, obtém-se

$$x = 10^{\sqrt{2}} \approx 25,95$$

Solução (b) Convertendo a equação para a forma exponencial, obtém-se

$$x + 1 = e^5 \quad \text{ou} \quad x = e^5 - 1 \approx 147,41$$

Solução (c) Convertendo a equação para a forma logarítmica, obtém-se.

$$x = \log_5 7 \approx 1,21$$

Alternativamente, tomando o logaritmo natural de ambos os lados e usando a propriedade da potência de logaritmos, obtém-se

$$x \ln 5 = \ln 7 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ln 7}{\ln 5} \approx 1,21 \quad \blacktriangleleft$$



Erik Simonsen/Getty Images

A energia de satélites pode ser fornecida por baterias, células de combustível, células solares ou artefatos radioisotópicos.

► **Exemplo 3** Um satélite que requer 7 watts de potência para operar em plena capacidade está equipado com uma fonte de potência de radioisótopos cuja saída em watts é dada pela equação

$$P = 75e^{-t/125}$$

em que t é o tempo em dias que a fonte é usada. Por quanto tempo o satélite pode operar na capacidade máxima?

Solução A potência P decairá para 7 watts quando

$$7 = 75e^{-t/125}$$

A solução para t é como segue:

$$7/75 = e^{-t/125}$$

$$\ln(7/75) = \ln(e^{-t/125})$$

$$\ln(7/75) = -t/125$$

$$t = -125 \ln(7/75) \approx 296,4$$

logo, o satélite pode operar na capacidade máxima por cerca de 296 dias. ◀

Aqui está um exemplo mais complicado.

► **Exemplo 4** Resolva $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$ em x .

Solução Multiplicando ambos os lados da equação por 2, temos

$$e^x - e^{-x} = 2$$

ou, de forma equivalente,

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2$$

Multiplicando ambos os lados por e^x , temos

$$e^{2x} - 1 = 2e^x \quad \text{ou} \quad e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

Isto é, de fato, uma equação quadrática disfarçada, como pode ser visto reescrevendo-a na forma

$$(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$$

e fazendo-se $u = e^x$ para obter

$$u^2 - 2u - 1 = 0$$

Resolvendo em u pela fórmula quadrática, temos

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

ou, uma vez que $u = e^x$,

$$e^x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Contudo, e^x não pode ser negativa, portanto descartaremos o valor negativo $1 - \sqrt{2}$; assim,

$$e^x = 1 + \sqrt{2}$$

$$\ln e^x = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$x = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,881$$

■ FÓRMULA DE MUDANÇA DE BASE DE LOGARITMOS

Geralmente, as calculadoras científicas fornecem teclas para calcular logaritmos comuns e naturais, mas não têm tecla para calcular logaritmos em outras bases. Contudo, isso não é uma deficiência grave, porque é possível expressar um logaritmo com uma base qualquer em termos de logaritmos com uma outra base qualquer (ver Exercício 42). Por exemplo, a fórmula a seguir expressa um logaritmo com base b em termos de logaritmos naturais:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \quad (6)$$

Podemos deduzir esse resultado fazendo $y = \log_b x$, do qual temos $b^y = x$. Tomando o logaritmo natural de ambos os lados dessa equação, obtemos $y \ln b = \ln x$, a partir do que segue-se (6).

► **Exemplo 5** Use uma calculadora para calcular $\log_2 5$ expressando esse logaritmo em termos de logaritmos naturais.

Solução A partir de (6), obtemos

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,321928 \blacktriangleleft$$

■ ESCALAS LOGARÍTMICAS NA CIÊNCIA E NA ENGENHARIA

Os logaritmos são usados na ciência e na Engenharia para lidar com quantidades cujas unidades variam sobre um conjunto excessivamente amplo de valores. Por exemplo, a “altura” de um som pode ser medida pela sua **intensidade I** (em watts por metro quadrado), a qual está relacionada com a energia transmitida pela onda sonora – quanto maior a intensidade, maior a energia transmitida e mais alto o som é percebido pelo ouvido humano. Contudo, unidades de intensidade são difíceis de controlar porque variam sobre um enorme conjunto de valores. Por exemplo, o som no limiar da audição humana tem uma intensidade em torno de 10^{-12}W/m^2 , um cochicho abafado tem uma intensidade de cerca de 100 vezes o limiar da audição e a turbina de um avião a jato a 50 metros tem uma intensidade de cerca de $10.000.000.000.000 = 10^{13}$ vezes o limiar da audição. Para ver como os logaritmos podem ser usados para reduzir essa amplitude, observe que se

$$y = \log x$$

então, aumentando x por um *fator* de 10, *adiciona-se* 1 unidade a y , uma vez que

$$\log 10x = \log 10 + \log x = 1 + y$$

Os físicos e os engenheiros aproveitam as vantagens dessa propriedade para medir a intensidade em termos do **nível de som β** , o qual é definido por

$$\beta = 10 \log(I/I_0)$$

β (dB)	I/I_0
0	$10^0 = 1$
10	$10^1 = 10$
20	$10^2 = 100$
30	$10^3 = 1.000$
40	$10^4 = 10.000$
50	$10^5 = 100.000$
⋮	⋮
120	$10^{12} = 1.000.000.000.000$

onde $I_0 = 10^{-12}\text{W/m}^2$ é a intensidade de referência próxima ao limiar da audição humana. A unidade de β é o **decibel** (dB), assim denotada em homenagem ao inventor do telefone Alexander Graham Bell. Com essa escala de medida, *multiplicando* a intensidade I por um fator de 10, *adicionam-se* 10 dB ao nível de som β (verifique). Isso resulta em uma escala mais tratável do que a intensidade para medir a altura do som (Tabela 0.5.4). Algumas outras escalas logarítmicas familiares são a **escala Richter**, usada para medir a intensidade de terremotos, e a **escala pH**, usada para medir a acidez na Química; ambas serão discutidas nos exercícios.



Regina Mitchell-Ryall, Tony Gray/NASA/
Getty Images

O estrondo de um ônibus espacial perto da plataforma de lançamento provocaria uma séria lesão auditiva na ausência de proteção sonora.

Tabela 0.5.5

x	e^x	$\ln x$
1	2,72	0,00
2	7,39	0,69
3	20,09	1,10
4	54,60	1,39
5	148,41	1,61
6	403,43	1,79
7	1096,63	1,95
8	2980,96	2,08
9	8103,08	2,20
10	22026,47	2,30
100	$2,69 \times 10^{43}$	4,61
1000	$1,97 \times 10^{434}$	6,91

Exemplo 6 A decolagem de um ônibus espacial gera um nível de som de 150 dB perto da plataforma de lançamento. Uma pessoa exposta a esse nível de som sofreria grave lesão física. Em comparação, a buzina de um carro a um metro tem um nível de som de 110 dB, próximo ao limiar da dor de muitas pessoas. Qual é a razão da intensidade do som da decolagem de um ônibus espacial ao da buzina de um carro?

Solução Sejam I_1 e β_1 ($= 150$ dB) a intensidade e o nível do som do ônibus espacial decolando, e I_2 e β_2 ($= 110$ dB) a intensidade e o nível de som da buzina de um carro. Então,

$$I_1 / I_2 = (I_1 / I_0)(I_2 / I_0)$$

$$\log(I_1 / I_2) = \log(I_1 / I_0) - \log(I_2 / I_0)$$

$$10 \log(I_1 / I_2) = 10 \log(I_1 / I_0) - 10 \log(I_2 / I_0) = \beta_1 - \beta_2$$

$$10 \log(I_1 / I_2) = 150 - 110 = 40$$

$$\log(I_1 / I_2) = 4$$

Logo, $I_1/I_2 = 10^4$, o que nos diz que a intensidade do som do ônibus espacial decolando é 10.000 vezes maior do que o da buzina de um carro! \blacktriangleleft

■ CRESCIMENTO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICO

Os padrões de crescimento de e^x e $\ln x$ ilustrados na Tabela 0.5.5 são dignos de ser mencionados. Ambas as funções crescem quando x cresce, mas seus crescimentos são consideravelmente diferentes – e^x cresce extremamente rápido, enquanto o crescimento de $\ln x$ é extremamente vagaroso. Por exemplo, em $x = 10$, o valor de e^x está acima de 22.000, mas, em $x = 1.000$, o valor de $\ln x$ nem sequer atinge 7.

Diremos que uma função **cresce sem cota** com x crescente se os valores de $f(x)$ acabam excedendo qualquer número positivo M especificado (não importa quão grande) à medida que x cresce sem parar. A Tabela 0.5.5 sugere veementemente que $f(x) = e^x$ cresce sem cota, o que é consistente com o fato de que a imagem dessa função é $(0, +\infty)$. De fato, se escolhermos qualquer número positivo M , então teremos $e^x = M$ quando $x = \ln M$, e como os valores de e^x crescem quando x cresce, teremos

$$e^x > M \quad \text{se} \quad x > \ln M$$

(Figura 0.5.8). Não é evidente a partir da Tabela 0.5.5 se $\ln x$ cresce sem cota com x crescente, porque os valores crescem muito lentamente, mas sabemos que isso ocorre porque a imagem dessa função é $(-\infty, +\infty)$. Para verificar isso algebraicamente, tomemos um número M positivo qualquer. Temos $\ln x = M$ se $x = e^M$ e, como os valores de $\ln x$ crescem com x crescente, resulta

$$\ln x > M \quad \text{se} \quad x > e^M$$

(Figura 0.5.9).

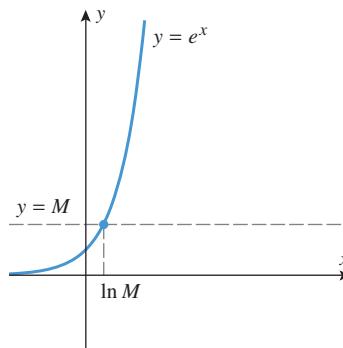


Figura 0.5.8 O valor de $y = e^x$ excederá um valor positivo M arbitrário com $x > \ln M$.

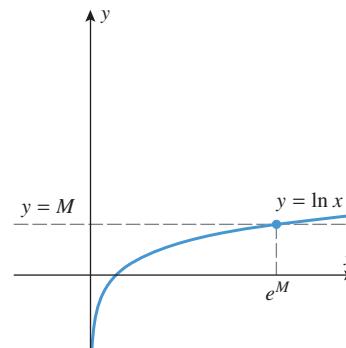


Figura 0.5.9 O valor de $y = \ln x$ excederá um valor positivo M arbitrário com $x > e^M$.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.5 (Ver página 63 para respostas.)

1. A função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tem domínio _____ e imagem _____.
2. A função $y = \ln(1 - x)$ tem domínio _____ e imagem _____.
3. Expresso como uma potência de 4:
 (a) 1 (b) 2 (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\sqrt{8}$ (e) 5

4. Resolva cada equação em x .
 (a) $e^x = \frac{1}{2}$ (b) $10^{3x} = 1.000.000$
 (c) $7e^{3x} = 56$
5. Resolva cada equação em relação a x .
 (a) $\ln x = 3$ (b) $\log(x - 1) = 2$
 (c) $2 \log x - \log(x + 1) = \log 4 - \log 3$

EXERCÍCIOS 0.5 Recurso Gráfico

1-2 Simplifique a expressão sem usar uma calculadora. ■

1. (a) $-8^{2/3}$ (b) $(-8)^{2/3}$ (c) $8^{-2/3}$
2. (a) 2^{-4} (b) $4^{1.5}$ (c) $9^{-0.5}$

3-4 Use uma calculadora para aproximar a expressão. Arredonde sua resposta até quatro casas decimais. ■

3. (a) $2^{1.57}$ (b) $5^{-2.1}$
4. (a) $\sqrt[5]{24}$ (b) $\sqrt[8]{0.6}$

5-6 Encontre o valor exato da expressão sem usar uma calculadora. ■

5. (a) $\log_2 16$ (b) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$
 (c) $\log_4 4$ (d) $\log_9 3$
6. (a) $\log_{10}(0,001)$ (b) $\log_{10}(10^4)$
 (c) $\ln(e^3)$ (d) $\ln(\sqrt{e})$

7-8 Use a calculadora para aproximar a expressão. Arredonde sua resposta até quatro casas decimais. ■

7. (a) $\log 23,2$ (b) $\ln 0,74$
8. (a) $\log 0,3$ (b) $\ln \pi$

9-10 Use as propriedades de logaritmos do Teorema 0.5.2 para reescrever a expressão em termos de r , s e t , sendo $r = \ln a$, $s = \ln b$ e $t = \ln c$. ■

9. (a) $\ln a^2 \sqrt{bc}$ (b) $\ln \frac{b}{a^3 c}$
10. (a) $\ln \frac{\sqrt[3]{c}}{ab}$ (b) $\ln \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$

11-12 Expanda o logaritmo em termos de somas, de diferenças e de múltiplos de logaritmos mais simples. ■

11. (a) $\log(10x\sqrt{x-3})$ (b) $\ln \frac{x^2 \sen^3 x}{\sqrt{x^2+1}}$
12. (a) $\log \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\cos 5x}$ (b) $\ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3+5}}$

13-15 Reescreva a expressão como um único logaritmo. ■

13. $4 \log 2 - \log 3 + \log 16$
14. $\frac{1}{2} \log x - 3 \log(\sen 2x) + 2$
15. $2 \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln x - \ln(\cos x)$

16-23 Resolva em x sem usar uma calculadora. ■

16. $\log_{10}(1+x) = 3$
17. $\log_{10}(\sqrt{x}) = -1$
18. $\ln(x^2) = 4$
19. $\ln(1/x) = -2$
20. $\log_3(3^x) = 7$
21. $\log_5(5^{2x}) = 8$
22. $\ln 4x - 3 \ln(x^2) = \ln 2$
23. $\ln(1/x) + \ln(2x^3) = \ln 3$

24-29 Resolva em x sem usar uma calculadora. Use o logaritmo natural sempre que for necessário usar um logaritmo. ■

24. $3^x = 2$
25. $5^{-2x} = 3$
26. $3e^{-2x} = 5$
27. $2e^{3x} = 7$
28. $e^x - 2xe^x = 0$
29. $xe^{-x} + 2e^{-x} = 0$
30. Resolva $e^{-2x} - 3e^{-x} = -2$ em x sem utilizar um recurso computacional. [Sugestão: reescreva a equação como uma equação quadrática em $u = e^{-x}$.]

ENFOCANDO CONCEITOS

31-34 Em cada parte, identifique o domínio e a imagem da função e, então, esboce o gráfico da função sem utilizar um recurso computacional. ■

31. (a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$ (b) $g(x) = \ln|x|$
32. (a) $f(x) = 1 + \ln(x-2)$ (b) $g(x) = 3 + e^{x-2}$
33. (a) $f(x) = \ln(x^2)$ (b) $g(x) = e^{-x^2}$
34. (a) $f(x) = 1 - e^{-x+1}$ (b) $g(x) = 3 \ln \sqrt[3]{x-1}$

35-38 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

35. A função $y = x^3$ é uma função exponencial.
36. O gráfico da função exponencial de base b passa pelo ponto $(0, 1)$.
37. A função logaritmo natural é a função logaritmo de base e .
38. O domínio da função logaritmo é o intervalo $x > 1$.

- 39.** Use uma calculadora e a fórmula de mudança de base (6) para encontrar os valores de $\log_2 7,35$ e $\log_5 0,6$ arredondando até a quarta casa decimal.

 **40-41** Faça o gráfico das funções na mesma tela de um recurso gráfico computacional. [Use a fórmula de mudança de base (6) quando necessário.] ■

- 40.** $\ln x$, e^x , $\log x$, 10^x
41. $\log_2 x$, $\ln x$, $\log_5 x$, $\log x$
42. (a) Deduza a fórmula geral da mudança de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

- (b) Use o resultado de (a) para encontrar o valor exato de $(\log_2 81)(\log_3 32)$ sem usar uma calculadora.

43. Use um recurso gráfico computacional para obter uma estimativa dos dois pontos de intersecção dos gráficos de $y = (1,3)^x$ e $y = \log_{1,3} x$.

44. Use um recurso gráfico computacional para obter uma estimativa dos dois pontos de interseção dos gráficos de $y = 0,6^{(x^2)}$ e $y = \log_{0,6}(x^2)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

-  45. (a) A curva na figura anexa é o gráfico de uma função exponencial? Explique seu raciocínio.
(b) Encontre a equação de uma função exponencial que passe pelo ponto $(4, 2)$.
(c) Encontre a equação de uma função exponencial que passe pelo ponto $(2, \frac{1}{4})$.
(d) Use um recurso computacional para gerar o gráfico de uma função exponencial que passe pelo ponto $(2, 5)$.

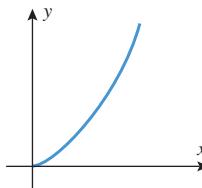


Figura Ex-45

-  46. (a) Faça uma conjectura sobre a forma geral do gráfico de $y = \log(\log x)$ e esboce o gráfico dessa equação e de $y = \log x$ no mesmo sistema de coordenadas.
(b) Confira seu trabalho em (a) com um recurso gráfico computacional.

47. Encontre o erro na seguinte “prova” de que $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$. Multiplique ambos os lados da desigualdade $3 > 2$ por $\log \frac{1}{2}$ para obter

$$3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2}$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\log \frac{1}{8} > \log \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\infty} > \frac{1}{4}$$

- 48.** Prove as quatro propriedades algébricas dos logaritmos do Teorema 0.5.2.

- 49.** Se o equipamento do satélite do Exemplo 3 requer 15 watts para operar corretamente, qual é a duração operacional da fonte de energia?

- 50.** A equação $Q = 12e^{-0.055t}$ dá a massa Q em gramas do potássio radioativo 42 que irá restar de uma quantidade inicial após t horas de decaimento radioativo.

- (a) Quantos gramas havia inicialmente?
 - (b) Quantos gramas permanecem depois de 4 horas?
 - (c) Quanto tempo irá levar para reduzir pela metade a quantidade inicial de potássio radioativo 42?

- 51.** A acidez de uma substância é medida pelo valor de seu pH, o qual é definido pela fórmula

$$\text{pH} = -\log[H^+]$$

onde o símbolo $[H^+]$ denota a concentração de íons de hidrogênio, medida em moles por litro. A água destilada tem um pH igual a 7; uma substância é considerada *ácida* se tiver pH < 7 e *básica* se tiver pH > 7. Encontre o pH de cada uma das seguintes substâncias e estabeleça se é ácida ou básica.

SUBSTÂNCIA	$[H^+]$
Sangue arterial	$3,9 \times 10^{-8}$ mol/L
Tomates	$6,3 \times 10^{-5}$ mol/L
Leite	$4,0 \times 10^{-7}$ mol/L
Café	$1,2 \times 10^{-6}$ mol/L

52. Use a definição de pH do Exercício 51 para encontrar a $[H^+]$ da solução que tem um pH igual a
(a) 2,44 (b) 8,06

53. A altura percebida β de um som em decibéis (dB) está relacionada com sua intensidade I em watts/metro quadrado (W/m^2) pela equação

$$\beta = 10 \log (I / I_0)$$

onde $I_0 = 10^{-12}\text{W/m}^2$. Os danos ao ouvido médio ocorrem a 90 dB ou mais. Encontre o nível de decibéis de cada um dos seguintes sons e estabeleça se causará dano à audição.

SOM	<i>I</i>
Avião a jato (a 15 m de distância)	$1,0 \times 10^2 \text{ W/m}^2$
Música de rock amplificada	$1,0 \text{ W/m}^2$
Liquidificador	$1,0 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$
TV (volume médio a 3 metros de distância)	$3,2 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$

- 54-56** Use a definição de nível de decibéis de um som (veja o Exercício 53). ■

- 54.** Se um som for três vezes tão intenso quanto o outro, quanto maior será seu nível em decibéis?

55. De acordo com uma fonte, o barulho dentro de um carro em movimento está em torno de 70 dB, enquanto um liquidificador gera 93 dB. Encontre a razão da intensidade do barulho do liquidificador com a do automóvel.

56. Suponha que o nível de decibéis de um eco é $\frac{2}{3}$ do nível de decibéis do som original. Se cada eco resulta em outro eco, quantos ecos serão ouvidos a partir de um som de 120 dB, dado que o ouvido humano médio pode ouvir até no mínimo 10 dB?

57. Na *escala Richter*, a magnitude M de um terremoto está relacionada com a energia liberada E , em joules (J), pela equação

$$\log E = 4,4 + 1,5 M$$

- (a) Encontre a energia E do terremoto de San Francisco de 1906, que registrou $M = 8,2$ na escala Richter.

- (b) Se a energia liberada de um terremoto for 10 vezes a de outro, quanto maior será a sua magnitude na escala Richter?

58. Suponha que as magnitudes de dois terremotos difiram por 1 unidade na escala Richter. Encontre a razão entre as energias liberadas pelo terremoto maior em relação ao menor. [Nota: Ver o Exercício 57 para a terminologia.]

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.5

1. $(-\infty, +\infty)$; $(0, +\infty)$ 2. $(-\infty, 1)$; $(-\infty, +\infty)$ 3. (a) 4^0 (b) $4^{1/2}$ (c) 4^{-2} (d) $4^{3/4}$ (e) $4^{\log_4 5}$

- (c) $\ln 2$ 5. (a) e^3 (b) 101 (c) 2

4. (a) $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ (b) 2

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 0

Recurso Gráfico

1. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -5 \\ \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 5 \\ x - 5, & x \geq 5 \end{cases}$$

2. Use os gráficos das funções f e g na figura ao lado para resolver os seguintes problemas.

- (a) Encontre os valores de $f(-2)$ e $g(3)$.
 (b) Com quais valores de x temos $f(x) = g(x)$?
 (c) Com quais valores de x temos $f(x) < 2$?
 (d) Quais são o domínio e a imagem de f ?
 (e) Quais são o domínio e a imagem de g ?
 (f) Encontre os zeros de f e g .

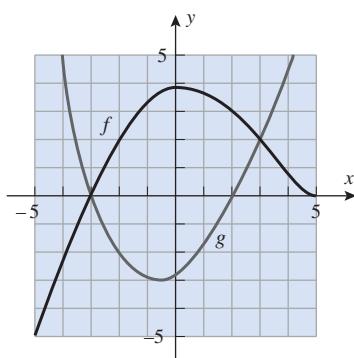


Figura Ex-2

3. Um copo cheio de água a uma temperatura de 11°C é colocado em uma sala que está à temperatura constante de 21°C . Faça um gráfico aproximado que descreva razoavelmente a temperatura da água no copo como uma função do tempo decorrido.

4. Suponha que queiramos pintar a tampa de uma mesa circular. Encontre uma fórmula que expresse a quantidade de tinta necessária como uma função do raio da tampa e discuta todas as hipóteses utilizadas para encontrar a fórmula.

5. Um contêiner de base quadrada e lados retangulares sem tampa tem um volume de 8 metros cúbicos. O material da base custa \$5 por metro quadrado e o dos lados, \$2 por metro quadrado.
 (a) Encontre uma fórmula que expresse o custo total desses materiais como uma função do comprimento do lado da base.

- (b) Qual é o domínio da função custo obtida em (a)?

6. Uma bola com raio de 15 cm recebe uma camada uniforme de plástico.

- (a) Expresse o volume de plástico como uma função da espessura da camada.
 (b) Qual é o domínio da função volume obtida em (a)?

7. Uma caixa fechada deve ser feita de um pedaço de papelão com 180 cm por 300 cm, tirando fora quatro quadrados de mesmo tamanho (veja a figura abaixo), dobrando ao longo das retas tracadas e encaixando para dentro as duas abas da tampa.

- (a) Encontre uma fórmula que expresse o volume da caixa como uma função do comprimento dos lados dos quadrados cortados.
 (b) Encontre uma desigualdade que especifique o domínio da função em (a).
 (c) Use o gráfico da função volume para estimar as dimensões da caixa com o maior volume.

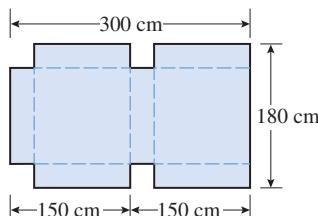


Figura Ex-7

8. Denote por C o gráfico de $y = 1/x$, para $x > 0$.

- (a) Expresse a distância entre o ponto $P(1, 0)$ e um ponto Q de C como uma função da coordenada x de Q .

- (b) Qual é o domínio da função distância obtida em (a)?

- (c) Use o gráfico da função distância obtida em (a) para estimar o ponto Q de C que está mais próximo do ponto P .
9. Esboce o gráfico da equação $x^2 - 4y^2 = 0$.
10. Obtenha o gráfico de $f(x) = x^4 - 24x^3 - 25x^2$ em duas janelas de inspeção distintas, cada uma delas ilustrando uma propriedade diferente de f . Identifique cada uma das duas janelas e uma característica do gráfico de f que esteja bem exemplificada na janela.
11. Complete a tabela a seguir.
- Tabela Ex-11**
- | x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $f(x)$ | 0 | -1 | 2 | 1 | 3 | -2 | -3 | 4 | -4 |
| $g(x)$ | 3 | 2 | 1 | -3 | -1 | -4 | 4 | -2 | 0 |
| $(f \circ g)(x)$ | | | | | | | | | |
| $(g \circ f)(x)$ | | | | | | | | | |
12. Sejam $f(x) = -x^2$ e $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Encontre fórmulas para $f \circ g$ e $g \circ f$ e o domínio natural de cada composta.
13. Dado que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x + 2$, encontre todos os valores de x com os quais $f(g(x)) = g(f(x))$.
14. Sejam $f(x) = (2x - 1)/(x + 1)$ e $g(x) = 1/(x - 1)$.
 - Encontre $f(g(x))$.
 - O domínio natural da função $h(x) = (3 - x)/x$ é o mesmo da função $f \circ g$? Explique.
15. Dado que
- $$f(x) = \frac{x}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x^2 - 1$$
- Encontre uma fórmula para $f \circ g \circ h$ e dê o domínio dessa composta.
16. Dado que $f(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 2x^2 + 4x + 1$, encontre uma função g tal que $f(g(x)) = h(x)$.
17. Em cada parte, classifique a função como par, ímpar ou nenhuma das duas.
 - $x^2 \operatorname{sen} x$
 - $\operatorname{sen}^2 x$
 - $x + x^2$
 - $\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$
18. (a) Escreva uma equação para o gráfico obtido refletindo o gráfico de $y = |x - 1|$ pelo eixo y , então distendendo-o verticalmente por um fator de 2, depois transladando-o para baixo 3 unidades e, por fim, refletindo o gráfico pelo eixo x .
- (b) Faça um esboço dos gráficos original e final.
19. Em cada parte, descreva a família de curvas.
 - $(x - a)^2 + (y - a^2)^2 = 1$
 - $y = a + (x - 2a)^2$
20. Encontre uma equação para uma parábola que passe pelos pontos $(2, 0)$, $(8, 18)$ e $(-8, 18)$.

21. Suponha que a temperatura mínima esperada em Anchorage, no Alasca (em $^{\circ}\text{F}$), seja modelada pela equação

$$T = 50 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 101) + 25$$

onde t está em dias e $t = 0$ corresponde a 1° de janeiro.

- Esboce o gráfico de T versus t para $0 \leq t \leq 365$.
- Use o modelo para prever quando ocorrerá o dia mais frio do ano.
- Com base no modelo, quantos dias durante o ano se espera ter uma temperatura abaixo de 0°F ?

22. A figura a seguir mostra um modelo para a variação das mareas em um ponto interno da baía de San Francisco durante um período de 24 horas. Encontre uma equação da forma $y = y_0 + y_1 \operatorname{sen}(at + b)$ para o modelo, supondo que $t = 0$ corresponda à meia-noite.

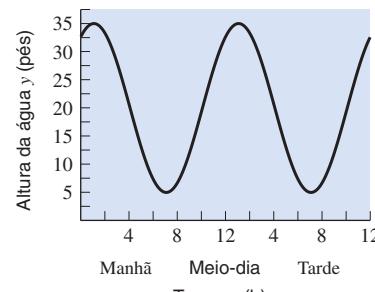


Figura Ex-22

23. A figura em anexo mostra os gráficos das equações $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$ e $y = 2 \operatorname{sen}(x/2) + 2 \cos(x/2)$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Sem utilizar um recurso computacional, identifique cada uma das duas curvas pela sua equação e encontre as coordenadas dos pontos A, B, C e D indicados. Explique seu raciocínio.

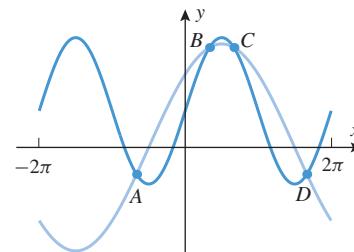


Figura Ex-23

24. A resistência elétrica R em ohms (Ω) para um fio de metal puro está relacionada com sua temperatura T em $^{\circ}\text{C}$ pela fórmula

$$R = R_0(1 + kT)$$

na qual R_0 e k são constantes positivas.

- Faça um esboço à mão do gráfico de R versus T e explique o significado geométrico de R_0 e k para seu gráfico.
- Em teoria, a resistência R de um fio de metal puro cai para zero quando a temperatura atinge o zero absoluto ($T = -273^{\circ}\text{C}$). Que informação isso fornece sobre k ?

- (c) Uma lâmpada com filamento de tungstênio tem uma resistência de $1,1 \Omega$ a uma temperatura de 20°C . Que informação isso fornece sobre o R_0 do filamento?
- (d) A qual temperatura o filamento de tungstênio tem uma resistência de $1,5 \Omega$?
- 25.** (a) Dê condições sob as quais duas funções, f e g , serão inversas, e dê vários exemplos dessas funções.
 (b) Descreva a relação entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ quando f e g são funções inversas.
 (c) Qual é a relação entre os domínios e as imagens de funções inversas f e g ?
 (d) Quais condições devem estar satisfeitas para que f tenha uma inversa? Dê alguns exemplos de funções que não têm inversas.
- 26.** (a) Dê as restrições sobre os domínios de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\sec x$ que são impostas para fazer essas funções injetoras nas definições de $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ e $\text{arcsec } x$.
 (b) Esboce os gráficos das funções trigonométricas restritas em (a) e suas inversas.
- 27.** Em cada parte, encontre $f^{-1}(x)$ se a inversa existir.
 (a) $f(x) = 8x^3 - 1$ (b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
 (c) $f(x) = (e^x)^2 + 1$ (d) $f(x) = (x+2)/(x-1)$
 (e) $f(x) = \sin\left(\frac{1-2x}{x}\right)$, $\frac{2}{4+\pi} \leq x \leq \frac{2}{4-\pi}$
 (f) $f(x) = \frac{1}{1+3\arctan x}$
- 28.** Seja $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$. Quais são as condições sobre a , b , c e d que garantem a existência de f^{-1} ? Encontre $f^{-1}(x)$.
- 29.** Em cada parte, encontre o valor numérico exato da expressão dada.
 (a) $\cos[\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13)]$
 (b) $\sin[\arcsin(4/5) + \arccos(5/13)]$
- 30.** Em cada parte, esboce o gráfico e verifique seu trabalho com um recurso computacional.
 (a) $f(x) = 3\arcsin(x/2)$
 (b) $f(x) = \arccos x - \pi/2$
 (c) $f(x) = 2\arctan(-3x)$
 (d) $f(x) = \arccos x + \arcsin x$
- 31.** Suponha que o gráfico de $y = \log x$ tenha sido desenhado com escalas iguais de 1 cm por unidades em ambas as direções x e y . Se um besouro quiser caminhar ao longo do gráfico até alcançar uma altura de 0,6 metro acima do eixo x , quantos quilômetros à direita da origem ele terá viajado?
- 32.** Suponha que o gráfico de $y = 10^x$ tenha sido desenhado com escalas iguais de 1 cm por unidade em ambas as direções x e y . Se um besouro quiser caminhar ao longo do gráfico até alcançar a altura de 100 quilômetros acima do eixo x , quantos centímetros à direita da origem ele terá viajado?
- 33.** Expressa a seguinte função como uma função racional de x :

$$3 \ln(e^{2x}(e^x)^3) + 2 \exp(\ln 1)$$
- 34.** Suponha que $y = Ce^{kt}$, onde C e k são constantes, e seja $Y = \ln y$. Mostre que o gráfico de Y versus t é uma reta e dê sua inclinação e o corte com o eixo Y .
- 35.** (a) Esboce as curvas $y = \pm e^{-x/2}$ e $y = e^{-x/2} \sin 2x$ com $-\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique seu trabalho usando um recurso gráfico computacional.
 (b) Encontre todos os cortes no eixo x da curva $y = e^{-x/2} \sin 2x$ no intervalo dado e ache as coordenadas x de todos os pontos onde essa curva intersecta as curvas $y = \pm e^{-x/2}$.
- 36.** Um pacote de suprimentos médicos cai de um helicóptero diretamente para baixo de paraquedas em uma área remota. A velocidade v do pacote t segundos após começar a cair é dada em pés por segundo por $v = 24,61(1 - e^{-1.3t})$.
 (a) Faça o gráfico de v versus t .
 (b) Mostre que o gráfico tem uma assíntota horizontal $v = c$.
 (c) A constante c é denominada *velocidade terminal*. Explique qual o sentido prático dela.
 (d) O pacote pode realmente atingir sua velocidade terminal? Explique.
 (e) Quanto tempo leva para o pacote atingir 98% de sua velocidade terminal?
- 37.** Um grupo de 20 ovelhas é solto para reprodução em uma área preservada no Colorado. Espera-se que, com um controle cuidadoso, o número N de ovelhas após t anos seja dado pela fórmula

$$N = \frac{220}{1 + 10(0,83^t)}$$
- e que a população de ovelhas seja capaz de manter-se sem supervisão, depois de atingido o número de 80 ovinos.
 (a) Faça o gráfico de N versus t .
 (b) Por quantos anos o estado do Colorado deverá manter o controle sobre os ovinos?
 (c) O ambiente da área suporta quantos ovinos? [Sugestão: Examine o gráfico de N versus t com valores grandes de t .]
- 38.** Um forno é pré-aquecido e, então, mantém uma temperatura constante. Uma batata é colocada para assar. Suponha que a temperatura T (em $^\circ\text{F}$) da batata t minutos após é dada por $T = 400 - 325(0,97^t)$. A batata será considerada assada quando sua temperatura estiver entre 260°F e 280°F .
 (a) Durante qual intervalo de tempo a batata será considerada como assada?
 (b) Quanto tempo leva para a diferença entre as temperaturas da batata e do forno cair para a metade?
- 39.** (a) Mostre que os gráficos de $y = \ln x$ e $y = x^{0.2}$ se cruzam.
 (b) Aproxime a(s) solução(ões) da equação $x = x^{0.2}$ com três casas decimais.
- 40.** (a) Mostre que, para $x > 0$ e $k \neq 0$, as equações

$$x^k = e^x \quad \text{e} \quad \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{k}$$
- têm as mesmas soluções.

- (b) Use o gráfico de $y = (\ln x) / x$ para determinar os valores de k com os quais a equação $x^k = e^x$ tem duas soluções positivas distintas.
- (c) Aproxime a(s) solução(ões) positiva(s) de $x^8 = e^x$.

41. Considere $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x + \ln x$, com $0 < x < \pi/2$.

- (a) Explique por que f é injetora.
- (b) Use um recurso gráfico para exibir o gráfico de f . Depois exiba os gráficos de f e de f^{-1} juntos na mesma janela. Quais são as assíntotas de cada gráfico?



Joe McBride/Stone/Getty Images

A resistência do ar impede que a velocidade do paraquedista aumente indefinidamente. A velocidade tende a uma velocidade limite, chamada de “velocidade terminal”.

1

LIMITES E CONTINUIDADE

O desenvolvimento do Cálculo no século XVII por Newton e Leibniz forneceu aos cientistas seu primeiro entendimento real do que significa uma “taxa de variação instantânea”, tal como a velocidade ou a aceleração. Uma vez entendida conceitualmente essa ideia, seguiram-se métodos computacionais eficientes, e a Ciência deu um salto quântico para frente. A pedra fundamental sobre a qual se apoia a ideia de taxa de variação é o conceito de “limite”, uma noção tão importante que atualmente todos os demais conceitos do Cálculo se baseiam nela.

Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de limite em etapas, procedendo de uma noção informal e intuitiva para uma definição matemática precisa. Também desenvolveremos teoremas e procedimentos para calcular limites e concluiremos o capítulo usando os limites para estudar curvas “contínuas”.

1.1 LIMITES (UMA ABORDAGEM INTUITIVA)

O conceito de “limite” é o alicerce sobre o qual estão baseados todos os demais conceitos de Cálculo. Nesta seção, estudaremos os limites informalmente, com o objetivo de desenvolver uma intuição para as ideias básicas. Nas três seções seguintes, enfocaremos os métodos computacionais e as definições precisas.

Muitas das ideias básicas do Cálculo tiveram sua origem nos dois problemas geométricos seguintes.

O PROBLEMA DA RETA TANGENTE Dada uma função f e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu gráfico, encontre uma equação da reta que é tangente ao gráfico em P (Figura 1.1.1).

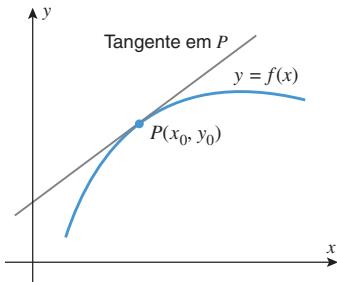


Figura 1.1.1

O PROBLEMA DA ÁREA Dada uma função f , encontre a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ no eixo x (Figura 1.1.2).

Tradicionalmente, a parte do Cálculo que se originou do problema da reta tangente é denominada **Cálculo Diferencial**, e a que foi originada do problema da área é denominada **Cálculo Integral**. Contudo, veremos mais adiante que o problema da reta tangente e o da área estão tão estreitamente relacionados que a distinção entre o Cálculo Diferencial e o Integral é bastante artificial.

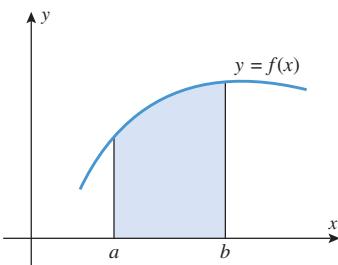


Figura 1.1.2

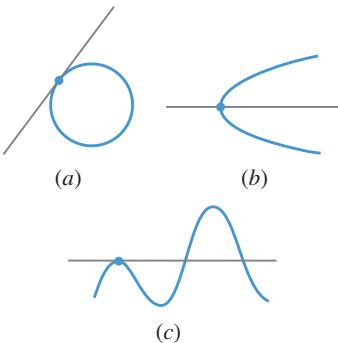


Figura 1.1.3

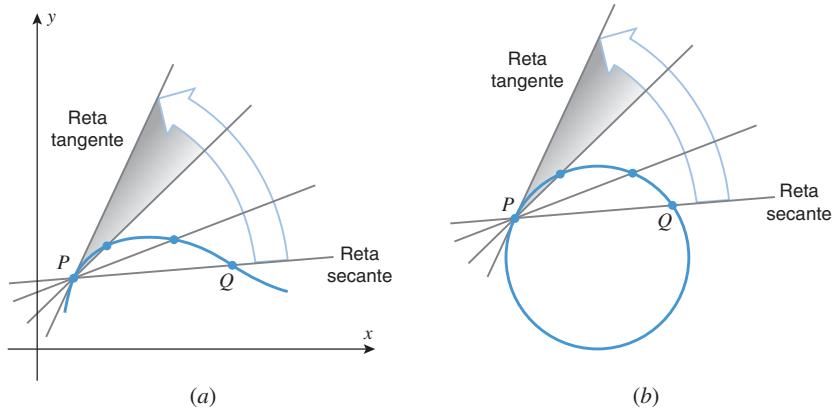


Figura 1.1.4

► **Exemplo 1** Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Solução Se conseguirmos encontrar a inclinação m_{tg} da reta tangente em P , então podemos usar o ponto P e a fórmula ponto-inclinação de uma reta para escrever a equação da reta tangente como

$$y - 1 = m_{tg}(x - 1) \quad (1)$$

Para encontrar a inclinação m_{tg} , considere a reta secante por P e um ponto $Q(x, x^2)$ na parábola que seja distinto de P . A inclinação m_{sec} dessa secante é

$$m_{sec} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (2)$$

A Figura 1.1.4a sugere que se, agora, permitirmos que Q se move sobre a parábola e se aproxime mais e mais de P , então a posição limite da reta secante por P e Q coincidirá com a reta tangente em P . Isso, por sua vez, sugere que o valor de m_{sec} irá se aproximar mais e mais do valor de m_{tg} à medida que Q se move em direção a P sobre a curva. Contudo, dizer que $Q(x, x^2)$ se aproxima mais e mais de $P(1, 1)$ é algebricamente equivalente a dizer que x se aproxima mais e mais de 1. Assim, o problema de encontrar m_{tg} se reduz a encontrar o “valor limite” de m_{sec} na Fórmula (2) à medida que x se aproxima mais e mais de 1 (mas sempre com $x \neq 1$ para garantir que P e Q permaneçam distintos).

Por que estamos exigindo que P e Q sejam distintos?

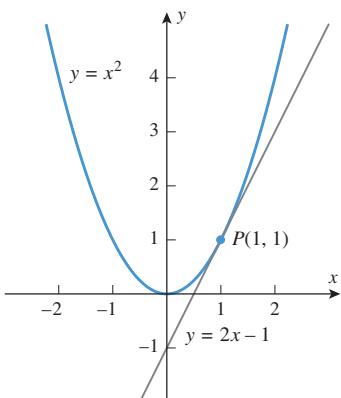


Figura 1.1.5

Já que $x \neq 1$, podemos cancelar o fator $(x - 1)$ e reescrever (2) como

$$m_{\text{sec}} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = x + 1.$$

Agora é evidente que m_{sec} se aproxima mais e mais de 2 quando x se aproxima mais e mais de 1. Assim, $m_{\text{tg}} = 2$ e (1) implica que a equação da reta tangente é

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = 2x - 1$$

A Figura 1.1.5 mostra o gráfico de $y = x^2$ e dessa reta tangente. ◀

■ ÁREAS E LIMITES

Assim como a noção geral de reta tangente leva ao conceito de *limite*, o mesmo acontece com a noção geral de área. Para regiões planas, com contornos formados por linhas retas, as áreas podem, muitas vezes, ser calculadas subdividindo-se a região em retângulos ou triângulos e somando-se as áreas das partes constituintes (Figura 1.1.6). Todavia, para regiões cujo contorno é curvo, como a da Figura 1.1.7a, é necessária uma abordagem mais geral. Uma dessas abordagens é começar aproximando a área da região com um certo número de retângulos inscritos de larguras iguais sob a curva e somar as áreas desses retângulos (Figura 1.1.7b). A intuição sugere que, se repetirmos esse processo de aproximação com cada vez mais retângulos, eles tenderão a preencher os vazios sob a curva e a aproximação ficará cada vez mais próxima da área exata sob a curva (Figura 1.1.7c). Isso sugere que podemos definir a área sob a curva como sendo o valor limite dessas aproximações. Essa ideia será considerada com mais detalhes adiante, mas aqui queremos ressaltar mais uma vez que o conceito de limite está desempenhando um papel.

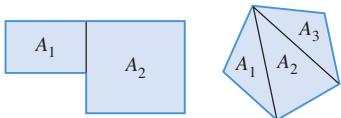


Figura 1.1.6

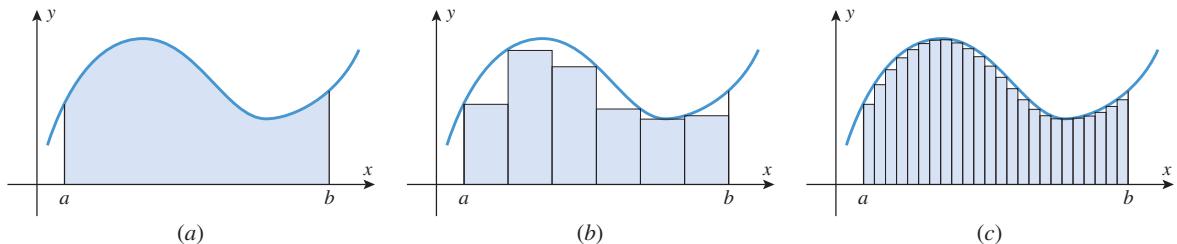
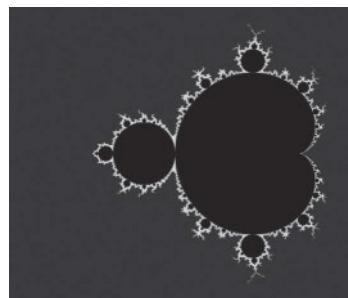


Figura 1.1.7



© James Oakley/Alamy

A figura mostra uma região denominada **Conjunto de Mandelbrot**. Esse conjunto ilustra quanto complicada pode ser uma região plana e porque o conceito área requer uma definição cuidadosa.

■ NÚMEROS DECIMAIS E LIMITES

Os limites também ocorrem no contexto familiar de números decimais. Por exemplo, a expansão decimal da fração $\frac{1}{3}$ é

$$\frac{1}{3} = 0,33333\dots \tag{3}$$

na qual os pontos indicam que o dígito 3 se repete indefinidamente. Embora o leitor possa nunca ter pensado em decimais dessa maneira, podemos escrever (3) como

$$\frac{1}{3} = 0,33333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + \dots \tag{4}$$

que é uma soma de “infinitas” parcelas. Conforme será discutido com maiores detalhes adiante, interpretarmos (4) como significando que a sucessão de somas finitas

$$0,3, \quad 0,3 + 0,03, \quad 0,3 + 0,03 + 0,003, \quad 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003, \dots$$

se aproxima mais e mais de um valor limite de $\frac{1}{3}$, à medida que incluímos mais e mais parcelas. Assim, os limites ocorrem até no contexto familiar das representações decimais de números reais.

LIMITES

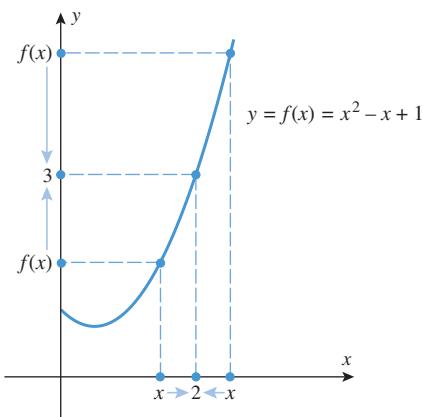
Agora que já vimos como os limites aparecem em várias situações, vamos nos concentrar no conceito de limite.

O uso mais básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor. Por exemplo, examinemos o comportamento da função

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

quando x está cada vez mais próximo de 2. Fica evidente, a partir do gráfico e da tabela na Figura 1.1.8, que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de 3 à medida que escolhemos os valores de x cada vez mais próximos de 2, por qualquer um dos lados, esquerdo ou direito. Descrevemos isso dizendo que o “limite de $x^2 - x + 1$ é 3 quando x tende a 2 por qualquer um dos lados”, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 3 \quad (5)$$



x	1,0	1,5	1,9	1,95	1,99	1,995	1,999	2	2,001	2,005	2,01	2,05	2,1	2,5	3,0
$f(x)$	1,000000	1,750000	2,710000	2,852500	2,970100	2,985025	2,997001		3,003001	3,015025	3,030100	3,152500	3,310000	4,750000	7,000000

Lado esquerdo

Lado direito

Figura 1.1.8

Isso nos leva à ideia geral seguinte.

1.1.1 LIMITES (DE UM PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L , desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a), então escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (6)$$

que deve ser lido como “o limite de $f(x)$ com x tendendo a a é L ”, ou “ $f(x)$ tende a L quando x tende a a ”. A expressão (6) também pode ser escrita como

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{com} \quad x \rightarrow a \quad (7)$$

Já que estamos exigindo que x seja diferente de a em (6), o valor de f em a não tem relação alguma com o limite L , tampouco se f está ou não definida em a . O limite descreve o comportamento de f perto de a , mas não em a .

► **Exemplo 2** Use evidência numérica para conjecturar o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad (8)$$

Solução Embora a função

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad (9)$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico para gerar o gráfico da equação $y = f(x)$ com a função dada por (9). Encontre uma janela contendo $x = 1$ na qual todos os valores de $f(x)$ estão a menos de 0,5 de $y = 2$ e uma outra na qual todos os valores de $f(x)$ estão a menos de 0,1 de $y = 2$.

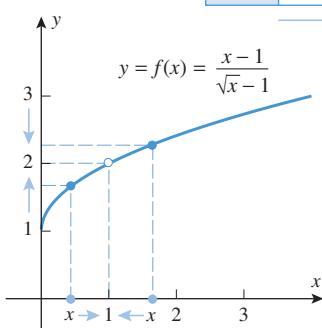


Figura 1.1.9

Use uma evidência numérica para determinar se o limite em (11) muda quando x é medido em graus.

não esteja definida em $x = 1$, isso não tem relação alguma com o limite. A Tabela 1.1.1 apresenta valores amostrais de x se aproximando de 1 de ambos os lados. Nos dois casos, os correspondentes valores de $f(x)$, calculados até a sexta casa decimal, parecem estar se aproximando mais e mais de 2 e, portanto, conjecturamos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$$

Isso é consistente com o gráfico de f , mostrado na Figura 1.1.9. Na próxima seção, mostraremos como obter esse resultado algebricamente. ◀

Tabela 1.1.1

x	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0	1,00001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,994987	1,999500	1,999950	1,999995		2,000005	2,000050	2,000500	2,004988

► **Exemplo 3** Use evidência numérica para conjecturar o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (10)$$

Solução Com a ajuda de uma calculadora ajustada para o modo radianos, obtemos a Tabela 1.1.2. Os dados da tabela sugerem que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (11)$$

O resultado é consistente com o gráfico de $f(x) = (\sin x)/x$, mostrado na Figura 1.1.10. Adiante neste capítulo, daremos um argumento geométrico para provar a validade de nossa conjectura. ◀

Tabela 1.1.2

x (radianos)	$y = \frac{\sin x}{x}$
$\pm 1,0$	0,84147
$\pm 0,9$	0,87036
$\pm 0,8$	0,89670
$\pm 0,7$	0,92031
$\pm 0,6$	0,94107
$\pm 0,5$	0,95885
$\pm 0,4$	0,97355
$\pm 0,3$	0,98507
$\pm 0,2$	0,99335
$\pm 0,1$	0,99833
$\pm 0,01$	0,99998

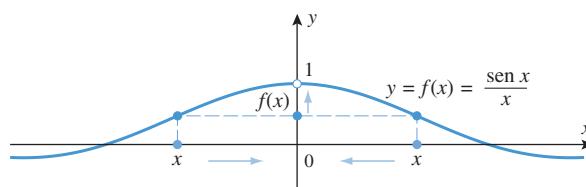


Figura 1.1.10

Quando x tende a 0 pela esquerda ou pela direita, $f(x)$ tende a 1.

■ ARMADILHAS DE AMOSTRAGEM

A evidência numérica pode, às vezes, levar a conclusões erradas sobre os limites, por causa de erros de arredondamento ou porque os valores amostrais escolhidos não revelam o verdadeiro comportamento do limite. Por exemplo, poderíamos concluir *erroneamente* da Tabela 1.1.3 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{\pi}{x} \right) = 0$$

O fato de que isso não está correto é evidenciado pelo gráfico de f dado na Figura 1.1.11. O gráfico revela que os valores de f oscilam entre -1 e 1 , com velocidade crescente à medida que $x \rightarrow 0$ e, portanto, não se aproximam de um limite. Os dados na tabela nos iludiram porque os valores selecionados de x são todos pontos de corte do eixo x com o gráfico de f . Isso chama a atenção para o fato de que é necessário dispor de métodos alternativos para corroborar limites conjecturados a partir de evidências numéricas.

Tabela 1.1.3

x	$\frac{\pi}{x}$	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$
$x = \pm 1$	$\pm\pi$	$\sin(\pm\pi) = 0$
$x = \pm 0,1$	$\pm 10\pi$	$\sin(\pm 10\pi) = 0$
$x = \pm 0,01$	$\pm 100\pi$	$\sin(\pm 100\pi) = 0$
$x = \pm 0,001$	$\pm 1.000\pi$	$\sin(\pm 1.000\pi) = 0$
$x = \pm 0,0001$	$\pm 10.000\pi$	$\sin(\pm 10.000\pi) = 0$
\vdots	\vdots	\vdots

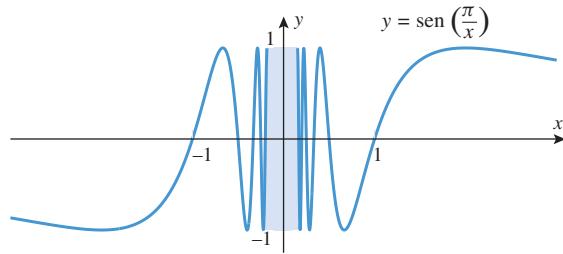


Figura 1.1.11

LIMITES LATERAIS

Costuma-se dizer que (6) é um *limite bilateral*, porque requer que os valores de $f(x)$ fiquem cada vez mais próximos de L quando x tende a a por *qualquer um* dos dois lados. Contudo, algumas funções exibem diferentes comportamentos em cada um dos lados de um ponto a , e nesse caso é necessário distinguir se x está próximo de a do lado esquerdo ou do lado direito, para fins de examinar o comportamento no limite. Por exemplo, considere a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (12)$$

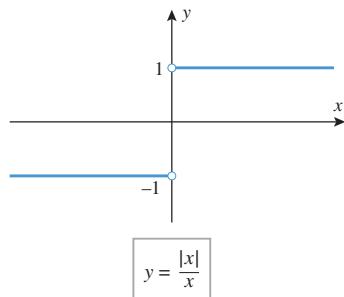


Figura 1.1.12

cujo gráfico é dado na Figura 1.1.12. Quando x se aproxima de 0 do lado *direito*, os valores de $f(x)$ tendem ao limite 1 [na realidade, os valores $f(x)$ são exatamente iguais a 1 para todos esses x], e quando x tende a 0 pela *esquerda*, os valores de $f(x)$ aproximam-se do limite -1 . Denotamos esses limites escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad (13)$$

Com essa notação, o índice superior “+” indica um limite à direita e o índice superior “-” indica um limite à esquerda.

Isso leva à ideia geral de *limites laterais*.

Assim como ocorre com os limites bilaterais, os limites laterais em (14) e (15) também podem ser escritos como

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{com} \quad x \rightarrow a^+$$

e

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{com} \quad x \rightarrow a^-$$

respectivamente.

1.1.2 LIMITES LATERAIS (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de L quanto queiramos desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas maiores do que a), então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (14)$$

e se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de L quanto queiramos desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas menores do que a), então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (15)$$

A expressão (14) é lida como “ L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a pela direita” ou “ $f(x)$ tende a L quando x tende a a pela direita”. Analogamente, a expressão (15) é lida como “ L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a pela esquerda” ou “ $f(x)$ tende a L quando x tende a a pela esquerda”.

■ A RELAÇÃO ENTRE LIMITES LATERAIS E LIMITES BILATERAIS

De um modo geral, não há garantia de que uma função tenha um limite bilateral em um ponto dado; ou seja, os valores de $f(x)$ podem não se aproximar mais e mais de um único número real L quando $x \rightarrow a$. Nesse caso, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ não existe}$$

Analogamente, os valores de $f(x)$ podem não se aproximar mais e mais de um único número real L quando $x \rightarrow a^+$ ou quando $x \rightarrow a^-$. Nesse caso, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ não existe}$$

ou que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ não existe}$$

Para que exista o limite bilateral de uma função $f(x)$ em um ponto a , os valores de $f(x)$ devem tender a algum número real L quando x tender a a , e esse número deve ser o mesmo, independentemente de x tender a a pela esquerda ou pela direita. Isso sugere o resultado seguinte, que enunciamos sem prova formal.

1.1.3 A RELAÇÃO ENTRE LIMITES LATERAIS E BILATERAIS O limite bilateral de uma função $f(x)$ existe em um ponto a se, e somente se, existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

► **Exemplo 4** Explique por que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

não existe.

Solução Quando x tende a 0, os valores de $f(x) = |x|/x$ tendem a -1 pela esquerda e a 1 pela direita [ver (13)]. Assim, os limites laterais em 0 não são iguais. ◀

► **Exemplo 5** Para as funções na Figura 1.1.13, encontre os limites laterais e bilaterais em $x = a$, se existirem.

Solução As funções nas três figuras têm os mesmos limites laterais quando $x \rightarrow a$, uma vez que as funções são idênticas, exceto em $x = a$. Esses limites são:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$$

Em todos os três casos, o limite bilateral não existe quando $x \rightarrow a$, pois os limites laterais não são iguais. ◀

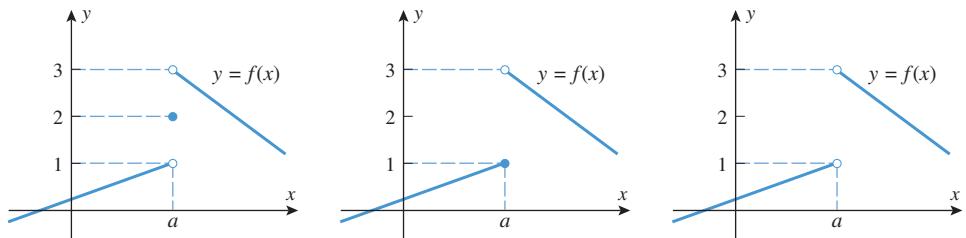


Figura 1.1.13

► **Exemplo 6** Para as funções na Figura 1.1.14, encontre os limites laterais e bilaterais em $x = a$, se existirem.

Solução Como no exemplo precedente, o valor de f em $x = a$ não tem nada a ver com o limite quando $x \rightarrow a$. Assim, em todos os três casos temos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$$

Como os limites laterais são iguais, o limite bilateral existe e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2 \quad \blacktriangleleft$$

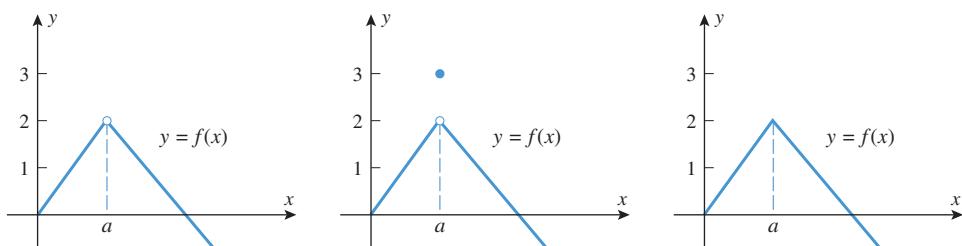


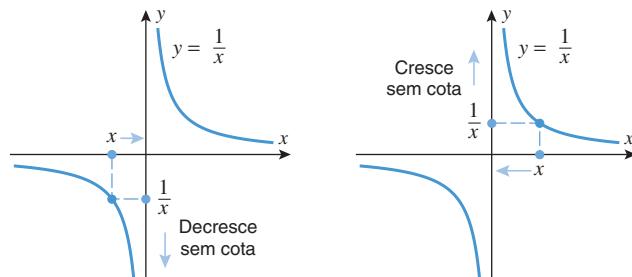
Figura 1.1.14

LIMITES INFINITOS

Às vezes, os limites laterais ou bilaterais não existem porque os valores da função crescem ou decrescem sem cota. Por exemplo, considere o comportamento da função $f(x) = 1/x$ para os valores de x perto de 0. É evidente, a partir da tabela e do gráfico na Figura 1.1.15, que, à medida que tomarmos os valores de x cada vez mais próximos de 0 pela direita, os valores de $f(x) = 1/x$ serão positivos e crescerão sem cota; e, à medida que tomarmos os valores de x cada vez mais próximos de 0 pela esquerda, os valores de $f(x) = 1/x$ serão negativos e decrescerão sem cota. Esses comportamentos de limites são descritos escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais; eles simplesmente descrevem maneiras particulares pelas quais os limites deixam de existir. Não cometa o erro de manipular esses símbolos usando as regras da Álgebra. Por exemplo, não é correto escrever $(+\infty) - (+\infty) = 0$.



x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1.000	-10.000		10.000	1.000	100	10	1
Lado esquerdo						Lado direito					

Figura 1.1.15

1.1.4 LIMITES INFINITOS (PONTO DE VISTA INFORMAL) As expressões

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

significam que $f(x)$ cresce sem cota quando x tende a a pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Analogamente, as expressões

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

significam que $f(x)$ decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

► Exemplo 7 Para as funções na Figura 1.1.16, descreva os limites em $x = a$ na notação de limite apropriada.

Solução (a) Na Figura 1.1.16a, a função cresce sem cota quando x tende a a pela direita e decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

Solução (b) Na Figura 1.1.16b, a função cresce sem cota quando x tende a a pela direita e pela esquerda. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

Solução (c) Na Figura 1.1.16c, a função decresce sem cota quando x tende a a pela direita, e cresce sem cota quando x tende a a pela esquerda. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-1}{x-a} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-1}{x-a} = +\infty$$

Solução (d) Na Figura 1.1.16d, a função decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda e pela direita. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-1}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-1}{(x-a)^2} = -\infty \quad \blacktriangleleft$$

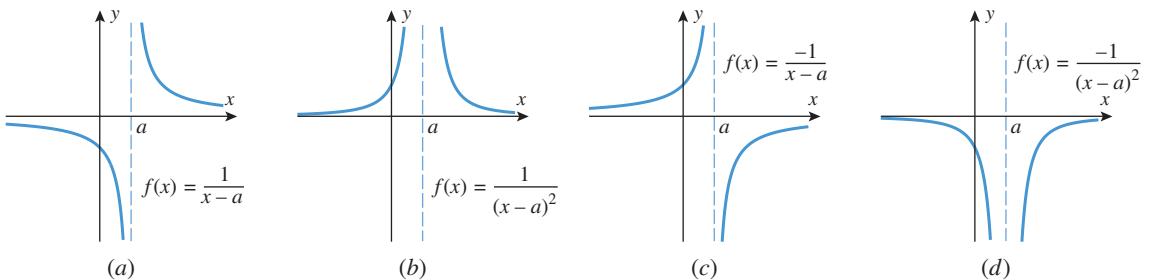


Figura 1.1.16

■ ASSÍNTOTAS VERTICais

A Figura 1.1.17 ilustra geometricamente o que acontece quando ocorre uma das seguintes situações:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Em cada caso, o gráfico de $y = f(x)$ ou sobe ou desce sem cota, ajustando-se mais e mais à reta vertical $x = a$ à medida que x tende a a pelo lado indicado no limite. A reta $x = a$ é denominada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$. (O termo assíntota deriva do grego *asymptotos*, que significa “que não se intersecta”.)

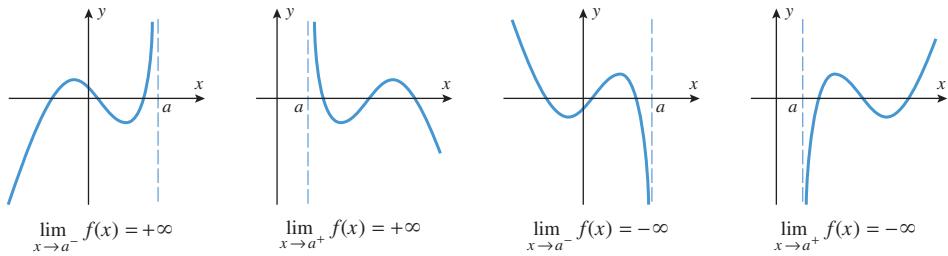


Figura 1.1.17

Normalmente, o gráfico de uma única função pode apresentar uma grande variedade de limites.

► **Exemplo 8** Para a função f cujo gráfico aparece na Figura 1.1.18, encontre

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---|-------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ | (g) as assíntotas verticais do gráfico de f . | |

Soluções (a) e (b)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 = f(-2) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$$

Soluções (c) e (d)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Soluções (e) e (f)

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \text{ não existe devido a oscilações} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

Solução (g) O eixo y e a reta $x = 4$ são assíntotas verticais do gráfico de f . ◀

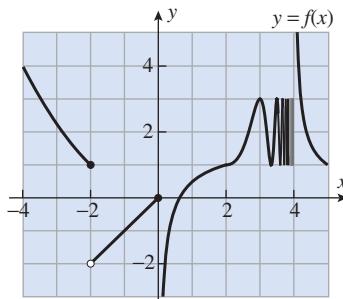


Figura 1.1.18

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.1 (Ver página 79 para respostas.)

1. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ desde que os valores de _____ possam ser tornados tão próximos de _____ quanto quisermos, desde que tomemos os valores de _____ suficientemente próximos de _____, mas não _____.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

2. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ desde que os valores de _____ cresçam sem cota quando _____ tende a _____ pela esquerda.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

3. Enuncie o que deve valer a respeito de

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

para que valha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

4. Use o gráfico de $y = f(x)$ ($-\infty < x < 3$) a seguir para determinar os limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = _____$

5. A inclinação da reta secante por $P(2, 4)$ e $Q(x, x^2)$ da parábola $y = x^2$ é $m_{\sec} = x + 2$. Segue que a inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto P é _____.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = _____$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = _____$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = _____$

EXERCÍCIOS 1.1  Recurso Gráfico  CAS

1-10 Em cada um destes exercícios, faça hipóteses razoáveis sobre o gráfico da função indicada fora da região esboçada. ■

1. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, encontre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) & \text{(d)} g(0) \end{array}$$

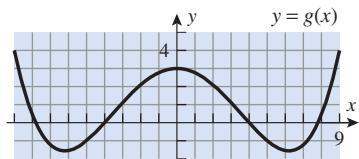


Figura Ex-1

2. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, encontre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} G(x) & \text{(d)} G(0) \end{array}$$

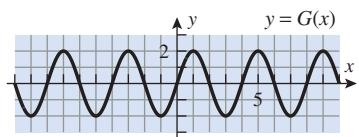


Figura Ex-2

3. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, encontre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) & \text{(d)} f(3) \end{array}$$

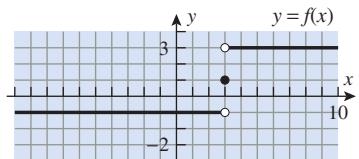


Figura Ex-3

4. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, encontre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) & \text{(d)} f(2) \end{array}$$

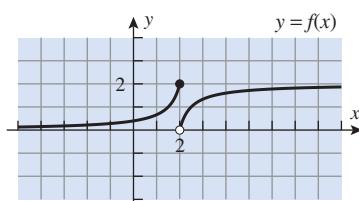


Figura Ex-4

5. Para a função F cujo gráfico está na figura a seguir, obtenha

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -2^-} F(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -2} F(x) & \text{(d)} F(-2) \end{array}$$

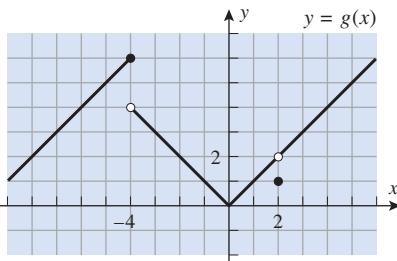


Figura Ex-5

6. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, encontre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} G(x) & \text{(d)} G(0) \end{array}$$

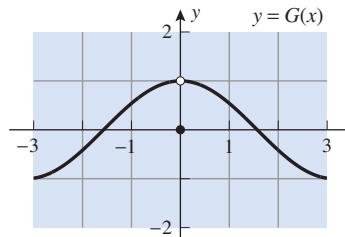


Figura Ex-6

7. Para a função f cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) & \text{(d)} f(3) \end{array}$$

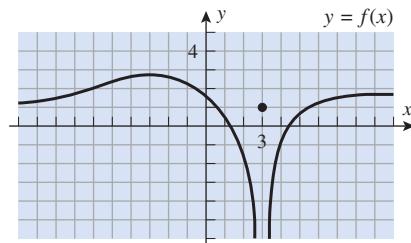


Figura Ex-7

8. Para a função φ cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 4^-} \phi(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 4^+} \phi(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 4} \phi(x) & \text{(d)} \phi(4) \end{array}$$

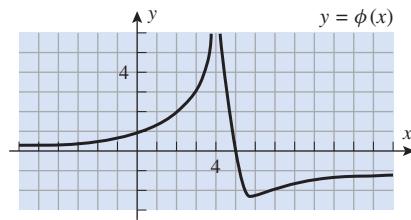


Figura Ex-8

9. Para a função cujo gráfico está na próxima página, encontre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) & \text{(f)} \text{as assintotas verticais do gráfico de } f. \end{array}$$

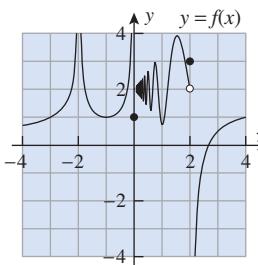


Figura Ex-9

10. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, encontre
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 - as assíntotas verticais do gráfico de f .

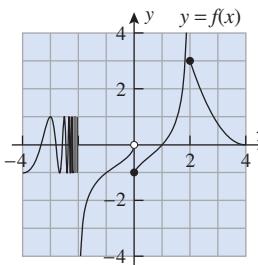


Figura Ex-10

- 11-12 (i) Complete a tabela e dê um palpite sobre o limite indicado.
(ii) Confirme suas conclusões sobre o limite desenhando o gráfico da função sobre um intervalo adequado. [Nota: Para as funções trigonométricas inversas, assegure-se de que a calculadora esteja no modo radianos.] ■

11. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Tabela Ex-11

x	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$						

12. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^{-1} 2x}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Tabela Ex-12

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$						

- 13-16 (i) Dê um palpite sobre o limite (se existir) calculando a função nos pontos especificados. (ii) Confirme suas conclusões sobre o limite desenhando o gráfico da função sobre um intervalo adequado. (iii) Use um CAS para encontrar o limite. [Nota: Para as funções trigonométricas, assegure-se de que a calculadora esteja no modo radianos.] ■

13. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}; x = 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; 0; 0,5; 0,9; 0,99; 0,999$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^3-1}; x = 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^3-1}; x = 0; 0,5; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999$

14. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}; x = \pm 0,25; \pm 0,1; \pm 0,001; \pm 0,0001$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x}; x = 0,25; 0,1; 0,001; 0,0001$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x}; x = -0,25; -0,1; -0,001; -0,0001$

15. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}; x = \pm 0,25; \pm 0,1; \pm 0,001; \pm 0,0001$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos x}{x+1}; x = 0; -0,5; -0,9; -0,99; -0,999; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$

16. (a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x+1}; x = 0; -0,5; -0,9; -0,99; -0,999; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)}; x = \pm 0,25; \pm 0,1; \pm 0,001; \pm 0,0001$

17-20 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

17. Se $f(a) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

18. Se existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então também existem $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

19. Se existirem $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, então também existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

20. Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, então $f(a)$ não está definido.

21-26 Esboce um gráfico possível de uma função f com as propriedades especificadas. (São possíveis muitas soluções diferentes.) ■

21. (i) o domínio de f é $[-1, 1]$

(ii) $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

22. (i) o domínio de f é $[-2, 1]$

(ii) $f(-2) = f(0) = f(1) = 0$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

23. (i) o domínio de f é $(-\infty, 0]$

(ii) $f(-2) = f(0) = 1$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

24. (i) o domínio de f é $(0, +\infty)$

(ii) $f(1) = 0$

(iii) o eixo y é uma assíntota vertical do gráfico de f

(iv) $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$

25. (i) $f(-3) = f(0) = f(2) = 0$
(ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$
(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

26. (i) $f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0$
(ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$
(iii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

27-30 Modifique o argumento do Exemplo 1 para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico especificado no ponto dado. ■

27. O gráfico de $y = x^2$ em $(-1, 1)$.
28. O gráfico de $y = x^2$ em $(0, 0)$.
29. O gráfico de $y = x^4$ em $(1, 1)$.
30. O gráfico de $y = x^4$ em $(-1, 1)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

31. Na Teoria Especial de Relatividade, o comprimento l de um bastão curto em movimento longitudinal é uma função $l = l(v)$ da velocidade v do bastão. A Figura Ex-31, em que c denota a velocidade da luz, exibe algumas das características qualitativas dessa função.
(a) Qual é a interpretação física de l_0 ?
(b) Qual é o $\lim_{v \rightarrow c^-} l(v)$? Qual é o significado físico desse limite?

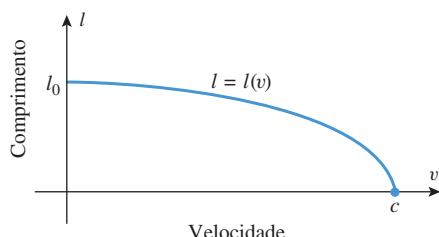


Figura Ex-31

32. Na Teoria Especial de Relatividade, a massa m de um objeto em movimento é uma função $m = m(v)$ da velocidade v do objeto. A Figura Ex-32, em que c denota a velocidade da luz, exibe algumas das características qualitativas dessa função.
(a) Qual é a interpretação física de m_0 ?
(b) Qual é o $\lim_{v \rightarrow c^-} m(v)$? Qual é o significado físico desse limite?

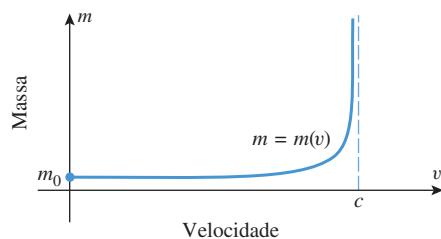


Figura Ex-32

33. (a) Seja

$$f(x) = (1 + x^2)^{1,1/x^2}$$

Faça um gráfico de f na janela

$$[-1, 1] \times [2,5; 3,5]$$

e use sua calculadora para fazer uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow 0$.

- (b) Faça um gráfico de f na janela

$$[-0,001; 0,001] \times [2,5; 3,5]$$

e use sua calculadora para fazer uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow 0$.

- (c) Faça um gráfico de f na janela

$$[-0,000001; 0,000001] \times [2,5; 3,5]$$

e use sua calculadora para fazer uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow 0$.

- (d) Mais adiante teremos condições de mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1,1/x^2} \approx 3,00416602$$

Qual é o defeito que os gráficos obtidos nos itens anteriores revelam sobre o uso de evidência numérica para fazer conjecturas sobre limites?

34. **Texto** Dois estudantes estão discutindo o limite de \sqrt{x} quando x tende a 0. Um deles afirma que o limite é 0 e o outro, que esse limite não existe. Escreva um parágrafo curto discutindo os prós e os contras das afirmações dos dois estudantes.

35. **Texto** Dados uma função f e um número real a , explique informalmente por que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(Aqui, a igualdade significa que ou ambos os limites existem e são iguais ou nenhum dos dois limites existe.)

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.1

1. $f(x); L; x; a; a$ 2. $f(x); x; a$ 3. Ambos os limites laterais devem existir e ser iguais a L. 4. (a) 0 (b) 1 (c) $+\infty$ (d) $-\infty$ 5. 4

1.2 CALCULANDO LIMITES

Nesta seção, discutiremos técnicas algébricas para calcular limites de muitas funções. Esses resultados serão baseados no desenvolvimento informal do conceito de limite discutido na seção precedente. Uma dedução mais formal desses resultados será possível depois da Seção 1.4.

■ ALGUNS LIMITES BÁSICOS

Nossa estratégia para encontrar algebricamente os limites tem duas partes:

- Primeiro, estabelecemos os limites de algumas funções simples.
- Então, desenvolvemos um repertório de teoremas que nos capacitarão a usar esses limites como “blocos de construção” para encontrar limites de funções mais complicadas.

Começamos com o seguinte resultado básico, que está ilustrado na Figura 1.2.1.

1.2.1 TEOREMA Sejam a e k dois números reais.

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} k = k \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

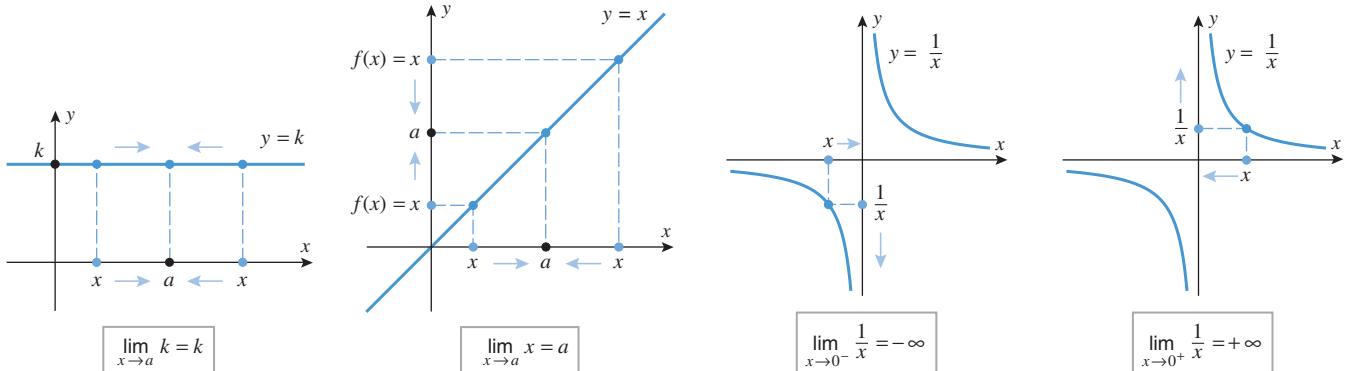


Figura 1.2.1

Esses resultados são explicados nos seguintes exemplos:

► Exemplo 1 Se $f(x) = k$ é uma função constante, então os valores de $f(x)$ permanecem fixos enquanto k e x variam, o que explica por que $f(x) \rightarrow k$ quando $x \rightarrow a$ para todos os valores de a . Por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -25} 3 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} 3 = 3 \quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 2 Se $f(x) = x$, então quando $x \rightarrow a$, também deve valer que $f(x) \rightarrow a$. Por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2} x = -2, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi \quad \blacktriangleleft$$

Não confunda o tamanho algébrico de um número com sua proximidade de zero. Para números positivos, quanto menor o número, mais próximo está de zero, mas para números negativos, quanto maior o número, mais próximo está de zero. Por exemplo, -2 é maior do que -4 , mas está mais próximo de zero.

► **Exemplo 3** O leitor deve saber, de sua experiência com frações que, para um numerador não nulo fixo, quanto mais próximo de 0 estiver o denominador, maior será o valor absoluto da fração. Esse fato e os dados da Tabela 1.2.1 sugerem por que $1/x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$ e por que $1/x \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow 0^-$. ◀

Tabela 1.2.1

	VALORES						CONCLUSÃO
x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	...	
$1/x$	-1	-10	-100	-1.000	-10.000	...	Quando $x \rightarrow 0^-$, o valor de $1/x$ decresce sem cota.
x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	...	
$1/x$	1	10	100	1.000	10.000	...	Quando $x \rightarrow 0^+$, o valor de $1/x$ cresce sem cota.

O seguinte teorema, parte do qual está provado no Apêndice D (no Volume II), será nossa ferramenta básica para determinar algebricamente os limites.

1.2.2 TEOREMA

Seja a um número real e suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

ou seja, os limites existem e têm valores L_1 e L_2 , respectivamente. Então:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 L_2$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{desde que } L_2 \neq 0$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}, \quad \text{desde que } L_1 > 0 \text{ se } n \text{ for par.}$$

Além disso, essas afirmações também valem para os limites laterais quando $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow a^+$.

O Teorema 1.2.2(e) permanece válido com n par e $L_1 = 0$, desde que $f(x)$ seja não negativa com x próximo a a com $x \neq a$.

Esse teorema pode ser enunciado informalmente como segue:

- (a) O limite da soma é a soma dos limites.
- (b) O limite da diferença é a diferença dos limites.
- (c) O limite do produto é o produto dos limites.
- (d) O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador não seja zero.
- (e) O limite da raiz enésima é a raiz enésima do limite.

No caso especial da parte (c), em que $f(x) = k$ é uma função constante, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} (kg(x)) = \lim_{x \rightarrow a} k \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = k \lim_{x \rightarrow a} g(x) \tag{1}$$

e analogamente para limites laterais. Esse resultado pode ser reformulado assim:

Um fator constante pode ser movido para fora de um símbolo de limite.

Embora as partes (a) e (c) do Teorema 1.2.2 tenham sido enunciadas para duas funções, os resultados valem para um número finito qualquer de funções. Além disso, as várias partes do teorema podem ser usadas combinadas para reformular expressões que envolvam limites.

► Exemplo 4

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x) + 2h(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) + 2 \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)h(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} h(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^3 = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^3$$

Tome $g(x) = h(x) = f(x)$ na última equação.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

A extensão do Teorema 1.2.2(c) em que há n fatores, cada um dos quais é $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^n = a^n$$

Aplique o resultado anterior com $f(x) = x$.

■ LIMITES DE POLINÔMIOS E FUNÇÕES RACIONAIS QUANDO $x \rightarrow a$

► Exemplo 5

Encontre $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 3)$.

Solução

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 4x + \lim_{x \rightarrow 5} 3$$

Teorema 1.2.2(a), (b).

$$= \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 3$$

Constantes saem para fora de limites.

$$= 5^2 - 4(5) + 3$$

Última parte do Exemplo 4.

$$= 8$$

Observe que, no Exemplo 5, ocorreu que o limite do polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 3$ com $x \rightarrow 5$ é exatamente igual a $p(5)$. Isso não é acidental. O próximo resultado mostra que, em geral, o limite de um polinômio $p(x)$ quando $x \rightarrow a$ é igual ao valor do polinômio em a . Sabendo disso, podemos reduzir os cálculos de limites de polinômios para o simples cálculo do valor do polinômio no ponto apropriado.

1.2.3 TEOREMA

Para qualquer polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

e qualquer número real a

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n = p(a)$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} p(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} c_0 + \lim_{x \rightarrow a} c_1x + \cdots + \lim_{x \rightarrow a} c_nx^n \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} c_0 + c_1 \lim_{x \rightarrow a} x + \cdots + c_n \lim_{x \rightarrow a} x^n \\
 &= c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n = p(a)
 \end{aligned}
 \quad \blacksquare$$

► **Exemplo 6** Encontre $\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^5 + 1)^{35}$.

Solução A função considerada é um polinômio (por quê?), de modo que o limite pode ser obtido calculando o valor do polinômio em $x = 1$. Isso dá

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^5 + 1)^{35} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Lembre que uma função racional é um quociente de dois polinômios. O próximo exemplo ilustra como os Teoremas 1.2.2(d) e 1.2.3 podem, às vezes, ser usados em combinação para calcular limites de funções racionais.

► **Exemplo 7** Encontre $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3}$.

Solução

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)} \quad \text{Teorema 1.2.2(d)} \\
 &= \frac{5 \cdot 2^3 + 4}{2 - 3} = -44 \quad \text{Teorema 1.2.3} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

O método utilizado no último exemplo não funciona com funções racionais em que o limite do denominador é nulo, porque o Teorema 1.2.2(d) não é aplicável. Há dois casos a considerar: aquele em que o limite do denominador é zero e o do numerador não é zero; e aquele em que ambos os limites, o do denominador e o do numerador, são iguais a zero. Se o limite do denominador é zero, mas o limite do numerador não é, podemos provar que o limite da função racional não existe e que ocorre uma das seguintes situações:

- O limite poderá ser $-\infty$ de um lado e $+\infty$ do outro.
- O limite poderá ser $+\infty$.
- O limite poderá ser $-\infty$.

A Figura 1.2.2 ilustra essas três possibilidades graficamente para funções racionais da forma $1/(x - a)$, $1/(x - a)^2$ e $-1/(x - a)^2$.

► **Exemplo 8** Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$$

Solução Em todas as três partes, o limite do numerador é -2 e o do denominador, 0 ; logo, o limite da razão não existe. Para sermos mais específicos, necessitamos analisar o sinal da

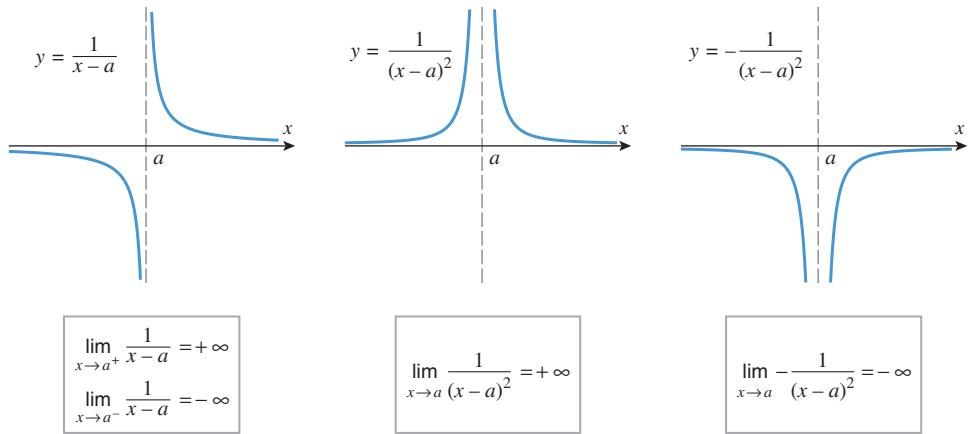


Figura 1.2.2

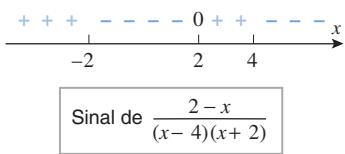


Figura 1.2.3

razão, o qual é dado na Figura 1.2.3 e é determinado pelos sinais de $2 - x$, $x - 4$ e $x + 2$. (O método do ponto de teste fornece uma maneira simples de obter o sinal da razão.) Segue a partir da figura que, quando x se aproxima de 4 pela direita, a razão é sempre negativa; quando x se aproxima de 4 pela esquerda, a razão acaba sendo positiva. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = +\infty$$

Como os limites laterais têm sinais opostos, só podemos concluir que o limite bilateral não existe. ◀

No caso em que $p(x)/q(x)$ for uma função racional para a qual $p(a) = 0$ e $q(a) = 0$, o numerador e o denominador necessariamente possuirão um ou mais fatores comuns de $x - a$. Nesse caso, o limite de $p(x)/q(x)$ quando $x \rightarrow a$ pode ser encontrado cancelando todos os fatores comuns de $x - a$ e usando um dos métodos considerados anteriormente para encontrar o limite da função simplificada. Aqui temos alguns exemplos.

No Exemplo 9(a), a função simplificada $x - 3$ está definida em $x = 3$, mas não a função original. Contudo, isso não tem efeito sobre o limite quando x se aproxima de 3, já que as duas funções são idênticas se $x \neq 3$ (Exercício 50).

► Exemplo 9 Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x + 8}{x^2 + x - 12} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25}$$

Solução (a) O numerador e o denominador têm um zero em $x = 3$; logo, há um fator comum de $x - 3$. Então

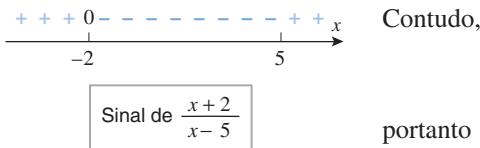
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$$

Solução (b) O numerador e o denominador têm um zero em $x = -4$; logo, há um fator comum de $x - (-4) = x + 4$. Então

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x + 8}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2}{x-3} = -\frac{2}{7}$$

Solução (c) O numerador e o denominador têm um zero em $x = 5$; logo, há um fator comum de $x - 5$. Então

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+2}{x-5}$$

**Figura 1.2.4**

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+2}{x-5}$$

não existe. Mais precisamente, a análise de sinais na Figura 1.2.4 implica que

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+2}{x-5} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+2}{x-5} = -\infty \blacktriangleleft$$

Discuta os erros lógicos na seguinte afirmação: uma forma indeterminada do tipo 0/0 deve ter um limite igual a zero porque zero dividido por qualquer coisa é igual a zero.

Um quociente $f(x)/g(x)$ em que o numerador e o denominador têm ambos um limite zero quando $x \rightarrow a$ é denominado **forma indeterminada do tipo 0/0**. O problema com esses limites é que é difícil dizer por inspeção se o limite existe e, se existir, é difícil dizer seu valor. Dito informalmente, isso ocorre porque há duas influências conflitantes em jogo: o valor de $f(x)/g(x)$ tenderia a zero quando $f(x)$ tendesse a 0 se $g(x)$ permanecesse fixado em algum valor não nulo, enquanto o valor desse quociente tenderia a crescer ou decrescer sem cota quando $g(x)$ tendesse a 0 se $f(x)$ permanecesse fixado em algum valor não nulo. No entanto, com $f(x)$ e $g(x)$ tendendo a zero, o comportamento desse quociente depende de precisamente como essas tendências conflitantes se cancelam uma à outra para as particulares funções f e g sob consideração.

Às vezes, os limites de formas indeterminadas do tipo 0/0 podem ser encontrados por meio de simplificação algébrica, como nos dois casos anteriores, mas frequentemente isso não funciona e precisamos usar outros métodos. Esses métodos serão estudados em seções posteriores.

O teorema a seguir resume nossa observação sobre limites de funções racionais.

1.2.4 TEOREMA Sejam

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

uma função racional e a um número real qualquer.

- (a) Se $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- (b) Se $q(a) = 0$, mas $p(a) \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

LIMITES ENVOLVENDO RADICAIS

► **Exemplo 10** Encontre $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Solução No Exemplo 2 da Seção 1.1, utilizamos evidência numérica para conjecturar que esse limite é 2. Aqui, vamos confirmar isso algebraicamente. Como esse limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0, precisamos construir uma estratégia para torná-lo evidente, caso exista. Uma tal estratégia é racionalizar o denominador da função. Assim, obtemos

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1 \quad (x \neq 1)$$

Confirme o limite no Exemplo 10 fatorando o numerador.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2 \quad \blacktriangleleft$$

LIMITES DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

Para funções que são definidas por partes, é melhor obter o limite bilateral em um ponto no qual a fórmula muda encontrando primeiro os limites laterais no ponto.

Exemplo 11 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+2), & x < -2 \\ x^2 - 5, & -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & x > 3 \end{cases}$$

Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Solução (a) Determinaremos o limite bilateral solicitado considerando primeiro os limites laterais correspondentes. Para cada limite lateral, devemos usar a parte da fórmula que é aplicável no intervalo sobre o qual x varia. Por exemplo, quando x tende a -2 pela esquerda, a parte aplicável da fórmula é

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

e quando x tende a -2 pela direita, a parte aplicável da fórmula perto de -2 é

$$f(x) = x^2 - 5$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 5) = (-2)^2 - 5 = -1 \end{aligned}$$

do que segue que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ não existe.

Solução (b) A parte aplicável da fórmula é $f(x) = x^2 - 5$ em ambos os lados de 0, portanto não há necessidade de considerar limites laterais. Vemos diretamente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 5) = 0^2 - 5 = -5$$

Solução (c) Usando as partes aplicáveis da fórmula de $f(x)$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 5) = 3^2 - 5 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^+} (x+13)} = \sqrt{3+13} = 4$$

Como os dois limites laterais são iguais, temos

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$

Observamos que os cálculos dos limites em (a), (b) e (c) são consistentes com o gráfico de f na Figura 1.2.5. \blacktriangleleft

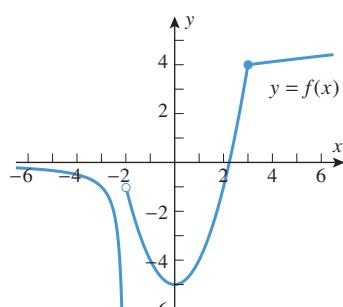


Figura 1.2.5

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 1.2 (Ver página 88 para respostas.)

1. Em cada parte, encontre o limite sem fazer contas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 8} 7 = \underline{\hspace{2cm}} & \text{(b)} \lim_{y \rightarrow 3^+} 12y = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \underline{\hspace{2cm}} & \text{(d)} \lim_{w \rightarrow 5} \frac{w}{|w|} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(e)} \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-z} = \underline{\hspace{2cm}} & \end{array}$$

2. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$, encontre os limites que existirem.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow a} [3f(x) + 2g(x)] = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) + 1}{1 - f(x)g(x)} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{f(x) + 3}}{g(x)} = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

3. Encontre os limites.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x^2 + x)^{101} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

Encontre os limites que existirem.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

EXERCÍCIOS 1.2

1. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$$

encontre os limites.

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + 2g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow a} [h(x) - 3g(x) + 1]$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow a} [g(x)]^2$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2}{g(x)}$

2. Use os gráficos de f e g na figura a seguir para encontrar os limites que existirem. Se o limite não existir, explique por quê.

- $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x) + g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{1 + g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + g(x)}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{f(x)}$

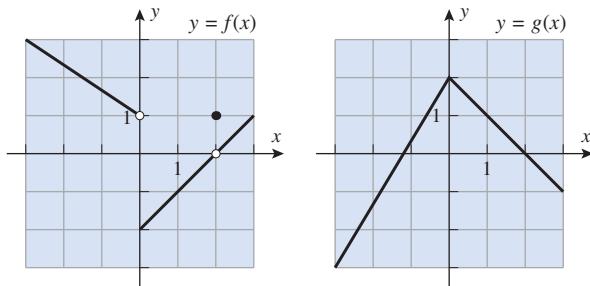


Figura Ex-2

3-30 Encontre os limites.

- $\lim_{x \rightarrow 2} x(x-1)(x+1)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x-9}{x^3-12x+3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4-1}{x-1}$
- $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3+8}{t+2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}$
- $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3+3t^2-12t+4}{t^3-4t}$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2-4}$
- $\lim_{y \rightarrow 6^+} \frac{y+6}{y^2-36}$
- $\lim_{y \rightarrow 6^-} \frac{y+6}{y^2-36}$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{|2-x|}$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{|x-3|}$
- $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$
- $\lim_{y \rightarrow 4} \frac{4-y}{2-\sqrt{y}}$

31. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

Encontre

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

32. Seja

$$g(t) = \begin{cases} t - 2, & t < 0 \\ t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2t, & t > 2 \end{cases}$$

Encontre

(a) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ (b) $\lim_{t \rightarrow 1} g(t)$ (c) $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$.

33-36 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

33. Se existirem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, então também existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$.

34. Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$.

35. Se existirem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ e ambos forem iguais, então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = 1$.

36. Se $f(x)$ for uma função racional e $x = a$ estiver no domínio de f , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

37-38 Primeiro rationalize o numerador e depois encontre o limite. ■

37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

39. Seja

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

(a) Encontre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(b) Esboce o gráfico de $y = f(x)$.

40. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & x \neq -3 \\ k, & x = -3 \end{cases}$$

(a) Determine k de modo que $f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

(b) Com k tomando o valor $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, mostre que $f(x)$ pode ser expresso como um polinômio.

ENFOCANDO CONCEITOS

41. (a) Explique por que os seguintes cálculos estão incorretos.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \\ = +\infty - (+\infty) = 0$$

(b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$.

42. (a) Explique por que o argumento a seguir não está correto.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2}{x + 2} \right) \\ = \infty \cdot 0 = 0$$

(b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right) = \frac{1}{2}$.

43. Encontre todos os valores de a com os quais existe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{a}{x^2-1} \right)$$

e é finito.

44. (a) Explique informalmente por que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

(b) Verifique algebraicamente o limite da parte (a).

45. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, e suponha $q(x_0) = 0$. Discuta o comportamento do gráfico de $y = p(x)/q(x)$ na vizinhança do ponto $x = x_0$. Dê exemplos que apoiem suas conclusões.

46. Suponha que f e g sejam duas funções tais que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, mas não exista $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$. Use o Teorema 1.2.2 para provar que $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ não existe.

47. Suponha que f e g sejam duas funções tais que existam $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$. Use o Teorema 1.2.2 para provar que existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

48. Suponha que f e g sejam duas funções tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

exista. Use o Teorema 1.2.2 para provar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

49. **Texto** De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força de atração gravitacional entre duas massas é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre essas massas. Quais resultados dessa seção são úteis para descrever a força de atração gravitacional entre duas massas quando essas massas se aproximam mais e mais?

50. **Texto** Suponha que f e g sejam duas funções que coincidem exceto num número finito de pontos e que a seja algum número real dado. Explique informalmente por que existem e são iguais

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ou por que ambos os limites não existem. Escreva um parágrafo curto explicando a relação desse resultado com o uso de “simplificação algébrica” no cálculo de um limite.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.2

1. (a) 7 (b) 36 (c) -1 (d) 1 (e) $+\infty$ 2. (a) 7 (b) -3 (c) 1 3. (a) -1 (b) 0 (c) $+\infty$ (d) 8 4. (a) 2 (b) 0 (c) não existe

1.3 LIMITES NO INFINITO; COMPORTAMENTO FINAL DE UMA FUNÇÃO

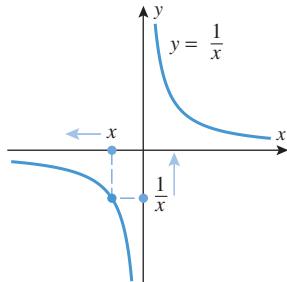
Até aqui, estivemos ocupados com limites que descrevem o comportamento de uma função $f(x)$ quando x tende a algum número real a . Nesta seção, vamos nos ocupar com o comportamento de $f(x)$ quando x cresce ou decresce sem cota.

LIMITES NO INFINITO E ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

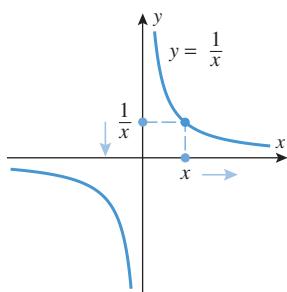
Se os valores de uma variável x crescem sem cota, escrevemos $x \rightarrow +\infty$; se os valores de x decrescem sem cota, escrevemos $x \rightarrow -\infty$. Algumas vezes, dizemos que o **comportamento final** de uma função $f(x)$ é o comportamento da função quando x cresce ou decresce sem cota. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (1-2)$$

estão ilustrados numericamente na Tabela 1.3.1 e geometricamente na Figura 1.3.1.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



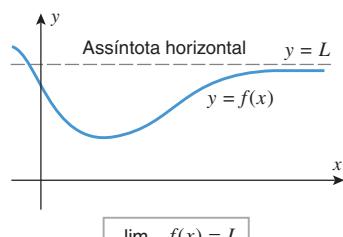
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Figura 1.3.1

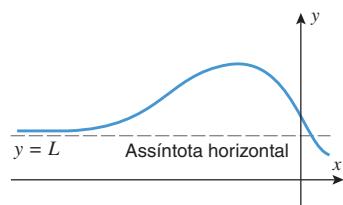
Tabela 1.3.1

	VALORES						CONCLUSÃO
x	-1	-10	-100	-1.000	-10.000	...	Quando $x \rightarrow -\infty$, o valor de $1/x$ cresce tendendo a 0.
$1/x$	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	...	
x	1	10	100	1.000	10.000	...	Quando $x \rightarrow +\infty$, o valor de $1/x$ decresce tendendo a 0.
$1/x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	...	

Em geral, utilizamos a notação a seguir.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Figura 1.3.2

1.3.1 LIMITES NO INFINITO (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x cresce sem cota, então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow +\infty \quad (3)$$

Analogamente, se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x decresce sem cota, então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow -\infty \quad (4)$$

A Figura 1.3.2 ilustra o comportamento final de uma função f quando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

No primeiro caso, o gráfico de f se aproxima tanto quanto queiramos da reta $y = L$ quando x cresce sem cota, e, no segundo caso, o gráfico de f se aproxima tanto quanto queiramos da reta $y = L$ quando x decresce sem cota. Se ocorrer um desses limites, dizemos que a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f .

Exemplo 1 Segue de (1) e de (2) que $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x) = 1/x$ tanto no sentido positivo quanto no negativo. Isso é consistente com o gráfico de $y = 1/x$ mostrado na Figura 1.3.1. ◀

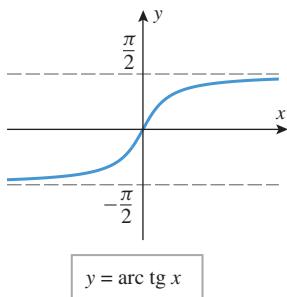


Figura 1.3.3

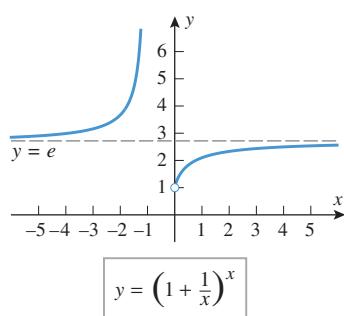


Figura 1.3.4

► **Exemplo 2** A Figura 1.3.3 mostra o gráfico de $f(x) = \text{arc tg } x$. Como sugere esse gráfico, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arc tg } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arc tg } x = -\frac{\pi}{2} \quad (5-6)$$

de modo que a reta $y = \pi/2$ é uma assíntota horizontal para f no sentido positivo e a reta $y = -\pi/2$ é uma assíntota horizontal para f no sentido negativo. ◀

► **Exemplo 3** A Figura 1.3.4 mostra o gráfico de $f(x) = (1 + 1/x)^x$. Como sugere esse gráfico, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (7-8)$$

de modo que a reta $y = e$ é uma assíntota horizontal para f tanto no sentido positivo quanto no negativo. ◀

■ REGRAS DE LIMITES PARA LIMITES NO INFINITO

Pode ser mostrado que as leis de limite do Teorema 1.2.2 passam sem modificações para limites em $+\infty$ e $-\infty$. Além disso, segue pelos mesmos argumentos desenvolvidos na Seção 1.2 que, se n for um inteiro positivo, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^n \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)^n \quad (9-10)$$

desde que existam os limites indicados de $f(x)$. Também segue que constantes podem ser movidas para fora do símbolo de limite no caso de limites no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad (11-12)$$

desde que existam os limites indicados de $f(x)$.

Finalmente, se $f(x) = k$ for uma função constante, então os valores de f não mudam quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k \quad (13-14)$$

► Exemplo 4

(a) Segue de (1), (2), (9) e (10) que, se n for um inteiro positivo, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \right)^n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right)^n = 0$$

(b) Segue de (7) e da extensão do Teorema 1.2.2(e) ao caso de $x \rightarrow +\infty$ que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right]^{1/2} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right]^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

■ LIMITES INFINITOS NO INFINITO

Da mesma maneira que limites em um número real a , os limites no infinito podem deixar de existir por vários motivos. Uma possibilidade é que os valores de $f(x)$ cresçam ou decresçam sem cota quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. Utilizaremos a notação seguinte para descrever essa situação.

1.3.2 LIMITES INFINITOS NO INFINITO (UM PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ crescem sem cota quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

conforme o caso. Se os valores de $f(x)$ decrescem sem cota quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

conforme o caso.

■ LIMITES DE x^n QUANDO $x \rightarrow \pm\infty$

Na Figura 1.3.5, ilustramos o comportamento no infinito dos polinômios da forma x^n para $n = 1, 2, 3$ e 4 , que são casos especiais dos seguintes resultados gerais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & n = 1, 3, 5, \dots \\ +\infty, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (15-16)$$

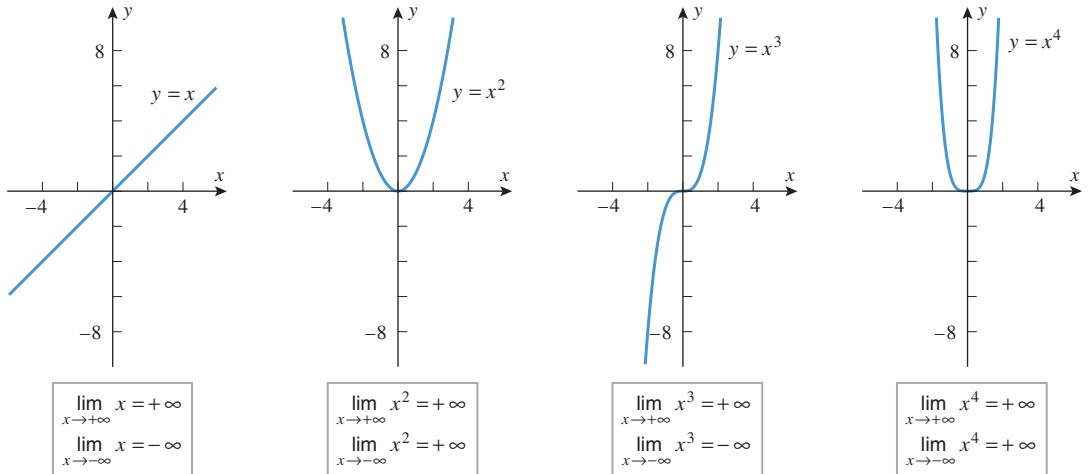


Figura 1.3.5

A multiplicação de x^n por um número real positivo não afeta os limites (15) e (16), mas a multiplicação por um número real negativo inverte os sinais.

► Exemplo 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^5 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^6 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^6 = -\infty \quad \blacktriangleleft$$

■ LIMITES DE POLINÔMIOS QUANDO $x \rightarrow \pm\infty$

Há um princípio útil sobre polinômios que, informalmente, afirma que:

O comportamento final de um polinômio coincide com o comportamento final de seu termo de maior grau.

Mais precisamente, se $c_n \neq 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} c_nx^n \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} c_nx^n \quad (18)$$

Podemos motivar esses resultados colocando em evidência o x de potência mais alta do polinômio e examinando o limite da expressão fatorada. Assim,

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = x^n \left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \cdots + c_n \right)$$

Quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$, segue do Exemplo 4(a) que todos os termos com potência positiva de x no denominador tendem a 0; logo, (17) e (18) são, certamente, plausíveis.

► Exemplo 6

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 4x^3 + 2x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^8 + 17x^3 - 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^8 = -\infty \quad \blacktriangleleft$$

■ LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS QUANDO $x \rightarrow \pm\infty$

Uma técnica para determinar o comportamento final de uma função racional consiste em dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorra no denominador, depois do que o comportamento final pode ser determinado usando resultados que já foram estabelecidos. A seguir temos alguns exemplos.

► Exemplo 7

Encontre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$.

Solução Divida o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que aparece no denominador, isto é, $x^1 = x$. Obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{6 - \frac{8}{x}} \quad \text{Divida cada termo por } x.$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 - \frac{8}{x} \right)} \quad \boxed{\text{O limite de um quociente é o quociente dos limites.}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 6 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x}} \quad \boxed{\text{O limite de uma soma é a soma dos limites.}}$$

$$= \frac{3 + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{6 - 8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{3 + 0}{6 - 0} = \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{Uma constante sai para fora de um limite; Fórmulas (2) e (13).}} \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 8** Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x}$$

Solução (a) Divida cada termo no numerador e no denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador, a saber, x^3 . Obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^3}} && \text{Divida cada termo por } x^3. \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x^3} \right)} && \text{O limite de um quociente é o quociente dos limites.} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3}} && \text{O limite de uma diferença é a diferença dos limites.} \\ &= \frac{4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{2 - 5 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{0 - 0}{2 - 0} = 0 && \text{Uma constante pode ser tirada para fora do símbolo de limite; Fórmula (14) e Exemplo 4.} \end{aligned}$$

Solução (b) Divida cada termo no numerador e no denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador, a saber, $x^1 = x$. Obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 3} \quad (19)$$

Nesse caso, não podemos argumentar que o limite do quociente é o quociente dos limites porque o limite do numerador não existe. Contudo, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 - 2x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3 \right) = -3$$

Assim, o numerador do lado direito de (19) tende a $+\infty$, e o denominador tem um limite finito negativo. Concluímos disso que o quociente tende a $-\infty$; ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 3} = -\infty \quad \blacktriangleleft$$

■ **UM MÉTODO RÁPIDO PARA ENCONTRAR LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS QUANDO $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$**

Como o comportamento final de um polinômio coincide com o comportamento final de seu termo de maior grau, é razoável concluir que:

O comportamento final de uma função racional coincide com o comportamento final do quociente do termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.

► **Exemplo 9** Use a observação precedente para calcular os limites dos Exemplos 7 e 8.

Solução

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{(-3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{3}x^2 \right) = -\infty \blacktriangleleft$$

LIMITES ENVOLVENDO RADICIAIS

► **Exemplo 10** Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$$

Em ambos os casos, seria prático manipular a função de forma que as potências de x se tornassem potências de $1/x$. Isso pode ser obtido dividindo-se o numerador e o denominador por $|x|$ e usando o fato de que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Solução (a) Quando $x \rightarrow +\infty$, os valores de x tornam-se positivos; logo, podemos substituir $|x|$ por x onde for conveniente. Obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}}{\frac{3x-6}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-6}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3-\frac{6}{x} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{2}{x^2} \right)}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3-\frac{6}{x} \right)} = \frac{\sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \right) + \left(2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \right)}}{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \right) - \left(6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{1+(2 \cdot 0)}}{3-(6 \cdot 0)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Solução (b) Quando $x \rightarrow -\infty$, os valores de x tornam-se negativos; logo, podemos substituir $|x|$ por $-x$ onde for conveniente. Obtemos

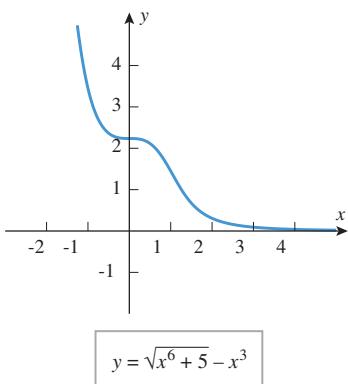
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}}{\frac{3x-6}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-6}{(-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{-3+\frac{6}{x}} = -\frac{1}{3} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

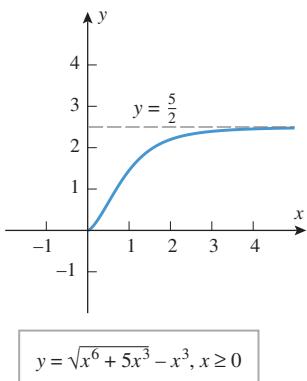
Segue, do Exemplo 10, que a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$$

tem uma assíntota dada por $y = \frac{1}{3}$ no sentido positivo e uma assíntota dada por $y = -\frac{1}{3}$ no sentido negativo. Confirme isso usando algum recurso gráfico.



(a)



(b)

Figura 1.3.6

Observamos na Seção 1.1 que as regras usuais da Álgebra não podem ser aplicadas aos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. A parte (b) do Exemplo 11 ilustra esse fato: os termos $\sqrt{x^6 + 5x^3}$ e x^3 tendem a $+\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$, mas sua diferença não tende a zero.

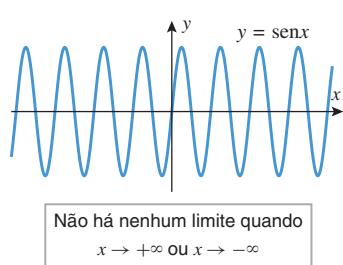


Figura 1.3.7

► Exemplo 11

Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3) \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5x^3} - x^3)$$

Solução Os gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x^6 + 5} - x^3$ e $g(x) = \sqrt{x^6 + 5x^3} - x^3$ com $x \geq 0$ aparecem na Figura 1.3.6. A partir deles, podemos conjecturar que os limites solicitados são 0 e $\frac{5}{2}$, respectivamente. Para confirmar isso, tratamos cada função como uma fração com um denominador igual a 1 e racionalizamos o numerador.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3) \left(\frac{\sqrt{x^6 + 5} + x^3}{\sqrt{x^6 + 5} + x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^6 + 5) - x^6}{\sqrt{x^6 + 5} + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^6 + 5} + x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x^3}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^6}} + 1} \quad \sqrt{x^6} = x^3 \text{ para } x > 0 \\ &= \frac{0}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5x^3} - x^3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5x^3} - x^3) \left(\frac{\sqrt{x^6 + 5x^3} + x^3}{\sqrt{x^6 + 5x^3} + x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^6 + 5x^3) - x^6}{\sqrt{x^6 + 5x^3} + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{\sqrt{x^6 + 5x^3} + x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^3}} + 1} \quad \sqrt{x^6} = x^3 \text{ para } x > 0 \\ &= \frac{5}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

■ COMPORTAMENTO FINAL DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Considere a função $f(x) = \sen x$, cujo gráfico aparece na Figura 1.3.7. Para essa função, os limites quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ deixam de existir, não porque $f(x)$ cresça ou decresça sem cota, mas porque esses valores variam entre -1 e 1 sem se aproximar de algum número real específico. Em geral, as funções trigonométricas deixam de possuir limites quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ por causa da periodicidade. Não existe notação para denotar esse tipo específico de comportamento.

Na Seção 0.5, mostramos que ambas as funções e^x e $\ln x$ crescem sem cota quando $x \rightarrow +\infty$ (Figuras 0.5.8 e 0.5.9). Assim, na notação de limite, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (20-21)$$

Para referência futura, também listamos os seguintes limites, que são consistentes com os gráficos das Figuras 1.3.8:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty \quad (22-23)$$

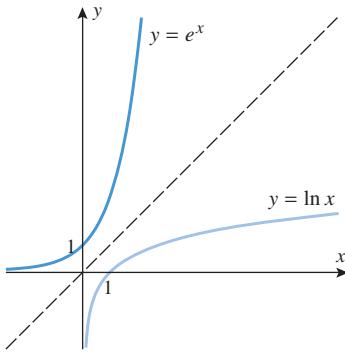


Figura 1.3.8

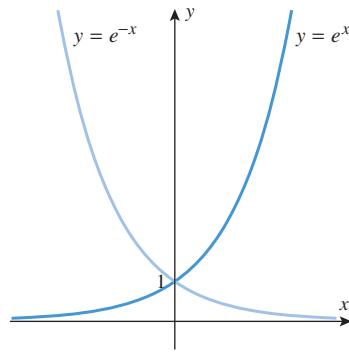


Figura 1.3.9

Finalmente, os limites seguintes podem ser deduzidos observando que o gráfico de $y = e^{-x}$ é a reflexão do gráfico de $y = e^x$ pelo eixo y (Figura 1.3.9).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

(24–25)

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 1.3 (Ver página 100 para respostas.)

1. Encontre os limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Encontre os limites que existirem.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x}{4x^2 - 3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x} = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3$$

encontre os limites que existirem.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3f(x) - g(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + 3g(x)}{3f(x) + 2g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{10 - f(x)g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Considere os gráficos de $1/x$, $\operatorname{sen} x$, $\ln x$, e^x e e^{-x} . Qual deles, se algum, tem uma assíntota horizontal?

EXERCÍCIOS 1.3

1-4 Em cada um destes exercícios, faça hipóteses razoáveis sobre o gráfico da função indicada fora da região esboçada. ■

1. Para a função g do gráfico abaixo, encontre

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

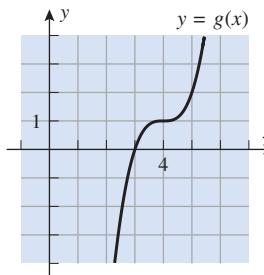


Figura Ex-1

2. Para a função ϕ do gráfico abaixo, encontre:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$.

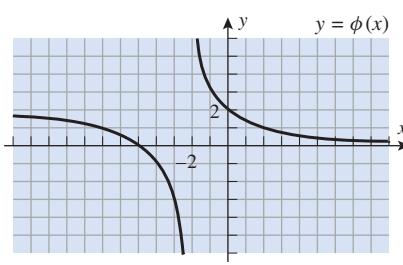


Figura Ex-2

3. Para a função ϕ do gráfico abaixo, encontre:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x).$$

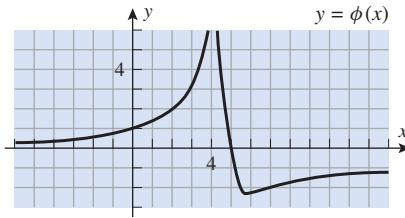


Figura Ex-3

4. Para a função G do gráfico a seguir, encontre:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x).$$

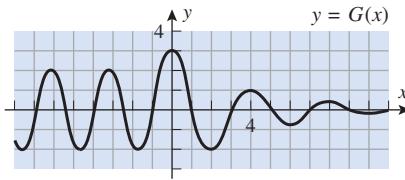


Figura Ex-4

5. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -5, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

encontre os limites que existirem. Se o limite não existir, explique por quê.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3g(x)]$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - 4g(x) + 1]$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)]$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]^2$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{g(x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3h(x) + 4}{x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6f(x)}{5f(x) + 3g(x)}$
6. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -6$$

encontre os limites que existirem. Se o limite não existir, explique por quê.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) - g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [6f(x) + 7g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 + g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{f(x)g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{g(x)}{x} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x)}{(2x+3)g(x)}$

7. (a) Complete a tabela e dê um palpite sobre o limite indicado.

$$f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$f(x)$						

- (b) Use a Figura 1.3.3 para encontrar o valor exato do limite na parte (a).

8. Complete a tabela e dê um palpite sobre o limite indicado.

$$f(x) = x^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

x	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$f(x)$						

9-40 Encontre os limites. ■

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x - 3x^5)$ 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 100x + 5)$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$ 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 - x}$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{2x - 5}$ 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 4x}{2x^2 + 3}$

15. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{3}{y + 4}$ 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 12}$

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ 18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 7}{3x^2 - x}$

19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - 6x^5}{x + 3}$ 20. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{5 - 2t^3}{t^2 + 1}$

21. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6 - t^3}{7t^3 + 3}$ 22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 4x^3}{1 - x^2 + 7x^3}$

23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2 + 3x - 5x^2}{1 + 8x^2}}$ 24. $\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}$

25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$ 26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$

27. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{2 - y}{\sqrt{7 + 6y^2}}$ 28. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2 - y}{\sqrt{7 + 6y^2}}$

29. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + x}}{x^2 - 8}$ 30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + x}}{x^2 - 8}$

31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$ 32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$

33. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$ 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

35. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 36. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

37. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2}{x^2} \right)$ 38. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{2}{x^2} \right)^{-x}$

39. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^x}$ 40. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x}$

41-44 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

41. Temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = (1+0)^{+\infty} = 1^{+\infty} = 1$.

42. Se $y = L$ for uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

43. Se $y = L$ for uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$, então é possível que o gráfico de f intersecte a reta $y = L$ uma infinidade de vezes.

44. Se uma função racional $p(x)/q(x)$ tem uma assíntota horizontal, então o grau de $p(x)$ deve ser igual ao grau de $q(x)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

45. Suponha que uma partícula esteja sendo acelerada por uma força constante. As duas curvas $v = n(t)$ e $v = e(t)$ da figura abaixo fornecem as curvas de velocidade instantânea versus tempo para a partícula conforme previstas, respectivamente, pela Física clássica e pela Teoria da Relatividade Especial. O parâmetro c representa a velocidade da luz. Usando a linguagem de limites, descreva as diferenças nas previsões em longo prazo das duas teorias.

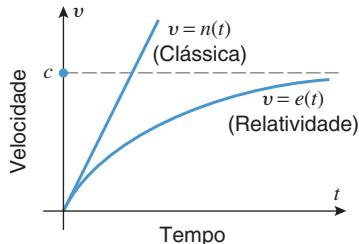


Figura Ex-45

46. Seja $T = f(t)$ a temperatura de uma batata cozida t minutos depois de retirada de um forno quente. A figura abaixo mostra a curva da temperatura versus tempo para a batata, onde r denota a temperatura ambiente.

- (a) Qual é o significado físico de $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$?
 (b) Qual é o significado físico de $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$?

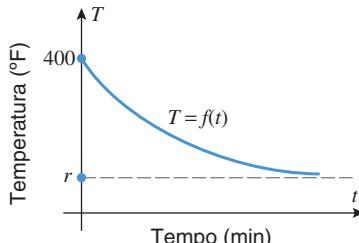


Figura Ex-46

47. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5, & x < 0 \\ \frac{3 - 5x^3}{1 + 4x + x^3}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

32. Seja

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2 + 3t}{5t^2 + 6}, & t < 1.000.000 \\ \frac{\sqrt{36t^2 - 100}}{5 - t}, & t > 1.000.000 \end{cases}$$

Encontre

$$(a) \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t)$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t).$$

49. Discuta os limites de $p(x) = (1 - x)^n$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ para valores inteiros positivos de n .

50. Em cada parte, encontre exemplos de polinômios $p(x)$ e $q(x)$ que satisfaçam a condição dada e tais que $p(x) \rightarrow +\infty$ e $q(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 1 \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} [p(x) - q(x)] = 3$$

51. (a) Alguma das funções trigonométricas $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, \sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$ tem assíntotas horizontais?
 (b) Alguma das funções trigonométricas tem assíntotas verticais? Onde?

52. Encontre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n}{d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m}$$

onde $c_n \neq 0$ e $d_m \neq 0$. [Sugestão: A resposta dependerá dos casos $m < n, m = n$ ou $m > n$.]

ENFOCANDO CONCEITOS

- 53-54 Nestes exercícios, desenvolvemos algumas versões do **princípio da substituição**, ferramenta útil no cálculo de limites. ■

53. (a) Explique por que podemos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2}$ fazendo a substituição $t = x^2$ e escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

- (b) Suponha que $g(x) \rightarrow +\infty$ com $x \rightarrow +\infty$. Dada qualquer função $f(x)$, explique por que podemos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[g(x)]$ fazendo a substituição $t = g(x)$ e escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f[g(x)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

(Aqui, a igualdade significa que os dois limites existem e são iguais.)

- (c) Por que o resultado da parte (b) permanece válido se todos os $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ forem substituídos por um dos seguintes $\lim_{x \rightarrow -\infty}, \lim_{x \rightarrow c}, \lim_{x \rightarrow c^-}$ ou $\lim_{x \rightarrow c^+}$?

54. (a) Explique por que podemos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$ fazendo a substituição $t = -x^2$ e escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

- (b) Suponha que $g(x) \rightarrow -\infty$ com $x \rightarrow +\infty$. Dada qualquer função $f(x)$, explique por que podemos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[g(x)]$ fazendo a substituição $t = g(x)$ e escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f[g(x)] = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$$

(Aqui, a igualdade significa que ou ambos os limites existem e são iguais ou nenhum dos dois limites existe.)

- (c) Por que o resultado da parte (b) permanece válido se todos os $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ forem substituídos por um dos seguintes $\lim_{x \rightarrow -\infty}$, $\lim_{x \rightarrow c^-}$, $\lim_{x \rightarrow c^+}$ ou $\lim_{x \rightarrow c}$?

55-62 Encontre os limites usando uma substituição apropriada.

55. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$

56. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$

57. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\cos \sec x}$

58. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\cos \sec x}$

59. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$ [Sugestão: $t = \ln x$]

60. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 - 1) - \ln(x + 1)]$ [Sugestão: $t = x - 1$]

61. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$ [Sugestão: $t = -x$]

62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ [Sugestão: $t = x/2$]

63. Seja $f(x) = b^x$, em que $0 < b$. Use o princípio da substituição para confirmar o comportamento assintótico dessa função ilustrado na Figura 0.5.1. [Sugestão: $f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{(\ln b)x}$]

64. Prove que $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ completando as partes (a) e (b).
- Use a Equação (7) e a substituição $t = 1/x$ para provar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$.
 - Use a Equação (8) e a substituição $t = 1/x$ para provar que $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = e$.

65. Suponha que a velocidade v (em pés/s) de um paraquedista t segundos depois de saltar de um avião seja dada pela equação $v = 190(1 - e^{-0.168t})$.
- Faça o gráfico de v versus t .
 - Calculando um limite apropriado, mostre que o gráfico de v versus t tem uma assíntota horizontal $v = c$ com uma constante c apropriada.
 - Qual é o significado físico da constante c em (b)?

66. A população p dos EUA no ano t pode ser modelada (em milhões) pela função

$$p(t) = \frac{525}{1 + 1,1e^{-0,02225(t-1990)}}$$

- (a) Com base nesse modelo, qual foi a população dos EUA em 1990?

- (b) Faça um gráfico de p versus t para o período de 200 anos que vai de 1950 até 2150.
- (c) Calculando um limite apropriado, mostre que o gráfico de p versus t tem uma assíntota horizontal $p = c$ com uma constante c apropriada.
- (d) Qual é o significado da constante c em (b) para a previsão da população por meio desse modelo?

67. (a) Calcule os valores (aproximados) dos termos da sequência $1,01^{101}, 1,001^{1001}, 1,0001^{10001}, 1,00001^{100001}, 1,000001^{1000001}, 1,0000001^{10000001} \dots$

De qual número esses termos aparentemente se aproximam?

- (b) Use a Equação (7) para confirmar sua resposta na parte (a).
(c) Seja $1 \leq a \leq 9$ um inteiro positivo. Qual é o número que é aproximado mais e mais pelos termos da sequência a seguir?

$$1,01^{a0a}, 1,001^{a00a}, 1,0001^{a000a}, 1,00001^{a0000a}, 1,000001^{a00000a}, 1,0000001^{a000000a} \dots$$

(As potências são inteiros positivos que começam e terminam com o dígito a e têm zeros nas demais posições.)

68. Seja $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

- (a) Prove a identidade

$$f(-x) = \frac{x}{x-1} \cdot f(x-1)$$

- (b) Use a Equação (7) e a identidade da parte (a) para provar a Equação (8).

- 69-73 A noção de assíntota pode ser estendida para incluir curvas não necessariamente retas. Especificamente, dizemos que as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são **assintóticas quando $x \rightarrow +\infty$** se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

e **assintóticas quando $x \rightarrow -\infty$** se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

Nesses exercícios, determine uma função $g(x)$ mais simples, tal que $y = f(x)$ seja assintótica a $y = g(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$ e identifique todas as assíntotas verticais.

69. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ [Sugestão: Divida $x^2 - 2$ por $x - 2$]

70. $f(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x}$

71. $f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 + x - 1}{x - 3}$

72. $f(x) = \frac{x^5 - x^3 + 3}{x^2 - 1}$

73. $f(x) = \sin x + \frac{1}{x-1}$

74. **Texto** Em alguns modelos de aprender a executar alguma atividade (por exemplo, malabarismo), supõe-se que o nível de competência de um indivíduo cresça com a prática, mas não pode crescer indefinidamente. Como os conceitos desta seção são aplicáveis a um modelo desses?

- 75. Texto** Em alguns modelos populacionais, supõe-se que um dado sistema ecológico possui uma **capacidade de tolerância** L . As populações maiores do que a capacidade de tolerância tendem a declinar em direção a L , enquanto que as menores do que

a capacidade de tolerância tendem a aumentar em direção a L . Explique por que essas hipóteses são razoáveis e discuta como os conceitos desta seção são aplicáveis a um modelo desses.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.3

1. (a) $+\infty$ (b) 5 (c) $-\infty$ (d) 0
2. (a) $\frac{1}{2}$ (b) não existe (c) e
3. (a) 9 (b) $-\frac{2}{3}$ (c) não existe (d) 4
4. $1/x$, e^x e e^{-x} têm, cada uma, uma assíntota horizontal.

1.4 LIMITES (DISCUTIDOS MAIS RIGOROSAMENTE)

Nas seções anteriores deste capítulo, ocupamo-nos com a descoberta de valores de limites, tanto pela amostragem de valores selecionados de x como pela aplicação de teoremas de limites que foram enunciados sem prova. Nossa objetivo principal nesta seção é definir precisamente a noção de limite, tornando possível, assim, estabelecer limites com exatidão e provar teoremas sobre limites. Com isso, também estaremos obtendo uma compreensão mais profunda de algumas das propriedades mais sutis das funções.

MOTIVAÇÃO PARA A DEFINIÇÃO DE LIMITES BILATERAIS

A afirmação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ pode ser interpretada informalmente como significando que o valor de $f(x)$ pode ser tomado tão próximo quanto queiramos do número real L , bastando para isso tomar valores de x suficientemente próximos de a . Nossa objetivo é tornar matematicamente precisas as frases “tão próximo quanto queiramos de L ” e “suficientemente próximo de a ”.

Para isso, considere a função f esboçada na Figura 1.4.1a, para a qual $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow a$. Para simplificar a visualização, desenhamos o gráfico de f como sendo crescente em um intervalo aberto contendo a e deliberadamente colocamos um buraco no gráfico sobre o ponto $x = a$ para enfatizar que f não precisa estar definida em $x = a$ para ter um limite nesse ponto.

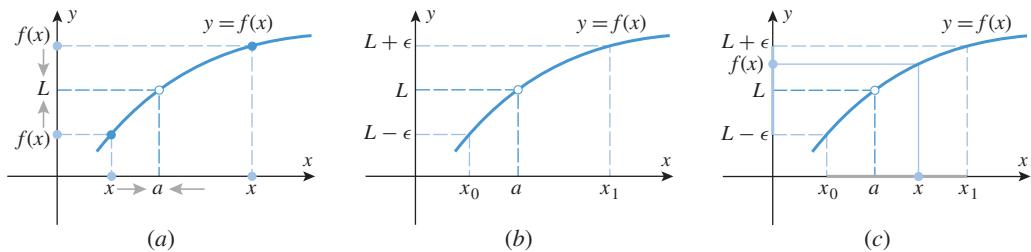


Figura 1.4.1

Em seguida, escolhamos qualquer número positivo ϵ e perguntarmos quão próximo deve estar x de a para garantir que os valores de $f(x)$ caiam a uma distância inferior a ϵ de L . Podemos responder a isso geometricamente traçando retas horizontais a partir dos pontos $L + \epsilon$ e $L - \epsilon$ do eixo y até encontrarmos a curva $y = f(x)$ e, então, traçar retas verticais a partir desses pontos da curva até o eixo x (Figura 1.4.1b). Como indicamos na figura, sejam x_0 e x_1 os dois pontos em que essas retas cortam o eixo x .

Agora, imaginemos que x se aproxime mais e mais de a (de qualquer um dos dois lados). A partir de um certo instante, x estará dentro do intervalo (x_0, x_1) , que está destacado na Figura 1.4.1c; quando isso ocorrer, o valor de $f(x)$ cairá entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, que determinam um intervalo destacado na figura. Assim, podemos concluir:

Se $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow a$, então para qualquer número positivo ϵ podemos encontrar um intervalo aberto (x_0, x_1) no eixo x que contém o ponto a e que tem a propriedade de que, para cada x nesse intervalo (exceto possivelmente para $x = a$), o valor de $f(x)$ está entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$.

O que é importante sobre esse resultado é que ele é válido independentemente de quão pequeno se tomar ϵ . Contudo, tornar ϵ cada vez menor força $f(x)$ a ficar cada vez mais próximo de L , que é precisamente o conceito que estávamos tentando captar matematicamente.

Observe que, na Figura 1.4.1, o intervalo (x_0, x_1) se estende mais para o lado direito de a do que para o lado esquerdo. Contudo, muitas vezes é preferível dispor de um intervalo que se estenda a mesma distância para ambos os lados de a . Para isso, escolhamos qualquer número positivo δ que seja menor do que $x_1 - a$ e $a - x_0$ e consideremos o intervalo

$$(a - \delta, a + \delta)$$

Esse intervalo se estende à mesma distância δ de ambos os lados de a e está dentro do intervalo (x_0, x_1) (Figura 1.4.2). Além disso, a condição

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \quad (1)$$

vale com qualquer x desse intervalo (exceto, possivelmente, $x = a$), já que essa condição vale no intervalo maior (x_0, x_1) .

Como (1) pode ser expressa como

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

e a condição de x estar situado no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, pode ser expressa como

$$0 < |x - a| < \delta$$

somos levados à definição precisa de limite bilateral a seguir.

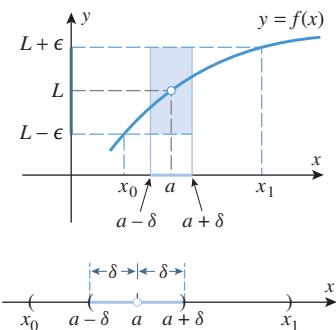


Figura 1.4.2

As definições de limites laterais exigem adaptações mínimas na Definição 1.4.1. Por exemplo, para um limite pela direita, basta supor que $f(x)$ esteja definida em um intervalo (a, b) que se estende à direita de a e que a condição ϵ seja satisfeita por qualquer x do intervalo $a < x < a + \delta$ que se estende à direita de a . Uma adaptação semelhante deve ser feita para limites pela esquerda. (Ver Exercício 27.)

1.4.1 DEFINIÇÃO DE LIMITE Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto que contenha o número a , com a possível exceção de que $f(x)$ não precisa estar definida em a . Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta$$

Essa definição, que é atribuída ao matemático alemão Karl Weierstrass e é conhecida como a definição “épsilon-delta” de limite bilateral, estabelece a transição de um conceito informal de limite para uma definição precisa. Especificamente, à frase informal “tão próximo quanto queiramos de L ” atribuímos um sentido quantitativo pela nossa habilidade de escolher arbitrariamente o número positivo ϵ , e a frase “suficientemente próximo de a ” é quantificada pelo número positivo δ .

Nas seções precedentes, ilustramos vários métodos numéricos e gráficos para adivinhar limites. Agora que temos uma definição precisa para trabalhar, podemos confirmar, de

fato, a validade daqueles palpites com prova matemática. Aqui está um exemplo típico de uma tal prova.

► **Exemplo 1** Use a Definição 1.4.1 para provar que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$.

Solução Devemos mostrar que, dado qualquer número positivo ϵ , podemos encontrar um número positivo δ tal que

$$\left| \underbrace{(3x - 5)}_{f(x)} - \underbrace{1}_L \right| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad (2)$$

Há duas coisas a fazer. Primeiro, devemos *descobrir* um valor de δ que sustente essa afirmação e, então, *provar* que a afirmação é válida para aquele δ . Para a primeira parte, começamos por simplificar e escrever (2) como

$$|3x - 6| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

A seguir, vamos reescrever essa afirmação em uma forma que irá facilitar a descoberta de um δ apropriado:

$$\begin{aligned} 3|x - 2| &< \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta \\ |x - 2| &< \epsilon/3 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta \end{aligned} \quad (3)$$

Deveria ser evidente, por si só, que essa última afirmação está assegurada quando $\delta = \epsilon/3$, a qual completa a parte da descoberta de nosso trabalho. Agora, precisamos provar que (2) é válida para essa escolha de δ . Porém, a afirmativa (2) é equivalente à (3), e (3) se verifica com $\delta = \epsilon/3$, portanto, (2) se verifica também com $\delta = \epsilon/3$. Isso prova que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$. ◀

Este exemplo ilustra a forma geral da prova de um limite: *admitamos* que nos é dado um número positivo ϵ , e tentamos *provar* ser possível encontrar um número positivo δ , tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad (4)$$

Isso é feito, em primeiro lugar, descobrindo-se δ e, então, provando que o δ descoberto funciona. Uma vez que o argumento tem de ser bastante geral, a fim de valer para todos os valores de ϵ positivos, a quantidade δ deve ser expressa como uma função de ϵ . No Exemplo 1, encontramos a função $\delta = \epsilon/3$ por alguma álgebra simples; contudo, a maioria das provas de limite requer um pouco mais de engenhosidade lógica e algébrica. Logo, se o leitor achar nossa discussão resultante das provas “ ϵ - δ ” desafiadora, não venha a se desencorajar; os conceitos e as técnicas têm dificuldades intrínsecas. Com efeito, o entendimento exato de limites iludiu as melhores mentes matemáticas por mais de 150 anos após a descoberta dos conceitos básicos de Cálculo.



Karl Weierstrass (1815-1897) Weierstrass, filho de um oficial alfandegário, nasceu em Ostenfelde, Alemanha. Quando jovem, Weierstrass mostrou notável habilidade em línguas e Matemática. Porém, pressionado pelo pai dominador, entrou em um programa de leis e comércio da Universidade de Bonn. Para desgosto da família, o teimoso jovem concentrou-se em esgrima e beber cerveja. Quatro anos mais tarde, voltou para casa sem nenhum título. Em 1839, entrou na Academia de Münster para obter um título em ensino médio e lá conheceu e estudou sob a orientação de um excelente matemático, Christof Gudermann. As ideias desse matemático tiveram grande influência no trabalho de Weierstrass. Após receber seu diploma de licenciatura, ele passou os 15 anos seguintes lecionando alemão, Geografia e Matemática em uma escola de ensino médio. Além disso, ensinava caligrafia para crianças. Durante esse período, muito do trabalho matemático de Weierstrass foi ignorado, pois ele era um professor de

ensino médio, e não universitário. Então, em 1854, ele publicou um artigo da maior importância, causando sensação no mundo matemático e dando-lhe, da noite para o dia, fama internacional. Ele recebeu imediatamente um doutorado honorário na Universidade de Königsberg e começou uma nova carreira universitária, lecionando na Universidade de Berlim em 1856. Em 1859, o esforço dispendido nas pesquisas matemáticas causou-lhe um colapso nervoso temporário e levou-o a surtos de vertigens que o acompanharam pelo resto de sua vida. Weierstrass era um professor brilhante, e suas aulas estavam sempre lotadas. Apesar de sua fama, ele nunca perdeu seus hábitos de bebedor de cerveja, estando sempre na companhia de estudantes, brilhantes ou não. Weierstrass foi reconhecido como um grande nome mundial em Análise Matemática. Ele e seus estudantes abriram caminho para as escolas modernas de Análise Matemática.

[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Karl_Weierstrass.jpg]

► **Exemplo 2** Prove que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Solução Observe que o domínio de \sqrt{x} é $0 \leq x$, portanto é válido discutir o limite com $x \rightarrow 0^+$. Devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - 0| < \epsilon \quad \text{se } 0 < x - 0 < \delta$$

ou, simplificando:

$$\sqrt{x} < \epsilon \quad \text{se } 0 < x < \delta \quad (5)$$

O limite pela esquerda e o limite bilateral no Exemplo 2 não existem em $x = 0$ porque o domínio de \sqrt{x} não inclui números à esquerda de 0.

No entanto, elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade $\sqrt{x} < \epsilon$, podemos reescrever (4) como

$$x < \epsilon^2 \quad \text{se } 0 < x < \delta \quad (6)$$

Deveria ser evidente, por si só, que (6) é verdadeiro se $\delta = \epsilon^2$; e uma vez que (6) é a reformulação de (5), mostramos que (5) é válida com $\delta = \epsilon^2$. Isso prova que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. ◀

■ O VALOR DE δ NÃO É ÚNICO

Preparando o próximo exemplo, notamos que o valor de δ na Definição 1.4.1 não é único; uma vez encontrado um valor de δ que preencha as exigências da definição, qualquer número positivo δ_1 menor também cumprirá aquelas exigências. Isto é, se for verdade que

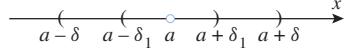
$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta$$

então também será verdade que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta_1$$

Isso porque $\{x : 0 < |x - a| < \delta_1\}$ é um subconjunto de $\{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ (Figura 1.4.3) e, portanto, se $|f(x) - L| < \epsilon$ estiver satisfeita para todo x no intervalo maior, então estará automaticamente satisfeita para todo x no subconjunto. Logo, no Exemplo 1, no qual usamos $\delta = \epsilon/3$, poderíamos ter usado valores menores de δ , como $\delta = \epsilon/4$, $\delta = \epsilon/5$ ou $\delta = \epsilon/6$.

Figura 1.4.3



Caso o leitor se pergunte como foi obtida a restrição $\delta \leq 1$, em vez de $\delta \leq 5$ ou $\delta \leq \frac{1}{2}$, por exemplo, a resposta é simples: 1 é somente uma escolha conveniente, pois qualquer restrição da forma $\delta \leq c$ teria funcionado igualmente bem.

► **Exemplo 3** Prove que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Solução Devemos mostrar que, dado qualquer número positivo, conseguimos encontrar um número positivo δ tal que

$$|x^2 - 9| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \quad (7)$$

Como $|x - 3|$ ocorre no lado direito dessa “afirmativa se”, será útil fatorar o lado esquerdo para introduzir um fator $|x - 3|$. Isso resulta na seguinte forma alternativa de (7):

$$|x + 3||x - 3| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \quad (8)$$

Queremos limitar o fator $|x + 3|$. Se soubéssemos, por exemplo, que $\delta \leq 1$, então teríamos $-1 < x - 3 < 1$, portanto, $5 < x + 3 < 7$ e, consequentemente, $|x + 3| < 7$. Assim, se $\delta \leq 1$ e $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|x + 3||x - 3| < 7\delta$$

Segue que (8) estará satisfeita por qualquer δ positivo tal que $\delta \leq 1$ e $7\delta < \epsilon$. Isso pode ser obtido tomando δ como o mínimo dos números 1 e $\epsilon/7$, que costumamos denotar por $\delta = \min(1, \epsilon/7)$. Isso prova que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$. ◀

■ LIMITES QUANDO $x \rightarrow \pm\infty$

Na Seção 1.3, discutimos os limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

de um ponto de vista intuitivo. Interpretamos a primeira afirmação como significando que os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto querímos de L quando x cresce sem parar; interpretamos a segunda afirmação como significando que os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto querímos de L quando x decresce sem parar. Essas ideias são captadas mais precisamente nas definições a seguir e ilustradas na Figura 1.4.4.

1.4.2 DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto infinito que se estende no sentido positivo do eixo x . Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, houver um correspondente número positivo N tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se } x > N$$

1.4.3 DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto infinito que se estende no sentido negativo do eixo x . Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, houver um correspondente número negativo N , tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se } x < N$$

Para ver como essas definições se relacionam com os nossos conceitos informais desses limites, suponha que $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow +\infty$, e para um dado ϵ , seja N o número positivo descrito na Definição 1.4.2. Se for permitido a x crescer sem parar, então x acabará entrando no intervalo $(N, +\infty)$, o qual está marcado mais claro na Figura 1.4.4a; quando isso acontecer, os valores de $f(x)$ cairão entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, marcado mais escuro na figura. Uma vez que isso é válido para todos os valores de ϵ (não importa quão pequeno), podemos forçar os valores de $f(x)$ a ficar tão perto de L quanto quisermos, fazendo N suficientemente grande. Isso está de acordo com o nosso conceito informal desse limite. Analogamente, a Figura 1.4.4b ilustra a Definição 1.4.3.

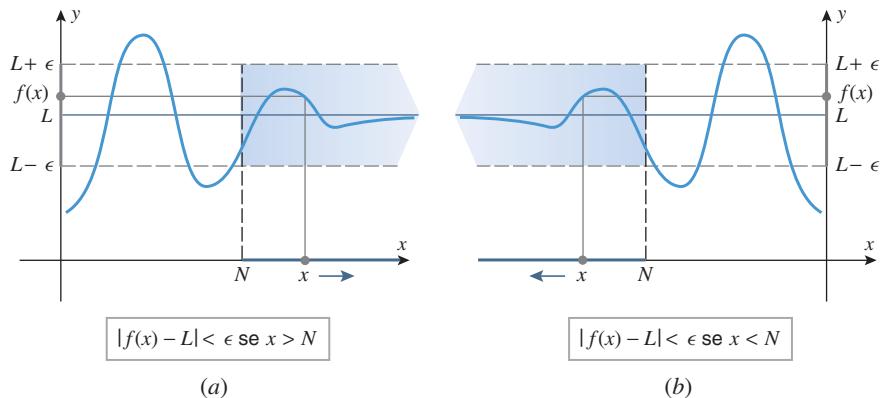


Figura 1.4.4

► **Exemplo 4** Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Solução Aplicando-se a Definição 1.4.2 com $f(x) = 1/x$ e $L = 0$, devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$ conseguimos encontrar um número $N > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{se } x > N \quad (9)$$

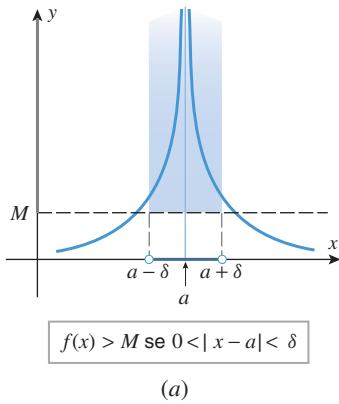
Como $x \rightarrow +\infty$, podemos supor que $x > 0$. Logo, podemos eliminar os valores absolutos nessa afirmação e a reescrever como

$$\frac{1}{x} < \epsilon \quad \text{se } x > N$$

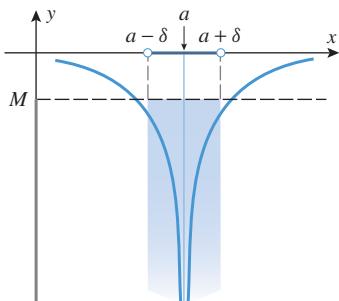
ou, tomado os recíprocos,

$$x > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{se } x > N \quad (10)$$

É evidente, por si só, que $N = 1/\epsilon$ satisfaz essa exigência, e como (10) é equivalente a (9) se $x > 0$, a prova está completa. \blacktriangleleft



(a)



(b)

Figura 1.4.5

Como o leitor definiria esses limites?

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

LIMITES INFINITOS

Na Seção 1.1, discutimos, do ponto de vista intuitivo, os seguinte tipos de limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad (13)$$

Lembre que cada uma dessas expressões descreve uma maneira particular na qual o limite não existe. O $+\infty$ indica que o limite não existe porque $f(x)$ cresce sem cota, e o $-\infty$ indica que o limite não existe porque $f(x)$ decresce sem cota. Essas ideias estão captadas mais precisamente nas definições a seguir e ilustradas na Figura 1.4.5.

1.4.4 DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto contendo a , exceto que $f(x)$ não precisa estar definida em a . Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

se, dado qualquer número positivo M , pudermos encontrar um número $\delta > 0$, tal que $f(x)$ satisfaz

$$f(x) > M \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta$$

1.4.5 DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto contendo a , com a exceção de que $f(x)$ não precisa estar definida em a . Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

se, dado qualquer número negativo M , pudermos encontrar um número $\delta > 0$, tal que $f(x)$ satisfaz

$$f(x) < M \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta$$

Para ver como essas definições se relacionam com os nossos conceitos informais desses limites, suponha que $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow a$ e que, para um dado M , seja δ o número positivo correspondente, descrito na Definição 1.4.4. A seguir, imagine que x

aproxima-se cada vez mais de a (por qualquer lado). Então, x entrará no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, marcado mais claro na Figura 1.4.5a; quando isso acontecer, os valores de $f(x)$ serão maiores do que M , marcado mais escuro. Uma vez que isso é válido para qualquer valor positivo M (não importa quão grande), podemos forçar os valores de $f(x)$ para que sejam tão grandes quanto quisermos, fazendo-se x suficientemente próximo de a . Isso está de acordo com o nosso conceito informal desse limite. Analogamente, a Figura 1.4.5b ilustra a Definição 1.4.5.

Exemplo 5 Prove que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Solução Aplicando a Definição 1.4.4 com $f(x) = 1/x^2$ e $a = 0$, devemos mostrar que, dado um número $M > 0$, conseguimos encontrar um número $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \text{se} \quad 0 < |x - 0| < \delta \quad (14)$$

ou, tomado-se o recíproco e simplificando,

$$x^2 < \frac{1}{M} \quad \text{se} \quad 0 < |x| < \delta \quad (15)$$

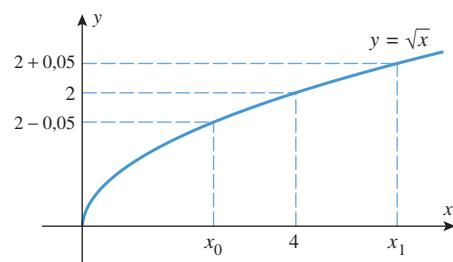
No entanto, $x^2 < 1/M$ se $|x| < 1/\sqrt{M}$, logo $\delta = 1/\sqrt{M}$ satisfaz (15). Uma vez que (14) é equivalente a (15), a prova está completa. \blacktriangleleft

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.4 (Ver página 109 para respostas.)

- A definição de limite bilateral afirma: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, dado qualquer número _____, existir um número _____, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se _____.
- Suponha que $f(x)$ seja uma função tal que, dado $\epsilon > 0$, a condição $0 < |x - 1| < \epsilon/2$ garante que $|f(x) - 5| < \epsilon$. Qual é o limite que decorre dessa propriedade?
- Suponha que ϵ seja um número positivo qualquer. Encontre o maior valor de δ , tal que $|5x - 10| < \epsilon$ se $0 < |x - 2| < \delta$.
- A definição de limite em $+\infty$ afirma: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ se, dado qualquer número _____, existir um número positivo _____, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se _____.
- Encontre o menor número positivo N , tal que, para cada $x > N$, o valor de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ está a menos de 0,01 unidade de 0.

EXERCÍCIOS 1.4 Recurso Gráfico

- (a) Encontre o maior intervalo aberto, centrado na origem do eixo x , tal que, para cada ponto x no intervalo, o valor da função $f(x) = x + 2$ não esteja mais longe do que 0,1 unidade do número $f(0) = 2$.
(b) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 3$, tal que, para cada ponto x no intervalo, o valor da função $f(x) = 4x - 5$ não esteja mais longe do que 0,01 unidade do número $f(3) = 7$.
(c) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 4$, tal que, para cada ponto x do intervalo, o valor da função $f(x) = x^2$ não esteja mais longe do que 0,001 unidade do número $f(4) = 16$.
- Em cada parte, encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 0$, tal que, para cada ponto x do intervalo, o valor da função $f(x) = 2x + 3$ não esteja mais longe do que ϵ unidades do número $f(0) = 3$.
 - $\epsilon = 0,1$
 - $\epsilon = 0,01$
 - $\epsilon = 0,0012$
- Encontre os valores de x_0 e x_1 na figura anexa.
Encontre um número positivo δ , tal que $|\sqrt{x} - 2| < 0,05$ se $0 < |x - 4| < \delta$.
- (a) Encontre os valores de x_0 e x_1 na figura abaixo.
(b) Encontre um número positivo δ tal que $|(1/x) - 1| < 0,1$ se $0 < |x - 1| < \delta$.



Fora de escala

Figura Ex-3

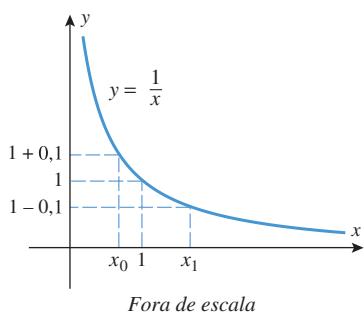


Figura Ex-4

5. Gere o gráfico de $f(x) = x^3 - 4x + 5$ com um recurso gráfico computacional e use-o para encontrar um número δ , tal que $|f(x) - 2| < 0,05$ se $0 < |x - 1| < \delta$. [Sugestão: Mostre que a desigualdade $|f(x) - 2| < 0,05$ pode ser reescrita como $1,95 < x^3 - 4x + 5 < 2,05$ e obtenha uma estimativa dos valores de x para os quais $x^3 - 4x + 5 = 1,95$ e $x^3 - 4x + 5 = 2,05$.]
6. Use o método do Exercício 5 para encontrar um número δ tal que $|\sqrt{5x+1} - 4| < 0,5$ se $0 < |x - 3| < \delta$.
7. Seja $f(x) = x + \sqrt{x}$ com $L = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e tome $\epsilon = 0,2$. Use um recurso gráfico e sua operação de traçar retas para encontrar um número positivo δ , tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - 1| < \delta$.
8. Seja $f(x) = (\operatorname{sen} 2x)/x$ e use um recurso gráfico para conjecturar o valor de $L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Depois tome $\epsilon = 0,1$ e use o recurso gráfico e sua operação de traçar retas para encontrar um número positivo δ , tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x| < \delta$.

9-16 São dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f no ponto a . Encontre um número δ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$. ■

$$9. \lim_{x \rightarrow 4} 2x = 8; \epsilon = 0,1 \quad 10. \lim_{x \rightarrow 3} (5x - 2) = 13; \epsilon = 0,01$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6; \epsilon = 0,05$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = -2; \epsilon = 0,05$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8; \epsilon = 0,001$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2; \epsilon = 0,001$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}; \epsilon = 0,05 \quad 16. \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0; \epsilon = 0,05$$

17-26 Use a Definição 1.4.1 para provar que o limite dado está correto. ■

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 4} (x + 2) = 6$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 5} 3x = 15$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} (7x + 5) = -2$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x} = 1$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 9 - 2x, & x \neq 2 \\ 49, & x = 2 \end{cases}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 9 - 2x, & x < 2 \\ 3x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

ENFOCANDO CONCEITOS

27. Forneça definições rigorosas de $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

28. Considere a afirmação $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$.

- (a) Usando a Definição 1.4.1, escreva por extenso precisamente o que essa afirmação de limites significa.

- (b) Explique por que sua resposta da parte (a) mostra que

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0 \text{ se, e só se, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

29. (a) Mostre que

$$|(3x^2 + 2x - 20) - 300| = |3x + 32| \cdot |x - 10|$$

- (b) Encontre um número que seja maior do que $|3x + 32|$ para cada x que satisfaça $|x - 10| < 1$.

- (c) Preencha as lacunas para completar a prova de que

$$\lim_{x \rightarrow 10} [3x^2 + 2x - 20] = 300$$

Suponha que $\epsilon > 0$. Tome $\delta = \min(1, \underline{\hspace{2cm}})$ e suponha que $0 < |x - 10| < \delta$. Então

$$\begin{aligned} |(3x^2 + 2x - 20) - 300| &= |3x + 32| \cdot |x - 10| \\ &< \underline{\hspace{2cm}} \cdot |x - 10| \\ &< \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

30. (a) Mostre que

$$\left| \frac{28}{3x + 1} - 4 \right| = \left| \frac{12}{3x + 1} \right| \cdot |x - 2|$$

- (b) Será $|12/(3x + 1)|$ limitado se $|x - 2| < 4$? Se não for, explique; se for, encontre uma cota.

- (c) Será $|12/(3x + 1)|$ limitado se $|x - 2| < 1$? Se não for, explique; se for, encontre uma cota.

- (d) Preencha as lacunas para completar a prova de que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{28}{3x + 1} \right] = 4$$

Suponha que $\epsilon > 0$. Tome $\delta = \min(1, \underline{\hspace{2cm}})$ e suponha que $0 < |x - 2| < \delta$. Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{28}{3x + 1} - 4 \right| &= \left| \frac{12}{3x + 1} \right| \cdot |x - 2| \\ &< \underline{\hspace{2cm}} \cdot |x - 2| \\ &< \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

31-36 Use a Definição 1.4.1 para provar que o limite dado está correto. Em cada caso, para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, fatore $|f(x) - L|$ como

$$|f(x) - L| = |\text{“alguma coisa”}| \cdot |x - a|$$

e, então, controle o tamanho de “alguma coisa” por meio de restrições no tamanho de δ . ■

31. $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$ [Sugestão: Suponha que $\delta \leq 1$.]
32. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x) = 12$ [Sugestão: Suponha que $\delta \leq 1$.]
33. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+1} = -1$
34. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x+3}{x} = 8$
35. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$
36. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$
37. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{com } x \text{ racional} \\ x, & \text{com } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Use a Definição 1.4.1 para provar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

38. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{com } x \text{ racional} \\ 1, & \text{com } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Use a Definição 1.4.1 para provar que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. [Sugestão: Suponha que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ e aplique a Definição 1.4.1 com $\epsilon = \frac{1}{2}$ para concluir que $|1 - L| < \frac{1}{2}$ e $|L| = |0 - L| < \frac{1}{2}$. Então, mostre que $1 \leq |1 - L| + |L|$ e obtenha uma contradição.]

39. (a) Encontre o menor número positivo N , tal que, para cada ponto x no intervalo $(N, +\infty)$, o valor da função $f(x) = 1/x^2$ não esteja mais longe do que 0,1 unidade de $L = 0$.
 (b) Encontre o menor número positivo N , tal que, para cada ponto x no intervalo $(N, +\infty)$, o valor da função $f(x) = x/(x+1)$ não esteja mais longe do que 0,01 unidade de $L = 1$.
 (c) Encontre o maior número negativo N , tal que, para cada ponto x no intervalo $(-\infty, N)$, o valor da função $f(x) = 1/x^3$ não esteja mais longe do que 0,001 unidade de $L = 0$.
 (d) Encontre o maior número negativo N , tal que, para cada ponto x no intervalo $(-\infty, N)$, o valor da função $f(x) = x/(x+1)$ não esteja mais longe do que 0,01 unidade de $L = 1$.
40. Em cada parte, encontre o menor número positivo N , tal que, para cada ponto x no intervalo $(N, +\infty)$, a função $f(x) = 1/x^3$ não esteja mais longe do que ϵ unidades do número $L = 0$.
 (a) $\epsilon = 0,1$ (b) $\epsilon = 0,01$ (c) $\epsilon = 0,001$

41. (a) Encontre os valores de x_1 e x_2 na figura a seguir.
 (b) Encontre um número positivo N , tal que

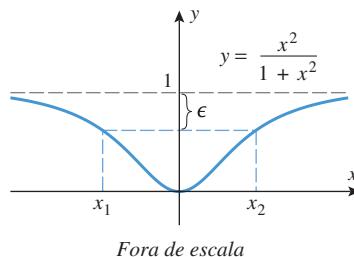
$$\left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| < \epsilon$$

com $x > N$.

- (c) Encontre um número negativo N , tal que

$$\left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| < \epsilon$$

com $x < N$.



Fora de escala

Figura Ex-41

42. (a) Encontre os valores de x_1 e x_2 na figura abaixo.
 (b) Encontre um número positivo N , tal que

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right| < \epsilon$$

com $x > N$.

- (c) Encontre um número negativo N , tal que

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right| < \epsilon$$

com $x < N$.

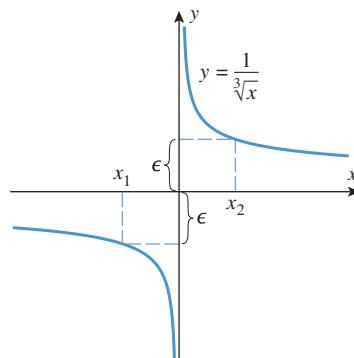


Figura Ex-42

- 43-46 São dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f em $+\infty$. Encontre um número positivo N tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $x > N$. ■

43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \epsilon = 0,01$

44. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0; \epsilon = 0,005$

45. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1; \epsilon = 0,001$

46. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{2x+5} = 2; \epsilon = 0,1$

- 47-50 São dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f em $-\infty$. Encontre um número negativo N tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $x < N$. ■

47. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0; \epsilon = 0,005$

48. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \epsilon = 0,01$

49. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 1}{2x + 5} = 2; \epsilon = 0,1$

50. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + 1} = 1; \epsilon = 0,001$

51-56 Use as Definições 1.4.2 ou 1.4.3 para provar que o limite dado está correto. ■

51. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0$

53. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 1}{2x + 5} = 2$

54. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$

55. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = 2$

56. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

57. (a) Encontre o maior intervalo aberto centrado na origem do eixo x , tal que, para cada ponto x no intervalo, diferente do centro, o valor de $f(x) = 1/x^2$ é maior do que 100.
 (b) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 1$, tal que, para cada ponto x do intervalo, diferente de 1, o valor da função $f(x) = 1/|x - 1|$ é maior do que 1.000.
 (c) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 3$, tal que, para cada ponto x do intervalo, diferente de 3, o valor da função $f(x) = -1/(x - 3)^2$ é menor do que -1.000 .
 (d) Encontre o maior intervalo aberto, centrado na origem do eixo x , tal que, para cada ponto x do intervalo, diferente de zero, o valor de $f(x) = -1/x^4$ é menor do que -10.000 .

58. Em cada parte, encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 1$, tal que, para cada ponto x do intervalo diferente do centro, o valor de $f(x) = 1/(x - 1)^2$ é maior do que M .
 (a) $M = 10$ (b) $M = 1.000$ (c) $M = 100.000$

59-64 Use as Definições 1.4.4 ou 1.4.5 para provar que o limite dado está correto. ■

59. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2} = +\infty$

60. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x - 3)^2} = -\infty$

61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

62. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$

63. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^4} \right) = -\infty$

64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$

65-70 Use as definições do Exercício 27 para provar que o limite lateral dado está correto. ■

65. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3$

66. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 2) = 5$

67. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$

68. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$

69. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, onde $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 3x, & x \leq 2 \end{cases}$

70. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6$, onde $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 3x, & x \leq 2 \end{cases}$

71-74 Escreva por extenso as definições dos limites dados na nota da margem da página 105) e use sua definição para provar que o limite dado está correto. ■

71. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$

72. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

73. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$

74. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5) = -\infty$

75. De acordo com a lei de Ohm, quando uma voltagem de V volts é aplicada através de um resistor com uma resistência de R ohms, uma corrente de $I = V/R$ ampères circula através do resistor.

- (a) Quanta corrente circula se uma voltagem de 3,0 volts é aplicada através de uma resistência de 7,5 ohms?
 (b) Se a resistência varia em $\pm 0,1$ ohm e a voltagem permanece constante em 3,0 volts, qual é a variação dos valores para a corrente?
 (c) Se a variação da temperatura fizer a resistência variar em $\pm \delta$ de seu valor de 7,5 ohms e a voltagem permanecer constante em 3,0 volts, quais serão os possíveis valores para a corrente?
 (d) Se a corrente não pode variar mais do que $\epsilon = \pm 0,001$ amperes a uma voltagem de 3,0 volts, qual a variação de $\pm \delta$ a partir do valor de 7,5 ohms que é permitida?
 (e) Certas ligas tornam-se **supercondutores** quando suas temperaturas se aproximam do zero absoluto (-273°C), significando que suas resistências tendem a zero. Se a voltagem permanecer constante, o que acontece com a corrente em um supercondutor quando $R \rightarrow 0^+$?

76. **Texto** Compare a Definição 1.1.1 informal com a Definição 1.4.1.

- (a) Quais partes da Definição 1.4.1 correspondem à expressão “os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L' ” da Definição 1.1.1? Explique.
 (b) Quais partes da Definição 1.4.1 correspondem à expressão “tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a)” da Definição 1.1.1? Explique.

77. **Texto** Compare a Definição 1.3.1 informal com a Definição 1.4.2.

- (a) Quais partes da Definição 1.4.2 correspondem à expressão “os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de L' ” da Definição 1.3.1? Explique.
 (b) Quais partes da Definição 1.4.2 correspondem à expressão “à medida que x cresce sem cota” da Definição 1.3.1? Explique.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.4

1. $\epsilon > 0; \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ 3. $\delta = \epsilon/5$ 4. $\epsilon > 0; N; x > N$ 5. $N = 10.000$

1.5 CONTINUIDADE



Joseph Helfenberger/iStockphoto

Uma bola de beisebol percorre uma trajetória “contínua” depois de ser lançada.

Uma bola de beisebol não pode desaparecer em algum ponto para reaparecer em outro e continuar seu movimento. Assim, percebemos a trajetória da bola como uma curva sem interrupções. Nesta seção, vamos traduzir as “curvas sem interrupções” para uma formulação matemática precisa chamada de continuidade e desenvolver algumas das propriedades fundamentais das curvas contínuas.

DEFINIÇÃO DE CONTINUIDADE

Intuitivamente, o gráfico de uma função pode ser descrito como uma curva contínua se não apresentar quebras ou buracos. Para tornar essa ideia mais precisa, precisamos entender quais propriedades de uma função podem causar quebras ou buracos. Com referência à Figura 1.5.1, podemos ver que o gráfico de uma função tem uma quebra ou buraco se ocorrer alguma das seguintes condições:

- A função f não está definida em c (Figura 1.5.1a).
- O limite de $f(x)$ não existe quando x tende a c (Figura 1.5.1b, Figura 1.5.1c).
- O valor da função e o valor do limite em c são diferentes (Figura 1.5.1d).

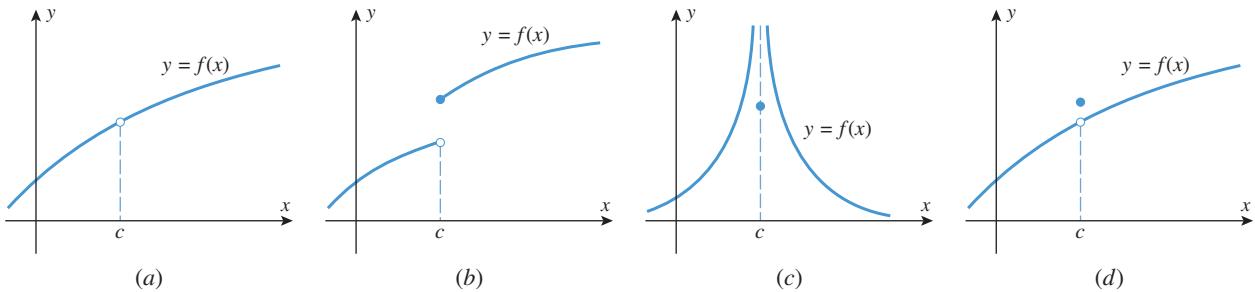


Figura 1.5.1

Isso sugere a seguinte definição.

A terceira condição da Definição 1.5.1, na realidade, implica as primeiras duas, pois fica subentendido na afirmação

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

que esse limite existe e que a função está definida em c . Assim, quando quisermos mostrar a continuidade em c , em geral verificamos apenas a terceira condição.

1.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é **contínua em $x = c$** se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Se falhar uma ou mais das condições dessa definição, então dizemos que f tem uma **descontinuidade em $x = c$** . Cada função esboçada na Figura 1.5.1 ilustra uma descontinuidade em $x = c$. Na Figura 1.5.1a, a função não está definida em c , violando a primeira condição da Definição 1.5.1. Na Figura 1.5.1b, existem ambos os limites laterais de $f(x)$ quando x tende a c , mas não são iguais. Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, violando a segunda condição da Definição 1.5.1. Diremos que uma função como a da Figura 1.5.1b tem uma **descontinuidade de salto** em c . Na Figura 1.5.1c, os limites laterais de $f(x)$ quando x tende a c são infinitos. Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, violando a segunda condição da Definição 1.5.1. Diremos que uma função como a da Figura 1.5.1c tem uma **descontinuidade infinita** em c . Na Figura 1.5.1d, a função está definida em c e o limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe, mas esses dois valores não

são iguais, violando a terceira condição da Definição 1.5.1. Diremos que uma função como a da Figura 1.5.1d tem uma **descontinuidade removível** em c . Os Exercícios 33 e 34 ajudam a explicar a nomenclatura dessas descontinuidades.

► **Exemplo 1** Determine se as seguintes funções são contínuas no ponto $x = 2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Solução Em cada caso, devemos determinar se o limite da função quando $x \rightarrow 2$ é o mesmo que o valor da função em $x = 2$. Em todos os três casos, as funções são idênticas, exceto no ponto $x = 2$ portanto, todas as três têm o mesmo limite em $x = 2$, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

A função f está indefinida em $x = 2$ e, portanto, não é contínua em $x = 2$ (Figura 1.5.2a). A função g está definida em $x = 2$, mas o valor $g(2) = 3$ difere do limite naquele ponto; portanto, g não é contínua em $x = 2$ (Figura 1.5.2b). O valor da função h em $x = 2$ é $h(2) = 4$, que é o mesmo que o limite naquele ponto. Portanto, h é contínua em $x = 2$ (Figura 1.5.2c). (Note que a função h poderia ter sido escrita de forma simplificada $h(x) = x + 2$, mas a escrevemos por partes para enfatizar sua relação com f e g). ◀

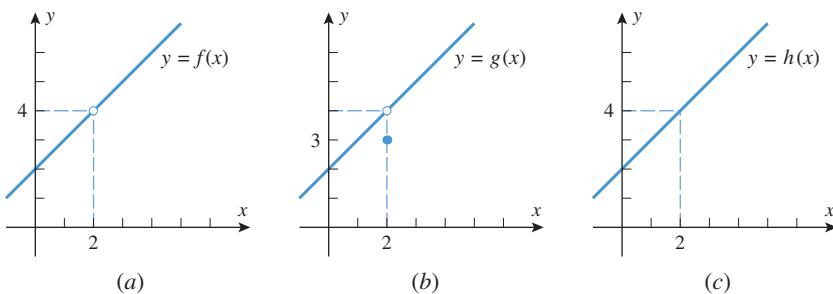


Figura 1.5.2



Chris Hondros/Getty Images
Uma conexão mal feita num cabo de transmissão pode causar uma descontinuidade no sinal elétrico transmitido.

■ CONTINUIDADE EM APLICAÇÕES

Nas aplicações, as descontinuidades sinalizam, muitas vezes, a ocorrência de importantes fenômenos físicos. Por exemplo, a Figura 1.5.3a é um gráfico da voltagem *versus* o tempo para um cabo subterrâneo que é acidentalmente cortado por uma equipe de trabalho no instante $t = t_0$. (A voltagem caiu para zero quando a linha foi cortada.) A Figura 1.5.3b mostra o gráfico de unidades em estoque *versus* tempo para uma companhia que reabastece o estoque com y_1 unidades quando o estoque cai para y_0 unidades. As descontinuidades ocorrem nos momentos em que acontece o reabastecimento.

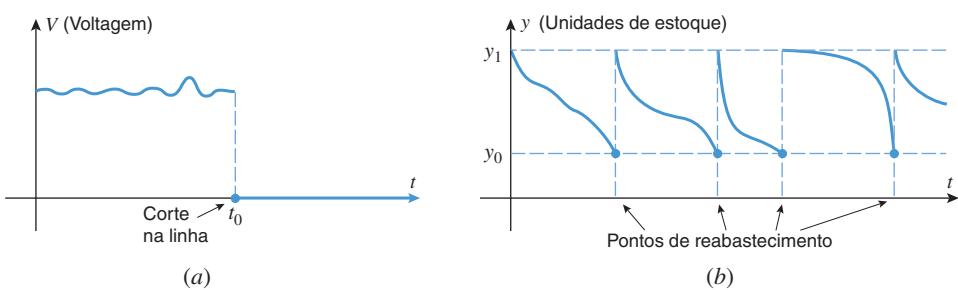


Figura 1.5.3

■ CONTINUIDADE EM UM INTERVALO

Se uma função f for contínua em cada ponto de um intervalo aberto (a, b) , então dizemos que f é **contínua em (a, b)** . Essa definição também se aplica a intervalos abertos infinitos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. Quando f for contínua em $(-\infty, +\infty)$, dizemos que f é **contínua em toda parte**.

Como a Definição 1.5.1 envolve um limite bilateral, ela geralmente não se aplica às extremidades de um intervalo fechado $[a, b]$ ou à extremidade de um intervalo da forma $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$. Para contornar esse problema, concordaremos que uma função é contínua numa extremidade de um intervalo se o valor nessa extremidade for igual ao limite lateral adequado naquele ponto. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 1.5.4 é contínua na extremidade direita do intervalo $[a, b]$ porque

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

mas não é contínua na extremidade esquerda porque

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$$

Em geral, dizemos que uma função é **contínua à esquerda** no ponto c se

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

e é **contínua à direita** no ponto c se

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Usando essa terminologia, definimos a continuidade em um intervalo fechado como segue.

Modifique a Definição 1.5.2 apropriadamente, de modo a poder aplicá-la a intervalos da forma $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, b]$ e $[a, b)$.

1.5.2 DEFINIÇÃO Uma função f é dita **contínua em um intervalo fechado $[a, b]$** se as seguintes condições são satisfeitas:

1. f é contínua em (a, b) .
2. f é contínua à direita em a .
3. f é contínua à esquerda em b .

► **Exemplo 2** O que pode ser dito sobre a continuidade da função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$?

Solução Como o domínio natural dessa função é o intervalo fechado $[-3, 3]$, precisamos investigar a continuidade de f no intervalo aberto $(-3, 3)$ e nas duas extremidades. Se c for um ponto qualquer do intervalo $(-3, 3)$, então segue, do Teorema 1.2.2(e), que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} (9 - x^2)} = \sqrt{9 - c^2} = f(c)$$

provando que f é contínua em cada ponto do intervalo $(-3, 3)$. A função f é também contínua nas extremidades, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (9 - x^2)} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -3^+} (9 - x^2)} = 0 = f(-3)$$

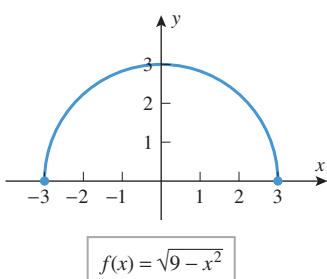


Figura 1.5.5

Logo, f é contínua no intervalo fechado $[-3, 3]$ (Figura 1.5.5). ◀

■ ALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

O teorema seguinte é derivado do Teorema 1.2.2 e nos capacita a tirar conclusões sobre a continuidade das funções obtidas pela adição, pela subtração, pela multiplicação e pela divisão de funções contínuas.

1.5.3 TEOREMA Se as funções f e g forem contínuas em c , então

- (a) $f + g$ é contínua em c .
- (b) $f - g$ é contínua em c .
- (c) fg é contínua em c .
- (d) f/g é contínua em c se $g(c) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em c se $g(c) = 0$.

Provaremos a parte (d); as demais provas são similares e serão deixadas como exercício.

DEMONSTRAÇÃO Consideremos primeiro o caso em que $g(c) = 0$. Nesse caso, $f(c)/g(c)$ está indefinida, logo a função f/g tem uma descontinuidade em c .

A seguir, consideremos o caso em que $g(c) \neq 0$. Para provar que f/g é contínua em c , devemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad (1)$$

Uma vez que f e g são contínuas em c ,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$$

Logo, pelo Teorema 1.2.2(d),

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

o que prova (1). ■

■ CONTINUIDADE DOS POLINÔMIOS E DAS FUNÇÕES RACIONAIS

O procedimento geral para mostrar que uma função é contínua em toda parte é verificar a continuidade em um ponto *arbitrário*. Por exemplo, mostramos no Teorema 1.2.3 que, se $p(x)$ for um polinômio e a um número real *qualquer*, então

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$$

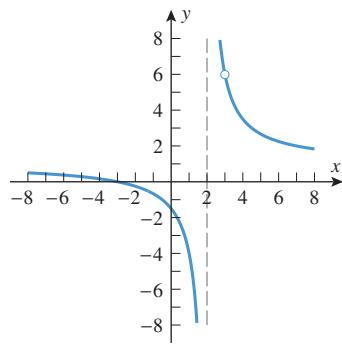
Isso mostra que os polinômios são contínuos em toda parte. Além disso, como as funções racionais são quocientes de polinômios, segue da parte (d) do Teorema 1.5.3 que as funções racionais são contínuas nos pontos em que o denominador não se anula e que nesses zeros há descontinuidades. Assim, temos o seguinte resultado:

1.5.4 TEOREMA

- (a) Um polinômio é contínuo em toda parte.
- (b) Uma função racional é contínua em cada ponto em que o denominador não se anula e tem descontinuidades nos pontos em que o denominador é zero.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso computacional para gerar o gráfico da equação do Exemplo 3, então é bem possível que possa ser vista a descontinuidade em $x = 2$, mas não em $x = 3$. Tente isso e explique o que deve estar acontecendo.



$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

Figure 1.5.6

► **Exemplo 3** Para quais valores de x há uma descontinuidade no gráfico de

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}?$$

Solução A função cujo gráfico estamos fazendo é uma função racional e, portanto, é contínua em toda parte, exceto nos pontos em que o denominador é zero. Resolvendo a equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

obtém-se dois pontos de descontinuidade, $x = 2$ e $x = 3$ (Figura 1.5.6). ◀

► **Exemplo 4** Mostre que $|x|$ é contínua em toda parte (Figura 0.1.9).

Solução Podemos escrever $|x|$ como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

logo, $|x|$ é o mesmo que o polinômio x no intervalo $(0, +\infty)$ e o mesmo que o polinômio $-x$ no intervalo $(-\infty, 0)$. No entanto, como polinômios são funções contínuas, então $x = 0$ é o único ponto de descontinuidade possível para $|x|$. Nesse ponto, temos $|0| = 0$; logo, para provar a continuidade em $x = 0$, devemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad (2)$$

Como a fórmula para $|x|$ muda no 0, será útil considerar os limites laterais em 0, em vez do limite bilateral. Obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

Logo, (2) é válido e $|x|$ é contínua em $x = 0$. ◀

■ CONTINUIDADE DE COMPOSIÇÕES

O teorema seguinte será útil para calcular o limite da composição de funções.

Em palavras, o Teorema 1.5.5 afirma que um símbolo de limite pode passar pelo sinal de função desde que o limite da expressão dentro desse sinal exista e a função seja contínua nesse limite.

1.5.5 TEOREMA Se $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ e se a função f for contínua em L , então $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L)$. Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$$

Essa igualdade permanece válida se todos os $\lim_{x \rightarrow c}$ forem trocados por um dos limites $\lim_{x \rightarrow c^+}$, $\lim_{x \rightarrow c^-}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

No caso especial desse teorema em que $f(x) = |x|$, por ser $|x|$ contínua em toda parte, podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right| \quad (3)$$

sempre que existir $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} |5 - x^2| = \left| \lim_{x \rightarrow 3} (5 - x^2) \right| = |-4| = 4$$

O teorema seguinte refere-se à continuidade da composição de funções; a primeira parte trata da continuidade em um ponto específico e a segunda, da continuidade em toda parte.

1.5.6 TEOREMA

- (a) Se a função g for contínua em um ponto c e a função f for contínua no ponto $g(c)$, então a composição $f \circ g$ será contínua em c .
- (b) Se a função g for contínua em toda parte e a função f for contínua em toda parte, então a composição $f \circ g$ será contínua em toda parte.

DEMONSTRAÇÃO Provaremos apenas a parte (a); a prova da parte (b) pode ser obtida aplicando-se a parte (a) em um ponto arbitrário c . Para provar que $f \circ g$ é contínua em c , devemos mostrar que o valor de $f \circ g$ e o valor de seu limite são os mesmos em $x = c$. De fato, é isso que acontece uma vez que podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(g(c)) = (f \circ g)(c)$$

Teorema 1.5.5
g é contínua em c

O valor absoluto de uma função que não é contínua em toda parte pode ser contínuo? Justifique sua resposta.

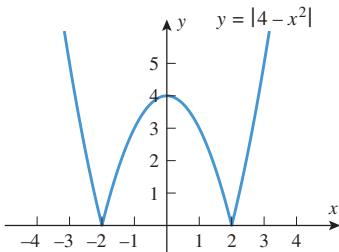


Figura 1.5.7

Sabemos, do Exemplo 4, que a função $|x|$ é contínua em toda parte. Assim, se $g(x)$ for contínua no ponto c , então pela parte (a) do Teorema 1.5.6 a função $|g(x)|$ deve também ser contínua no ponto c ; e, mais geralmente, se $g(x)$ for contínua em toda parte, então também o é $|g(x)|$. Formulado informalmente:

O valor absoluto de uma função contínua é uma função contínua.

Por exemplo, o polinômio $g(x) = 4 - x^2$ é contínuo em toda parte; logo, podemos concluir que a função $|4 - x^2|$ é também contínua em toda parte (Figura 1.5.7).

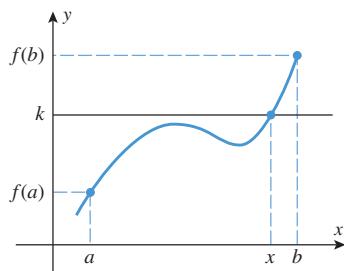


Figura 1.5.8

■ O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

A Figura 1.5.8 mostra o gráfico de uma função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A figura sugere que, se traçarmos qualquer linha reta horizontal $y = k$, com k entre $f(a)$ e $f(b)$, a reta cruzará a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez sobre o intervalo $[a, b]$.

Formulando em termos numéricos, se f for contínua em $[a, b]$, então a função f deve assumir todos os valores k entre $f(a)$ e $f(b)$ pelo menos uma vez, à medida que x varia de a a b . Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^5 - x + 3$ tem o valor 3 em $x = 1$ e o valor 33 em $x = 2$. Logo, segue da continuidade de p que a equação $x^5 - x + 3 = k$ tem, no mínimo, uma solução no intervalo $[1, 2]$ com qualquer valor de k entre 3 e 33. Essa ideia está mais precisamente formulada no seguinte teorema.

1.5.7 TEOREMA (Teorema do Valor Intermediário) Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e k um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então existe no mínimo um número x no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) = k$.

Embora esse teorema seja intuitivamente óbvio, a prova depende de um desenvolvimento matemático preciso do sistema de números reais, o qual está além do alcance deste livro.

■ USANDO O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO PARA APROXIMAR RAÍZES

Vários problemas podem ser reduzidos a encontrar as raízes de uma equação $f(x) = 0$. Às vezes, é possível encontrar as raízes exatamente usando Álgebra, mas, com frequência, isso não é possível, e devemos nos satisfazer com uma aproximação decimal das raízes. Um procedimento para a aproximação de raízes está baseado na seguinte consequência do Teorema do Valor Intermediário.

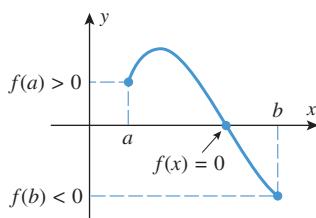


Figura 1.5.9

1.5.8 TEOREMA Se f for uma função contínua em $[a, b]$, e se $f(a)$ e $f(b)$ forem diferentes de zero com sinais opostos, então existe, no mínimo, uma solução para a equação $f(x) = 0$ no intervalo (a, b) .

Esse resultado, ilustrado na Figura 1.5.9, pode ser provado como segue.

DEMONSTRAÇÃO Como $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$. Dessa forma, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe no mínimo um número x no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) = 0$. Contudo, $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes de zero, logo x deve estar situado entre (a, b) , o que completa a prova. ■

Antes de ilustrarmos como esse teorema pode ser usado para aproximar raízes, é útil discutir a terminologia padrão para descrever erros de aproximações. Se x é uma aproximação para uma quantidade x_0 , então dizemos que

$$\epsilon = |x - x_0|$$

é o **erro absoluto** ou (menos precisamente) o **erro** na aproximação. A terminologia na Tabela 1.5.1 é usada para descrever o tamanho de tais erros.

Tabela 1.5.1

ERRO	DESCRIÇÃO
$ x - x_0 \leq 0,1$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,1
$ x - x_0 \leq 0,01$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,01
$ x - x_0 \leq 0,001$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,001
$ x - x_0 \leq 0,0001$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,0001
$ x - x_0 \leq 0,5$	x aproxima x_0 até o inteiro mais próximo
$ x - x_0 \leq 0,05$	x aproxima x_0 até a primeira casa decimal (i.e., até o décimo mais próximo)
$ x - x_0 \leq 0,005$	x aproxima x_0 até a segunda casa decimal (i.e., até o centésimo mais próximo)
$ x - x_0 \leq 0,0005$	x aproxima x_0 até a terceira casa decimal (i.e., até o milésimo mais próximo)

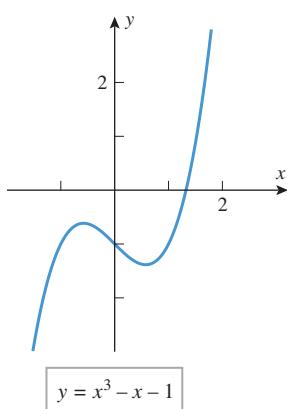


Figura 1.5.10

► **Exemplo 5** A equação

$$x^3 - x - 1 = 0$$

não é facilmente resolvida pela Álgebra, porque o lado esquerdo não tem fatores simples. Entretanto, se fizermos o gráfico de $p(x) = x^3 - x - 1$ com um recurso gráfico computacional (Figura 1.5.10), somos levados a conjecturar que há uma raiz real e que ela está situada dentro do intervalo $[1, 2]$. A existência de uma raiz nesse intervalo é também confirmada pelo Teorema 1.5.8, uma vez que $p(1) = -1$ e $p(2) = 5$ têm sinais opostos. Aproxime essa raiz com uma precisão de duas casas decimais.

Solução Nossa objetivo é aproximar a raiz desconhecida x_0 com um erro de, no máximo, 0,005. Segue que, se encontrarmos um intervalo de comprimento 0,01 que contenha a raiz, então o ponto médio desse intervalo aproximará a raiz com um erro de, no máximo, $\frac{1}{2}(0,01) = 0,005$, atingindo a precisão desejada.

Sabemos que a raiz x_0 está situada no intervalo $[1, 2]$. Contudo, esse intervalo tem tamanho 1, o qual é muito grande. Podemos apontar com maior precisão a localização da raiz dividindo o intervalo $[1, 2]$ em 10 partes iguais e calculando p nos pontos da subdivisão, usando um recurso computacional (Tabela 1.5.2). Nessa tabela, $p(1,3)$ e $p(1,4)$ têm sinais opostos, assim sabemos que a raiz está situada no intervalo $[1,3; 1,4]$. Esse intervalo tem comprimento 0,1, e é ainda muito grande; portanto, repetimos o processo dividindo o intervalo $[1,3; 1,4]$ em 10 partes e calculando p nos pontos da subdivisão; isso dá lugar à Tabela 1.5.3, que nos diz que a raiz está situada em $[1,32; 1,33]$ (Figura 1.5.11). Como esse intervalo tem comprimento 0,01, seu ponto médio 1,325 aproxima a raiz com um erro de, no máximo, 0,005. Logo, $x_0 \approx 1,325$ com uma precisão de duas casas decimais. \blacktriangleleft

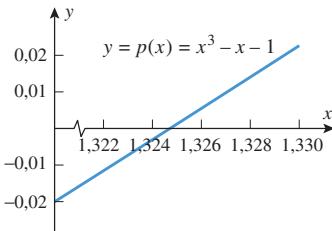


Figura 1.5.11

Tabela 1.5.2

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$p(x)$	-1	-0,77	-0,47	-0,10	0,34	0,88	1,50	2,21	3,03	3,96	5

Tabela 1.5.3

x	1,3	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,4
$p(x)$	-0,103	-0,062	-0,020	0,023	0,066	0,110	0,155	0,201	0,248	0,296	0,344

OBSERVAÇÃO

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico computacional para mostrar que a raiz x_0 no Exemplo 5 pode ser aproximada como $x_0 \approx 1,3245$ com uma precisão de três casas decimais.

Dizer que x aproxima x_0 com uma precisão de n casas decimais não significa que as primeiras n casas decimais de x e x_0 serão as mesmas, quando os números forem arredondados para n casas decimais. Por exemplo, $x = 1,084$ aproxima $x_0 = 1,087$ com duas casas decimais porque $|x - x_0| = 0,003 (< 0,005)$. Entretanto, se arredondarmos esses valores para duas casas decimais, obtemos $x \approx 1,08$ e $x_0 \approx 1,09$. Assim, se quisermos aproximar um número até n casas decimais, devemos apresentar a aproximação até $n + 1$ casas decimais, pelo menos, para preservar a aproximação.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.5 (Ver página 120 para respostas.)

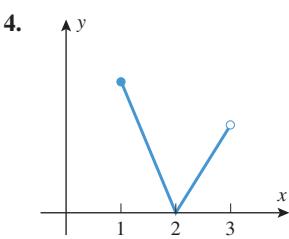
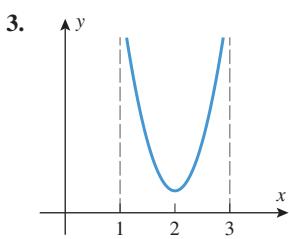
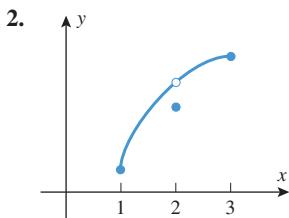
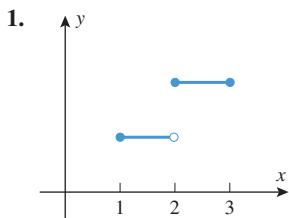
- Quais são as três condições que devem ser cumpridas para que f seja contínua em $x = c$?
- Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $f(2) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 4g(x)] = 13$. Encontre
 - $g(2)$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.
- Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$ e $f(3) = -2$. Encontre $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)/g(x)]$.
- Em quais valores de x , se houver, a função $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$ é descontínua?
- Suponha que uma função f seja contínua em toda parte e que $f(-2) = 3$, $f(-1) = -1$, $f(0) = -4$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 5$. O Teorema do Valor Intermediário garante que f tem uma raiz nos intervalos a seguir?
 - $[-2, -1]$
 - $[-1, 0]$
 - $[-1, 1]$
 - $[0, 2]$

EXERCÍCIOS 1.5  Recurso Gráfico

1-4 Seja f a função cujo gráfico é dado. Em quais (se houver) dos intervalos seguintes f é contínua? ■

- (a) $[1, 3]$ (b) $(1, 3)$ (c) $[1, 2]$
 (d) $(1, 2)$ (e) $[2, 3]$ (f) $(2, 3)$

Em cada intervalo no qual f não for contínua, indique quais das condições para a continuidade de f não valem.



5. Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 4 \\ -1, & x = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 4x - 10, & x \neq 4 \\ -6, & x = 4 \end{cases}$$

Em cada parte, verifique se a função dada é contínua em $x = 4$.

- (a) $f(x)$ (b) $g(x)$ (c) $-g(x)$ (d) $|f(x)|$
 (e) $f(x)g(x)$ (f) $g(f(x))$ (g) $g(x) - 6f(x)$

6. Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Em cada parte, verifique se a função dada é contínua em $x = 0$.

- (a) $f(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(-x)$ (d) $|g(x)|$
 (e) $f(x)g(x)$ (f) $g(f(x))$ (g) $f(x) + g(x)$

ENFOCANDO CONCEITOS

7. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as condições propostas.

- (a) f é contínua em toda parte, exceto em $x = 3$, onde é contínua à direita.
 (b) f tem um limite bilateral em $x = 3$, mas não é contínua naquele ponto.
 (c) f não é contínua em $x = 3$, mas se seu valor em $x = 3$ for mudado de $f(3) = 1$ para $f(3) = 0$, torna-se contínua em $x = 3$.
 (d) f é contínua no intervalo $[0, 3]$ e está definida no intervalo fechado $[0, 3]$; mas f não é contínua no intervalo $[0, 3]$.

8. A figura dada modela a concentração C de um medicamento na corrente sanguínea de um paciente ao longo de um

período de 48 horas. Discuta o significado das descontinuidades do gráfico.

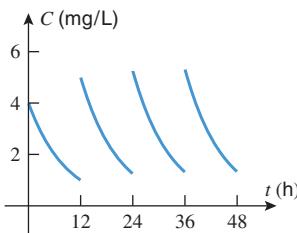


Figura Ex-8

9. Um estacionamento para estudantes em uma universidade cobra \$2,00 para a primeira meia hora (ou para qualquer fração) e \$1,00 para cada meia hora subsequente (ou para qualquer fração) até uma diária máxima de \$10,00.

- (a) Esboce o gráfico do custo como função do tempo de estacionamento.
 (b) Discuta o significado da descontinuidade no gráfico para um estudante que utiliza o estacionamento.

10. Em cada parte, determine se a função é contínua ou não e explique seu raciocínio.

- (a) A população da Terra como uma função do tempo.
 (b) Sua estatura exata como uma função do tempo.
 (c) O custo de uma corrida de táxi em sua cidade como uma função da distância percorrida.
 (d) O volume de um cubo de gelo derretendo como uma função do tempo.

11-22 Encontre os pontos x , se houver, nos quais f não é contínua. ■

11. $f(x) = 5x^4 - 3x + 7$ 12. $f(x) = \sqrt[3]{x - 8}$

13. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4}$ 14. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

15. $f(x) = \frac{x}{2x^2+x}$ 16. $f(x) = \frac{2x+1}{4x^2+4x+5}$

17. $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x-1}{x^2-1}$ 18. $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{2x}{x+4}$

19. $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{|x|+3}$ 20. $f(x) = \left| 4 - \frac{8}{x^4+x} \right|$

21. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 4 \\ 7 + \frac{16}{x}, & x > 4 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

23-28 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

23. Se $f(x)$ for contínua em $x = c$, então $|f(x)|$ também é.

24. Se $|f(x)|$ for contínua em $x = c$, então $f(x)$ também é.

25. Se f e g forem descontínuas em $x = c$, então $f + g$ também é.

26. Se f e g forem descontínuas em $x = c$, então fg também é.

27. Se $\sqrt{f(x)}$ for contínua em $x = c$, então $f(x)$ também é.

28. Se $f(x)$ for contínua em $x = c$, então $\sqrt{f(x)}$ também é.

29-30 Encontre um valor para a constante k , se possível, que faça a função ficar contínua em toda parte. ■

29. (a) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2 \\ 2x + k, & x > 2 \end{cases}$

30. (a) $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \geq -3 \\ k/x^2, & x < -3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \geq 0 \\ k/x^2, & x < 0 \end{cases}$

31. Encontre valores das constantes k e m , se possível, que façam a função f ficar contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 2 \\ m(x+1) + k, & -1 < x \leq 2 \\ 2x^3 + x + 7, & x \leq -1 \end{cases}$$

32. Em qual dos seguintes intervalos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

é contínua?

- (a) $[2, +\infty)$ (b) $(-\infty, +\infty)$ (c) $(2, +\infty)$ (d) $[1, 2)$

33-34 Diz-se que uma função f tem uma *descontinuidade removível* em $x = c$ se $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe, mas f não é contínua em $x = c$, ou porque f não está definida em c ou porque a definição de $f(c)$ difere do valor do limite. Essa terminologia será usada nestes exercícios. ■

33. (a) Esboce o gráfico de uma função com uma descontinuidade removível em $x = c$ na qual $f(c)$ não está definida.

(b) Esboce o gráfico de uma função com uma descontinuidade removível em $x = c$ na qual $f(c)$ está definida.

34. (a) A terminologia *descontinuidade removível* é apropriada porque uma descontinuidade removível de uma função f em um ponto $x = c$ pode ser “removida” redefinindo o valor de f apropriadamente em $x = c$. Que valor de $f(c)$ remove a descontinuidade?

(b) Mostre que as seguintes funções têm uma descontinuidade removível em $x = 1$ e esboce seus gráficos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$$

(c) Quais valores de $f(1)$ e $g(1)$ removem as descontinuidades?

35-36 Encontre os valores de x (se existirem) nos quais f não é contínua e determine se cada um desses valores é uma descontinuidade removível. ■

35. (a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$

(c) $f(x) = \frac{x - 2}{|x| - 2}$

36. (a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5, & x \neq 1 \\ 6, & x = 1 \end{cases}$

37. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico da função $f(x) = (x+3)/(2x^2 + 5x - 3)$ e, então, use o gráfico para fazer uma conjectura sobre o número e a localização de todas as descontinuidades.

(b) Verifique sua conjectura fatorando o denominador.

38. (a) Use um recurso computacional para gerar o gráfico da função $f(x) = x/(x^3 - x + 2)$ e, então, use o gráfico para fazer uma conjectura sobre o número e a localização de todas as descontinuidades.

(b) Use o Teorema do Valor Intermediário para localizar aproximadamente todos os pontos de descontinuidade com duas casas decimais de precisão.

39. Prove que $f(x) = x^{3/5}$ é contínua em toda parte, justificando cuidadosamente cada passo.

40. Prove que $f(x) = 1/\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}$ é contínua em toda parte, justificando cuidadosamente cada passo.

41. Prove:

(a) a parte (a) do Teorema 1.5.3.

(b) a parte (b) do Teorema 1.5.3

(c) a parte (c) do Teorema 1.5.3.

42. Prove a parte (b) do Teorema 1.5.4.

43. (a) Use o Teorema 1.5.5 para provar que se f for contínua em $x = c$, então $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$.

(b) Prove que se $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$, então f é contínua em $x = c$. [Sugestão: O que esse limite nos diz sobre a continuidade de $g(h) = f(c+h)$?]

(c) Conclua das partes (a) e (b) que f é contínua em $x = c$ se, e só se, $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$.

44. Prove: Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$, então existe no mínimo uma solução para a equação $f(x) = g(x)$ em (a, b) . [Sugestão: Considere $f(x) - g(x)$.]

ENFOCANDO CONCEITOS

45. Dê um exemplo de uma função que está definida em todo ponto de um intervalo fechado e cujos valores nas extremidades têm sinais opostos, mas para a qual a equação $f(x) = 0$ não tem solução no intervalo.

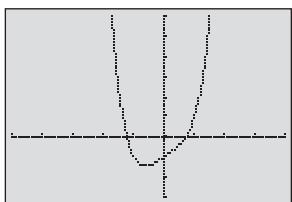
46. Seja f a função cujo gráfico está mostrado no Exercício 2. Para cada intervalo, determine (i) se está satisfeita a hipótese do Teorema do Valor Intermediário e (ii) se está satisfeita a conclusão desse mesmo teorema.

- (a) $[1, 2]$ (b) $[2, 3]$ (c) $[1, 3]$

47. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 2x = 1$ tem, no mínimo, uma solução no intervalo $[-1, 1]$.

48. Prove que, se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar, então a equação $p(x) = 0$ tem, no mínimo, um número real como solução.

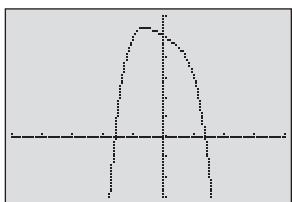
49. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = x^4 + x - 1$. Use o método do Exemplo 5 para aproximar os cortes com o eixo x com um erro de, no máximo, 0,05.



$[-5, 4] \times [-3, 6]$
 $x\text{Scl} = 1, y\text{Scl} = 1$

Figura Ex-49

50. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = 5 - x - x^4$. Use o método do Exemplo 5 para aproximar as raízes da equação $5 - x - x^4 = 0$ com uma precisão de duas casas decimais.



$[-5, 4] \times [-3, 6]$
 $x\text{Scl} = 1, y\text{Scl} = 1$

Figura Ex-50

51. Use o fato de que $\sqrt{5}$ é uma solução de $x^2 - 5 = 0$ para aproximar $\sqrt{5}$ com um erro de, no máximo, 0,005.

52. Um corredor é cronometrado percorrendo 100 metros em 10 segundos. O cronômetro é zerado e o corredor volta calmamente para o início da pista. Mostre que existe pelo menos um ponto na pista no qual a leitura do cronômetro coincide com a leitura durante a volta ao início. [Sugestão: Use o resultado do Exercício 44.]

53. Prove que existem pontos diametralmente opostos no Equador terrestre em que se registra a mesma temperatura. [Sugestão: Considere a figura dada, em que aparece o Equador visto de algum ponto acima do Polo Norte. Suponha que a temperatura $T(\theta)$ seja uma função contínua do ângulo θ e considere a função $f(\theta) = T(\theta + \pi) - T(\theta)$.]

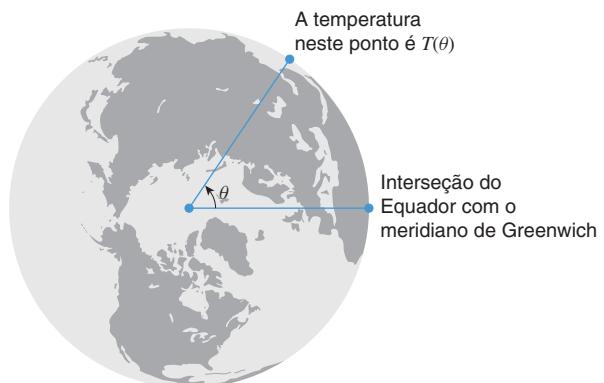


Figura Ex-53

54. Seja R uma região elíptica no plano xy e defina $f(z)$ como a área da parte de R que está sobre ou à esquerda da reta vertical $x = z$. Prove que f é uma função contínua de z . [Sugestão: Suponha que a elipse esteja localizada entre as retas horizontais $y = a$ e $y = b$, com $a < b$. Convença-se de que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq (b - a) \cdot |z_1 - z_2|$.]

55. Seja R uma região elíptica no plano. Dada qualquer reta L , prove que existe uma reta perpendicular a L que divide R em duas regiões de mesma área. [Sugestão: Introduza coordenadas tais que L coincida com o eixo x . Use o resultado do Exercício 54 e o Teorema do Valor Intermediário.]

56. Suponha que f seja contínua no intervalo $[0, 1]$ e que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo x desse intervalo.
- Esoebo o gráfico de $y = x$ junto a um gráfico possível de f sobre o intervalo $[0, 1]$.
 - Use o Teorema do Valor Intermediário para ajudar a provar que existe pelo menos um número c no intervalo $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

57. **Texto** Muitas vezes se supõe que quantidades físicas variáveis sejam funções contínuas do tempo como, por exemplo, a altitude de um objeto em queda ou o peso de uma bola de neve derretendo. Use exemplos específicos para discutir os méritos dessa suposição.

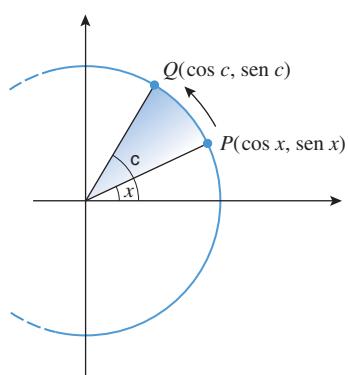
58. **Texto** O Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.5.7) é um exemplo dos assim denominados “teoremas de existência”. Descreva em palavras como podemos reconhecer um teorema de existência e discuta algumas maneiras pelas quais um teorema de existência pode ser útil.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.5

1. $f(c)$ está definida; existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 2. (a) 3 (b) 3 3. $-2/5$ 4. $x = 1, 4$
5. (a) sim (b) não (c) sim (d) sim

1.6 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIAIS E INVERSAS

Nesta seção, investigaremos as propriedades de continuidade das funções trigonométricas, exponenciais e inversas de várias funções contínuas. Também discutiremos alguns importantes limites envolvendo essas funções.



Quando x tende a c , o ponto P tende ao ponto Q .

Figura 1.6.1

O Teorema 1.6.1 implica que as seis funções trigonométricas básicas são contínuas em seus domínios. Em particular, $\sin x$ e $\cos x$ são contínuas em toda parte.

■ CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Lembre que, na Trigonometria, desenhamos os gráficos de $\sin x$ e de $\cos x$ como curvas contínuas. Não provaremos formalmente que essas funções são contínuas, mas podemos motivar esse fato deixando c ser um ângulo fixo e x um ângulo variável, ambos medidos em radianos. Como indica a Figura 1.6.1, quando o ângulo x tende ao ângulo c , o ponto $P(\cos x, \sin x)$ move-se no círculo unitário em direção ao ponto $Q(\cos c, \sin c)$, e as coordenadas de P tendem às correspondentes coordenadas de Q . Isso implica que

$$\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c \quad (1)$$

Assim, $\sin x$ e $\cos x$ são contínuos em um ponto arbitrário c ; desse modo, essas funções são contínuas em toda parte.

As fórmulas em (1) podem ser usadas para encontrar limites das funções trigonométricas restantes, expressando-os em termos de $\sin x$ e $\cos x$; por exemplo, se $\cos c \neq 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} \tan x = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin c}{\cos c} = \tan c$$

Assim, somos levados ao seguinte teorema.

1.6.1 TEOREMA Se c for qualquer número no domínio natural da função trigonométrica enunciada, então

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c & \lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c & \lim_{x \rightarrow c} \tan x = \tan c \\ \lim_{x \rightarrow c} \csc x = \csc c & \lim_{x \rightarrow c} \sec x = \sec c & \lim_{x \rightarrow c} \cot x = \cot c \end{array}$$

► **Exemplo 1** Encontre o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$$

Solução Como a função cosseno é contínua em toda parte, segue do Teorema 1.5.5 que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos(g(x)) = \cos \left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \right)$$

desde que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ exista. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \cos(x + 1) = \cos \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right) = \cos 2 \quad \blacktriangleleft$$

■ CONTINUIDADE DE FUNÇÕES INVERSAS

Como os gráficos de uma função injetora f e sua inversa f^{-1} são um a reflexão do outro pela reta $y = x$, é geometricamente evidente que, se o gráfico de f não tem quebras ou buracos, então tampouco o gráfico de f^{-1} tem quebras ou buracos. Isso, mais o fato de que a imagem de f é o domínio de f^{-1} , sugere o resultado seguinte, que enunciamos sem prova formal.

Resumido, o Teorema 1.6.2 afirma: *a inversa de uma função contínua é contínua.*

1.6.2 TEOREMA Se f for uma função injetora que é contínua em cada ponto de seu domínio, então f^{-1} será contínua em cada ponto de seu domínio; ou seja, f^{-1} será contínua em cada ponto da imagem de f .

► **Exemplo 2** Use o Teorema 1.6.2 para provar que $\arcsen x$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Solução Lembre que $\arcsen x$ é a função inversa da função seno restrita, cujo domínio é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e cuja imagem é o intervalo $[-1, 1]$ (Definição 0.4.6 e Figura 0.4.13). Como $\sen x$ é contínua no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, o Teorema 1.6.2 implica que $\arcsen x$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$. ◀

Argumentos análogos à solução do Exemplo 2 mostram que cada uma das funções trigonométricas inversas definidas na Seção 0.4 é contínua em cada ponto de seu domínio.

Quando introduzimos a função exponencial $f(x) = b^x$ na Seção 0.5, supusemos que seu gráfico era uma curva sem quebras ou buracos, ou seja, supusemos que o gráfico de $y = b^x$ era uma curva contínua. Essa suposição e o Teorema 1.6.2 implicam o teorema seguinte, que é enunciado sem prova formal.

1.6.3 TEOREMA Seja $b > 0$, $b \neq 1$.

- (a) A função b^x é contínua em $(-\infty, +\infty)$.
- (b) A função \log_b é contínua em $(0, +\infty)$.

► **Exemplo 3** Em quais pontos a função $f(x) = \frac{\arctg x + \ln x}{x^2 - 4}$ é contínua?

Solução O quociente será uma função contínua em todos os pontos onde o numerador e o denominador forem ambos funções contínuas e o denominador não for zero. Como $\arctg x$ é contínua em toda parte e $\ln x$ é contínua com $x > 0$, o numerador é contínuo se $x > 0$. O denominador, sendo um polinômio, é contínuo em toda parte, de modo que o quociente é contínuo em todos os pontos tais que $x > 0$ e o denominador for não nulo. Assim, f é contínua nos intervalos $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$. ◀

■ OBTENDO LIMITES POR CONFRONTO

Na Seção 1.1, usamos evidência numérica para conjecturar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1 \quad (2)$$

Contudo, não é fácil determinar esse limite com precisão. O limite é uma forma indeterminada do tipo $0/0$, e não existem operações algébricas simples que nos permitam obtê-lo. Adiantando no texto, desenvolveremos métodos gerais para obter limites de formas indeterminadas, mas aqui utilizaremos uma técnica chamada de *confronto*.

O método do confronto é usado para concluir que $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow c$ através do “confronto” de f com duas outras funções, g e h , cujos limites quando $x \rightarrow c$ já são conhecidos como sendo L . Como ilustra a Figura 1.6.2, isso força f a também ter o limite L . Essa é a ideia subjacente ao teorema seguinte, que enunciaremos sem prova.

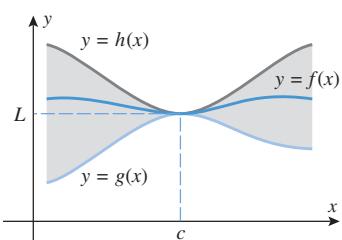


Figura 1.6.2

O Teorema do Confronto também é válido para limites laterais e para limites em $+\infty$ e $-\infty$. Como mudariam as hipóteses do teorema nesses casos?

1.6.4 TEOREMA (Teorema do Confronto)

Sejam f , g e h funções que satisfazem

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo x em algum intervalo aberto que contenha o ponto c , com a possível exceção de que as desigualdades não precisam ser válidas em c . Se g e h tiverem o mesmo limite quando x tende a c , digamos

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

então f também tem esse limite quando x tende a c , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

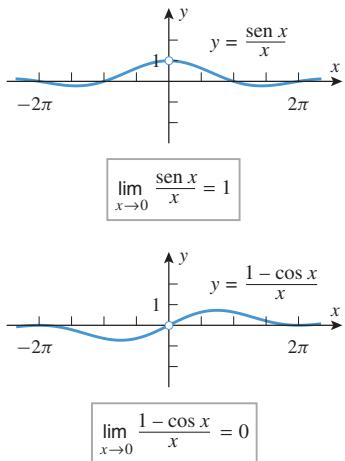


Figura 1.6.3

Para ilustrar o uso do Teorema do Confronto, provaremos os seguintes resultados, ilustrados na Figura 1.6.3

1.6.5 TEOREMA

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO (A) Nesta prova, interpretaremos x como um ângulo medido em radianos, e vamos supor, para começar, que $0 < x < \pi/2$. Como ilustrado na Figura 1.6.4, a área do setor de raio 1 e ângulo central x situa-se entre as áreas de dois triângulos, um com a área $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ e o outro com a área $\frac{1}{2} \sin x$. Como a área do setor é de $\frac{1}{2}x$ (ver nota na margem), segue que

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2} \sin x$$

Multiplicando todos os membros por $2/(\sin x)$ e usando o fato de que $\sin x > 0$ com $0 < x < \pi/2$, obtemos

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{x}{\sin x} \geq 1$$

Em seguida, tomindo os recíprocos e revertendo as desigualdades, obtemos

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \tag{3}$$

que confronta a função $(\sin x)/x$ com as funções $\cos x$ e 1. Embora tenhamos derivado essas desigualdades supondo que $0 < x < \pi/2$, elas também são válidas com $-\pi/2 < x < 0$ [já que (3) permanece inalterada trocando x por $-x$ usando as identidades $\sin(-x) = -\sin x$ e $\cos(-x) = \cos x$]. Finalmente, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

o Teorema do Confronto implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Lembre que a área A de um setor de raio r e ângulo θ é

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Isso pode ser obtido da relação

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

que afirma que a área do setor está para a área do círculo assim como o ângulo central do setor está para o ângulo central do círculo.

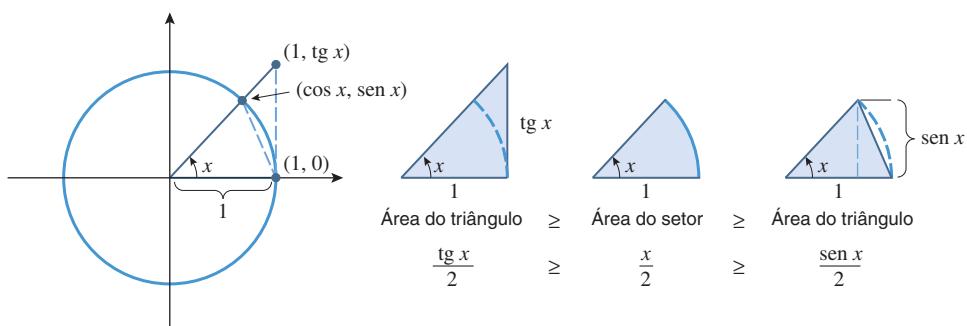
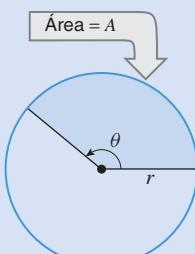


Figura 1.6.4

DEMONSTRAÇÃO (b) Para esta prova, usaremos o limite da parte (a), a continuidade da função seno e a identidade trigonométrica $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x)x} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = (1) \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \blacksquare\end{aligned}$$

► **Exemplo 4** Encontre

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (b) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

Solução (a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = (1)(1) = 1$$

Solução (b) O truque é multiplicar e dividir por 2, o que fará o denominador igual ao argumento da função seno [como no Teorema 1.6.5(a)]:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

Faça, agora, a substituição $x = 2\theta$ e use o fato de que $x \rightarrow 0$ quando $\theta \rightarrow 0$. Segue-se

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2(1) = 2$$

Solução (c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 5** Discuta os limites

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solução (a) Consideremos $1/x$ como um ângulo medido em radianos. Quando $x \rightarrow 0^+$, o ângulo $1/x$ tende a $+\infty$, de modo que os valores de $\sin(1/x)$ ficam oscilando entre 1 e -1, sem tender a limite algum. Analogamente, quando $x \rightarrow 0^-$, o ângulo $1/x$ tende a $-\infty$, de modo que, novamente, os valores de $(1/x)$ ficam oscilando entre 1 e -1, sem tender a limite

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico computacional para confirmar os limites no Exemplo 4; se o leitor dispuser de um CAS, use-o para obter os limites.

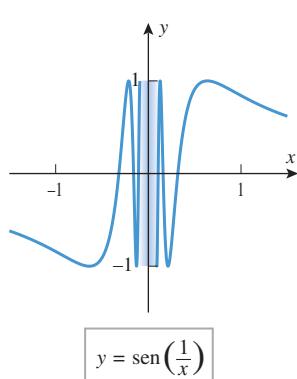


Figura 1.6.5

Confirme (4) considerando os casos $x > 0$ e $x < 0$ separadamente.

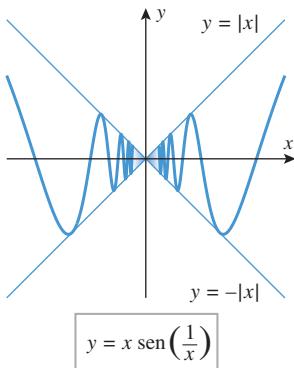


Figura 1.6.6

algum. Essas conclusões são consistentes com o gráfico mostrado na Figura 1.6.5. Observe que as oscilações ficam cada vez mais rápidas quando $x \rightarrow 0$, pois $1/x$ cresce (ou decresce) cada vez mais rápido quando x tende a 0.

Solução (b) Como

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

segue que, se $x \neq 0$, então

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad (4)$$

Como $|x| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, as desigualdades em (4) e o Teorema do Confronto implicam que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Isso é consistente com o gráfico mostrado na Figura 1.6.6. ◀

OBSERVAÇÃO

Segue, da parte (b) deste exemplo, que a função

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$, uma vez que o valor da função e o valor do limite são os mesmos em $x = 0$. Isso mostra que o comportamento de uma função pode ser muito complexo na vizinhança de um ponto $x = c$, mesmo se a função for contínua em c .



EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.6 (Ver página 128 para respostas.)

1. Em cada parte, é a função contínua dada no intervalo $[0, \pi/2]$?
 - $\operatorname{sen} x$
 - $\cos x$
 - $\operatorname{tg} x$
 - $\operatorname{cossec} x$
2. Calcule os limites.
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$
3. Suponha que uma função f tenha a propriedade $3 - |x| \leq f(x) \leq 3 + |x|$ com qualquer x real. A partir disso, podemos concluir que $f(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ quando $x \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.
4. Em cada parte, dê o maior intervalo no qual a função seja contínua.
 - e^x
 - $\ln x$
 - $\operatorname{arc sen} x$
 - $\operatorname{arc tg} x$

EXERCÍCIOS 1.6



Recurso Gráfico

- 1-8** Encontre os pontos de descontinuidade, se existirem. ■

1. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 2)$
2. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{x - \pi}\right)$
3. $f(x) = |\cot x|$
4. $f(x) = \sec x$
5. $f(x) = \operatorname{cossec} x$
6. $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$
7. $f(x) = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{sen} x}$
8. $f(x) = \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}$

- 9-14** Determine onde f é contínua. ■

9. $f(x) = \operatorname{arc sen} 2x$
10. $f(x) = \operatorname{arc cos}(\ln x)$
11. $f(x) = \frac{\ln(\operatorname{arc tg} x)}{x^2 - 9}$
12. $f(x) = \exp\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$
13. $f(x) = \frac{\operatorname{arc sen}(1/x)}{x}$
14. $f(x) = \ln|x| - 2 \ln(x + 3)$

15. Em cada parte, use o Teorema 1.5.6(b) para mostrar que a função é contínua em toda parte. ■

15. (a) $\sin(x^3 + 7x + 1)$ (b) $|\sin x|$ (c) $\cos^3(x + 1)$

16. (a) $|3 + \sin 2x|$ (b) $\sin(\sin x)$
 (c) $\cos^5 x - 2\cos^3 x + 1$

17-40 Encontre os limites. ■

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2 - 3x}\right)$

19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsen\left(\frac{x}{1 - 2x}\right)$

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x}$

22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2 \arctg x)$

23. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{\theta}$

24. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{2h}$

25. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta^2}$

26. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta}$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg 7x}{\sen 3x}$

28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 6x}{\sen 8x}$

29. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sen x}{5\sqrt{x}}$

30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen^2 x}{3x^2}$

31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x^2}{x}$

32. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sen h}{1 - \cos h}$

33. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos^2 t}$

34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos(\frac{1}{2}\pi - x)}$

35. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{1 - \cos \theta}$

36. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3h}{\cos^2 5h - 1}$

37. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sen(\frac{1}{x})}{x}$

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3 \sen x}{x}$

39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos 3x - \cos 4x}{x}$

40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg 3x^2 + \sen^2 5x}{x^2}$

41-42 (a) Complete a tabela e dê uma estimativa para o limite indicado. (b) Encontre o valor exato do limite. ■

41. $f(x) = \frac{\sen(x - 5)}{x^2 - 25}; \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

x	4	4,5	4,9	5,1	5,5	6
$f(x)$						

Tabela Ex-41

42. $f(x) = \frac{\sen(x^2 + 3x + 2)}{x + 2}; \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

x	-2,1	-2,01	-2,001	-1,999	-1,99	-1,9
$f(x)$						

Tabela Ex-42

43-46 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

43. Suponha que uma função f satisfaça

$$|f(x) + 5| \leq |x + 1|$$

com qualquer número real x . Então $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$.

44. Com $0 < x < \pi/2$, o gráfico de $y = \sen x$ fica abaixo do gráfico de $y = x$ e acima do gráfico de $y = x \cos x$.

45. Se uma função invertível f for contínua em toda parte, então sua inversa também é contínua em toda parte.

46. Suponha que M seja um número positivo e que uma função f satisfaça

$$-M \leq f(x) \leq M$$

com qualquer número real x . Então

$$\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. Numa tentativa de verificar que $\lim_{x \rightarrow 0} (\sen x)/x = 1$, um estudante constrói a tabela abaixo.

- (a) Quais erros o estudante cometeu?
- (b) Qual é o valor exato do limite ilustrado nessa tabela?

x	-0,01	-0,001	0,001	0,01
$\sen x/x$	0,017453	0,017453	0,017453	0,017453

Tabela Ex-47

48. Um ângulo central que mede θ radianos subtende uma corda de comprimento $c(\theta)$ e um arco circular de comprimento $s(\theta)$ no círculo da figura abaixo. Usando sua intuição, qual seria sua conjectura sobre o valor de $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} c(\theta)/s(\theta)$? Verifique sua conjectura calculando o limite.

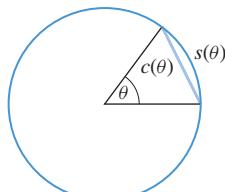


Figura Ex-48

49. Encontre um valor diferente de zero para a constante k que torne

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tg kx}{x}, & x < 0 \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

contínua em $x = 0$.

50. Será a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sen x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

contínua em $x = 0$? Explique

- 51.** Nas partes (a) a (c), encontre o limite fazendo a substituição indicada.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}; \quad t = \frac{1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right); \quad t = \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\operatorname{sen} x}; \quad t = \pi - x$

- 52.** Encontre $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x-2}$. [Sugestão: Seja $t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x}$.]

- 53.** Encontre $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1}$. **54.** Encontre $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$.

- 55.** Encontre $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x}{x - \pi/4}$.

- 56.** Suponha que f seja uma função invertível, tal que $f(0) = 0$, f seja contínua em 0 e exista $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)/x)$. Sabendo que $L = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)/x)$, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f^{-1}(x)} = L$$

[Sugestão: Aplique o Teorema 1.5.5 à composição $h \circ g$, onde

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$$

e $g(x) = f^{-1}(x)$.]

- 57-60** Aplique o resultado do Exercício 56, se necessário, para encontrar os limites. ■

57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arc sen} x}$

58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc tg} x}{x}$

59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc sen} 5x}{x}$

60. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arc sen} (x-1)}{x^2 - 1}$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 61.** Use o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{50\pi}{x} = 0$$

e ilustre o princípio envolvido usando um recurso gráfico computacional para fazer os gráficos de $y = |x|$, $y = -|x|$ e $y = x \cos(50\pi/x)$ na mesma tela da janela $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

- 62.** Use o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}} \right) = 0$$

e ilustre o princípio envolvido usando um recurso gráfico computacional para fazer os gráficos de $y = x^2$, $y = -x^2$ e $y = x^2 \operatorname{sen}(50\pi/\sqrt[3]{x})$ na mesma tela da janela $[-0,5; 0,5] \times [-0,25; 0,25]$.

- 63.** No Exemplo 5, usamos o Teorema do Confronto para provar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Por que não poderíamos ter obtido esse mesmo resultado escrevendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0? \end{aligned}$$

- 64.** Esboce os gráficos de $y = 1 - x^2$, $y = \operatorname{cos} x$ e $y = f(x)$, onde f é uma função qualquer que satisfaz a desigualdade

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq \operatorname{cos} x$$

para todo x no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. O que você pode dizer sobre o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow 0$? Explique seu raciocínio.

- 65.** Esboce os gráficos de $y = 1/x$, $y = -1/x$ e $y = f(x)$ em um sistema de coordenadas, onde f é uma função qualquer satisfazendo a desigualdade

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

para todo x no intervalo $[1, +\infty)$. O que você pode dizer sobre o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$? Explique seu raciocínio.

- 66.** Faça desenhos análogos aos da Figura 1.6.2 que ilustram o Teorema do Confronto para os limites da forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- 67.** (a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x = \operatorname{cos} x$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $[0, \pi/2]$.

- (b) Mostre graficamente que há exatamente uma solução no intervalo.

- (c) Aproxime a solução com três casas decimais de precisão.

- 68.** (a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x + \operatorname{sen} x = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, \pi/6]$.

- (b) Mostre graficamente que existe exatamente uma solução no intervalo.

- (c) Aproxime a solução com três casas decimais de precisão.

- 69.** No estudo da queda de objetos próximos à superfície da Terra, a **aceleração g devida à gravidade** é usualmente tomada como sendo a constante $9,8 \text{ m/s}^2$. Entretanto, a forma elíptica da Terra e outros fatores causam variações nesse valor que dependem da latitude. A seguinte fórmula, conhecida como Fórmula da Gravidade Elipsoidal do Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS 84), é usada para prever o valor de g na latitude de ϕ graus (tanto ao norte quanto ao sul do Equador):

$$g = 9,7803253359 \frac{1 + 0,0019318526461 \operatorname{sen}^2 \phi}{\sqrt{1 - 0,0066943799901 \operatorname{sen}^2 \phi}} \text{ m/s}^2$$

- (a) Use um recurso gráfico para traçar a curva $y = g(\phi)$ com $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. O que os valores de g em $\phi = 0^\circ$ e em $\phi = 90^\circ$ dizem sobre o modelo elipsoidal WGS 84 da Terra?
- (b) Mostre que temos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ em algum lugar entre as latitudes 38° e 39° .
70. **Texto** Usando suas próprias palavras, explique o *valor prático* do Teorema do Confronto.

71. **Texto** Um exame cuidadoso da demonstração do Teorema 1.6 levanta uma dúvida sobre a possível circularidade do argumento apresentado! Leia o artigo (em inglês) de Fred Richman na edição de março de 1993 do periódico *College Mathematics Journal* intitulado “A Circular Argument” e escreva um texto curto sobre os principais argumentos do autor.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 1.6

1. (a) sim (b) sim (c) sim (d) não 2. (a) 1 (b) 0 3. 3; 0 4. (a) $(-\infty, +\infty)$ (b) $(0, +\infty)$ (c) $[-1, 1]$ (d) $(-\infty, +\infty)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1

Recurso Gráfico

CAS

1. Para a função f cujo gráfico está na figura abaixo, encontre o limite, se ele existir.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

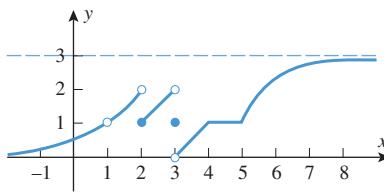


Figura Ex-1

2. Em cada parte, complete a tabela e faça uma conjectura sobre o valor do limite indicado. Confirme sua conjectura, obtendo o limite analiticamente.

(a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

x	2,00001	2,0001	2,001	2,01	2,1	2,5
$f(x)$						

(b) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

x	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$						

3. (a) Aproxime o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

com três casas decimais de precisão, construindo uma tabela apropriada de valores.

(b) Confirme sua aproximação com um recurso computacional.

4. Aproxime

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3}$$

primeiro olhando para o gráfico e, em seguida, calculando os valores para algumas escolhas apropriadas de x . Compare suas respostas com o valor obtido por um CAS.

- 5-10 Encontre os limites. ■

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x + 9}{x^2 + 4x + 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x - 2}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)^5}{(3x^2 + 2x - 7)(x^3 - 9x)}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

11. Em cada parte, encontre as assíntotas horizontais, se houver.

(a) $y = \frac{2x - 7}{x^2 - 4x}$

(b) $y = \frac{x^3 - x^2 + 10}{3x^2 - 4x}$

(c) $y = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 5x}$

12. Em cada parte, encontre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, se existir, tomando a igual a $0, 5^+, -5^-, -5, 5; -\infty$ e $+\infty$.

(a) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} (x - 5)/|x - 5|, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$

- 13-20 Encontre os limites. ■

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 3x}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \operatorname{sen}(kx)}{x}, \quad k \neq 0$

16. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta} \right)$

17. $\lim_{t \rightarrow \pi/2^+} e^{\operatorname{tg} t}$

18. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln(\operatorname{sen} 2\theta) - \ln(\operatorname{tg} \theta)$

19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{-x}$

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}, \quad a, b > 0$

21. Se investirmos \$1.000 numa aplicação que paga 7% de juros, compostos n vezes por ano, então em 10 anos haverá

\$1.000(1 + 0,07/n)^{10n}\$ na aplicação. Quanto haverá na aplicação em 10 anos se a taxa de juros for composta trimestralmente ($n = 4$)? Mensalmente ($n = 12$)? Diariamente ($n = 365$)? Quanto haverá na aplicação em 10 anos se os juros forem compostos *continuamente*, isto é, com $n \rightarrow +\infty$?

- 22.** (a) Escreva um parágrafo ou dois descrevendo como o limite de uma função pode não existir em um ponto $x = a$ e apresentando alguns exemplos específicos.
 (b) Escreva um parágrafo ou dois descrevendo como o limite de uma função pode não existir quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ e apresentando alguns exemplos específicos.
 (c) Escreva um parágrafo ou dois descrevendo como uma função pode deixar de ser contínua em um ponto $x = a$ e apresentando alguns exemplos específicos.
- 23.** (a) Encontre uma fórmula para uma função racional que tem uma assíntota vertical em $x = 1$ e uma assíntota horizontal em $y = 2$.
 (b) Verifique seu trabalho usando um recurso computacional para fazer o gráfico da função.
- 24.** Reescreva a definição ϵ - δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ em termos da janela de um recurso gráfico centrada no ponto (a, L) .
- 25.** Suponha que $f(x)$ seja uma função e que, para qualquer $\epsilon > 0$, a condição $0 < |x - 2| < \frac{3}{4}\epsilon$ garanta que $|f(x) - 5| < \epsilon$.
 (a) Qual é o limite descrito por essa afirmação?
 (b) Obtenha um valor de δ tal que $0 < |x - 2| < \delta$ garanta que $|8f(x) - 40| < 0,048$.

26. O limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

assegura que há um número δ tal que

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 0,001$$

se $0 < |x| < \delta$. Estime o maior desses δ .

- 27.** Em cada parte são dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f em a . Encontre um número δ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 7) = 1$; $\epsilon = 0,01$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 6$; $\epsilon = 0,05$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$; $\epsilon = 0,001$
- 28.** Use a Definição 1.4.1 para provar que os limites dados estão corretos.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 7) = 1 \quad (b) \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 6$$

- 29.** Suponha que f seja contínua em x_0 e que $f(x_0) > 0$. Dê uma prova ϵ - δ ou um argumento verbal convincente para mostrar que deve existir um intervalo aberto, contendo x_0 , no qual $f(x) > 0$.

- 30.** (a) Seja

$$f(x) = \frac{\sin x - \sin 1}{x - 1}$$

Aproxime $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ traçando o gráfico de f e calculando valores para algumas escolhas apropriadas de x .

- (b) Use a identidade

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

para encontrar o valor exato de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

- 31.** Encontre os valores de x , se houver, nos quais a função dada não é contínua.

$$(a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (b) f(x) = |x^3 - 2x^2| \\ (c) f(x) = \frac{x+3}{|x^2 + 3x|}$$

- 32.** Determine onde f é contínua.

$$(a) f(x) = \frac{x}{|x| - 3} \quad (b) f(x) = \arccos \left(\frac{1}{x} \right) \\ (c) f(x) = e^{\ln x}$$

- 33.** Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 + 3, & x \leq 2 \\ x^2 + 9, & x > 2 \end{cases}$$

f é contínua em toda parte? Justifique sua conclusão.

- 34.** Um dicionário descreve uma função contínua como “aquela cujos valores em cada ponto estão aproximados de perto pelos valores dos pontos vizinhos”.

- (a) Como você explicaria o significado dos termos “pontos vizinhos” e “aproximados de perto” para um “não matemático”?
 (b) Escreva um parágrafo que explique por que a definição do dicionário está em conformidade com a Definição 1.5.1.

- 35.** Mostre que a conclusão do Teorema do Valor Intermediário pode ser falsa se f não for contínua no intervalo $[a, b]$.

- 36.** Suponha que f seja contínua no intervalo $[0, 1]$, que $f(0) = 2$ e que f não tenha zeros no intervalo. Prove que $f(x) > 0$ para todo x em $[0, 1]$.

- 37.** Mostre que a equação $x^4 + 5x^3 + 5x - 1 = 0$ tem, no mínimo, duas soluções reais no intervalo $[-6, 2]$.

CAPÍTULO 1 ESTABELECENDO CONEXÕES

Na Seção 1.1, desenvolvemos o conceito de reta tangente a um gráfico num dado ponto considerando essa reta como a posição limite de retas secantes por esse ponto (Figura 1.1.4a). Nestes exercícios, desenvolveremos uma ideia análoga em que as retas secantes são substituídas por “círculos secantes” e a reta tangente é substituída por um “círculo tangente” (denominado **círculo osculador**). Começamos com o gráfico de $y = x^2$.

- Lembre que, por três pontos não colineares quaisquer do plano passa um único círculo. Dado qualquer número real positivo x , considere o único “círculo secante” que passa pelo ponto fixado $O(0, 0)$ e os pontos variáveis $Q(-x, x^2)$ e $P(x, x^2)$ (ver figura abaixo). Use Geometria Plana para explicar por que o centro desse círculo está na intersecção do eixo y com a reta bissetora perpendicular do segmento OP .

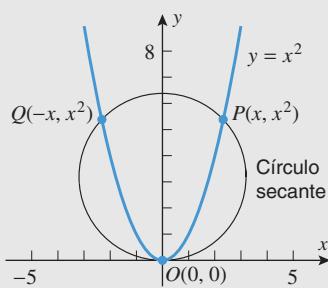


Figura Ex-1

- (a) Denotemos por $(0, C(x))$ o centro do círculo do Exercício 1. Mostre que

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

- (b) Mostre que, quando $x \rightarrow 0^+$, o círculo secante tende a uma posição limite dada pelo círculo que passa pela origem e é centrado em $(0, \frac{1}{2})$. Conforme indicado na figura a seguir, esse círculo é o círculo osculador do gráfico de $y = x^2$ na origem.

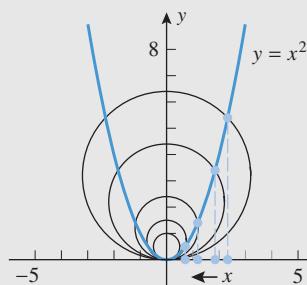


Figura Ex-2

- Mostre que, se trocarmos a curva $y = x^2$ pela curva $y = f(x)$, em que f é uma função par, a fórmula de $C(x)$ se torna

$$C(x) = \frac{1}{2} \left[f(0) + f(x) + \frac{x^2}{f(x) - f(0)} \right]$$

[Aqui, estamos supondo que $f(x) \neq f(0)$ com valores positivos de x próximos de 0.] Se $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = L \neq f(0)$, então definimos o círculo osculador da curva $y = f(x)$ em $(0, f(0))$ como sendo o único círculo que passa por $(0, f(0))$ e é centrado em $(0, L)$. Se $C(x)$ não tiver um limite finito diferente de $f(0)$ quando $x \rightarrow 0^+$, então dizemos que a curva não possui um círculo osculador em $(0, f(0))$.

- Em cada parte, determine o círculo osculador à curva $y = f(x)$ em $(0, f(0))$, se existir.

- (a) $f(x) = 4x^2$ (b) $f(x) = x^2 \cos x$
- (c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x \sin x$
- (e) $f(x) = \cos x$
- (f) $f(x) = x^2 g(x)$, em que $g(x)$ é uma função par contínua com $g(0) \neq 0$
- (g) $f(x) = x^4$



Kirby Lee/WireImage/Getty Images

O coroamento das realizações do Cálculo é sua habilidade em capturar matematicamente o movimento contínuo, permitindo que seja analisado instante a instante.

2

A DERIVADA

Muitos fenômenos físicos envolvem grandezas que variam, como a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias em uma cultura, a intensidade do tremor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico e assim por diante. Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de “derivada”, que é a ferramenta matemática para estudar a taxa segundo a qual varia uma quantidade em relação a outra. O estudo de taxas de variação está bastante relacionado com o conceito geométrico de uma reta tangente a uma curva; portanto, também discutiremos a definição geral de uma reta tangente e os métodos para encontrar sua inclinação e equação.

2.1 RETAS TANGENTES E TAXAS DE VARIAÇÃO

Nesta seção, discutiremos três ideias: retas tangentes a curvas, a velocidade de um objeto movendo-se em linha reta e a taxa segundo a qual uma variável muda em relação a outra. Nossa objetivo é mostrar como essas ideias aparentemente sem conexão estão, na realidade, estreitamente relacionadas.

■ RETAS TANGENTES

No Exemplo 1 da Seção 1.1 mostramos como a noção de limite pode ser utilizada para encontrar uma equação para a reta tangente a uma curva. Naquele estágio, não tínhamos definições precisas de retas tangentes nem de limites para utilizar e, portanto, nossos argumentos foram intuitivos e informais. Contudo, agora que os limites foram definidos com precisão, estamos em condições de dar uma definição matemática de reta tangente a uma curva $y = f(x)$ num ponto $P(x_0, f(x_0))$ da curva. Como ilustramos na Figura 2.1.1, considere um ponto $Q(x, f(x))$ na curva que seja distinto de P e calcule a inclinação m_{PQ} da reta secante por P e Q :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quando x tende a x_0 , então o ponto Q caminha na curva e se aproxima do ponto P . Se a reta secante por P e Q atingir alguma posição limite quando $x \rightarrow x_0$, então consideraremos essa posição como a posição da reta tangente em P . Dito de outra maneira, se a inclinação m_{PQ} da reta secante por P e Q tender a um limite quando $x \rightarrow x_0$, então consideraremos esse limite como a inclinação m_{tg} da reta tangente em P . Assim, temos a definição seguinte.

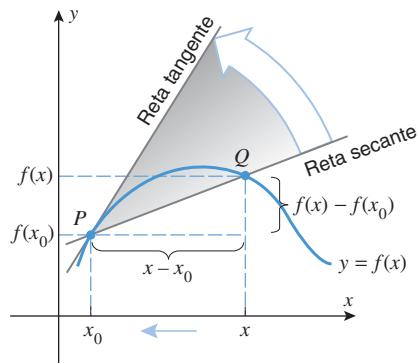


Figura 2.1.1

2.1.1 DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f . A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

onde

$$m_{tg} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

sempre que existir o limite. Para simplificar, também dizemos que essa reta é a reta tangente a $y = f(x)$ em x_0 .

► **Exemplo 1** Use a Definição 2.1.1 para encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ e confirme que o resultado confere com o obtido no Exemplo 1 da Seção 1.1.

Solução Aplicando a Fórmula (1) com $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$, temos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$

Assim, a reta tangente a $y = x^2$ em $(1, 1)$ tem a equação

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = 2x - 1$$

que confere com o Exemplo 1 da Seção 1.1. ◀

Há uma maneira alternativa de expressar a Fórmula (1) que também é muito usada. Denotando por h a diferença

$$h = x - x_0$$

então a afirmação de que $x \rightarrow x_0$ é equivalente à afirmação de que $h \rightarrow 0$; portanto, podemos reescrever (1) em termos de x_0 e de h como

$$m_{tg} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

Na Figura 2.1.2, pode ser visto como a Fórmula (2) dá a inclinação da reta tangente como um limite de inclinações de retas secantes.

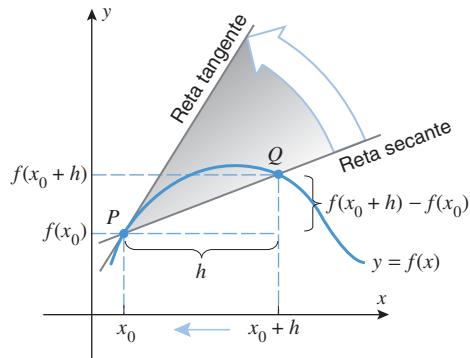


Figura 2.1.2

As Fórmulas (1) e (2) para m_{tg} quase sempre conduzem a uma forma indeterminada do tipo $0/0$; portanto, é necessário efetuar alguma simplificação algébrica ou utilizar outro método para determinar o limite de tais indeterminações.

► **Exemplo 2** Calcule a inclinação no Exemplo 1 usando a Fórmula (2).

Solução Aplicando a Fórmula (2) com $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \end{aligned}$$

o que está de acordo com a inclinação encontrada no Exemplo 1. ◀

► **Exemplo 3** Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = 2/x$ no ponto $(2, 1)$ dessa curva.

Solução Vamos encontrar a inclinação da reta tangente aplicando a Fórmula (2) com $f(x) = 2/x$ e $x_0 = 2$. Temos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2-(2+h)}{2+h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(2+h)} = -\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2+h}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

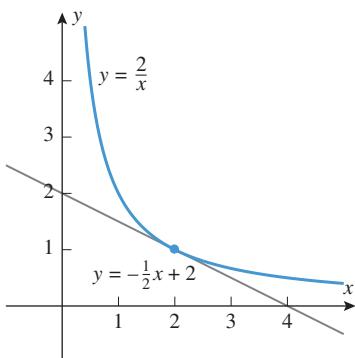


Figura 2.1.3

Assim, uma equação da reta tangente em $(2, 1)$ é

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

(ver Figura 2.1.3). ◀

► **Exemplo 4** Encontre as inclinações das retas tangentes à curva $y = \sqrt{x}$ em $x_0 = 1$, $x_0 = 4$ e $x_0 = 9$.

Solução Poderíamos calcular cada uma dessas inclinações, mas é mais eficiente encontrar a inclinação para um valor arbitrário de x_0 e depois substituir os valores numéricos específicos dados. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Racionalize o numerador para ajudar a eliminar a forma indeterminada do limite.

As inclinações em $x_0 = 1$, 4 e 9 agora podem ser obtidas substituindo esses valores na fórmula geral de m_{tg} . Assim:

$$\begin{aligned} \text{inclinação em } x_0 = 1: \frac{1}{2\sqrt{1}} &= \frac{1}{2} \\ \text{inclinação em } x_0 = 4: \frac{1}{2\sqrt{4}} &= \frac{1}{4} \\ \text{inclinação em } x_0 = 9: \frac{1}{2\sqrt{9}} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(ver Figura 2.1.4). ◀

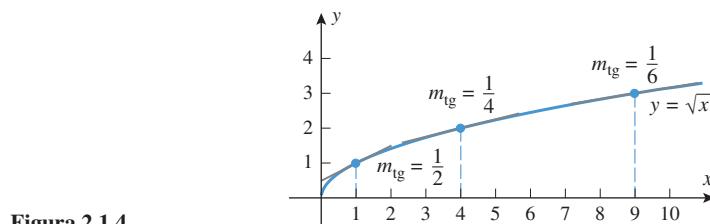


Figura 2.1.4



Carlos Santa Maria/iStockphoto

A velocidade de um avião descreve sua velocidade escalar, sua direção e seu sentido.

■ VELOCIDADE

Um dos temas importantes do Cálculo é o estudo do movimento. Para descrever completamente o movimento de um objeto é necessário especificar sua **velocidade escalar**, a direção e o sentido em que está se movendo. A velocidade escalar e a direção e o sentido do movimento, juntos, constituem o que se denomina a **velocidade** do objeto. Por exemplo, saber que um avião tem uma velocidade escalar de 800 km/h nos diz quanto rápido ele é, mas não para onde está indo. Por outro lado, saber que sua velocidade é de 800 km/h *em direção ao Sul* esclarece não apenas o quanto rápido ele é como também a direção e o sentido de seu movimento.

Adiante, estudaremos o movimento de objetos que se movem ao longo de curvas nos espaços bi e tridimensional, mas por enquanto consideraremos apenas o movimento ao longo

de uma reta, o que constitui o **movimento retilíneo**. Alguns exemplos disso são um pistão movendo-se em um cilindro, um carro de corrida em uma pista reta, um objeto largado diretamente para baixo do alto de um prédio, uma bola que, jogada verticalmente para cima, volta verticalmente para baixo e assim por diante.

Para fins computacionais, vamos supor que uma partícula em movimento retilíneo move-se ao longo de uma reta de coordenadas, que denominamos eixo s . Uma descrição gráfica do movimento retilíneo ao longo do eixo s pode ser obtida com um gráfico da coordenada s da partícula *versus* o tempo decorrido t desde o tempo inicial $t = 0$. Esse gráfico é a **curva posição versus tempo** da partícula. A Figura 2.1.5 mostra duas dessas curvas típicas. A primeira é para um carro que partiu da origem e se move somente no sentido positivo do eixo s . Nesse caso, s cresce com t crescente. A segunda é para uma bola que é jogada verticalmente para cima no sentido positivo de um eixo s a partir de uma altura inicial s_0 e, então, cai verticalmente para baixo no sentido negativo. Nesse caso, s cresce quando a bola sobe e decresce quando a bola desce.

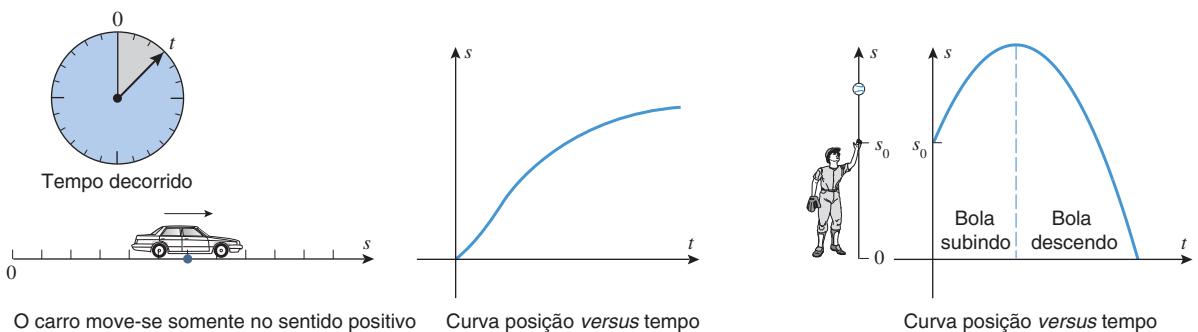


Figura 2.1.5

Se uma partícula em movimento retilíneo percorre o eixo s de tal modo que a função da coordenada da posição em termos do tempo t decorrido é

$$s = f(t) \quad (3)$$

então f é denominada **função posição da partícula**; o gráfico de (3) é a curva posição *versus* tempo. A **velocidade média** da partícula em um intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$, com $h > 0$, é definida como

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (4)$$

Mostre que (4) também vale para um intervalo de tempo $[t_0 + h, t_0]$, $h < 0$.

A variação na posição

$$f(t_0 + h) - f(t_0)$$

é denominada **deslocamento** da partícula ao longo do intervalo de tempo de t_0 até $t_0 + h$.

► Exemplo 5 Suponha que $s = f(t) = 1 + 5t - 2t^2$ seja a função posição de uma partícula, onde s está em metros e t está em segundos. Encontre as velocidades médias da partícula nos intervalos de tempo (a) $[0, 2]$ e (b) $[2, 3]$.

Solução (a) Aplicando (4) com $t_0 = 0$ e $h = 2$, vemos que a velocidade média é

$$v_m = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m/s}$$

Solução (b) Aplicando (4) com $t_0 = 2$ e $h = 1$, vemos que a velocidade média é

$$v_m = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{-2 - 3}{1} = \frac{-5}{1} = -5 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$

A velocidade média descreve o comportamento de uma partícula em movimento retilíneo em um *intervalo* de tempo. Estamos interessados na “velocidade instantânea” da par-

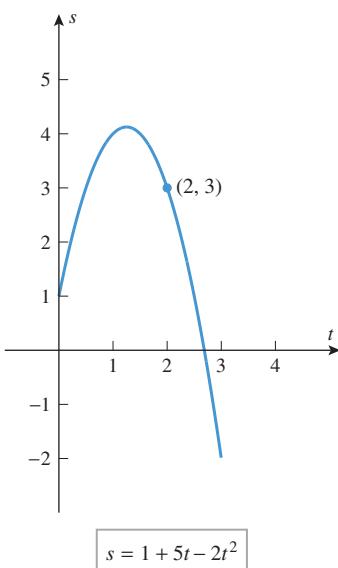


Figura 2.1.6

Tabela 2.1.1

INTERVALO DE TEMPO	VELOCIDADE MÉDIA (m/s)
$2,0 \leq t \leq 3,0$	-5
$2,0 \leq t \leq 2,1$	-3,2
$2,0 \leq t \leq 2,01$	-3,02
$2,0 \leq t \leq 2,001$	-3,002
$2,0 \leq t \leq 2,0001$	-3,0002

Observe os valores negativos para a velocidade no Exemplo 6. Isso é consistente com o fato de que o objeto está se movendo no sentido negativo ao longo do eixo s .

tícula, que descreve seu comportamento em um *instante* de tempo específico. A Fórmula (4) não é diretamente aplicável para calcular a velocidade instantânea, pois o “tempo decorrido” em um instante específico é zero, fazendo com que (4) se torne indefinida. Uma maneira de contornar esse problema é calcular velocidades médias para intervalos de tempo pequenos entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$. Essas velocidades médias podem ser vistas como aproximações da “velocidade instantânea” da partícula no instante t_0 . Se essas velocidades médias tiverem um limite quando h tender a zero, então podemos tomar esse limite como sendo a *velocidade instantânea* da partícula no instante t_0 . Vejamos um exemplo.

► **Exemplo 6** Considere a partícula no Exemplo 5, cuja função posição é

$$s = f(t) = 1 + 5t - 2t^2$$

A posição da partícula no instante $t = 2$ s é $s = 3$ m (Figura 2.1.6). Encontre a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 2$ s.

Solução Uma primeira aproximação da velocidade instantânea da partícula é a velocidade média $v_m = -5$ m/s no intervalo de tempo de $t = 2$ até $t = 3$, conforme vimos no Exemplo 5(b). Para melhorar essa aproximação inicial, calculemos a velocidade média numa sucessão de intervalos de tempo cada vez menores. Deixamos para o leitor conferir as contas apresentadas na Tabela 2.1.1. As velocidades médias nessa tabela parecem tender a um limite de -3 m/s, sugerindo fortemente que essa deve ser a velocidade instantânea no instante de tempo $t = 2$. Para confirmar isso analiticamente, começamos calculando a velocidade média do objeto num intervalo de tempo arbitrário de $t = 2$ até $t = 2 + h$ usando a Fórmula (4):

$$v_m = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{[1 + 5(2+h) - 2(2+h)^2] - 3}{h}$$

A velocidade instantânea do objeto no instante $t = 2$ é calculada como um limite quando $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \text{velocidade instantânea} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + 5(2+h) - 2(2+h)^2] - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 + (10 + 5h) - (8 + 8h + 2h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h - 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3 - 2h) = -3 \end{aligned}$$

Isso confirma nossa conjectura numérica, pois a velocidade instantânea depois de 2 s é de -3 m/s. ◀

Considere uma partícula em movimento retilíneo com função posição $s = f(t)$. Motivados pelo Exemplo 6, definimos a *velocidade instantânea* v_i da partícula no instante t_0 como o limite, quando $h \rightarrow 0$, das velocidades médias v_m nos intervalos de tempo entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$. Assim, a partir de (4), obtemos

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (5)$$

Geometricamente, a velocidade média v_m entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$ é a inclinação da reta secante pelos pontos $P(t_0, f(t_0))$ e $Q(t_0 + h, f(t_0 + h))$ da curva posição *versus* tempo, e a velocidade instantânea v_i no instante t_0 é a inclinação da reta tangente à curva posição *versus* tempo no ponto $P(t_0, f(t_0))$ (Figura 2.1.7).

Confirme a solução do Exemplo 5(b) calculando a inclinação de uma reta secante apropriada.

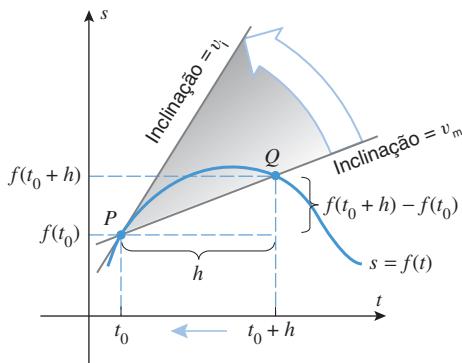


Figura 2.1.7

■ INCLINAÇÕES E TAXAS DE VARIAÇÃO

A velocidade pode ser vista como uma *taxa de variação*, mais precisamente, a taxa de variação da posição em relação ao tempo. As taxas de variação também ocorrem em outras aplicações. Por exemplo:

- Um biólogo pode estar interessado na taxa segundo a qual a quantidade de bactérias de uma colônia muda com o tempo.
- Um engenheiro pode estar interessado na taxa segundo a qual o comprimento de um cano de metal muda com a temperatura.
- Um economista pode estar interessado na taxa segundo a qual os custos de produção mudam com a quantidade do produto que está sendo produzido.
- Um médico pode estar interessado na taxa segundo a qual o raio de uma artéria muda com a concentração de álcool na corrente sanguínea.

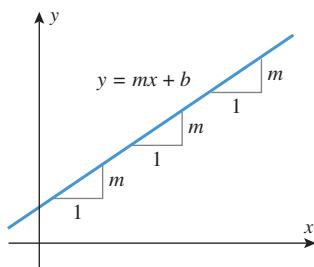


Figura 2.1.8

Nosso próximo objetivo é definir precisamente o que se entende por “taxa de variação de y em relação a x ” quando y é uma função de x . No caso em que y for uma função linear de x , digamos $y = mx + b$, a inclinação m será uma medida natural da taxa de variação de y em relação a x . Como ilustramos na Figura 2.1.8, cada aumento de 1 unidade em x em qualquer lugar ao longo da reta produz uma variação de m unidades de y , de modo que vemos que y muda a uma taxa constante em relação a x ao longo da reta e que é m que mede essa taxa de variação.

► **Exemplo 7** Encontre a taxa de variação de y em relação a x se

$$(a) y = 2x - 1 \quad (b) y = -5x + 1$$

Solução Em (a), a taxa de variação de y em relação a x é $m = 2$, de modo que um aumento de 1 unidade em x produz um aumento de 2 unidades de y . Em (b), a taxa de variação de y em relação a x é $m = -5$, de modo que um aumento de 1 unidade em x produz uma redução de 5 unidades de y . ◀

Em problemas aplicados, mudar as unidades de medida pode mudar a inclinação de uma reta; assim, é essencial incluir as unidades quando calculamos a inclinação. Os exemplos a seguir ilustram isso.

► **Exemplo 8** Considere uma barra uniforme de 40 cm de comprimento termicamente isolada em sua superfície lateral e com as extremidades mantidas a temperaturas constantes de 25° e 5°C, respectivamente (Figura 2.1.9a). Mostra-se em Física que, sob condições apropriadas, o gráfico da temperatura T versus a distância x da extremidade esquerda da barra será

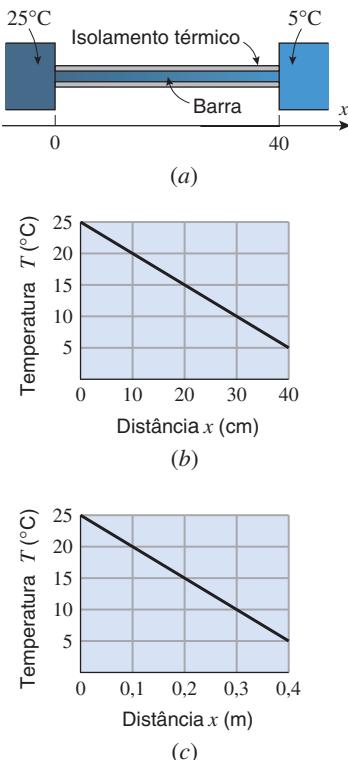


Figura 2.1.9

uma linhareta. As partes (b) e (c) da Figura 2.1.9 mostram dois desses gráficos: um com x medido em centímetros e o outro em metros. As inclinações em ambos os casos são:

$$m = \frac{5 - 25}{40 - 0} = \frac{-20}{40} = -0,5 \quad (6)$$

$$m = \frac{5 - 25}{0,4 - 0} = \frac{-20}{0,4} = -50 \quad (7)$$

A inclinação de (6) indica que a temperatura *decrece* a uma taxa de $0,5^{\circ}\text{C}$ por centímetro de distância da extremidade esquerda da barra, e a de (7) indica que a temperatura deca $\text{re}ce$ a uma taxa de 50°C por metro de distância da extremidade esquerda da barra. Embora ambas as inclinações sejam diferentes, os dois resultados são fisicamente equivalentes. \blacktriangleleft

Muito embora a taxa de variação de y em relação a x seja constante ao longo de uma reta não vertical $y = mx + b$, isso não é válido para uma curva qualquer $y = f(x)$. Por exemplo, na Figura 2.1.10, a variação em y que resulta de um aumento de 1 unidade em x tende a ter magnitude maior nas regiões em que a curva cresce ou decresce mais rapidamente do que em regiões em que a curva cresce ou decresce mais lentamente. Assim como fizemos com a velocidade, vamos distinguir entre a taxa de variação média sobre um intervalo e a taxa de variação instantânea em um ponto específico.

Se $y = f(x)$, então definimos a **taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$** como

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (8)$$

e dizemos que a **taxa de variação instantânea de y em relação a x** é

$$r_i = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (9)$$

Geometricamente, a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é a inclinação da reta secante pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_1, f(x_1))$ (Figura 2.1.11), e a taxa de variação instantânea de y em relação a x em x_0 é a inclinação da reta tangente no ponto $P(x_0, f(x_0))$ (pois é o limite das inclinações das retas secantes por P).

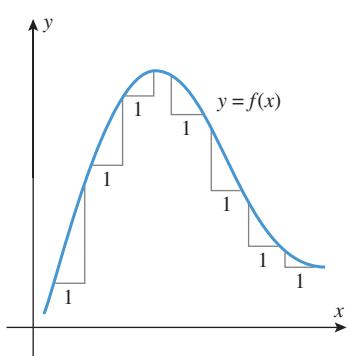


Figura 2.1.10

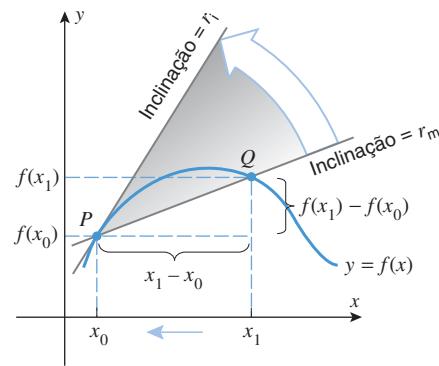


Figura 2.1.11

Se quisermos, podemos tomar $h = x_1 - x_0$ e reescrever (8) e (9) como

$$r_m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (10)$$

$$r_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (11)$$

► **Exemplo 9** Seja $y = x^2 + 1$.

- Encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[3, 5]$.
- Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x quando $x = -4$.

Solução (a) Aplicando a Fórmula (8) com $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 3$ e $x_1 = 5$, obtemos

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25 - 10}{2} = 8$$

Assim, y cresce uma média de 8 unidades por aumento de 1 unidade em x ao longo do intervalo $[3, 5]$.

Solução (b) Aplicando a Fórmula (9) com $f(x) = x^2 + 1$ e $x_0 = -4$, obtemos

$$\begin{aligned} r_i &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow -4} \frac{f(x_1) - f(-4)}{x_1 - (-4)} = \lim_{x_1 \rightarrow -4} \frac{(x_1^2 + 1) - 17}{x_1 + 4} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow -4} \frac{x_1^2 - 16}{x_1 + 4} = \lim_{x_1 \rightarrow -4} \frac{(x_1 + 4)(x_1 - 4)}{x_1 + 4} = \lim_{x_1 \rightarrow -4} (x_1 - 4) = -8 \end{aligned}$$

Faça os cálculos do Exemplo 9 usando as Fórmulas (10) e (11).

Assim, um pequeno aumento em x a partir de $x = -4$ acarretará aproximadamente um decréscimo de 8 unidades em y . ◀

TAXAS DE VARIAÇÃO EM APLICAÇÕES

Em problemas aplicados, as taxas de variação média e instantânea devem ser acompanhadas de unidades apropriadas. Em geral, as unidades de uma taxa de variação de y em relação a x são obtidas “dividindo-se” as unidades de y pelas unidades de x e, então, simplificando-se pelas regras usuais da Álgebra. Seguem-se alguns exemplos:

- Se y estiver em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$) e x em centímetros (cm), então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será graus Celsius por centímetro ($^{\circ}\text{C}/\text{cm}$).
- Se y estiver em metros por segundo (m/s) e x em segundos (s), então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será metros por segundo por segundo (m/s^2), o que é usualmente notado por m/s^2 .
- Se y estiver em newton-metros ($\text{N}\cdot\text{m}$) e x em metros, então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será newtons (N), pois $\text{N}\cdot\text{m}/\text{m} = \text{N}$.
- Se y estiver em metro-quilos ($\text{m}\cdot\text{kg}$) e x em horas (h), então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será metro-quilos por hora ($\text{m}\cdot\text{kg}/\text{h}$).

► **Exemplo 10** O fator limitante na resistência atlética é o desempenho cardíaco, isto é, o volume de sangue que o coração pode bombear por unidade de tempo durante uma competição atlética. A Figura 2.1.12 mostra um gráfico de teste de esforço de desempenho cardíaco V em litros (L) de sangue versus a quantidade de trabalho que está sendo feito W em quilogramas-metros ($\text{kg}\cdot\text{m}$) durante 1 minuto de levantamento de peso. O gráfico ilustra o conhecido fato médico de que o desempenho cardíaco aumenta com a quantidade de trabalho, mas, depois de atingir um valor de pico, começa a cair.

- Use a reta secante que aparece na Figura 2.1.13a para estimar a taxa média de desempenho cardíaco em relação ao trabalho a ser executado quando este aumenta de 300 para 1200 kg·m.
- Use a reta tangente da Figura 2.1.13b para estimar a taxa de variação instantânea do desempenho cardíaco em relação ao trabalho que está sendo executado no ponto onde ele é de 300 kg·m.

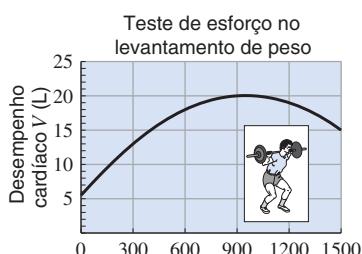


Figura 2.1.12

Solução (a) Usando os pontos estimados $(300, 13)$ e $(1200, 19)$ para encontrar a inclinação da reta secante, obtemos

$$r_m \approx \frac{19 - 13}{1200 - 300} \approx 0,0067 \frac{\text{L}}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

Isso significa que, em média, o aumento de 1 unidade no trabalho que está sendo executado produz um aumento de $0,0067 \text{ L}$ no desempenho cardíaco no intervalo.

Solução (b) Estimamos a inclinação da curva de desempenho cardíaco em $W = 300$ traçando uma reta que parece encontrar a curva em $W = 300$ com inclinação igual à da curva (Figura 2.1.13b). Estimando os pontos $(0, 7)$ e $(900, 25)$ nessa reta, obtemos

$$r_i \approx \frac{25 - 7}{900 - 0} = 0,02 \frac{\text{L}}{\text{kg}\cdot\text{m}} \quad \blacktriangleleft$$

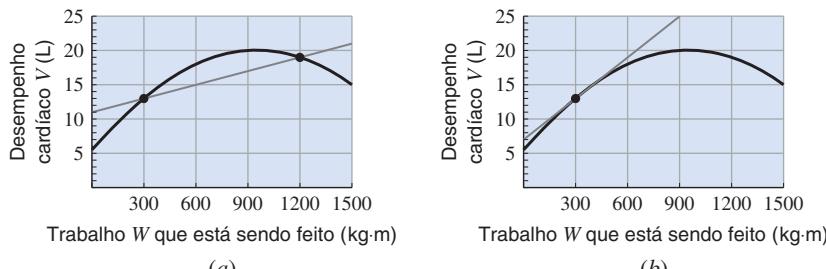


Figura 2.1.13

(a)

(b)

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 2.1 (Ver página 143 para respostas.)

1. A inclinação m_{tg} da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$m_{tg} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{_____}}{\text{_____}}$$

2. A reta tangente à curva $y = (x - 1)^2$ no ponto $(-1, 4)$ tem equação $4x + y = 0$. Assim, o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$$

é _____.

3. Uma partícula se move ao longo de um eixo s , onde s está em metros. Durante os primeiros 5 segundos do movimento, a posição da partícula é dada por

$$s = 10 - (3 - t)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

Use essa função posição para completar cada parte.

- (a) Inicialmente, a partícula avança uma distância de _____ m no sentido _____ (positivo/negativo); depois reverte o sentido, percorrendo uma distância de _____ m durante o período de 5 s restante.

- (b) A velocidade média da partícula no período de 5 segundos é _____.

4. Seja $s = f(t)$ a equação de uma curva posição versus tempo para uma partícula em movimento retilíneo, onde s está em metros e t está em segundos. Suponha que $s = -1$ quando $t = 2$ e que a velocidade instantânea da partícula nesse instante é de 3 m/s. A equação da reta tangente à curva posição versus tempo no instante $t = 2$ é _____.

5. Suponha que $y = x^2 + x$.

- (a) A taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $2 \leq x \leq 5$ é _____.

- (b) A taxa de variação instantânea r_i de y em relação a x em $x = 2$ é _____.

EXERCÍCIOS 2.1

1. A figura a seguir mostra a curva de posição versus tempo para um elevador que se move para cima até 60 m e, então, descarrega seus passageiros.

- (a) Dê uma estimativa para a velocidade instantânea do elevador em $t = 10$ s.
 (b) Esboce uma curva de velocidade versus tempo para o movimento do elevador no intervalo $0 \leq t \leq 20$.

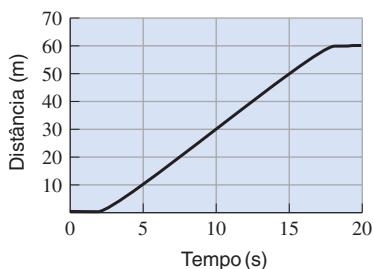


Figura Ex-1

2. A figura abaixo mostra a curva posição *versus* tempo de um automóvel durante um período de 10 s. Use os segmentos de reta mostrados na figura para obter uma estimativa da velocidade instantânea do automóvel nos instantes $t = 4$ s e $t = 8$ s.

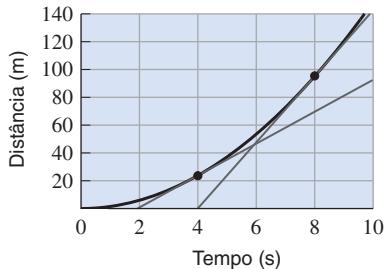


Figura Ex-2

3. A figura abaixo mostra a curva de posição *versus* tempo para uma certa partícula se movendo ao longo de uma linha reta. A partir do gráfico, obtenha uma estimativa para as seguintes quantidades:
- a velocidade média no intervalo $0 \leq t \leq 3$.
 - os valores de t nos quais a velocidade instantânea é zero.
 - os valores de t nos quais a velocidade instantânea é máxima ou mínima.
 - a velocidade instantânea quando $t = 3$ s.

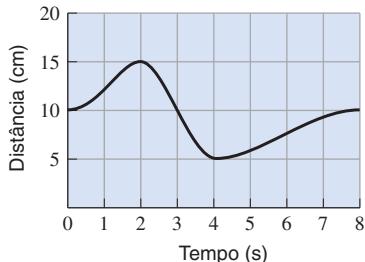


Figura Ex-3

4. As figuras abaixo mostram as curvas de posição *versus* tempo para quatro partículas diferentes em movimento retilíneo. Para cada partícula, determine se a velocidade instantânea está aumentando ou diminuindo com o tempo.

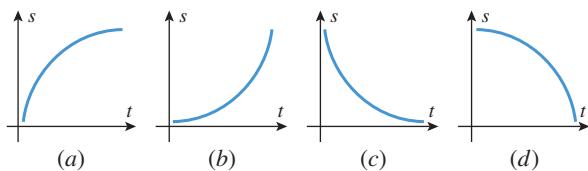


Figura Ex-4

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Se uma partícula se move com velocidade constante, o que pode ser dito sobre a curva de posição *versus* tempo?
6. Um automóvel, inicialmente em repouso, começa a se mover em uma pista reta. A velocidade aumenta de modo uniforme até que, de repente, ao ver uma barreira de concreto, o motorista freia firmemente em t_0 . O carro desacelera rapidamente, mas é muito tarde – ele se choca com a barreira no instante t_1 e volta instantaneamente ao repouso. Esboce uma curva de posição *versus* tempo que possa representar o movimento do carro. Indique como as características de sua curva correspondem aos eventos desse cenário.

7-10 Em cada exercício, esboce uma curva e uma reta L satisfazendo as condições dadas. ■

- L é tangente à curva e intersecta a curva em pelo menos dois pontos.
- L intersecta a curva em exatamente um ponto, mas não é tangente à curva.
- L é tangente à curva em dois pontos distintos.
- L é tangente à curva em dois pontos distintos e intersecta a curva num terceiro ponto.

11-14 São dados uma função $y = f(x)$ e os valores de x_0 e x_1 .

- Encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$.
- Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x no valor especificado de x_0 .
- Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x em um valor arbitrário de x_0 .
- A taxa de variação média em (a) é a inclinação de uma certa reta secante, e a taxa de variação instantânea em (b) é a inclinação de uma certa reta tangente. Esboce o gráfico de $y = f(x)$ junto com essas duas retas. ■

11. $y = 2x^2; x_0 = 0, x_1 = 1$ 12. $y = x^3; x_0 = 1, x_1 = 2$

13. $y = 1/x; x_0 = 2, x_1 = 3$ 14. $y = 1/x^2; x_0 = 1, x_1 = 2$

15-18 São dados uma função $y = f(x)$ e um valor de x_0 .

- Encontre uma fórmula para a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto arbitrário $x = x_0$.
- Use a fórmula obtida em (a) para encontrar a inclinação da reta tangente para o dado valor de x_0 . ■

15. $f(x) = x^2 - 1; x_0 = -1$

16. $f(x) = x^2 + 3x + 2; x_0 = 2$

17. $f(x) = x + \sqrt{x}; x_0 = 1$

18. $f(x) = 1/\sqrt{x}; x_0 = 4$

19-22 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. Se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$, então $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$.

20. Uma reta tangente a uma curva $y = f(x)$ é um tipo particular de reta secante à curva.
21. A velocidade de um objeto representa uma variação na posição do objeto.
22. Uma viga de metal de 50 m de comprimento está apoiada em cada uma de suas extremidades numa coluna de concreto. Um peso de x toneladas é colocado no meio da viga e $f(x)$ modela a quantidade de centímetros que a viga cede com esse peso. Nesse caso, a unidade da taxa de variação de $y = f(x)$ em relação a x é de centímetros por tonelada.
23. Suponha que na figura a seguir esteja a curva de temperatura externa em °F versus tempo relativa a um período de 24 horas.
- Estime a temperatura máxima e o instante no qual ela ocorre.
 - O aumento da temperatura entre 8h e 14h é razoavelmente linear. Estime a taxa segundo a qual a temperatura está aumentando durante esse período.
 - Estime o tempo no qual a temperatura decresce mais rapidamente. Estime a taxa de variação instantânea da temperatura em relação ao tempo naquele instante.

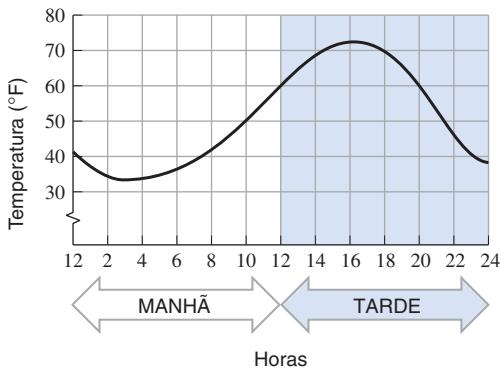


Figura Ex-23

24. A figura abaixo mostra o gráfico da pressão p em atmosferas (atm) versus o volume V em litros (L) de 1 mol de um gás ideal a uma temperatura constante de 300 K (kelvin). Use as retas tangentes mostradas para estimar a taxa de variação da pressão em relação ao volume nos pontos em que $V = 10 \text{ L}$ e $V = 25 \text{ L}$.

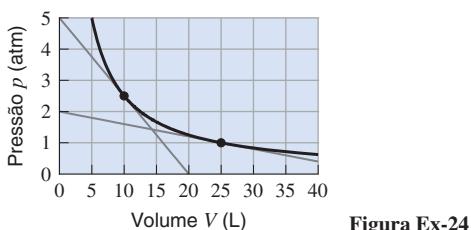


Figura Ex-24

25. A figura a seguir mostra o gráfico da altura h em centímetros versus a idade t em anos de um indivíduo, desde o nascimento até os 20 anos.
- Quando a taxa de crescimento é máxima?
 - Estime a taxa de crescimento aos 5 anos.

- Aproximadamente em que idade, entre 10 e 20 anos, a taxa de crescimento é máxima? Estime a taxa de crescimento nessa idade.
- Esboce um gráfico aproximado da taxa de crescimento versus idade.

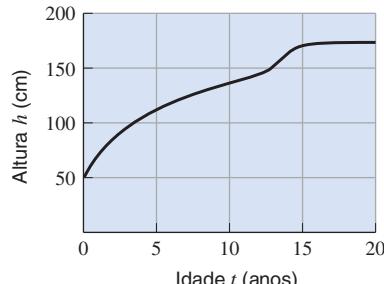


Figura Ex-25

26. Suponha que um objeto seja largado do repouso (ou seja, com velocidade inicial nula) desde o alto do Empire State Building, em Nova Iorque, Estados Unidos, de uma altura de 1.250 pés acima do nível da rua (ver Figura Ex-26). A altura do objeto (em pés) pode ser modelada pela função posição $s = f(t) = 1250 - 16t^2$.
- Verifique que o objeto ainda está caindo aos $t = 5$ s.
 - Encontre a velocidade média do objeto no intervalo de $t = 5$ a $t = 6$ s.
 - Encontre a velocidade instantânea do objeto no instante $t = 5$ s.

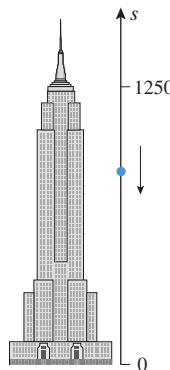


Figura Ex-26

27. Durante os 40 segundos iniciais de voo, um foguete é disparado diretamente para cima, de forma que a altura atingida em t segundos é de $s = 0,3t^3$ ft.
- Qual é a altura atingida em 40 s?
 - Qual é a velocidade média do foguete durante os primeiros 40 s?
 - Qual é a velocidade média do foguete durante os primeiros 135 m de voo?
 - Qual é a velocidade instantânea ao fim dos 40 segundos?
28. Um automóvel é conduzido ao longo de uma estrada reta de tal forma que, decorridos $0 \leq t \leq 12$ segundos, está a $s = 4,5t^2$ metros de sua posição inicial.
- Encontre a velocidade média do carro no intervalo $[0, 12]$.
 - Encontre a velocidade instantânea do carro aos $t = 6$ s.

29. Um robô move-se no sentido positivo de um eixo de tal forma que, após t minutos, sua distância é $s = 6t^4$ centímetros da origem.
- Encontre a velocidade média do robô no intervalo $[2, 4]$.
 - Encontre a velocidade instantânea em $t = 2$.
30. **Texto** Discuta como a reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ num ponto $P(x_0, f(x_0))$ é definida em termos de retas secantes ao gráfico pelo ponto P .
31. **Texto** Uma partícula está em movimento retilíneo no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$. Explique a conexão entre a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 1$ e as velocidades médias da partícula em partes do intervalo $0 \leq t \leq 2$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.1

1. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 2. -4 3. (a) 9; positivo; 4 (b) 1 m/s 4. $s = 3t - 7$
5. (a) 8 (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x) - 6}{x - 2}$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 + (2+h)] - 6}{h}$

2.2 FUNÇÃO DERIVADA

Nesta seção, discutiremos o conceito de uma “derivada”, que é a principal ferramenta matemática utilizada para calcular e estudar as taxas de variação.

■ DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DERIVADA

Na última seção, mostramos que se o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existir, então podemos interpretá-lo ou como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ ou como a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = x_0$ [ver Fórmulas (2) e (11) daquela seção]. Esse limite é tão importante que possui notação especial:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

Podemos pensar em f' (que se lê “efe linha”) como uma função cuja entrada é x_0 e cuja saída é o número $f'(x_0)$ que representa ou a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ em $x = x_0$, ou a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = x_0$. Para enfatizar esse ponto de vista funcional, substituímos x_0 por x em (1) e estabelecemos a definição a seguir.

A expressão

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

que aparece em (2) é comumente chamada de **quociente de diferenças**.

2.2.1 DEFINIÇÃO

A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

é denominada **derivada de f em relação a x** . O domínio de f' consiste em todos os x do domínio de f com os quais existe o limite.

O termo “derivada” é usado porque a função f' deriva da função f por meio de um limite.

► **Exemplo 1** Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = x^2$ e use-a para encontrar a equação da reta tangente a $y = x^2$ em $x = 2$.

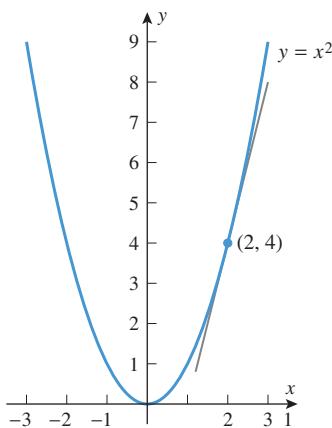


Figura 2.2.1

Solução Segue de (2) que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Assim, a inclinação da reta tangente a $y = x^2$ em $x = 2$ é $f'(2) = 4$. Como $y = 4$ com $x = 2$, a fórmula ponto-inclinação da reta tangente é

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

que podemos reescrever no formato inclinação-corte como $y = 4x - 4$ (Figura 2.2.1). ◀

Podemos pensar em f' como uma função “que produz inclinações”, no sentido de que o valor de $f'(x)$ em $x = x_0$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $x = x_0$. Esse aspecto da derivada está ilustrado na Figura 2.2.2, que mostra os gráficos de $f(x) = x^2$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$ (obtida no Exemplo 1). A figura ilustra que os valores de $f'(x) = 2x$ em $x = -2, 0$ e 2 correspondem às inclinações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$ nesses valores de x .

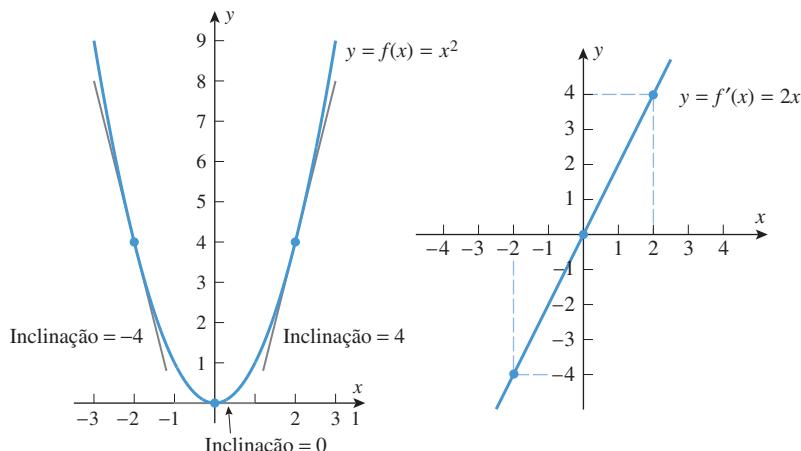


Figura 2.2.2

Em geral, se $f'(x)$ estiver definida em $x = x_0$, então a fórmula ponto-inclinação da equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$ pode ser encontrada através dos seguintes passos.

Encontrando a Equação da Reta Tangente a $y = f(x)$ em $x = x_0$.

Passo 1. Calcule $f(x_0)$; o ponto de tangência é $(x_0, f(x_0))$.

Passo 2. Encontre $f'(x)$ e calcule $f'(x_0)$, que é a inclinação m da reta.

Passo 3. Substitua o valor da inclinação m e o ponto $(x_0, f(x_0))$ na forma ponto-inclinação da reta

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ou, equivalente, por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

A fórmula binomial é usada na solução (a) para expandir $(x + h)^3$. Essa fórmula pode ser encontrada no final do livro.

► Exemplo 2

- Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = x^3 - x$.
- Faça os gráficos de f e f' juntos e discuta a relação entre ambos.

Solução (a)

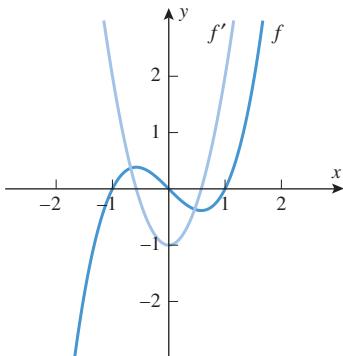


Figura 2.2.3

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h] - [x^3 - x]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} [3x^2 + 3xh + h^2 - 1] = 3x^2 - 1\end{aligned}$$

Solução (b) Uma vez que $f'(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto x , a derivada $f'(x)$ é positiva onde a reta tangente $y = f(x)$ tem inclinação positiva, é negativa onde a inclinação é negativa e é zero onde a reta tangente é horizontal. Deixamos para o leitor a verificação de que isso está em conformidade com os gráficos de $f(x) = x^3 - x$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$ mostrados na Figura 2.2.3. ◀

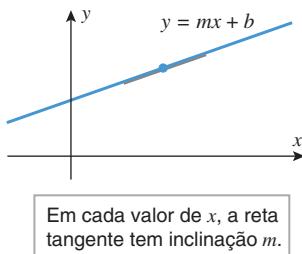


Figura 2.2.4

O resultado no Exemplo 3 é consistente com nossa observação anterior de que a taxa de variação de y em relação a x ao longo da reta $y = mx + b$ é constante, e essa constante é m .

► Exemplo 3 Em cada ponto x , a tangente à reta $y = mx + b$ coincide com a própria reta (Figura 2.2.4) e, portanto, todas as retas tangentes têm inclinação m . Isso sugere geometricamente que, se $f(x) = mx + b$, então $f'(x) = m$ com qualquer x . Isso é confirmado pelos seguintes cálculos:

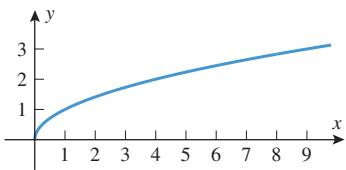
$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[m(x+h) + b] - [mx + b]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m\end{aligned}\quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 4

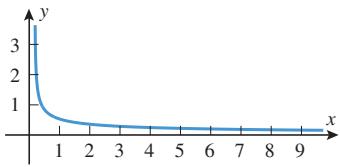
- Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = \sqrt{x}$.
- Encontre a inclinação da reta tangente a $y = \sqrt{x}$ em $x = 9$.
- Encontre os limites de $f'(x)$ quando $x \rightarrow 0^+$ e quando $x \rightarrow +\infty$ e explique o que esses limites dizem sobre o gráfico de f .

Solução (a) Lembre que, no Exemplo 4 da Seção 2.1, obtivemos a inclinação da reta tangente a $y = \sqrt{x}$ em $x = x_0$ como sendo $m_{tg} = 1/(2\sqrt{x_0})$. Assim, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Solução (b) A inclinação da reta tangente em $x = 9$ é $f'(9)$; logo, a partir de (a), essa inclinação é $f'(9) = 1/(2\sqrt{9}) = \frac{1}{6}$.



$$y = f(x) = \sqrt{x}$$



$$y = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Figura 2.2.5

Solução (c) Os gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ e de $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ são mostrados na Figura 2.2.5. Observe que $f'(x) > 0$ se $x > 0$, o que significa que todas as retas tangentes ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ têm inclinações positivas em todos os pontos desse intervalo. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

o gráfico se torna cada vez mais vertical quando $x \rightarrow 0^+$ e cada vez mais horizontal quando $x \rightarrow +\infty$. ◀

■ CALCULANDO A VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Segue da Fórmula (5) da Seção 2.1 (substituindo t_0 por t) que, se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, então a velocidade instantânea em um instante arbitrário t será dada por

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Como o lado direito dessa equação é a derivada da função f (com variável independente t em vez de x), segue que, se $f(t)$ for a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, então a função

$$v(t) = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (4)$$

representará a velocidade instantânea da partícula no instante t . Consequentemente, dizemos que (4) é a **função velocidade instantânea** ou, mais simplesmente, a **função velocidade** da partícula.

► **Exemplo 5** Lembre que a partícula do Exemplo 5 da Seção 2.1 tem função posição $s = f(t) = 1 + 5t - 2t^2$. Aqui, $f(t)$ é medida em metros e t é medido em segundos. Encontre a função velocidade dessa partícula.

Solução Segue de (4) que a função velocidade é

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + 5(t+h) - 2(t+h)^2] - [1 + 5t - 2t^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2[t^2 + 2th + h^2 - t^2] + 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4th - 2h^2 + 5h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-4t - 2h + 5) = 5 - 4t \end{aligned}$$

onde as unidades da velocidade são metros por segundo. ◀

■ DIFERENCIABILIDADE

É possível que o limite que define a derivada de uma função f não exista em certos pontos do domínio de f . Nesses pontos, a derivada não está definida. Para levar em conta essa possibilidade, introduzimos a seguinte terminologia.

2.2.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é **diferenciável** ou **derivável em x_0** se existir o limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5)$$

Se f for diferenciável em cada ponto do intervalo aberto (a, b) , então diremos que a função é **diferenciável em (a, b)** e, analogamente, em intervalos abertos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. Nesse último caso, dizemos que f é **diferenciável em toda parte**.

Geometricamente, uma função f é diferenciável em x_0 se o gráfico de f possuir uma reta tangente em x_0 . Assim, f não é derivável em cada ponto x_0 em que as retas secantes pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ distintos de P não tenderem a uma única posição limite *não vertical* quando $x \rightarrow x_0$. A Figura 2.2.6 exibe duas situações comuns nas quais uma função que é contínua em x_0 pode deixar de ser derivável em x_0 . Essas situações podem ser descritas informalmente como

- pontos com bico
- pontos de tangência vertical

Em um bico, as inclinações das retas secantes têm limites distintos pela esquerda e pela direita e, portanto, o limite *bilateral* que define a derivada não existe (Figura 2.2.7). Em um ponto de tangência vertical, as inclinações das retas secantes tendem a $+\infty$ ou $-\infty$ pela esquerda e pela direita (Figura 2.2.8), portanto, novamente o limite que define a derivada não existe.

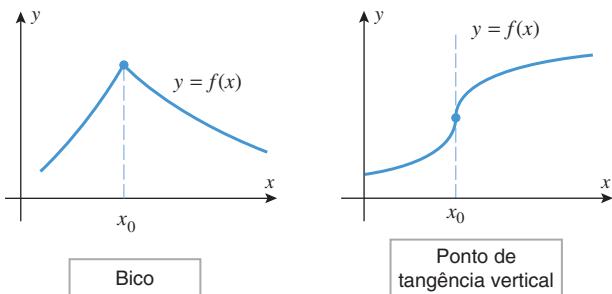


Figura 2.2.6

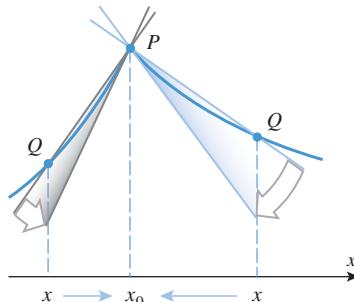


Figura 2.2.7

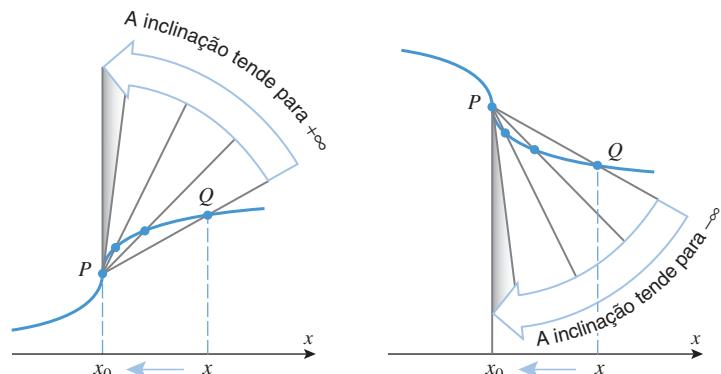


Figura 2.2.8

Existem outras circunstâncias menos óbvias sob as quais uma função pode deixar de ser diferenciável. (Ver, por exemplo, o Exercício 49.)

Como ilustra a Figura 2.2.9, a diferenciabilidade em x_0 também pode ser descrita informalmente em termos do comportamento do gráfico de f sob ampliações cada vez maiores no ponto $P(x_0, f(x_0))$. Se f for derivável em x_0 , então com ampliações suficientemente grandes em P o gráfico parece ser uma reta não vertical (a reta tangente); se ocor-

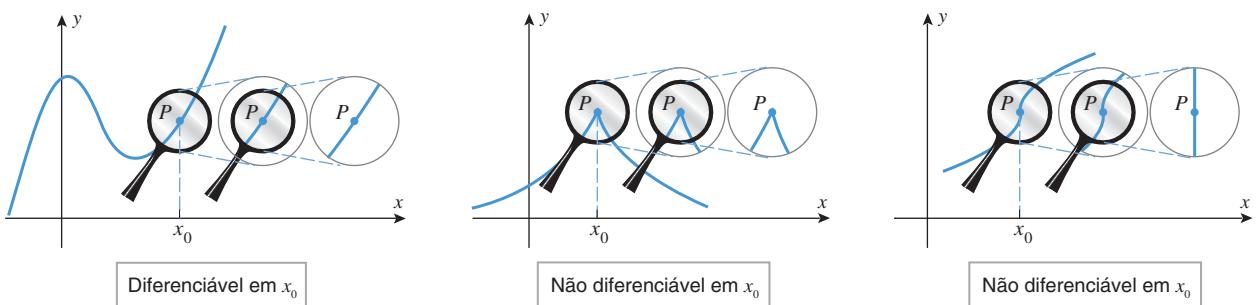


Figura 2.2.9

rer um bico em x_0 , então esse bico persistirá em qualquer ampliação, por maior que seja, e o gráfico nunca parecerá uma reta não vertical; finalmente, se ocorrer uma tangência vertical em x_0 , então o gráfico de f parecerá uma reta vertical com ampliações suficientemente grandes em P .

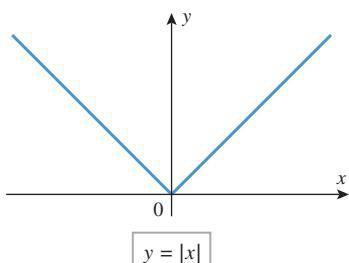


Figura 2.2.10

► Exemplo 6 O gráfico de $y = |x|$ na Figura 2.2.10 mostra que há um bico em $x = 0$, e isso implica que $f(x) = |x|$ não é diferenciável em aquele ponto.

- Prove que $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$, mostrando que o limite na Definição 2.2.2 não existe em aquele ponto.
- Encontre uma fórmula para $f'(x)$.

Solução (a) Da Fórmula (5) com $x_0 = 0$, o valor de $f'(0)$, se existisse, seria dado por

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad (6)$$

Contudo,

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

Como esses limites não são iguais, o limite bilateral em (5) não existe e, consequentemente, $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

Solução (b) Uma fórmula para a derivada de $f(x) = |x|$ pode ser obtida escrevendo-se $|x|$ por partes e tratando-se os casos $x > 0$ e $x < 0$ separadamente. Se $x > 0$, então $f(x) = x$ e $f'(x) = 1$; e se $x < 0$, então $f(x) = -x$ e $f'(x) = -1$. Logo,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

O gráfico de f' é mostrado na Figura 2.2.11. Observe que f' não é contínua em $x = 0$; logo, esse exemplo mostra que a derivada de uma função que é contínua em toda parte não precisa ser contínua em toda parte. ◀

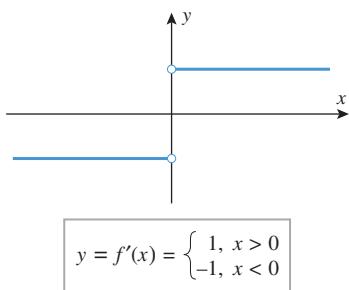


Figura 2.2.11

Um teorema que diz “se a afirmação A é verdadeira, então a afirmação B é verdadeira” é equivalente ao teorema que diz “se a afirmação B não é verdadeira, então a afirmação A não é verdadeira”. Dizemos que os dois teoremas estão em **forma contrapositiva** um ao outro. Assim, o Teorema 2.2.3 pode ser reescrito na forma contrapositiva como “se a função f não é contínua em x_0 , então f não é diferenciável em x_0 ”.

■ A RELAÇÃO ENTRE DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

Já sabemos que funções não são diferenciáveis em pontos com bico e em pontos de tangência vertical. O próximo teorema mostra que funções não são diferenciáveis em pontos de descontinuidade. Provaremos isso mostrando que, se f é diferenciável em um ponto, então f deve ser contínua nesse ponto.

2.2.3 TEOREMA *Se f for diferenciável no ponto x_0 , então f será contínua em x_0 .*

DEMONSTRAÇÃO Supondo que f seja diferenciável em x_0 , tem-se, a partir de (5), que $f'(x_0)$ existe e é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \quad (7)$$

Para mostrar que f é contínua em x_0 , devemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ou, equivalentemente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Expressando isso em termos da variável $h = x - x_0$, devemos provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

Contudo, isso pode ser provado usando-se (7), como segue:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ADVERTÊNCIA

A recíproca do Teorema 2.2.3 é falsa; ou seja, uma função pode ser contínua em um ponto sem ser diferenciável nele. Isso ocorre, por exemplo, em bicos de funções contínuas. Por exemplo, $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável nesse ponto (Exemplo 6).

A relação entre a continuidade e a diferenciabilidade teve grande significado histórico no desenvolvimento do Cálculo. No início do século XIX, os matemáticos acreditavam que, se uma função contínua tivesse muitos pontos de não diferenciabilidade, esses pontos, como os dentes de um serrrote, deveriam estar separados uns dos outros e ligados por segmentos de curvas lisas (Figura 2.2.12). Esse equívoco foi derrubado por uma série de descobertas que começaram em 1834. Naquele ano, um padre, filósofo e matemático da Boêmia, chamado Bernhard Bolzano, descobriu uma forma de construir uma função contínua que não fosse diferenciável em qualquer ponto. Mais tarde, em 1860, o grande matemático alemão Karl Weierstrass (biografia na p. 102) apresentou a primeira fórmula para uma tal função. Esses gráficos são impossíveis de ser traçados; os bicos são tão numerosos que toda ampliação de um segmento da curva revela mais bicos. A descoberta dessas funções foi importante, à medida que tornou os matemáticos desconfiados de sua intuição geométrica e exigentes de provas matemáticas precisas. Recentemente, tais funções passaram a desempenhar um papel fundamental no estudo de objetos geométricos denominados *fractais*. Os fractais revelaram uma ordem para fenômenos naturais que eram descartados anteriormente como sendo aleatórios e caóticos.

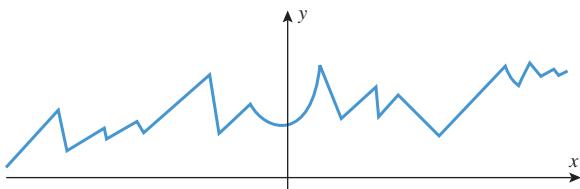


Figura 2.2.12



Bernhard Bolzano (1781-1848) Bolzano, filho de um comerciante de artes, nasceu em Praga, Boêmia (República Tcheca). Foi educado na Universidade de Praga e acabou por ganhar fama matemática suficiente para ser recomendado para uma cadeira naquela universidade. Porem, ordenou-se padre católico romano e, em 1805, foi designado para uma cadeira de Filosofia na Universidade de Praga. Bolzano foi um homem de grande compaixão humana; defendeu abertamente uma reforma educacional, proclamou os direitos da consciência individual sobre as exigências do governo e discursou sobre o absurdo da guerra e do militarismo. Seus pon-

tos de vista acabaram por provocar o Imperador Franz I da Áustria, o qual pressionou o Arcebispo de Praga para obter uma retratação de Bolzano. Recusando-se a fazê-la, Bolzano foi forçado a aposentar-se em 1824 com uma pequena pensão. Sua grande contribuição à Matemática foi filosófica. Seu trabalho ajudou a convencer os matemáticos de que a Matemática confiável deve se apoiar primordialmente em provas rigorosas, em vez de no uso da intuição. Além de Matemática, Bolzano pesquisou problemas ligados ao espaço, à força e à propagação de ondas.

[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bernard_Bolzano.jpg]

■ DERIVADAS NOS EXTREMOS DE UM INTERVALO

Se uma função f estiver definida em um intervalo fechado $[a, b]$, mas não fora dele, então f' não estará definida nas extremidades desse intervalo, porque derivadas são limites bilaterais. Para tratar disso, definimos a **derivada pela esquerda** e a **derivada pela direita** por

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

respectivamente. Essas derivadas são chamadas de **derivadas laterais**. Geometricamente, $f'_-(x)$ é o limite das inclinações das retas secantes quando x é aproximado pela esquerda e $f'_+(x)$ é o limite das inclinações das retas secantes quando x é aproximado pela direita. No caso de um intervalo fechado $[a, b]$, entenderemos que a derivada na extremidade esquerda é $f'_+(a)$ e a derivada na extremidade direita é $f'_-(b)$ (Figura 2.2.13).

Em geral, dizemos que f é **diferenciável** em um intervalo da forma $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $[a, b)$ ou $(a, b]$ se f for diferenciável em cada ponto do interior do intervalo e se existir a derivada lateral apropriada em cada extremidade incluído no intervalo.

Pode ser provado que uma função f é contínua pela esquerda naqueles pontos em que existe a derivada pela esquerda, e contínua pela direita naqueles pontos em que existe a derivada pela direita.

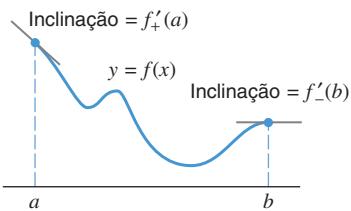


Figura 2.2.13

■ OUTRAS NOTAÇÕES PARA A DERIVADA

O processo de encontrar uma derivada é chamado **derivação** ou **diferenciação**. Podemos pensar na derivação como uma *operação* sobre funções, que associa a função f' a uma função f . Quando a variável independente for x , a operação de derivação também costuma ser denotada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{ou} \quad f'(x) = D_x[f(x)]$$

No caso em que também temos a variável dependente $y = f(x)$, a derivada costuma ser denotada por

$$f'(x) = y'(x) \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Com essas notações, o valor da derivada em um ponto x_0 pode ser expresso como

$$f'(x_0) = \left. \frac{d}{dx}[f(x)] \right|_{x=x_0}, \quad f'(x_0) = \left. D_x[f(x)] \right|_{x=x_0}, \quad f'(x_0) = y'(x_0), \quad f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Se uma variável w mudar de um valor inicial w_0 para algum valor final w_1 , então o valor final menos o inicial será denominado **incremento** em w e denotado por

$$\Delta w = w_1 - w_0 \tag{8}$$

Os incrementos podem ser positivos ou negativos, dependendo de o valor final ser maior ou menor do que o valor inicial. O símbolo do incremento em (8) não deveria ser interpretado como um produto; em vez disso, Δw deveria ser considerado como um só símbolo, que representa a variação no valor de w .

É comum considerar a variável h na fórmula da derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9}$$

como um incremento Δx em x e escrever (9) como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{10}$$

Além disso, se $y = f(x)$, então o numerador em (10) pode ser considerado como o incremento

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (11)$$

e, nesse caso,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (12)$$

As interpretações geométricas de Δx e Δy estão mostradas na Figura 2.2.14.

Às vezes é desejável expressar as derivadas em um formato que não utiliza incremento algum. Por exemplo, escrevendo $w = x + h$ na Fórmula (9), temos $w \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$, de modo que podemos reescrever aquela fórmula como

$$f'(x) = \lim_{w \rightarrow x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} \quad (13)$$

(Compare as Figuras 2.2.14 e 2.2.15.)

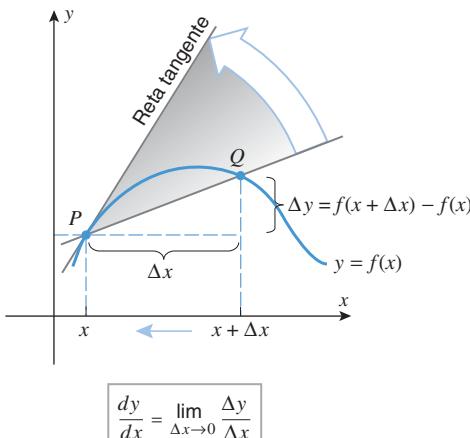


Figura 2.2.14

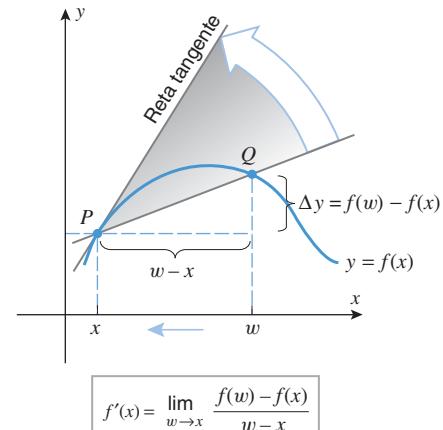


Figura 2.2.15

Quando utilizamos letras diferentes de x e y para as variáveis independente e dependente, devemos ajustar as notações de derivadas de acordo. Assim, por exemplo, se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, então a função velocidade $v(t)$ de (4) poderá ser expressa como

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (14)$$

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 2.2 (Ver página 155 para respostas.)

1. A função $f'(x)$ é definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{_____}}{\text{_____}}$$

2. (a) A derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = \text{_____}$
 (b) A derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ é $f'(x) = \text{_____}$

3. Suponha que a reta $2x + 3y = 5$ seja tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = 1$. O valor de $f(1)$ é _____ e o valor de $f'(1)$ é _____.

4. Qual é o teorema que nos garante que se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existir, então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$?

EXERCÍCIOS 2.2 Recurso Gráfico

1. Use o gráfico de $y = f(x)$ na figura abaixo para obter uma estimativa do valor de $f'(1), f'(3), f'(5)$ e $f'(6)$.

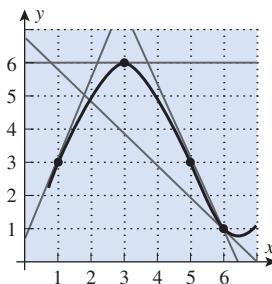


Figura Ex-1

2. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, arranje os números $0, f'(-3), f'(0), f'(2)$ e $f'(4)$ em ordem crescente.

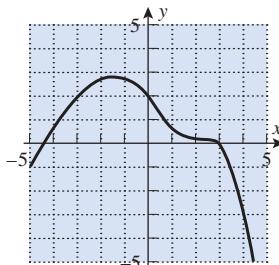


Figura Ex-2

ENFOCANDO CONCEITOS

3. (a) Se for dada uma equação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ de uma curva $y = f(x)$, como poderíamos calcular $f'(a)$?
 (b) Dado que a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(2, 5)$ é $y = 3x - 1$, determine $f'(2)$.
 (c) Para a equação $y = f(x)$ em (b), qual é a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = 2$?
4. Dado que a reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(1, 2)$ passa pelo ponto $(-1, -1)$, encontre $f'(1)$.
5. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = -1, f'(0) = 0, f'(x) < 0$ se $x < 0$ e $f'(x) > 0$ se $x > 0$.
6. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0, f'(0) = 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $x > 0$.
7. Dado que $f(3) = -1$ e $f'(3) = 5$, encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $x = 3$.
8. Dado que $f(-2) = 3$ e $f'(-2) = -4$, encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $x = -2$.

- 9-14 Use a Definição 2.2.1 para encontrar $f'(x)$ e, então, encontre a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = a$. ■

9. $f(x) = 2x^2; a = 1$ 10. $f(x) = 1/x^2; a = -1$
 11. $f(x) = x^3; a = 0$ 12. $f(x) = 2x^3 + 1; a = -1$
 13. $f(x) = \sqrt{x+1}; a = 8$ 14. $f(x) = \sqrt{2x+1}; a = 4$

- 15-20 Use a Fórmula (12) para encontrar dy/dx . ■

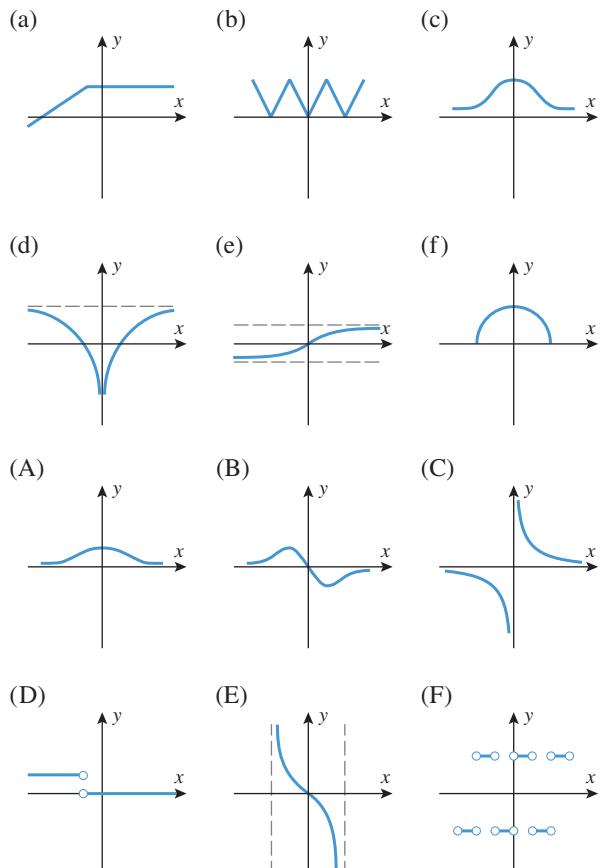
15. $y = \frac{1}{x}$ 16. $y = \frac{1}{x+1}$ 17. $y = x^2 - x$
 18. $y = x^4$ 19. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 20. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

- 21-22 Use a Definição 2.2.1 (com a mudança apropriada na notação) para obter a derivada pedida. ■

21. Encontre $f'(t)$ se $f(t) = 4t^2 + t$.
 22. Encontre dV/dr se $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

ENFOCANDO CONCEITOS

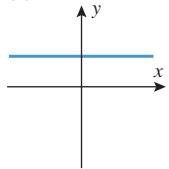
23. Combine o gráfico das funções mostradas em (a) a (f) com os de suas derivadas em (A) a (F).



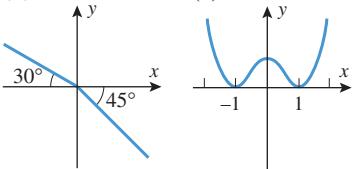
24. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Use um argumento geométrico para encontrar $f'(\sqrt{2}/2)$.

25-26 Esboce o gráfico da derivada da função cujo gráfico é dado.

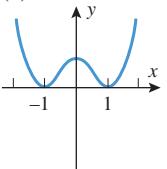
25. (a)



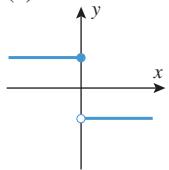
(b)



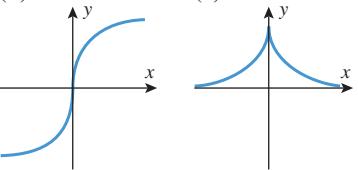
(c)



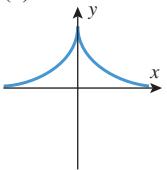
26. (a)



(b)



(c)



27-30 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

27. Se uma curva $y = f(x)$ tiver uma reta tangente horizontal em $x = a$, então $f'(a)$ não está definida.
28. Se a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = -2$ tiver inclinação negativa, então $f'(-2) < 0$.
29. Se uma função f for contínua em $x = 0$, então f será derivável em $x = 0$.
30. Se uma função f for derivável em $x = 0$, então f será contínua em $x = 0$.

31-32 O limite dado representa $f'(a)$ para alguma função f e algum número a . Encontre $f(x)$ e a em cada caso.

31. (a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x} - 1}{\Delta x}$ (b) $\lim_{x_1 \rightarrow 3} \frac{x_1^2 - 9}{x_1 - 3}$

32. (a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x - 1}$

33. Encontre $dy/dx|_{x=1}$, sabendo que $y = 1 - x^2$.

34. Encontre $dy/dx|_{x=-2}$, sabendo que $y = (x+2)/x$.

35. Encontre uma equação para a reta que é tangente à curva $y = x^3 - 2x + 1$ no ponto $(0, 1)$ e use um recurso gráfico para fazer, na mesma tela, os gráficos da curva e de sua tangente.

36. Use um recurso gráfico para, na mesma tela, colocar a curva $y = x^2/4$, a reta tangente a essa curva em $x = 1$ e a reta secante que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, 1)$ da curva.

37. Seja $f(x) = 2^x$, obtenha uma estimativa de $f'(1)$ pelos seguintes métodos:

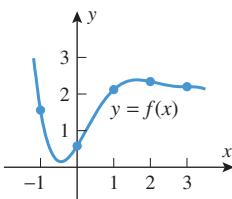
- (a) Usando um recurso gráfico para fazer um *zoom* em um ponto apropriado do gráfico até que ele se pareça a uma reta e, então, estimando a inclinação.

- (b) Usando um recurso gráfico para estimar o limite na fórmula (13), fazendo uma tabela para uma sucessão de valores de w tendendo a 1.

38. Seja $f(x) = \sin x$, obtenha uma estimativa de $f'(\pi/4)$ pelos seguintes métodos:

- (a) Usando um recurso gráfico para fazer um *zoom* em um ponto apropriado do gráfico até que ele se pareça a uma reta e, então, estimando a inclinação.
- (b) Usando um recurso gráfico para estimar na Fórmula (13), fazendo uma tabela para uma sucessão de valores de w tendendo a $\pi/4$.

39-40 A função f cujo gráfico aparece abaixo tem valores dados na tabela a seguir.



x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1,56	0,58	2,12	2,34	2,2

39. (a) Use os dados da tabela para calcular os quocientes de diferenças

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}, \quad \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}, \quad \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

(b) Usando o gráfico de $y = f(x)$, indique qual quociente de diferenças da parte (a) é a melhor aproximação de $f'(1)$ e qual é a pior.

40. Use os dados da tabela para aproximar o valor das derivadas dadas.

(a) $f'(0,5)$ (b) $f'(2,5)$

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo seja de $C = f(x)$ dólares.

(a) Quais são as unidades de $f'(x)$?

(b) Em termos práticos, qual é o significado de $f'(x)$ neste caso?

(c) O que pode ser dito quanto ao sinal de $f'(x)$?

(d) Estime o custo de perfuração de um metro adicional, começando a uma profundidade de 300 metros, dado que $f'(300) = 1.000$.

42. Uma empresa fabricante de tintas estima que pode vender $g = f(p)$ galões de tinta a um preço de p reais.

(a) Quais são as unidades de dg/dp ?

(b) Em termos práticos, o que significa dg/dp neste caso?

(c) O que pode ser dito quanto ao sinal de dg/dp ?

(d) Dado que $dg/dp|_{p=10} = -100$, o que pode ser dito sobre o efeito de aumentar o preço de 10 para 11 reais por galão?

43. É fato que, quando uma corda flexível é enrolada em um cilindro áspero, uma pequena força de magnitude F_0 em uma ponta pode resistir a uma grande força de magnitude F na outra ponta. O tamanho de F depende do ângulo θ , segun-

do o qual a corda é enrolada em torno do cilindro (veja a figura a seguir). Essa figura mostra o gráfico de F (em libras) versus θ (em radianos), onde F é a magnitude da força à qual resiste uma força F_0 com 10 libras de magnitude para uma certa corda e um certo cilindro.

- (a) Estime os valores de F e de $dF/d\theta$ quando θ for de 10 radianos.
 (b) Pode ser mostrado que a força F satisfaz a equação $dF/d\theta = \mu F$, onde a constante μ é denominada **coeficiente de atrito**. Use os resultados de (a) para estimar o valor de μ .

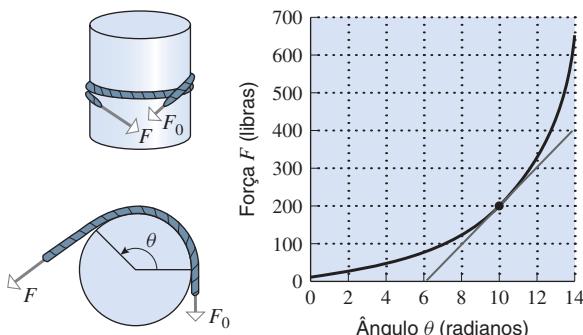


Figura Ex-43

44. A figura abaixo mostra a curva velocidade versus tempo para um foguete no espaço extraterrestre, onde a única força atuando sobre o foguete é a de seus motores. Pode ser mostrado que a massa $M(t)$ do foguete no instante t (em segundos) satisfaz a equação

$$M(t) = \frac{T}{dv/dt}$$

onde T é o empuxo (em libras) dos motores do foguete e v é a velocidade (em pés/s) do foguete. O empuxo do primeiro estágio do foguete *Saturno V* é de $T = 7.680.982$ libras. Use esse valor de T e o segmento de reta na figura para estimar a massa do foguete no instante $t = 100$ s.

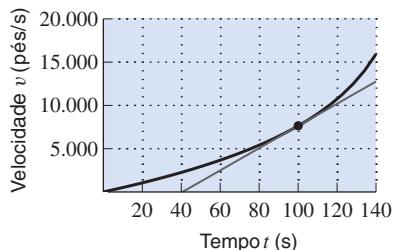


Figura Ex-44

45. De acordo com a **Lei do Resfriamento de Newton**, a taxa de variação da temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio ambiente. A figura a seguir mostra o gráfico da temperatura T (em graus Fahrenheit) versus o tempo t (em minutos) para uma xícara de café inicialmente a 200°F, deixada para esfriar em uma sala com uma temperatura constante de 75°F.
 (a) Estime T e dT/dt quando $t = 10$ min.

- (b) A Lei do Resfriamento de Newton pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

onde k é a constante de proporcionalidade e T_0 , a temperatura do meio ambiente (constante, por hipótese). Use os resultados de (a) para estimar o valor de k .

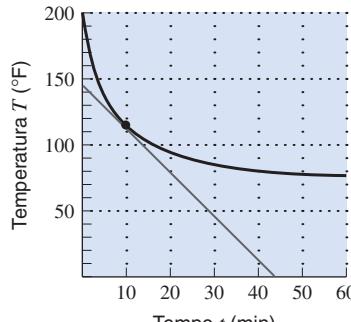


Figura Ex-45

46. Mostre que $f(x)$ é contínua, mas não diferenciável no ponto dado. Esboce o gráfico de f .

- (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 0$
 (b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $x = 2$

47. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua e diferenciável em $x = 1$. Esboce o gráfico de f .

48. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua, mas não diferenciável em $x = 1$. Esboce o gráfico de f .

49. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua, mas não diferenciável em $x = 0$. Esboce o gráfico de f na vizinhança de $x = 0$. (Ver Figura 1.6.6 e a observação que segue o Exemplo 5 da Seção 1.6.)

50. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua e diferenciável em $x = 0$. Esboce o gráfico de f na vizinhança de $x = 0$.

ENFOCANDO CONCEITOS

51. Suponha que uma função f seja diferenciável em x_0 e que $f'(x_0) > 0$. Prove que existe um intervalo aberto contendo x_0 , tal que, se x_1 e x_2 são dois pontos quaisquer nesse intervalo, com $x_1 < x_0 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

52. Suponha que uma função f seja diferenciável em x_0 e defina $g(x) = f(mx + b)$, onde m e b são constantes. Prove que, se x_1 é um ponto tal que $mx_1 + b = x_0$, então $g(x)$ é diferenciável em x_1 e $g'(x_1) = mf'(x_0)$.

53. Suponha que uma função f seja diferenciável em $x = 0$ com $f(0) = f'(0) = 0$, e seja $y = mx$, $m \neq 0$, uma reta pela origem de inclinação não nula.

(a) Prove que existe um intervalo aberto contendo 0, tal que, para cada x nesse intervalo, vale $|f(x)| < |\frac{1}{2}mx|$. [Sugestão: Tome $\epsilon = \frac{1}{2}|m|$ e aplique a Definição 1.4.1 a (5) com $x_0 = 0$.]

(b) Conclua, usando a parte (a) e a desigualdade triangular, que existe um intervalo aberto contendo 0, tal que $|f(x)| < |f(x) - mx|$ com qualquer x nesse intervalo.

(c) Explique por que o resultado obtido em (b) pode ser interpretado como significando que a reta tangente ao

gráfico de f na origem é a melhor aproximação linear de f naquele ponto.

54. Suponha que uma função f seja diferenciável em x_0 . Modifique o argumento do Exercício 53 para provar que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ fornece a melhor aproximação linear de f em P . [Sugestão: Suponha que $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ seja uma reta qualquer que passe pelo ponto $P(x_0, f(x_0))$ com inclinação $m \neq f'(x_0)$. Aplique a Definição 1.4.1 a (5) com $x = x_0 + h$ e $\epsilon = \frac{1}{2}|f'(x_0) - m|$.]

55. **Texto** Escreva um parágrafo explicando o que significa uma função ser derivável. Inclua exemplos de funções que não sejam deriváveis, bem como exemplos de funções que sejam deriváveis.

56. **Texto** Explique a relação entre continuidade e derivabilidade.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.2

1. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 2. (a) $2x$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 3. 1; $-\frac{2}{3}$ 4. Teorema 2.2.3: Se f for diferenciável em x_0 , então f será contínua em x_0 .

2.3 INTRODUÇÃO A TÉCNICAS DE DIFERENCIAÇÃO

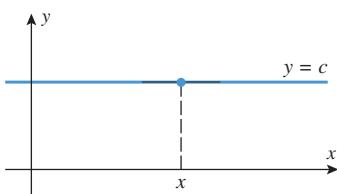
Na última seção, definimos a derivada de uma função f como um limite e usamos esse limite para calcular algumas derivadas simples. Vamos desenvolver agora alguns teoremas importantes, que nos possibilitarão calcular derivadas de forma mais eficiente.

■ DERIVADA DE UMA CONSTANTE

O tipo mais simples de função é uma função constante $f(x) = c$. Como o gráfico de f é uma reta horizontal de inclinação 0, a reta tangente ao gráfico de f tem inclinação 0 em cada ponto x ; portanto, podemos ver geometricamente que $f'(x) = 0$ (Figura 2.3.1). Também podemos ver isso algebricamente, pois

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Assim, estabelecemos o resultado seguinte.



A reta tangente ao gráfico de $f(x) = c$ tem inclinação 0 em cada x .

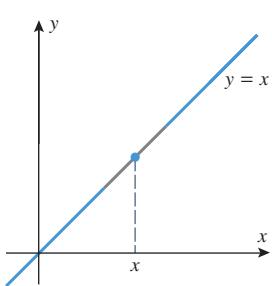
Figura 2.3.1

2.3.1 TEOREMA A derivada de uma função constante é 0; isto é, se c for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \quad (1)$$

► Exemplo 1

$$\frac{d}{dx}[1] = 0, \quad \frac{d}{dx}[-3] = 0, \quad \frac{d}{dx}[\pi] = 0, \quad \frac{d}{dx}[-\sqrt{2}] = 0 \quad \blacktriangleleft$$



A reta tangente ao gráfico de $f(x) = x$ tem inclinação 1 em cada x .

Figura 2.3.2

■ DERIVADAS DE FUNÇÕES POTÊNCIA

O tipo mais simples de função potência é $f(x) = x$. Como o gráfico de f é uma reta de inclinação 1, segue do Exemplo 3 da Seção 2.2 que $f'(x) = 1$ para todo x (Figura 2.3.2). Em outras palavras,

$$\frac{d}{dx}[x] = 1 \quad (2)$$

No Exemplo 1 da Seção 2.2, mostramos que a função potência $f(x) = x^2$ tem derivada $f'(x) = 2x$. A partir do Exemplo 2 daquela seção, podemos deduzir que a função potência $f(x) = x^3$ tem derivada $f'(x) = 3x^2$. Ou seja,

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2 \quad (3-4)$$

Esses resultados são casos especiais do resultado mais geral seguinte.

2.3.2 TEOREMA (Regra da Potência) *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \quad (5)$$

Verifique que as Fórmulas (2), (3) e (4) são os casos especiais de (5) em que $n = 1, 2$ e 3 .

A fórmula binomial pode ser encontrada no final do livro. Substituir y por h na fórmula fornece a identidade usada na demonstração do Teorema 2.3.2

DEMONSTRAÇÃO Seja $f(x) = x^n$. Então, a partir da definição de derivada e do teorema do binomial para a expansão da expressão $(x + h)^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^n] &= f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 + 0 \\ &= nx^{n-1} \blacksquare \end{aligned}$$

► Exemplo 2

$$\frac{d}{dx}[x^4] = 4x^3, \quad \frac{d}{dx}[x^5] = 5x^4, \quad \frac{d}{dt}[t^{12}] = 12t^{11} \blacktriangleleft$$

Embora nossa prova da regra da potência na Fórmula (5) valha somente com potências inteiras *positivas* de x , não é difícil mostrar que a mesma fórmula permanece válida com quaisquer potências inteiras de x (Exercício 82). Também vimos, no Exemplo 4 da Seção 2.2, que

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (6)$$

o que pode ser escrito como

$$\frac{d}{dx}[x^{1/2}] = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1}$$

Assim, a Fórmula (5) também é válida com $n = \frac{1}{2}$. De fato, pode ser mostrado que essa fórmula é válida com qualquer expoente real. Enunciamos esse resultado mais geral aqui, mesmo que só estejamos preparados para prová-lo no Capítulo 3.

2.3.3 TEOREMA (Regra da Potência Estendida) Se r for qualquer número real, então

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1} \quad (7)$$

Em palavras, para derivar uma função potência, subtraímos uma unidade da potência constante e multiplicamos a função potência resultante pelo expoente original.

► **Exemplo 3**

$$\frac{d}{dx}[x^\pi] = \pi x^{\pi-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}[x^{-1}] = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{w^{100}}\right] = \frac{d}{dw}[w^{-100}] = -100w^{-101} = -\frac{100}{w^{101}}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{4/5}] = \frac{4}{5}x^{(4/5)-1} = \frac{4}{5}x^{-1/5}$$

$$\frac{d}{dx}[\sqrt[3]{x}] = \frac{d}{dx}[x^{1/3}] = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \blacktriangleleft$$

■ **A DERIVADA DE UMA CONSTANTE VEZES UMA FUNÇÃO**

A Fórmula (8) também pode ser expressa em notação funcional por

$$(cf)' = cf'$$

2.3.4 TEOREMA (Regra do Múltiplo Constante) Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)] \quad (8)$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Um fator constante pode ser movido para fora do sinal do limite.

$$= c \frac{d}{dx}[f(x)] \quad \blacksquare$$

Em palavras, um fator constante pode ser movido para fora do sinal da derivada.

► Exemplo 4

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[4x^8] &= 4\frac{d}{dx}[x^8] = 4[8x^7] = 32x^7 \\ \frac{d}{dx}[-x^{12}] &= (-1)\frac{d}{dx}[x^{12}] = -12x^{11} \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{x}\right] &= \pi\frac{d}{dx}[x^{-1}] = \pi(-x^{-2}) = -\frac{\pi}{x^2} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ DERIVADAS DE SOMAS E DE DIFERENÇAS

As Fórmulas (9) e (10) também podem ser expressas como

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f' + g' \\ (f-g)' &= f' - g'\end{aligned}$$

2.3.5 TEOREMA (Regras da Soma e da Diferença) Se f e g forem diferenciáveis em x , então $f+g$ e $f-g$ também o serão e

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \quad (10)$$

DEMONSTRAÇÃO A Fórmula (9) pode ser demonstrada como segue:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]\end{aligned}$$

O limite de uma soma é a soma dos limites.

A Fórmula (10) pode ser provada de maneira análoga ou, alternativamente, escrevendo $f(x) - g(x)$ como $f(x) + (-1)g(x)$ e, então, aplicando as Fórmulas (8) e (9). ■

Em palavras, a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas, e a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.

► Exemplo 5

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[2x^6 + x^{-9}] &= \frac{d}{dx}[2x^6] + \frac{d}{dx}[x^{-9}] = 12x^5 + (-9)x^{-10} = 12x^5 - 9x^{-10} \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}\right] &= \frac{d}{dx}[1 - 2\sqrt{x}] \\ &= \frac{d}{dx}[1] - \frac{d}{dx}[2\sqrt{x}] = 0 - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{Ver Fórmula (6).} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Embora as Fórmulas (9) e (10) tenham sido enunciadas para somas e diferenças de duas funções, podemos estendê-las a um número finito qualquer de funções. Por exemplo, agrupando as funções e aplicando a Fórmula (9) duas vezes, obtemos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Como ilustra o exemplo a seguir, a regra do múltiplo constante pode ser usada junto à versão estendida das regras da soma e da diferença para derivar polinômios.

► Exemplo 6 Encontre dy/dx se $y = 3x^8 - 2x^5 + 6x + 1$.

Solução

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[3x^8 - 2x^5 + 6x + 1] \\ &= \frac{d}{dx}[3x^8] - \frac{d}{dx}[2x^5] + \frac{d}{dx}[6x] + \frac{d}{dx}[1] \\ &= 24x^7 - 10x^4 + 6\end{aligned}$$

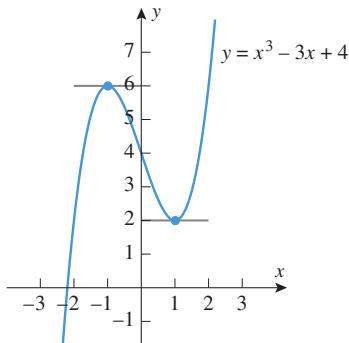


Figura 2.3.3

► Exemplo 7 Em quais pontos, se existirem, o gráfico de $y = x^3 - 3x + 4$ tem uma reta tangente horizontal?

Solução Retas tangentes horizontais têm inclinação zero; portanto, devemos encontrar aqueles valores de x nos quais $y'(x) = 0$. Derivando, obtemos

$$y'(x) = \frac{d}{dx}[x^3 - 3x + 4] = 3x^2 - 3$$

Assim, as retas tangentes horizontais ocorrem naqueles valores de x com os quais $3x^2 - 3 = 0$, ou seja, tais que $x = -1$ ou $x = 1$. Os pontos correspondentes da curva $y = x^3 - 3x + 4$ são $(-1, 6)$ e $(1, 2)$ (ver Figura 2.3.3). ◀

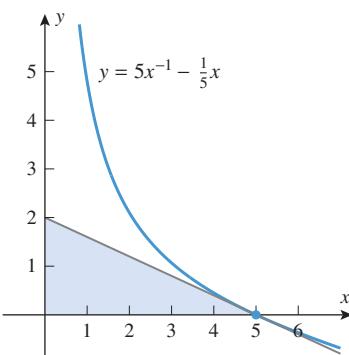


Figura 2.3.4

► Exemplo 8 Encontre a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e a reta tangente à curva $y = 5x^{-1} - \frac{1}{5}x$ no ponto $(5, 0)$.

Solução Como a derivada de y em relação a x é

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left[5x^{-1} - \frac{1}{5}x\right] = \frac{d}{dx}[5x^{-1}] - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}x\right] = -5x^{-2} - \frac{1}{5}$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(5, 0)$ é $y'(5) = -\frac{2}{5}$. Assim, a equação da reta tangente nesse ponto é

$$y - 0 = -\frac{2}{5}(x - 5) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = -\frac{2}{5}x + 2$$

Como o corte dessa reta com o eixo y é 2, o triângulo formado pelos eixos coordenados e a reta tangente tem catetos de comprimento 5 e 2 e, portanto, sua área é $\frac{1}{2}(5)(2) = 5$ (Figura 2.3.4). ◀

■ DERIVADAS DE ORDENS SUPERIORES

A derivada f' de uma função f é novamente uma função, que pode ter sua própria derivada. Se f' for derivável, então sua derivada é denotada por f'' e é denominada **derivada segunda** de f . Enquanto tivermos diferenciabilidade, podemos continuar o processo de derivação para obter

as derivadas terceira, quarta, quinta e até derivadas superiores de f . Essas derivadas sucessivas são denotadas por

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', \quad f^{(5)} = (f^{(4)})', \dots$$

Se $y = f(x)$, então as derivadas sucessivas também podem ser denotadas por

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad y^{(5)}, \dots$$

Outras notações comuns são

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$$

⋮

⋮

Essas derivadas sucessivas são chamadas de *derivada primeira*, *derivada segunda*, *derivada terceira* e assim por diante. O número de vezes que f for diferenciável é chamado de **ordem** da derivada. Uma derivada de enésima ordem geral pode ser denotada por

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \quad (11)$$

e o valor de uma derivada de enésima ordem geral calculada em um ponto específico $x = x_0$ pode ser denotado por

$$\left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \right|_{x=x_0} \quad (12)$$

► **Exemplo 9** Se $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$, então

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$$f^{(4)}(x) = 72$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 5) \quad \blacktriangleleft$$

A importância da derivada segunda e das derivadas superiores será discutida em seções posteriores.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 2.3 (Ver página 163 para respostas.)

- Em cada parte, determine $f'(x)$.
 - $f(x) = \sqrt{6}$
 - $f(x) = \sqrt{6x}$
 - $f(x) = 6\sqrt{x}$
 - $f(x) = \sqrt{6x}$
- Em cada parte, determine $f''(x)$.
 - $f(x) = x^3 + 5$
 - $f(x) = x^2(x^3 + 5)$
- (c) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{2}$
- (d) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{x^2}$
- A inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 4x + 7$ em $x = 1$ é _____.
- Se $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$, então $f''(x) =$ _____.

EXERCÍCIOS 2.3  Recurso Gráfico**1-8** Encontre dy/dx . ■

1. $y = 4x^7$

2. $y = -3x^{12}$

3. $y = 3x^8 + 2x + 1$

4. $y = \frac{1}{2}(x^4 + 7)$

5. $y = \pi^3$

6. $y = \sqrt{2}x + (1/\sqrt{2})$

7. $y = -\frac{1}{3}(x^7 + 2x - 9)$

8. $y = \frac{x^2 + 1}{5}$

9-16 Encontre $f'(x)$. ■

9. $f(x) = x^{-3} + \frac{1}{x^7}$

10. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

11. $f(x) = -3x^{-8} + 2\sqrt{x}$

12. $f(x) = 7x^{-6} - 5\sqrt{x}$

13. $f(x) = x^e + \frac{1}{x^{\sqrt{10}}}$

14. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{8}{x}}$

15. $f(x) = (3x^2 + 1)^2$

16. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d constantes)

17-18 Encontre $y'(1)$. ■

17. $y = 5x^2 - 3x + 1$

18. $y = \frac{x^{3/2} + 2}{x}$

19-20 Encontre dx/dt . ■

19. $x = t^2 - t$

20. $x = \frac{t^2 + 1}{3t}$

21-24 Encontre $dy/dx|_{x=1}$. ■

21. $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

22. $y = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{x^3}$

23. $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$

24. $y = x^{24} + 2x^{12} + 3x^8 + 4x^6$

25-26 Aproxime $f'(1)$ considerando o quociente de diferenças

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

para valores de h perto de 0; depois, encontre o valor exato de $f'(1)$ por derivação. ■

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

26. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

27-28 Use um recurso gráfico para estimar o valor de $f'(1)$ fazendo um zoom no gráfico de f ; depois compare sua estimativa ao valor exato obtido por derivação. ■

27. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

28. $f(x) = \frac{x + 2x^{3/2}}{\sqrt{x}}$

29-32 Encontre a derivada indicada. ■

29. $\frac{d}{dt}[16t^2]$

30. $\frac{dC}{dr}$, onde $C = 2\pi r$

31. $V'(r)$, onde $V = \pi r^3$ 32. $\frac{d}{d\alpha}[2\alpha^{-1} + \alpha]$

33-36 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■33. Se f e g forem deriváveis em $x = 2$, então

$$\left. \frac{d}{dx}[f(x) - 8g(x)] \right|_{x=2} = f'(2) - 8g'(2)$$

34. Se $f(x)$ for um polinômio cúbico, então $f'(x)$ será um polinômio quadrático.35. Se $f'(2) = 5$, então

$$\left. \frac{d}{dx}[4f(x) + x^3] \right|_{x=2} = \left. \frac{d}{dx}[4f(x) + 8] \right|_{x=2} = 4f'(2) = 20$$

36. Se $f(x) = x^2(x^4 - x)$, então

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[x^2] \cdot \frac{d}{dx}[x^4 - x] = 2x(4x^3 - 1)$$

37. Um balão esférico está sendo inflado.

(a) Encontre uma fórmula geral para a taxa de variação instantânea do volume V em relação ao raio r , sabendo que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.(b) Encontre a taxa de variação de V em relação a r no momento em que o raio é $r = 5$.

38. Encontre $\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\lambda\lambda_0 + \lambda^6}{2 - \lambda_0} \right]$ (λ_0 é uma constante).

39. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = -3$ se $f(-3) = 2$ e $f'(-3) = 5$.40. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = 2$ se $f(2) = -2$ e $f'(2) = -1$.**41-42** Encontre d^2y/dx^2 . ■

41. (a) $y = 7x^3 - 5x^2 + x$ (b) $y = 12x^2 - 2x + 3$

(c) $y = \frac{x+1}{x}$ (d) $y = (5x^2 - 3)(7x^3 + x)$

42. (a) $y = 4x^7 - 5x^3 + 2x$ (b) $y = 3x + 2$

(c) $y = \frac{3x-2}{5x}$ (d) $y = (x^3 - 5)(2x + 3)$

43-44 Encontre y''' . ■

43. (a) $y = x^{-5} + x^5$ (b) $y = 1/x$
(c) $y = ax^3 + bx + c$ (a, b, c constantes)

44. (a) $y = 5x^2 - 4x + 7$ (b) $y = 3x^{-2} + 4x^{-1} + x$
(c) $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, c constantes)

45. Encontre

(a) $f'''(2)$, onde $f(x) = 3x^2 - 2$

(b) $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1}$, onde $y = 6x^5 - 4x^2$

(c) $\left. \frac{d^4}{dx^4}[x^{-3}] \right|_{x=1}$.

- 46.** Encontre
 (a) $y'''(0)$, onde $y = 4x^4 + 2x^3 + 3$

$$(b) \left. \frac{d^4y}{dx^4} \right|_{x=1}, \text{ onde } y = \frac{6}{x^4}.$$

- 47.** Mostre que $y = x^3 + 3x + 1$ satisfaz $y''' + xy'' - 2y' = 0$.

- 48.** Mostre que, se $x \neq 0$, então $y = 1/x$ satisfaz a equação $x^3y'' + x^2y' - xy = 0$.

49-50 Use um recurso gráfico para obter uma estimativa da localização das linhas tangentes horizontais. Depois, encontre a localização exata por diferenciação. ■

49. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ **50.** $y = \frac{x^2 + 9}{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 51.** Encontre uma função $y = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico corte o eixo x no ponto 1, o eixo y em -2 e que tenha uma reta tangente de inclinação -1 no ponto de corte com o eixo y .
- 52.** Encontre k se a curva $y = x^2 + k$ for tangente à reta $y = 2x$.
- 53.** Encontre a coordenada x do ponto no gráfico de $y = x^2$ no qual a reta tangente é paralela à reta secante que corta a curva em $x = -1$ e $x = 2$.
- 54.** Encontre a coordenada x do ponto no gráfico de $y = \sqrt{x}$ no qual a reta tangente é paralela à reta secante que corta a curva em $x = 1$ e $x = 4$.
- 55.** Encontre as coordenadas de todos os pontos no gráfico de $y = 1 - x^2$ nos quais a reta tangente passa pelo ponto $(2, 0)$.
- 56.** Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, intersecta em um ponto que está em uma reta vertical passando pelo ponto médio dos pontos de tangência.

- 57.** Seja L a reta tangente ao gráfico da equação cúbica $y = ax^3 + bx$ em $x = x_0$. Encontre a coordenada x do ponto onde L intersecta o gráfico uma segunda vez.
- 58.** Mostre que o segmento de reta tangente ao gráfico de $y = 1/x$ que é cortado fora pelos eixos coordenados é bissectado pelo ponto de tangência.
- 59.** Mostre que o triângulo formado por qualquer reta tangente ao gráfico de $y = 1/x$, $x > 0$, e pelos eixos coordenados tem uma área de 2 unidades quadradas.
- 60.** Encontre condições em a , b , c e d para que o gráfico do polinômio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha
 (a) exatamente duas tangentes horizontais;
 (b) exatamente uma tangente horizontal;
 (c) não tenha tangentes horizontais.
- 61.** A Lei da Gravidade Universal de Newton afirma que a magnitude F da força exercida por um ponto com massa M sobre um ponto com massa m é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

onde G é uma constante e r , a distância entre os pontos. Supondo os pontos em movimento, encontre uma fórmula para a taxa de variação instantânea de F em relação a r .

- 62.** No intervalo de temperatura entre 0°C e 700°C , a resistência R [em ohms (Ω)] de um certo termômetro de resistência de platina é dada por

$$R = 10 + 0,04124T - 1,779 \times 10^{-5}T^2$$

onde T é a temperatura variando entre 0°C e 700°C . Quando, no intervalo de variação da temperatura, a resistência é mais e menos sensível à variação de T ? [Sugestão: Considere o tamanho de dR/dT no intervalo $0 \leq t \leq 700$.]

63-64 Use um recurso gráfico para fazer estimativas grosseiras dos intervalos nos quais $f'(x) > 0$ e os encontre exatamente por diferenciação.

63. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ **64.** $f(x) = x^3 - 3x$

65-68 Nestes exercícios, determine se a função dada é diferenciável em um valor $x = x_0$, sendo que f está definida por fórmulas diferentes em lados diferentes de x_0 . Para isso, pode ser usado o resultado seguinte, que é uma consequência do Teorema do Valor Médio (a ser discutido na Seção 4.8). **Teorema:** Seja f uma função contínua em x_0 e suponha que exista $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Então f é diferenciável em x_0 e $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. ■

- 65.** Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$. Determine se f é diferenciável em $x = 1$. Se for, encontre o valor da derivada nesse ponto. Esboce o gráfico de f .

- 66.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16x, & x < 9 \\ \sqrt{x}, & x \geq 9 \end{cases}$$

f é contínua em $x = 9$? Determine se f é diferenciável em $x = 9$. Se for, encontre o valor da derivada nesse ponto.

- 67.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Determine se f é diferenciável em $x = 1$. Caso seja, encontre o valor da derivada nesse ponto.

- 68.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{1}{16}, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}x^2, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Determine se f é diferenciável em $x = \frac{1}{2}$. Caso seja, encontre o valor da derivada nesse ponto.

- 69.** Encontre todos os pontos onde f não é diferenciável. Justifique sua resposta.

(a) $f(x) = |3x - 2|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$

- 70.** Em cada item, calcule f' , f'' e f''' e, então, estabeleça uma fórmula para $f^{(n)}$.

(a) $f(x) = 1/x$ (b) $f(x) = 1/x^2$

[*Sugestão:* A expressão $(-1)^n$ tem valor 1 se n for par e -1 se n for ímpar. Use essa expressão em sua resposta.]

- 71.** (a) Prove:

$$\frac{d^2}{dx^2}[cf(x)] = c \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[f(x) + g(x)] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)] + \frac{d^2}{dx^2}[g(x)]$$

- (b) Os resultados de (a) se generalizam para a enésima derivada? Justifique sua resposta.

- 72.** Sendo $f(x) = x^8 - 2x + 3$, encontre

$$\lim_{w \rightarrow 2} \frac{f'(w) - f'(2)}{w - 2}$$

- 83.** (a) Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$
 (b) Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = x^k$ e $n > k$, onde k é um inteiro positivo.
 (c) Encontre $f^{(n)}(x)$ se

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- 74.** (a) Prove: se $f''(x)$ existir em cada x em (a, b) , então f e f' são contínuas em (a, b) .
 (b) O que se pode afirmar quanto à continuidade de f e suas derivadas se $f^{(n)}(x)$ existir em cada x em (a, b) ?

- 75.** Seja $f(x) = (mx + b)^n$, onde m e b são constantes e n é um inteiro. Use o resultado do Exercício 52 na Seção 2.2 para provar que $f'(x) = nm(mx + b)^{n-1}$.

- 76-77** Verifique o resultado do Exercício 75 para $f(x)$. ■

76. $f(x) = (2x + 3)^2$

77. $f(x) = (3x - 1)^3$

- 78-81** Use o resultado do Exercício 75 para calcular a derivada da função $f(x)$ dada. ■

78. $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

79. $f(x) = \frac{3}{(2x + 1)^2}$

80. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

81. $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

- 82.** O objetivo deste exercício é estender a regra da potência (Teorema 2.3.2) a qualquer expoente inteiro. Seja $f(x) = x^n$, em que n é um inteiro qualquer. Se $n > 0$, então $f'(x) = nx^{n-1}$ pelo Teorema 2.3.2.

- (a) Mostre que a conclusão do Teorema 2.3.2 é válida no caso $n = 0$.

- (b) Suponha que $n < 0$ e denote $m = -n$, de modo que

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Use a Definição 2.2.1 e o Teorema 2.3.2 para mostrar que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^m} \right] = -mx^{m-1} \cdot \frac{1}{x^{2m}}$$

e conclua que $f'(x) = nx^{n-1}$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.3

- 1.** (a) 0 (b) $\sqrt{6}$ (c) $3/\sqrt{x}$ (d) $\sqrt{6}/(2\sqrt{x})$ **2.** (a) $3x^2$ (b) $5x^4 + 10x$ (c) $\frac{3}{2}x^2$ (d) $1 - 10x^{-3}$ **3.** 6 **4.** $18x - 6$

2.4 REGRAS DO PRODUTO E DO QUOCIENTE

Nesta seção, desenvolveremos técnicas para derivar produtos e quocientes de funções cujas derivadas são conhecidas.

■ DERIVADA DE UM PRODUTO

Poderíamos conjecturar que a derivada do produto de duas funções seja o produto de suas derivadas. Contudo, um exemplo simples nos mostra que isso é falso. Considere as funções

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

O produto de suas derivadas é

$$f'(x)g'(x) = (1)(2x) = 2x$$

mas seu produto é $h(x) = f(x)g(x) = x^3$; portanto, a derivada do produto é

$$h'(x) = 3x^2$$

Assim, a derivada do produto não é igual ao produto das derivadas. A relação correta, que é creditada a Leibniz, é expressa no teorema seguinte.

2.4.1 TEOREMA (Regra do Produto) Se f e g forem diferenciáveis em x , então o produto $f \cdot g$ também será e

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \quad (1)$$

A Fórmula (1) também pode ser expressa por

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

DEMONSTRAÇÃO Enquanto as provas das regras de derivação da seção anterior eram aplicações diretas da definição de derivada, esta prova utiliza um passo crucial que envolve somar e subtrair a quantidade $f(x+h)g(x)$ ao numerador na definição da derivada. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \right] \frac{d}{dx}[g(x)] + \left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \right] \frac{d}{dx}[f(x)] \\ &= f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] \end{aligned}$$

[Nota: No último passo, $f(x+h) \rightarrow f(x)$ quando $h \rightarrow 0$, pois f é contínua em x pelo Teorema 2.2.3, e $g(x) \rightarrow g(x)$ quando $h \rightarrow 0$, pois $g(x)$ não envolve h e, portanto, permanece constante.] ■

Em palavras, a derivada de um produto de duas funções é o produto da primeira função vezes a derivada da segunda somado com o produto da segunda função vezes a derivada da primeira.

► **Exemplo 1** Encontre dy/dx se $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$.

Solução Podem ser usados dois métodos para encontrar dy/dx . Podemos tanto usar a regra do produto quanto efetuar as multiplicações indicadas na fórmula de y e, então, diferenciar. Vamos utilizar ambos os métodos.

Método I (usando a regra do produto)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(4x^2 - 1)(7x^3 + x)] \\ &= (4x^2 - 1)\frac{d}{dx}[7x^3 + x] + (7x^3 + x)\frac{d}{dx}[4x^2 - 1] \\ &= (4x^2 - 1)(21x^2 + 1) + (7x^3 + x)(8x) = 140x^4 - 9x^2 - 1\end{aligned}$$

Método II (primeiro multiplicando)

$$y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x) = 28x^5 - 3x^3 - x$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[28x^5 - 3x^3 - x] = 140x^4 - 9x^2 - 1$$

que é o mesmo resultado obtido pela regra do produto. ◀

► **Exemplo 2** Encontre ds/dt se $s = (1+t)\sqrt{t}$.

Solução Aplicando a regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt}[(1+t)\sqrt{t}] \\ &= (1+t)\frac{d}{dt}[\sqrt{t}] + \sqrt{t}\frac{d}{dt}[1+t] \\ &= \frac{1+t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} = \frac{1+3t}{2\sqrt{t}}\end{aligned}$$

■ DERIVADA DE UM QUOCIENTE

Assim como a derivada de um produto não é, em geral, o produto das derivadas, também a derivada de um quociente não é, em geral, o quociente das derivadas. A relação correta é dada no teorema seguinte.

2.4.2 TEOREMA (Regra do Quociente) Se f e g forem diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então f/g será diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \quad (2)$$

A Fórmula (2) também pode ser expressa por

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

Somando-se e subtraindo-se ao numerador o termo $f(x) \cdot g(x)$, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x) \cdot g(x+h)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\ &= \frac{\left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \right] \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] - \left[\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \right] \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\ &= \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

[Veja a nota no final da prova do Teorema 2.4.1 para explicações sobre a última passagem.]

Em palavras, a derivada de um quociente de duas funções é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, tudo dividido pelo quadrado do denominador.

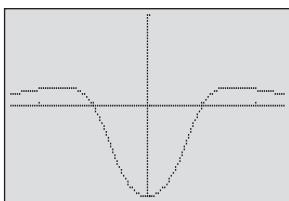
Às vezes é melhor simplificar uma função do que aplicar a regra do quociente às cegas. Por exemplo, é mais fácil derivar

$$f(x) = \frac{x^{3/2} + x}{\sqrt{x}}$$

reescrevendo essa função como

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

do que usar a regra do quociente na primeira expressão.



$[-2,5; 2,5] \times [-1, 1]$
 $xScl = 1, yScl = 1$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$$

Figura 2.4.1

► **Exemplo 3** Encontre $y'(x)$ para $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x + 5}$.

Solução Aplicando a regra do quociente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x + 5} \right] = \frac{(x+5) \frac{d}{dx}[x^3 + 2x^2 - 1] - (x^3 + 2x^2 - 1) \frac{d}{dx}[x+5]}{(x+5)^2} \\ &= \frac{(x+5)(3x^2 + 4x) - (x^3 + 2x^2 - 1)(1)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{(3x^3 + 19x^2 + 20x) - (x^3 + 2x^2 - 1)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 17x^2 + 20x + 1}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

► **Exemplo 4** Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$.

- Faça o gráfico de $y = f(x)$ e utilize-o para obter as localizações aproximadas de todas as retas tangentes horizontais.
- Por diferenciação, encontre a localização exata das retas tangentes horizontais.

Solução (a) A Figura 2.4.1 mostra o gráfico de $y = f(x)$ na janela $[-2,5; 2,5] \times [-1, 1]$. Esse gráfico sugere que as retas tangentes horizontais ocorrem em $x = 0$, $x \approx 1,5$ e $x \approx -1,5$.

Solução (b) Para encontrar a exata localização das retas tangentes horizontais, devemos descobrir os pontos nos quais $dy/dx = 0$. Vamos começar encontrando dy/dx :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \right] = \frac{(x^4 + 1) \frac{d}{dx}[x^2 - 1] - (x^2 - 1) \frac{d}{dx}[x^4 + 1]}{(x^4 + 1)^2} \\ &= \frac{(x^4 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} \quad \boxed{\text{A diferenciação está completa.}} \\ &= \frac{-2x^5 + 4x^3 + 2x}{(x^4 + 1)^2} = -\frac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2}\end{aligned}$$

Vamos equacionar, agora, $dy/dx = 0$ e determinar as soluções x . Obtemos

$$-\frac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2} = 0$$

As soluções para essa equação são os valores de x que anulam o numerador:

$$2x(x^4 - 2x^2 - 1) = 0$$

O primeiro fator dá lugar à solução $x = 0$. Outras soluções podem ser encontradas resolvendo a equação

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

Essa pode ser tratada como uma equação quadrática em x^2 e resolvida pela fórmula quadrática. Obtém-se, então,

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

O sinal menos dá lugar a valores imaginários para x , os quais vamos ignorar, pois não são relevantes para o problema. O sinal mais dá lugar às soluções

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

Em resumo, as retas tangentes horizontais ocorrem em

$$x = 0, \quad x = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1,55, \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx -1,55$$

que estão em conformidade com as aproximações obtidas em (a). ◀

Deduza a regra seguinte para a derivada do recíproco de uma função:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Utilize essa regra para encontrar a derivada de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

■ RESUMO DAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

A tabela abaixo resume as regras de derivação que encontramos até aqui.

Tabela 2.4.1
REGRAS DE DERIVAÇÃO

$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
$(cf)' = cf'$	$(f - g)' = f' - g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 2.4 (Ver página 169 para respostas.)

- (a) $\frac{d}{dx}[x^2 f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ (b) $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{x^2 + 1} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$
- (c) $\frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + 1}{f(x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$
- Encontre $F'(1)$ sabendo que $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$, $g(1) = 3$ e $g'(1) = -1$.
 - $F(x) = 2f(x) - 3g(x)$
 - $F(x) = [f(x)]^2$
 - $F(x) = f(x)g(x)$
 - $F(x) = f(x)/g(x)$

EXERCÍCIOS 2.4  Recurso Gráfico

1-4 Calcule a derivada da função $f(x)$: (a) multiplicando e então derivando e depois (b) usando a regra do produto. Verifique que (a) e (b) dão o mesmo resultado. ■

1. $f(x) = (x+1)(2x-1)$

2. $f(x) = (3x^2 - 1)(x^2 + 2)$

3. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

4. $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$

5-20 Encontre $f'(x)$. ■

5. $f(x) = (3x^2 + 6)(2x - \frac{1}{4})$

6. $f(x) = (2-x-3x^3)(7+x^5)$

7. $f(x) = (x^3 + 7x^2 - 8)(2x^{-3} + x^{-4})$

8. $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(3x^3 + 27)$

9. $f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

10. $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - x)$

11. $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$

12. $f(x) = \frac{x-2}{x^4+x+1}$

13. $f(x) = \frac{x^2}{3x-4}$

14. $f(x) = \frac{2x^2+5}{3x-4}$

15. $f(x) = \frac{(2\sqrt{x}+1)(x-1)}{x+3}$

16. $f(x) = (2\sqrt{x}+1)\left(\frac{2-x}{x^2+3x}\right)$

17. $f(x) = (2x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)(x^{-3}+7)$

18. $f(x) = x^{-5}(x^2 + 2x)(4 - 3x)(2x^9 + 1)$

19. $f(x) = (x^7 + 2x - 3)^3$

20. $f(x) = (x^2 + 1)^4$

21-24 Encontre $dy/dx|_{x=1}$. ■

21. $y = \frac{2x-1}{x+3}$

22. $y = \frac{4x+1}{x^2-5}$

23. $y = \left(\frac{3x+2}{x}\right)(x^{-5}+1)$

24. $y = (2x^7 - x^2)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

 **25-26** Use um recurso gráfico para estimar o valor de $f'(1)$ usando um zoom no gráfico de f e, então, compare sua estimativa ao valor exato obtido por derivação. ■

25. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

26. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

27. Encontre $g'(4)$, dado que $f(4) = 3$ e $f'(4) = -5$.

(a) $g(x) = \sqrt{x}f(x)$

(b) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

28. Encontre $g'(3)$, dado que $f(3) = -2$ e $f'(3) = 4$.

(a) $g(x) = 3x^2 - 5f(x)$

(b) $g(x) = \frac{2x+1}{f(x)}$

29. Nas partes (a)-(d), $F(x)$ é dada em termos de $f(x)$ e de $g(x)$. Encontre $F'(2)$, dado que $f(2) = -1$, $f'(2) = 4$, $g(2) = 1$ e $g'(2) = -5$.

- (a) $F(x) = 5f(x) + 2g(x)$
- (b) $F(x) = f(x) - 3g(x)$
- (c) $F(x) = f(x)g(x)$
- (d) $F(x) = f(x)/g(x)$

30. Encontre $F'(\pi)$, dado que $f(\pi) = 10$, $f'(\pi) = -1$, $g(\pi) = -3$ e $g'(\pi) = 2$.

- (a) $F(x) = 6f(x) - 5g(x)$
- (b) $F(x) = x(f(x) + g(x))$
- (c) $F(x) = 2f(x)g(x)$
- (d) $F(x) = \frac{f(x)}{4+g(x)}$

31-36 Encontre todos os valores de x nos quais a reta tangente à curva dada satisfaz a propriedade enunciada. ■

31. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$; horizontal

32. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$; horizontal

33. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$; paralela à reta $y = x$

34. $y = \frac{x+3}{x+2}$; perpendicular à reta $y = x$

35. $y = \frac{1}{x+4}$; passa pela origem

36. $y = \frac{2x+5}{x+2}$; corta o eixo y em 2

ENFOCANDO CONCEITOS

37. (a) Defina o que deveria significar duas curvas se intersecando em ângulo reto.

(b) Prove que as curvas $y = 1/x$ e $y = 1/(2-x)$ se intersectam em ângulo reto.

38. Encontre todos os valores de a com os quais as curvas $y = a/(x-1)$ e $y = x^2 - 2x + 1$ se intersectam em ângulo reto.

39. Encontre uma fórmula geral para $F''(x)$ se $F(x) = xf(x)$ e f e f' forem diferenciáveis em x .

40. Suponha que a função f seja diferenciável em toda parte e que $F(x) = xf(x)$.

(a) Expresse $F'''(x)$ em termos de x e das derivadas de f .

(b) Para $n \geq 2$, conjecture uma fórmula para $F^{(n)}(x)$.

41. Um fabricante de tênis descobre que as vendas de seu tênis de corrida é uma função $f(p)$ do preço p do par (em dólares). Suponha que $f(120) = 9.000$ pares do tênis e que $f'(120) = -60$ pares de tênis por dólar. A receita que o fabricante recebe pela venda de $f(p)$ pares de tênis a p dólares por par é dada por $R(p) = p \cdot f(p)$. Encontre $R'(120)$. Qual é o impacto sobre a receita do fabricante de um pequeno aumento no preço?

42. Resolva o problema do Exercício 41 supondo que $f(120) = 9.000$ e $f'(120) = -80$.

43. Use a regra do quociente (Teorema 2.4.2) para deduzir a fórmula para a derivada de $f(x) = x^{-n}$, onde n é um inteiro positivo.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.4

1. (a) $x^2 f'(x) + 2x f(x)$ (b) $\frac{(x^2 + 1)f'(x) - 2x f(x)}{(x^2 + 1)^2}$ (c) $\frac{2x f(x) - (x^2 + 1)f'(x)}{[f(x)]^2}$ 2. (a) 7 (b) -4 (c) 7 (d) $\frac{5}{9}$

2.5 DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O objetivo principal desta seção é obter as fórmulas para as derivadas das seis funções trigonométricas básicas. Se considerar necessário, o leitor pode consultar a revisão de funções trigonométricas dada no Apêndice B.

Nesta seção, vamos supor que a variável independente x das funções trigonométricas $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$ seja medida em radianos. Também vamos precisar dos limites no Teorema 1.6.5, reescritos com h em vez de x como a variável, como segue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0 \quad (1-2)$$

Comecemos com o problema de derivar $f(x) = \sin x$. Usando a definição de derivada, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} && \text{Pela fórmula da adição do seno} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) - \sin x \left(\frac{1 - \cos h}{h} \right) \right] && \text{Reorganização algébrica} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \cos x \right) (1) - \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sin x \right) (0) && \text{Fórmulas (1) e (2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x = \cos x && \text{cos } x \text{ não envolve a variável } h \text{ e, portanto, pode ser tratado como uma constante no cálculo do limite} \end{aligned}$$

Reforçamos que as Fórmulas (1) e (2) e a dedução das Fórmulas (3) e (4) são válidas somente se x for medido em radianos. Ver no Exercício 49 como as Fórmulas (3) e (4) mudam se x for medido em graus.

Assim, mostramos que

$$\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x \quad (3)$$

Nos exercícios, o leitor será convidado a utilizar o mesmo método para derivar a fórmula seguinte para a derivada de $\cos x$:

$$\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x \quad (4)$$

► **Exemplo 1** Encontre dy/dx se $y = x \sen x$.

Solução Usando a Fórmula (3) e a regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[x \sen x] \\ &= x \frac{d}{dx}[\sen x] + \sen x \frac{d}{dx}[x] \\ &= x \cos x + \sen x\end{aligned}$$

► **Exemplo 2** Encontre dy/dx se $y = \frac{\sen x}{1 + \cos x}$.

Solução Usando a regra do quociente junto às Fórmulas (3) e (4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \cos x) \cdot \frac{d}{dx}[\sen x] - \sen x \cdot \frac{d}{dx}[1 + \cos x]}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sen x)(-\sen x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sen^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

Como as Fórmulas (3) e (4) são válidas somente com x em radianos, o mesmo ocorre com as Fórmulas (5) a (8).

As derivadas das demais funções trigonométricas são

$$\frac{d}{dx}[\tg x] = \sec^2 x \quad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tg x \quad (5-6)$$

$$\frac{d}{dx}[\cotg x] = -\operatorname{cossec}^2 x \quad \frac{d}{dx}[\operatorname{cossec} x] = -\operatorname{cossec} x \cotg x \quad (7-8)$$

Todas essas fórmulas podem ser obtidas usando a definição de derivada, mas é mais fácil utilizar as Fórmulas (3) e (4) e aplicar a regra do quociente às relações

$$\tg x = \frac{\sen x}{\cos x}, \quad \cotg x = \frac{\cos x}{\sen x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\sen x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\tg x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sen x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x \cdot \frac{d}{dx}[\sen x] - \sen x \cdot \frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sen x \cdot (-\sen x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

Quando quisermos obter o valor de uma derivada em um ponto específico $x = x_0$, é importante substituir x_0 depois de obtida a derivada. Assim, no Exemplo 3, fizemos a substituição $x = \pi/4$ depois de calcular f'' . O que teria acontecido se tivéssemos substituído $x = \pi/4$ incorretamente em $f'(x)$ antes de calcular f'' ?

► **Exemplo 3** Encontre $f''(\pi/4)$ se $f(x) = \sec x$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sec x \tg x \\ f''(x) &= \sec x \cdot \frac{d}{dx}[\tg x] + \tg x \cdot \frac{d}{dx}[\sec x] \\ &= \sec x \cdot \sec^2 x + \tg x \cdot \sec x \tg x \\ &= \sec^3 x + \sec x \tg^2 x\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f''(\pi/4) &= \sec^3(\pi/4) + \sec(\pi/4) \tan^2(\pi/4) \\ &= (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})(1)^2 = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

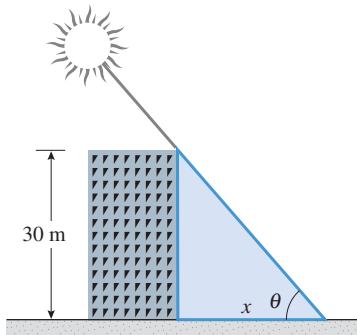


Figura 2.5.1

► Exemplo 4 Suponha que o Sol nascente passe diretamente sobre um prédio de 30 metros de altura e seja θ o ângulo de elevação do Sol (Figura 2.5.1). Encontre a taxa segundo a qual o comprimento x da sombra do prédio está variando em relação a θ , quando $\theta = 45^\circ$. Expressse a resposta em metros/graus.

Solução As variáveis x e θ estão relacionadas por $\tan \theta = 30/x$, ou, de forma equivalente,

$$x = 30 \cot \theta \quad (9)$$

Se θ for medido em radianos, então a Fórmula (7) é aplicável, resultando em

$$\frac{dx}{d\theta} = -30 \csc^2 \theta$$

que é a taxa de variação do comprimento da sombra em relação ao ângulo de elevação em metros/radianos. Quando $\theta = 45^\circ$ (ou, de forma equivalente, $\theta = \pi/4$ radianos), obtemos

$$\left. \frac{dx}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/4} = -30 \csc^2(\pi/4) = -60 \text{ metros/radianos}$$

Convertendo radianos (rad) para graus, obtemos

$$-60 \frac{\text{m}}{\text{rad}} \cdot \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{graus}} = -\frac{\pi}{3} \frac{\text{m}}{\text{grau}} \approx -1,05 \text{ m/grau}$$

Assim, quando $\theta = 45^\circ$, o comprimento da sombra está decrescendo (devido ao sinal menos) a uma taxa aproximada de 1,05 m/grau, com o aumento do ângulo de elevação. ◀

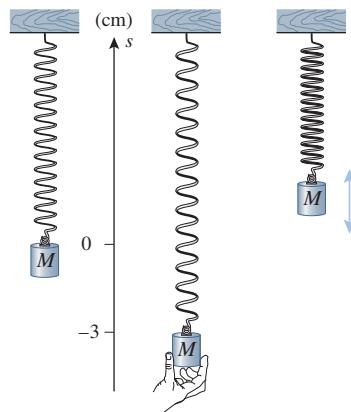


Figura 2.5.2

► Exemplo 5 Conforme ilustra a Figura 2.5.2, suponha que uma massa presa na ponta de uma mola seja esticada 3 cm além de seu ponto de repouso e largada no instante $t = 0$. Supondo que a função posição do topo da massa presa à mola seja

$$s = -3 \cos t \quad (10)$$

onde s está em centímetros e t em segundos, encontre a função velocidade e discuta o movimento dessa massa.

Solução A função velocidade é

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[-3 \cos t] = 3 \sin t$$

A Figura 2.5.3 mostra o gráfico das funções posição e velocidade. A função posição nos diz que o topo da massa oscila entre um ponto mínimo de $s = -3$ e um ponto máximo de $s = 3$, com uma oscilação completa ocorrendo a cada 2π segundos [o período de (10)]. O topo da massa se move para cima (o sentido positivo de s) quando v é positiva, para baixo quando v é negativa e está no ponto máximo ou mínimo quando $v = 0$. Assim, por exemplo, o topo da massa se move para cima do tempo $t = 0$ até o tempo $t = \pi$, quando atinge o ponto máximo $s = 3$ e, então, se move para baixo até o tempo $t = 2\pi$, quando atinge o ponto mínimo $s = -3$. O movimento, então, se repete periodicamente. ◀

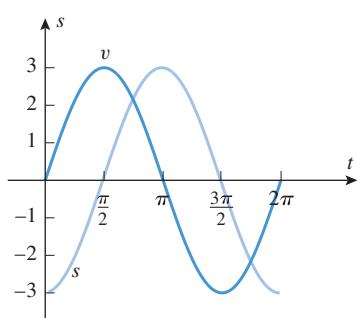


Figura 2.5.3

No Exemplo 5, o topo da massa atinge sua velocidade escalar máxima quando passa pelo ponto de repouso. Por quê? Qual é essa velocidade escalar máxima?

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 2.5 (Ver página 174 para respostas.)

1. Encontre dy/dx .

- (a) $y = \sin x$ (b) $y = \cos x$
 (c) $y = \tan x$ (d) $y = \sec x$

2. Encontre $f'(x)$ e $f'(\pi/3)$ se $f(x) = \sin x \cos x$.

3. Use uma derivada para calcular cada limite.

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + h) - 1}{h}$$

$$(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cossec}(x+h) - \operatorname{cossec} x}{h}$$

EXERCÍCIOS 2.5 Recurso Gráfico

1-18 Encontre $f'(x)$. ■

1. $f(x) = 4 \cos x + 2 \sin x$

2. $f(x) = \frac{5}{x^2} + \sin x$

3. $f(x) = -4x^2 \cos x$

4. $f(x) = 2 \sin^2 x$

5. $f(x) = \frac{5 - \cos x}{5 + \sin x}$

6. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + \sin x}$

7. $f(x) = \sec x - \sqrt{2} \tan x$

8. $f(x) = (x^2 + 1) \sec x$

9. $f(x) = 4 \operatorname{cossec} x - \cot x$

10. $f(x) = \cos x - x \operatorname{cossec} x$

11. $f(x) = \sec x \tan x$

12. $f(x) = \operatorname{cossec} x \cot x$

13. $f(x) = \frac{\cot x}{1 + \operatorname{cossec} x}$

14. $f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$

15. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

16. $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$

17. $f(x) = \frac{\sin x \sec x}{1 + x \tan x}$

18. $f(x) = \frac{(x^2 + 1) \cot x}{3 - \cos x \operatorname{cossec} x}$

19-24 Encontre d^2y/dx^2 . ■

19. $y = x \cos x$

20. $y = \operatorname{cossec} x$

21. $y = x \sin x - 3 \cos x$

22. $y = x^2 \cos x + 4 \sin x$

23. $y = \sin x \cos x$

24. $y = \tan x$

25. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $\tan x$ nos pontos

- (a) $x = 0$ (b) $x = \pi/4$ (c) $x = -\pi/4$

26. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $\sin x$ nos pontos

- (a) $x = 0$ (b) $x = \pi$ (c) $x = \pi/4$

27. (a) Mostre que $y = x \sin x$ é uma solução de $y'' + y = 2 \cos x$.

- (b) Mostre que $y = x \sin x$ é uma solução da equação $y^{(4)} + y'' = -2 \cos x$.

28. (a) Mostre que $y = \cos x$ e $y = \sin x$ são soluções da equação $y'' + y = 0$.

- (b) Mostre que $y = A \sin x + B \cos x$ é uma solução da equação $y'' + y = 0$ para qualquer valor das constantes A e B .

29. Encontre todos os pontos no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ nos quais o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal.

- (a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = x + \cos x$
 (c) $f(x) = \tan x$ (d) $f(x) = \sec x$

30. (a) Use um recurso gráfico para fazer estimativas rudimentares dos pontos no intervalo $[0, 2\pi]$ nos quais o gráfico de $y = \sin x \cos x$ tem uma reta tangente horizontal.

(b) Encontre a exata localização dos pontos onde o gráfico tem uma reta tangente horizontal.

31. Uma escada de 3 m está apoiada em uma parede em um ângulo θ com a horizontal, conforme mostra a figura abaixo. A parte mais alta da escada está a x metros do solo. Se a base da escada for empurrada em direção à parede, encontre a taxa segundo a qual x varia em relação a θ quando $\theta = 60^\circ$. Expresse sua resposta em metros/grau.

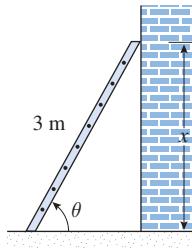


Figura Ex-31

32. Um avião está voando a 1.100 m de altura, conforme a figura abaixo. Qual é a taxa de variação da distância s entre o avião e o ponto fixo P em relação a θ quando $\theta = 30^\circ$? Expresse sua resposta em metros/grau.

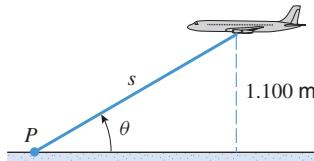


Figura Ex-32

33. Um holofote lança um facho de luz sobre uma parede distante 50 m dele, conforme a figura abaixo. A distância D entre o nível do chão e o local iluminado pelo facho na parede varia com o ângulo θ tomado pelo facho e a horizontal. Supondo que o holofote movimente o facho para cima e para baixo, encontre a taxa segundo a qual a distância D está variando com θ quando $\theta = 45^\circ$. Expresse sua resposta em metros/grau.

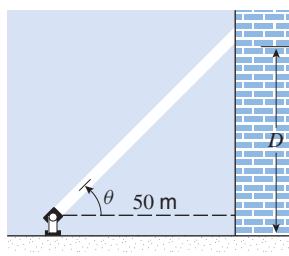


Figura Ex-33

- 34.** Um satélite de observação pode ver somente uma parte da superfície da Terra. Ele tem sensores de horizonte que permitem calcular o ângulo θ , o qual pode ser visto na figura abaixo. Suponha que a Terra (esférica) tenha raio r e que a distância do satélite a partir da superfície dela seja h .

- (a) Mostre que $h = r(\cos \theta - 1)$.
 (b) Considerando $r = 6.378\text{km}$ e supondo que o satélite se aproxime da Terra, encontre a taxa segundo a qual h está variando em relação a θ quando $\theta = 30^\circ$. Expressse sua resposta em quilômetros/grau.

[Adaptado do *Space Mathematics*, NASA, 1985.]

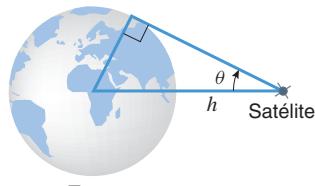


Figura Ex-34

- 35-38 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

35. Se $g(x) = f(x) \sin x$, então $g'(x) = f'(x) \cos x$.
 36. Se $g(x) = f(x) \sin x$, então $g'(0) = f(0)$.
 37. Se $f(x) \cos x = \sin x$, então $f'(x) = \sec^2 x$.
 38. Suponha que $g(x) = f(x) \sec x$, com $f(0) = 8$ e $f'(0) = -2$. Então

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) \sec h - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(\sec h - 1)}{h} \\ &= 8 \cdot \left. \frac{d}{dx} [\sec x] \right|_{x=0} = 8 \sec 0 \tan 0 = 0 \end{aligned}$$

- 39-40** Faça uma conjectura sobre a derivada, calculando algumas delas e observando o padrão resultante. ■

39. $\frac{d^{87}}{dx^{87}} [\sin x]$ 40. $\frac{d^{100}}{dx^{100}} [\cos x]$
 41. Seja $f(x) = \cos x$. Encontre todos os inteiros positivos n com os quais $f^{(n)}(x) = \sin x$.
 42. Seja $f(x) = \sin x$. Encontre todos os inteiros positivos n com os quais $f^{(n)}(x) = \sin x$.

ENFOCANDO CONCEITOS

43. Em cada item, determine onde f é diferenciável.
 (a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = \cos x$
 (c) $f(x) = \tan x$ (d) $f(x) = \cot x$
 (e) $f(x) = \sec x$ (f) $f(x) = \csc x$
 (g) $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ (h) $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$
 (i) $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$

44. (a) Deduza a Fórmula (4) usando a definição de uma derivada.
 (b) Use as Fórmulas (3) e (4) para obter (7).
 (c) Use a Fórmula (4) para obter (6).
 (d) Use a Fórmula (3) para obter (8).

45. Use a Fórmula (1), o formato alternativo para a definição de derivada dado na Fórmula (13) da Seção 2.2, ou seja,

$$f'(x) = \lim_{w \rightarrow x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

e a identidade da diferença dos senos

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

para mostrar que $\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$.

46. Seguindo a orientação do Exercício 45, use a identidade da diferença dos cossenos

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

para mostrar que $\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$.

47. (a) Mostre que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = 1$.
 (b) Use o resultado de (a) como auxílio na dedução da fórmula para a derivada de $\tan x$ diretamente da definição de derivada.

48. Sem usar identidades trigonométricas, encontre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + y) - \tan y}{x}$$

[Sugestão: Relacione o limite dado com a definição de derivada de uma função apropriada de y .]

49. As fórmulas das derivadas de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$ foram obtidas sob a hipótese de que x seja medido em radianos. Se x for medido em graus, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

(Ver Exercício 48 da Seção 1.6.) Use esse resultado para provar que, se x for medido em graus, então

- (a) $\frac{d}{dx} [\sin x] = \frac{\pi}{180} \cos x$
 (b) $\frac{d}{dx} [\cos x] = -\frac{\pi}{180} \sin x$.

50. **Texto** Suponha que f seja uma função que é derivável em toda parte. Explique, se houver, a relação entre a periodicidade de f e a de f' . Ou seja, se f for periódica, f' também precisará ser periódica? Se f' for periódica, f também precisará ser periódica?

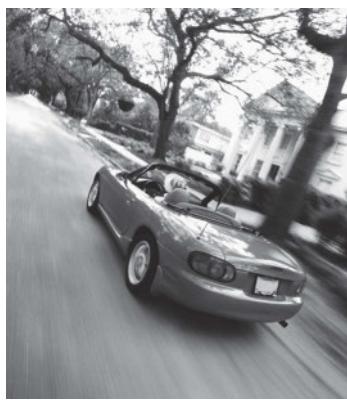
✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.5

1. (a) $\cos x$ (b) $-\operatorname{sen} x$ (c) $\sec^2 x$ (d) $\sec x \operatorname{tg} x$ 2. $f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, f'(\pi/3) = -\frac{1}{2}$
 3. (a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] \Big|_{x=\pi/2} = 0$ (b) $\frac{d}{dx}[\operatorname{cossec} x] = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

2.6 REGRA DA CADEIA

Nesta seção, deduziremos uma fórmula que expresse a derivada de uma composição $f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g . Essa fórmula nos permitirá derivar funções complicadas usando derivadas de funções mais simples.

■ DERIVADAS DE COMPOSIÇÕES



Mike Brinson/Getty Images

O custo de um percurso de carro é uma combinação do consumo do veículo com custo do combustível.

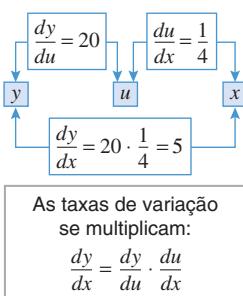


Figura 2.6.1

O nome “regra da cadeia” é apropriado porque a derivada procurada é obtida com dois elos de uma “cadeia” de derivadas mais simples.

Suponha que um professor tenha um carro econômico que faça 20 km por litro de combustível. A quilometragem que pode ser alcançada sem reabastecer é uma função do número de litros que há no tanque de combustível. Em símbolos, se y for o número de quilômetros que pode ser alcançado e u for o número de litros de combustível disponíveis, então y é uma função de u , ou $y = f(u)$. Digamos que cada litro de combustível esteja custando 4 reais no posto favorito do professor. A quantia de dinheiro gasto no abastecimento. Se x for o número de reais pagos no abastecimento, então $u = g(x)$. Agora 20 quilômetros por litro é a taxa de variação da quilometragem em relação ao combustível gasto, portanto,

$$f'(u) = \frac{dy}{du} = 20 \text{ quilômetros por litro}$$

Da mesma forma, como o combustível custa 4 reais por litro, cada real fornece $1/4$ de litro de combustível, e

$$g'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{4} \text{ litro por real}$$

Observe que o número de quilômetros que pode ser percorrido também é uma função do número de reais que foram gastos com o combustível. Esse fato pode ser expresso como a composição de funções

$$y = f(u) = f(g(x))$$

Poderíamos estar interessados na quilometragem obtida por real gasto em combustível, que é dy/dx . A intuição sugere que as taxas de variação são multiplicadas nesse caso (ver Figura 2.6.1); portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{20 \text{ km}}{1 \text{ litro}} \cdot \frac{1 \text{ litro}}{4 \text{ reais}} = \frac{20 \text{ km}}{4 \text{ reais}} = 5 \text{ km por real}$$

O teorema seguinte, cuja prova é dada no Apêndice D, formaliza as ideias precedentes.

2.6.1 TEOREMA (Regra da cadeia) Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ será diferenciável no ponto x . Além disso, se

$$y = f(g(x)) \quad \text{e} \quad u = g(x)$$

então $y = f(u)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{1}$$

A Fórmula (1) é fácil de lembrar porque o lado esquerdo é exatamente o que resultaria se “cancelássemos” os dois du do lado direito. Esse “cancelamento” fornece uma boa maneira de obter a forma correta da regra da cadeia quando utilizamos variáveis diferentes. Por exemplo, se w é uma função de x e x é uma função de t , então a regra da cadeia toma a forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

► **Exemplo 1** Encontre dy/dx se $y = \cos(x^3)$.

Solução Tomamos $u = x^3$ e expressamos y como $y = \cos u$. Aplicando a Fórmula (1), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}[\cos u] \cdot \frac{d}{dx}[x^3] \\ &= (-\sin u) \cdot (3x^2) \\ &= (-\sin(x^3)) \cdot (3x^2) = -3x^2 \sin(x^3)\end{aligned}$$

► **Exemplo 2** Encontre dw/dt se $w = \operatorname{tg} x$ e $x = 4t^3 + t$.

Solução Neste caso, a conta da regra da cadeia toma a forma

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] \cdot \frac{d}{dt}[4t^3 + t] \\ &= (\sec^2 x) \cdot (12t^2 + 1) \\ &= (\sec^2(4t^3 + t)) \cdot (12t^2 + 1) = (12t^2 + 1) \sec^2(4t^3 + t)\end{aligned}$$

■ UMA VERSÃO ALTERNATIVA DA REGRA DA CADEIA

O uso da Fórmula (1) para a regra da cadeia pode ficar desajeitado em alguns problemas porque envolve tantas variáveis. À medida que o leitor ficar mais à vontade com a regra da cadeia, pode querer dispensar o uso das variáveis dependentes intermediárias, expressando (1) na forma

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (2)$$

Uma maneira conveniente de lembrar essa fórmula consiste em chamar f a “função de fora” e g a “função de dentro” na composição $f(g(x))$ e, então, expressar (2) em palavras como:

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

Confirme que (2) é uma versão alternativa de (1) tomando $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

► **Exemplo 3** (Revisão do Exemplo 1) Encontre $h'(x)$ se $h(x) = \cos(x^3)$.

Solução Podemos pensar em h como a composição $f(g(x))$ em que $g(x) = x^3$ é a função de dentro e $f(x) = \cos x$ é a função de fora. Assim, a Fórmula (2) fornece

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &\quad \boxed{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \qquad \qquad \boxed{\text{Derivada da função de dentro}} \\ &= f'(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= -\sin(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin(x^3) \end{aligned}$$

que confere com o resultado obtido no Exemplo 1. ◀

► **Exemplo 4**

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{tg}^2 x] = \frac{d}{dx} [(\operatorname{tg} x)^2] = \underbrace{(2 \operatorname{tg} x)}_{\substack{\text{Derivada da função de} \\ \text{fora calculada na função} \\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{(\sec^2 x)}_{\substack{\text{Derivada da} \\ \text{função de dentro}}} = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} [\sqrt{x^2 + 1}] = \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{x^2 + 1}}_{\substack{\text{Derivada da função de} \\ \text{fora calculada na função} \\ \text{de dentro}}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{Derivada da} \\ \text{função de dentro}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ver Fórmula (6)
da Seção 2.3

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{tg} u] = \underbrace{\sec^2 u}_{\substack{\text{Derivada da função de} \\ \text{fora calculada na função} \\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\substack{\text{Derivada da} \\ \text{função de dentro}}}$$

■ FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

Existe uma terceira variante da regra da cadeia que é intermediária entre as Fórmulas (1) e (2). Tomando $u = g(x)$ em (2), podemos reescrever aquela fórmula como

$$\frac{d}{dx} [f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx} \tag{3}$$

Esse resultado, denominado **fórmula generalizada da derivada** de f , fornece uma maneira de usar a derivada de $f(x)$ para produzir derivadas de $f(u)$, quando u for uma função de x . A Tabela 2.6.1 dá alguns exemplos dessa fórmula.

Tabela 2.6.1
FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$\frac{d}{dx} [u^r] = ru^{r-1} \frac{du}{dx}$	
$\frac{d}{dx} [\operatorname{sen} u] = \cos u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} [\cos u] = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} [\operatorname{tg} u] = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} [\cotg u] = -\operatorname{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} [\sec u] = \sec u \operatorname{tg} u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} [\operatorname{cossec} u] = -\operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u \frac{du}{dx}$

► **Exemplo 5** Encontre

- (a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(2x)]$ (b) $\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x^2 + 1)]$ (c) $\frac{d}{dx}[\sqrt{x^3 + \operatorname{cossec} x}]$
 (d) $\frac{d}{dx}[x^2 - x + 2]^{3/4}$ (e) $\frac{d}{dx}[(1 + x^5 \operatorname{cotg} x)^{-8}]$

Solução (a) Tomando $u = 2x$ na fórmula generalizada de derivação de $\operatorname{sen} u$, obtemos

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(2x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = \cos u \frac{du}{dx} = \cos 2x \cdot \frac{d}{dx}[2x] = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

Solução (b) Tomando $u = x^2 + 1$ na fórmula generalizada de derivação de $\operatorname{tg} u$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x^2 + 1)] &= \frac{d}{dx}[\operatorname{tg} u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \\ &= \sec^2(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[x^2 + 1] = \sec^2(x^2 + 1) \cdot 2x \\ &= 2x \sec^2(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Solução (c) Tomando $u = x^3 + \operatorname{cossec} x$ na fórmula generalizada de derivação de \sqrt{u} , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\sqrt{x^3 + \operatorname{cossec} x}] &= \frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \operatorname{cossec} x}} \cdot \frac{d}{dx}[x^3 + \operatorname{cossec} x] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \operatorname{cossec} x}} \cdot (3x^2 - \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x) = \frac{3x^2 - \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x}{2\sqrt{x^3 + \operatorname{cossec} x}} \end{aligned}$$

Solução (d) Tomando $u = x^2 - x + 2$ na fórmula generalizada da derivação $u^{3/4}$, assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^2 - x + 2]^{3/4} &= \frac{d}{dx}[u^{3/4}] = \frac{3}{4}u^{-1/4} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{3}{4}(x^2 - x + 2)^{-1/4} \cdot \frac{d}{dx}[x^2 - x + 2] \\ &= \frac{3}{4}(x^2 - x + 2)^{-1/4}(2x - 1) \end{aligned}$$

Solução (e) Tomando $u = 1 + x^5 \operatorname{cotg} x$ na fórmula generalizada de derivação de u^{-8} , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(1 + x^5 \operatorname{cotg} x)^{-8}] &= \frac{d}{dx}[u^{-8}] = -8u^{-9} \frac{du}{dx} \\ &= -8(1 + x^5 \operatorname{cotg} x)^{-9} \cdot \frac{d}{dx}[1 + x^5 \operatorname{cotg} x] \\ &= -8(1 + x^5 \operatorname{cotg} x)^{-9} \cdot [x^5(-\operatorname{cossec}^2 x) + 5x^4 \operatorname{cotg} x] \\ &= (8x^5 \operatorname{cossec}^2 x - 40x^4 \operatorname{cotg} x)(1 + x^5 \operatorname{cotg} x)^{-9} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Às vezes, precisamos fazer ajustes na notação ou aplicar mais de uma vez a regra da cadeia para calcular uma derivada.

► **Exemplo 6** Encontre

- (a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(\sqrt{1 + \cos x})]$ (b) $\frac{d\mu}{dt}$ se $\mu = \sec \sqrt{\omega t}$ (ω constante)

Solução (a) Usando $u = \sqrt{1 + \cos x}$ na fórmula generalizada de derivação de $\sin u$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sin(\sqrt{1 + \cos x})] &= \frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \frac{du}{dx} \\ &= \cos(\sqrt{1 + \cos x}) \cdot \frac{d}{dx}[\sqrt{1 + \cos x}] \\ &= \cos(\sqrt{1 + \cos x}) \cdot \frac{-\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}} \\ &= -\frac{\sin x \cos(\sqrt{1 + \cos x})}{2\sqrt{1 + \cos x}}\end{aligned}$$

Usamos a forma generalizada de derivação de \sqrt{u} com $u + 1 = \cos x$.

Solução (b)

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} &= \frac{d}{dt}[\sec \sqrt{\omega t}] = \sec \sqrt{\omega t} \operatorname{tg} \sqrt{\omega t} \frac{d}{dt}[\sqrt{\omega t}] \\ &= \sec \sqrt{\omega t} \operatorname{tg} \sqrt{\omega t} \frac{\omega}{2\sqrt{\omega t}}\end{aligned}$$

Usamos a forma generalizada de derivação de $\sec u$ com $u = \sqrt{\omega t}$.

Usamos a forma generalizada de derivação de \sqrt{u} com $u = \omega t$.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para efetuar a derivação em (4).

■ DERIVANDO COM SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

Alguns cálculos de derivadas podem ser muito cansativos quando feitos à mão, mesmo usando a regra da cadeia e as outras regras de derivação. Para derivadas complicadas, os engenheiros e cientistas frequentemente utilizam algum sistema algébrico computacional (CAS), tal como o *Mathematica*, o *Maple* ou o *Sage*. Por exemplo, embora tenhamos todas as ferramentas matemáticas necessárias para calcular

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 + 1)^{10} \sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{1 + \cos \sec x}} \right] \quad (4)$$

à mão, esse cálculo é suficientemente complexo, a ponto de ser mais eficiente (e menos sujeito a erro) usar um sistema algébrico computacional.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.6 (Ver página 181 para respostas.)

- A regra da cadeia afirma que a derivada da composta de duas funções é a derivada da função de _____ calculada na função de _____ vezes a derivada da função de _____.
- Se y for uma função derivável de u e u , uma função derivável de x , então

$$\frac{dy}{dx} = \text{_____} \cdot \text{_____}$$

- Encontre dy/dx .
 - $y = (x^2 + 5)^{10}$
 - $y = \sqrt{1 + 6x}$
- Encontre dy/dx .
 - $y = \sin(3x + 2)$
 - $y = (x^2 \operatorname{tg} x)^4$
- Suponha que $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, $g(3) = 6$ e $g'(3) = -5$. Calcule
 - $h'(2)$, onde $h(x) = g(f(x))$
 - $k'(3)$, onde $k(x) = f(\frac{1}{3}g(x))$

EXERCÍCIOS 2.6

- Dado que

$$f'(0) = 2, g(0) = 0 \text{ e } g'(0) = 3$$

encontre $(f \circ g)'(0)$.

- Dado que

$$f'(9) = 5, g(2) = 9 \text{ e } g'(2) = -3$$

encontre $(f \circ g)'(2)$.

3. Sejam $f(x) = x^5$ e $g(x) = 2x - 3$.
 (a) Encontre $(f \circ g)(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.
 (b) Encontre $(g \circ f)(x)$ e $g \circ f'(x)$.
4. Sejam $f(x) = 5\sqrt{x}$ e $g(x) = 4 + \cos x$.
 (a) Encontre $(f \circ g)(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.
 (b) Encontre $(g \circ f)(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Dada a tabela a seguir, encontre as derivadas indicadas em (a) e (b).

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
3	5	-2	5	7
5	3	-1	12	4

- (a) $F'(3)$, onde $F(x) = f(g(x))$.
 (b) $G'(3)$, onde $G(x) = g(f(x))$.

6. Dada a tabela abaixo, encontre as derivadas indicadas em (a) e (b).

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
-1	2	3	2	-3
2	0	4	1	-5

- (a) $F'(-1)$, onde $F(x) = f(g(x))$
 (b) $G'(-1)$, onde $G(x) = g(f(x))$

7-26 Encontre $f'(x)$.

7. $f(x) = (x^3 + 2x)^{37}$ 8. $f(x) = (3x^2 + 2x - 1)^6$
 9. $f(x) = \left(x^3 - \frac{7}{x}\right)^{-2}$ 10. $f(x) = \frac{1}{(x^5 - x + 1)^9}$
 11. $f(x) = \frac{4}{(3x^2 - 2x + 1)^3}$ 12. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$
 13. $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{3x}}$ 14. $f(x) = \sqrt[3]{12 + \sqrt{x}}$
 15. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 16. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$
 17. $f(x) = 4 \cos^5 x$ 18. $f(x) = 4x + 5 \operatorname{sen}^4 x$
 19. $f(x) = \cos^2(3\sqrt{x})$ 20. $f(x) = \operatorname{tg}^4(x^3)$
 21. $f(x) = 2 \sec^2(x^7)$ 22. $f(x) = \cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$
 23. $f(x) = \sqrt{\cos(5x)}$ 24. $f(x) = \sqrt{3x - \operatorname{sen}^2(4x)}$
 25. $f(x) = [x + \operatorname{cossec}(x^3 + 3)]^{-3}$
 26. $f(x) = [x^4 - \operatorname{sec}(4x^2 - 2)]^{-4}$

27-40 Encontre dy/dx .

27. $y = x^3 \operatorname{sen}^2(5x)$ 28. $y = \sqrt{x} \operatorname{tg}^3(\sqrt{x})$
 29. $y = x^5 \sec(1/x)$ 30. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\sec(3x + 1)}$

31. $y = \cos(\operatorname{cos} x)$ 32. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} 3x)$
 33. $y = \cos^3(\operatorname{sen} 2x)$ 34. $y = \frac{1 + \operatorname{cossec}(x^2)}{1 - \operatorname{cotg}(x^2)}$
 35. $y = (5x + 8)^7 (1 - \sqrt{x})^6$ 36. $y = (x^2 + x)^5 \operatorname{sen}^8 x$
 37. $y = \left(\frac{x-5}{2x+1}\right)^3$ 38. $y = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{17}$
 39. $y = \frac{(2x+3)^3}{(4x^2-1)^8}$ 40. $y = [1 + \operatorname{sen}^3(x^5)]^{12}$

C 41-42 Use um CAS para encontrar dy/dx .

41. $y = [x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^4(x^7)]^5$
 42. $y = \operatorname{tg}^4\left(2 + \frac{(7-x)\sqrt{3x^2+5}}{x^3 + \operatorname{sen} x}\right)$
- 43-50 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico no ponto especificado.
43. $y = x \cos 3x$, $x = \pi$
 44. $y = \operatorname{sen}(1 + x^3)$, $x = -3$
 45. $y = \sec^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x = -\frac{\pi}{2}$
 46. $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$, $x = 2$ 47. $y = \operatorname{tg}(4x^2)$, $x = \sqrt{\pi}$
 48. $y = 3 \operatorname{cotg}^4 x$, $x = \frac{\pi}{4}$ 49. $y = x^2 \sqrt{5 - x^2}$, $x = 1$
 50. $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = 0$

51-54 Encontre d^2y/dx^2 .

51. $y = x \cos(5x) - \operatorname{sen}^2 x$ 52. $y = \sin(3x^2)$

53. $y = \frac{1+x}{1-x}$ 54. $y = x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$

55-58 Encontre a derivada indicada.

55. $y = \operatorname{cotg}^3(\pi - \theta)$; encontre $\frac{dy}{d\theta}$.
 56. $\lambda = \left(\frac{au+b}{cu+d}\right)^6$; encontre $\frac{d\lambda}{du}$ (a, b, c, d constantes)
 57. $\frac{d}{d\omega}[a \cos^2 \pi\omega + b \operatorname{sen}^2 \pi\omega]$ (a, b constantes)
 58. $x = \operatorname{cossec}^2\left(\frac{\pi}{3} - y\right)$; encontre $\frac{dx}{dy}$.

- 59.** (a) Use um recurso computacional para obter o gráfico da função $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
 (b) Use o gráfico de (a) para fazer um esboço do gráfico de f' .
 (c) Encontre $f'(x)$ e verifique seu trabalho em (b) usando o recurso computacional para obter o gráfico de f' .
 (d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ e faça o gráfico de f junto com o da reta tangente.

- 60.** (a) Use um recurso computacional para obter o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x^2 \cos x$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.
 (b) Use o gráfico de (a) para fazer um esboço do gráfico de f' no intervalo.

- (c) Encontre $f'(x)$ e verifique seu trabalho em (b) usando o recurso computacional para obter o gráfico de f' no intervalo.
- (d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ e faça o gráfico de f e da tangente juntos no intervalo dado.

61-64 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

61. Se $y = f(x)$, então $\frac{d}{dx} [\sqrt{y}] = \sqrt{f'(x)}$.
62. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então $dy/dx = f'(x) \cdot g'(x)$.
63. Se $y = \cos[g(x)]$, então $dy/dx = -\sin[g'(x)]$.
64. Se $y = \sin^3(3x^3)$, então $dy/dx = 27x^2 \sin^2(3x^3) \cos(3x^3)$.

65. Um objeto suspenso por uma mola e em repouso sofre um pequeno deslocamento vertical e depois é abandonado. Se forem ignoradas a resistência do ar e a massa da mola, então a oscilação do objeto é chamada de **movimento harmônico simples**. Sob condições apropriadas, o deslocamento y do equilíbrio em termos do tempo t é dado por

$$y = A \cos \omega t$$

onde A é o deslocamento inicial em $t = 0$ e ω é uma constante que depende da massa do objeto e da rigidez da mola (ver figura abaixo). A constante $|A|$ é denominada a **amplitude** do movimento e ω é a **frequência angular**.

(a) Mostre que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

- (b) O **período** T é o tempo necessário para fazer uma oscilação completa. Mostre que $T = 2\pi/\omega$.
- (c) A **frequência** f da vibração é o número de oscilações por unidade de tempo. Encontre f em termos do período T .
- (d) Encontre a amplitude, o período e a frequência de um objeto executando um movimento harmônico simples, dado por $y = 0,6 \cos 15t$, onde t está em segundos e y , em centímetros.

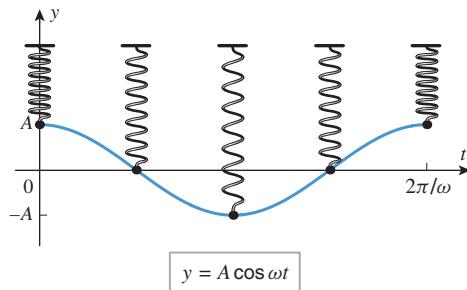


Figura Ex-65

66. Encontre o valor da constante A de forma que $y = A \sin 3t$ satisfaça a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 4 \sin 3t$$

ENFOCANDO CONCEITOS

67. Considere a função f cujo gráfico está na figura abaixo. Calcule

$$\left. \frac{d}{dx} [\sqrt{x + f(x)}] \right|_{x=-1}$$

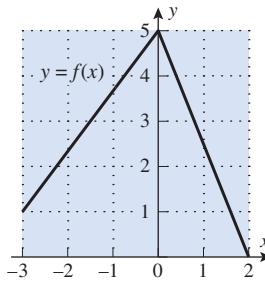


Figura Ex-67

68. Usando a função f do Exercício 67, calcule

$$\left. \frac{d}{dx} [f(2 \sin x)] \right|_{x=\pi/6}$$

69. A figura abaixo mostra o gráfico da pressão atmosférica p (libras/pol²) versus a altitude h (milhas) acima do nível do mar.

- (a) A partir do gráfico e da reta tangente em $h = 2$ mostrados no gráfico, estime os valores de p e dp/dh a uma altitude de 2 milhas.
- (b) Se a altitude de um veículo espacial aumentar a uma taxa de 0,3 milhas/s quando ele está 2 milhas acima do mar, com que rapidez a pressão variará em relação ao tempo nesse instante?

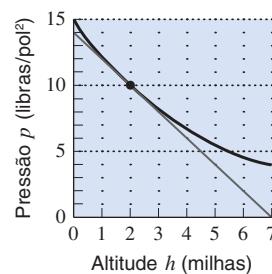


Figura Ex-69

70. A força F (quilogramas) agindo em um ângulo θ com a horizontal necessária para arrastar, ao longo de uma superfície horizontal e a uma velocidade constante, um caixote que pesa W quilos é dada por

$$F = \frac{\mu W}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

onde μ é uma constante denominada **coeficiente de atrito de escorregamento** entre o caixote e a superfície (ver a figura a seguir). Suponha o caixote com 70 kg e $\mu = 0,3$.

- (a) Encontre a $dF/d\theta$ quando $\theta = 30^\circ$. Expresse sua resposta em kg/grau.

- (b) Encontre dF/dt quando $\theta = 30^\circ$, se θ está diminuindo a uma taxa de $0,5^\circ/\text{s}$ nesse instante.

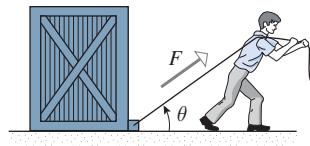


Figura Ex-70

71. Lembre que

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Use esse resultado e a regra da cadeia para encontrar

$$\frac{d}{dx}(|\sin x|)$$

para x diferente de zero no intervalo $(-\pi, \pi)$.

72. Use a fórmula da derivada de $\sin x$ e a identidade

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para obter a fórmula da derivada de $\cos x$.

73. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
 (b) Use a Definição 2.2.1 para mostrar que $f'(0)$ não existe.
 (c) Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$.
 (d) Determine se $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ existe.

74. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
 (b) Use a Definição 2.2.1 para encontrar $f'(0)$.
 (c) Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$.
 (d) Mostre que f' não é contínua em $x = 0$.

75. Dada a tabela a seguir, encontre as derivadas indicadas em (a) e (b).

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	1	7
8	5	-3

- (a) $g'(2)$, onde $g(x) = [f(x)]^3$
 (b) $h'(2)$, onde $h(x) = f(x^3)$

76. Dado que $f'(x) = \sqrt{3x+4}$ e $g(x) = x^2 - 1$, encontre $F'(x)$ se $F(x) = f(g(x))$.

77. Dado que $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e $g(x) = \sqrt{3x-1}$, encontre $F'(x)$ se $F(x) = f(g(x))$.

78. Encontre $f'(x^2)$ se $\frac{d}{dx}[f(x^2)] = x^2$.

79. Encontre $\frac{d}{dx}[f(x)]$ se $\frac{d}{dx}[f(3x)] = 6x$.

80. Lembre que uma função f é **par** se $f(-x) = f(x)$ e **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo x no domínio de f . Supondo que f seja diferenciável, prove que:

- (a) f' será ímpar se f for par.
 (b) f' será par se f for ímpar.

81. Faça alguns esboços para ilustrar os resultados do Exercício 80 e escreva um parágrafo dando uma explicação informal sobre o porquê de os resultados serem verdadeiros.

82. Sejam $y = f_1(u)$, $u = f_2(v)$, $v = f_3(w)$ e $w = f_4(x)$. Expresse dy/dx em termos de dy/du , dw/dx , du/dv e dv/dw .

83. Encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}[f(g(h(x)))]$$

84. **Texto** O “co” de “cosseno” vem de “complementar”, já que o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar e vice versa:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Suponha que definamos uma função g como a *cofunção* de uma função f se

$$g(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{com qualquer } x$$

Assim, o cosseno e o seno são cofunções uma da outra, bem como a cotangente e a tangente, a cossecante e a secante. Se g for a cofunção de f , enuncie uma fórmula que relate g' e a cofunção de f' . Discuta como essa relação é exibida pelas derivadas das funções cosseno, cotangente e cossecante.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.6

1. de fora; de dentro; de dentro 2. $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 3. (a) $10(x^2 + 5)^9 \cdot 2x = 20x(x^2 + 5)^9$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{1+6x}} \cdot 6 = \frac{3}{\sqrt{1+6x}}$
 4. (a) $3 \cos(3x+2)$ (b) $4(x^2 \operatorname{tg} x)^3 (2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x)$ 5. (a) $g'(f(2))f'(2) = -20$ (b) $f'\left(\frac{1}{3}g(3)\right) \cdot \frac{1}{3}g'(3) = -\frac{20}{3}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 2

- Explique a diferença entre taxa de variação média e instantânea e discuta como elas podem ser calculadas.
- Complete cada parte para a função $y = \frac{1}{2}x^2$.
 - Encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[3, 4]$.
 - Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = 3$.
 - Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x em um valor qualquer de x .
 - Esoe o gráfico de $y = \frac{1}{2}x^2$ junto ao da reta secante cuja inclinação é dada pelo resultado de (a) e indique graficamente a inclinação da reta tangente que corresponde ao resultado obtido em (b).
- Complete cada parte para a função $f(x) = x^2 + 1$.
 - Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um valor qualquer de x .
 - Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$.
- Um carro percorre uma estrada reta com 120 km de comprimento. Nos primeiros 100 km, ele tem uma velocidade média de 50 km/h. Mostre que, não importando a rapidez com que percorra os últimos 20 km, ele não poderá ter uma velocidade média de 60 km/h para todo o percurso.
- No instante $t = 0$, um carro ultrapassa um caminhão lento. A velocidade média do carro de $t = 1$ a $t = 1 + h$ é

$$v_m = \frac{3(h+1)^{2.5} + 580h - 3}{10h}$$

Estime a velocidade instantânea do carro em $t = 1$, onde o tempo está em segundos e a distância está em pés.

- Um paraquedista pula de um avião. Suponha que a distância que ele cai durante os primeiros t segundos antes de abrir o paraquedas é de $s(t) = 976((0.835)^t - 1) + 176t$, onde s está em pés. Faça o gráfico de s versus t para $0 \leq t \leq 20$ e use-o para estimar a velocidade instantânea em $t = 15$.
- Uma partícula move-se sobre uma linha reta de tal modo que, depois de t horas, está a $s = 3t^2 + t$ km de sua posição inicial.
 - Encontre a velocidade média da partícula sobre o intervalo $[1, 3]$.
 - Encontre a velocidade instantânea em $t = 1$.
- Dê a definição de derivada e duas interpretações para ela.
- Use a definição de derivada para encontrar dy/dx e verifique sua resposta calculando a derivada através de fórmulas apropriadas.
 - $y = \sqrt{9 - 4x}$
 - $y = \frac{x}{x + 1}$
- Suponha que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ k(x - 1), & x > 1. \end{cases}$

Para quais valores de k é

- contínua?
- diferenciável?

- A figura a seguir mostra o gráfico de $y = f'(x)$ para uma função não especificada f .
 - Para quais valores de x a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal?

- Sobre quais intervalos a curva $y = f(x)$ tem retas tangentes com inclinação positiva?
- Sobre quais intervalos a curva $y = f(x)$ tem retas tangentes com inclinação negativa?
- Dado que $g(x) = f(x) \sin x$, encontre $g''(0)$

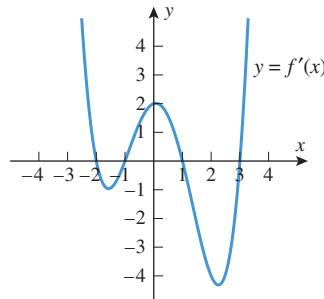


Figura Ex-11

- Esboce o gráfico de uma função f tal que $f(0) = 1, f'(0) = 0, f'(x) > 0$ se $x < 0$, e $f'(x) < 0$ se $x > 0$.
- De acordo com o Bureau do Censo dos Estados Unidos, a população mundial N (em bilhões) estimada e projetada para os meados dos anos de 1950, 1975, 2000, 2025 e 2050 é, respectivamente, 2,555; 4,088; 6,080; 7,841 e 9,104. Embora o crescimento populacional não seja uma função contínua do tempo t , podemos aplicar a ideia de derivada desenvolvida na Seção 2.2 se concordarmos em aproximar o gráfico de N versus t por uma curva contínua, como a da figura a seguir.
 - Use a reta tangente em $t = 2000$ mostrada na figura para aproximar o valor de dN/dt nesse ponto. Interprete o resultado como uma taxa de variação.
 - A **taxa de crescimento** instantânea é definida por

$$\frac{dN/dt}{N}$$

Use a resposta de (a) para aproximar a taxa de crescimento instantânea no início do ano 2000. Expresse o resultado como uma percentagem e inclua as unidades apropriadas.

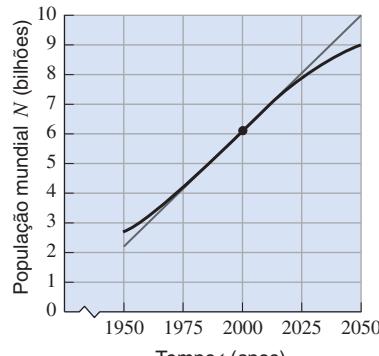


Figura Ex-13

- Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função $f(x) = |x^4 - x - 1| - x$ e estime os valores de x onde a derivada dessa função não existe.

- C 15-18** (a) Use um CAS para encontrar $f'(x)$ usando a Definição 2.2.1; (b) confira o resultado encontrando a derivada à mão; (c) use um CAS para encontrar $f''(x)$. ■

15. $f(x) = x^2 \sen x$

16. $f(x) = \sqrt{x} + \cos^2 x$

17. $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{3x + 2}$

18. $f(x) = \frac{\tg x}{1 + x^2}$

19. A quantidade de água em um tanque t minutos após ele começar a ser esvaziado é dada por $W = 100(t - 15)^2$ litros.

- (a) Com que taxa a água está fluindo no final de 5 minutos?
 (b) Qual é a taxa média segundo a qual a água flui durante os 5 primeiros minutos?

20. Use a fórmula $V = l^3$ para o volume de um cubo de lado l para encontrar
 (a) a taxa média segundo a qual o volume do cubo varia com l quando l cresce de 2 para 4.
 (b) a taxa de variação instantânea segundo a qual o volume de um cubo varia com l quando $l = 5$.

- 21-22** Faça um *zoom* do gráfico de f em um intervalo contendo $x = x_0$ até que o gráfico pareça uma linha reta. Estime a inclinação dessa reta e, então, verifique sua resposta, encontrando o valor exato de $f'(x_0)$. ■

21. (a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 1,8$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$, $x_0 = 3,5$

22. (a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $x_0 = 2,3$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x_0 = -0,5$

23. Suponha que uma função f seja diferenciável em $x = 1$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 5$$

Encontre $f(1)$ e $f'(1)$.

24. Suponha que uma função f seja diferencial em $x = 2$ e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 f(x) - 24}{x - 2} = 28$$

Encontre $f(2)$ e $f'(2)$.

25. Encontre as equações de todas as retas que passam pela origem que são tangentes à curva $y = x^3 - 9x^2 - 16x$.

26. Encontre todos os valores de x com os quais a reta tangente a $y = 2x^3 - x^2$ é perpendicular à reta $x + 4y = 10$.

27. Seja $f(x) = x^2$. Mostre que, para todos os valores distintos de a e b , a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ em $x = \frac{1}{2}(a+b)$ é igual à inclinação da reta secante que passa pelos pontos (a, a^2) e (b, b^2) . Faça uma figura para ilustrar esse resultado.

28. Em cada parte, calcule a expressão, dado que $f(1) = 1$, $g(1) = -2$, $f'(1) = 3$ e $g'(1) = -1$.

(a) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \Big|_{x=1}$ (b) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \Big|_{x=1}$

(c) $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{f(x)}\right] \Big|_{x=1}$ (d) $\frac{d}{dx}[f(1)g'(1)]$

- 29-32** Encontre $f'(x)$. ■

29. (a) $f(x) = x^8 - 3\sqrt{x} + 5x^{-3}$

(b) $f(x) = (2x + 1)^{10}(5x^2 - 7)$

30. (a) $f(x) = \sen x + 2 \cos^3 x$

(b) $f(x) = (1 + \sec x)(x^2 - \tg x)$

31. (a) $f(x) = \sqrt{3x + 1}(x - 1)^2$

(b) $f(x) = \left(\frac{3x + 1}{x^2}\right)^3$

32. (a) $f(x) = \cotg\left(\frac{\cossec 2x}{x^3 + 5}\right)$ (b) $f(x) = \frac{1}{2x + \sen^3 x}$

- 33-34** Encontre os valores de x nos quais a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal. ■

33. $f(x) = (2x + 7)^6(x - 2)^5$ 34. $f(x) = \frac{(x - 3)^4}{x^2 + 2x}$

35. Encontre todas as retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de $y = x^2 + 1$ e ao gráfico de $y = -x^2 - 1$.

36. (a) Seja n um número inteiro positivo par. Generalize o resultado do Exercício 35 encontrando todas as retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de $y = x^n + n - 1$ e ao gráfico de $y = -x^n - n + 1$.
 (b) Seja n um número inteiro positivo ímpar. Existem retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de $y = x^n + n - 1$ e ao gráfico de $y = -x^n - n + 1$? Explique.

37. Encontre todos os valores de x com os quais a reta que é tangente a $y = 3x - \tg x$ é paralela à reta $y - x = 2$.

- 38.** Aproxime os valores de x nos quais a reta tangente ao gráfico de $y = x^3 - \sen x$ é horizontal.

39. Suponha que $f(x) = M \sen x + N \cos x$ com certas constantes M e N . Se $f(\pi/4) = 3$ e $f'(\pi/4) = 1$, encontre uma equação para a reta tangente a $y = f(x)$ em $x = 3\pi/4$.

40. Suponha que $f(x) = M \tg x + N \sec x$ com certas constantes M e N . Se $f(\pi/4) = 2$ e $f'(\pi/4) = 1$, encontre uma equação para a reta tangente a $y = f(x)$ em $x = 0$.

41. Suponha que $f'(x) = 2x \cdot f(x)$ e $f(2) = 5$.

- (a) Encontre $g'(\pi/3)$ se $g(x) = f(\sec x)$.
 (b) Encontre $h'(2)$ se $h(x) = [f(x)/(x - 1)]^4$.

CAPÍTULO 2 ESTABELECENDO CONEXÕES

1. Suponha que f seja uma função com as propriedades seguintes: (i) f é derivável em toda parte, (ii) $f(x+y) = f(x)f(y)$ com quaisquer valores de x e y , (iii) $f(0) \neq 0$ e (iv) $f'(0) = 1$.
 - (a) Mostre que $f(0) = 1$. [Sugestão: Considere $f(0+0)$.]
 - (b) Mostre que $f(x) > 0$ com quaisquer valores de x . [Sugestão: Considerando $f(x-x)$, mostre, inicialmente, que $f(x) \neq 0$.]
 - (c) Usando a definição de derivada (Definição 2.2.1) mostre que $f'(x) = f(x)$, com quaisquer valores de x .
 2. Suponha que f e g sejam duas funções tais que cada uma tem as propriedades (i) a (iv) do Exercício 1.
 - (a) Mostre, de duas maneiras, que $y = f(2x)$ satisfaz a equação $y' = 2y$: usando a propriedade (ii) e aplicando diretamente a regra da cadeia (Teorema 2.6.1).
 - (b) Se k for uma constante, mostre que $y = f(kx)$ satisfaz a equação $y' = ky$.
 - (c) Encontre algum valor de k tal que $y = f(x)g(x)$ satisfaça a equação $y' = ky$.
 - (d) Se $h = f/g$, encontre $h'(x)$. Faça uma conjectura sobre a relação entre f e g .
 3. (a) Aplique duas vezes a regra do produto (Teorema 2.4.1) para mostrar que, se f , g e h forem funções deriváveis, então a função $f \cdot g \cdot h$ é derivável e

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$
 - (b) Suponha que f , g , h e k sejam funções deriváveis. Obtenha uma fórmula para $(f \cdot g \cdot h \cdot k)'$.
- (c) Usando os resultados das partes (a) e (b), faça uma conjectura sobre a fórmula da derivada de um produto de n funções. Prove sua fórmula usando indução.
 4. (a) Aplique duas vezes a regra do quociente (Teorema 2.4.2) para mostrar que, se f , g e h forem funções deriváveis, então a função $(f/g)/h$ é derivável onde estiver definida e

$$[(f/g)/h]' = \frac{f' \cdot g \cdot h - f \cdot g' \cdot h - f \cdot g \cdot h'}{g^2 h^2}$$
 - (b) Simplificando $(f/g)/h$ e então aplicando as regras do produto e do quociente, obtenha novamente a fórmula da derivada da parte (a).
 - (c) Aplique duas vezes a regra do quociente (Teorema 2.4.2) para obter uma fórmula para $[f/(g/h)]'$.
 - (d) Simplificando $f/(g/h)$ e aplicando as regras do produto e do quociente, obtenha novamente a fórmula da derivada da parte (c).
5. Suponha que $h(x) = f(x)/g(x)$ seja derivável. Obtenha a fórmula da regra do quociente de $h'(x)$ (Teorema 2.4.2) de duas maneiras:
 - (a) Escreva $h(x) = f(x) \cdot [g(x)]^{-1}$ e use as regras do produto e da cadeia (Teoremas 2.4.1 e 2.6.1) para derivar h .
 - (b) Escreva $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ e use a regra do produto para obter uma fórmula para $h'(x)$.



EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Para aprender como as derivadas podem ser usadas na área de robótica, confira o módulo intitulado Robótica em

www.grupoa.com.br



Craig Lovell/Corbis Images

O crescimento e o declínio de populações animais e recursos naturais podem ser modelados usando funções estudadas no Cálculo.

3

TÓPICOS EM DIFERENCIACÃO

Começamos este capítulo estendendo o processo de derivação a funções que são difíceis ou impossíveis de derivar diretamente. Discutiremos uma combinação de métodos diretos e indiretos de derivação que nos permitirão desenvolver várias novas fórmulas de derivação que incluem as derivadas das funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas inversas. Mais adiante neste capítulo, consideraremos algumas aplicações da derivada. Entre elas, as maneiras pelas quais podemos relacionar taxas de variação distintas e a utilização de funções lineares para aproximar funções não lineares. Finalmente, discutiremos a regra de L'Hôpital, uma poderosa ferramenta para calcular limites.

3.1 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Até aqui, estivemos ocupados com funções diferenciáveis que eram dadas por equações da forma $y = f(x)$. Nesta seção, consideraremos métodos para diferenciar funções para as quais é inconveniente ou impossível uma expressão dessa forma.

■ FUNÇÕES DEFINIDAS EXPLÍCITA E IMPLICITAMENTE

Dizemos que uma equação da forma $y = f(x)$ define y **explicitamente** como uma função de x , pois a variável y aparece sozinha de um lado da equação. Entretanto, algumas vezes, as funções são definidas por equações nas quais y não está sozinho de um lado; por exemplo, a equação

$$yx + y + 1 = x \quad (1)$$

não está na forma $y = f(x)$. Contudo, ainda define y como uma função de x , uma vez que pode ser reescrita como

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Assim, dizemos que (1) define y **implicitamente** como uma função de x , sendo essa função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

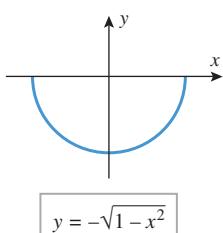
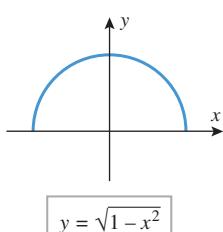
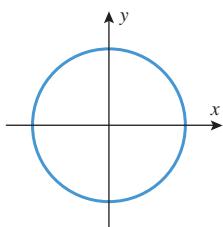


Figura 3.1.1

Uma equação em x e y pode implicitamente definir mais de uma função de x . Isso pode ocorrer quando o gráfico da equação não passa no teste da reta vertical e, portanto, não é o gráfico de uma função. Por exemplo, se resolvemos a equação do círculo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

para y em termos de x , obtemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; assim, encontramos duas funções que estão definidas implicitamente por (2), isto é,

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad (3)$$

Os gráficos dessas funções são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 3.1.1). Isso nos leva à definição seguinte.

3.1.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma dada equação em x e y define a função *implicitamente* se o gráfico de $y = f(x)$ coincidir com alguma porção do gráfico da equação.

► **Exemplo 1** O gráfico da equação $x = y^2$ não é o gráfico de uma função de x , pois não passa no teste da reta vertical (Figura 3.1.2). Contudo, resolvendo essa equação para y em termos de x , obtemos as equações $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$, cujos gráficos passam no teste da reta vertical e são porções do gráfico de $x = y^2$ (Figura 3.1.2). Assim, a equação $x = y^2$ define implicitamente as funções

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{x} \quad \blacktriangleleft$$

Embora tenha sido elementar resolver a equação $x = y^2$ do último exemplo para y em termos de x , para outras equações isso pode ser difícil ou impossível. Por exemplo, a equação

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad (4)$$

pode ser resolvida para y em termos de x , mas as fórmulas resultantes são por demais complicadas para ter alguma utilidade prática. Outras equações, tais como $\sin(xy) = y$, não podem ser resolvidas para y em termos de x por quaisquer métodos elementares. Assim, embora uma equação possa definir uma ou mais funções de x , pode não ser possível ou prático encontrar fórmulas explícitas para essas funções.

Felizmente, programas CAS, como o *Mathematica* e o *Maple*, têm capacidade para traçar “gráficos implícitos”, com o que conseguem esboçar gráficos de equações como (4). O gráfico dessa equação, denominada *Fólio de Descartes*, está esboçado na Figura 3.1.3a. As partes (b) e (c) dessa figura mostram os gráficos em azul de duas funções definidas implicitamente por (4).

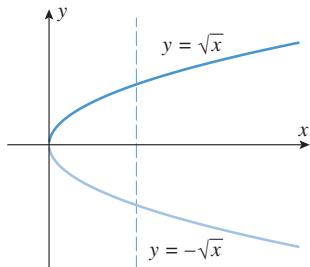
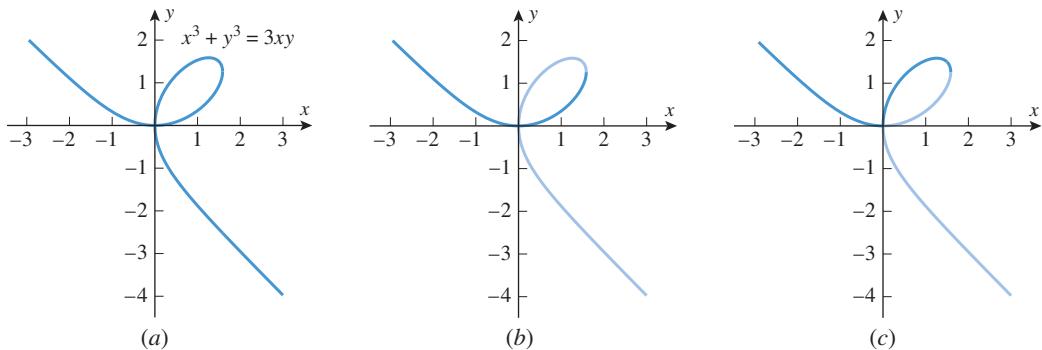
Figura 3.1.2 O gráfico de $x = y^2$ não passa no teste da reta vertical, mas os de $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ passam.

Figura 3.1.3

■ DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Em geral, não é necessário resolver uma equação de y em termos de x a fim de derivar as funções definidas implicitamente por ela. Para ilustrar isso, consideremos a equação simples

$$xy = 1 \quad (5)$$

Uma maneira de encontrar dy/dx é reescrevendo-a como

$$y = \frac{1}{x} \quad (6)$$

da qual tem-se que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad (7)$$

Contudo, há outra maneira de obter essa derivada. Podemos derivar ambos os lados de (5) antes de resolver para y em termos de x , tratando y como uma função (por enquanto não especificada) diferenciável de x . Com essa abordagem, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xy] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x\frac{d}{dx}[y] + y\frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Se agora substituirmos (6) na última expressão, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

o que está de acordo com (7). Esse método para obter derivadas é denominado *diferenciação* ou *derivação implícita*.

► **Exemplo 2** Use a diferenciação implícita para encontrar dy/dx se $5y^2 + \operatorname{sen} y = x^2$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[5y^2 + \operatorname{sen} y] &= \frac{d}{dx}[x^2] \\ 5\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} y] &= 2x \\ 5\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)\frac{dy}{dx} &= 2x \\ 10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

A regra da cadeia foi usada aqui porque y é uma função de x .



René Descartes (1596-1650) Descartes, um aristocrata francês, era filho de um oficial do governo. Graduou-se em Direito na Universidade de Poitiers aos 20 anos. Após experimentar brevemente os prazeres de Paris, tornou-se engenheiro militar, primeiro para o Príncipe de Nassau e, depois, para o Duque da Bavária. Foi durante seu serviço como soldado que Descartes começou a dedicar-se seriamente à Matemática e a desenvolver sua Geometria Analítica. Após as guerras, retornou a Paris, onde se exibia excentricamente com uma espada na cintura e um chapéu emplumado. Levava uma vida despreocupada, raramente levantando-se antes

das 11 horas da manhã e dedicando-se amadoristicamente à Fisiologia humana, à Filosofia, às geleiras, aos meteoros e aos arco-íris. Posteriormente, mudou-se para a Holanda, onde publicou o *Discurso sobre o Método*, e finalmente para a Suécia, onde morreu enquanto trabalhava como professor particular da Rainha Cristina. Descartes é considerado um gênio de primeira grandeza. Além da grande contribuição para a Matemática e a Filosofia, é considerado, junto a William Harvey, um dos fundadores da Fisiologia moderna.

[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg]

Resolvendo para dy/dx , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y} \quad (8)$$

Note que essa fórmula envolve tanto x quanto y . A fim de obter uma fórmula para dy/dx que envolva apenas x , teríamos de resolver a equação original para y em termos de x e, então, substituir em (8). Entretanto, isso é impossível de ser feito; assim, somos forçados a deixar a fórmula dy/dx em termos de x e y . \blacktriangleleft

► Exemplo 3 Use a diferenciação implícita para encontrar d^2y/dx^2 se $4x^2 - 2y^2 = 9$.

Solução Diferenciando ambos os lados de $4x^2 - 2y^2 = 9$ implicitamente, obtém-se

$$8x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

de onde obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \quad (9)$$

Diferenciando ambos os lados de (9) implicitamente, obtém-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)(2) - (2x)(dy/dx)}{y^2} \quad (10)$$

Substituindo (9) dentro de (10) e simplificando, usando a equação original, obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y - 2x(2x/y)}{y^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3} = -\frac{9}{y^3} \quad \blacktriangleleft$$

Nos Exemplos 2 e 3, as fórmulas resultantes para dy/dx envolvem x e y . Embora seja usualmente mais desejável ter a fórmula para dy/dx expressa somente em termos de x , tê-la em termos de x e y não é um impedimento para encontrar as inclinações e as equações das retas tangentes, desde que as coordenadas x e y do ponto de tangência sejam conhecidas. Isso está ilustrado no exemplo seguinte.

► Exemplo 4 Encontre as inclinações das retas tangentes nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 1)$ da curva $y^2 - x + 1 = 0$.

Solução Poderíamos proceder resolvendo a equação para y em termos de x e, então, calculando a derivada de $y = \sqrt{x-1}$ em $(2, 1)$ e a derivada de $y = -\sqrt{x-1}$ em $(2, -1)$ (Figura 3.1.4). Entretanto, a diferenciação implícita é mais eficiente, uma vez que dá as inclinações de ambas as retas tangentes. Diferenciando implicitamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y^2 - x + 1] &= \frac{d}{dx}[0] \\ \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] &= \frac{d}{dx}[0] \\ 2y \frac{dy}{dx} - 1 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

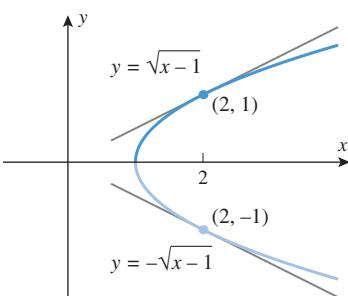


Figura 3.1.4

Em $(2, -1)$ temos $y = -1$ e, em $(2, 1)$, $y = 1$; logo, as inclinações das retas tangentes nesses pontos são

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 5

- Use a diferenciação implícita para encontrar dy/dx para o Fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 3xy$.
- Encontre uma equação para a reta tangente ao Fólio de Descartes no ponto $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.
- Em quais pontos do primeiro quadrante a reta tangente ao Fólio de Descartes é horizontal?

Solução (a) Diferenciando ambos os lados da equação dada implicitamente, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[x^3 + y^3] &= \frac{d}{dx}[3xy] \\
 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 3x \frac{dy}{dx} + 3y \\
 x^2 + y^2 \frac{dy}{dx} &= x \frac{dy}{dx} + y \\
 (y^2 - x) \frac{dy}{dx} &= y - x^2 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y - x^2}{y^2 - x}
 \end{aligned} \tag{11}$$

A Fórmula (11) não pode ser aplicada em $(0, 0)$ e, portanto, não fornece informação alguma sobre a natureza do Fólio de Descartes na origem. Com base nos gráficos da Figura 3.1.3, o que podemos dizer sobre a diferenciabilidade das funções definidas implicitamente e esboçadas em azul nas partes (b) e (c)?

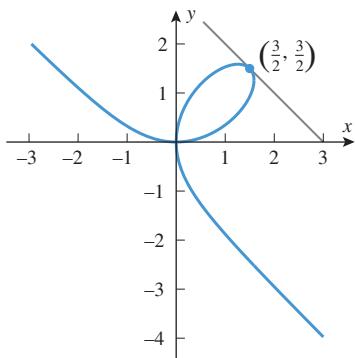


Figura 3.1.5

Solução (b) No ponto $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, temos $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$; assim, a partir de (11), a inclinação m_{tg} da reta tangente nesse ponto é

$$m_{tg} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2}}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)} = -1$$

Assim, a equação da reta tangente no ponto $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ é

$$y - \frac{3}{2} = -1 \left(x - \frac{3}{2} \right) \quad \text{ou} \quad x + y = 3$$

que está em conformidade com a Figura 3.1.5.

Solução (c) A reta tangente é horizontal nos pontos em que $dy/dx = 0$, e a partir de (11) isso ocorre somente quando $y - x^2 = 0$ ou

$$y = x^2 \tag{12}$$

Substituindo essa expressão para y na equação $x^3 + y^3 = 3xy$ da curva, obtemos

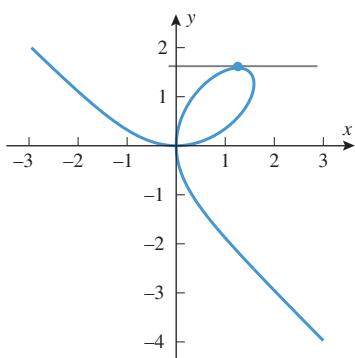
$$\begin{aligned}
 x^3 + (x^2)^3 &= 3x^3 \\
 x^6 - 2x^3 &= 0 \\
 x^3(x^3 - 2) &= 0
 \end{aligned}$$

cujas soluções são $x = 0$ e $x = 2^{1/3}$. A partir de (12), as soluções $x = 0$ e $x = 2^{1/3}$ fornecem os pontos $(0, 0)$ e $(2^{1/3}, 2^{2/3})$, respectivamente. Desses dois, apenas $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ está no primeiro quadrante. Substituindo $x = 2^{1/3}$ e $y = 2^{2/3}$ em (11), obtemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=2^{1/3} \\ y=2^{2/3}}} = \frac{0}{2^{4/3} - 2^{2/3}} = 0$$

Concluímos que $(2^{1/3}, 2^{2/3}) \approx (1,26; 1,59)$ é o único ponto do Fólio de Descartes no primeiro quadrante em que a reta tangente é horizontal (Figura 3.1.6).

Figura 3.1.6



DIFERENCIABILIDADE DE FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE

Ao diferenciar implicitamente, supõe-se que y representa uma função diferenciável de x . Se não for assim, então os cálculos resultantes podem não ter sentido. Por exemplo, se diferenciarmos a equação

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad (13)$$

obtemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Contudo, essa derivada carece de sentido porque não existem valores reais de x e de y que satisfaçam (13) (por quê?). Isso nos diz que (13) não possui gráfico real e, portanto, certamente não define quaisquer funções reais implicitamente.

A conclusão sem sentido dessas contas transmite a importância de saber se uma dada equação em x e y que deverá ser derivada implicitamente de fato define implicitamente alguma função diferenciável de x . Infelizmente, isso pode ser um problema difícil, portanto deixamos a discussão disso para disciplinas mais avançadas de Análise Matemática.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.1 (Ver página 192 para respostas.)

1. A equação $xy + 2y = 1$ define implicitamente a função $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. Use derivação implícita para encontrar dy/dx se $x^2 - y^3 = xy$.
3. A inclinação da reta tangente ao gráfico de $x + y + xy = 3$ no ponto $(1, 1)$ é $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. Use derivação implícita para encontrar d^2y/dx^2 para $\sin y = x$.

EXERCÍCIOS 3.1 c CAS

1-2

- (a) Encontre dy/dx por derivação implícita.
- (b) Resolva a equação para y como uma função de x e obtenha dy/dx dessa equação.
- (c) Confirme que os dois resultados são consistentes expressando a derivada de (a) como uma função somente de x . ■

$$1. x + xy - 2x^3 = 2 \quad 2. \sqrt{y} - \sin x = 2$$

3-12

Encontre dy/dx por derivação implícita. ■

- | | |
|--|---|
| 3. $x^2 + y^2 = 100$ | 4. $x^3 + y^3 = 3xy^2$ |
| 5. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$ | 6. $x^3y^2 - 5x^2y + x = 1$ |
| 7. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1$ | 8. $x^2 = \frac{x+y}{x-y}$ |
| 9. $\sin(x^2y^2) = x$ | 10. $\cos(xy^2) = y$ |
| 11. $\operatorname{tg}^3(xy^2 + y) = x$ | 12. $\frac{xy^3}{1 + \sec y} = 1 + y^4$ |

13-18

Encontre d^2y/dx^2 por derivação implícita. ■

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| 13. $2x^2 - 3y^2 = 4$ | 14. $x^3 + y^3 = 1$ |
| 15. $x^3y^3 - 4 = 0$ | 16. $xy + y^2 = 2$ |
| 17. $y + \sin y = x$ | 18. $x \cos y = y$ |

19-20

Encontre a inclinação da reta tangente à curva nos pontos dados de duas maneiras: primeiro, resolvendo para y em termos de x e derivando; depois, por derivação implícita. ■

$$19. x^2 + y^2 = 1; (1/2, \sqrt{3}/2), (1/2, -\sqrt{3}/2)$$

$$20. y^2 - x + 1 = 0; (10, 3), (10, -3)$$

21-24 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

21. Se uma equação em x e y definir uma função $y = f(x)$ implicitamente, então são idênticos os gráficos da equação e da função.
22. A função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

está definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

23. A função $|x|$ não está definida implicitamente pela equação $(x+y)(x-y) = 0$.
24. Se y estiver definido implicitamente como uma função de x pela equação $x^2 + y^2 = 1$, então $dy/dx = -x/y$.

25-28 Use diferenciação implícita para encontrar a inclinação da reta tangente à curva no ponto especificado e verifique se sua resposta está de acordo com o gráfico. ■

25. $x^4 + y^4 = 16; (1, \sqrt[4]{15})$ [quártica especial de Lamé]
26. $y^3 + yx^2 + x^2 - 3y^2 = 0; (0, 3)$ [trissecriz]
27. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2); (3, 1)$ [lemniscata]
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4; (-1, 3\sqrt{3})$ [hipocicloide de quatro cúspides]

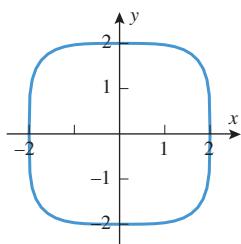


Figura Ex-25

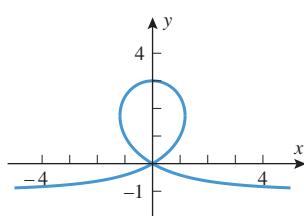


Figura Ex-26

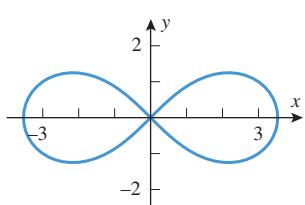


Figura Ex-27

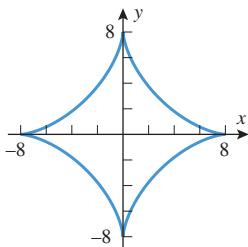


Figura Ex-28

29-32 Use diferenciação implícita para encontrar a derivada especificada.

29. $a^4 - t^4 = 6a^2t; da/dt$

30. $\sqrt{u} + \sqrt{v} = 5; du/dv$

31. $a^2\omega^2 + b^2\lambda^2 = 1$ (a, b constantes); $d\omega/d\lambda$

32. $y = \sin x; dx/dy$

ENFOCANDO CONCEITOS

33. Aparentemente, a elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ tem retas tangentes horizontais nos pontos de interseção da elipse com a reta $y = -2x$, conforme figura abaixo. Use derivação implícita para explicar por que isso, de fato, ocorre.

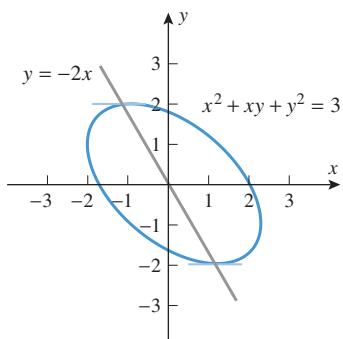


Figura Ex-33

34. (a) Um estudante alega que a elipse $x^2 - xy + y^2 = 1$ tem uma reta tangente horizontal no ponto $(1, 1)$. Sem fazer contas, explique por que a alegação do estudante precisa estar errada.
 (b) Encontre todos os pontos da elipse $x^2 - xy + y^2 = 1$ nos quais a reta tangente é horizontal.

- C 35.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico da equação $y^4 + y^2 = x(x - 1)$.
 (b) Use derivação implícita para ajudar a explicar por que o gráfico em (a) não tem retas tangentes horizontais.
 (c) Resolva a equação $y^4 + y^2 = x(x - 1)$ para x em termos de y e explique por que o gráfico em (a) consiste em duas parábolas.

36. Use derivação implícita para encontrar todos os pontos do gráfico de $y^4 + y^2 = x(x - 1)$ nos quais a reta tangente é vertical.

37. Encontre os valores de a e b tais que o ponto $(1, 1)$ esteja na curva de equação $x^2y + ay^2 = b$ e a reta tangente à curva nesse ponto seja dada por $4x + 3y = 7$.

38. Em qual(is) ponto(s) é a reta tangente à curva $y^3 = 2x^2$ perpendicular à reta $x + 2y - 2 = 0$?

- 39-40** Dizemos que duas curvas são *ortogonais* se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção, e dizemos que duas famílias de curvas são *trajetórias ortogonais* uma da outra se cada membro de uma família for ortogonal a cada membro da outra. Essa terminologia é usada nestes exercícios. ■

39. A Figura Ex-39 mostra alguns membros típicos das famílias dos círculos $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ (curvas escuras) e $(x - k)^2 + y^2 = k^2$ (curvas cinzas). Mostre que essas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra. [Sugestão: Para as retas tangentes serem perpendiculares em um ponto de intersecção, as inclinações dessas retas tangentes devem ser recíprocas negativas uma da outra.]

40. A Figura Ex-40 mostra alguns membros típicos das famílias de hipérboles $xy = c$ (curvas pretas) e $x^2 - y^2 = k$ (curvas cinzas), onde $c \neq 0$ e $k \neq 0$. Use a sugestão do Exercício 39 para mostrar que essas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

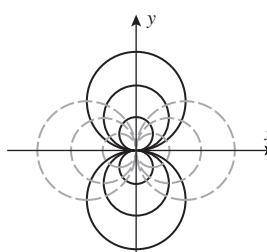


Figura Ex-39

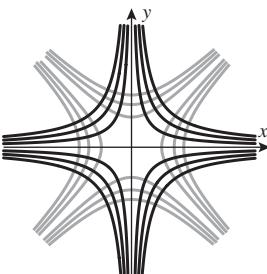


Figura Ex-40

- C 41.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico da curva C cuja equação é $x^3 - 2xy + y^3 = 0$.

- (b) Use o gráfico de (a) para estimar a coordenada x de um ponto do primeiro quadrante que está em C e no qual a reta tangente a C é paralela ao eixo x .

- (c) Encontre o valor exato da coordenada x em (b).

- C 42.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico da curva C cuja equação é $x^3 - 2xy + y^3 = 0$.

- (b) Use o gráfico de (a) para dar um palpite sobre a coordenada x de um ponto do primeiro quadrante que está em C e no qual a reta tangente a C é paralela à reta $y = -x$.

- (c) Use derivação implícita para verificar a conjectura em (b).
- 43.** Encontre dy/dx se

$$2y^3t + t^3y = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}$$

- 44.** Encontre as equações de duas retas pela origem que são tangentes à elipse de equação $2x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$.

45. Texto Escreva um parágrafo comparando os conceitos de definição *explícita* e *implícita* de uma função.

46. Texto Um estudante pergunta: “Suponha que uma derivação implícita num ponto forneça uma expressão indefinida. Isso significa que dy/dx não está definida nesse ponto?” Usando a equação $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ como base de discussão, escreva um parágrafo respondendo à pergunta do estudante.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.1

- 1.** $\frac{1}{x+2}$ **2.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+3y^2}$ **3.** -1 **4.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 y \tan y$

3.2 DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Nesta seção, obteremos fórmulas das derivadas de funções logarítmicas e explicaremos por que, em Cálculo, a função logaritmo natural é preferida em detrimento dos logaritmos de outras bases.

■ DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Estabeleceremos que $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$ aplicando a definição de derivada a $f(x)$. Para calcular o limite resultante, utilizaremos o fato de que $\ln x$ é contínua em $x > 0$ (Teorema 1.6.3) e também o limite

$$\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{1/v} = e \tag{1}$$

Esse limite pode ser obtido dos limites (7) e (8) da Seção 1.3 fazendo a substituição $v = 1/x$ e usando o fato de que $v \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $v \rightarrow 0^-$ quando $x \rightarrow -\infty$. Isso produz dois limites laterais que, juntos, implicam (1) (ver Exercício 64 da Seção 1.3).

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

$$= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{vx} \ln(1+v)$$

A propriedade do quociente dos logaritmos no Teorema 0.5.2.

Seja $v = h/x$ e note que $v \rightarrow 0$ se, e só se, $h \rightarrow 0$.

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \ln(1+v)$$

x está fixo nessa conta, portanto $1/x$ pode ser movido através do sinal do limite.

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1+v)^{1/v}$$

A propriedade da potência dos logaritmos do Teorema 0.6.2.

$$= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{1/v} \right]$$

$\ln x$ é contínua em $(0, +\infty)$, portanto podemos mover o limite através do símbolo da função.

$$= \frac{1}{x} \ln e$$

Pois $\ln e = 1$.

$$= \frac{1}{x}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad (2)$$

Uma fórmula da derivada da função logaritmo geral $\log_b x$ pode ser obtida de (2) usando a Fórmula (6) da Seção 0.5 para escrever

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln b}\right] = \frac{1}{\ln b} \frac{d}{dx}[\ln x]$$

Segue disso que

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b}, \quad x > 0 \quad (3)$$

Observe que, dentre todas as possíveis bases, a base $b = e$ é a que produz a fórmula mais simples para a derivada de $\log_b x$. Essa é uma das razões pelas quais, dentre todos os logaritmos, o natural é o logaritmo preferido no Cálculo.

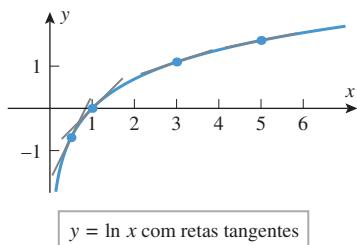


Figura 3.2.1

► Exemplo 1

- A Figura 3.2.1 mostra o gráfico de $y = \ln x$ e suas retas tangentes nos pontos $x = \frac{1}{2}, 1, 3$ e 5 . Encontre as inclinações dessas retas tangentes.
- O gráfico de $y = \ln x$ tem alguma reta tangente horizontal? Use a derivada de $\ln x$ para justificar sua resposta.

Solução (a) A partir de (2), as inclinações das retas tangentes nos pontos $x = \frac{1}{2}, 1, 3$ e 5 são $1/x = 2, 1, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, respectivamente, o que está de acordo com a Figura 3.2.1.

Solução (b) A partir do gráfico de $y = \ln x$, não parece haver qualquer reta tangente horizontal. Isso é confirmado pelo fato de que $dy/dx = 1/x$ não é igual a zero para qualquer valor real de x . ◀

Se u for uma função diferenciável de x e se $u(x) > 0$, então a aplicação da regra da cadeia em (2) e (3) produz as seguintes fórmulas generalizadas da derivada:

$$\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[\log_b u] = \frac{1}{u \ln b} \cdot \frac{du}{dx} \quad (4-5)$$

► Exemplo 2

Encontre $\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)]$.

Solução A partir de (4) com $u = x^2 + 1$, obtemos

$$\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{d}{dx}[x^2 + 1] = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \blacktriangleleft$$

Quando possível, as propriedades dos logaritmos do Teorema 0.5.2 devem ser usadas para converter produtos, quocientes e expoentes em somas, diferenças e múltiplos de constantes *antes* de diferenciar uma função envolvendo logaritmos.

► Exemplo 3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1+x}} \right) \right] &= \frac{d}{dx} \left[2 \ln x + \ln(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1+x) \right] \\ &= \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2(1+x)} \\ &= \frac{2}{x} + \cot g x - \frac{1}{2+2x} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A Figura 3.2.2 mostra o gráfico de $f(x) = \ln|x|$. Essa função é importante por “estender” o domínio da função logaritmo natural no sentido de os valores de $\ln|x|$ e $\ln x$ serem os mesmos para $x > 0$, mas $\ln|x|$ está definido para todos os valores não nulos de x , enquanto $\ln x$ só está definido para valores positivos de x .

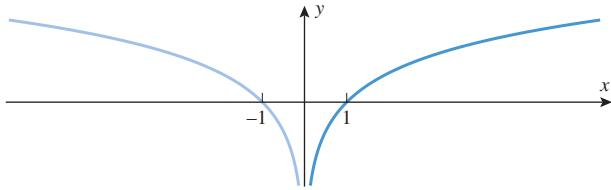


Figura 3.2.2

A derivada de $\ln|x|$ para $x \neq 0$ pode ser obtida considerando os casos $x > 0$ e $x < 0$ separadamente.

Caso $x > 0$ Nesse caso, $|x| = x$; logo

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Caso $x < 0$ Nesse caso, $|x| = -x$; logo, a partir de (4), temos

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{(-x)} \cdot \frac{d}{dx}[-x] = \frac{1}{x}$$

Uma vez que resulta a mesma fórmula em ambos os casos, mostramos que

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \quad \text{se } x \neq 0 \quad (6)$$

► **Exemplo 4** A partir de (6) e da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[\ln|\sin x|] = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}[\sin x] = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g x \quad \blacktriangleleft$$

■ DERIVAÇÃO LOGARÍTMICA

Consideremos agora uma técnica chamada de **derivação** (ou **diferenciação**) **logarítmica**, que é útil para derivar funções compostas de produtos, quocientes e potências.

► **Exemplo 5** A derivada de

$$y = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x - 14}}{(1 + x^2)^4} \quad (7)$$

é relativamente difícil de ser calculada diretamente. Contudo, se primeiro tomarmos o logaritmo natural de ambos os lados e, então, usarmos suas propriedades, podemos escrever

$$\ln y = 2 \ln x + \frac{1}{3} \ln(7x - 14) - 4 \ln(1 + x^2)$$

Diferenciando ambos os lados em relação a x , obtemos

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{7/3}{7x - 14} - \frac{8x}{1 + x^2}$$

Assim, resolvendo para dy/dx e usando (7), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x - 14}}{(1 + x^2)^4} \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{3x - 6} - \frac{8x}{1 + x^2} \right] \quad \blacktriangleleft$$

OBSERVAÇÃO

Como $\ln y$ está definida somente para $y > 0$, os cálculos no Exemplo 5 são válidos somente para $x > 2$ (verifique). Contudo, como a derivada de $\ln y$ é igual à de $\ln |y|$, e como $\ln |y|$ está definida tanto para $y < 0$ como para $y > 0$, segue que a fórmula obtida para dy/dx é válida tanto para $x < 2$ como para $x > 2$. Em geral, sempre que obtivermos uma derivada dy/dx por derivação logarítmica, a fórmula da derivada que resultar será válida para todos os valores de x para os quais $y \neq 0$. Nesses pontos também poderá ser válida, mas isso não pode ser garantido.

■ DERIVADAS DE POTÊNCIAS REAIS DE X

Sabemos pelo Teorema 2.3.2 e pelo Exemplo 82 da Seção 2.3, que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1} \quad (8)$$

Na próxima seção, discutiremos a derivada de funções com expoentes que não são constantes.

é válida para valores constantes inteiros de r . Agora, usaremos a derivação logarítmica para mostrar que essa fórmula é válida se r for *qualquer* número real (racional ou irracional). Em nossos cálculos, vamos supor que x^r é uma função diferenciável e que as leis conhecidas dos expoentes são válidas para os expoentes reais.

Seja $y = x^r$, onde r é um número real. A derivada dy/dx pode ser obtida por diferenciação logarítmica como segue:

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \ln |x^r| = r \ln |x| \\ \frac{d}{dx}[\ln |y|] &= \frac{d}{dx}[r \ln |x|] \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{r}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{r}{x} y = \frac{r}{x} x^r = rx^{r-1} \end{aligned}$$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.2 (Ver página 196 para respostas.)

1. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ em $x = e^2$ é _____.
2. Encontre dy/dx .
 - (a) $y = \ln 3x$
 - (b) $y = \ln \sqrt{x}$
 - (c) $y = \log(1/|x|)$
3. Use derivação logarítmica para encontrar a derivada de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$
4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = _____$

EXERCÍCIOS 3.2

1-26 Encontre dy/dx .

1. $y = \ln 5x$
2. $y = \ln \frac{x}{3}$
3. $y = \ln |1+x|$
5. $y = \ln |x^2 - 1|$
7. $y = \ln \left(\frac{x}{1+x^2} \right)$
9. $y = \ln x^2$
11. $y = \sqrt{\ln x}$

4. $y = \ln(2 + \sqrt{x})$
6. $y = \ln |x^3 - 7x^2 - 3|$
8. $y = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$
10. $y = (\ln x)^3$
12. $y = \ln \sqrt{x}$

13. $y = x \ln x$
15. $y = x^2 \log_2(3 - 2x)$
17. $y = \frac{x^2}{1 + \log x}$
19. $y = \ln(\ln x)$
21. $y = \ln(\tan x)$
23. $y = \cos(\ln x)$
25. $y = \log(\sin^2 x)$
14. $y = x^3 \ln x$
16. $y = x [\log_2(x^2 - 2x)]^3$
18. $y = \frac{\log x}{1 + \log x}$
20. $y = \ln(\ln(\ln x))$
22. $y = \ln(\cos x)$
24. $y = \sin^2(\ln x)$
26. $y = \log(1 - \sin^2 x)$

27-30 Use o método do Exemplo 3 para ajudar a efetuar a derivação indicada. ■

27. $\frac{d}{dx}[\ln((x-1)^3(x^2+1)^4)]$

28. $\frac{d}{dx}[\ln((\cos^2 x)\sqrt{1+x^4})]$

29. $\frac{d}{dx}\left[\ln\frac{\cos x}{\sqrt{4-3x^2}}\right]$

30. $\frac{d}{dx}\left[\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right]$

31-34 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

31. A inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ em $x = a$ tende ao infinito com $a \rightarrow 0^+$.

32. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma asymptota horizontal.

33. A derivada de $\ln|x|$ é uma função ímpar.

34. Temos

$$\frac{d}{dx}((\ln x)^2) = \frac{d}{dx}(2(\ln x)) = \frac{2}{x}$$

35-38 Encontre dy/dx usando derivação logarítmica. ■

35. $y = x\sqrt[3]{1+x^2}$

36. $y = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$

37. $y = \frac{(x^2-8)^{1/3}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7x+5}$

38. $y = \frac{\sin x \cos x \operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{x}}$

39. Encontre

(a) $\frac{d}{dx}[\log_x e]$

(b) $\frac{d}{dx}[\log_x 2]$.

40. Encontre

(a) $\frac{d}{dx}[\log_{(1/x)} e]$

(b) $\frac{d}{dx}[\log_{(\ln x)} e]$.

41-44 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$. ■

41. $f(x) = \ln x; x_0 = e^{-1}$

42. $f(x) = \log x; x_0 = 10$

43. $f(x) = \ln(-x); x_0 = -e$

44. $f(x) = \ln|x|; x_0 = -2$

ENFOCANDO CONCEITOS

45. (a) Encontre a equação de uma reta pela origem que seja tangente ao gráfico de $y = \ln x$.

(b) Explique por que o ponto de corte no eixo y da reta tangente à curva $y = \ln x$ deve ter uma unidade a menos do que a coordenada y do ponto de tangência.

46. Use derivação logarítmica para provar as regras do produto e do quociente. Explique quais propriedade de $\ln x$ são importantes nessa demonstração.

47. Encontre uma fórmula para a área $A(w)$ do triângulo delimitado pela reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ em $P(w, \ln w)$, a reta horizontal por P e o eixo y .

48. Encontre uma fórmula para a área $A(w)$ do triângulo delimitado pela reta tangente ao gráfico de $y = \ln x^2$ em $P(w, \ln w^2)$, a reta horizontal por P e o eixo y .

49. Verifique que $y = \ln(x+e)$ satisfaz $dy/dx = e^{-y}$, com $y = 1$ quando $x = 0$.

50. Verifique que $y = -\ln(e^2 - x)$ satisfaz $dy/dx = e^y$, com $y = -2$ quando $x = 0$.

51. Encontre uma função f tal que $y = f(x)$ satisfaz $dy/dx = e^{-y}$, com $y = 0$ quando $x = 0$.

52. Encontre uma função f tal que $y = f(x)$ satisfaz $dy/dx = e^y$, com $y = -\ln 2$ quando $x = 0$.

53-55 Encontre o limite dado interpretando a expressão como uma derivada apropriada. ■

53. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{x}$

54. (a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^2 + \Delta x) - 2}{\Delta x}$ (b) $\lim_{w \rightarrow 1} \frac{\ln w}{w-1}$

55. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$ (b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{\sqrt{2}} - 1}{h}$

56. Modifique a dedução da Equação (2) para obter outra prova da Equação (3).

57. Suponha que o número p de paraméios numa solução nutritiva t dias depois do início do experimento seja definido implicitamente como uma função de t pela equação

$$0 = \ln p + 0,83 - \ln(2,3 - 0,0046p) - 2,3t$$

Use derivação implícita para mostrar que a taxa de variação de p em relação a t satisfaz a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0,0046p(500 - p)$$

58. Suponha que a população p (em milhões) dos Estados Unidos no ano t seja definida implicitamente como uma função de t pela equação

$$0 = \ln p + 45,817 - \ln(2225 - 4,2381p) - 0,02225t$$

Use derivação implícita para mostrar que a taxa de variação de p em relação a t satisfaz a equação

$$\frac{dp}{dt} = 10^{-5}p(2225 - 4,2381p)$$

59. **Texto** Confira a dedução da fórmula

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

e, então, escreva um parágrafo discutindo todos os ingredientes (teoremas, propriedades de limites, etc.) necessários para essa dedução.

60. **Texto** Escreva um parágrafo explicando como a derivação logarítmica pode substituir uma conta de derivada difícil por uma conta mais simples.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.2

1. $y = \frac{x}{e^2} + 1$ 2. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}$ (c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \ln 10}$

3. $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} \right]$ 4. 1

3.3 DERIVADAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Ver a Seção 0.4 para uma revisão de funções injetoras e inversas.

Nesta seção, mostraremos como a derivada de uma função injetora pode ser usada para obter a derivada de sua inversa. Isso nos dará as ferramentas de que precisamos para obter fórmulas para as derivadas de funções exponenciais a partir das fórmulas das derivadas das funções logarítmicas e fórmulas para as derivadas de funções trigonométricas inversas a partir das fórmulas das derivadas de funções trigonométricas.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é obter uma fórmula que relate a derivada da função inversa f^{-1} com a derivada da função f .

► Exemplo 1 Suponha que f seja uma função injetora tal que $f(2) = 1$ e $f'(2) = \frac{3}{4}$. Então, a reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(2, 1)$ tem a equação

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

A reta tangente a $y = f^{-1}(x)$ no ponto $(1, 2)$ é a reflexão pela reta $y = x$ da reta tangente a $y = f(x)$ pelo ponto $(2, 1)$ (Figura 3.3.1), e sua equação pode ser obtida trocando x com y :

$$x - 1 = \frac{3}{4}(y - 2) \quad \text{ou} \quad y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1)$$

Observe que a inclinação da reta tangente a $y = f^{-1}(x)$ em $x = 1$ é o recíproco da inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ em $x = 2$, isto é,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

Como $2 = f^{-1}(1)$ para a função f do Exemplo 1, segue que $f'(2) = f'(f^{-1}(1))$. Assim, a Fórmula (1) também pode ser dada por

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

Em geral, se f for uma função diferenciável e injetora, então

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (2)$$

desde que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

A Fórmula (2) pode ser confirmada usando derivação implícita. A equação $y = f^{-1}(x)$ é equivalente a $x = f(y)$. Derivando em relação a x , obtemos

$$1 = \frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}[f(y)] = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Também, de $x = f(y)$ temos $dx/dy = f'(y)$, o que nos fornece a seguinte versão alternativa da Fórmula (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad (3)$$

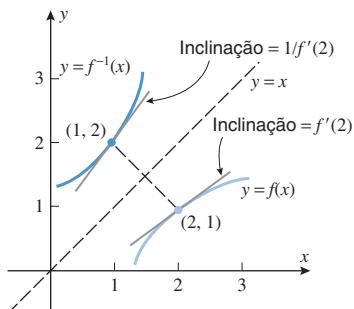


Figura 3.3.1

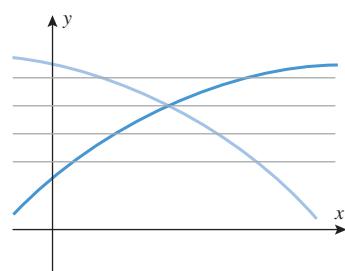


Figura 3.3.2 O gráfico de uma função crescente ou decrescente é cortado no máximo uma vez por qualquer reta horizontal.

■ FUNÇÕES CRESCENTES OU DECRESCENTES SÃO INJETORAS

Se o gráfico de uma função f é sempre crescente ou sempre decrescente no domínio de f , então uma reta horizontal cortará o gráfico de f em no máximo um ponto (Figura 3.3.2), de

modo que f deve ter uma função inversa (ver Seção 0.4). Provaremos, no próximo capítulo, que f é crescente em qualquer intervalo no qual $f'(x) > 0$ (pois o gráfico tem inclinação positiva) e que f é decrescente em qualquer intervalo no qual $f'(x) < 0$ (pois o gráfico tem inclinação negativa). Essas observações intuitivas, junto à Fórmula (2), sugerem o teorema seguinte, que enunciamos sem prova formal.

3.3.1 TEOREMA Suponha que o domínio de uma função f seja um intervalo aberto no qual $f'(x) > 0$ ou no qual $f'(x) < 0$. Então, f é injetora, $f^{-1}(x)$ é diferenciável em cada valor x da imagem de f e a derivada de $f^{-1}(x)$ é dada pela Fórmula (2).

► **Exemplo 2** Considere a função $f(x) = x^5 + x + 1$.

- Mostre que f é injetora no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
- Encontre uma fórmula para a derivada de f^{-1} .
- Calcule $(f^{-1})'(1)$.

Em geral, uma vez estabelecido que f^{-1} é diferenciável, temos a opção de calcular a derivada de f^{-1} ou pelo uso das Fórmulas (2) ou (3) ou, então, por derivação implícita, como no Exemplo 2.

Solução (a) Como

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

com quaisquer valores reais de x , segue, pelo Teorema 3.3.1, que f é injetora no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Solução (b) Seja $y = f^{-1}(x)$. Derivando $x = f(y) = y^5 + y + 1$ implicitamente em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^5 + y + 1] \\ 1 &= (5y^4 + 1)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{5y^4 + 1} \end{aligned} \tag{4}$$

Não sabemos resolver $x = y^5 + y + 1$ para y em termos de x , portanto, deixamos a expressão de dy/dx na Equação (4) em termos de y .

Solução (c) A partir da Equação (4),

$$(f^{-1})'(1) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{1}{5y^4 + 1} \right|_{x=1}$$

Assim, queremos saber o valor de $y = f^{-1}(x)$ em $x = 1$, o que pode ser obtido resolvendo a equação $f(y) = 1$ em y . Essa equação é $y^5 + y + 1 = 1$, que é satisfeita por $y = 0$. Assim,

$$(f^{-1})'(1) = \left. \frac{1}{5y^4 + 1} \right|_{y=0} = 1 \quad \blacktriangleleft$$

■ DERIVADAS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Nosso próximo objetivo é mostrar que a função exponencial geral b^x ($b > 0$, $b \neq 1$) é diferenciável em toda parte e encontrar sua derivada. Para isso, usaremos o fato de que b^x é a

inversa da função $f(x) = \log_b x$. Vamos supor que $b > 1$. Com essa hipótese, temos $\ln b > 0$ e, portanto,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b} > 0 \quad \text{com qualquer } x \text{ no intervalo } (0, +\infty)$$

Segue, do Teorema 3.3.1, que $f^{-1}(x) = b^x$ é diferenciável em cada x da imagem de $f(x) = \log_b x$. No entanto, pela Tabela 0.5.3, sabemos que a imagem de $\log_b x$ é $(-\infty, +\infty)$; portanto, estabelecemos que b^x é diferenciável em toda parte.

Para obter uma fórmula para a derivada de b^x , reescrevemos $y = b^x$ como

$$x = \log_b y$$

e derivamos implicitamente usando a Fórmula (5) da Seção 3.2 para obter

$$1 = \frac{1}{y \ln b} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Resolvendo para dy/dx e substituindo y por b^x , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b = b^x \ln b$$

Assim, foi mostrado que

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x \ln b \quad (5)$$

O que muda na Fórmula (5) se $0 < b < 1$?

Na Seção 0.5 afirmamos que $b = e$ é a única base para a qual a inclinação da reta tangente à curva $y = b^x$ em qualquer ponto P da curva é a coordenada y de P (ver página 54). Verifique essa afirmação.

É importante distinguir entre a derivada de uma função exponencial b^x (exponte variável e base constante) e uma função potência x^b (base variável e expoente constante). Por exemplo, compare a derivada

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x$$

com a derivada de 2^x no Exemplo 3.

No caso especial em que $b = e$, temos $\ln e = 1$; assim, (5) torna-se

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \quad (6)$$

Além disso, se u for uma função diferenciável de x , então tem-se a partir de (5) e (6) que

$$\frac{d}{dx}[b^u] = b^u \ln b \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot \frac{du}{dx} \quad (7-8)$$

► **Exemplo 3** Os cálculos a seguir usam as Fórmulas (7) e (8).

$$\frac{d}{dx}[2^x] = 2^x \ln 2$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-2x}] = e^{-2x} \cdot \frac{d}{dx}[-2x] = -2e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{x^3}] = e^{x^3} \cdot \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2 e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{\cos x}] = e^{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}[\cos x] = -(\operatorname{sen} x)e^{\cos x} \quad \blacktriangleleft$$

As funções da forma $f(x) = u^v$, em que u e v são funções *não constantes* de x , não são nem funções exponenciais nem funções potências. Funções dessa forma podem ser derivadas com derivação logarítmica.

► **Exemplo 4** Use derivação logarítmica para encontrar $\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}]$.

Solução Tomando $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$, obtemos

$$\ln y = \ln[(x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}] = (\operatorname{sen} x) \ln(x^2 + 1)$$

Derivando ambos os lados em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(\operatorname{sen} x) \ln(x^2 + 1)] \\ &= (\operatorname{sen} x) \frac{1}{x^2 + 1}(2x) + (\cos x) \ln(x^2 + 1)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln(x^2 + 1) \right] \\ &= (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x} \left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln(x^2 + 1) \right] \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Para obter fórmulas para as derivadas das funções trigonométricas inversas, utilizaremos algumas das identidades dadas nas Fórmulas (11) a (17) na Seção 0.4. Em vez de memorizar essas identidades, recomendamos uma revisão da “técnica do triângulo” que foi usada em sua obtenção.

Comecemos investigando a diferenciabilidade da função $\operatorname{arc sen} x$. Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$), segue, da Fórmula (2), que $f^{-1}(x) = \operatorname{arc sen} x$ será diferenciável em cada ponto x em que $\cos(\operatorname{arc sen} x) \neq 0$. Isso é equivalente à condição

$$\operatorname{arc sen} x \neq -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{arc sen} x \neq \frac{\pi}{2}$$

de modo que $\operatorname{arc sen} x$ é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$.

Uma derivada para $\operatorname{arc sen} x$ em $(-1, 1)$ pode ser obtida usando a Fórmula (2) ou (3) ou, então, derivando implicitamente a equação $y = \operatorname{arc sen} x$. Utilizaremos esse método. Reescrevendo a equação $y = \operatorname{arc sen} x$ como $x = \operatorname{sen} y$ e derivando implicitamente em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} y] \\ 1 &= \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc sen} x)}\end{aligned}$$

Até este ponto, fomos bem-sucedidos em obter a derivada; porém, essa fórmula de derivada pode ser simplificada aplicando-se a identidade indicada na Figura 3.3.3, resultando em

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Assim, mostramos que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc sen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

Mais geralmente, se u for uma função diferenciável de x , então a regra da cadeia produz a seguinte versão generalizada dessa fórmula:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc sen} u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad (-1 < u < 1)$$

O método usado para obter essa fórmula pode também ser usado para obter fórmulas generalizadas de derivadas das demais funções trigonométricas inversas. A seguir, apresentamos a

Observe que $\operatorname{arc sen} x$ só é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$, mesmo que seu domínio seja $[-1, 1]$. Isso ocorre porque o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ tem retas tangentes horizontais nos pontos $(\pi/2, 1)$ e $(-\pi/2, -1)$, de modo que o gráfico de $\operatorname{arc sen} x$ tem retas tangentes verticais em $x = \pm 1$.

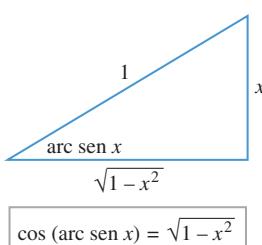


Figura 3.3.3

lista completa dessas fórmulas, cada uma das quais válida no domínio natural da função que multiplica du/dx .

$$\frac{d}{dx}[\arcsen u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad (9-10)$$

$$\frac{d}{dx}[\arctg u] = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad (11-12)$$

A aparência de $|u|$ em (13) e (14) será explicada no Exercício 64.

$$\frac{d}{dx}[\arccos u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad (13-14)$$

► **Exemplo 5** Encontre dy/dx se

$$(a) y = \arcsen(x^3) \quad (b) y = \arccos(e^x)$$

Solução (a) A partir de (9),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}(3x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

Solução (b) A partir de (13),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x \sqrt{(e^x)^2 - 1}}(e^x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} \quad \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.3 (Ver página 203 para respostas.)

1. Suponha que uma função injetora f tenha uma reta tangente $y = 5x + 3$ no ponto $(1, 8)$. Calcule $(f^{-1})'(8)$.
2. Em cada caso, usando a dada derivada, determine se a função f é invertível.

(a) $f'(x) = x^2 + 1$	(b) $f'(x) = x^2 - 1$
(c) $f'(x) = \operatorname{sen} x$	(d) $f'(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc tg} x$
3. Calcule a derivada

(a) $\frac{d}{dx}[e^x]$	(b) $\frac{d}{dx}[7^x]$
(c) $\frac{d}{dx}[\cos(e^x + 1)]$	(d) $\frac{d}{dx}[e^{3x-2}]$
4. Seja $f(x) = e^{x^3+x}$. Use $f'(x)$ para verificar se f é injetora.

EXERCÍCIOS 3.3



ENFOCANDO CONCEITOS

1. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
 - (a) Mostre que f é injetora e confirme que $f(1) = 3$.
 - (b) Encontre $(f^{-1})'(3)$.
2. Seja $f(x) = x^3 + 2e^x$.
 - (a) Mostre que f é injetora e confirme que $f(0) = 2$.
 - (b) Encontre $(f^{-1})'(2)$.

3-4 Encontre $(f^{-1})'(x)$ usando a Fórmula (2) e confira sua resposta derivando diretamente f^{-1} . ■

$$3. f(x) = 2/(x+3)$$

$$4. f(x) = \ln(2x+1)$$

5-6 Determine se a função f é injetora examinando o sinal de $f'(x)$. ■

5. (a) $f(x) = x^2 + 8x + 1$
 (b) $f(x) = 2x^5 + x^3 + 3x + 2$
 (c) $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$
 (d) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
6. (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8$
 (b) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 1$
 (c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
 (d) $f(x) = \log_b x, \quad 0 < b < 1$

7-10 Encontre a derivada de f^{-1} usando a Fórmula (3) e confira seu resultado com derivação implícita. ■

7. $f(x) = 5x^3 + x - 7$

8. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

9. $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$

10. $f(x) = 5x - \sin 2x, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

ENFOCANDO CONCEITOS

11. A Figura 0.4.8 é uma “prova por imagens” de que a reflexão do ponto $P(a, b)$ pela reta $y = x$ é o ponto $Q(b, a)$. Demonstre isso rigorosamente com os passos seguintes.

- Prove que, se P não estiver na reta $y = x$, então P e Q são distintos e a reta \overleftrightarrow{PQ} por P e Q é perpendicular à reta $y = x$.
- Prove que se P não estiver na reta $y = x$, então o ponto médio do segmento PQ está na reta $y = x$.
- Explique cuidadosamente o significado geométrico de refletir P pela reta $y = x$.
- Use os resultados das partes (a)–(c) para provar que Q é a reflexão de P pela reta $y = x$.

12. Prove que a reflexão de uma reta de inclinação m , sendo $m \neq 0$, pela reta $y = x$ é uma reta de inclinação $1/m$. [Sugestão: Aplique o resultado do exercício precedente a um par de pontos da reta de inclinação m e ao par de pontos correspondentes da reflexão dessa reta pela reta $y = x$.]

13. Suponha que f e g sejam funções crescentes. Determine qual(is) das funções $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ e $f(g(x))$ também deve(m) ser crescente(s).

14. Suponha que f e g sejam funções injetoras. Determine qual(is) das funções $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ e $f(g(x))$ também deve(m) ser injetora(s).

15-26 Encontre dy/dx . ■

15. $y = e^{7x}$

16. $y = e^{-5x^2}$

17. $y = x^3e^x$

18. $y = e^{1/x}$

19. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

20. $y = \operatorname{sen}(e^x)$

21. $y = e^x \operatorname{tg} x$

22. $y = \frac{e^x}{\ln x}$

23. $y = e^{(x - e^{-3x})}$

24. $y = \exp(\sqrt{1 + 5x^3})$

25. $y = \ln(1 - xe^{-x})$

26. $y = \ln(\cos e^x)$

27-30 Encontre $f'(x)$ pela Fórmula (7) e, então, por derivação logarítmica. ■

27. $f(x) = 2^x$

28. $f(x) = 3^{-x}$

29. $f(x) = \pi^{\operatorname{sen} x}$

30. $f(x) = \pi^{x \operatorname{tg} x}$

31-35 Encontre dy/dx usando o método da derivação logarítmica. ■

31. $y = (x^3 - 2x)^{\ln x}$

32. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

33. $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$

34. $y = (x^2 + 3)^{\ln x}$

35. $y = (\ln x)^{\ln x}$

36. (a) Explique por que a Fórmula (5) não pode ser usada para encontrar $(d/dx)[x^x]$.

(b) Encontre essa derivada por derivação logarítmica.

37-42. Encontre dy/dx usando qualquer método. ■

37. $y = (x^3 - 2x^2 + 1)e^x$

38. $y = (2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

39. $y = (x^2 + \sqrt{x})3^x$

40. $y = (x^3 + \sqrt[3]{x})5^x$

41. $y = 4^{\operatorname{sen} x - e^x}$

42. $y = 2^{\cos x + \ln x}$

43-58 Encontre dy/dx . ■

43. $y = \operatorname{arc sen}(3x)$

44. $y = \operatorname{arc cos}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

45. $y = \operatorname{arc sen}(1/x)$

46. $y = \operatorname{arc cos}(\cos x)$

47. $y = \operatorname{arc tg}(x^3)$

48. $y = \operatorname{arc sec}(x^5)$

49. $y = (\operatorname{tg} x)^{-1}$

50. $y = \frac{1}{\operatorname{arc tg} x}$

51. $y = e^x \operatorname{arc sec} x$

52. $y = \ln(\operatorname{arc cos} x)$

53. $y = \operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc cos} x$

54. $y = x^2(\operatorname{arc sen} x)^3$

55. $y = \operatorname{arc sec} x + \operatorname{arc cossec} x$

56. $y = \operatorname{arc cossec}(e^x)$

57. $y = \operatorname{arc cotg}(\sqrt{x})$

58. $y = \sqrt{\operatorname{arc cotg} x}$

59-62 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

59. Se uma função $y = f(x)$ satisfaz $dy/dx = y$, então $y = e^x$.

60. Se $y = f(x)$ for uma função tal que dy/dx é uma função racional, então $f(x)$ também é uma função racional.

61. $\frac{d}{dx}(\log_b |x|) = \frac{1}{x \ln b}$

62. Podemos concluir, pelas derivadas de $\operatorname{arc sen} x$ e $\operatorname{arc cos} x$, que $\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc cos} x$ é constante.

63. (a) Use a Fórmula (2) para provar que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc cotg} x] \Big|_{x=0} = -1$$

(b) Use a parte (a) anterior, a parte (a) do Exercício 50 na Seção 0.4 e a regra da cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc cotg} x] = -\frac{1}{1+x^2}$$

com $-\infty < x < +\infty$.

(c) Conclua da parte (b) que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc cotg} u] = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

com $-\infty < u < +\infty$.

64. (a) Use a parte (c) do Exercício 50 na Seção 0.4 e a regra da cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc cossec} x] = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

com $1 < |x|$.

- (b) Conclua da parte (a) que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc cossec } u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

com $1 < |u|$.

- (c) Use a equação (11) da Seção 0.4 e as partes (b) e (c) do Exercício 50 daquela seção para mostrar que, se $|x| \geq 1$, então $\text{arc sec } x + \text{arc cossec } x = \pi/2$. Conclua da parte (a) que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec } x] = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

- (d) Conclua da parte (c) que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec } u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

65-66 Encontre dy/dx por derivação implícita. ■

65. $x^3 + x \text{ arc tg } y = e^y$

66. $\text{arc sen}(xy) = \text{arc cos}(x-y)$

67. (a) Mostre que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ não é injetora em $(-\infty, +\infty)$.
(b) Encontre o maior valor de k , tal que f é injetora no intervalo $(-k, k)$.

68. (a) Mostre que $f(x) = x^4 - 2x^3$ não é injetora em $(-\infty, +\infty)$.
(b) Encontre o menor valor de k , tal que f é injetora no intervalo $[k, +\infty)$.

69. Seja $f(x) = x^4 + x^3 + 1$, $0 \leq x \leq 2$.

- (a) Mostre que f é injetora.

- (b) Seja $g(x) = f^{-1}(x)$ e defina $F(x) = f(2g(x))$. Encontre uma equação para a reta tangente a $y = F(x)$ em $x = 3$.

70. Seja $f(x) = \frac{\exp(4-x^2)}{x}$, $x > 0$.

- (a) Mostre que f é injetora.

- (b) Seja $g(x) = f^{-1}(x)$ e defina $F(x) = f([g(x)]^2)$. Encontre $F'(\frac{1}{2})$.

71. Mostre que, para quaisquer constantes A e k , a função $y = Ae^{kt}$ satisfaz a equação $dy/dt = ky$.

72. Mostre que, para quaisquer constantes A e B , a função

$$y = Ae^{2x} + Be^{-4x}$$

satisfaz a equação

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

73. Mostre que

- (a) $y = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1-x)y$.

- (b) $y = xe^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1-x^2)y$.

74. Mostre que a taxa de variação de $y = 100e^{-0.2x}$ em relação a x é proporcional a y .

75. Suponha que a percentagem $P(t)$ de lares dos Estados Unidos com acesso à Internet por meio de banda larga seja modelada por

$$P(t) = \frac{5300}{53 + 47e^{-0.182t}}$$

em que t é o número de anos decorridos depois de um levantamento inicial feito em 2007.

- (a) Use um recurso computacional para traçar o gráfico de $P(t)$.
(b) Descreva o que acontece com a percentagem ao longo do tempo. Confira sua conclusão calculando $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$.
(c) O que acontece com a taxa de crescimento dos lares com esse acesso ao longo do tempo? Confira sua conclusão traçando o gráfico de $P'(t)$.

76. Suponha que a população de bactérias aeróbicas em um pequeno lago seja modelada pela equação

$$P(t) = \frac{60}{5 + 7e^{-t}}$$

onde $P(t)$ é a população (em bilhões) t dias depois da observação inicial no tempo $t = 0$.

- (a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função $P(t)$.
(b) Descreva o que acontece com a população no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão encontrando $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$.
(c) Descreva o que acontece com a taxa de crescimento populacional no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão fazendo o gráfico de $P'(t)$.

- 77-82 Encontre o limite dado interpretando a expressão como uma derivada apropriada. ■

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) - 1}{x}$$

$$79. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10^h - 1}{h}$$

$$80. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{arc tg}(1+h) - \pi/4}{h}$$

$$81. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9 \left[\text{arc sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \Delta x \right) \right]^2 - \pi^2}{\Delta x}$$

$$82. \lim_{w \rightarrow 2} \frac{3 \text{arc sec } w - \pi}{w - 2}$$

83. Suponha que um rolamento de aço seja largado num recipiente com um fluido e comece a afundar. De acordo com um modelo, a velocidade $v(t)$ (em m/s) do rolamento decorridos t segundos depois de ser largado é dada pela fórmula

$$v(t) = \frac{9.8}{k} (1 - e^{-kt})$$

em que k é uma constante positiva que corresponde à resistência que o fluido oferece ao movimento do rolamento. (Quanto menor o valor de k , mais fraca é essa resistência.) Com t fixado, determine o valor limite da velocidade quando $k \rightarrow 0^+$ e dê uma interpretação física desse limite.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.3

1. $\frac{1}{5}$ 2. (a) sim (b) não (c) não (d) sim 3. (a) e^x (b) $7^x \ln 7$ (c) $-e^x \text{sen}(e^x + 1)$ (d) $3e^{3x-2}$
4. $f'(x) = e^{x^3+x} \cdot (3x^2 + 1) > 0$ com qualquer x .

3.4 TAXAS RELACIONADAS

Nesta seção, estudaremos problemas de taxas relacionadas. Nesses problemas, tentamos encontrar a taxa segundo a qual certa quantidade está variando em relação a outras, cujas taxas de variação são conhecidas.

■ DERIVANDO EQUAÇÕES PARA RELACIONAR TAXAS

A Figura 3.4.1 mostra um líquido escoando através de um filtro cônico. À medida que o líquido escoa, seu volume V , a altura h e o raio r são funções do tempo decorrido t e, em cada instante, essas variáveis estão relacionadas pela equação

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Se estivéssemos interessados em encontrar a taxa de variação do volume V em relação ao tempo t , poderíamos começar derivando ambos os lados dessa equação em relação a t para obter

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left[r^2 \frac{dh}{dt} + h \left(2r \frac{dr}{dt} \right) \right] = \frac{\pi}{3} \left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt} \right)$$

Assim, para encontrar dV/dt em um instante específico t a partir dessa equação, precisaríamos ter os valores de r , h , dh/dt e dr/dt naquele instante. Esse tipo de problema é chamado de **problema de taxas relacionadas**, porque o objetivo é encontrar uma taxa de variação desconhecida relacionando-a a outras variáveis cujos valores e taxas de variação no instante t são conhecidos ou podem ser encontrados de alguma maneira. Comecemos com um exemplo simples.

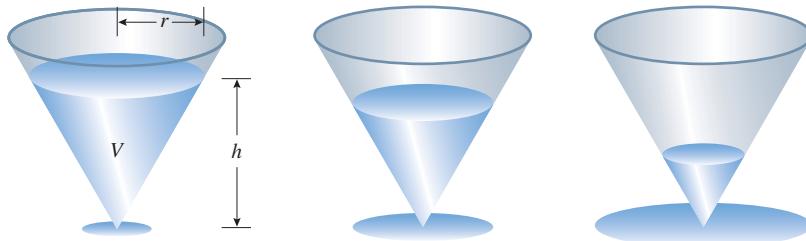


Figura 3.4.1

► **Exemplo 1** Suponha que x e y sejam funções diferenciáveis de t relacionadas pela equação $y = x^3$. Encontre dy/dt no instante $t = 1$ se $x = 2$ e $dx/dt = 4$ no instante $t = 1$.

Solução Usando a regra da cadeia para derivar ambos os lados da equação $y = x^3$ em relação a t , obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[x^3] = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

Assim, o valor de dy/dt no instante $t = 1$ é

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=1} = 3(2)^2 \frac{dx}{dt} \Big|_{t=1} = 12 \cdot 4 = 48 \quad \blacktriangleleft$$



Arni Katz/Phototake

*Óleo derramado de um navio-tanque
defeituoso.*



Figura 3.4.2

ADVERTÊNCIA

A palavra “Depois”, no Passo 5, foi escrita em itálico porque é um erro comum substituir os valores numéricos antes de efetuar a derivação. Assim, no Exemplo 2, se tivéssemos substituído o valor conhecido de $r = 60$ em (1) antes de derivar, teríamos obtido $dA/dt = 0$, o que é obviamente errado.

► **Exemplo 2** Suponhamos que o óleo derramado através da ruptura de um navio-tanque se espalhe em uma forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 metros por minuto. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando seu raio for de 60 metros?

Solução Sejam

t = segundos decorridos a partir do instante do derramamento

r = raio do derramamento em metros após t minutos

A = área do derramamento em metros quadrados após t minutos

(Figura 3.4.2). Conhecemos a taxa segundo a qual o raio está crescendo e queremos encontrar aquela na qual a área está crescendo no instante em que $r = 60$; isto é, queremos encontrar

$$\frac{dA}{dt} \Big|_{r=60} \quad \text{dado que} \quad \frac{dr}{dt} = 2 \text{ m/min}$$

Isso sugere que procuremos uma equação relacionando A a r que possamos derivar em relação a t para obter uma relação entre dA/dt e dr/dt . No entanto, A é a área de um círculo de raio r , portanto

$$A = \pi r^2 \quad (1)$$

Derivando ambos os lados de (1) em relação a t , obtemos

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad (2)$$

Assim, quando $r = 60$, a área do derramamento está crescendo à taxa de

$$\frac{dA}{dt} \Big|_{r=60} = 2\pi(60)(2) = 240\pi \text{ m}^2/\text{min} \approx 754 \text{ m}^2/\text{min} \blacktriangleleft$$

Com variações mínimas, o método usado no Exemplo 2 pode ser utilizado para resolver uma variedade de problemas de taxas relacionadas. O método consiste em cinco passos, especificados a seguir.

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Passo 3 Encontre uma equação que relate as variáveis cujas taxas de variação foram identificadas no Passo 2. Para isso, muitas vezes é conveniente esboçar uma figura devidamente etiquetada que ilustre as relações.

Passo 4 Derive ambos os lados da equação obtida no Passo 3 em relação ao tempo para obter uma relação entre as taxas de variação conhecidas e a taxa de variação desconhecida.

Passo 5 Depois de completar o Passo 4, substitua todos os valores conhecidos das taxas de variação e das variáveis, e só então resolva a equação para a taxa de variação desconhecida.

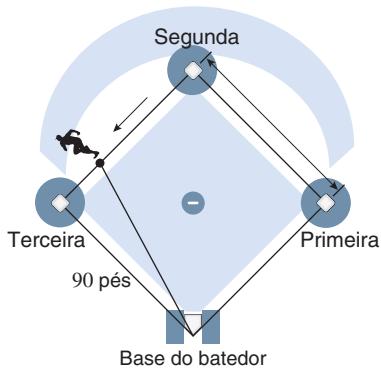


Figura 3.4.3

Exemplo 3 Uma quadra de beisebol é um quadrado cujos lados medem 90 pés (Figura 3.4.3). Suponha que um jogador correndo da segunda para a terceira base tenha uma velocidade de 30 pés/s no instante em que está a 20 pés da terceira base. Qual é a taxa de variação da distância do jogador à base do batedor naquele instante?

Solução É dada uma velocidade constante com a que o jogador se aproxima da terceira base, e queremos encontrar a taxa de variação da distância entre o jogador e a base do batedor em um dado instante. Assim, tomamos

$$t = \text{segundos decorridos desde que o jogador deixou a segunda base}$$

$$x = \text{distância do jogador até a terceira base (em pés)}$$

$$y = \text{distância do jogador até a base do batedor (em pés)}$$

(Figura 3.4.4). Assim, queremos encontrar

A quantidade
 $\frac{dx}{dt} \Big|_{x=20}$
é negativa porque x é decrescente em relação a t .

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{x=20} \quad \text{sabendo que} \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{x=20} = -30 \text{ pés/s}$$

Conforme sugere a Figura 3.4.4, uma equação relacionando as variáveis x e y pode ser obtida a partir do Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 90^2 = y^2 \quad (3)$$

Derivando ambos os lados dessa equação em relação a t , obtemos

$$2x \frac{dx}{dt} = 2y \frac{dy}{dt}$$

do que segue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

Quando $x = 20$, tem-se, a partir de (3), que

$$y = \sqrt{20^2 + 90^2} = \sqrt{8500} = 10\sqrt{85}$$

assim, (4) resulta em

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{x=20} = \frac{20}{10\sqrt{85}}(-30) = -\frac{60}{\sqrt{85}} \approx -6,51 \text{ pés/s}$$

O sinal negativo na resposta nos diz que y é decrescente, o que fisicamente faz sentido a partir da Figura 3.4.4. ▲

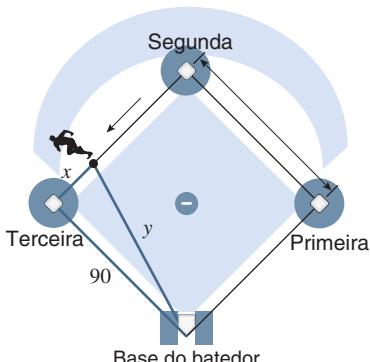


Figura 3.4.4

Exemplo 4 Na Figura 3.4.5, mostramos uma câmera montada em um ponto a 3.000 pés da base de uma plataforma de lançamento de um foguete. Se o foguete estiver subindo verticalmente a 880 pés/s quando estiver 4.000 pés acima da plataforma de lançamento, quanto rápido deve mudar o ângulo de elevação da câmera naquele instante para que se mantenha apontada para o foguete?

Solução Sejam

$$t = \text{segundos decorridos a partir do instante do lançamento}$$

$$\phi = \text{ângulo de elevação da câmera em radianos, após } t \text{ segundos}$$

$$h = \text{altura do foguete em pés, após } t \text{ segundos}$$

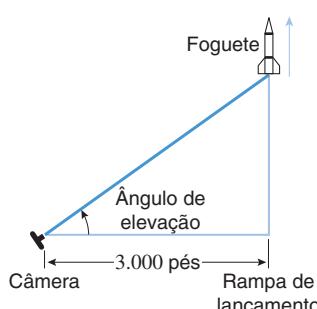


Figura 3.4.5

(Figura 3.4.6). Em cada instante, a taxa segundo a qual o ângulo de elevação da câmera deve variar é $d\phi/dt$, e a taxa segundo a qual o foguete está subindo é dh/dt . Queremos encontrar

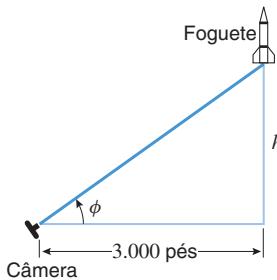


Figura 3.4.6

$$\frac{d\phi}{dt} \Big|_{h=4000} \text{ dado que } \frac{dh}{dt} \Big|_{h=4000} = 880 \text{ pés/s}$$

A partir da Figura 3.4.6, vemos que

$$\tan \phi = \frac{h}{3000} \quad (5)$$

Derivando ambos os lados de (5) em relação a t , obtemos

$$(\sec^2 \phi) \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{3000} \frac{dh}{dt} \quad (6)$$

Quando $h = 4000$, segue que

$$(\sec \phi) \Big|_{h=4000} = \frac{5000}{3000} = \frac{5}{3}$$

(ver Figura 3.4.7), de modo que, por (6),

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{3}\right)^2 \frac{d\phi}{dt} \Big|_{h=4000} &= \frac{1}{3000} \cdot 880 = \frac{22}{75} \\ \frac{d\phi}{dt} \Big|_{h=4000} &= \frac{22}{75} \cdot \frac{9}{25} = \frac{66}{625} \approx 0,11 \text{ rad/s} \approx 6,05 \text{ graus/s} \end{aligned}$$

Figura 3.4.7

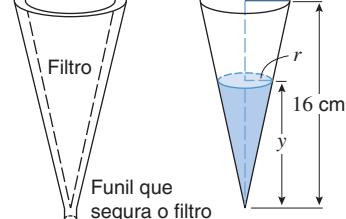
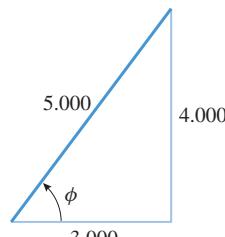
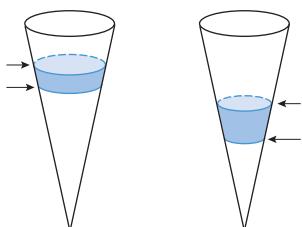


Figura 3.4.8



O mesmo volume foi drenado, mas a variação em altura é maior próximo da base do que próximo do topo.

Figura 3.4.9

Exemplo 5 Suponha que um líquido deva ser purificado por decantação através de um filtro cônico com 16 cm de altura e raio de 4 cm no topo (Figura 3.4.8). Suponha também que o líquido seja forçado a escoar para fora do cone a uma taxa constante de $2 \text{ cm}^3/\text{min}$.

- A profundidade do líquido irá decrescer a uma taxa constante? Dê um argumento informal que justifique sua conclusão.
- Encontre uma fórmula que expresse a taxa de variação da profundidade do líquido em termos de profundidade e use-a para determinar se sua conclusão em (a) está correta.
- Com que taxa está variando a profundidade do líquido no instante em que a profundidade for de 8 cm?

Solução (a) Para que o volume do líquido decresça por uma *quantidade fixa*, requer-se um maior decréscimo em profundidade quando o cone está quase vazio do que quando está quase cheio (Figura 3.4.9). Isso sugere que, para o volume decrescer a uma taxa constante, a profundidade deve decrescer a uma taxa crescente.

Solução (b) Sejam

t = tempo decorrido a partir da observação inicial (min)

V = volume do líquido no cone no instante de tempo t (cm^3)

y = profundidade do líquido no cone no instante de tempo t (cm)

r = raio da superfície do líquido no instante t (cm).

(Figura 3.4.8). Em cada instante, a taxa segundo a qual o volume de líquido está variando é dV/dt , e a taxa segundo a qual a profundidade está variando é dy/dt . Queremos expressar dy/dt em termos de y , dado que dV/dt tem um valor constante de $dV/dt = -2$. (Devemos usar o sinal menos aqui porque V decresce quando t cresce.)

A partir da fórmula para o volume de um cone, o volume V , o raio r e a profundidade y estão relacionados por

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 y \quad (7)$$

Se derivarmos ambos os lados de (7) em relação a t , o lado direito irá envolver a quantidade dr/dt . Uma vez que não temos uma informação direta sobre dr/dt , é desejável eliminar r de (7) antes de derivar. Isso pode ser feito usando semelhança de triângulos. A partir da Figura 3.4.8, vemos que

$$\frac{r}{y} = \frac{4}{16} \quad \text{ou} \quad r = \frac{1}{4}y$$

Substituindo essa expressão em (7) obtemos

$$V = \frac{\pi}{48}y^3 \quad (8)$$

Derivando ambos os lados de (8) em relação a t , obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} \left(3y^2 \frac{dy}{dt} \right)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16}{\pi y^2} \frac{dV}{dt} = \frac{16}{\pi y^2}(-2) = -\frac{32}{\pi y^2} \quad (9)$$

a qual expressa dy/dt em termos de y . O sinal de menos nos diz que y decresce com o tempo, e

$$\left| \frac{dy}{dt} \right| = \frac{32}{\pi y^2}$$

nos diz o quanto rápido y decresce. A partir dessa fórmula, vemos que $|dy/dt|$ cresce quando y decresce, o que confirma nossa conjectura em (a) de que a profundidade do líquido decresce a uma taxa crescente quando ele escoa através do filtro.

Solução (c) A taxa segundo a qual a profundidade está variando quando for de 8 cm pode ser obtida de (9) com $y = 8$:

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{y=8} = -\frac{32}{\pi(8^2)} = -\frac{1}{2\pi} \approx -0,16 \text{ cm/min} \quad \blacktriangleleft$$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.4 (Ver página 211 para respostas.)

1. Se $A = x^2$ e $\frac{dx}{dt} = 3$, encontre $\frac{dA}{dt} \Big|_{x=10}$.

2. Se $A = x^2$ e $\frac{dA}{dt} = 3$, encontre $\frac{dx}{dt} \Big|_{x=10}$.

3. Uma escada de 3 m está apoiada em um chão horizontal e uma parede vertical. Use x para denotar a distância ao longo do chão da parede até o pé da escada e y para denotar a distância ao lon-

go da parede do chão até o topo da escada. Se o pé da escada é arrastado para longe da parede, encontre uma equação que relate as taxas de variação de x e de y em relação ao tempo.

4. Suponha que um bloco de gelo com formato de cilindro circular reto derreta de tal modo que mantém sua forma cilíndrica. Encontre uma equação que relate a taxa de variação do volume (V), a altura (h) e o raio (r) desse bloco de gelo.

EXERCÍCIOS 3.4

1-4 Tanto x quanto y denotam funções de t que estão relacionadas pela equação dada. Use essa equação e a informação sobre a derivada para encontrar a derivada especificada. ■

1. Equação: $y = 3x + 5$.

- (a) Dado que $dx/dt = 2$, encontre dy/dt quando $x = 1$.
- (b) Dado que $dy/dt = -1$, encontre dx/dt quando $x = 0$.

2. Equação: $x + 4y = 3$.

- (a) Dado que $dx/dt = 1$, encontre dy/dt quando $x = 2$.
- (b) Dado que $dy/dt = 4$, encontre dx/dt quando $x = 3$.

3. Equação: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

- (a) Dado que $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

- (b) Dado que $dy/dt = 8$, encontre dx/dt quando $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{9}\right)$.
4. Equação: $x^2 + y^2 = 2x + 4y$.
- Dado que $dx/dt = -5$, encontre dy/dt quando $(x, y) = (3, 1)$.
 - Dado que $dy/dt = 6$, encontre dx/dt quando $(x, y) = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3})$.

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Seja A a área de um quadrado cujos lados têm comprimento x e suponha que x varie com o tempo t .
- Faça uma figura do quadrado com os dados A e x colocados apropriadamente.
 - Escreva uma equação que relate A e x .
 - Use a equação de (b) para encontrar uma equação que relate dA/dt e dx/dt .
 - Em um certo instante, os lados medem 3 cm e crescem a uma taxa de 2 cm/min. Com que rapidez a área está crescendo naquele instante?
6. Em (a) a (d), seja A a área de um círculo de raio r e suponha que r cresça com o tempo t .
- Faça uma figura do círculo colocando A e r apropriadamente.
 - Escreva uma equação que relate A e r .
 - Use a equação de (b) para encontrar uma equação que relate dA/dt e dr/dt .
 - Em certo instante, o raio é 5 cm e está crescendo a uma taxa de 2 cm/s. Com que rapidez a área está crescendo naquele instante?
7. Seja V o volume de um cilindro de altura h e raio r , e suponha que h e r variem com o tempo.
- Como estão relacionadas dV/dt , dh/dt e dr/dt ?
 - Em certo instante, a altura é de 6 cm e está crescendo a 1 cm/s, enquanto o raio é de 10 cm e está decrescendo a 1 cm/s. Com que rapidez o volume está variando naquele instante? O volume está crescendo ou decrescendo naquele instante?
8. Seja l o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados têm comprimentos x e y , e suponha que x e y variem com o tempo.
- Como estão relacionadas dl/dt , dx/dt e dy/dt ?
 - Se x está crescendo a uma taxa constante de $\frac{1}{2}$ cm/s e y está decrescendo a uma taxa constante de $\frac{1}{4}$ cm/s, com que rapidez o comprimento da diagonal estará variando quando $x = 3$ cm e $y = 4$ cm? A diagonal está crescendo ou está decrescendo naquele instante?
9. Seja θ (em radianos) um ângulo agudo de um triângulo retângulo, e sejam x e y , respectivamente, os comprimentos dos lados adjacente e oposto a θ . Suponha, também, que x e y variem com o tempo.
- Como se relacionam $d\theta/dt$, dx/dt e dy/dt ?
 - Em um certo instante, $x = 2$ unidades e está crescendo 1 unidade/s, enquanto $y = 2$ unidades e está decrescendo $\frac{1}{4}$ unidade/s. Com que rapidez θ estará variando naquele instante? θ está crescendo ou decrescendo naquele instante?

10. Suponha que $z = x^3y^2$, onde x e y estão variando com o tempo. Em um certo instante, quando $x = 1$ e $y = 2$, x está decrescendo a uma taxa de 2 unidades/s e y está crescendo a uma taxa de 3 unidades/s. Com que rapidez z estará variando naquele instante? z é crescente ou decrescente?
11. O ponteiro dos minutos de um relógio tem 4 cm de comprimento. Começando do momento em que está apontando diretamente para cima, com que rapidez estará variando a área do setor que é varrido por ele durante uma revolução?
12. Uma pedra jogada em um lago produz uma onda circular, cujo raio cresce a uma taxa constante de 1 m/s. Com que rapidez estará variando a área englobada pela onda crescente ao final de 10 segundos?
13. Pela ruptura de um navio-tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo cuja área cresce a uma taxa constante de $6 \text{ km}^2/\text{h}$. Com que rapidez estará crescendo o raio da mancha quando a área for de 9 km^2 ?
14. Um balão esférico é inflado de tal forma que seu volume cresce a uma taxa de $3 \text{ cm}^3/\text{min}$. Com que rapidez o diâmetro do balão estará crescendo quando o raio for de 1 cm?
15. Um balão esférico é esvaziado de tal forma que seu raio decresce a uma taxa constante de 15 cm/min. Com que taxa o ar estará sendo removido quando o raio for de 9 cm?
16. Uma escada de 1,7 m está apoiada em uma parede. Se sua base for puxada ao longo do chão, afastando-se da parede a uma taxa constante de 0,5 m/s, com que rapidez o topo da escada estará se movendo para baixo na parede quando estiver 0,8 m acima do solo?
17. Uma escada de 1,3 m está apoiada em uma parede. Se seu topo desliza sobre a parede para baixo a uma taxa de 0,2 m/s, com que rapidez a base da escada estará se afastando da parede quando o topo estiver 0,5 m acima do chão?
18. Uma prancha de 10 m está apoiada em uma parede. Se, em um certo instante, sua base está a 2 m da parede e sendo empurrada em direção a esta a uma taxa de 0,5 m/s, com que rapidez estará crescendo o ângulo agudo que a prancha faz com o solo?
19. Uma quadra de *softball* é um quadrado cujos lados medem 60 pés de comprimento. Suponha que um jogador correndo da primeira para a segunda base tenha uma velocidade de 25 pés/s no instante em que está a 10 pés da segunda base. Com que taxa estará variando a distância do jogador à base do batedor naquele instante?
20. Um foguete subindo verticalmente é acompanhado por uma estação de radar no solo a 5 km da rampa de lançamento. Com que rapidez o foguete estará subindo quando sua altura for de 4 km e sua distância da estação do radar estiver crescendo a uma taxa de 2000 km/h?
21. Para a câmera e o foguete da Figura 3.4.5, a que taxa estará variando a distância entre câmera e foguete quando ele estiver a 4.000 pés de altura e subindo verticalmente a 880 pés/s?
22. Para a câmera e o foguete da Figura 3.4.5, a que taxa estará subindo o foguete quando o ângulo de elevação for de $\pi/4$ radianos e se estiver crescendo a uma taxa de 0,2 rad/s?

23. Um satélite está em uma órbita elíptica em torno da Terra. A sua distância r (em milhas) do centro da Terra é dada por

$$r = \frac{4995}{1 + 0,12 \cos \theta}$$

onde θ é o ângulo medido do ponto da órbita mais próximo da superfície da Terra (veja a figura abaixo).

- (a) Encontre a altitude do satélite no *perigeu* (ponto mais próximo da superfície da Terra) e no *apogeu* (ponto mais distante da superfície da Terra) usando 3.960 milhas como o raio da Terra.
 (b) No instante em que θ for 120° , o ângulo θ está crescendo a uma taxa de $2,7^\circ/\text{min}$. Encontre a altitude do satélite e a taxa segundo a qual a altitude estará variando naquele instante. Expresse a taxa em unidades de milhas/min.

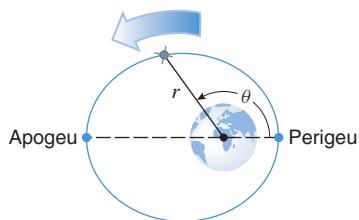


Figura Ex-23

24. Um avião está voando horizontalmente a uma altitude constante de 4.000 pés acima de um ponto de observação fixo (ver figura abaixo). Em um certo instante, o ângulo de elevação θ é de 30° e está decrescendo, enquanto a velocidade do avião é de 300 milhas/h.
- (a) Com que velocidade estará θ decrescendo naquele instante? Expresse o resultado em graus por segundo.
 (b) Com que rapidez estará variando a distância entre o avião e o ponto de observação naquele instante? Expresse o resultado em pés/s. Use $1 \text{ milha} = 5.280 \text{ pés}$.

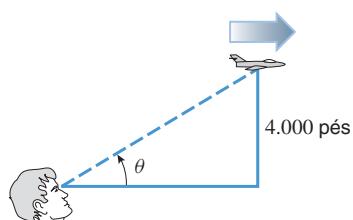


Figura Ex-24

25. Um tanque de água cônico com o vértice para baixo tem um raio de 10 m no topo e uma altura de 24 m. Se a água fluir dentro do tanque a uma taxa de $20 \text{ m}^3/\text{min}$, com que velocidade sua profundidade estará crescendo quando ela tiver 16 m de profundidade?
 26. Grãos caem de uma calha de escoamento a uma taxa de $8 \text{ m}^3/\text{min}$, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre o dobro de seu raio. Com que rapidez a altura da pilha estará crescendo no momento em que sua altura for de 6 m?
 27. Areia cai de uma calha de escoamento formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao diâmetro. Se a altura crescer a uma taxa constante de $5 \text{ pés}/\text{min}$, a que taxa a areia estará escoando quando a pilha tiver 10 pés de altura?

28. Trigo está saindo através de uma calha de escoamento a uma taxa de $10 \text{ pés}^3/\text{min}$ e caindo em uma pilha cônica cujo raio da base é sempre a metade da altura. Com que rapidez estará aumentando a circunferência da base quando a altura da pilha for de 8 pés?

29. Um avião está subindo a um ângulo de 30° com a horizontal. Com que rapidez o avião estará ganhando altura se sua velocidade for de 500 milhas por hora?
 30. Um bote é puxado para uma doca por meio de uma corda ligada a uma polia na doca (ver figura abaixo). A corda está ligada à proa do bote em um ponto 10 pés abaixo da polia. Se a corda for puxada através da polia a uma taxa de $20 \text{ pés}/\text{min}$, com que taxa o bote estará se aproximando da doca quando restarem 125 pés de corda?

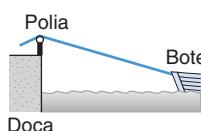


Figura Ex-30

31. Para o bote do Exercício 30, com que rapidez a corda deve ser puxada se quisermos que o bote se aproxime da doca a uma taxa de $12 \text{ pés}/\text{min}$, no instante em que restarem 125 pés de corda?
 32. Um homem com seis pés de altura está caminhando a uma taxa de 3 pés por segundo em direção a um poste de iluminação, com 18 pés de altura (ver figura a seguir).
- (a) A que taxa está variando o comprimento da sombra?
 (b) Com que rapidez está se movendo a extremidade de sua sombra?

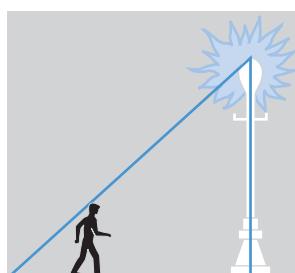


Figura Ex-32

33. Um farol faz uma revolução a cada 10 s e está localizado em um navio, ancorado a 4 km de uma praia reta. Com que rapidez o facho de luz do farol estará se movendo ao longo da praia quando fizer com ela um ângulo de 45° ?
 34. Um avião está voando a uma altitude constante e com uma velocidade constante de 600 km/h. Um míssil antiaéreo é disparado em uma linha reta perpendicular à trajetória de voo do avião, de tal forma que irá atingi-lo em um ponto P (ver figura abaixo). No instante em que o avião está a 2 km do ponto de impacto, o míssil está a 4 km dele e voando a 1.200 km/h. Naquele instante, com que rapidez estará decrescendo a distância entre o míssil e o avião?

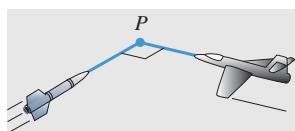


Figura Ex-34

- 35.** Resolva o Exercício 34 considerando a hipótese de que o ângulo entre as duas trajetórias de voo seja de 120° em vez de perpendicular. [Sugestão: Use a lei dos cossenos.]

- 36.** Um helicóptero está voando em direção ao norte a 100 km/h e a uma altitude constante de 0,5 km. Abaixo, um carro viaja para o oeste em uma estrada a 75 km/h. No momento em que o helicóptero cruza a estrada, o carro está 2 km a leste dele.

- (a) Com que velocidade estará mudando a distância entre o carro e o helicóptero no momento em que o helicóptero cruza a estrada?
 (b) Naquele momento, a distância entre o carro e o helicóptero estará crescendo ou decrescendo?

- 37.** Uma partícula move-se ao longo de uma curva cuja equação é

$$\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$$

Suponha que a coordenada x esteja crescendo a uma taxa de 6 unidades por segundo quando a partícula estiver no ponto $(1, 2)$.

- (a) Com que taxa estará variando a coordenada y do ponto naquele instante?
 (b) Naquele instante, a partícula estará subindo ou descendo?

- 38.** Um ponto P move-se ao longo de uma curva cuja equação é $y = \sqrt{x^3 + 17}$. Quando P está em $(2, 5)$, y está crescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo. Com que rapidez x está variando?

- 39.** Um ponto P está movendo-se ao longo de uma reta cuja equação é $y = 2x$. Com que rapidez estará variando a distância entre P e o ponto $(3, 0)$ no instante em que P estiver em $(3, 6)$ se x estiver decrescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo, naquele instante?

- 40.** Um ponto P move-se ao longo de uma curva cuja equação é $y = \sqrt{x}$. Suponha que x esteja crescendo a uma taxa de 4 unidades por segundo quando $x = 3$.

- (a) Com que rapidez estará variando a distância entre P e o ponto $(2, 0)$ naquele instante?
 (b) Com que rapidez estará variando o ângulo de inclinação do segmento de reta de P a $(2, 0)$ naquele instante?

- 41.** Uma partícula move-se ao longo da curva $y = x/(x^2 + 1)$. Encontre todos os valores de x nos quais a taxa de variação de x

em relação ao tempo é três vezes a de y . [Suponha que dx/dt nunca é nula.]

- 42.** Uma partícula move-se ao longo da curva $16x^2 + 9y^2 = 144$. Encontre todos os pontos (x, y) nos quais as taxas de variação de x e de y em relação ao tempo são iguais. [Suponha que dx/dt e dy/dt nunca são nulas no mesmo ponto.]

- 43.** A *equação das lentes finas* em Física é

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$$

onde s é a distância do objeto à lente, S é a distância da imagem à lente e f é a distância focal da lente. Suponha que uma certa lente tenha um comprimento focal de 6 cm e que um objeto se move em direção a ela a uma taxa de 2 cm/s. Com que rapidez estará variando a distância da imagem no instante em que o objeto estiver a 10 cm da lente? A imagem estará se afastando ou se aproximando da lente?

- 44.** Água está sendo armazenada em um reservatório cônico (vértice para baixo). Supondo que a água evapora a uma taxa proporcional à área da superfície exposta ao ar, mostre que sua profundidade irá decrescer a uma taxa constante que não depende das dimensões do reservatório.

- 45.** Um meteorito entra na atmosfera da Terra e queima a uma taxa que, em cada instante, é proporcional à área de sua superfície. Supondo que o meteorito é sempre esférico, mostre que o raio decresce a uma taxa constante.

- 46.** Em um relógio, o ponteiro dos minutos tem 4 cm de comprimento e o das horas, 3 cm. Com que rapidez estará variando a distância entre as extremidades do ponteiro às 9 horas?

- 47.** Café está sendo derramado a uma taxa uniforme de $20 \text{ cm}^3/\text{s}$ em uma xícara em forma de cone truncado (ver figura abaixo). Se os raios superior e inferior da xícara forem de 4 e 2 cm e a altura for de 6 cm, com que rapidez estará subindo o nível de café quando ele estiver na metade da xícara? [Sugestão: Estenda a xícara para baixo para formar um cone.]



Figura Ex-47

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.4

- 1.** 60 **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$ **4.** $\frac{dV}{dt} = 2\pi rh \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

3.5 APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL; DIFERENCIAIS

Nesta seção, mostraremos como as derivadas podem ser utilizadas para aproximar funções não lineares por funções lineares. Até aqui, interpretamos dy/dx como uma única entidade que representa a derivada. Nesta seção, definiremos as quantidades dx e dy por si sós, permitindo, assim, interpretar dy/dx como uma razão autêntica.

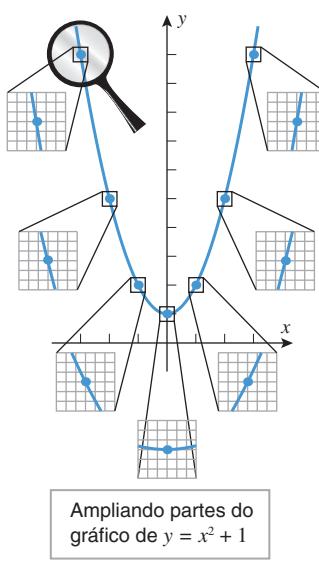


Figura 3.5.1

Lembre, da Seção 2.2, que se uma função f for diferenciável em x_0 , então uma porção suficientemente ampliada do gráfico de f centrada no ponto $P(x_0, f(x_0))$ tem a aparência de um segmento de reta. Isso é ilustrado na Figura 3.5.1 em vários pontos do gráfico de $y = x^2 + 1$. Por essa razão, costuma-se dizer que uma função diferenciável em x_0 é **localmente linear** em x_0 .

A reta que melhor aproxima o gráfico de f na vizinhança de $P(x_0, f(x_0))$ é a reta tangente ao gráfico de f em x_0 , dada pela equação

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

[ver Fórmula (3) da Seção 2.2]. Assim, para valores de x próximos de x_0 , podemos aproximar os valores de $f(x)$ por

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

Isso é denominado **aproximação linear local** de f em x_0 . Essa fórmula também pode ser expressa em termos do incremento $\Delta x = x - x_0$ como

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (2)$$

► Exemplo 1

- Encontre a aproximação linear local de $f(x) = \sqrt{x}$ em $x_0 = 1$.
- Use a aproximação linear local obtida em (a) para aproximar $\sqrt{1,1}$ e compare sua aproximação com o resultado obtido com uma calculadora.

Solução (a) Como $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, tem-se, a partir de (1), que a aproximação linear local de \sqrt{x} no ponto x_0 é

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

Assim, a aproximação linear local em $x_0 = 1$ é

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \quad (3)$$

Os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e da aproximação linear local $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$ aparecem na Figura 3.5.2.

Solução (b) Aplicando (3) com $x = 1,1$, obtemos

$$\sqrt{1,1} \approx 1 + \frac{1}{2}(1,1 - 1) = 1,05$$

Como a reta tangente $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$ na Figura 3.5.2 está acima do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, poderíamos esperar que essa aproximação fosse um pouco grande demais. Essa expectativa é confirmada pela aproximação $\sqrt{1,1} \approx 1,04881$ dada pela calculadora. ◀

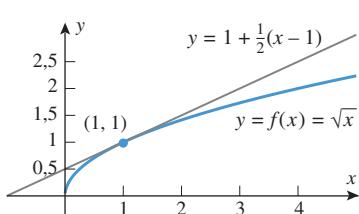


Figura 3.5.2

► Exemplo 2

- Encontre a aproximação linear local de $f(x) = \sin x$ em $x_0 = 0$.
- Use a aproximação linear local obtida em (a) para aproximar $\sin 2^\circ$ e compare sua aproximação com o resultado obtido diretamente com uma calculadora.

Os Exemplos 1 e 2 ilustram ideias importantes e não têm o objetivo de sugerir que devamos usar aproximações lineares locais para cálculos que uma calculadora faça com facilidade. A principal aplicação da aproximação linear local reside nos problemas de modelagem, em que ela é útil para substituir funções complicadas por funções mais simples.

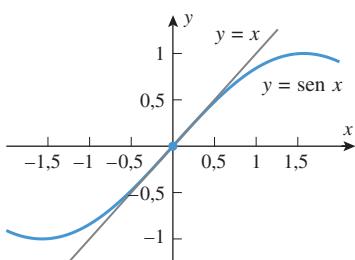


Figura 3.5.3

Solução (a) Uma vez que $f'(x) = \cos x$, tem-se, a partir de (1), que a aproximação linear local de $\sin x$ no ponto x_0 é

$$\sin x \approx \sin x_0 + (\cos x_0)(x - x_0)$$

Assim, a aproximação linear local em $x_0 = 0$ é

$$\sin x \approx \sin 0 + (\cos 0)(x - 0)$$

que simplifica para

$$\sin x \approx x \quad (4)$$

Solução (b) Em (4), a variável x está medida em radianos. Assim, devemos primeiro converter 2° para radianos e, somente depois, aplicar essa aproximação. Como

$$2^\circ = 2 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{90} \approx 0,0349066 \text{ radianos}$$

segue por (4) que $\sin 2^\circ \approx 0,0349066$. Comparando os dois gráficos na Figura 3.5.3, poderíamos esperar que essa aproximação fosse um pouco maior do que o valor exato. A aproximação $\sin 2^\circ \approx 0,0348995$ dada pela calculadora mostra que isso realmente ocorre. ▲

■ ERRO NA APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL

Como uma regra geral, a precisão da aproximação linear local de $f(x)$ em x_0 se deteriora à medida que x se afasta de x_0 . Para ilustrar isso com a aproximação $\sin x \approx x$ do Exemplo 2, façamos o gráfico da função

$$E(x) = |\sin x - x|$$

que é o valor absoluto do erro na aproximação (Figura 3.5.4).

O gráfico na Figura 3.5.4 mostra como cresce o erro na aproximação linear local de $\sin x$ quando x avança mais para longe de 0, tanto no sentido positivo quanto no sentido negativo. O gráfico também nos diz que, para os valores de x entre as duas linhas tracejadas verticais, o erro absoluto é menor do que 0,01. Assim, por exemplo, poderíamos usar a aproximação linear local $\sin x \approx x$ para todos os valores de x no intervalo $-0,35 < x < 0,35$ (em radianos) com a certeza de que a aproximação estará entre $\pm 0,01$ do valor exato.

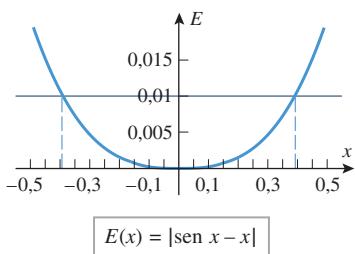


Figura 3.5.4

■ DIFERENCIAIS

Quando Newton e Leibniz publicaram suas descobertas de Cálculo, utilizaram notações distintas e, assim, acabaram criando uma grande divisão notacional entre a Grã-Bretanha e o continente europeu, que durou mais de 50 anos. A **notação de Leibniz**, a saber, dy/dx , acabou prevalecendo por naturalmente sugerir fórmulas corretas, como, por exemplo, a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Até este ponto, sempre interpretamos dy/dx como uma única entidade, representando a derivada de y em relação a x ; os símbolos “ dy ” e “ dx ”, que são denominados **diferenciais**, não tinham sentido algum associado. Nossa próximo objetivo é definir esses símbolos de tal modo que dy/dx possa ser tratado como uma autêntica razão. Para isso, vamos considerar que f seja diferenciável em um ponto x , definir dx como variável independente que possa ter qualquer valor real e definir dy pela fórmula

$$dy = f'(x) dx \quad (5)$$

Se $dx \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (5) por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (6)$$

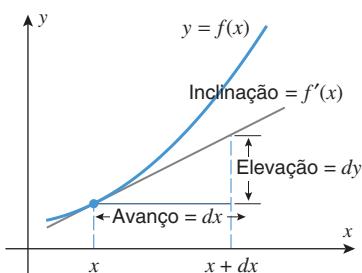


Figura 3.5.5

Assim, alcançamos nosso objetivo de definir dy e dx de tal forma que sua razão seja $f'(x)$. Dizemos que a Fórmula (5) expressa (6) em **forma diferencial**.

Para interpretar (5) geometricamente, observe que $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x . As diferenciais dy e dx podem ser vistas como uma correspondente elevação e avanço dessa reta tangente (Figura 3.5.5).

► **Exemplo 3** Expresse a derivada em relação a x de $y = x^2$ em forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx em $x = 1$.

Solução A derivada de y em relação a x é $dy/dx = 2x$, que pode ser expressa em forma diferencial por

$$dy = 2x \, dx$$

Tomando $x = 1$, obtemos

$$dy = 2 \, dx$$

Isso significa que, se percorrermos a reta tangente à curva $y = x^2$ em $x = 1$, então uma variação de dx unidades em x produz uma variação de $2 \, dx$ unidades em y . Assim, por exemplo, um avanço de $dx = 2$ unidades produz uma elevação de $dy = 4$ unidades ao longo da reta tangente (Figura 3.5.6). ◀

É importante compreender a distinção entre o incremento Δy e a diferencial dy . Para ver a diferença, vamos atribuir às variáveis independentes dx e Δx o mesmo valor; logo, $dx = \Delta x$. Então, Δy representa a variação ocorrida em y quando começamos em x e nos movemos *ao longo da curva* $y = f(x)$ até que sejam percorridas Δx ($= dx$) unidades na direção x . Já dy representa a variação em y que ocorre quando começamos em x e nos movemos *ao longo da reta tangente* até que dx ($= \Delta x$) unidades tenham sido percorridas na direção x (Figura 3.5.7).

► **Exemplo 4** Seja $y = \sqrt{x}$.

(a) Encontre fórmulas para Δy e dy .

(b) Calcule dy e Δy em $x = 4$ com $dx = \Delta x = 3$. Faça, então, um esboço de $y = \sqrt{x}$, mostrando os valores de dy e Δy na figura.

Solução (a) Com $y = f(x) = \sqrt{x}$, obtemos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{assim} \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

Solução (b) Em $x = 4$ com $dx = \Delta x = 3$,

$$\Delta y = \sqrt{7} - \sqrt{4} \approx 0,65$$

e

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(3) = \frac{3}{4} = 0,75$$

A Figura 3.5.8 mostra a curva $y = \sqrt{x}$ junto a Δy e dy . ◀

■ APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL DO PONTO DE VISTA DIFERENCIAL

Mesmo que Δy e dy sejam geralmente diferentes, a diferencial dy é uma boa aproximação de Δy no caso em que $dx = \Delta x$ esteja próximo de 0. Para isso, lembre, da Seção 2.2, que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

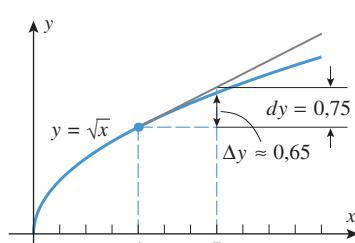


Figura 3.5.8

Segue que, se Δx estiver perto de 0, então teremos $f'(x) \approx \Delta y / \Delta x$ ou, equivalentemente,

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$$

Se concordarmos em tomar $dx = \Delta x$, então podemos reescrever isso como

$$\Delta y \approx f'(x) dx = dy \quad (7)$$

Em palavras, isso afirma que, para valores de dx próximos de zero, a diferencial dy aproxima muito bem o incremento Δy (Figura 3.5.7). É claro que isso deve ser esperado, pois o gráfico da reta tangente é a aproximação linear local do gráfico de f .

■ PROPAGAÇÃO DO ERRO EM APLICAÇÕES



© Michael Newman/PhotoEdit
Medições na vida real inevitavelmente têm pequenos erros.

Observe que o erro de medição será positivo se o valor medido for maior do que o valor exato e negativo se for menor do que o valor exato. O sinal do erro propagado transmite uma informação semelhante.

Explique por que é razoável uma estimativa de erro entre $\pm \frac{1}{32}$ centímetro para uma régua que é calibrada em décimos de centímetros.

Nas aplicações ao mundo real invariavelmente ocorrem pequenos erros na medição de quantidades. Esses erros de medição são importantes na pesquisa científica, pois todas as medidas científicas incluem erros de medição. Por exemplo, a altura de uma pessoa pode ter sido medida como $170 \pm 0,5$ cm, significando que a altura exata está em algum lugar entre 169,5 e 170,5 cm. Muitas vezes os pesquisadores utilizam essas quantidades medidas sem exatidão para calcular outras quantidades e, com isso, *propagam* os erros das quantidades medidas para as quantidades calculadas, num fenômeno denominado *propagação do erro*. Um pesquisador deve ser capaz de obter uma estimativa do erro de quantidades calculadas. Nossa objetivo é mostrar como obter uma estimativa desses erros usando aproximações lineares locais e diferenciais. Com esse objetivo, suponha que

x_0 é o valor exato da quantidade sendo medida

$y_0 = f(x_0)$ é o valor exato da quantidade sendo calculada

x é o valor medido de x_0

$y = f(x)$ é o valor calculado de y

Definimos

$$dx (= \Delta x) = x - x_0 \text{ como o } \textit{erro de medição} \text{ de } x$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ como o } \textit{erro propagado} \text{ de } y$$

Segue de (7), trocando x por x_0 , que o erro propagado Δy pode ser aproximado por

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) dx \quad (8)$$

Infelizmente, há uma dificuldade prática na aplicação dessa fórmula, já que o valor de x_0 é desconhecido. (Lembre que o pesquisador somente conhece o valor medido x .) Por causa disso, é prática comum na pesquisa usar o valor medido x em vez de x_0 em (8) e usar a aproximação

$$\Delta y \approx dy = f'(x) dx \quad (9)$$

para o erro propagado.

► **Exemplo 5** Suponha que, com uma régua, meçamos o lado de um quadrado como sendo de 10 cm, com um erro de medição entre $\pm \frac{1}{32}$ cm. Estime o erro na área calculada do quadrado.

Solução Seja x o valor exato de um lado e y a área exata, de modo que $y = x^2$. Segue de (9), com $f(x) = x^2$, que, se dx é o erro de medição, então o erro propagado Δy pode ser aproximado por

$$\Delta y \approx dy = 2x dx$$

Substituindo o valor medido $x = 10$ nessa equação, obtemos

$$dy = 20 dx \quad (10)$$

Dizer que o erro de medição está entre $\pm \frac{1}{32}$ significa que

$$-\frac{1}{32} \leq dx \leq \frac{1}{32}$$

Multiplicando essas desigualdades por 20 e aplicando (10), obtemos

$$20\left(-\frac{1}{32}\right) \leq dy \leq 20\left(\frac{1}{32}\right) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad -1 \leq dy \leq 1$$

Assim, estimamos o erro propagado no valor calculado da área entre $\pm 1 \text{ cm}^2$. ◀

Se o valor verdadeiro de uma quantidade é q , e uma medida ou um cálculo produz um erro Δq , então $\Delta q/q$ é chamado de **erro relativo** na medida ou no cálculo. Quando expresso como uma percentagem, $\Delta q/q$ é chamado de **erro percentual**. Na prática, o valor verdadeiro q é geralmente desconhecido; assim, em vez disso é usado o valor medido ou calculado de q , e o erro relativo é aproximado por dq/q .

► Exemplo 6 O diâmetro de uma esfera de poliuretano é medido com um erro percentual entre $\pm 0,4\%$. Obtenha uma estimativa do erro percentual no volume da esfera calculado.

Solução Uma esfera de diâmetro x tem raio $r = x/2$ e volume

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3$$

Segue que

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\pi x^2 \quad \text{e} \quad dV = \frac{1}{2}\pi x^2 dx$$

O erro relativo em V é aproximadamente

$$\frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2 dx}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \frac{dx}{x} \quad (11)$$

Sabemos que o erro percentual na medição do valor de x está entre $\pm 0,4\%$, o que significa que

$$-0,004 \leq \frac{dx}{x} \leq 0,004$$

Multiplicando essas desigualdades por 3 e aplicando (11), obtemos

$$-0,012 \leq \frac{dV}{V} \leq 0,012$$

Assim, estimamos o erro percentual no valor calculado de V dentro de $\pm 1,2\%$. ◀

■ MAIS NOTAÇÃO; FÓRMULAS DIFERENCIAIS

O símbolo df é uma outra notação comum para a diferencial de uma função $y = f(x)$. Por exemplo, se $f(x) = \sin x$, então podemos escrever $df = \cos x dx$. Também podemos interpretar o símbolo “ d ” como um *operador* que age sobre uma função para produzir a diferencial correspondente. Por exemplo, $d[x^2] = 2x dx$, $d[\sin x] = \cos x dx$ e assim por diante. Todas as regras gerais de derivação têm, então, versões diferenciais correspondentes:

FÓRMULA PARA DERIVADA	FÓRMULA PARA DIFERENCIAL
$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$d[c] = 0$
$\frac{d}{dx}[cf] = c \frac{df}{dx}$	$d[cf] = c df$
$\frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	$d[f+g] = df + dg$
$\frac{d}{dx}[fg] = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$	$d[fg] = f dg + g df$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$	$d\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g df - f dg}{g^2}$



© Sergiy Serdyuk/iStockphoto

Esferas de poliuretano são utilizadas na manutenção de oleodutos e gasodutos.

Por exemplo,

$$\begin{aligned} d[x^2 \operatorname{sen} x] &= (x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x) dx \\ &= x^2(\cos x dx) + (2x dx) \operatorname{sen} x \\ &= x^2 d[\operatorname{sen} x] + (\operatorname{sen} x) d[x^2] \end{aligned}$$

ilustra a versão diferencial da regra do produto.

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 3.5 (Ver página 219 para respostas.)

- A aproximação linear local de f em x_0 usa a reta _____ ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$ para aproximar os valores de _____ por valores de x próximos de _____.
- Encontre uma equação para a aproximação linear local de $y = 5 - x^2$ em $x_0 = 2$.
- Seja $y = 5 - x^2$. Encontre dy e Δy em $x = 2$ com $dx = \Delta x = 0,1$.
- A intensidade de luz de uma fonte luminosa é uma função $I = f(x)$ da distância x da fonte luminosa. Suponha que a distância de uma pequena pedra até a fonte seja de 10 m, $f(10) = 0,2 \text{ W/m}^2$ e $f'(10) = -0,04 \text{ W/m}^3$. Se a distância $x = 10 \text{ m}$ foi obtida com um erro de medição dentro de $\pm 0,05 \text{ m}$, dê uma estimativa do erro percentual na intensidade da fonte luminosa calculada na pedra.

EXERCÍCIOS 3.5 Recurso Gráfico

- (a) Use a Fórmula (1) para obter uma aproximação linear local de x^3 em $x_0 = 1$.
 (b) Use a Fórmula (2) para reescrever a aproximação obtida em (a) em termos de Δx .
 (c) Use o resultado obtido em (a) para aproximar $(1,02)^3$ e confirme que a fórmula obtida em (b) produz o mesmo resultado.
- (a) Use a Fórmula (1) para obter a aproximação linear local de $1/x$ em $x_0 = 2$.
 (b) Use a Fórmula (2) para reescrever a aproximação obtida em (a) em termos de Δx .
 (c) Use o resultado obtido em (a) para aproximar $1/2,05$ e confirme que a fórmula obtida em (b) produz o mesmo resultado.

ENFOCANDO CONCEITOS

- (a) Encontre a aproximação linear local da função $f(x) = \sqrt{1+x}$ em $x_0 = 0$ e use-a para aproximar $\sqrt{0,9}$ e $\sqrt{1,1}$.
 (b) Faça o gráfico de f e de sua reta tangente em x_0 e use-os para ilustrar a relação entre os valores exatos e as aproximações de $\sqrt{0,9}$ e $\sqrt{1,1}$.
- Um estudante alega que sempre que a aproximação linear local é utilizada para aproximar a raiz quadrada de um número, a aproximação resultante é muito grande.
 (a) Escreva algumas frases precisando a alegação do estudante e justifique a alegação geometricamente.
 (b) Verifique a alegação do estudante algebricamente usando a aproximação (1).

5-10 Confirme que a fórmula dada é a aproximação linear local em $x_0 = 0$. ■

$$5. (1+x)^{15} \approx 1 + 15x \quad 6. \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$7. \operatorname{tg} x \approx x \quad 8. \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

$$9. e^x \approx 1 + x \quad 10. \ln(1+x) \approx x$$

11-16 Confirme que a fórmula dada é a aproximação linear local de f em $x_0 = 1$, onde $\Delta x = x - 1$. ■

$$11. f(x) = x^4; (1 + \Delta x)^4 \approx 1 + 4 \Delta x$$

$$12. f(x) = \sqrt{x}; \sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x$$

$$13. f(x) = \frac{1}{2+x}; \frac{1}{3 + \Delta x} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \Delta x$$

$$14. f(x) = (4+x)^3; (5 + \Delta x)^3 \approx 125 + 75 \Delta x$$

$$15. \operatorname{arc tg} x; \operatorname{arc tg}(1 + \Delta x) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \Delta x$$

$$16. \operatorname{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right); \operatorname{arc sen}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta x\right) \approx \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta x$$

17-20 Confirme que a fórmula dada é a aproximação linear local em $x_0 = 0$ e use um recurso computacional para estimar um intervalo de valores de x no qual o erro na aproximação é de, no máximo, $\pm 0,1$. ■

$$17. \sqrt{x+3} \approx \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x \quad 18. \frac{1}{\sqrt{9-x}} \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{54}x$$

$$19. \operatorname{tg} 2x \approx 2x \quad 20. \frac{1}{(1+2x)^5} \approx 1 - 10x$$

21. (a) Use a aproximação linear local de $\operatorname{sen} x$ em $x_0 = 0$ obtida no Exemplo 2 para aproximar $\operatorname{sen} 1^\circ$ e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.
 (b) Como deve ser escolhido x_0 para aproximar $\operatorname{sen} 44^\circ$?

(c) Aproxime $\operatorname{sen} 44^\circ$ e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.

22. (a) Use a aproximação linear local de $\operatorname{tg} x$ em $x_0 = 0$ para aproximar $\operatorname{tg} 2^\circ$ e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.

- (b) Como deve ser escolhido x_0 para aproximar $\tan 61^\circ$?
 (c) Aproxime $\tan 61^\circ$ e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.

23-33 Use uma aproximação linear local para estimar o valor da quantidade dada. ■

23. $(3,02)^4$ 24. $(1,97)^3$ 25. $\sqrt{65}$
 26. $\sqrt{24}$ 27. $\sqrt{80,9}$ 28. $\sqrt{36,03}$
 29. $\sin 0,1$ 30. $\tan 0,2$ 31. $\cos 31^\circ$
 32. $\ln(1,01)$ 33. $\arctan(0,99)$

ENFOCANDO CONCEITOS

34. A aproximação $(1+x)^k \approx 1+kx$ é frequentemente usada por engenheiros para cálculos rápidos.
 (a) Deduza esse resultado e use-o para fazer uma estimativa grosseira de $(1,001)^{37}$.
 (b) Compare sua estimativa com aquela produzida diretamente por seu recurso computacional.
 (c) Se k for um inteiro positivo, qual é a relação entre a aproximação $(1+x)^k \approx 1+kx$ e a expansão de $(1+x)^k$ usando a fórmula binomial?
35. Use a aproximação $(1+x)^k \approx 1+kx$ junto a algumas contas mentais para mostrar que $\sqrt[3]{8,24} \approx 2,02$ e $4,08^{3/2} \approx 8,24$.
36. Suponha que, medido a 500 m da base de sua base, o ângulo de elevação do alto de um edifício seja $\theta = 6^\circ$. (Ver figura dada.) Use uma aproximação linear local junto a algumas contas mentais para mostrar que o edifício tem aproximadamente 52 m de altura.

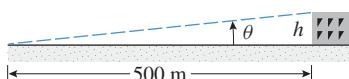


Figura Ex-36

37. (a) Seja $y = 1/x$. Encontre dy e Δy em $x = 1$, sendo $dx = \Delta x = -0,5$.
 (b) Esboce o gráfico de $y = 1/x$, mostrando dy e Δy na figura.
38. (a) Seja $y = \sqrt{x}$. Encontre dy e Δy em $x = 9$, sendo $dx = \Delta x = -1$.
 (b) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{x}$, mostrando dy e Δy na figura.

39-42 Encontre fórmulas para dy e Δy . ■

39. $y = x^3$ 40. $y = 8x - 4$
 41. $y = x^2 - 2x + 1$ 42. $y = \sin x$

43-46 Encontre a diferencial dy . ■

43. (a) $y = 4x^3 - 7x^2$ (b) $y = x \cos x$
 44. (a) $y = 1/x$ (b) $y = 5 \tan x$
 45. (a) $y = x\sqrt{1-x}$ (b) $y = (1+x)^{-17}$

46. (a) $y = \frac{1}{x^3 - 1}$ (b) $y = \frac{1 - x^3}{2 - x}$

47-50 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

47. Um diferencial dy é definido como uma variação muito pequena de y .
 48. Os erros das aproximações (2) e (7) são iguais.
 49. Uma aproximação linear local de uma função jamais pode ser identicamente igual à função.
 50. Uma aproximação linear local de uma função que não é constante jamais pode ser constante.

51-54 Use a diferencial dy para aproximar Δy de acordo com as mudanças de x . ■

51. $y = \sqrt{3x - 2}$; de $x = 2$ para $x = 2,03$
 52. $y = \sqrt{x^2 + 8}$; de $x = 1$ para $x = 0,97$
 53. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; de $x = 2$ para $x = 1,96$
 54. $y = x\sqrt{8x + 1}$; de $x = 3$ para $x = 3,05$

55. O lado de um quadrado mede aproximadamente 10 m, com erro possível de $\pm 0,1$ m.
 (a) Use diferenciais para estimar o erro na área calculada.
 (b) Estime o erro percentual no lado e na área.
56. O lado de um cubo mede aproximadamente 25 cm, com erro possível de ± 1 cm.
 (a) Use diferenciais para estimar o erro no volume calculado.
 (b) Estime os erros percentuais no lado e no volume.
57. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede exatamente 10 cm, e um dos ângulos agudos mede 30° , com erro possível de $\pm 1^\circ$.
 (a) Use diferenciais para estimar os erros nos lados oposto e adjacente ao ângulo medido.
 (b) Estime os erros percentuais nos lados.
58. Um lado de um triângulo retângulo mede exatamente 25 cm. O ângulo oposto a este lado mede 60° , com erro possível de $\pm 0,5^\circ$.
 (a) Use diferenciais para estimar o erro no lado adjacente e na hipotenusa.
 (b) Estime os erros percentuais no lado adjacente e na hipotenusa.

59. A resistência elétrica R de um fio é dada por $R = k/r^2$, onde k é uma constante e r , o raio do fio. Supondo que o raio tenha um erro possível de $\pm 5\%$, use diferenciais para estimar o erro percentual em R (supondo k exato).

60. Uma escada com 12 m está apoiada em uma parede e faz um ângulo θ com o chão. Se o topo da escada está a uma altura de h m na parede, expresse h em termos de θ e, então, use dh para estimar a variação em h se θ variar de 60° a 59° .
61. A área de um triângulo retângulo com uma hipotenusa H é calculada pela fórmula $A = \frac{1}{4}H^2 \sin 2\theta$, onde θ é um dos ângulos agudos. Use diferenciais para aproximar o erro no cálculo de A se $H = 4$ cm (exatamente) e $\theta = 30^\circ$ com erro possível de $\pm 15'$.

- 62.** O lado de um quadrado é medido com um possível erro percentual de $\pm 1\%$. Use diferenciais para estimar o erro percentual na área.
- 63.** O lado de um cubo é medido com um erro percentual possível de $\pm 2\%$. Use diferenciais para estimar o erro percentual no volume.
- 64.** O volume de uma esfera é computado a partir do valor medido de seu raio. Estime o máximo erro percentual possível na medida se o erro percentual no volume deve ser mantido em não mais de $\pm 3\%$ ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$ é o volume de uma esfera de raio r).
- 65.** A área de um círculo é computada a partir do valor medido de seu diâmetro. Estime o erro percentual máximo permitido na medida se o erro percentual na área deve ser mantido em não mais de $\pm 1\%$.
- 66.** Um cubo de aço com 1 cm de lado é coberto com 0,01 cm de cobre. Use diferenciais para estimar o volume de cobre na cobertura. [Sugestão: Seja ΔV a variação no volume do cubo.]
- 67.** Uma barra de metal medindo 15 cm de comprimento e 5 cm de diâmetro está coberta, exceto nas pontas, por uma camada de isolante com uma espessura de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o volume do isolante. [Sugestão: Seja ΔV a variação no volume da barra.]
- 68.** O tempo necessário para uma oscilação completa de um pêndulo é denominado **período**. Se o comprimento L do pêndulo e a oscilação forem pequenos, então o período será dado por $P = 2\pi\sqrt{L/g}$, onde g é a aceleração constante devida à gravidade. Use diferenciais para mostrar que o erro percentual em P é aproximadamente a metade do erro percentual em L .
- 69.** Se a temperatura T de uma barra de metal medindo L de comprimento variar por uma quantidade ΔT , então o comprimento irá variar por uma quantidade $\Delta L = \alpha L \Delta T$, onde α é denominado **coeficiente de expansão linear**. Para variações moderadas na temperatura, α pode ser considerado constante.
- Suponha que a barra tem 40 cm de comprimento a 20°C e, quando a temperatura passa a ser 30°C , o comprimento encontrado é de 40,006 cm. Encontre α .
 - Se um poste de alumínio tem um comprimento de 180 cm a 15°C , qual será seu comprimento se a temperatura for elevada para 40°C ? [Tome $\alpha = 2,3 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$.]
- 70.** Se a temperatura T de um sólido ou líquido com volume V for alterada por uma quantidade ΔT , então o volume irá variar por uma quantidade $\Delta V = \beta V \Delta T$, onde β é denominado **coeficiente de expansão volumétrica**. Para variações moderadas na temperatura, β pode ser considerado constante. Suponha que um caminhão-tanque carregue 4.000 galões de álcool etílico a uma temperatura de 35°C e entregue sua carga, mais tarde, a uma temperatura de 15°C . Usando $\beta = 7,5 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$ para o álcool etílico, encontre o número de galões entregues.
- 71. Texto** Explique por que a aproximação linear local do valor de uma função é equivalente à utilização de um diferencial para aproximar a variação da função.
- 72. Texto** A aproximação linear local

$$\sin x \approx x$$

é conhecida como a *aproximação do ângulo pequeno* e tem aplicações práticas e teóricas. Pesquise um pouco sobre essas aplicações e escreva um relatório sucinto de sua investigação.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.5

1. tangente; $f(x)$; x_0 2. $y = 1 + (-4)(x - 2)$ ou $y = -4x + 9$ 3. $dy = -0,4$; $\Delta y = -0,41$ 4. entre $\pm 1\%$

3.6 REGRA DE L'HÔPITAL; FORMAS INDETERMINADAS

Nesta seção, discutiremos um método geral de usar derivadas para obter limites. Esse método irá nos capacitar a estabelecer, com certeza, limites que até aqui fomos capazes apenas de conjecturar, usando evidências numéricas ou gráficas. O método que discutiremos nesta seção é uma ferramenta muito poderosa, usada internamente por diversos programas de computador para calcular vários tipos de limites.

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO 0/0

Lembre que um limite no formato

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

em que $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$ é denominado **forma indeterminada do tipo 0/0**. Alguns exemplos vistos anteriormente são:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

O primeiro limite foi calculado algebricamente, fatorando o numerador e cancelando o fator comum de $x - 1$, e os dois outros limites foram obtidos usando métodos geométricos. Contudo, há muitas formas indeterminadas nas quais nem os métodos algébricos nem os geométricos produzem o limite, de modo que precisamos desenvolver um método mais geral.

Para motivar tal método, suponha que (1) seja uma forma indeterminada do tipo $0/0$ em que f' e g' são contínuas em $x = a$ e $g'(a) \neq 0$. Como f e g podem ser muito bem aproximadas por suas aproximações lineares locais perto de a , é razoável esperar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) + f'(a)(x - a)}{g(a) + g'(a)(x - a)} \quad (2)$$

Como estamos supondo que f' e g' são contínuas em $x = a$, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = g'(a)$$

e, como a diferenciabilidade de f e g em $x = a$ implica a continuidade de f e g em $x = a$, obtemos

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Assim, podemos reescrever (2) como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x - a)}{g'(a)(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3)$$

Esse resultado, conhecido como **regra de L'Hôpital**, converte a forma indeterminada dada em um limite envolvendo derivadas, que muitas vezes é mais fácil de calcular.

Embora tenhamos motivado (3) supondo que f e g tenham derivadas contínuas em $x = a$ e que $g'(a) \neq 0$, o resultado é verdadeiro sob condições mais brandas, bem como para limites laterais e limites em $+\infty$ e $-\infty$. Omitiremos a prova do enunciado preciso da regra de L'Hôpital seguinte.

3.6.1 TEOREMA (Regra de L'Hôpital para a Indeterminação 0/0) Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Se existir $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$, ou se esse limite for $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite com $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$.

ADVERTÊNCIA

Note que, na regra de L'Hôpital, o numerador e o denominador são derivados separadamente, o que não é o mesmo que derivar $f(x)/g(x)$.

Nos próximos exemplos, aplicaremos a regra de L'Hôpital usando o seguinte processo de três passos:

Aplicando a Regra de L'Hôpital

Passo 1 Verifique que $\lim f(x)/g(x)$ é uma forma indeterminada do tipo $0/0$.

Passo 2 Derive separadamente f e g .

Passo 3 Encontre o limite de $f'(x)/g'(x)$. Se esse limite for finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então ele é igual ao limite de $f(x)/g(x)$.

► **Exemplo 1** Encontre o limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

usando a regra de L'Hôpital e confira o resultado por fatoração.

Solução O numerador e o denominador têm um limite zero; portanto, o limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{d}{dx}[x^2 - 4]}{\frac{d}{dx}[x - 2]} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} = 4$$

Isso confere com o cálculo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \quad \blacktriangleleft$$

O limite no Exemplo 1 pode ser interpretado como o limite de uma certa derivada. Use essa derivada para calcular o limite.

► **Exemplo 2** Em cada parte, confirme que o limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0 e calcule-o usando a regra de L'Hôpital.

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} & (b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x} & (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} \\ (d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} & (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-4/3}}{\sin(1/x)} \end{array}$$

ADVERTÊNCIA

Podemos obter resultados incorretos se aplicarmos a regra de L'Hôpital a limites que não são formas indeterminadas. Por exemplo, a conta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+6}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}[x+6]}{\frac{d}{dx}[x+2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

não é válida, pois o limite não é uma forma indeterminada. O resultado correto é

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+6}{x+2} = \frac{0+6}{0+2} = 3$$



Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) Matemático francês. L'Hôpital nasceu de pais da alta nobreza francesa e tinha o título de Marquês de Sainte-Mesme Comte d'Autrement. Bem cedo, mostrou talento matemático e, aos 15 anos, resolveu um difícil problema proposto por Pascal sobre cicloides.

Quando jovem, serviu brevemente como oficial da cavalaria, mas desistiu por ser míope. Ganhou fama em seu tempo como autor do primeiro livro publicado sobre Cálculo Diferencial, *L'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (1696). A regra de L'Hôpital apareceu pela pri-

meira vez nesse livro. Na verdade, tanto a regra de L'Hôpital como a maior parte do material do livro sobre Cálculo eram de autoria de John Bernoulli, que foi professor de L'Hôpital. L'Hôpital desistiu de seus planos de um livro sobre cálculo integral quando Leibniz informou-lhe que iria escrever tal texto. L'Hôpital era aparentemente generoso e bem apessoado, e seus múltiplos contatos com importantes matemáticos forneceram um veículo para disseminação das grandes descobertas do Cálculo por toda a Europa.

[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Guillaume_de_L%27H%C3%B4pital.jpg]

Solução (c) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^x - 1]}{\frac{d}{dx}[x^3]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{3x^2} = +\infty$$

Solução (d) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sec^2 x}{2x} = -\infty$$

Solução (e) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Já que o novo limite é outra forma indeterminada do tipo 0/0, aplicamos novamente a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Solução (f) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-4/3}}{\operatorname{sen}(1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{3}x^{-7/3}}{(-1/x^2)\cos(1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3}x^{-1/3}}{\cos(1/x)} = \frac{0}{1} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO ∞/∞

Quando queremos indicar que o limite (ou limite lateral) de uma função é $+\infty$ ou $-\infty$ sem sermos específicos sobre o sinal diremos que o limite é ∞ . Por exemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty &\text{ significa } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty &\text{ significa } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty &\text{ significa } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \end{aligned}$$

O limite da razão $f(x)/g(x)$, no qual o numerador tem limite ∞ e o denominador tem limite ∞ , é chamado de *forma indeterminada do tipo ∞/∞* . A versão seguinte da regra de L'Hôpital, que enunciamos sem prova, pode frequentemente ser usada para calcular limites desse tipo.

3.6.2 TEOREMA (Regra de L'Hôpital para a Indeterminação ∞/∞) Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

Se existir $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$, ou se esse limite for $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite com $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$.

► **Exemplo 3** Em cada parte, confirme que o limite é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ e aplique a regra de L'Hôpital.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cossec x}$$

Solução (a) O numerador e o denominador têm limite $+\infty$; logo, temos uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ . Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Solução (b) O numerador tem limite $-\infty$ e o denominador tem limite $+\infty$; logo, temos uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ . Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cossec x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\cossec x \cotg x} \quad (4)$$

Esse último limite é outra vez uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ . Além disso, qualquer aplicação adicional da regra de L'Hôpital resultará em potências de $1/x$ no numerador e expressões envolvendo $\cossec x$ e $\cotg x$ no denominador; assim, aplicações repetidas da regra simplesmente produzem novas formas indeterminadas. Portanto, devemos tentar outra coisa. O último limite em (4) pode ser reescrito como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin x}{x} \tg x \right) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \tg x = -(1)(0) = 0$$

Assim,

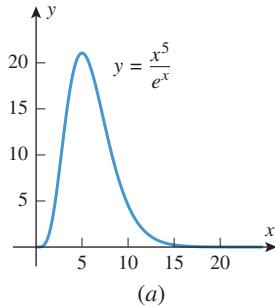
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cossec x} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ ANALISANDO O CRESCIMENTO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS USANDO A REGRA DE L'HÔPITAL

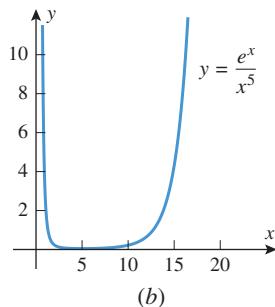
Se n for qualquer inteiro positivo, então $x^n \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$. Tais potências inteiras de x são, às vezes, usadas como “padrão de medida” para descrever o quanto rapidamente outras funções crescem. Por exemplo, sabemos que $e^x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ e que o crescimento de e^x é muito rápido (Tabela 0.5.5); entretanto, o crescimento de x^n é também rápido quando n for grande; logo, é razoável perguntar se altas potências de x crescem mais ou menos rapidamente do que e^x . Uma maneira de investigar isso é verificar o comportamento da razão x^n/e^x quando $x \rightarrow +\infty$. Por exemplo, a Figura 3.6.1a mostra o gráfico de $y = x^5/e^x$. Esse gráfico sugere que $x^5/e^x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$, e isso implica que o crescimento da função e^x é suficientemente rápido para que os seus valores alcancem aqueles de x^5 e forcem a razão em direção a zero. Enunciado informalmente, “ e^x cresce mais rapidamente do que x^5 ”. A mesma conclusão poderia ter sido alcançada colocando e^x em cima e examinando o comportamento de e^x/x^5 quando $x \rightarrow +\infty$ (Figura 3.6.1b). Nesse caso, os valores de e^x alcançam os de x^5 e forciam a razão em direção a $+\infty$. Mais geralmente, podemos usar a regra de L'Hôpital para mostrar que e^x cresce mais rapidamente do que qualquer potência inteira positiva de x , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (5-6)$$

Ambos os limites são formas indeterminadas do tipo ∞/∞ que podem ser calculadas usando a regra de L'Hôpital. Por exemplo, para estabelecer (5), necessitaremos aplicar a regra de L'Hôpital n vezes. Para isso, observe que as derivações sucessivas de x^n reduzem o expoente em 1 a cada vez, produzindo, assim, uma constante na enésima derivada. Por exemplo, as sucessivas derivadas de



(a)



(b)

Figura 3.6.1

x^3 são $3x^2$, $6x$ e 6 . Em geral, a enésima derivada de x^n é a constante $n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!$ (verifique).* Assim, aplicando a regra de L'Hôpital n vezes a (5), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

O limite (6) pode ser provado analogamente.

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO $0 \cdot \infty$

Até agora, discutimos formas indeterminadas do tipo $0/0$ e ∞/∞ . Contudo, essas não são as únicas possibilidades; em geral, o limite de uma expressão que tem uma das formas

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x) \cdot g(x), \quad f(x)^{g(x)}, \quad f(x) - g(x), \quad f(x) + g(x)$$

é chamado de *forma indeterminada* se os limites de $f(x)$ e $g(x)$ individualmente exercem influências conflitantes no limite de toda a expressão. Por exemplo, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

é uma *forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$* , pois o limite do primeiro fator é 0 e o do segundo é $-\infty$, sendo que ambos exercem influências conflitantes sobre o produto. Por outro lado, o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x}(1 - x^2)]$$

não é uma forma indeterminada, pois o primeiro fator tem o limite $+\infty$ e o segundo, $-\infty$, sendo que essas influências trabalham juntas para produzir um limite $-\infty$ para o produto.

As formas indeterminadas do tipo $0 \cdot \infty$ podem, às vezes, ser calculadas reescrevendo o produto como uma razão e aplicando a regra de L'Hôpital para formas indeterminadas do tipo $0/0$ ou ∞/∞ .

► Exemplo 4 Calcule

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x$$

Solução (a) O fator x tem um limite 0 e o fator $\ln x$ tem o limite $-\infty$; logo, o problema dado é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Existem duas possíveis abordagens: podemos escrever o limite como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

a primeira sendo uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ e a segunda, uma forma indeterminada do tipo $0/0$. Contudo, a primeira forma será a escolha preferida, pois a derivada de $1/x$ é menos complicada do que a derivada de $1/\ln x$. A partir dessa escolha, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Solução (b) O problema dado é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Vamos convertê-la para uma forma indeterminada do tipo $0/0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1/\sec 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2 \sin 2x} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

ADVERTÊNCIA

É tentador argumentar que uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$ tem o valor 0 , uma vez que “zero vezes qualquer coisa é zero”. Contudo, isso é enganoso, uma vez que $0 \cdot \infty$ não é produto de números: em vez disso, é uma afirmação sobre limites. Por exemplo, os limites seguintes são $0 \cdot \infty$, mas não são zero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

* Lembre-se de que, para $n \geq 1$, a expressão $n!$ é lida como *fatorial de n* e denota o produto dos primeiros n inteiros positivos.

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO $\infty - \infty$

Um problema de limite que leva a uma das expressões

$$\begin{aligned} (+\infty) - (+\infty), & \quad (-\infty) - (-\infty), \\ (+\infty) + (-\infty), & \quad (-\infty) + (+\infty) \end{aligned}$$

é chamado de *forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$* . Tais limites são indeterminados, pois os dois termos exercem influências conflitantes na expressão: um empurra na direção positiva e o outro, na negativa. Entretanto, os problemas de limite que levam a uma das expressões

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty), & \quad (+\infty) - (-\infty), \\ (-\infty) + (-\infty), & \quad (-\infty) - (+\infty) \end{aligned}$$

não são indeterminados, uma vez que os dois termos trabalham na mesma direção (os que estão acima produzem um limite $+\infty$ e os abaixo, $-\infty$).

As formas indeterminadas do tipo $\infty - \infty$ podem, às vezes, ser calculadas combinando-se os termos e manipulando-se o resultado para produzir uma forma indeterminada do tipo $0/0$ ou ∞/∞ .

► Exemplo 5 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Solução Ambos os termos têm limite $+\infty$; logo, o problema dado é uma forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Combinando os dois termos, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

que é uma forma indeterminada do tipo $0/0$. Aplicando a regra de L'Hôpital duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Os limites da forma

$$\lim f(x)^{g(x)}$$

dão origem a *formas indeterminadas do tipo $0^0, \infty^0$ e 1^∞* . (O significado desses símbolos devem estar claro.) Por exemplo, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}$$

cujo valor sabemos ser e [veja a Fórmula (1) da Seção 3.2], é uma forma indeterminada do tipo 1^∞ . É indeterminada porque as expressões $1+x$ e $1/x$ exercem duas influências conflitantes: a primeira tende a 1, o que leva a expressão em direção a 1, e a segunda tende a $+\infty$, o que leva a expressão em direção a $+\infty$.

As formas indeterminadas dos tipos $0^0, \infty^0$ e 1^∞ podem, às vezes, ser calculadas introduzindo primeiro uma variável dependente

$$y = f(x)^{g(x)}$$

e, então, calculando o limite de $\ln y$. Como

$$\ln y = \ln[f(x)^{g(x)}] = g(x) \cdot \ln[f(x)]$$

o limite de $\ln y$ será uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$ (verifique), que pode ser calculada pelos métodos que já desenvolvemos. Uma vez conhecido o limite de $\ln y$, o limite de $y = f(x)^{g(x)}$ geralmente pode ser obtido com facilidade, conforme ilustraremos no próximo exemplo.

► **Exemplo 6** Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$.

Solução Como discutido, começamos introduzindo uma variável dependente

$$y = (1 + \sin x)^{1/x}$$

e tomindo o logaritmo natural em ambos os lados

$$\ln y = \ln(1 + \sin x)^{1/x} = \frac{1}{x} \ln(1 + \sin x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

o que é uma forma indeterminada do tipo 0/0; logo, pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)/(1 + \sin x)}{1} = 1$$

Uma vez que mostramos que $\ln y \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$, a continuidade da função exponencial implica que $e^{\ln y} \rightarrow e^1$ quando $x \rightarrow 0$, o que implica que $y \rightarrow e$ quando $x \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x} = e \quad \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.6 (Ver página 228 para respostas.)

1. Em cada parte, verifique se a regra de L'Hôpital é aplicável ao limite dado.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^3 + x - 2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} x}$

2. Calcule cada um dos limites do Exercício 1.

3. Usando a regra de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{500x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 3.6



Recurso Gráfico



- 1-2 Calcule o limite dado sem usar a regra de L'Hôpital e depois use-a para conferir sua resposta. ■

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8}$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{3x + 7}$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

- 3-6 **Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

3. A regra de L'Hôpital não é aplicável a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x}$.

4. Se $p(x)$ for um polinômio qualquer, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$.

5. Se n for escolhido suficientemente grande, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = +\infty$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/x} = 0$

- 7-45 Encontre o limite. ■

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$

9. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\theta}$

10. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t}{1 - e^t}$

11. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{cotg} x}{\ln x}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{e^{1/x}}$

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{e^x}$

18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc sen} 2x}{x}$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arc tg} x}{x^3}$

21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x}$

22. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (x - \pi) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$

23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

24. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$

25. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec 3x \cos 5x$

26. $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \operatorname{cotg} x$

27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3/x)^x$

28. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{-3/x}$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$

31. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}[(\pi/2)x]}$

33. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cossec} x - 1/x)$

35. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

37. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(x^2 + 1)]$

39. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

41. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]^x$

43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x}$

45. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\operatorname{tg} x)^{(\pi/2)-x}$

46. Mostre que com qualquer n inteiro positivo

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$.

30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + a/x)^{bx}$

32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\cos(2/x)]^{x^2}$

34. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2} \right)$

36. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

38. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \ln(1 + x)]$

40. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} - 1)^x$

42. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$

44. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Encontre o erro no seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x - 2} = 1 \end{aligned}$$

(b) Encontre a resposta correta.

48. (a) Encontre o erro no seguinte cálculo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{3x^2-12x+12}}{x^4 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(6x - 12)e^{3x^2-12x+12}}{4x^3} = 0$$

(b) Encontre a resposta correta.

 49-52 Faça uma conjectura sobre o limite traçando o gráfico da função envolvida com um recurso computacional; verifique sua conjectura usando a regra de L'Hôpital. ■

49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{x}}$

51. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{3/\ln x}$

50. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

52. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{sec} x}$

 53-56 Faça uma conjectura sobre as equações das assíntotas horizontais, se houver, por meio do gráfico da equação obtida por um recurso computacional; verifique sua resposta usando a regra de L'Hôpital. ■

53. $y = \ln x - e^x$

54. $y = x - \ln(1 + 2e^x)$

55. $y = (\ln x)^{1/x}$

56. $y = \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$

57. Os limites do tipo

$$\begin{aligned} 0/\infty, \quad \infty/0, \quad 0^\infty, \quad \infty \cdot \infty, \quad +\infty + (+\infty), \\ +\infty - (-\infty), \quad -\infty + (-\infty), \quad -\infty - (+\infty) \end{aligned}$$

não são formas indeterminadas. Encontre os seguintes limites sem fazer contas:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{-x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) \operatorname{cotg} x$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3)$

58. Há um mito que circula entre os que começam estudar Cálculo de que todas as formas indeterminadas dos tipos 0^0 , ∞^0 e 1^∞ são iguais a 1, pois “qualquer coisa elevada a zero é 1” e “1 a qualquer potência é 1”. O engano está em que 0^0 , ∞^0 e 1^∞ não são potências de números, mas descrições de limites. Os seguintes exemplos, que foram sugeridos pelo Prof. Jack Staib, da Drexel University, mostram que tais formas indeterminadas podem assumir qualquer valor real positivo.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$ (tipo 0^0)

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$ (tipo ∞^0)

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)^{(\ln a)/x}] = a$ (tipo 1^∞)

Verifique esses resultados.

59-62 Verifique que a regra de L'Hôpital não ajuda a encontrar o limite; se ele existir, encontre-o com algum outro método. ■

59. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} 2x}{x}$

60. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{3x + \operatorname{sen} x}$

61. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \operatorname{sen} 2x)}{x + 1}$

62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \operatorname{sen} x)}{x^2 + 1}$

63. O diagrama esquemático apresentado representa um circuito elétrico que consiste em uma força eletromotriz que produz uma voltagem V , um resistor com resistência R e um indutor com indutância L . A teoria dos circuitos elétricos mostra que, se uma voltagem for aplicada no instante $t = 0$, então a corrente I que percorre o circuito no instante t é dada por

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Qual é o efeito sobre a corrente em um dado tempo t fixo, se a resistência tender a zero (isto é, $R \rightarrow 0^+$)?

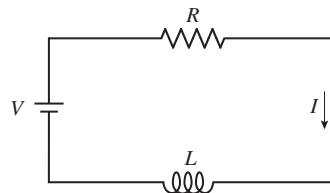


Figura Ex-63

64. (a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x = 1$.

(b) Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{\pi/2 - x} - \operatorname{tg} x \right) = 0$$

(c) Segue de (b) que a aproximação

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{1}{\pi/2 - x}$$

deveria ser boa com valores de x próximos de $\pi/2$. Use uma calculadora para encontrar $\operatorname{tg} x \approx 1/(\pi/2 - x)$ com $x = 1,57$; compare os resultados.

- C 65.** (a) Use um CAS para mostrar que, se k for uma constante positiva, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(k^{1/x} - 1) = \ln k$$

- (b) Confirme esse resultado usando a regra de L'Hôpital. [Sugestão: Expresso o limite em termos de $t = 1/x$.]
 (c) Se n for um inteiro positivo, então segue por (a) com $x = n$ que a aproximação

$$n(\sqrt[n]{k} - 1) \approx \ln k$$

deveria ser boa com n grande. Use esse resultado e a tecla da raiz quadrada de uma calculadora para aproximar os valores de $\ln 0,3$ e $\ln 2$ com $n = 1024$ e, então, compare os valores obtidos com aqueles do logaritmo gerados diretamente da calculadora. [Sugestão: Cada raiz enésima na qual n é uma potência de dois pode ser obtida como sucessivas raízes quadradas.]

- 66.** Encontre todos os valores de k e l tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos lx}{x^2} = -4$$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 67.** Seja $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

- (a) Os limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ são formas indeterminadas?
 (b) Use um recurso computacional para gerar o gráfico de f e use o gráfico para fazer conjecturas sobre os limites em (a).

- (c) Use o Teorema do Confronto (1.6.4) para confirmar que suas conjecturas em (b) estão corretas.

- 68.** (a) Explique por que a regra de L'Hôpital não se aplica ao problema

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

- (b) Encontre o limite.

- 61.** Encontre $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$, se existir.

- 70.** Suponha que as funções f e g sejam diferenciáveis em $x = a$ e que $f(a) = g(a) = 0$. Se $g'(a) \neq 0$, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

sem usar a regra de L'Hôpital. [Sugestão: Divida o numerador e o denominador de $f(x)/g(x)$ por $x - a$ e use as definições de $f'(a)$ e de $g'(a)$.]

- 71. Texto** Se utilizássemos a Regra de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

poderíamos ser acusados de raciocínio circular. Explique por quê.

- 72. Texto** O Exercício 58 mostra que as formas indeterminadas 0^0 e ∞^0 podem tomar qualquer valor real positivo. Contudo, muitas vezes ocorre que essas indeterminações tomam o valor 1. Leia o artigo “Indeterminate Forms of Exponential Type”, de John Baxley e Elmer Hayashi, na edição de Junho-Julho de 1978 da revista *American Mathematical Monthly*, e escreva um relatório sucinto sobre os motivos dessa ocorrência.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.6

- 1.** (a) sim (b) não (c) sim **2.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) não existe (c) 2 **3.** $+\infty$

✓ EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3 Recurso Gráfico

- 1-2** (a) Encontre dy/dx usando derivação implícita. (b) Resolva a equação para y como uma função de x e encontre dy/dx a partir dessa equação. (c) Confirme que os dois resultados são consistentes expressando a derivada de (a) como uma função só de x . ■

1. $x^3 + xy - 2x = 1$ **2.** $xy = x - y$

- 3-6** Encontre dy/dx usando derivação implícita. ■

3. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$ **4.** $x^3 - y^3 = 6xy$

5. $\sec(xy) = y$ **6.** $x^2 = \frac{\operatorname{cotg} y}{1 + \operatorname{cossec} y}$

- 7-8** Encontre d^2y/dx^2 usando derivação implícita. ■

7. $3x^2 - 4y^2 = 7$ **8.** $2xy - y^2 = 3$

- 9.** Use derivação implícita para encontrar a inclinação da reta tangente à curva $y = x \operatorname{tg}(\pi y/2)$, $x > 0$, $y > 0$ (a *quadratriz de Hippas*) no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- 10.** Em qual(is) ponto(s) a reta tangente à curva $y^2 = 2x^3$ é perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$?

- 11.** Prove que, se P e Q são dois pontos distintos na elipse girada $x^2 + xy + y^2 = 4$, tais que P , Q e a origem são colineares, então as retas tangentes à elipse em P e Q são paralelas.

- 12.** Encontre as coordenadas do ponto no primeiro quadrante em que a reta tangente à curva $x^3 - xy + y^3 = 0$ é paralela ao eixo x .

- 13.** Encontre as coordenadas do ponto no primeiro quadrante em que a reta tangente à curva $x^3 - xy + y^3 = 0$ é paralela ao eixo y .

14. Use derivação implícita para mostrar que a equação da reta tangente à curva $y^2 = kx$ em (x_0, y_0) é

$$y_0 y = \frac{1}{2}k(x + x_0)$$

- 15-16 Encontre dy/dx usando primeiro propriedades algébricas da função logaritmo natural. ■

15. $y = \ln\left(\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3(x+4)^4}\right)$ 16. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\sin x \sec x}\right)$

- 17-34 Encontre dy/dx . ■

17. $y = \ln 2x$

18. $y = (\ln x)^2$

19. $y = \sqrt[3]{\ln x + 1}$

20. $y = \ln(\sqrt[3]{x+1})$

21. $y = \log(\ln x)$

22. $y = \frac{1 + \log x}{1 - \log x}$

23. $y = \ln(x^{3/2}\sqrt{1+x^4})$

24. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{x} \cos x}{1+x^2}\right)$

25. $y = e^{\ln(x^2+1)}$

26. $y = \ln\left(\frac{1+e^x+e^{2x}}{1-e^{3x}}\right)$

27. $y = 2xe^{\sqrt{x}}$

28. $y = \frac{a}{1+be^{-x}}$

29. $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc tg} 2x$

30. $y = 2^{\operatorname{arc sen} x}$

31. $y = x^{(e^x)}$

32. $y = (1+x)1/x$

33. $y = \operatorname{arc sec}(2x+1)$

34. $y = \sqrt{\operatorname{arc cos} x^2}$

- 35-36 Encontre dy/dx usando derivação logarítmica. ■

35. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$

36. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

37. (a) Faça uma conjectura sobre a forma do gráfico da função $y = \frac{1}{2}x - \ln x$ e trace um esboço rudimentar dele.
 (b) Confira sua conjectura traçando o gráfico da equação no intervalo $0 < x < 5$ usando um recurso gráfico.
 (c) Mostre que as inclinações das retas tangentes à curva nos pontos $x = 1$ e $x = e$ têm sinais opostos.
 (d) O que a parte (c) implica sobre a existência de uma reta tangente horizontal à curva? Explique.
 (e) Encontre as coordenadas x exatas de todas as retas tangentes horizontais a essa curva.

38. Lembre que na Seção 0.5 foi visto que a intensidade β de um som em decibéis (dB) é dada por $\beta = 10 \log(I/I_0)$, onde I é a intensidade do som em watts por metro quadrado (W/m^2) e I_0 é uma constante que é aproximadamente a intensidade do som no limiar da capacidade auditiva do ser humano. Encontre a taxa de variação de β em relação a I no ponto em que
 (a) $I/I_0 = 10$ (b) $I/I_0 = 100$ (c) $I/I_0 = 1000$

39. Uma partícula está em movimento ao longo da curva $y = x \ln x$. Encontre todos os valores de x nos quais a taxa de variação de y em relação ao tempo é três vezes a de x . [Suponha que dx/dt não se anule.]

40. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln(5 - x^2)$ em $x = 2$.

41. Encontre o valor de b tal que a reta $y = x$ seja tangente ao gráfico de $y = \log_b x$. Confirme seu resultado fazendo os dois gráficos no mesmo sistema de coordenadas.

42. Em cada parte, encontre o valor de k com o qual os gráficos de $y = f(x)$ e $y = \ln x$ compartilham uma tangente comum em seu ponto de intersecção. Confirme seu resultado fazendo os gráficos de $y = f(x)$ e $y = \ln x$ no mesmo sistema de coordenadas.

(a) $f(x) = \sqrt{x} + k$ (b) $f(x) = k\sqrt{x}$

43. Se f e g são funções inversas uma da outra e se f é diferenciável em seu domínio, então g também deve ser diferenciável em seu domínio? Dê um argumento razoável informal para corroborar sua resposta.

44. Em cada parte, encontre $(f^{-1})'(x)$ usando a Fórmula (2) da Seção 3.3 e verifique seu resultado derivando diretamente f^{-1} .

(a) $f(x) = 3/(x+1)$ (b) $f(x) = \sqrt{e^x}$

45. Encontre um ponto no gráfico de $y = e^{3x}$ no qual a reta tangente passa pela origem.

46. Mostre que a taxa de variação de $y = 5000e^{1.07x}$ é proporcional a y .

47. Mostre que a taxa de variação de $y = 3^{2x}5^{7x}$ é proporcional a y .
 48. A constante de equilíbrio k de uma reação química equilibrada varia com a temperatura absoluta T , de acordo com a lei

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{q(T - T_0)}{2T_0 T}\right)$$

onde k_0 , q e T_0 são constantes. Encontre a taxa de variação de k em relação a T .

49. Mostre que a função $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$ satisfaz

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$$

quaisquer que sejam as constantes reais a e b .

50. Mostre que a função $y = \operatorname{arc tg} x$ satisfaz

$$y'' = -2 \operatorname{sen} y \cos^3 y$$

51. Suponha que a população de cervos em uma ilha seja modelada pela equação

$$P(t) = \frac{95}{5 - 4e^{-t/4}}$$

onde $P(t)$ é o número de cervos t semanas depois da observação inicial no instante $t = 0$.

- (a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função $P(t)$.
 (b) Descreva o que acontece à população no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão calculando $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$.
 (c) Descreva que acontece com a taxa de crescimento populacional no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão fazendo o gráfico de $P'(t)$.

52. Em cada parte, encontre o limite dado interpretando a expressão como uma derivada apropriada.

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^\pi - 1}{h}$ (b) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \ln x}{(x - e) \ln x}$

53. Suponha que $\lim f(x) = \pm\infty$ e $\lim g(x) = \pm\infty$. Em cada um dos quatro casos possíveis, estabeleça se $\lim[f(x) - g(x)]$ é uma forma indeterminada e dê um argumento razoável informal que sustente sua resposta.

54. (a) Sob quais condições um limite da forma

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$$

será uma forma indeterminada?

- (b) Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ deve ser uma forma indeterminada? Dê alguns exemplos que sustentem sua resposta.

- 55-58 Calcule o limite dado. ■

55. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

56. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{\ln x}{x^4 - 1}}$

57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2 3x}$

58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0$

59. Uma mancha de óleo em um lago está cercada por uma barreira de contenção circular flutuante. À medida que a barreira é encolhida, a área circular da mancha diminui por bombeamento. Se a barreira está sendo encolhida a uma taxa de 5 metros por minuto, a que taxa estará diminuindo a área da mancha quando essa área tiver um diâmetro de 100 m?

60. A hipotenusa de um triângulo retângulo cresce a uma taxa constante de a centímetros por segundo e um cateto decresce a uma taxa constante de b centímetros por segundo. Qual é a taxa de variação do ângulo formado pela hipotenusa e o outro cateto no instante em que ambos os catetos medem 1 cm?

61. Em cada parte, use a informação dada para encontrar Δx , Δy e dy .

- (a) $y = 1/(x - 1)$; x decresce de 2 para 1,5.
 (b) $y = \tan x$; x cresce de $-\pi/4$ para 0.
 (c) $y = \sqrt{25 - x^2}$; x cresce de 0 para 3.

62. Use uma aproximação linear local adequada para estimar o valor de $\cot 46^\circ$ e compare sua resposta com o valor obtido com um recurso computacional.

63. A base da Grande Pirâmide de Giza é um quadrado com 230 m de lado.

- (a) Conforme ilustrado na figura abaixo, suponha que um arqueólogo em pé no centro de um lado mede o ângulo de elevação do ápice de $\phi = 51^\circ$, com um erro de $\pm 0,5^\circ$. O que é razoável que o arqueólogo diga sobre a altura da pirâmide?
 (b) Use diferenciais para estimar o erro permitido no ângulo de elevação que resultará em um erro na altura de, no máximo, ± 5 m.

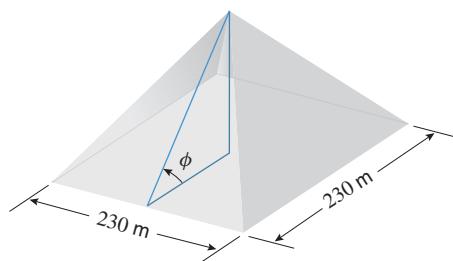


Figura Ex-63

CAPÍTULO 3 ESTABELECENDO CONEXÕES

Nestes exercícios, exploramos uma aplicação de funções exponenciais ao decaimento radioativo e consideramos outra abordagem ao cálculo da derivada da função exponencial natural.

1. Consideremos um modelo de decaimento radioativo simples, no qual supomos que, dada qualquer quantidade de certo material radioativo, a fração dessa quantidade que decai ao longo de um intervalo de tempo é uma constante que depende somente do material utilizado e do comprimento do intervalo de tempo. Escolhemos um parâmetro temporal $-\infty < t < +\infty$ e denotamos por $A = A(t)$ a quantidade do material radioativo que permanece no instante t do tempo. Também escolhemos unidades de medida tais que a quantidade inicial do material é $A(0) = 1$ e tomamos $b = A(1)$ como a quantidade do material no instante $t = 1$. Prove que a função $A(t)$ tem as propriedades seguintes.

- (a) $A(-t) = \frac{1}{A(t)}$ [Sugestão: Com $t > 0$, podemos interpretar $A(t)$ como a fração da quantidade do material radioativo

que permanece depois de um intervalo de tempo de comprimento t .]

- (b) $A(s+t) = A(s) \cdot A(t)$ [Sugestão: Inicialmente, considere s e t positivos. Para os outros casos, use a propriedade na parte (a).]
 (c) Se n for qualquer inteiro não nulo, então

$$A\left(\frac{1}{n}\right) = (A(1))^{1/n} = b^{1/n}$$

- (d) Se m e n forem inteiros com $n \neq 0$, então

$$A\left(\frac{m}{n}\right) = (A(1))^{m/n} = b^{m/n}$$

- (e) Supondo que $A(t)$ seja uma função contínua de t , mostre que $A(t) = b^t$. [Sugestão: Prove que são iguais quaisquer duas funções contínuas que coincidem no conjunto dos números racionais.]

- (f) Substituindo a hipótese $A(0) = 1$ pela condição $A(0) = A_0$, prove que $A = A_0 b^t$.
2. Neste exercício, use a Figura 1.3.4.
- (a) Faça a substituição $h = 1/x$ e conclua que
- $$(1 + h)^{1/h} < e < (1 - h)^{-1/h} \quad \text{com } h > 0$$
- e
- $$(1 - h)^{-1/h} < e < (1 + h)^{1/h} \quad \text{com } h < 0$$
- (b) Use as desigualdades na parte (a) e o Teorema do Confronto para provar que
- $$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$
- (c) Explique por que o limite na parte (b) confirma a Figura 0.5.4.
- (d) Use o limite na parte (b) para provar que
- $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$



Stone/Getty Images

As derivadas podem ajudar a encontrar a localização mais eficaz, quanto ao custo, de uma plataforma submarina de petróleo.

4

A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo, estudaremos várias aplicações da derivada. Por exemplo, utilizaremos métodos do Cálculo para analisar funções e seus gráficos. Nesse processo, mostraremos como o Cálculo e os recursos computacionais, juntos, conseguem fornecer a maioria das informações importantes sobre o comportamento de funções. Outra aplicação importante da derivada será a solução de problemas de otimização. Por exemplo, se a principal consideração num problema for o tempo, podemos querer encontrar a maneira mais rápida de executar uma tarefa, e se a principal consideração for o custo, podemos querer encontrar a maneira mais econômica de executar uma tarefa. Matematicamente, os problemas de otimização podem ser reduzidos à obtenção do maior ou menor valor de uma função em algum intervalo e à determinação de onde esses valores ocorrem. Usando a derivada, desenvolveremos as ferramentas matemáticas necessárias para a solução desses problemas. Também utilizaremos a derivada para estudar o movimento de uma partícula ao longo de uma reta e mostraremos como a derivada pode ajudar na aproximação de soluções de equações.

4.1 ANÁLISE DE FUNÇÕES I: CRESCIMENTO, DECRESCIMENTO E CONCAVIDADE

Embora os recursos computacionais sejam úteis na determinação do aspecto geral do gráfico, muitos problemas requerem uma precisão maior do que aquela que eles são capazes de produzir. O propósito desta seção é desenvolver ferramentas matemáticas que possam ser usadas para determinar a forma exata do gráfico e a localização precisa de seus aspectos-chave.

■ FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Os termos *crescente*, *decrescente* e *constante* são usados para descrever o comportamento de uma função em um intervalo, à medida que percorremos seu gráfico da esquerda para a direita. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 4.1.1 pode ser descrita como crescente à esquerda de $x = 0$, decrescente de $x = 0$ a $x = 2$, crescente de $x = 2$ a $x = 4$ e constante à direita de $x = 4$.

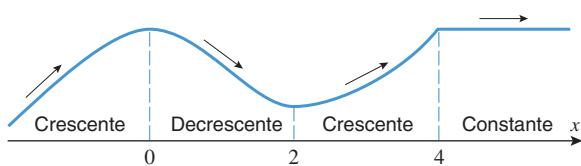


Figura 4.1.1

As definições de “crescente”, “decrecente” e “constante” descrevem o comportamento de uma função em um *intervalo* e não em um ponto. Em particular, não é inconsciente dizer que a função na Figura 4.1.1 é decrecente no intervalo $[0, 2]$ e crescente no intervalo $[2, 4]$.

A definição seguinte, ilustrada na Figura 4.1.2, expressa essas ideias intuitivas com precisão.

4.1.1 DEFINIÇÃO Seja f definida em um intervalo, e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo.

- f é **crescente** no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.
- f é **decrecente** no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.
- f é **constante** no intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$, quaisquer que sejam os pontos x_1 e x_2 .

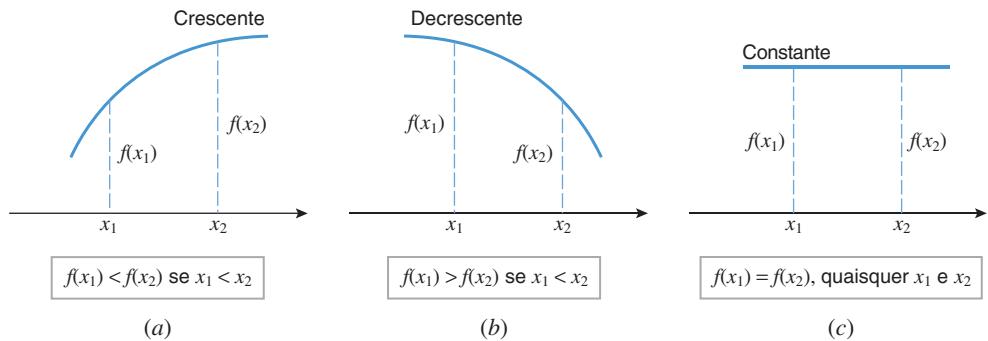


Figura 4.1.2

(a)

(b)

(c)

A Figura 4.1.3 sugere que uma função diferenciável f é crescente em qualquer intervalo onde cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação positiva, decrecente em qualquer intervalo onde cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação negativa e constante em qualquer intervalo onde cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação zero. Essa observação intuitiva sugere o seguinte teorema importante, que será provado na Seção 4.8.

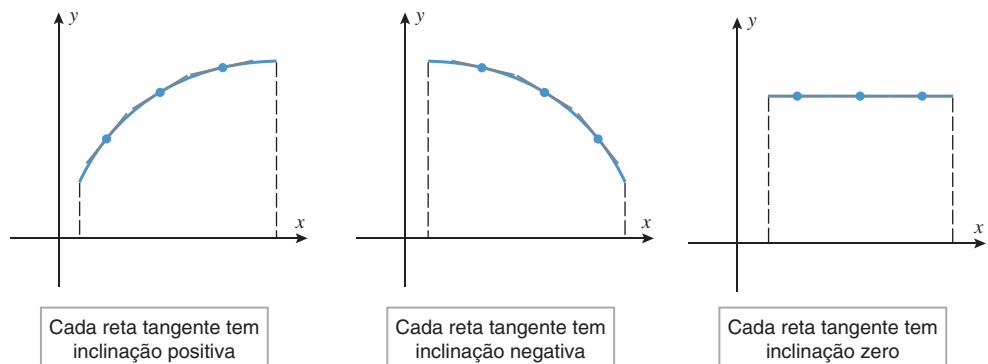


Figura 4.1.3

4.1.2 TEOREMA Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) .

- Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b) , então f é crescente em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b) , então f é decrecente em $[a, b]$.
- Se $f'(x) = 0$ com qualquer valor de x em (a, b) , então f é constante em $[a, b]$.

Observe que as condições sobre a derivada no Teorema 4.1.2 precisam ser verificadas somente no *interior* do intervalo $[a, b]$, mesmo que as conclusões do teorema sejam válidas no intervalo inteiro.

Embora esse teorema tenha sido enunciado para intervalos fechados, ele é aplicável a qualquer intervalo no qual f seja contínua. Por exemplo, se f for contínua em $[a, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ em cada x no intervalo $(a, +\infty)$, então f é crescente em $[a, +\infty)$; se f for contínua em $(-\infty, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ em $(-\infty, +\infty)$, então f é decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

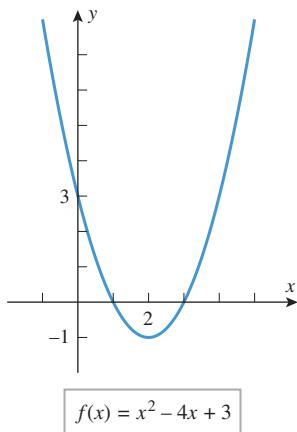


Figura 4.1.4

► Exemplo 1 Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

Solução O gráfico de f na Figura 4.1.4 sugere que f seja decrescente com $x \leq 2$ e crescente com $x \geq 2$. Para confirmar isso, vamos analisar o sinal de f' . A derivada de f é

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

Tem-se que

$$f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < 2$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x > 2$$

Uma vez que f é contínua em todos os pontos, deduz-se do comentário que segue o Teorema 4.1.2 que

f é decrescente em $(-\infty, 2]$

f é crescente em $[2, +\infty)$

Essas conclusões estão em conformidade com o gráfico de f na Figura 4.1.4. ◀

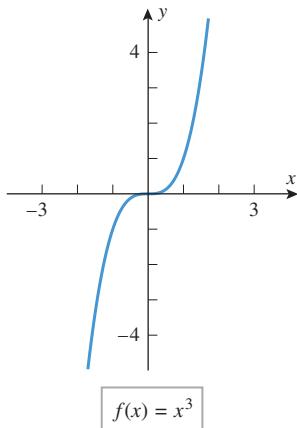


Figura 4.1.5

► Exemplo 2 Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

Solução O gráfico de f na Figura 4.1.5 sugere que ela é crescente em todo eixo x . Para confirmar isso, diferenciamos f obtendo $f'(x) = 3x^2$. Assim,

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x < 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x > 0$$

Uma vez que f é contínua em toda parte,

f é crescente em $(-\infty, 0]$

f é crescente em $[0, +\infty)$

Como f é crescente nos intervalos concatenados $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$, segue que f é crescente na união $(-\infty, +\infty)$ desses intervalos (ver Exercício 59). ◀

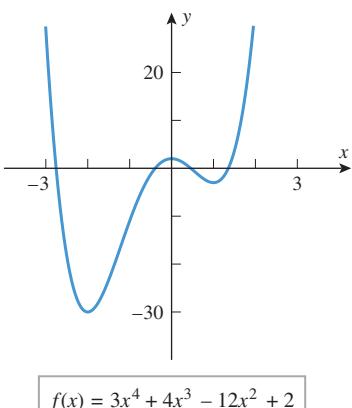


Figura 4.1.6

► Exemplo 3

- Use o gráfico de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ na Figura 4.1.6 para fazer uma conjectura sobre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.

- Use o Teorema 4.1.2 para verificar se sua conjectura estava correta.

Solução (a) O gráfico de f sugere que ela é decrescente se $x \leq -2$, crescente se $-2 \leq x \leq 0$, decrescente se $0 \leq x \leq 1$ e crescente se $x \geq 1$.

Solução (b) Diferenciando f , obtemos

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x + 2)(x - 1)$$

A análise do sinal de f' na Tabela 4.1.1 pode ser obtida usando o método dos pontos de teste. As conclusões da tabela confirmam a conjectura da parte (a). ◀

Tabela 4.1.1

INTERVALO	$(12x)(x+2)(x-1)$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < -2$	(-) (-) (-)	-	f é decrescente em $(-\infty, -2]$
$-2 < x < 0$	(-) (+) (-)	+	f é crescente em $[-2, 0]$
$0 < x < 1$	(+) (+) (-)	-	f é decrescente em $[0, 1]$
$1 < x$	(+) (+) (+)	+	f é crescente em $[1, +\infty)$

■ CONCAVIDADE

Embora o sinal da derivada de f revele onde o gráfico de f é crescente ou decrescente, ele não revela a direção da *curvatura* do gráfico. Por exemplo, o gráfico está crescendo de ambos os lados do ponto na Figura 4.1.7, mas à esquerda está curvado para cima (“segura água”) e à direita, para baixo (“derrama água”). Nos intervalos em que o gráfico de f tiver uma curvatura para cima, diremos que f é *côncava para cima*, e nos intervalos em que o gráfico tiver uma curvatura para baixo, diremos que f é *côncava para baixo*.

A Figura 4.1.8 sugere duas maneiras de caracterizar a concavidade de uma função diferenciável f em um intervalo aberto:

- f é côncava para cima em um intervalo aberto se as retas tangentes ao gráfico de f têm inclinações crescentes no intervalo, e côncava para baixo se têm inclinações decrescentes.
- f é côncava para cima em um intervalo aberto se o gráfico está sempre acima de suas retas tangentes no intervalo, e côncava para baixo se o gráfico está sempre abaixo de suas retas tangentes.

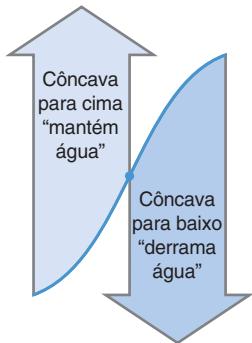
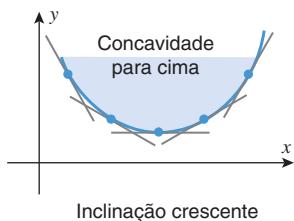


Figura 4.1.7



Nossa definição formal de “côncava para cima” e “côncava para baixo” corresponde à primeira dessas caracterizações.

4.1.3 DEFINIÇÃO Se f for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que f é *côncava para cima* no intervalo aberto se f' for crescente nesse intervalo, e dizemos que f é *côncava para baixo* no intervalo aberto se f' for decrescente nesse intervalo.

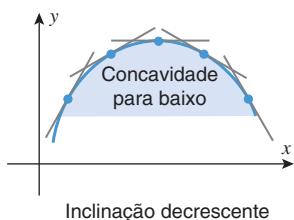


Figura 4.1.8

Como as inclinações das retas tangentes ao gráfico de uma função diferenciável f são os valores da função derivada f' de f , segue do Teorema 4.1.2 (aplicado a f' no lugar de f) que f' será crescente em intervalos nos quais f'' é positiva e decrescente em intervalos nos quais f'' é negativa. Assim, temos o teorema seguinte.

4.1.4 TEOREMA Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto.

- Se $f''(x) > 0$ em qualquer x do intervalo aberto, então f é côncava para cima nesse intervalo.
- Se $f''(x) < 0$ em qualquer x do intervalo aberto, então f é côncava para baixo nesse intervalo.

► **Exemplo 4** A Figura 4.1.4 sugere que a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é côncava para cima no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Isso é consistente com o Teorema 4.1.4, pois $f'(x) = 2x - 4$ e $f''(x) = 2$, de modo que

$$f''(x) > 0 \quad \text{no intervalo } (-\infty, +\infty)$$

Também, a Figura 4.1.5 sugere que $f(x) = x^3$ é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Isso está de acordo com o Teorema 4.1.4, pois $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$, portanto,

$$f''(x) < 0 \quad \text{se } x < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) > 0 \quad \text{se } x > 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ PONTOS DE INFLEXÃO

Vimos no Exemplo 4 e na Figura 4.1.5 que o gráfico de $f(x) = x^3$ muda de côncavo para baixo para côncavo para cima em $x = 0$. Os pontos em que uma curva muda de côncavo para cima para côncavo para baixo ou vice-versa são de interesse especial; portanto, existe uma terminologia associada.

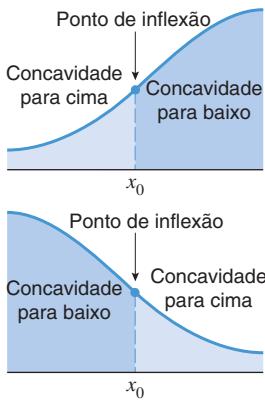


Figura 4.1.9

4.1.5 DEFINIÇÃO Se f for contínua em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 e se f mudar de concavidade no ponto $(x_0, f(x_0))$, então diremos que o ponto x_0 do domínio, ou o ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico, é um **ponto de inflexão** de f (Figura 4.1.9).

► **Exemplo 5** A Figura 4.1.10 mostra o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão e confirme que suas conclusões são consistentes com o gráfico.

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f , obtemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

A análise de sinais dessas derivadas é mostrada nas tabelas seguintes:

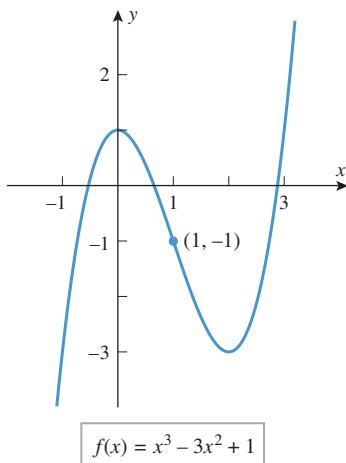


Figura 4.1.10

INTERVALO	$(3x)(x - 2)$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < 0$	$(-)(-)$	+	f é crescente em $(-\infty, 0]$
$0 < x < 2$	$(+)(-)$	-	f é decrescente em $[0, 2]$
$x > 2$	$(+)(+)$	+	f é crescente em $[2, +\infty)$

INTERVALO	$6(x - 1)$	$f''(x)$	CONCLUSÃO
$x < 1$	(-)	-	f é côncava para baixo em $(-\infty, 1)$
$x > 1$	(+)	+	f é côncava para cima em $(1, +\infty)$

A segunda tabela mostra que há um ponto de inflexão em $x = 1$, pois f muda de côncava para baixo para côncava para cima nesse ponto. O ponto de inflexão é $(1, f(1)) = (1, -1)$. Todas essas conclusões são consistentes com o gráfico de f . ◀

Poderíamos ter adivinhado, a partir da Figura 4.1.10, que a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ tem um ponto de inflexão em $x = 1$ sem precisar calcular as derivadas. Contudo, às vezes, as

mudanças de concavidade são tão sutis que as contas são essenciais para confirmar sua existência e identificar sua localização. Aqui temos um exemplo.

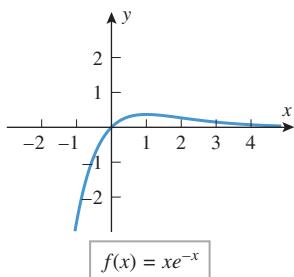


Figura 4.1.11

► **Exemplo 6** A Figura 4.1.11 sugere que a função $f(x) = xe^{-x}$ tem um ponto de inflexão, mas sua localização exata não é evidente a partir dessa figura. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão.

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f , obtemos (confira)

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

Lembrando que e^{-x} é positiva em todo x , a análise de sinais dessas derivadas é facilmente determinada:

INTERVALO	$(1-x)(e^{-x})$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < 1$	(+)(+)	+	f é crescente em $(-\infty, 1]$
$x > 1$	(-)(+)	-	f é decrescente em $[1, +\infty)$

INTERVALO	$(x-2)(e^{-x})$	$f''(x)$	CONCLUSÃO
$x < 2$	(-)(+)	-	f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$
$x > 2$	(+)(+)	+	f é côncava para cima em $(2, +\infty)$

A segunda tabela mostra que há um ponto de inflexão em $x = 2$, pois f muda de côncava para baixo para côncava para cima nesse ponto. Todas essas conclusões são consistentes com o gráfico de f . ◀

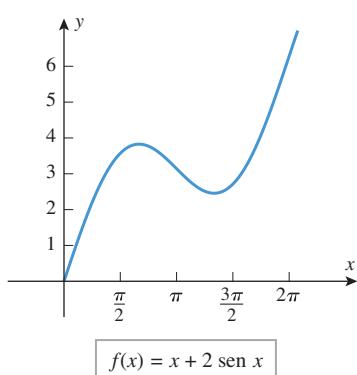


Figura 4.1.12

► **Exemplo 7** A Figura 4.1.12 mostra o gráfico da função $f(x) = x + 2 \sen x$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar onde f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão e confirme que suas conclusões são consistentes com o gráfico.

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f , obtemos

$$f'(x) = 1 + 2 \cos x$$

$$f''(x) = -2 \sen x$$

Como f' é uma função contínua, ela só pode mudar de sinal no intervalo $(0, 2\pi)$ em pontos em que $f'(x) = 0$ (por quê?). Esses valores são soluções da equação

$$1 + 2 \cos x = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Há duas soluções dessa equação no intervalo $(0, 2\pi)$, a saber, $x = 2\pi/3$ e $x = 4\pi/3$ (verifique). Analogamente, f'' é uma função contínua, logo suas mudanças de sinal no intervalo $(0, 2\pi)$ só podem ocorrer nos valores de x em que $f''(x) = 0$. Esses valores são soluções da equação

$$-2 \sen x = 0$$

Há uma única solução dessa equação no intervalo $(0, 2\pi)$, a saber, $x = \pi$. Com o auxílio desses “pontos de transição de sinal”, obtemos a análise de sinais mostrada nas tabelas seguintes:

Duas maneiras de determinar os sinais nas tabelas do Exemplo 7 são o método dos pontos de teste e as definições de seno e cosseno no círculo unitário.

INTERVALO	$f'(x) = 1 + 2 \cos x$	CONCLUSÃO
$0 < x < 2\pi/3$	+	f é crescente em $[0, 2\pi/3]$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	-	f é decrescente em $[2\pi/3, 4\pi/3]$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	f é crescente em $[4\pi/3, 2\pi]$

INTERVALO	$f''(x) = -2 \sin x$	CONCLUSÃO
$0 < x < \pi$	-	f é côncava para baixo em $(0, \pi)$
$\pi < x < 2\pi$	+	f é côncava para cima em $(\pi, 2\pi)$

A segunda tabela mostra que há um ponto de inflexão em $x = \pi$, pois f muda de côncava para baixo para côncava para cima nesse ponto. Todas essas conclusões são consistentes com o gráfico de f . ◀

Nos exemplos precedentes, os pontos de inflexão de f ocorreram nos pontos em que $f''(x) = 0$. Contudo, isso nem sempre é o caso. Aqui temos um exemplo específico.

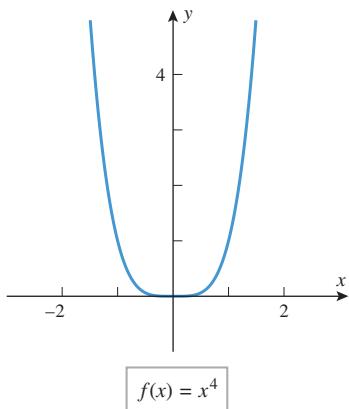


Figura 4.1.13

Dê um argumento para mostrar que a função $f(x) = x^4$ esboçada na Figura 4.1.13 é côncava para cima no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

► **Exemplo 8** Encontre os pontos de inflexão, se houver, de $f(x) = x^4$.

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f , obtemos

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Como $f''(x)$ é positiva com $x < 0$ e com $x > 0$, a função f é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Assim, não há uma mudança de concavidade e, portanto, nenhum ponto de inflexão em $x = 0$, embora tenhamos $f''(0) = 0$ (Figura 4.1.13). ◀

Veremos adiante que, se uma função f tiver um ponto de inflexão em $x = x_0$ e se $f''(x_0)$ existir, então $f''(x_0) = 0$. Também veremos, na Seção 4.3, que um ponto de inflexão também pode ocorrer onde $f''(x)$ não está definida.

■ PONTOS DE INFLEXÃO EM APLICAÇÕES

Os pontos de inflexão de uma função f são os pontos do gráfico de $y = f(x)$ nos quais as inclinações das retas tangentes mudam de crescente para decrescente ou vice-versa (Figura 4.1.14). Como a inclinação da reta tangente em um ponto do gráfico de $y = f(x)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x naquele ponto, podemos interpretar os pontos de inflexão da seguinte maneira:

Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva $y = f(x)$ em que a taxa de variação de y em relação a x muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

Essa é uma ideia útil, já que estamos lidando com uma taxa de variação de uma taxa de variação. Pode ajudar a entender essa ideia observar que os pontos de inflexão ocorrem em contextos mais familiares. Por exemplo, considere a afirmação: “O preço da gasolina subiu bastante durante a primeira metade do ano, mas desde então tem subido menos”. Se o preço

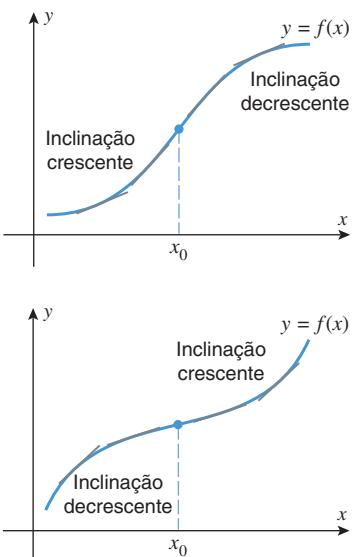


Figura 4.1.14

da gasolina for esboçado como uma função do tempo, essa afirmação sugere a existência de um ponto de inflexão no gráfico perto do meio do ano. (Por quê?) Para ter um exemplo mais visual, considere o frasco mostrado na Figura 4.1.15. Suponha que esteja sendo colocada água nele, de tal modo que o volume cresça a uma taxa constante em relação ao tempo t . Examinemos a taxa pela qual o nível y de água sobe em relação a t . Inicialmente, o nível y cresce lentamente por causa da base larga. Contudo, à medida que o diâmetro do frasco estreitar, a taxa pela qual o nível de água sobe irá aumentar até atingir o ponto mais estreito do gargalo. Desse ponto em diante, a taxa pela qual o nível de água sobe irá diminuir à medida que o gargalo alargar cada vez mais. Assim, o ponto mais estreito do gargalo é aquele em que a taxa de variação de y em relação a t passa de crescente para decrescente.

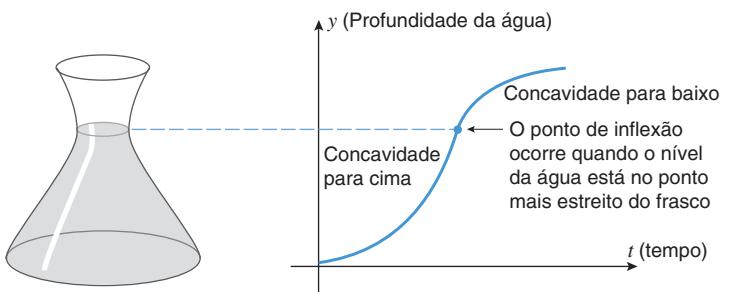


Figura 4.1.15

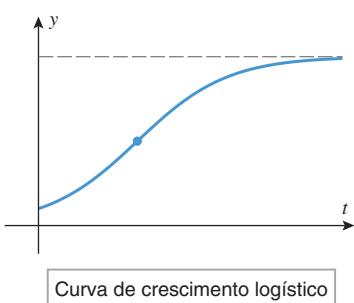


Figura 4.1.16

CURVAS LOGÍSTICAS

Quando uma população cresce em um ambiente no qual o espaço ou o alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de S, conforme a Figura 4.1.16. O cenário descrito por tal curva é o de uma população crescendo a princípio vagarosamente e, então, cada vez mais rápido à medida que cresce o número de indivíduos capazes de produzir descendentes. Porém, em um certo momento do tempo (onde ocorre o ponto de inflexão), os fatores ambientais começam a mostrar seu efeito e a taxa de crescimento começa a declinar uniformemente. Em um período prolongado de tempo, a população tende a um valor limite que representa o limite superior do número de indivíduos que o espaço ou o alimento pode sustentar. As curvas de crescimento populacional desse tipo são chamadas de *curvas de crescimento logístico*.

► **Exemplo 9** Iremos mostrar, em um capítulo posterior, que as curvas do crescimento logístico surgem de equações da forma

$$y = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} \quad (1)$$

onde y é a população no momento t ($t \geq 0$) e A , k e L são constantes positivas. Mostre que a Figura 4.1.17 descreve corretamente o gráfico dessa equação quando $A > 1$.

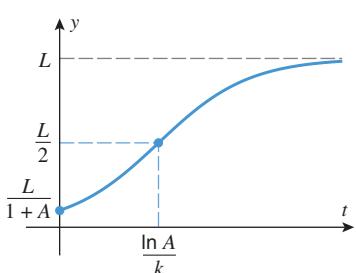


Figura 4.1.17

Solução Segue de (1) que, no instante $t = 0$, o valor de y é

$$y = \frac{L}{1 + A}$$

e segue de (1) e do fato de que $0 < e^{-kt} \leq 1$ com $t \geq 0$ que

$$\frac{L}{1 + A} \leq y < L \quad (2)$$

(verifique). Isso está de acordo com o gráfico da Figura 4.1.17. A assíntota horizontal em $y = L$ é confirmada pelo limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{L}{1 + 0} = L \quad (3)$$

Fisicamente, as Fórmulas (2) e (3) nos dizem que L é um limite superior do tamanho da população e que a população tende a esse limite com o tempo. Novamente, isso é consistente com o gráfico da Figura 4.1.17.

Para investigar os intervalos de crescimento e de decrescimento, a concavidade e os pontos de inflexão, vamos precisar das derivadas primeira e segunda de y em relação a t . Multiplicando ambos os lados da Equação (1) por $e^{kt}(1 + Ae^{-kt})$, podemos reescrever (1) como

$$ye^{kt} + Ay = Le^{kt}$$

Usando derivação implícita, podemos deduzir que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{L}y(L - y) \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{L^2}y(L - y)(L - 2y) \quad (5)$$

(Exercício 70). Como $k > 0$, $y > 0$ e $L - y > 0$, tem-se, a partir de (4), que $dy/dt > 0$ com qualquer t . Assim, y é crescente, o que está de acordo com a Figura 4.1.17.

Uma vez que $y > 0$ e $L - y > 0$, tem-se, a partir de (5), que

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &> 0 & \text{se } L - 2y > 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &< 0 & \text{se } L - 2y < 0 \end{aligned}$$

Assim, o gráfico de y versus t é côncavo para cima se $y < L/2$, côncavo para baixo se $y > L/2$ e tem um ponto de inflexão em $y = L/2$, tudo de acordo com a Figura 4.1.17.

Para encerrar, deixamos a cargo do leitor resolver a equação

$$\frac{L}{2} = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$$

em t para mostrar que o ponto de inflexão ocorre em

$$t = \frac{1}{k} \ln A = \frac{\ln A}{k} \quad \blacktriangleleft \quad (6)$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.1 (Ver página 244 para respostas.)

1. (a) Uma função f é crescente em (a, b) se _____ sempre que $a < x_1 < x_2 < b$.
 (b) Uma função f é decrescente em (a, b) se _____ sempre que $a < x_1 < x_2 < b$.
 (c) Uma função f é côncava para cima em (a, b) se f' é _____ em (a, b) .
 (d) Se $f''(a)$ existe e f tem um ponto de inflexão em $x = a$, então $f''(a)$ _____.
2. Seja $f(x) = 0,1(x^3 - 3x^2 - 9x)$. Então,

$$f'(x) = 0,1(3x^2 - 6x - 9) = 0,3(x + 1)(x - 3)$$

$$f''(x) = 0,6(x - 1)$$
 - (a) As soluções de $f'(x) = 0$ são $x = _____$.
 - (b) A função f é crescente no(s) intervalo(s) _____.
 - (c) A função f é côncava para baixo no(s) intervalo(s) _____.
 (d) _____ é um ponto de inflexão do gráfico de f .
3. Suponha que $f(x)$ tenha derivada $f'(x) = (x - 4)^2e^{-x/2}$. Então $f''(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)(x - 8)e^{-x/2}$.
 - (a) A função f é crescente no(s) intervalo(s) _____.
 - (b) A função f é côncava para cima no(s) intervalo(s) _____.
 - (c) A função f é côncava para baixo no(s) intervalo(s) _____.
4. Considere a afirmação: “O aumento do custo de vida desacelerou durante a primeira metade do ano”. Fazendo um gráfico do custo de vida versus o tempo para a primeira metade daquele ano, como essa afirmação será refletida no gráfico?

EXERCÍCIOS 4.1 Recurso Gráfico CAS
ENFOCANDO CONCEITOS

- Em cada parte, esboce o gráfico de uma função f com as propriedades indicadas e discuta os sinais de f' e de f'' .
 - A função f é côncava para cima e crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
 - A função f é côncava para baixo e crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
 - A função f é côncava para cima e decrescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
 - A função f é côncava para baixo e decrescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
- Em cada parte, esboce o gráfico de uma função f com as propriedades indicadas.
 - f é crescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para cima em $(0, +\infty)$.
 - f é crescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para baixo em $(0, +\infty)$.
 - f é decrescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para cima em $(0, +\infty)$.
 - f é decrescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para baixo em $(0, +\infty)$.
- Use o gráfico da equação $y = f(x)$ na figura abaixo para encontrar os sinais de dy/dx e d^2y/dx^2 nos pontos A , B e C .

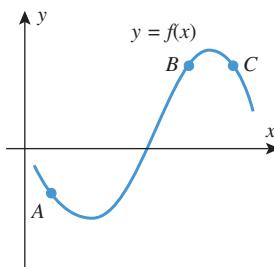


Figura Ex-3

- Use o gráfico da equação $y = f'(x)$ na Figura Ex-4 para encontrar os sinais de dy/dx e d^2y/dx^2 nos pontos A , B e C .
- Use o gráfico de $y = f''(x)$ na Figura Ex-5 para determinar as coordenadas x de todos os pontos de inflexão de f . Explique seu raciocínio.

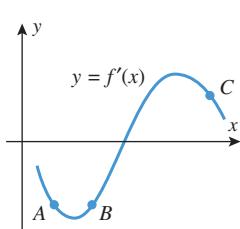


Figura Ex-4

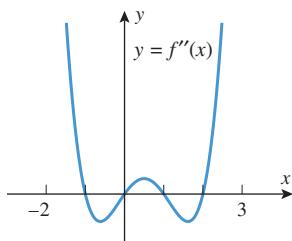


Figura Ex-5

- Use o gráfico de $y = f'(x)$ na figura a seguir para substituir a interrogação por $<$, $=$ ou $>$, conforme apropriado. Explique seu raciocínio.

- $f(0) ? f(1)$
- $f(1) ? f(2)$
- $f'(0) ? 0$
- $f'(1) ? 0$
- $f''(0) ? 0$
- $f''(2) ? 0$

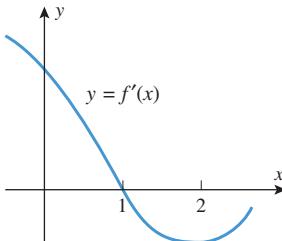


Figura Ex-6

- Em cada parte, use o gráfico de $y = f(x)$ na figura abaixo para encontrar a informação requisitada.
 - Encontre os intervalos nos quais f é crescente.
 - Encontre os intervalos nos quais f é decrescente.
 - Encontre os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.
 - Encontre os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.
 - Encontre todos os valores de x nos quais f tem um ponto de inflexão.

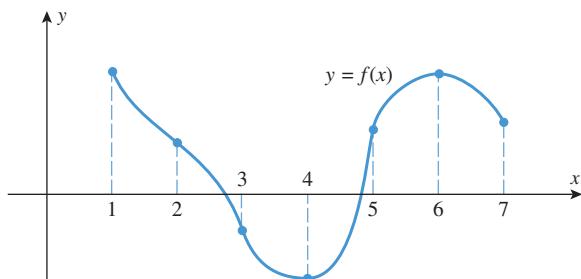


Figura Ex-7

- Use o gráfico do Exercício 7 para fazer uma tabela que mostre os sinais de f' e f'' nos intervalos $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$ e $(6, 7)$.

9-10 É dada uma tabela de sinais para as derivadas primeira e segunda de uma função f . Supondo que f seja contínua em toda parte, encontre: (a) os intervalos em que f é crescente, (b) os intervalos em que f é decrescente, (c) os intervalos abertos em que f é côncava para cima, (d) os intervalos abertos em que f é côncava para baixo e (e) as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. ■

INTERVALO	SINAL DE $f'(x)$	SINAL DE $f''(x)$
$x < 1$	-	+
$1 < x < 2$	+	+
$2 < x < 3$	+	-
$3 < x < 4$	-	-
$4 < x$	-	+

INTERVALO	SINAL DE $f'(x)$	SINAL DE $f''(x)$
$x < 1$	+	+
$1 < x < 3$	+	-
$3 < x$	+	+

11-14 Verdadeiro/Falso Suponha que f seja diferenciável em toda parte. Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

11. Se f for decrescente em $[0, 2]$, então $f(0) > f(1) > f(2)$.
12. Se $f'(1) > 0$, então f será crescente em $[0, 2]$.
13. Se f for crescente em $[0, 2]$, então $f'(1) > 0$.
14. Se f' for crescente em $[0, 1]$ e f' for decrescente em $[1, 2]$, então f tem uma inflexão em $x = 1$.

15-32 Encontre: (a) os intervalos nos quais f é crescente, (b) os intervalos nos quais f é decrescente, (c) os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima, (d) os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo e (e) as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. ■

15. $f(x) = x^2 - 3x + 8$
16. $f(x) = 5 - 4x - x^2$
17. $f(x) = (2x + 1)^3$
18. $f(x) = 5 + 12x - x^3$
19. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
20. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$
21. $f(x) = \frac{x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$
22. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$
23. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$
24. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$
25. $f(x) = (x^{2/3} - 1)^2$
26. $f(x) = x^{2/3} - x$
27. $f(x) = e^{-x^2/2}$
28. $f(x) = xe^{x^2}$
29. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 4}$
30. $f(x) = x^3 \ln x$
31. $f(x) = \arctg(x^2 - 1)$
32. $f(x) = \arcsen x^{2/3}$

33-38 Analise as funções trigonométricas f nos intervalos especificados indicando onde f é crescente, decrescente, côncava para cima, côncava para baixo e as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. Verifique se seus resultados estão em conformidade com o gráfico de f gerado por algum recurso computacional. ■

33. $f(x) = \sen x - \cos x$; $[-\pi, \pi]$
34. $f(x) = \sec x \tg x$; $(-\pi/2, \pi/2)$
35. $f(x) = 1 - \tg(x/2)$; $(-\pi, \pi)$
36. $f(x) = 2x + \cotg x$; $(0, \pi)$
37. $f(x) = (\sen x + \cos x)^2$; $[-\pi, \pi]$
38. $f(x) = \sen^2 2x$; $[0, \pi]$

ENFOCANDO CONCEITOS

39. Em cada parte, esboce uma curva contínua $y = f(x)$ com as propriedades indicadas.
 - (a) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) > 0$ com qualquer x
 - (b) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) < 0$ com $x < 2$, $f''(x) > 0$ com $x > 2$

- (c) $f(2) = 4$, $f''(x) < 0$ com $x \neq 2$ e
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty$

- 40.** Em cada parte esboce uma curva contínua $y = f(x)$ com as propriedades indicadas.
- (a) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) < 0$ com qualquer x
 - (b) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) > 0$ com $x < 2$, $f''(x) < 0$ com $x > 2$
 - (c) $f(2) = 4$, $f''(x) > 0$ com $x \neq 2$ e
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = +\infty$

41-46 Se f for crescente em um intervalo $[0, b]$, segue da Definição 4.1.1 que $f(0) < f(x)$ com qualquer x do intervalo $(0, b)$. Use esse resultado nesses exercícios. ■

41. Mostre que $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x$ se $x > 0$ e confirme a desigualdade com algum recurso gráfico computacional. [Sugestão: Mostre que $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{1+x}$ é crescente em $[0, +\infty]$.]
42. Mostre que $x < \tg x$ se $0 < x < \pi/2$ e confirme a desigualdade com algum recurso gráfico computacional. [Sugestão: Mostre que a função $f(x) = \tg x - x$ é crescente em $[0, \pi/2]$.]
43. Use um recurso gráfico computacional para fazer uma conjectura sobre os tamanhos relativos de x e $\sen x$ com $x \geq 0$ e prove sua conjectura.
44. Use um recurso gráfico para fazer uma conjectura sobre os tamanhos relativos de $1 - x^2/2$ e de $\cos x$ com $x \geq 0$ e prove sua conjectura. [Sugestão: Use o resultado do Exercício 43.]
45. (a) Mostre que $\ln(x+1) \leq x$ se $x \geq 0$.
 (b) Mostre que $\ln(x+1) \geq x - \frac{1}{2}x^2$ se $x \geq 0$.
 (c) Confirme as desigualdades em (a) e (b) com um recurso gráfico.
46. (a) Mostre que $e^x \geq 1 + x$ se $x \geq 0$.
 (b) Mostre que $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ se $x \geq 0$.
 (c) Confirme as desigualdades de (a) e (b) com algum recurso gráfico computacional.

47-48 Use um recurso computacional para gerar os gráficos de f' e f'' no intervalo indicado; use os gráficos para estimar as coordenadas x dos pontos de inflexão de f , os intervalos nos quais f é côncava para cima ou para baixo e os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente. Verifique suas estimativas fazendo o gráfico de f . ■

47. $f(x) = x^4 - 24x^2 + 12x$, $-5 \leq x \leq 5$
48. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $-5 \leq x \leq 5$
- 49-50** Use um CAS para encontrar f'' e para aproximar as coordenadas x dos pontos de inflexão até a sexta casa decimal. Confirme que sua resposta está coerente com o gráfico de f . ■
49. $f(x) = \frac{10x - 3}{3x^2 - 5x + 8}$
50. $f(x) = \frac{x^3 - 8x + 7}{\sqrt{x^2 + 1}}$
51. Use a Definição 4.1.1 para provar que $f(x) = x^2$ é crescente em $[0, +\infty)$.
52. Use a Definição 4.1.1 para provar que $f(x) = 1/x$ é decrescente em $(0, +\infty)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

53-54 Em cada parte, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se falsa, encontre funções para quais a afirmação não é válida.

53. (a) Se f e g forem crescentes em um intervalo, então $f + g$ também será.

(b) Se f e g forem crescentes em um intervalo, então $f \cdot g$ também será.

54. (a) Se f e g forem côncavas para cima em um intervalo, então $f + g$ também será.

(b) Se f e g forem côncavas para cima em um intervalo, então $f \cdot g$ também será.

55. Em cada parte, encontre funções f e g que sejam crescentes em $(-\infty, +\infty)$ e com as quais $f - g$ tem a propriedade indicada.

(a) $f - g$ é decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

(b) $f - g$ é constante em $(-\infty, +\infty)$.

(c) $f - g$ é crescente em $(-\infty, +\infty)$.

56. Em cada parte, encontre funções f e g que sejam positivas e crescentes em $(-\infty, +\infty)$ e com as quais f/g tem a propriedade indicada.

(a) f/g é decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

(b) f/g é constante em $(-\infty, +\infty)$.

(c) f/g é crescente em $(-\infty, +\infty)$.

57. (a) Prove que o polinômio cúbico geral

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

tem exatamente um ponto de inflexão.

(b) Prove que, se o polinômio cúbico tiver três cortes com o eixo x , o ponto de inflexão ocorre no valor médio dos cortes.

(c) Use o resultado de (b) para encontrar o ponto de inflexão do polinômio cúbico $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ e verifique seu resultado usando f'' para determinar onde f é côncava para cima e para baixo.

58. A partir do Exercício 57, o polinômio $f(x) = x^3 + bx^2 + 1$ tem um ponto de inflexão. Use um recurso gráfico computacional para tirar conclusões sobre o papel da constante b na localização do ponto de inflexão. Use f'' para explicar o que observou graficamente.

59. Use a Definição 4.1.1 para provar que:

(a) Se f for crescente nos intervalos $(a, c]$ e $[c, b)$, então f será crescente em (a, b) .

(b) Se f for decrescente nos intervalos $(a, c]$ e $[c, b)$, então f será decrescente em (a, b)

60. Use a parte (a) do Exercício 59 para mostrar que $f(x) = x + \sin x$ é crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

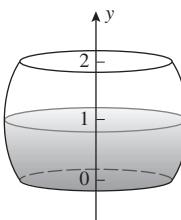
61. Use a parte (b) do Exercício 59 para mostrar que $f(x) = \cos x - x$ é decrescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

62. Seja $y = 1/(1 + x^2)$. Encontre os valores de x nos quais y está crescendo e decrescendo mais rapidamente.

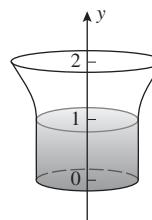
ENFOCANDO CONCEITOS

63-66 Suponha que água esteja fluindo a uma taxa constante para dentro dos frascos mostrados. Faça um esboço grosso do gráfico do nível de água y versus tempo t . Assegure-se de que o esboço mostre onde o gráfico é côncavo para baixo e para cima e destaque as coordenadas y dos pontos de inflexão.

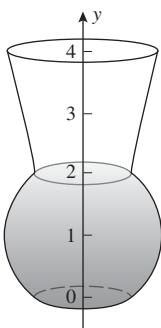
63.



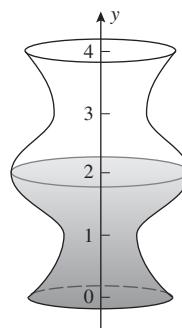
64.



65.



66.



67. Suponha que uma população y cresça de acordo com o modelo logístico dado pela Fórmula (1).

(a) Qual é a taxa de crescimento de y em $t = 0$?

(b) Descreva como a taxa de crescimento de y varia com o tempo.

(c) Em que momento a população cresce mais rapidamente?

68. Suponha que o número de indivíduos no instante t de uma certa população selvagem seja dado por

$$N(t) = \frac{340}{1 + 9(0,77)^t}, \quad t \geq 0$$

onde t é dado em anos. Use um recurso gráfico para estimar o ano em que o tamanho da população está crescendo mais rapidamente.

69. Suponha que a disseminação de um vírus de gripe em um campus universitário seja modelado pela função

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9t}}$$

onde $y(t)$ é o número de estudantes infectados no instante t (dado em dias, começando em $t = 0$). Use um recurso gráfico para estimar o dia em que o vírus está sendo disseminado mais rapidamente.

70. O modelo de crescimento logístico dado na Fórmula (1) é equivalente a

$$ye^{kt} + Ay = Le^{kt}$$

em que y é a população no instante t ($t \geq 0$) e A , k e L são constantes positivas. Use derivação implícita para estabelecer que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{L}y(L - y)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{L^2}y(L - y)(L - 2y)$$

71. Supondo que A , k e L sejam constantes positivas, verifique que o gráfico de $y = L/(1 + Ae^{-kt})$ tem um ponto de inflexão em $(\frac{1}{k} \ln A, \frac{1}{2}L)$.

72. **Texto** Uma tormenta que se aproxima provoca uma queda na temperatura. Apresente uma afirmação que indica que há um ponto de inflexão no gráfico da temperatura *versus* tempo. Explique como a existência de um ponto de inflexão decorre da afirmação.

73. **Texto** Explique o que a análise de sinais de $f'(x)$ e $f''(x)$ revela sobre o gráfico de $y = f(x)$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 4.1

1. (a) $f(x_1) < f(x_2)$ (b) $f(x_1) > f(x_2)$ (c) crescente (d) $= 0$ 2. (a) $-1, 3$ (b) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ (c) $(-\infty, 1)$ (d) $(1; -1, 1)$
 3. (a) $(-\infty, +\infty)$ (b) $(4, 8)$ (c) $(-\infty, 4), (8, +\infty)$ 4. O gráfico é crescente e côncavo para baixo.

4.2 ANÁLISE DE FUNÇÕES II: EXTREMOS RELATIVOS; GRÁFICOS DE POLINÔMIOS

Nesta seção, desenvolveremos métodos para encontrar os pontos altos e baixos do gráfico de uma função e discutiremos procedimentos para analisar os gráficos de polinômios.

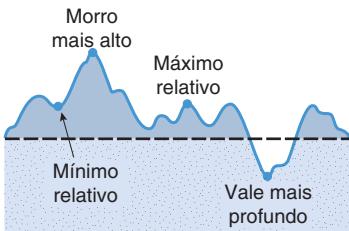


Figura 4.2.1

MÁXIMOS MÍNIMOS E RELATIVOS

Se imaginarmos o gráfico de uma função como uma cordilheira bidimensional com morros e vales, então o topo dos morros e o fundo dos vales serão chamados *máximos e mínimos relativos*, respectivamente (Figura 4.2.1). Os máximos e os mínimos relativos são os pontos mais altos e mais baixos em sua *vizinhança próxima*. Observe que nem o máximo relativo é necessariamente o ponto mais alto, nem o mínimo relativo é o ponto mais baixo – eles são tão somente pontos altos e baixos *relativos* à vizinhança imediata. Essas ideias estão relacionadas na seguinte definição.

4.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f tem um **máximo relativo** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ em cada x no intervalo. Analogamente, diz-se que f tem um **mínimo relativo** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ em cada x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0 , diz-se que f tem um **extremo relativo** em x_0 .

► **Exemplo 1** Podemos ver na Figura 4.2.2 que:

- $f(x) = x^2$ tem um mínimo relativo em $x = 0$, mas não máximos relativos.
- $f(x) = x^3$ não tem extremos relativos.
- $f(x) = x^3 - 3x + 3$ tem um máximo relativo em $x = -1$ e um mínimo relativo em $x = 1$.
- $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ tem mínimos relativos em $x = -1$ e $x = 2$ e um máximo relativo em $x = 1$.

- $f(x) = \cos x$ tem máximos relativos em todos os múltiplos pares de π e mínimos relativos em todos os múltiplos ímpares de π . ◀

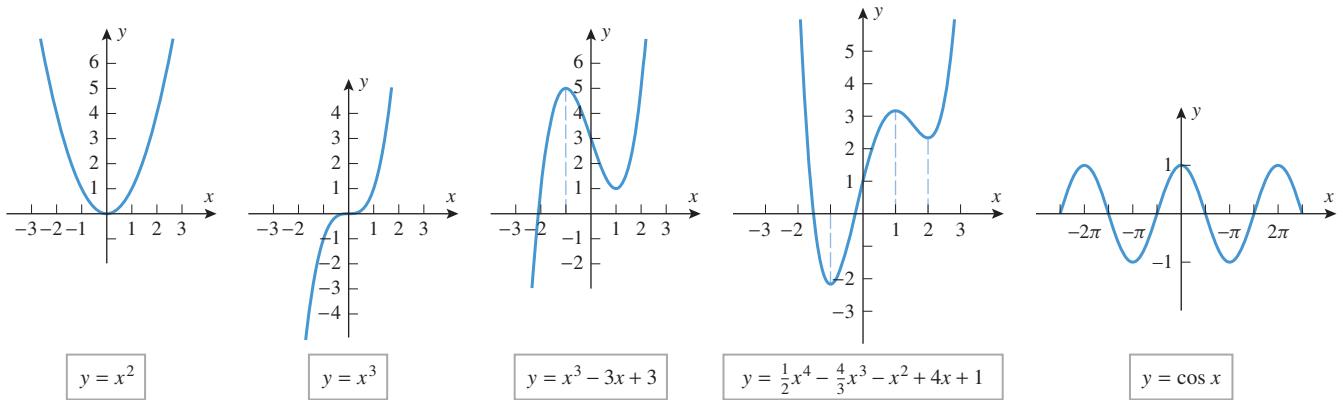
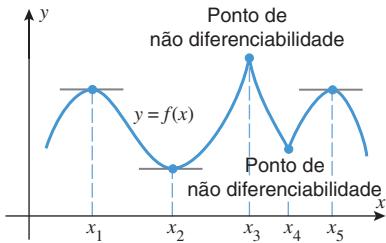


Figura 4.2.2

Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

Os extremos relativos das cinco funções do Exemplo 1 ocorrem em pontos nos quais os gráficos das funções têm retas tangentes horizontais. A Figura 4.2.3 ilustra que um extremo relativo também pode ocorrer em um ponto onde a função não é diferenciável. Em geral, definimos um **ponto crítico** de uma função f como um ponto do domínio de f em que o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal ou f não é diferenciável. Para distinguir entre os dois tipos de pontos críticos, dizemos que x é um **ponto estacionário** de f se $f'(x) = 0$. O teorema a seguir, cuja prova aparece no Apêndice D, afirma que os pontos críticos de uma função constituem a coleção completa dos candidatos a extremos relativos do interior do domínio da função.

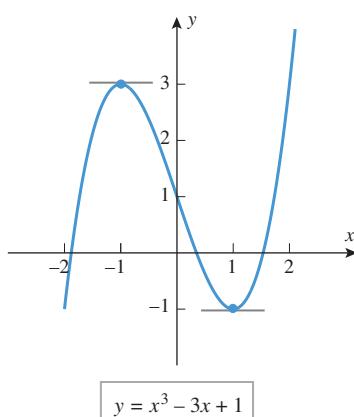


Figura 4.2.4

4.2.2 TEOREMA Suponha que f seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 . Se f tiver um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ será um ponto crítico de f ; assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou f não é diferenciável em x_0 .

► **Exemplo 2** Encontre todos os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Solução A função f , por ser um polinômio, é diferenciável em toda parte; portanto, seus pontos críticos são todos estacionários. Para encontrar esses pontos, devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Como

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

concluímos que os pontos críticos ocorrem em $x = -1$ e $x = 1$. Isso é consistente com o gráfico de f na Figura 4.2.4. ◀

► **Exemplo 3** Encontre todos os pontos críticos de $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$.

Solução A função f é contínua em toda parte e sua derivada é

$$f'(x) = 5x^{2/3} - 10x^{-1/3} = 5x^{-1/3}(x-2) = \frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$$

Qual é o número máximo de pontos críticos que pode ter um polinômio de grau n ? Explique por quê.

Vemos, então, que $f'(x) = 0$ se $x = 2$ e $f'(x)$ não está definida em $x = 0$. Assim, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos de f e $x = 2$ é um ponto estacionário. Isso é consistente com o gráfico de f mostrado na Figura 4.2.5. ◀

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Alguns recursos gráficos podem ter dificuldades em produzir partes do gráfico da Figura 4.2.5 por causa dos expoentes fracionários. Se esse for seu caso, produza o gráfico da função

$$y = 3(|x|/x)|x|^{5/3} - 15|x|^{2/3}$$

que é equivalente a $f(x)$ com $x \neq 0$. Esse método é explicado com mais detalhes no Apêndice A.

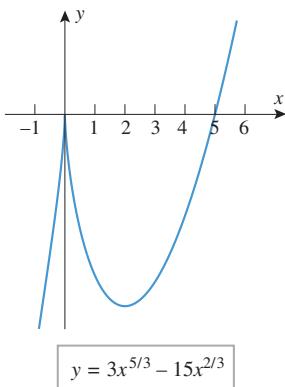


Figura 4.2.5

■ TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

O Teorema 4.2.2 afirma que os extremos relativos devem ocorrer em pontos críticos, mas *não* diz que *em cada* ponto crítico deve ocorrer um extremo relativo. Por exemplo, para os oito pontos críticos na Figura 4.2.6, ocorrem extremos relativos em cada ponto x_0 da linha superior e em nenhum ponto x_0 da linha inferior. Além disso, nos pontos críticos da primeira linha, as derivadas têm sinais opostos dos dois lados de x_0 , enquanto nos pontos críticos da segunda linha, os sinais das derivadas são os mesmos de ambos os lados. Assim, podemos intuir que:

Uma função f tem um extremo relativo naqueles pontos críticos em que f' troca de sinal.

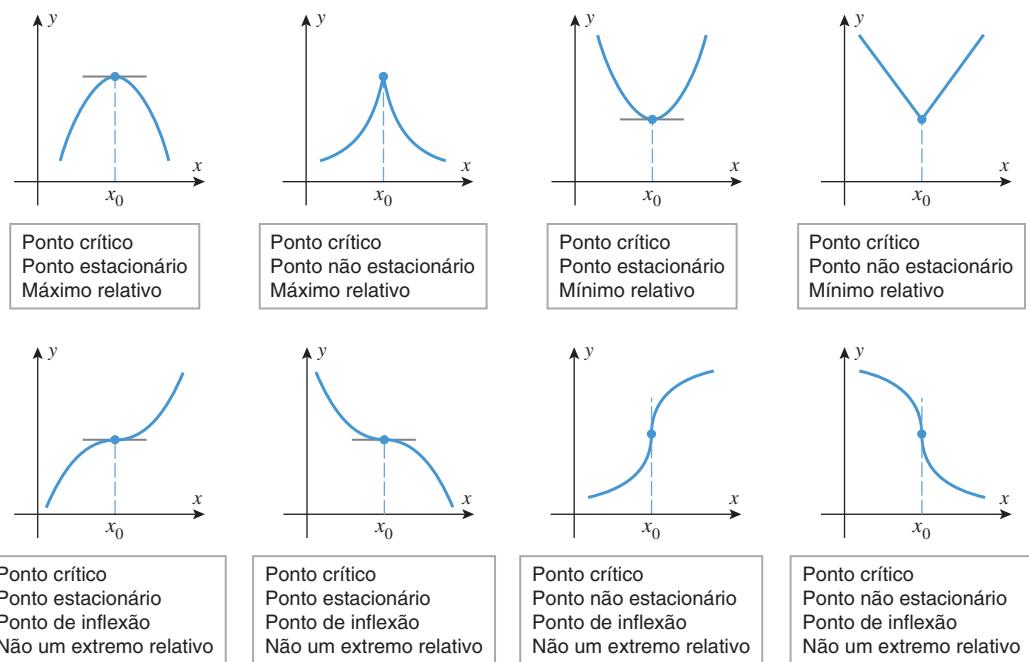


Figura 4.2.6

Podemos, de fato, levar isso um passo adiante. Nos dois máximos relativos da Figura 4.2.6, a derivada é positiva à esquerda e negativa à direita; e nos dois mínimos relativos, a derivada é negativa à esquerda e positiva à direita. Isso tudo está resumido mais precisamente no teorema seguinte.

Informalmente, as partes (a) e (b) do Teorema 4.2.3 nos dizem que, para uma função contínua, os máximos relativos ocorrem em pontos críticos onde a derivada troca de + para -; e os mínimos relativos, em pontos críticos onde a derivada troca de - para +.

Use o teste da derivada primeira para confirmar o comportamento de cada gráfico da Figura 4.2.6 em x_0 .

4.2.3 TEOREMA (Teste da Derivada Primeira) Suponha f contínua em um ponto crítico x_0 .

- Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um máximo relativo em x_0 .
- Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um mínimo relativo em x_0 .
- Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f não tem extremo relativo em x_0 .

DEMONSTRAÇÃO Provaremos (a), deixando (b) e (c) como exercícios. Estamos supondo que $f'(x) > 0$ no intervalo (a, x_0) e que $f'(x) < 0$ no intervalo (x_0, b) , e queremos mostrar que

$$f(x_0) \geq f(x)$$

em cada x no intervalo (a, b) . Contudo, as duas hipóteses, junto ao Teorema 4.1.2 e à nota da margem, implicam que f é crescente no intervalo $(a, x_0]$ e decrescente no intervalo $[x_0, b)$. Assim, $f(x_0) \geq f(x)$ em cada x em (a, b) , com igualdade valendo somente no ponto x_0 . ■

► Exemplo 4 Mostramos, no Exemplo 3, que a função $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$ tem pontos críticos em $x = 0$ e em $x = 2$. A Figura 4.2.5 sugere que f tem um máximo relativo em $x = 0$ e um mínimo relativo em $x = 2$. Confirme isso usando o teste da derivada primeira.

Solução Mostramos no Exemplo 3 que

$$f'(x) = \frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$$

Uma análise de sinais dessa derivada está na Tabela 4.2.1. O sinal de f' muda de + para - em $x = 0$, de modo que ocorre um máximo relativo nesse ponto. O sinal muda de - para + em $x = 2$, de modo que ocorre um mínimo relativo nesse ponto. ◀

TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Há um outro teste para extremos relativos que tem por base a observação geométrica seguinte: uma função f tem um máximo relativo em um ponto estacionário se o gráfico de f for côncavo para baixo em um intervalo aberto contendo aquele ponto estacionário e tem um mínimo relativo se for côncavo para cima (Figura 4.2.7).

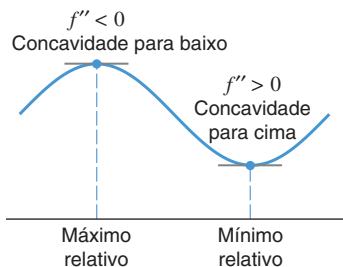


Figura 4.2.7

4.2.4 TEOREMA (Teste da Derivada Segunda) Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0 .

- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0 .
- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0 .
- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo em x_0 ou nenhum dos dois.

O teste da derivada segunda costuma ser mais fácil de aplicar do que o da derivada primeira. No entanto, o teste da derivada primeira pode ser usado em qualquer ponto crítico de uma função contínua, enquanto que o da derivada segunda só pode ser aplicado em pontos estacionários nos quais existir a derivada segunda.

Provaremos (a) e (c), deixando (b) como exercício.

DEMONSTRAÇÃO (a) Estamos supondo que $f'(x_0) = 0$ e que $f''(x_0) > 0$, e queremos mostrar que f tem um mínimo relativo em x_0 . Expressando $f''(x_0)$ como um limite e usando as duas condições dadas, obtemos

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Isso implica que, com x suficientemente próximo, mas diferente de x_0 , temos

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \quad (1)$$

Assim, existem um intervalo aberto que se estende à esquerda de x_0 e um intervalo aberto que se estende à direita de x_0 em que (1) é válido. No intervalo aberto que se estende à esquerda, o denominador em (1) é negativo, portanto, $f'(x) < 0$; e no intervalo aberto que se estende à direita, o denominador é positivo, portanto, $f'(x) > 0$. Agora, segue da parte (b) do teste da derivada primeira (Teorema 4.2.3) que f tem um mínimo relativo em x_0 .

DEMONSTRAÇÃO (c) Para provar essa parte do teorema, basta fornecer funções para as quais $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ em algum ponto x_0 , mas com uma delas tendo um mínimo relativo em x_0 , uma outra tendo um máximo relativo em x_0 e uma última nem máximo nem mínimo relativo em x_0 . Deixamos a cargo do leitor mostrar que três tais funções são $f(x) = x^4$ (mínimo relativo em $x = 0$), $f(x) = -x^4$ (máximo relativo em $x = 0$) e $f(x) = x^3$ (nem máximo relativo nem mínimo relativo em $x = 0$). ■

► **Exemplo 5** Encontre os extremos relativos de $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Solução Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x + 1)(x - 1) \\ f''(x) &= 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

Resolvendo $f'(x) = 0$, obtemos os pontos estacionários $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. Como mostramos na tabela a seguir, podemos concluir, pelo teste da derivada segunda, que f tem um máximo relativo em $x = -1$ e um mínimo relativo em $x = 1$.

PONTO ESTACIONÁRIO	$30x(2x^2 - 1)$	$f''(x)$	TESTE DA DERIVADA SEGUNDA
$x = -1$	-30	-	f tem um máximo relativo
$x = 0$	0	0	Inconclusivo
$x = 1$	30	+	f tem um mínimo relativo

O teste é inconclusivo em $x = 0$; portanto, tentemos o teste da derivada primeira nesse ponto. Uma análise de sinais de f' é dada na tabela seguinte:

INTERVALO	$15x^2(x + 1)(x - 1)$	$f'(x)$
$-1 < x < 0$	(+)(+)(-)	-
$0 < x < 1$	(+)(+)(-)	-

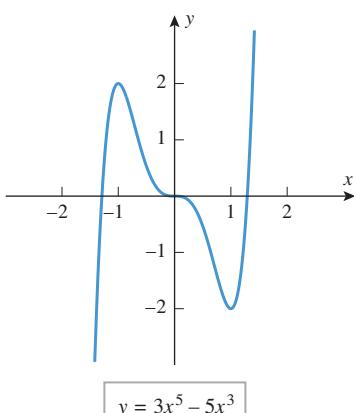


Figura 4.2.8

Como não há mudança de sinal de f' em $x = 0$, não ocorre nem um máximo relativo nem um mínimo relativo nesse ponto. Tudo isso é consistente com o gráfico de f mostrado na Figura 4.2.8. ▲

■ IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DA MULTIPLICIDADE

Nosso objetivo final nesta seção é delinear um procedimento geral que possa ser usado para analisar e traçar o gráfico de polinômios. Para isso, será útil entender como o gráfico de um polinômio se comporta na vizinhança de suas raízes. Por exemplo, seria bom saber qual propriedade do polinômio no Exemplo 5 produziu o ponto de inflexão com tangência horizontal na raiz $x = 0$.

Lembre que uma raiz $x = r$ de um polinômio $p(x)$ tem **multiplicidade m** se $(x - r)^m$ dividir $p(x)$, mas $(x - r)^{m+1}$ não dividir. Uma raiz de multiplicidade 1 é denominada **raiz simples**. A Figura 4.2.9 e o próximo teorema mostram que o comportamento de um polinômio na vizinhança de uma raiz real é determinado pela multiplicidade dessa raiz (a prova será omitida).

4.2.5 IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DA MULTIPLICIDADE Suponha que $p(x)$ seja um polinômio com uma raiz de multiplicidade m em $x = r$.

- (a) Se m for par, então o gráfico de $y = p(x)$ será tangente ao eixo x em $x = r$, mas não cruzará o eixo x nesse ponto nem terá um ponto de inflexão nesse ponto.
- (b) Se m for ímpar e maior do que 1, então o gráfico será tangente ao eixo x em $x = r$, cruzará o eixo x nesse ponto e terá um ponto de inflexão nesse ponto.
- (c) Se $m = 1$ (de modo que a raiz é simples), então o gráfico não será tangente ao eixo x em $x = r$, cruzará o eixo x nesse ponto e poderá ou não ter um ponto de inflexão nesse ponto.

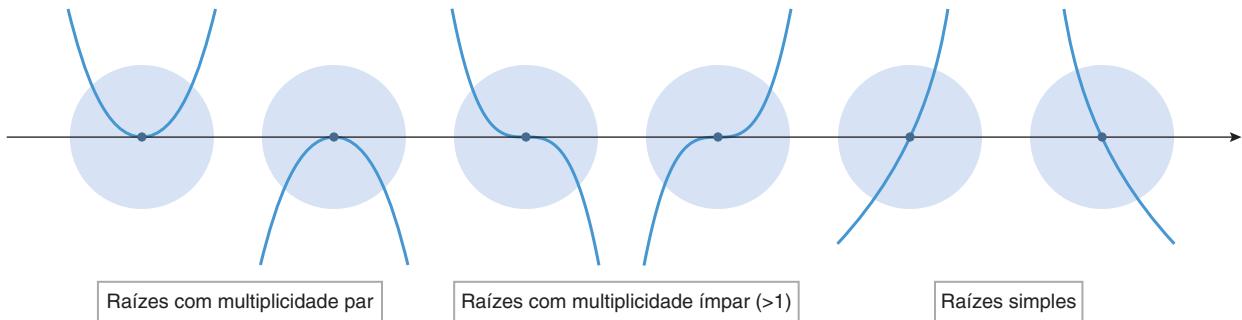


Figura 4.2.9

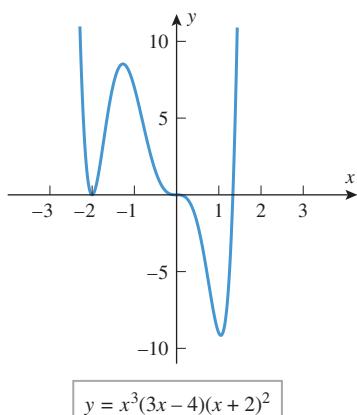


Figura 4.2.10

► **Exemplo 6** Faça uma conjectura sobre o comportamento do gráfico de

$$y = x^3(3x - 4)(x + 2)^2$$

na vizinhança de seus cortes com o eixo x e verifique sua conjectura gerando o gráfico.

Solução Os cortes com o eixo x ocorrem em $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$ e $x = -2$. A raiz $x = 0$ tem multiplicidade 3, que é ímpar; assim, naquele ponto, o gráfico deve ser tangente ao eixo x , cruzá-lo e ter um ponto de inflexão. A raiz $x = -2$ tem multiplicidade 2, que é par; assim, o gráfico deve ser tangente ao eixo x , mas não deve cruzá-lo. A raiz $x = \frac{4}{3}$ é simples, logo a curva deve cruzar o eixo x sem ser tangente. Tudo isso está de acordo com o gráfico da Figura 4.2.10. ◀

■ ANÁLISE DE POLINÔMIOS

Historicamente, a expressão “esboçar uma curva” significava usar o Cálculo para ajudar a desenhar o gráfico de uma função à mão: o objetivo era o gráfico em si. Como agora os gráficos podem ser produzidos com grande precisão por meio de calculadoras e computadores, mudou o propósito de esboçar uma curva. Atualmente, já partimos muitas vezes de um gráfico produzido por algum recurso gráfico, e só então passamos a “esboçar a curva” para identificar as características importantes do gráfico que o recurso possa ter omitido. Assim, o objetivo de esboçar curvas não é mais o gráfico em si, mas a informação que ele revela sobre a função.

Dentre as funções mais simples a serem esboçadas e analisadas estão os polinômios. Suas características significativas são a simetria, os cortes com os eixos, os extremos relativos, os pontos de inflexão e o comportamento final, ou seja, quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$. A Figura 4.2.11 mostra os gráficos de quatro polinômios em x típicos. Os gráficos na Figura 4.2.11 têm propriedades comuns a todos os polinômios:

- O domínio natural de um polinômio é $(-\infty, +\infty)$.
- Os polinômios são contínuos em toda parte.
- Os polinômios são diferenciáveis em toda parte, de modo que seus gráficos não têm bicos ou retas tangentes verticais.
- O gráfico de um polinômio não constante sempre cresce ou decresce sem cota quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$. Isso ocorre porque o limite de um polinômio não constante quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ é sempre $\pm\infty$, dependendo do sinal do termo de maior grau e se o polinômio é de grau par ou ímpar [ver Fórmulas (17) e (18) da Seção 1.3 e a discussão a esse respeito].
- O gráfico de um polinômio de grau $n (> 2)$ tem no máximo n cortes com o eixo x , no máximo $n - 1$ extremos relativos e no máximo $n - 2$ pontos de inflexão. Isso ocorre porque os cortes com o eixo x , os extremos relativos e os pontos de inflexão de um polinômio $p(x)$ estão entre as soluções reais das equações $p(x) = 0$, $p'(x) = 0$ e $p''(x) = 0$, e os polinômios dessas equações têm grau n , $n - 1$ e $n - 2$, respectivamente. Assim, por exemplo, o gráfico de um polinômio quadrático tem no máximo dois cortes com o eixo x , um extremo relativo e nenhum ponto de inflexão; e o gráfico de um polinômio cúbico tem no máximo três cortes com o eixo x , dois extremos relativos e um ponto de inflexão.

Para cada um dos gráficos na Figura 4.2.11, conte o número de cortes com o eixo x , os extremos relativos e os pontos de inflexão e confirme se sua conta é consistente com o grau do polinômio.

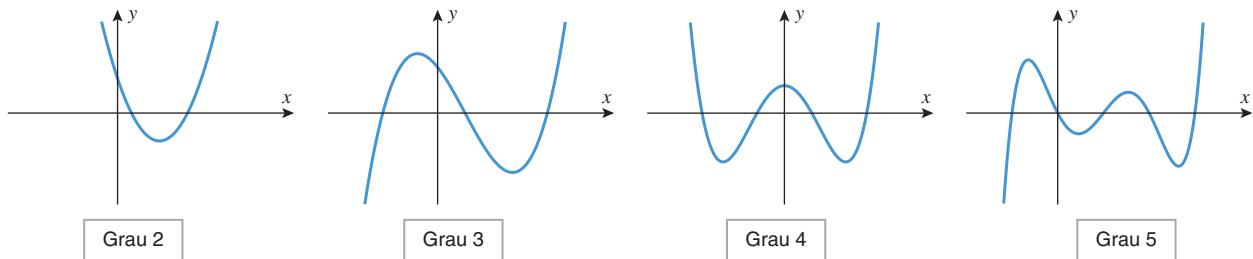
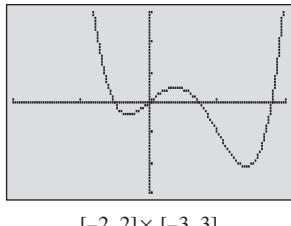


Figura 4.2.11



$$y = 3x^4 - 6x^3 + 2x$$

Figura 4.2.12

► **Exemplo 7** A Figura 4.2.12 mostra o gráfico de

$$y = 3x^4 - 6x^3 + 2x$$

produzido por uma calculadora gráfica. Confirme que o gráfico não está omitindo características significativas.

Solução Podemos ter certeza de que o gráfico mostra todas as características significativas do polinômio porque o polinômio tem grau 4 e podemos identificar quatro raízes, três

extremos relativos e dois pontos de inflexão. Além disso, o gráfico sugere o comportamento correto quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - 6x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 6x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 8** Esboce o gráfico da equação

$$y = x^3 - 3x + 2$$

e identifique a localização dos cortes com os eixos coordenados, os extremos relativos e os pontos de inflexão.

Solução A seguinte análise fornecerá a informação necessária para esboçar o gráfico.

Uma revisão de fatoração de polinômios é dada no Apêndice C.

- *Cortes com o eixo x:* Fatorando o polinômio, obtemos

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$$

que nos diz que os cortes com o eixo x ocorrem em $x = -2$ e $x = 1$.

- *Cortes com o eixo y:* Tomando $x = 0$, obtemos $y = 2$.

- *Comportamento final:* Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

de modo que o gráfico cresce sem cota quando $x \rightarrow +\infty$ e decresce sem cota quando $x \rightarrow -\infty$.

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

- *Cresce, decresce, extremos relativos, pontos de inflexão:* Na Figura 4.2.13, temos uma análise de sinais das derivadas primeira e segunda e uma indicação de seu significado geométrico. Temos pontos estacionários em $x = -1$ e $x = 1$. Como o sinal de dy/dx muda de + para - em $x = -1$, ocorre um máximo relativo em $x = -1$, e como muda de - para + em $x = 1$, ocorre um mínimo relativo em $x = 1$. O sinal de d^2y/dx^2 troca de - para + em $x = 0$; portanto $x = 0$ é um ponto de inflexão.

- *Esboço final:* A Figura 4.2.14 mostra o esboço final, identificando as coordenadas dos cortes com os eixos, os extremos relativos e os pontos de inflexão. ◀

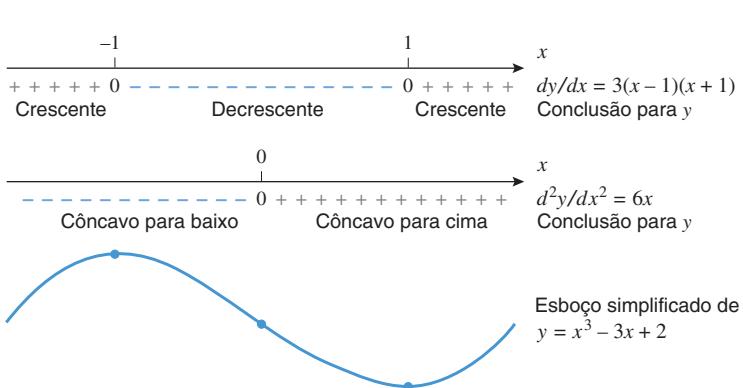


Figura 4.2.13

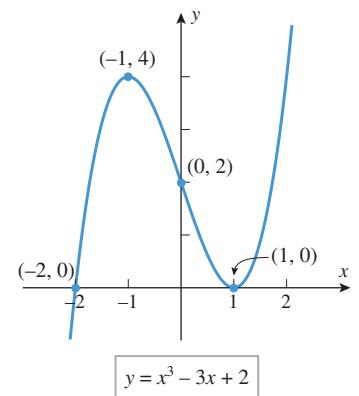


Figura 4.2.14

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.2 (Ver página 254 para respostas.)

- Uma função f tem um máximo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto contendo x_0 em que $f(x)$ é _____ $f(x_0)$ com qualquer x no intervalo.
- Suponha que f esteja definida em toda parte e que $x = 2, 3, 5$ e 7 sejam pontos críticos de f . Se $f'(x)$ for positiva nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(5, 7)$ e negativa nos intervalos $(2, 3), (3, 5)$ e $(7, +\infty)$, então f tem máximos relativos em $x = \underline{\hspace{2cm}}$ e mínimos relativos em $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que f esteja definida em toda parte e que $x = -2$ e $x = 1$ sejam pontos críticos de f . Se $f''(x) = 2x + 1$, então f terá um _____ relativo em $x = -2$ e um _____ em $x = 1$.
- Seja $f(x) = (x^2 - 4)^2$. Então $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$ e $f''(x) = 4(3x^2 - 4)$. Identifique a localização (a) dos máximos relativos, (b) dos mínimos relativos e (c) dos pontos de inflexão do gráfico de f .

EXERCÍCIOS 4.2



Recurso Gráfico



ENFOCANDO CONCEITOS

- Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua com as propriedades indicadas, onde $I = (-\infty, +\infty)$.
 - f é côncava para cima no intervalo I e tem exatamente um extremo relativo.
 - f é côncava para cima no intervalo I e não tem extremos relativos.
 - A função f tem exatamente dois extremos relativos no intervalo I e $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$.
 - A função f tem exatamente dois extremos relativos no intervalo I e $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$.
- Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua com as propriedades indicadas, onde $I = (-\infty, +\infty)$.
 - f tem exatamente um extremo relativo em I e $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.
 - f tem exatamente dois extremos relativos em I e $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.
 - f tem exatamente um ponto de inflexão e um extremo relativo em I .
 - f tem infinitos extremos relativos e $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.
- (a) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ tem um mínimo relativo em $x = 1$.
 (b) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $f(x) = x^3 - 3x + 3$ tem um mínimo relativo em $x = 1$ e um máximo relativo em $x = -1$.
- (a) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $f(x) = \sin x$ tem um mínimo relativo em $x = 0$.
 (b) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $g(x) = \tan^2 x$ tem um mínimo relativo em $x = 0$.
 (c) Dê um argumento verbal informal para explicar por que as funções de (a) e (b) têm mínimos relativos em $x = 0$.
- (a) Mostre que as funções $f(x) = (x - 1)^4$ e $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ têm pontos estacionários em $x = 1$.
 (b) O que o teste da derivada segunda diz sobre a natureza desses pontos estacionários?
 (c) O que o teste da derivada primeira diz sobre a natureza desses pontos estacionários?

- (a) Mostre que $f(x) = 1 - x^5$ e $g(x) = 3x^4 - 8x^3$ têm pontos estacionários em $x = 0$.
 (b) O que o teste da derivada segunda diz sobre a natureza desses pontos estacionários?
 (c) O que o teste da derivada primeira diz sobre a natureza desses pontos estacionários?

7-14 Localize todos os pontos críticos e identifique quais deles são pontos estacionários. ■

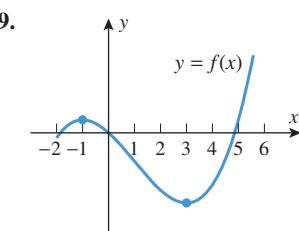
7. $f(x) = 4x^4 - 16x^2 + 17$	8. $f(x) = 3x^4 + 12x$
9. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$	10. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+8}$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$	12. $f(x) = x^2(x-1)^{2/3}$
13. $f(x) = \sin x $	14. $f(x) = \sin x $

15-18 Verdadeiro/Falso Suponha que f seja contínua em toda parte. Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

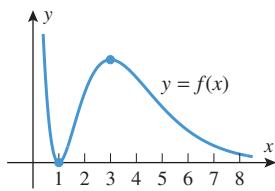
- Se f tiver um máximo relativo em $x = 1$, então $f(1) \geq f(2)$.
- Se f tiver um máximo relativo em $x = 1$, então $x = 1$ será um ponto crítico de f .
- Se $f''(x) > 0$, então f terá um mínimo relativo em $x = 1$.
- Se $p(x)$ for um polinômio tal que $p'(x)$ tem uma raiz simples em $x = 1$, então p terá um extremo relativo em $x = 1$.

ENFOCANDO CONCEITOS

19-20 Esboce o gráfico de $y = f'(x)$ e de $y = f''(x)$ da função $y = f(x)$ cujo gráfico é dado. ■

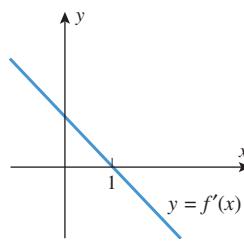


20.

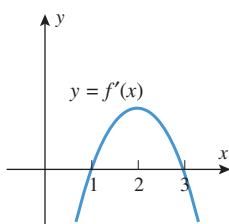


- 21-24** Use o gráfico de f mostrado em cada figura para estimar todos os valores de x nos quais f tem (a) mínimos relativos, (b) máximos relativos e (c) pontos de inflexão; (d) esboce um gráfico rudimentar de uma função f com a derivada dada.

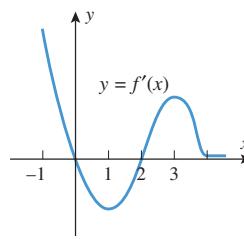
21.



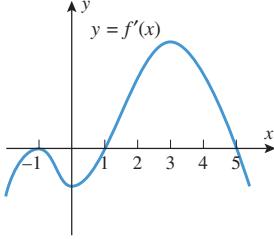
22.



23.



24.



- 25-32** Use a derivada dada para encontrar todos os pontos críticos de f e, em cada um deles, determine se ocorre um máximo relativo, um mínimo relativo ou nenhum desses. Suponha, em cada caso, que f seja contínua em toda parte.

25. $f'(x) = x^2(x^3 - 5)$

26. $f'(x) = 4x^3 - 9x$

27. $f'(x) = \frac{2 - 3x}{\sqrt[3]{x + 2}}$

28. $f'(x) = \frac{x^2 - 7}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$

29. $f'(x) = xe^{1-x^2}$

30. $f'(x) = x^4(e^x - 3)$

31. $f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$

32. $f'(x) = e^{2x} - 5e^x + 6$

- 33-36** Encontre os extremos relativos usando os testes da derivada primeira e da derivada segunda.

33. $f(x) = 1 + 8x - 3x^2$

34. $f(x) = x^4 - 12x^3$

35. $f(x) = \sin 2x, \quad 0 < x < \pi$

36. $f(x) = (x - 3)e^x$

- 37-50** Use qualquer método para encontrar os extremos relativos da função f .

37. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

38. $f(x) = x(x - 4)^3$

39. $f(x) = x^3(x + 1)^2$

40. $f(x) = x^2(x + 1)^3$

41. $f(x) = 2x + 3x^{2/3}$

42. $f(x) = 2x + 3x^{1/3}$

43. $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

44. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 16}$

45. $f(x) = \ln(2 + x^2)$

46. $f(x) = \ln|2 + x^3|$

47. $f(x) = e^{2x} - e^x$

48. $f(x) = (xe^x)^2$

49. $f(x) = |3x - x^2|$

50. $f(x) = |1 + \sqrt[3]{x}|$

- 51-60** Dê um gráfico do polinômio e identifique as coordenadas dos cortes com os eixos, dos pontos estacionários e dos pontos de inflexão. Confira as respostas com um recurso gráfico.

51. $p(x) = x^2 - 3x - 4$

52. $p(x) = 1 + 8x - x^2$

53. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

54. $p(x) = 2 - x + 2x^2 - x^3$

55. $p(x) = (x + 1)^2(2x - x^2)$

56. $p(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

57. $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

58. $p(x) = 4x^3 - 9x^4$

59. $p(x) = x(x^2 - 1)^2$

60. $p(x) = x(x^2 - 1)^3$

- 61.** Em cada parte: (i) Faça uma conjectura sobre o comportamento do gráfico nas vizinhanças dos cortes com o eixo x . (ii) Faça um esboço do gráfico baseado em sua conjectura e nos limites do polinômio quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$. (iii) Compare seu esboço com o gráfico gerado com um recurso computacional.

(a) $y = x(x - 1)(x + 1)$ (b) $y = x^2(x - 1)^2(x + 1)^2$
(c) $y = x^2(x - 1)^2(x + 1)^3$ (d) $y = x(x - 1)^5(x + 1)^4$

- 62.** Esboce o gráfico de $y = (x - a)^m(x - b)^n$ para os valores indicados de m e n , supondo $a < b$ (seis gráficos no total).
(a) $m = 1, n = 1, 2, 3$ (b) $m = 2, n = 2, 3$
(c) $m = 3, n = 3$

- 63-66** Encontre os extremos relativos no intervalo $0 < x < 2\pi$ e confirme se seus resultados estão de acordo com o gráfico gerado por um recurso computacional.

63. $f(x) = |\sin 2x|$

64. $f(x) = \sqrt{3}x + 2 \sin x$

65. $f(x) = \cos^2 x$

66. $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

- 67-70** Use um recurso gráfico para fazer uma conjectura sobre os extremos relativos de f e, então, confira sua conjectura usando o teste da derivada primeira ou derivada segunda.

67. $f(x) = x \ln x$

68. $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

69. $f(x) = x^2e^{-2x}$

70. $f(x) = 10 \ln x - x$

- 71-72** Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de f' e de f'' no intervalo indicado e, então, use-os para estimar as coordenadas x dos extremos relativos de f . Verifique se as suas estimativas estão de acordo com o gráfico de f .

71. $f(x) = x^4 - 24x^2 + 12x, \quad -5 \leq x \leq 5$

72. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cos x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

- C 73-76** Use um CAS para fazer os gráficos de f' e f'' . Use esses gráficos para fazer uma conjectura sobre a localização e a natureza das coordenadas x dos extremos relativos de f e verifique-a pelo gráfico de f .

73. $f(x) = \frac{10x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 8}$

74. $f(x) = \frac{\operatorname{arc tg}(x^2 - x)}{x^2 + 4}$

75. $f(x) = \sqrt{x^4 + \cos^2 x}$

76. $f(x) = x^2(e^{2x} - e^x)$

77. Em cada parte, encontre k de tal forma que f tenha um extremo relativo em $x = 3$.

(a) $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + k}$

C 78. (a) Use um CAS para fazer o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

e use o gráfico para estimar as coordenadas x dos extremos relativos.

- (b) Encontre as coordenadas x exatas usando um CAS para resolver a equação $f'(x) = 0$.

C 79. As funções da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

surgem em uma variedade de problemas estatísticos.

- (a) Use o teste da derivada primeira para mostrar que f tem um máximo relativo em $x = 0$ e confirme isso usando um recurso gráfico computacional para esboçar o gráfico de f .
 (b) Esboce o gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2}$$

onde μ é uma constante, e identifique as coordenadas dos extremos relativos.

C 80. Funções da forma

$$f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \quad x > 0$$

onde n é um inteiro positivo, surgem no estudo estatístico do fluxo de trânsito.

- (a) Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de f com $n = 2, 3, 4$ e 5 e elabore uma conjectura sobre o número e a localização dos extremos relativos de f .
 (b) Confirme sua conjectura usando o teste da derivada primeira.

81. Suponha que h e g tenham máximo relativo em x_0 . Prove que vale ou que não vale:

- (a) $h + g$ tem um máximo relativo em x_0 .
 (b) $h - g$ tem um máximo relativo em x_0 .

82. Esboce algumas curvas para mostrar que as três partes do teste da derivada primeira (Teorema 4.2.3) podem ser falsas, sem a hipótese de que f seja contínua em x_0 .

83. **Texto** Discuta as vantagens ou desvantagens relativas da utilização do teste da derivada primeira ou do da derivada segunda na classificação de candidatos para extremos relativos no interior do domínio de uma função. Inclua exemplos específicos para ilustrar seus argumentos.

84. **Texto** Dado um polinômio $p(x)$, discuta a utilidade de conhecer os zeros de p , p' e p'' para a obtenção de informações sobre o gráfico de p .

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 4.2

1. menor do que ou igual a 2. 2, 7; 5 3. máximo; mínimo 4. (a) $(0, 16)$ (b) $(-2, 0)$ e $(2, 0)$
 (c) $(-2/\sqrt{3}, 64/9)$ e $(2/\sqrt{3}, 64/9)$

4.3 ANÁLISE DE FUNÇÕES III: FUNÇÕES RACIONAIS, CÚSPIDES E RETAS TANGENTES VERTICais

Nesta seção, discutiremos procedimentos para obter o gráfico de funções racionais e outros tipos de curvas. Também discutiremos a interação entre o Cálculo e os recursos tecnológicos para traçar gráficos.

■ PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS

Em muitos problemas, as propriedades de interesse no gráfico de uma função são:

- simetrias
- cortes no eixo x
- extremos relativos
- intervalos de crescimento e decrescimento
- assíntotas
- periodicidade
- cortes no eixo y
- concavidade
- pontos de inflexão
- comportamento no infinito

Algumas dessas propriedades podem não ser relevantes em certos casos; por exemplo, assíntotas são características de funções racionais, mas não de polinômios, e a periodicidade é ca-

racterística de funções trigonométricas mas não de polinômios ou funções racionais. Assim, quando analisamos o gráfico de uma função f , é útil saber algo a respeito das propriedades gerais da família à qual a função pertence.

Em um problema dado, geralmente temos um objetivo definido para a análise do gráfico. Por exemplo, podemos estar interessados em mostrar todas as características importantes da função, somente no comportamento do gráfico quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ ou ainda em alguma característica específica, como um ponto de inflexão particular. Assim, a escolha das características que enfocamos são ditadas pelos nossos objetivos no problema.

■ TRAÇANDO O GRÁFICO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Lembre que uma função racional é uma função do tipo $f(x) = P(x)/Q(x)$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Os gráficos de funções racionais são mais complicados do que os de polinômios por causa das possibilidades de assíntotas e descontinuidades (ver, por exemplo, a Figura 0.3.11). Se $P(x)$ e $Q(x)$ não têm fator comum, então a informação obtida no procedimento seguinte é, em geral, suficiente para obter um esboço preciso do gráfico de uma dada função racional.

Como Traçar o Gráfico de uma Função Racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ em que $P(x)$ e $Q(x)$ Não Têm Fatores Comuns

Passo 1 (simetrias) Determine se há simetria em relação ao eixo y ou à origem.

Passo 2 (cortes com eixos) Encontre os cortes com os eixos coordenados.

Passo 3 (assíntotas verticais) Encontre os valores de x com os quais $Q(x) = 0$. O gráfico tem uma assíntota vertical em cada um desses valores.

Passo 4 (sinal de $f(x)$) Os únicos lugares em que $f(x)$ pode trocar de sinal estão nos pontos de corte com o eixo x e nas assíntotas verticais. Marque esses pontos no eixo x e calcule um valor amostral de $f(x)$ em cada um dos intervalos abertos determinados por esses pontos. Isso nos diz se $f(x)$ é positivo ou negativo nesse intervalo.

Passo 5 (comportamento no infinito) Determine o comportamento no infinito do gráfico calculando os limites de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$. Se algum desses limites tem um valor finito L , então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal.

Passo 6 (derivadas) Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

Passo 7 (conclusão gráfica) Analise as mudanças de sinal de $f'(x)$ e $f''(x)$ para determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Determine a localização de todos os pontos estacionários, extremos relativos e pontos de inflexão. Use a análise de sinais de $f(x)$ para determinar o comportamento do gráfico na vizinhança de assíntotas verticais. Esboce um gráfico de f que exiba suas conclusões.

► Exemplo 1 Esboce um gráfico da equação

$$y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$$

e identifique a localização dos cortes com os eixos, os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas.

Solução Como o numerador e o denominador não têm fatores comuns, utilizaremos o procedimento que acabamos de apresentar.

- *Simetrias:* A substituição de x por $-x$ não muda a equação, de modo que o gráfico é simétrico em relação ao eixo y .
- *Cortes com o eixo x e com o eixo y :* Fazendo $y = 0$, obtemos os cortes com o eixo x nos pontos $x = -2$ e $x = 2$. Fazendo $x = 0$, obtemos o corte com o eixo y em $\frac{1}{2}$.
- *Assíntotas verticais:* Observamos anteriormente que o numerador e denominador de y não têm fator comum; portanto, o gráfico tem assíntotas verticais nos pontos em que o denominador se anula, a saber, em $x = -4$ e $x = 4$.
- *Sinal de y :* O conjunto dos pontos em que ocorrem cortes com o eixo x ou assíntotas verticais é $\{-4, -2, 2, 4\}$. Esses pontos dividem o eixo x nos intervalos abertos

$$(-\infty, -4), \quad (-4, -2), \quad (-2, 2), \quad (2, 4), \quad (4, +\infty)$$

Tabela 4.3.1

ANÁLISE DE SINAIS DE $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$

INTERVALO	PONTO-TESTE	VALOR DE y	SINAL DE y
$(-\infty, -4)$	-5	$14/3$	+
$(-4, -2)$	-3	$-10/7$	-
$(-2, 2)$	0	$1/2$	+
$(2, 4)$	3	$-10/7$	-
$(4, +\infty)$	5	$14/3$	+

Podemos encontrar o sinal de y em cada intervalo escolhendo um ponto de teste arbitrário no intervalo e calculando $y = f(x)$ nesse ponto de teste (Tabela 4.3.1). Essa análise está resumida na primeira linha da Figura 4.3.1a.

- *Comportamento no infinito:* Os limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - (8/x^2)}{1 - (16/x^2)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - (8/x^2)}{1 - (16/x^2)} = 2$$

fornecem a assíntota horizontal $y = 2$.

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 16)(4x) - (2x^2 - 8)(2x)}{(x^2 - 16)^2} = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{48(16 + 3x^2)}{(x^2 - 16)^3} \quad (\text{verifique})$$

Conclusões e gráfico:

- A análise de sinais de y na Figura 4.3.1a revela o comportamento do gráfico na vizinhança das assíntotas verticais: o gráfico cresce sem cota quando $x \rightarrow -4^-$ e decresce sem cota quando $x \rightarrow -4^+$; o gráfico decresce sem cota quando $x \rightarrow 4^-$ e cresce sem cota quando $x \rightarrow 4^+$ (Figura 4.3.1b).
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 4.3.1a mostra que o gráfico é crescente à esquerda de $x = 0$ e é decrescente à direita de $x = 0$. Assim, existe um máximo relativo no ponto estacionário $x = 0$. Não há mínimos relativos.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 4.3.1a mostra que o gráfico é côncavo para cima à esquerda de $x = -4$, côncavo para baixo entre $x = -4$ e $x = 4$ e côncavo para cima à direita de $x = 4$. Não há pontos de inflexão.

O gráfico está dado na Figura 4.3.1c. ◀

O procedimento que enunciarmos para traçar o gráfico de uma função racional $P(x)/Q(x)$ só é aplicável se os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ não tiverem fator comum. Como poderíamos obter o gráfico se esses polinômios tivessem algum fator comum?

► Exemplo 2 Esboce um gráfico da equação

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

e identifique a localização de todas as assíntotas, dos cortes com os eixos, dos extremos relativos e dos pontos de inflexão.

Solução Como o numerador e o denominador não têm fatores comuns, utilizaremos o procedimento apresentado.

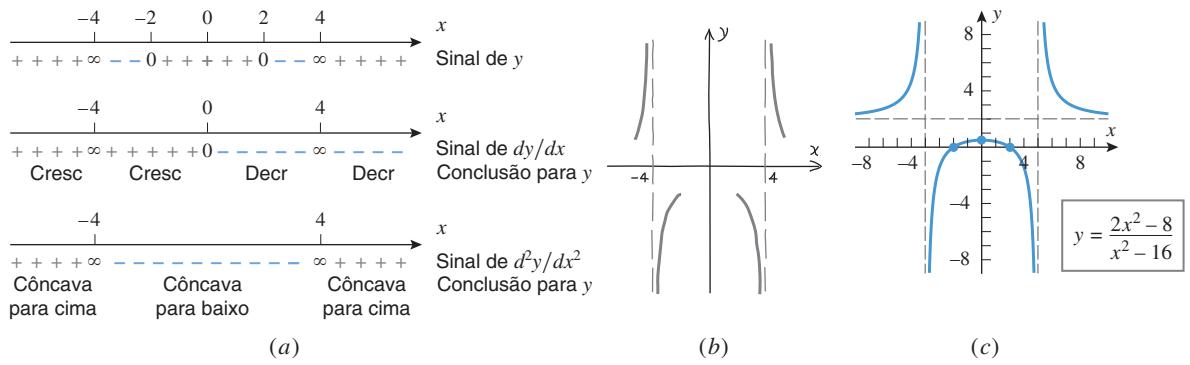


Figura 4.3.1

- *Simetrias:* Substituindo x por $-x$ e y por $-y$, obtemos uma equação que pode ser simplificada à equação original; portanto, o gráfico é simétrico em relação à origem.

Tabela 4.3.2
ANÁLISE DE SINAIS DE $y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

INTERVALO	PONTO-TESTE	VALOR DE y	SINAL DE y
$(-\infty, -1)$	-2	$-\frac{3}{8}$	-
$(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	6	+
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	-6	-
$(1, +\infty)$	2	$\frac{3}{8}$	+

- *Cortes com o eixo x e com o eixo y :* Fazendo $y = 0$, obtemos os cortes com o eixo x nos pontos $x = -1$ e $x = 1$. Fazendo $x = 0$, obtemos uma divisão por zero; portanto, não existe corte com o eixo y .
- *Assíntotas verticais:* Fazendo $x^3 = 0$, obtemos a solução $x = 0$. Isso não é uma raiz de $x^2 - 1$; portanto, $x = 0$ é uma assíntota vertical.
- *Sinal de y :* O conjunto dos pontos em que ocorrem cortes com o eixo x ou assíntotas verticais é $\{-1, 0, 1\}$. Esses pontos dividem o eixo x nos intervalos abertos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, e $(1, +\infty)$

Na Tabela 4.3.2, utilizamos o método dos pontos de teste para obter o sinal de y em cada um desses intervalos.

- *Comportamento no infinito:* Os limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$$

fornecem a assíntota horizontal $y = 0$.

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(2x) - (x^2 - 1)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{3 - x^2}{x^4} = \frac{(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^4(-2x) - (3 - x^2)(4x^3)}{(x^4)^2} = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5} = \frac{2(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})}{x^5}$$

Conclusões e gráfico:

- A análise de sinais de y na Figura 4.3.2a revela o comportamento do gráfico na vizinhança da assíntota vertical $x = 0$: o gráfico cresce sem cota quando $x \rightarrow 0^-$ e decresce sem cota quando $x \rightarrow 0^+$ (Figura 4.3.2b).
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 4.3.2a mostra que existe um mínimo relativo em $x = -\sqrt{3}$ e um máximo relativo em $x = \sqrt{3}$.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 4.3.2a mostra que o gráfico muda a concavidade na assíntota vertical $x = 0$ e que há pontos de inflexão em $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$.

O gráfico é mostrado na Figura 4.3.2c. Para produzir um esboço um pouco mais preciso, utilizamos um recurso gráfico para esboçar os extremos relativos e os pontos de inflexão. O leitor deve conferir que as coordenadas aproximadas dos pontos de inflexão são $(-2,45; -0,34)$ e $(2,45; 0,34)$, e que as coordenadas aproximadas dos pontos de mínimo relativo e máximo relativo são $(-1,73; -0,38)$ e $(1,73; 0,38)$, respectivamente. \blacktriangleleft

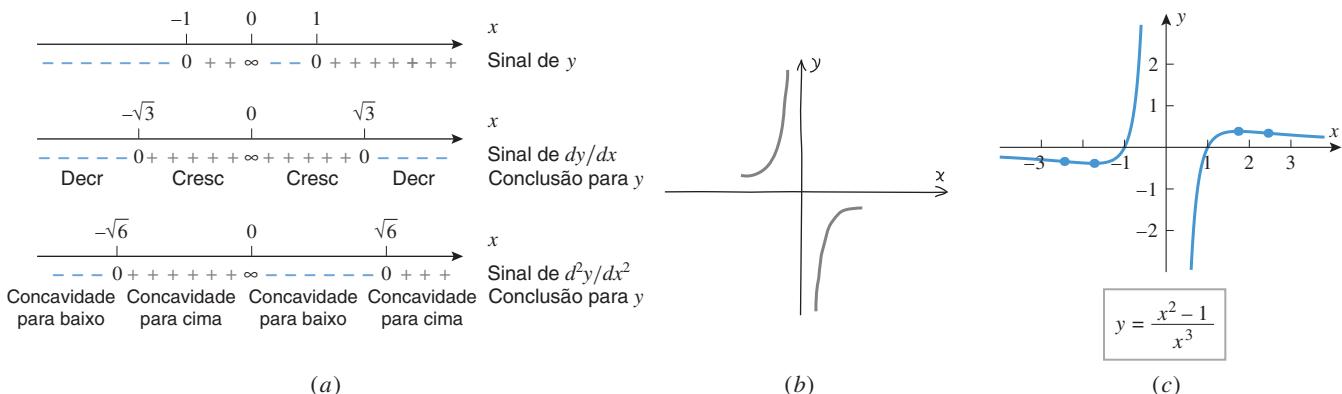


Figura 4.3.2

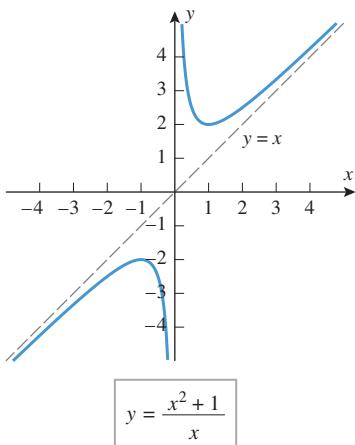


Figura 4.3.3

■ FUNÇÕES RACIONAIS COM ASSÍNTOTAS OBLÍQUAS OU CURVILÍNEAS

Nas funções racionais dos Exemplos 1 e 2, o grau do numerador não excedeu o do denominador, e as assíntotas eram verticais ou horizontais. Outros tipos de “assíntotas” são possíveis se o numerador de uma função racional tiver grau maior do que o denominador. Por exemplo, considere as funções racionais

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8}{x - 1} \quad (1)$$

Usando divisão, podemos reescrevê-las como

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - \frac{8}{x - 1}$$

Como ambas as segundas parcelas tendem a 0 quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, segue que

$$(f(x) - x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty \text{ ou quando } x \rightarrow -\infty \\ (g(x) - x^2) \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty \text{ ou quando } x \rightarrow -\infty$$

Geometricamente, isso significa que o gráfico de $y = f(x)$ acaba ficando cada vez mais próximo da reta $y = x$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$. A reta $y = x$ é, então, denominada **assíntota oblíqua** ou **inclinada** de f . Analogamente, o gráfico de $y = g(x)$ acaba ficando cada vez mais próximo da parábola $y = x^2$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$. A parábola é, então, denominada **assíntota curvilínea** de g . Os gráficos das funções em (1) aparecem nas Figuras 4.3.3 e 4.3.4.

Em geral, se $f(x) = P(x)/Q(x)$ for uma função racional, poderemos obter polinômios quociente $q(x)$ e resto $r(x)$ tais que

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

sendo o grau de $r(x)$ menor do que o de $Q(x)$. Então $r(x)/Q(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, de modo que $y = q(x)$ é uma assíntota de f . Essa assíntota será uma reta oblíqua se o grau de $P(x)$ for um a mais do que o de $Q(x)$ e será uma assíntota curvilínea se o grau de $P(x)$ exceder o de $Q(x)$ por dois ou mais. Problemas envolvendo esse tipo de assíntotas são dados nos exercícios (Exercícios 17 e 18).

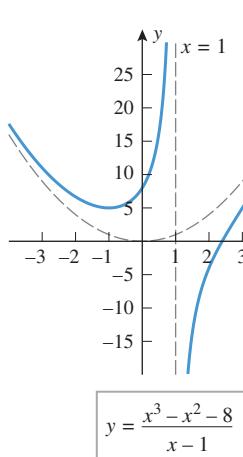


Figura 4.3.4

■ GRÁFICOS COM TANGENTES VERTICAIS E CÚSPIDES

A Figura 4.3.5 mostra quatro partes de curva que podem ser encontradas facilmente em gráficos de funções que envolvem radicais ou expoentes fracionários. Em todos os quatro casos, a função não é diferenciável em x_0 , pois as retas secantes pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ tendem à posição vertical quando x tende a x_0 de qualquer um dos dois lados. Assim, em cada caso, a curva tem uma reta tangente vertical em $(x_0, f(x_0))$. Nas partes (a) e (b) da figura, ocorre uma inflexão em x_0 porque há uma mudança de concavidade nesse ponto. Nas partes (c) e (d), em que $f'(x)$ tende a $+\infty$ por um dos lados e a $-\infty$ pelo outro, dizemos que o gráfico tem uma **cúspide** em x_0 .

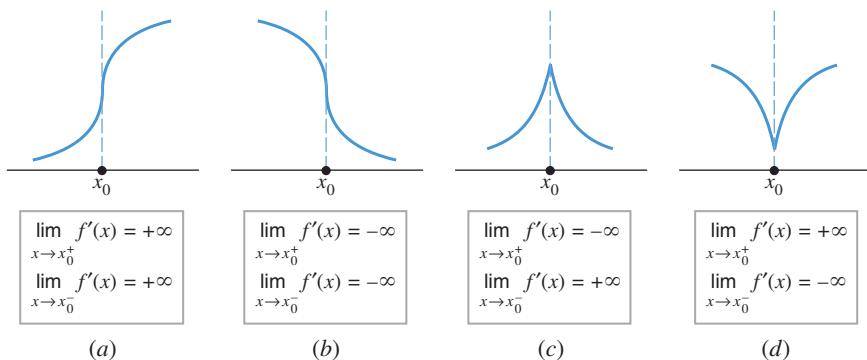


Figura 4.3.5

Os passos utilizados para esboçar o gráfico de uma função racional podem ser seguidos para esboçar gráficos de outros tipos de funções. Isso é ilustrado nos Exemplos 3, 4 e 5.

► Exemplo 3 Esboce o gráfico de $y = (x - 4)^{2/3}$.

- **Simetrias:** Não há simetrias em relação aos eixos coordenados (verifique). Porém, o gráfico da equação é simétrico em relação a $x = 4$, uma vez que é uma translação (quatro unidades para a direita) do gráfico de $y = x^{2/3}$, que é simétrico em relação ao eixo y .
- **Cortes com o eixo x e com o eixo y :** Fazendo $y = 0$, obtemos o corte $x = 4$ com o eixo x . Fazendo $x = 0$, obtemos o corte $y = \sqrt[3]{16} \approx 2,5$ com o eixo y .
- **Assíntotas verticais:** Nenhuma, pois $f(x) = (x - 4)^{2/3}$ é contínua em toda parte.
- **Comportamento no infinito:** O gráfico não tem assíntotas horizontais, pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 4)^{2/3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 4)^{2/3} = +\infty$$

- **Derivadas**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3}(x - 4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x - 4)^{1/3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{2}{9}(x - 4)^{-4/3} = -\frac{2}{9(x - 4)^{4/3}}$$

- **Retas tangentes verticais:** Há uma reta tangente vertical e uma cúspide em $x = 4$ do tipo da Figura 4.3.5d, pois $f(x) = (x - 4)^{2/3}$ é contínua em $x = 4$ e

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{3(x - 4)^{1/3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2}{3(x - 4)^{1/3}} = -\infty$$

Conclusões e gráfico:

- A função $f(x) = (x - 4)^{2/3} = ((x - 4)^{1/3})^2$ é não negativa para cada x . Existe um zero de f em $x = 4$.

- Existe um ponto crítico em $x = 4$, pois f não é diferenciável nesse ponto. Foi visto anteriormente que nesse ponto ocorre uma cúspide. A análise de sinais de dy/dx na Figura 4.3.6a e o teste da derivada primeira mostram que nessa cúspide ocorre um mínimo relativo, já que $f'(x) < 0$ se $x < 4$ e $f'(x) > 0$ se $x > 4$.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 4.3.6a mostra que o gráfico é côncavo para baixo em ambos lados da cúspide.

O gráfico está dado na Figura 4.3.6b. ◀

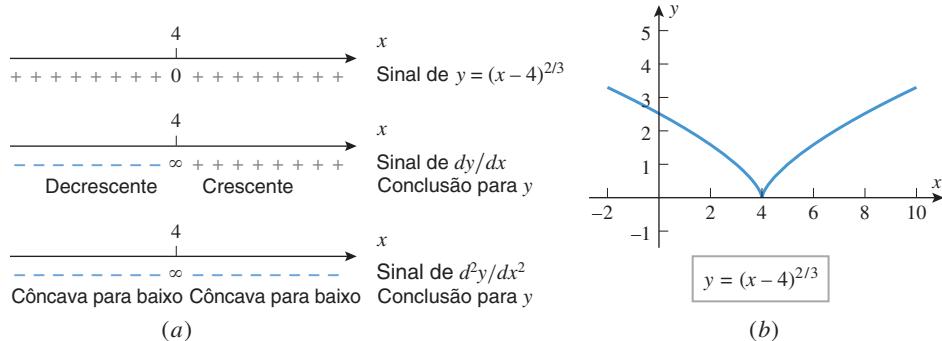


Figura 4.3.6

► Exemplo 4 Esboce o gráfico de $y = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$.

Solução Para simplificar nossa análise, escrevemos

$$f(x) = 6x^{1/3} + 3x^{4/3} = 3x^{1/3}(2 + x)$$

- *Simetrias:* Não há simetrias em relação aos eixos e à origem (verifique).
- *Cortes com o eixo x e com o eixo y:* Fazendo $y = 3x^{1/3}(2 + x) = 0$, obtemos os cortes $x = 0$ e $x = -2$ com o eixo x. Fazendo $x = 0$, obtemos o corte $y = 0$ com o eixo y.
- *Assíntotas verticais:* Nenhuma, pois $f(x) = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$ é contínua.
- *Comportamento no infinito:* o gráfico não tem assíntotas horizontais, pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^{1/3} + 3x^{4/3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^{1/3}(2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^{1/3} + 3x^{4/3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^{1/3}(2 + x) = +\infty$$

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x^{-2/3} + 4x^{1/3} = 2x^{-2/3}(1 + 2x) = \frac{2(2x + 1)}{x^{2/3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{4}{3}x^{-5/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-5/3}(-1 + x) = \frac{4(x - 1)}{3x^{5/3}}$$

- *Retas tangentes verticais:* Existe uma reta tangente vertical em $x = 0$, pois f é contínua nesse ponto e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(2x + 1)}{x^{2/3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(2x + 1)}{x^{2/3}} = +\infty$$

Isso e a mudança da concavidade em $x = 0$ implicam que $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do tipo dado na Figura 4.3.5a.

Conclusões e gráficos:

- Pela análise de sinais de y na Figura 4.3.7a, o gráfico está abaixo do eixo x entre os cortes $x = -2$ e $x = 0$ do eixo x e acima do eixo x se $x < -2$ ou $x > 0$.
- A partir da fórmula para dy/dx , vemos que há um ponto estacionário em $x = -\frac{1}{2}$ e um ponto crítico em $x = 0$, no qual f não é diferenciável. Vimos anteriormente que nesse ponto crítico há uma reta tangente vertical e um ponto de inflexão.
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 4.3.7a e o teste da derivada primeira mostram que há um mínimo relativo no ponto estacionário em $x = -\frac{1}{2}$ (verifique).
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 4.3.7a mostra que, além da inflexão na reta tangente vertical, existe outro ponto de inflexão em $x = 1$, no qual o gráfico troca de côncavo para baixo para côncavo para cima.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

O gráfico da Figura 4.3.7b foi gerado com um recurso gráfico. Contudo, o ponto de inflexão em $x = 1$ é tão suave que não fica aparente. Verifique se seu recurso consegue fazer uma versão desse gráfico que torne evidente o ponto de inflexão.

O gráfico está dado na Figura 4.3.7b. ◀

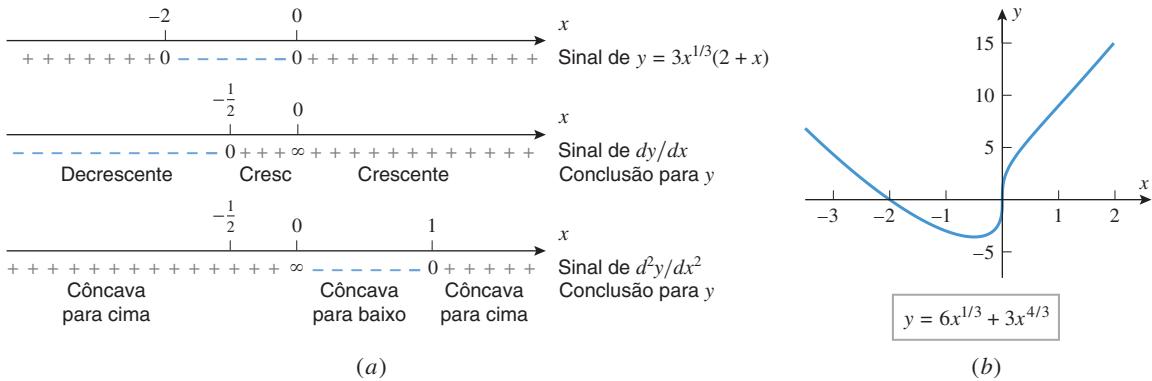


Figura 4.3.7

■ TRAÇANDO O GRÁFICO DE FUNÇÕES DE OUTROS TIPOS

Já discutimos métodos para traçar o gráfico de polinômios, de funções racionais e funções com cúspides e retas tangentes verticais. As mesmas ferramentas do Cálculo que utilizamos para analisar essas funções também podem ser usadas para analisar o gráfico de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais, bem como uma variedade sem fim de outros tipos de funções.

► **Exemplo 5** Esboce o gráfico de $y = e^{-x^2/2}$ e identifique a localização de todos os extremos relativos e pontos de inflexão.

Solução

- Simetrias:** Substituir x por $-x$ não muda a equação, de modo que o gráfico é simétrico em relação ao eixo y .
- Cortes com o eixo x e com o eixo y :** Fazendo $y = 0$, obtemos a equação $e^{-x^2/2} = 0$, que não possui solução, pois todas as potências de e têm valores positivos. Assim, não existe corte com o eixo x . Fazendo $x = 0$, obtemos o corte com o eixo y em $y = 1$.
- Assíntotas verticais:** Não existem assíntotas verticais porque $e^{-x^2/2}$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$.
- Comportamento no infinito:** O eixo x ($y = 0$) é uma assíntota horizontal, pois

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} = 0$$

• *Derivadas:*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} \left[-\frac{x^2}{2} \right] = -xe^{-x^2/2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -x \frac{d}{dx}[e^{-x^2/2}] + e^{-x^2/2} \frac{d}{dx}[-x] \\ &= x^2 e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}\end{aligned}$$

Conclusões e gráfico:

- A análise de sinais de y na Figura 4.3.8a foi baseada no fato de que $e^{-x^2/2} > 0$ em cada x . Isso mostra que o gráfico está sempre acima do eixo x .
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 4.3.8a foi baseada no fato de que $dy/dx = -xe^{-x^2/2}$ tem o mesmo sinal que $-x$. Essa análise e o teste da derivada primeira mostram que há um ponto estacionário em $x = 0$, no qual ocorre um máximo relativo. O valor de y no máximo relativo é $y = e^0 = 1$.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 4.3.8a foi baseada no fato de que $d^2y/dx^2 = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$ tem o mesmo sinal que $x^2 - 1$. Essa análise mostra que há pontos de inflexão em $x = -1$ e em $x = 1$. O gráfico troca de côncavo para cima para côncavo para baixo em $x = -1$ e de côncavo para baixo para côncavo para cima em $x = 1$. As coordenadas dos pontos de inflexão são $(-1, e^{-1/2}) \approx (-1, 0,61)$ e $(1, e^{-1/2}) \approx (1, 0,61)$.

O gráfico está dado na Figura 4.3.8b. ◀

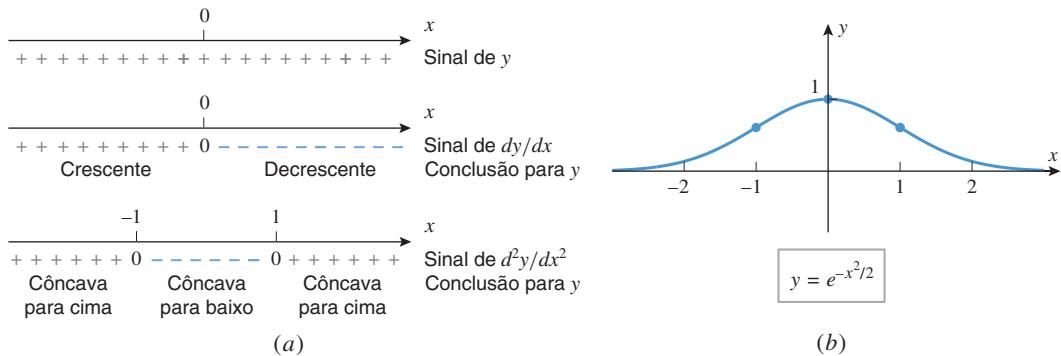
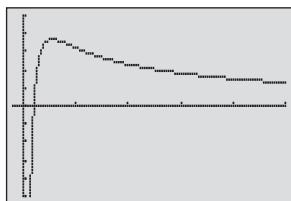


Figura 4.3.8



$[-1, 25] \times [-0,5; 0,5]$
 $x\text{Scl} = 5, y\text{Scl} = 0,2$

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

Figura 4.3.9

■ TRAÇANDO GRÁFICOS USANDO CÁLCULO E TECNOLOGIA JUNTOS

Até aqui neste capítulo, utilizamos o Cálculo para produzir gráficos de funções, sendo que os gráficos eram o objetivo. Agora trabalharemos na direção contrária, *começando* com um gráfico produzido por um recurso gráfico. Nossa objetivo é utilizar as ferramentas do Cálculo para determinar a localização exata dos extremos relativos, dos pontos de inflexão e outras características sugeridas pelo gráfico, além de determinar se ele pode estar omitindo alguma característica que gostaríamos de ver.

► **Exemplo 6** Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $f(x) = (\ln x)/x$ e discuta o que esse gráfico diz sobre extremos relativos, pontos de inflexão, assíntotas e comportamento no infinito. Use o Cálculo para encontrar a localização de todas as características essenciais do gráfico.

Solução A Figura 4.3.9 mostra um gráfico de f produzido por um recurso gráfico. Esse gráfico sugere que há um corte com o eixo x perto de $x = 1$, um máximo relativo em algum lugar

entre $x = 0$ e $x = 5$, um ponto de inflexão perto de $x = 5$, uma assíntota vertical em $x = 0$ e possivelmente um assíntota horizontal $y = 0$. Para uma análise mais precisa dessa informação, temos de considerar as derivadas

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

- *Extremos relativos:* A resolução de $f'(x) = 0$ fornece o ponto estacionário $x = e$ (verifique). Como

$$f''(e) = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

existe um máximo relativo em $x = e \approx 2,7$ pelo teste da derivada segunda.

- *Pontos de inflexão:* Como $f(x) = (\ln x)/x$ só está definida em valores positivos de x , a derivada segunda $f''(x)$ tem o mesmo sinal que $2 \ln x - 3$. Deixamos a cargo do leitor usar as desigualdades $(2 \ln x - 3) < 0$ e $(2 \ln x - 3) > 0$ para mostrar que $f''(x) < 0$ se $x < e^{3/2}$ e $f''(x) > 0$ se $x > e^{3/2}$. Assim, existe um ponto de inflexão em $x = e^{3/2} \approx 4,5$.

- *Assíntotas:* Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

de modo que $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Também há uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

(por quê?).

- *Cortes com os eixos:* Fazendo $f(x) = 0$, obtemos $(\ln x)/x = 0$. A única solução real dessa equação é $x = 1$, de modo que nesse ponto existe um corte com o eixo x . ◀

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.3 (Ver página 266 para respostas.)

1. Seja $f(x) = \frac{3(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$. Sabendo que

$$f'(x) = \frac{-30(x-1)}{(x+2)^2(x-4)^2}, f''(x) = \frac{90(x^2-2x+4)}{(x+2)^3(x-4)^3}$$

determine as seguintes propriedades do gráfico de f .

- Os cortes com os eixos x e y são _____.
- As assíntotas verticais são _____.
- A assíntota horizontal é _____.
- O gráfico está acima do eixo x nos intervalos _____.
- O gráfico é crescente nos intervalos _____.
- O gráfico é côncavo para cima nos intervalos _____.
- O ponto de máximo relativo do gráfico é _____.

2. Seja $f(x) = \frac{x^2-4}{x^{8/3}}$. Sabendo que

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-16)}{3x^{11/3}}, f''(x) = \frac{2(5x^2-176)}{9x^{14/3}}$$

determine as seguintes propriedades do gráfico de f .

- Os cortes com o eixo x são _____.
- A assíntota vertical é _____.
- A assíntota horizontal é _____.
- O gráfico está acima do eixo x nos intervalos _____.
- O gráfico é crescente nos intervalos _____.
- O gráfico é côncavo para cima nos intervalos _____.
- Os pontos de inflexão ocorrem em $x =$ _____.

3. Seja $f(x) = (x-2)^2 e^{x/2}$. Sabendo que

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)e^{x/2}, f''(x) = \frac{1}{4}(x^2+4x-4)e^{x/2}$$

determine as seguintes propriedades do gráfico de f .

- A assíntota horizontal é _____.
- O gráfico está acima do eixo x nos intervalos _____.
- O gráfico é crescente nos intervalos _____.
- O gráfico é côncavo para cima nos intervalos _____.
- O ponto de mínimo relativo do gráfico é _____.
- O ponto de máximo relativo do gráfico é _____.
- Os pontos de inflexão ocorrem em $x =$ _____.

EXERCÍCIOS 4.3  Recurso Gráfico

 **1-14** Obtenha um gráfico da função racional dada e identifique as coordenadas dos pontos estacionários e de inflexão. Mostre as assíntotas horizontais e verticais e dê suas equações. Identifique (se houver) os pontos em que o gráfico cruza uma assíntota horizontal. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

1. $\frac{2x - 6}{4 - x}$

2. $\frac{8}{x^2 - 4}$

3. $\frac{x}{x^2 - 4}$

4. $\frac{x^2}{x^2 - 4}$

5. $\frac{x^2}{x^2 + 4}$

6. $\frac{(x^2 - 1)^2}{x^4 + 1}$

7. $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

8. $2 - \frac{1}{3x^2 + x^3}$

9. $\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} + 3$

10. $\frac{3(x+1)^2}{(x-1)^2}$

11. $\frac{(3x+1)^2}{(x-1)^2}$

12. $3 + \frac{x+1}{(x-1)^4}$

13. $\frac{x^2 + x}{1 - x^2}$

14. $\frac{x^2}{1 - x^3}$

 **15-16.** Em cada parte, faça um esboço aproximado do gráfico usando assíntotas e limites apropriados, mas não derivadas. Compare seu esboço ao gerado por um recurso gráfico computacional. ■

15. (a) $y = \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 4}$

(b) $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

16. (a) $y = \frac{2x - x^2}{x^2 + x - 2}$

(b) $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$

17. Mostre que $y = x + 3$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de $f(x) = x^2/(x-3)$. Esboce o gráfico de $y = f(x)$, mostrando esse comportamento assintótico.

18. Mostre que $y = 3 - x^2$ é uma assíntota curvilínea do gráfico de $f(x) = (2 + 3x - x^3)/x$. Esboce o gráfico de $y = f(x)$, mostrando esse comportamento assintótico.

 **19-24** Esboce um gráfico da função racional dada e identifique as coordenadas dos pontos estacionários e de inflexão. Mostre as assíntotas horizontais, verticais, oblíquas e curvilíneas e dê suas equações. Identifique (se houver) os pontos em que o gráfico cruza uma assíntota. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

19. $x^2 - \frac{1}{x}$

20. $\frac{x^2 - 2}{x}$

21. $\frac{(x-2)^3}{x^2}$

22. $x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

23. $\frac{x^3 - 4x - 8}{x + 2}$

24. $\frac{x^5}{x^2 + 1}$

ENFOCANDO CONCEITOS

25. Em cada parte, combine a função com os gráficos I a VI.

(a) $x^{1/3}$

(b) $x^{1/4}$

(c) $x^{1/5}$

(d) $x^{2/5}$

(e) $x^{4/3}$

(f) $x^{-1/3}$

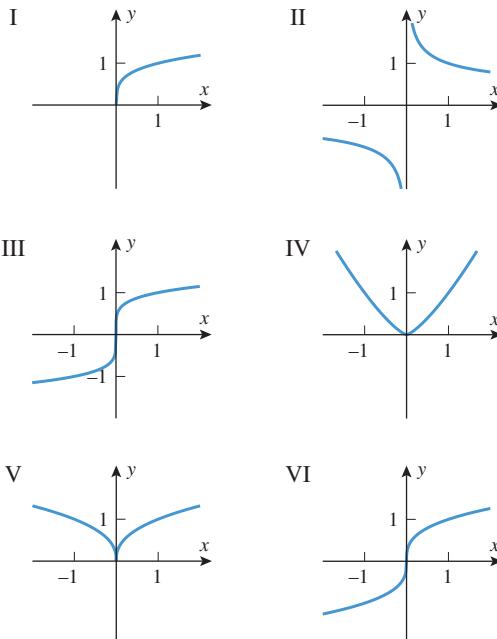


Figura Ex-25

26. Esboce a forma geral do gráfico de $y = x^{1/n}$ e descreva o que acontece com essa forma quando n cresce se
 (a) n for um inteiro positivo par;
 (b) n for um inteiro positivo ímpar.

27-30 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

27. Suponha que $f(x) = P(x)/Q(x)$, em que P e Q são polinômios sem fator comum. Se $y = 5$ for uma assíntota horizontal do gráfico de f , então P e Q terão o mesmo grau.
 28. Se o gráfico de f tiver uma assíntota vertical em $x = 1$, então f não pode ser contínua em $x = 1$.
 29. Se o gráfico de f' tiver uma assíntota vertical em $x = 1$, então f não pode ser contínua em $x = 1$.
 30. Se o gráfico de f tiver uma cuspide em $x = 1$, então f não pode ter uma inflexão em $x = 1$.

 **31-38** Obtenha um gráfico da função e identifique a localização de todos os pontos críticos e de inflexão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

31. $\sqrt{4x^2 - 1}$
32. $\sqrt[3]{x^2 - 4}$
33. $2x + 3x^{2/3}$
34. $2x^2 - 3x^{4/3}$
35. $4x^{1/3} - x^{4/3}$
36. $5x^{2/3} + x^{5/3}$
37. $\frac{8+x}{2+\sqrt[3]{x}}$
38. $\frac{8(\sqrt{x}-1)}{x}$

39-44 Obtenha um gráfico da função e identifique a localização de todos os pontos de extremos relativos e de inflexão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

39. $x + \operatorname{sen} x$

40. $x - \operatorname{tg} x$

41. $\sqrt{3} \cos x + \operatorname{sen} x$

42. $\operatorname{sen} x + \cos x$

43. $\operatorname{sen}^2 x - \cos x, \quad -\pi \leq x \leq 3\pi$

44. $\sqrt{\operatorname{tg} x}, \quad 0 \leq x < \pi/2$

45-54 Usando a regra de L'Hôpital (Seção 3.6), podemos conferir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Nestes exercícios: (a) use esses limites, se necessário, para obter os limites de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$. (b) Esboce o gráfico de $f(x)$ e identifique todos os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas (conforme o caso). Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

45. $f(x) = x e^x$

46. $f(x) = x e^{-x}$

47. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

48. $f(x) = x^2 e^{2x}$

49. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

50. $f(x) = e^{-1/x^2}$

51. $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

52. $f(x) = x^{2/3} e^x$

53. $f(x) = x^2 e^{1-x}$

54. $f(x) = x^3 e^{x-1}$

55-60 Usando a regra de L'Hôpital (Seção 3.6), podemos conferir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$$

com qualquer número real positivo r . Nestes exercícios: (a) use esses limites, se necessário, para obter os limites de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 0^+$. (b) Esboce o gráfico de $f(x)$ e identifique todos os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas (conforme o caso). Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

55. $f(x) = x \ln x$

56. $f(x) = x^2 \ln x$

57. $f(x) = x^2 \ln(2x)$

58. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

59. $f(x) = x^{2/3} \ln x$

60. $f(x) = x^{-1/3} \ln x$

ENFOCANDO CONCEITOS

61. Considere a família de curvas $y = xe^{-bx}$ ($b > 0$).

- (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar alguns membros dessa família.
- (b) Discuta o efeito da variação de b na forma do gráfico e a localização tanto dos extremos relativos como dos pontos de inflexão.

62. Considere a família de curvas $y = e^{-bx^2}$ ($b > 0$).

- (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar alguns membros dessa família.
- (b) Discuta o efeito da variação de b na forma do gráfico e a localização tanto dos extremos relativos como dos pontos de inflexão.

63. (a) Determine se os limites a seguir existem e, em caso afirmativo, encontre-os.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos x$$

- (b) Esboce os gráficos de $y = e^x$, $y = -e^x$ e $y = e^x \cos x$ no mesmo sistema de coordenadas e marque todos os pontos de intersecção.
- (c) Use um recurso gráfico computacional para gerar alguns membros da família $y = e^{ax} \cos bx$ ($a > 0$ e $b > 0$) e discuta o efeito da variação de a e b sobre a forma da curva.

64. Considere a família de curvas $y = x^n e^{-x^2/n}$, onde n é um número inteiro positivo.

- (a) Use um recurso gráfico para gerar alguns membros dessa família.
- (b) Discuta o efeito de variar n no formato do gráfico e discuta tanto a localização dos extremos relativos como dos pontos de inflexão.

65. A figura em anexo mostra o gráfico da derivada de uma função h que está definida e é contínua no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Suponha que o gráfico de h' tenha uma assíntota vertical em $x = 3$ e que

$$h'(x) \rightarrow 0^+ \text{ quando } x \rightarrow -\infty$$

$$h'(x) \rightarrow -\infty \text{ quando } x \rightarrow +\infty$$

- (a) Quais são os pontos críticos de $h(x)$?
- (b) Identifique os intervalos em que $h(x)$ é crescente.
- (c) Identifique as coordenadas x dos extremos relativos de $h(x)$ e classifique-os como máximo ou mínimo relativos.
- (d) Dê uma estimativa das coordenadas x dos pontos de inflexão de $h(x)$.

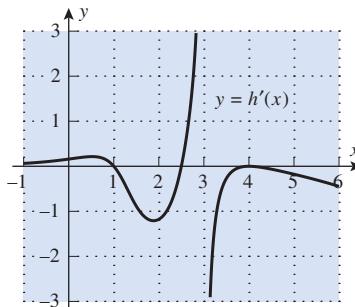


Figura Ex-65

66. Seja $f(x) = (1 - 2x)h(x)$, onde $h(x)$ é a função dada no Exercício 65. Suponha que $x = 5$ seja um ponto crítico de $f(x)$.

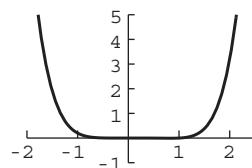
- (a) Estime $h(5)$.
- (b) Use o teste da derivada segunda para determinar se $f(x)$ tem um máximo ou um mínimo relativo em $x = 5$.

- 67.** Um lote retangular deve ser cercado de forma que a área interna seja de 400 m^2 . Sejam L o comprimento da cerca necessária e x o comprimento de um lado do retângulo; mostre que $L = 2x + 800/x$ para $x > 0$ e esboce o gráfico de L versus x para $x > 0$.

68. Uma caixa com base quadrada e sem tampa deve ser feita a partir de uma folha de metal, de forma que seu volume seja de 500 cm^3 . Sejam S a área da superfície da caixa e x o comprimento de um lado da base quadrada. Mostre que $S = x^2 + 2000/x$ para $x > 0$ e esboce o gráfico de S versus x para $x > 0$.

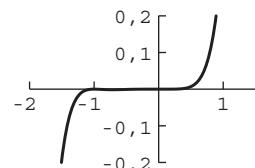
69. A Figura Ex-69 mostra o gráfico do polinômio $y = 0,1x^5(x - 1)$ gerado em computador usando uma janela de $[-2; 2,5] \times [-1, 5]$. Mostre que a escolha da escala vertical faz com que o computador perca aspectos importantes do gráfico. Encontre os aspectos omitidos e faça seu próprio esboço mostrando-os.

70. A Figura Ex-70 mostra o gráfico do polinômio $y = 0,1x^5(x + 1)^2$ gerado em computador usando uma janela de $[-2; 1,5] \times [-0,2; 0,2]$. Mostre que a escolha da escala vertical faz com que o computador perca aspectos importantes do gráfico. Encontre os aspectos omitidos e faça seu próprio esboço mostrando-os.



Gerado pelo Mathematica

Figura Ex-69



Gerado pelo Mathematica

Figura Ex-70

71. **Texto** Suponha que $x = x_0$ seja um ponto no qual uma função f seja contínua, mas não diferenciável, e que $f'(x)$ tenda a limites finitos distintos quando x tende a x_0 pela esquerda e pela direita. Invente um nome para descrever o gráfico de f num ponto desses e discuta a conveniência dessa sua terminologia.

72. **Texto** Suponha que o gráfico de uma função f tenha sido obtido com um recurso computacional. Discuta a informação que as técnicas do Cálculo podem fornecer a respeito de f além do que pode ser deduzido do gráfico exibido na imagem do recurso computacional.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.3

1. (a) $(-1, 0), (3, 0), (0, \frac{9}{8})$ (b) $x = -2$ e $x = 4$ (c) $y = 3$ (d) $(-\infty, -2), (-1, 3)$ e $(4, +\infty)$ (e) $(-\infty, -2)$ e $(-2, 1]$
 (f) $(-\infty, -2)$ e $(4, +\infty)$ (g) $(1, \frac{4}{3})$ 2. (a) $(-2, 0), (2, 0)$ (b) $x = 0$ (c) $y = 0$ (d) $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$
 (e) $(-\infty, -4]$ e $(0, 4]$ (f) $(-\infty, -4\sqrt{11/5})$ e $(4\sqrt{11/5}, +\infty)$ (g) $\pm 4\sqrt{11/5} \approx \pm 5,93$ 3. (a) $y = 0$ (quando $x \rightarrow -\infty$)
 (b) $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$ (c) $(-\infty, -2]$ e $[2, +\infty)$ (d) $(-\infty, -2 - 2\sqrt{2})$ e $(-2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$ (e) $(2, 0)$
 (f) $(-2, 16e^{-1}) \approx (-2; 5,89)$ (g) $-2 \pm 2\sqrt{2}$

4.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS

No começo da Seção 4.2, observamos que, se o gráfico de uma função for imaginado como sendo uma cordilheira em duas dimensões (Figura 4.2.1), então os máximos e os mínimos relativos correspondem ao topo de morros e ao fundo de vales, isto é, eles são os pontos mais alto e mais baixo em sua vizinhança próxima. Nesta seção, preocuparemos-nos com o problema mais abrangente de encontrar os pontos mais alto e mais baixo de toda a paisagem, isto é, procuraremos o mais alto dos topos e o mais fundo dos vales. Em termos matemáticos, procuraremos o maior e o menor valor de uma função em todo um intervalo.

■ EXTREMOS ABSOLUTOS

Vamos começar por alguma terminologia para descrever o maior e o menor valor de uma função em um intervalo.

4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um **máximo absoluto** em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um **mínimo absoluto** em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um **extremo absoluto**.

Se f tem um máximo absoluto no ponto x_0 em um intervalo, então $f(x_0)$ é o maior valor de f nesse intervalo; e se f tem um mínimo absoluto em x_0 , então $f(x_0)$ é o menor valor de f nesse intervalo. Em geral, não há garantia de que uma função f tenha extremos absolutos em um dado intervalo (Figura 4.4.1).

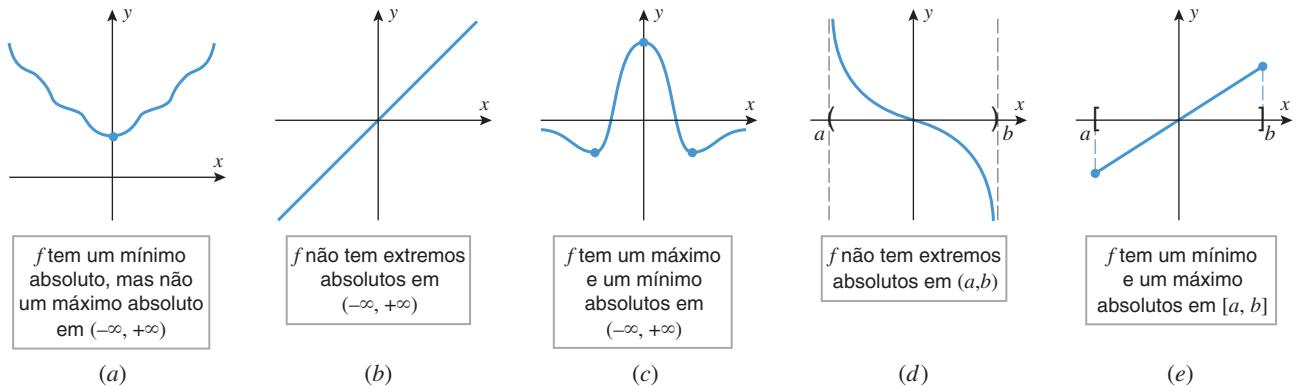


Figura 4.4.1

■ O TEOREMA DO VALOR EXTREMO

As partes (a) a (d) da Figura 4.4.1 mostram que uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos em um intervalo infinito ou em um intervalo aberto finito. Porém, o teorema a seguir mostra que uma função contínua deve ter um máximo e um mínimo absolutos em todo intervalo *fechado* *finito* [veja parte (e) da Figura 4.4.1].

4.4.2 TEOREMA (Teorema do Valor Extremo) *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.*

As hipóteses do Teorema do Valor Extremo são essenciais. Ou seja, se o intervalo não for fechado ou se f não for contínua no intervalo, então f não precisará ter extremos absolutos no intervalo (Exercícios 4 a 6).

OBSERVAÇÃO

Embora a prova desse teorema seja muito difícil para ser incluída aqui, o leitor deve se convencer de sua validade com alguns exemplos – tente fazer o gráfico de diversas funções contínuas em $[0, 1]$ e se convença de que não há como evitar um ponto mais alto e um mais baixo no gráfico. Em uma analogia física, se o leitor imaginar o gráfico como os trilhos de uma montanha-russa, começando em $x = 0$ e acabando em $x = 1$, então a montanha-russa deve passar por um ponto mais alto e um mais baixo em seu trajeto.

O Teorema do Valor Extremo é um exemplo do que os matemáticos denominam *teorema de existência*. Tais teoremas estabelecem condições sob as quais alguma coisa existe, no caso, o extremo absoluto. Entretanto, saber que algo existe é uma coisa, porém encontrá-lo é bem diferente. Assim, vamos nos dedicar agora ao problema de encontrar o extremo absoluto sob as condições do Teorema do Valor Extremo.

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então os extremos absolutos de f podem ocorrer nos extremos do intervalo ou dentro do intervalo aberto (a, b) . Se os extremos absolutos ocorrem dentro, então o teorema a seguir nos diz que eles devem ocorrer em pontos críticos de f .

O Teorema 4.4.3 também é válido em intervalos abertos infinitos, ou seja, em intervalos da forma $(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$.

4.4.3 TEOREMA *Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b) , então ele deve ocorrer em um ponto crítico de f .*

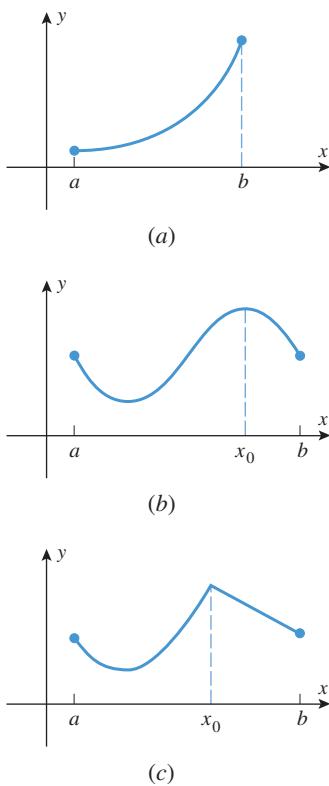


Figura 4.4.2 Em (a), o máximo absoluto ocorre em uma extremidade de $[a, b]$; em (b), ele ocorre em um ponto estacionário em (a, b) ; em (c), ele ocorre em um ponto crítico em (a, b) , onde f não é diferenciável.

DEMONSTRAÇÃO Se f tiver um máximo absoluto em (a, b) em um ponto x_0 , então $f(x_0)$ é também um máximo relativo para f , pois se $f(x_0)$ for o maior valor de f em todo (a, b) , então, certamente, $f(x_0)$ será o maior valor de f em uma vizinhança próxima de x_0 . Assim, x_0 é um ponto crítico de f pelo Teorema 4.2.2. A demonstração no caso de mínimo absoluto é semelhante. ■

Segue desse teorema que, se f for contínua no intervalo finito fechado $[a, b]$, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou em pontos críticos do intervalo (Figura 4.4.2). Dessa forma, podemos usar o seguinte procedimento para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo finito fechado $[a, b]$.

Procedimento para Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Finito Fechado $[a, b]$

Passo 1 Encontre os pontos críticos de f em (a, b) .

Passo 2 Encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nas extremidades a e b .

Passo 3 O maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto.

► **Exemplo 1** Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ no intervalo $[1, 5]$ e determine onde esses valores ocorrem.

Solução Como f é contínua e diferenciável em toda parte, os extremos absolutos ocorrem ou nos extremos do intervalo $[1, 5]$ ou em pontos estacionários do intervalo aberto $(1, 5)$. Para encontrar os pontos estacionários, precisamos resolver $f'(x) = 0$, que pode ser escrita como

$$6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 6(x - 2)(x - 3) = 0$$

Assim, há pontos estacionários em $x = 2$ e $x = 3$. Calculando o valor de f nos extremos e nos pontos estacionários, obtemos

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) = 23 \\ f(2) &= 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) = 28 \\ f(3) &= 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) = 27 \\ f(5) &= 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) = 55 \end{aligned}$$

a partir das quais concluímos que um mínimo absoluto de f em $[1, 5]$ é 23 e ocorre em $x = 1$, e um máximo absoluto de f em $[1, 5]$ é 55 e ocorre em $x = 5$. Isso está de acordo com o gráfico de f na Figura 4.4.3. ◀

► **Exemplo 2** Encontre os extremos absolutos de $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$ no intervalo $[-1, 1]$ e determine onde eles ocorrem.

Solução Observe que f é contínua em toda parte e que, portanto, o Teorema do Valor Extremo garante que f tem um valor máximo e um valor mínimo no intervalo $[-1, 1]$. Diferenciando, obtemos

$$f'(x) = 8x^{1/3} - x^{-2/3} = x^{-2/3}(8x - 1) = \frac{8x - 1}{x^{2/3}}$$

Assim, $f'(x) = 0$ em $x = \frac{1}{8}$ e $f'(x)$ não está definida em $x = 0$. Calculando o valor de f nesses pontos críticos e nos extremos, obtemos a Tabela 4.4.1, da qual concluímos que um valor mínimo absoluto de $-\frac{9}{8}$ ocorre em $x = \frac{1}{8}$, enquanto um valor máximo absoluto de 9 ocorre em $x = -1$. ◀

Tabela 4.4.1

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	1
$f(x)$	9	0	$-\frac{9}{8}$	3

■ EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS INFINITOS

Observamos anteriormente que, em um intervalo infinito, uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos (veja a Figura 4.4.1). Porém, certas conclusões sobre a existência de extremos absolutos de uma função contínua f em $(-\infty, +\infty)$ podem ser deduzidas do comportamento de $f(x)$, quando $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$ (Tabela 4.4.2).

Tabela 4.4.2
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS INFINITOS

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO				

► **Exemplo 3** O que pode ser dito sobre a existência de extremos absolutos de polinômios em $(-\infty, +\infty)$?

Solução Se $p(x)$ for um polinômio de grau ímpar, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) \quad (1)$$

têm sinais opostos (um é $+\infty$ e o outro, $-\infty$), não havendo, assim, extremos absolutos. Por outro lado, se $p(x)$ tiver grau par, então os limites em (1) têm o mesmo sinal (ou ambos $+\infty$, ou ambos $-\infty$). Se o coeficiente dominante for positivo, ambos os limites são $+\infty$ e há um mínimo absoluto, mas não um máximo absoluto; se o coeficiente dominante for negativo, então ambos os limites são $-\infty$ e há um máximo absoluto, mas não um mínimo absoluto. ◀

► **Exemplo 4** Determine por inspeção se $p(x) = 3x^4 + 4x^3$ tem extremos absolutos. Se tiver, encontre-os e mostre onde eles ocorrem.

Solução Como $p(x)$ tem grau par e o coeficiente dominante é positivo, $p(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Dessa forma, há um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto. A partir do Teorema 4.4.3 [aplicado ao intervalo $(-\infty, +\infty)$], o mínimo absoluto deve ocorrer em um ponto crítico de p . Como p é diferenciável em toda parte, podemos encontrar todos os pontos críticos resolvendo a equação $p'(x) = 0$. Essa equação é

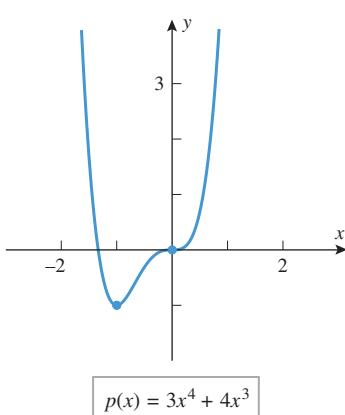
$$12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1) = 0$$

de onde concluímos serem $x = 0$ e $x = -1$ os pontos estacionários. Calculando o valor de p nos pontos estacionários, obtemos

$$p(0) = 0 \quad \text{e} \quad p(-1) = -1$$

Assim, concluímos que p tem um mínimo absoluto de -1 em $x = -1$ (Figura 4.4.4). ◀

Figura 4.4.4



■ EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS ABERTOS

Sabemos que uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos em um intervalo aberto. Porém, certas conclusões sobre a existência de extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo aberto (a, b) podem ser tiradas do comportamento de $f(x)$, quando $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow b^-$ (Tabela 4.4.3). Conclusões análogas podem ser deduzidas para intervalos da forma $(-\infty, b)$ ou $(a, +\infty)$.

Tabela 4.4.3
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS ABERTOS

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

► **Exemplo 5** Determine se a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

tem algum extremo absoluto no intervalo $(0, 1)$. Se houver algum, encontre-o e determine onde ocorre.

Solução Como f é contínua no intervalo $(0, 1)$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty\end{aligned}$$

a função f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(0, 1)$. Pelo Teorema 4.4.3, o máximo absoluto deve ocorrer em um ponto crítico de f no intervalo $(0, 1)$. Temos que

$$f'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$$

logo, a única solução da equação $f'(x) = 0$ é $x = \frac{1}{2}$. Embora f não seja diferenciável em $x = 0$ ou em $x = 1$, esses valores são duplamente desqualificados por não pertencerem nem ao domínio de f nem ao intervalo $(0, 1)$. Assim, o máximo absoluto ocorre em $x = \frac{1}{2}$, e esse valor máximo absoluto é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -4$$

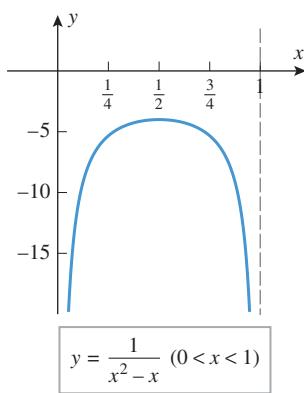


Figura 4.4.5

(Figura 4.4.5). ◀

■ EXTREMOS ABSOLUTOS DE FUNÇÕES COM UM EXTREMO RELATIVO

Se uma função contínua tiver somente um extremo relativo em um intervalo finito ou infinito, então esse extremo relativo deve necessariamente ser um extremo absoluto. Para

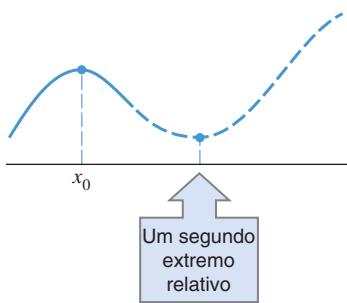


Figura 4.4.6

entender isso, suponha que f tenha um máximo relativo em um ponto x_0 de um intervalo e nenhum outro extremo relativo nesse intervalo. Se $f(x_0)$ não for o máximo absoluto de f nesse intervalo, então o gráfico de f deve fazer uma virada para cima em algum ponto do intervalo para subir acima de $f(x_0)$. Entretanto, isso não pode acontecer, pois o processo de fazer a virada para cima produziria um segundo extremo relativo (Figura 4.4.6). Assim, $f(x_0)$ deve ser o máximo absoluto, além de ser um máximo relativo. Essa ideia está presente no teorema a seguir, que enunciamos sem prova.

4.4.4 TEOREMA Suponha que f seja contínua e tenha exatamente um extremo relativo em um intervalo, digamos em x_0 .

- Se f tiver um mínimo relativo em x_0 , então $f(x_0)$ é o valor mínimo absoluto de f no intervalo.
- Se f tiver um máximo relativo em x_0 , então $f(x_0)$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo.

Esse teorema é, muitas vezes, útil quando outros métodos são enfadonhos ou difíceis de aplicar.

► **Exemplo 6** Encontre os extremos absolutos, se houver, da função $f(x) = e^{(x^3 - 3x^2)}$ no intervalo $(0, +\infty)$.

Solução Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(verifique); portanto, f não tem um máximo absoluto no intervalo $(0, +\infty)$. Contudo, a continuidade de f , junto ao fato de que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1$$

é finito, permite a possibilidade de f ter um mínimo absoluto em $(0, +\infty)$. Se f tiver um tal mínimo, deve ocorrer em um ponto crítico; portanto, consideramos

$$f'(x) = e^{(x^3 - 3x^2)}(3x^2 - 6x) = 3x(x - 2)e^{(x^3 - 3x^2)}$$

Como $e^{(x^3 - 3x^2)} > 0$ em cada valor de x , vemos que $x = 0$ e $x = 2$ são os únicos pontos críticos de f . Desses, somente $x = 2$ está no intervalo $(0, +\infty)$, de modo que nesse ponto f poderia ter um mínimo absoluto. Para verificar se isso ocorre, podemos aplicar a parte (a) do Teorema 4.4.4. Como

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{(x^3 - 3x^2)}(3x^2 - 6x)^2 + e^{(x^3 - 3x^2)}(6x - 6) \\ &= [(3x^2 - 6x)^2 + (6x - 6)]e^{(x^3 - 3x^2)} \end{aligned}$$

temos

$$f''(2) = (0 + 6)e^{-4} = 6e^{-4} > 0$$

e, portanto, pelo teste da derivada segunda, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo de f . Assim, $f(x)$ tem um valor mínimo absoluto em $x = 2$, e esse mínimo é $f(2) = e^{-4} \approx 0,0183$ (Figura 4.4.7). ◀

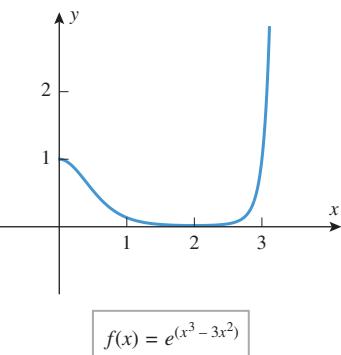


Figura 4.4.7

A função do Exemplo 6 tem um mínimo absoluto no intervalo $(-\infty, +\infty)$?

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 4.4 (Ver página 274 para respostas.)

1. Use a figura abaixo para encontrar as coordenadas x dos extremos relativos e absolutos de f em $[0, 6]$.

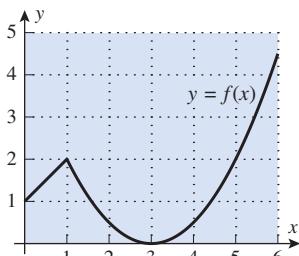


Figura Ex-1

2. Suponha que uma função f seja contínua em $[-4, 4]$ e tenha pontos críticos em $x = -3, 0, 2$. Use a tabela para determinar

os valores absolutos máximo e mínimo, se houver, para f nos intervalos indicados.

- (a) $[1, 4]$ (b) $[-2, 2]$ (c) $[-4, 4]$ (d) $(-4, 4)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2224	-1333	0	1603	2096	2293	2400	2717	6064

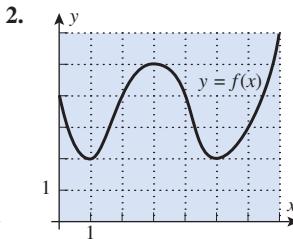
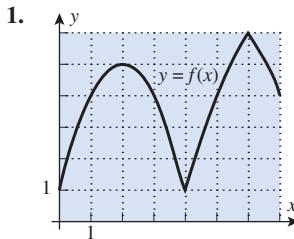
3. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 25$. Use a derivada $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$ para determinar os valores absolutos máximo e mínimo, se houver, para f em cada um dos intervalos indicados.

- (a) $[0, 4]$ (b) $[-2, 4]$ (c) $[-4, 2]$
(d) $[-5, 10]$ (e) $(-5, 4)$

EXERCÍCIOS 4.4 Recurso Gráfico CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

- 1-2 Use o gráfico para encontrar as coordenadas x dos extremos absolutos e relativos de f em $[0, 7]$ ■



3. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua f com as propriedades indicadas no intervalo $[0, 10]$.
- f tem mínimo e máximo absolutos em $x = 0$ e $x = 10$, respectivamente.
 - f tem mínimo e máximo absolutos em $x = 2$ e $x = 7$, respectivamente.
 - f tem mínimos relativos em $x = 1$ e $x = 8$, máximos relativos em $x = 3$ e $x = 7$ e mínimo e máximo absolutos em $x = 5$ e $x = 10$, respectivamente.
4. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua f com as propriedades indicadas no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
- f não tem extremos relativos nem absolutos.
 - f tem um mínimo absoluto em $x = 0$, mas nenhum máximo absoluto.
 - f tem máximo e mínimo absolutos em $x = -5$ e $x = 5$, respectivamente.
5. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Explique por que f tem um valor mínimo, mas não um valor máximo no intervalo fechado $[0, 1]$.

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, 1 \end{cases}$$

Explique por que f não tem um valor mínimo nem um valor máximo no intervalo fechado $[0, 1]$.

- 7-16 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f nos intervalos fechados dados e indique onde ocorrem esses valores. ■

7. $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$; $[1, 2]$

8. $f(x) = 8x - x^2$; $[0, 6]$

9. $f(x) = (x-2)^3$; $[1, 4]$

10. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; $[-3, 2]$

11. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$; $[-1, 1]$

12. $f(x) = (x^2 + x)^{2/3}$; $[-2, 3]$

13. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$; $[-\pi/4, \pi/2]$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$; $[0, \pi]$

15. $f(x) = 1 + |9 - x^2|$; $[-5, 1]$

16. $f(x) = |6 - 4x|$; $[-3, 3]$

- 17-20 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

17. Se uma função f for contínua em $[a, b]$, então f terá um máximo absoluto em $[a, b]$.

18. Se uma função f for contínua em (a, b) , então f terá um mínimo absoluto em (a, b) .

19. Se uma função f tiver um valor mínimo absoluto em (a, b) , então f será um ponto crítico em (a, b) .

20. Se uma função f for contínua em $[a, b]$ e f não tiver valores extremos relativos em (a, b) , então o valor máximo absoluto de f existirá e ocorrerá ou em $x = a$ ou em $x = b$.

21-28 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos, se houver, nos intervalos dados e indique onde esses valores ocorrem. ■

21. $f(x) = x^2 - x - 2; (-\infty, +\infty)$

22. $f(x) = 3 - 4x - 2x^2; (-\infty, +\infty)$

23. $f(x) = 4x^3 - 3x^4; (-\infty, +\infty)$

24. $f(x) = x^4 + 4x; (-\infty, +\infty)$

25. $f(x) = 2x^3 - 6x + 2; (-\infty, +\infty)$

26. $f(x) = x^3 - 9x + 1; (-\infty, +\infty)$

27. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}; (-5, -1)$

28. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}; (-1, 5]$

29-42 Use um recurso gráfico computacional para estimar os valores máximo e mínimo absolutos de f , se houver, nos intervalos indicados e use os métodos do Cálculo para obter os valores exatos. ■

29. $f(x) = (x^2 - 2x)^2; (-\infty, +\infty)$

30. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2; (-\infty, +\infty)$

31. $f(x) = x^{2/3}(20 - x); [-1, 20]$

32. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}; [-1, 4]$

33. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}; (0, +\infty)$

34. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2}; [1, +\infty)$

35. $f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}; [\pi/4, 3\pi/4]$

36. $f(x) = \sin^2 x + \cos x; [-\pi, \pi]$

37. $f(x) = x^3 e^{-2x}; [1, 4]$

38. $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}; [1, e]$

39. $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x; [0, 4]$

40. $f(x) = (x^2 - 1)e^x; [-2, 2]$

41. $f(x) = \sin(\cos x); [0, 2\pi]$

42. $f(x) = \cos(\sin x); [0, \pi]$

43. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3), & x \geq 1 \end{cases}$$

em $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

44. Seja $f(x) = x^2 + px + q$. Encontre os valores de p e q tais que $f(1) = 3$ seja um valor extremo de f em $[0, 2]$. Esse valor é máximo ou mínimo?

45-46 Se f for uma função periódica, então a localização de todos os extremos absolutos no intervalo $(-\infty, +\infty)$ pode ser obtida encontrando os extremos absolutos em um período e usando a perio-

dicidade para localizar os demais. Use essa ideia nestes exercícios para encontrar os valores extremos absolutos da função e indique os valores de x nos quais eles ocorrem. ■

45. $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$ **46.** $f(x) = 3 \cos \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{x}{2}$

47-48 Uma forma de provar que $f(x) \leq g(x)$ em cada x de um dado intervalo é mostrar que $0 \leq g(x) - f(x)$ em cada x no intervalo, e uma forma de provar essa última desigualdade é mostrar que o mínimo absoluto de $g(x) - f(x)$ no intervalo é não negativo. Use essa ideia para provar as desigualdades nestes exercícios. ■

47. Prove que $\sin x \leq x$ em cada x do intervalo $[0, 2\pi]$.

48. Prove que $\cos x \geq 1 - (x^2/2)$ em cada x do intervalo $[0, 2\pi]$.

49. Qual é a menor inclinação possível para uma reta tangente à equação $y = x^3 - 3x^2 + 5x$?

- 50.** (a) Mostre que $f(x) = \sec x + \operatorname{cossec} x$ tem um valor mínimo, mas nenhum valor máximo no intervalo $(0, \pi/2)$.
 (b) Encontre o valor mínimo da parte (a).

C 51. Mostre que o valor mínimo absoluto de

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{(8-x)^2}, \quad x > 8$$

ocorre em $x = 10$ usando um CAS para encontrar $f'(x)$ e para resolver $f'(x) = 0$.

52. A concentração $C(t)$ de uma droga na corrente sanguínea t horas após ter sido injetada é usualmente modelada por uma equação da forma

$$C(t) = \frac{K(e^{-bt} - e^{-at})}{a - b}$$

onde $K > 0$ e $a > b > 0$.

- (a) Em que momento ocorre a concentração máxima?
 (b) Para simplificar, tome $K = 1$; use um recurso gráfico computacional para verificar seu resultado da parte (a) fazendo o gráfico de $C(t)$ para vários valores de a e b .

53. Suponha que as equações do movimento de um avião de papel, durante os 12 segundos iniciais de voo, são

$$x = t - 2 \sin t, \quad y = 2 - 2 \cos t \quad (0 \leq t \leq 12)$$

Quais são os pontos mais alto e mais baixo da trajetória e em que instantes o avião está nesses pontos?

54. A figura a seguir mostra a trajetória de uma mosca cujas equações do movimento são

$$x = \frac{\cos t}{2 + \sin t}, \quad y = 3 + \sin(2t) - 2 \sin^2 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

- (a) Quais são os pontos mais alto e mais baixo do voo?
 (b) A que distância à esquerda e à direita da origem ela voa?

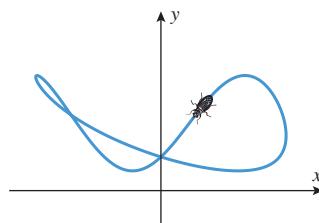


Figura Ex-54

55. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$. Prove que $f(x) \geq 0$ em cada x se, e somente se, $b^2 - 4ac \leq 0$. [Sugestão: Encontre o mínimo de $f(x)$.]

56. Prove o Teorema 4.4.3 no caso em que o valor extremo é um mínimo.

57. Texto Suponha que f seja uma função contínua e positiva em toda parte e que o eixo x seja uma assíntota do gráfico de f

quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$. Explique por que f não pode ter um mínimo absoluto, mas pode ter um mínimo relativo.

58. Texto Explique a diferença entre um máximo relativo e um absoluto. Esboce um gráfico que exiba uma função com um máximo relativo que não é absoluto e exiba um outro gráfico com um máximo absoluto que não é relativo. Explique como esses gráficos satisfazem as condições dadas.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.4

1. Ocorre um mínimo relativo em $x = 3$, um máximo relativo em $x = 1$, um mínimo absoluto em $x = 3$ e um máximo absoluto em $x = 6$.

2. (a) max, 6064; min, 2293 (b) max, 2400; min, 0 (c) max, 6064; min, -1333 (d) não há max; min, -1333

3. (a) max, $f(0) = 25$; min, $f(3) = -2$ (b) max, $f(-1) = 30$; min, $f(3) = -2$ (c) max, $f(-1) = 30$; min, $f(-4) = -51$
(d) max, $f(10) = 635$; min, $f(-5) = -130$ (e) max, $f(-1) = 30$; não há min

4.5 PROBLEMAS DE MÁXIMOS E DE MÍNIMOS EM APLICAÇÕES

Nesta seção, mostraremos como os métodos discutidos na seção anterior podem ser usados para resolver vários problemas de otimização.

■ CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os problemas aplicados de otimização que consideraremos nesta seção caem em uma das duas seguintes categorias:

- Problemas que se reduzem a maximizar ou minimizar uma função contínua em um intervalo finito fechado.
- Problemas que se reduzem a maximizar ou minimizar uma função contínua em um intervalo infinito ou finito, mas não fechado.

Para os problemas do primeiro tipo, o Teorema do Valor Extremo (4.4.2) garante que o problema tem solução, e sabemos que essa solução pode ser obtida examinando os valores da função nos pontos críticos e nos extremos do intervalo. Já os problemas do segundo tipo podem ou não ter solução. Se a função for contínua e tiver exatamente um extremo relativo no intervalo, então o Teorema 4.4.4 garante a existência de uma solução e fornece um método para encontrá-la. Nos casos em que o teorema não se aplica, uma certa engenhosidade pode ser necessária para resolver o problema.

■ PROBLEMAS ENVOLVENDO INTERVALOS FECHADOS E FINITOS

O matemático francês do século XVII Pierre de Fermat, em seu livro *Sobre o método de avaliação de máximos e mínimos*, resolveu um problema de otimização muito parecido com nosso primeiro exemplo. O trabalho de Fermat em tais problemas de otimização levou o matemático francês Laplace a proclamá-lo “o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial”. Embora essa honra deva caber a Newton e Leibniz, não deixa de ser verdade que Fermat desenvolveu procedimentos que anteciparam partes do Cálculo Diferencial.

► Exemplo 1 Devemos projetar um jardim de área retangular e protegido por uma cerca. Qual é a maior área possível de tal jardim se dispusermos de apenas 100 m lineares de cerca?

Solução Sejam

x = comprimento do retângulo (m)

y = largura do retângulo (m)

A = área do retângulo (m^2)

Então

$$A = xy \quad (1)$$

Como o perímetro do retângulo é de 100 m, as variáveis x e y estão relacionadas pela equação

$$2x + 2y = 100 \quad \text{ou} \quad y = 50 - x \quad (2)$$

(ver Figura 4.5.1). Substituindo (2) em (1), obtemos

$$A = x(50 - x) = 50x - x^2 \quad (3)$$

Como representa um comprimento, x não pode ser negativo e, como os dois lados de comprimento x não podem ter um comprimento combinado que ultrapasse o perímetro de 100 m, então a variável x deve satisfazer

$$0 \leq x \leq 50 \quad (4)$$

Assim, o problema ficou reduzido a encontrar o valor (ou valores) de x em $[0, 50]$ para os quais A é máxima. Como A é um polinômio em x , é contínua em $[0, 50]$, e o máximo ocorre ou nos extremos desse intervalo ou em um ponto estacionário.

A partir de (3), obtemos

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x$$

Equacionando-se $dA/dx = 0$ obtemos

$$50 - 2x = 0$$

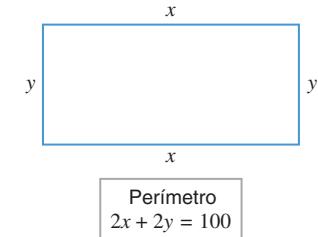


Figura 4.5.1



Pierre de Fermat (1601-1665) Fermat, filho de um bem-sucedido comerciante de couros francês, era um advogado que praticava a Matemática como passatempo. Ele recebeu o grau de Bacharel em Direito Civil da Universidade de Orleans, em 1631, e posteriormente ocupou várias posições governamentais, inclusive um posto de consultor do parlamento de Toulouse. Embora aparentemente bem-sucedido, documentos confidenciais da época indicam que seu desempenho oficial como advogado foi fraco, talvez devido ao grande tempo dedicado à Matemática. Ao longo de toda a vida, não pouparon esforços para impedir a publicação de seus resultados matemáticos. Ele tinha o infeliz hábito de rabiscar seus trabalhos nas margens de livros e, frequentemente, enviava os resultados para amigos sem manter uma cópia para si. Como consequência, nunca lhe foi dado o crédito por muitas de suas maiores realizações, até que seu nome saiu da obscuridade na metade do século XIX. Sabe-se hoje que Fermat, simultaneamente e independentemente de Descartes, desenvolveu a Geometria Analítica. Infelizmente, Descartes e Fermat discutiram asperamente sobre vários problemas, sem que tenha havido qualquer cooperação real entre esses dois grandes gênios.

Fermat resolveu muitos problemas fundamentais do Cálculo. Ele obteve o primeiro procedimento para diferenciar polinômios e resolveu muitos problemas importantes de maximização, minimização, área e tangência. Seu trabalho serviu de inspiração a Isaac Newton. Fermat é mais conhecido por seu trabalho sobre a teoria dos números, pelo estudo de propriedades e pelas relações entre os números inteiros. Ele foi o primeiro matemático, após o

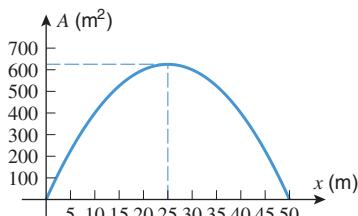
grego Diofante, a fazer contribuições substanciais a esse campo. Infelizmente, nenhum dos contemporâneos de Fermat apreciou seu trabalho nessa área, o que acabou levando-o ao isolamento e à obscuridade no final da vida. Além de seu trabalho em Cálculo e em teoria dos números, Fermat foi um dos fundadores da teoria da Probabilidade e deu grandes contribuições à teoria da Óptica. Além da Matemática, foi um erudito de certa importância, era fluente em francês, italiano, espanhol, latim e grego e escreveu uma quantidade razoável de poemas em latim.

Um dos grandes mistérios da Matemática está em um trabalho de Fermat em teoria dos números. Na margem de um livro de Diofante, ele rabiscou que, para valores de n maiores do que 2, a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções x, y e z inteiras não nulas. Ele afirmou: “descobri uma prova verdadeiramente maravilhosa para isso, a qual, porém, não cabe nesta margem”. Esse resultado, que ficou conhecido como “o último teorema de Fermat”, parecia ser verdadeiro, mas escapou dos maiores gênios matemáticos por 300 anos, até que o professor Andrew Wiles, da Universidade de Princeton, apresentou uma prova em junho de 1993 em uma série dramática de três conferências, que chamou a atenção da mídia mundial (*New York Times*, 27 de junho de 1993). Ocorre que aquela prova tinha uma lacuna séria, que foi preenchida e publicada por Wiles e Richard Taylor em 1995. Um prêmio de 100 mil marcos alemães fora oferecido em 1908 para a solução desse problema, porém seu valor foi consumido pela inflação.

[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.png]

Tabela 4.5.1

x	0	25	50
A	0	625	0

**Figura 4.5.2**

No Exemplo 1, incluímos $x = 0$ e $x = 50$ como valores possíveis de x , mesmo que nesse caso tenhamos retângulos com dois lados de comprimento zero. Se virmos isso como um problema puramente matemático, não haverá nada de errado em permitir lados de comprimento zero. Porém, se virmos isso como um problema concreto no qual o retângulo será formado com algum material, então esses valores devem ser excluídos.

ou $x = 25$. Assim, o máximo ocorre em um dos pontos

$$x = 0, \quad x = 25, \quad x = 50$$

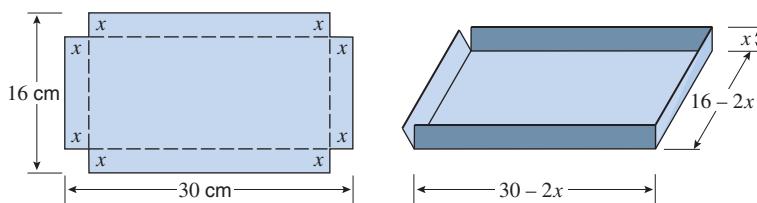
A substituição desses valores em (3) resulta na Tabela 4.5.1, a qual nos diz que a área máxima de 625 m^2 ocorre em $x = 25$, o que está de acordo com o gráfico de (3) na Figura 4.5.2. A partir de (2), resulta que $y = 25$, de modo que o retângulo de perímetro 100 m com maior área é um quadrado com lados medindo 25 m de comprimento. \blacktriangleleft

O Exemplo 1 ilustra o seguinte procedimento de cinco passos que pode ser usado para resolver muitos problemas de máximos e mínimos em aplicações.

Procedimentos para Resolver Problemas de Máximos e Mínimos em Aplicações

- Passo 1** Faça uma figura apropriada e identifique as quantidades relevantes ao problema.
- Passo 2** Obtenha uma fórmula para a quantidade a ser maximizada ou minimizada.
- Passo 3** Usando as condições dadas no problema para eliminar variáveis, expresse a quantidade a ser maximizada ou minimizada como função de uma variável.
- Passo 4** Encontre o intervalo de valores possíveis para essa variável a partir das restrições físicas do problema.
- Passo 5** Se aplicável, use as técnicas da seção anterior para obter o máximo ou o mínimo.

► **Exemplo 2** Uma caixinha aberta no topo deve ser feita com uma folha de papelão medindo 16 por 30 cm, cortando-se fora quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados (Figura 4.5.3). Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa com o maior volume?

**Figura 4.5.3**

(a)

(b)

Solução Para enfatizar, vamos listar explicitamente os cinco passos do procedimento dado acima como um modelo para resolver esse problema. (Em exemplos posteriores, seguiremos esse modelo sem listar os passos.)

- **Passo 1:** Na Figura 4.5.3a, temos a folha de papelão com os quadrados removidos dos cantos. Sejam

x = comprimento (em cm) dos lados dos quadrados a serem cortados fora

V = volume (em cm^3) da caixa resultante

- **Passo 2:** Como estamos removendo quadrados de lados x de cada canto, a caixa resultante terá dimensões $16 - 2x$ por $30 - 2x$ por x (Figura 4.5.3b). Como o volume de uma caixa é o produto de suas dimensões, temos

$$V = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3 \quad (5)$$

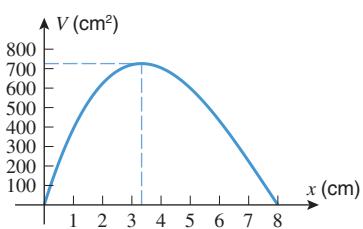
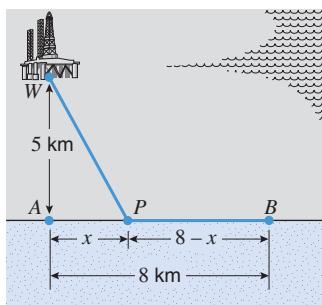
- *Passo 3:* Observe que a expressão para o volume já se encontra em termos da única variável x .

- *Passo 4:* A variável x em (5) está sujeita a certas restrições. Como x representa um comprimento, não pode ser negativo e, como a largura do papelão é de 16 cm, não podemos cortar quadrados com lados maiores do que 8 cm de comprimento. Assim, a variável x em (5) deve satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

Tabela 4.5.2

x	0	$\frac{10}{3}$	8
V	0	$\frac{19600}{27} \approx 726$	0

**Figura 4.5.4****Figura 4.5.5**

► **Exemplo 3** A Figura 4.5.5 mostra um poço de petróleo no mar em um ponto W a 5 km do ponto A mais próximo de uma praia reta. O petróleo é bombeado de W até um ponto P na praia a 8 km de A da seguinte forma: de W até um ponto P na praia entre A e B através de uma tubulação colocada sob a água, e de P até B através de uma tubulação colocada ao longo da praia. Se o custo em dólares para colocar a tubulação for de \$ 1.000.000/km sob a água e de \$ 500.000/km por terra, onde deve estar localizado P para minimizar o custo de colocar a tubulação?

Solução Sejam

$$x = \text{a distância (em km) entre } A \text{ e } P$$

$$c = \text{o custo (em milhões de dólares) para toda a tubulação}$$

A partir da Figura 4.5.5, o comprimento da tubulação sob a água é a distância entre W e P . Pelo Teorema de Pitágoras, esse comprimento é

$$\sqrt{x^2 + 25} \quad (6)$$

Também a partir da Figura 4.5.5, o comprimento da tubulação em terra é a distância entre P e B , que é

$$8 - x \quad (7)$$

De (6) e (7), tem-se que o custo total c (em milhões de dólares) para a tubulação é

$$c = 1(\sqrt{x^2 + 25}) + \frac{1}{2}(8 - x) = \sqrt{x^2 + 25} + \frac{1}{2}(8 - x) \quad (8)$$

Como a distância entre A e B é de 8 km, a distância x entre A e P deve satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

Reduzimos, assim, nosso problema ao de encontrar o valor (ou valores) de x no intervalo $[0, 8]$ com o(s) qual(is) c atinge um mínimo. Como c é uma função contínua de x no intervalo fechado $[0, 8]$, podemos usar os métodos desenvolvidos na seção anterior para encontrar o mínimo.

A partir de (8), obtemos

$$\frac{dc}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{2}$$

Equacionando $dc/dx = 0$ e resolvendo em x , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} &= \frac{1}{2} \\ x^2 &= \frac{1}{4}(x^2 + 25) \\ x &= \pm \frac{5}{\sqrt{3}}\end{aligned}\tag{9}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para verificar os cálculos no Exemplo 3. Especificamente, diferencie c em relação a x , resolva a equação $dc/dx = 0$ e execute todos os cálculos numéricos.

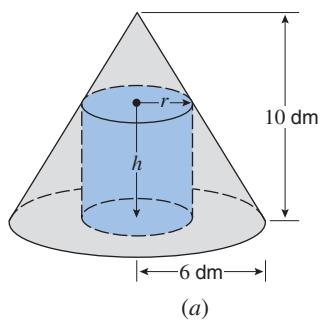
O número $-5/\sqrt{3}$ não é uma solução de (9) e deve ser descartado, restando $x = 5/\sqrt{3}$ como único ponto crítico. Como esse ponto está no intervalo $[0, 8]$, o mínimo deve ocorrer em um dos pontos

$$x = 0, \quad x = 5/\sqrt{3}, \quad x = 8$$

Substituindo esses valores em (8), teremos a Tabela 4.5.3, que nos diz que o menor custo possível da tubulação é, aproximadamente, $c = \$ 8.330.127$, e isso ocorre quando o ponto P estiver localizado a uma distância de $5/\sqrt{3} \approx 2,89$ km de A . \blacktriangleleft

Tabela 4.5.3

x	0	$\frac{5}{\sqrt{3}}$	8
c	9	$\frac{10}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) \approx 8,330127$	$\sqrt{89} \approx 9,433981$



► **Exemplo 4** Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 dm de altura e 6 dm de raio (Figura 4.5.6a).

Solução Sejam

r = raio do cilindro (em dm)

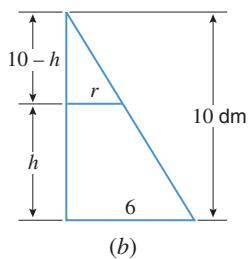
h = altura do cilindro (em dm)

V = volume do cilindro (em dm^3)

A fórmula para o volume do cilindro inscrito é

$$V = \pi r^2 h \tag{10}$$

Para eliminar uma das variáveis em (10), precisamos de uma relação entre r e h . Usando semelhança de triângulos (Figura 4.5.6b), obtemos



$$\frac{10-h}{r} = \frac{10}{6} \quad \text{ou} \quad h = 10 - \frac{5}{3}r \tag{11}$$

Substituindo-se (11) em (10), obtemos

$$V = \pi r^2 \left(10 - \frac{5}{3}r\right) = 10\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3 \tag{12}$$

Figura 4.5.6

que expressa V só em termos de r . Como r representa um raio, e este não pode ser negativo, e como o raio do cilindro inscrito não pode exceder o raio do cone, a variável r deve satisfazer

$$0 \leq r \leq 6$$

Assim, reduzimos o problema a encontrar o valor (ou valores) de r em $[0, 6]$ com o(s) qual(is) (12) é um máximo. Como V é uma função contínua de r em $[0, 6]$, podemos aplicar os métodos desenvolvidos na seção precedente.

A partir de (12), obtemos

$$\frac{dV}{dr} = 20\pi r - 5\pi r^2 = 5\pi r(4 - r)$$

Equacionando $dV/dr = 0$, obtemos

$$5\pi r(4 - r) = 0$$

e, portanto, $r = 0$ e $r = 4$ são os pontos críticos. Como esses pontos estão no intervalo $[0, 6]$, o máximo deve ocorrer em um dos pontos

$$r = 0, \quad r = 4, \quad r = 6$$

Tabela 4.5.4

r	0	4	6
V	0	$\frac{160}{3}\pi$	0

Substituindo esses valores em (12), obtemos a Tabela 4.5.4, que nos diz que o volume máximo $V = \frac{160}{3}\pi \approx 168 \text{ dm}^3$ ocorre quando o cilindro inscrito tiver raio de 4 dm. Quando $r = 4$, tem-se, a partir de (11), que $h = \frac{10}{3}$. Assim, o cilindro inscrito com o maior volume tem raio $r = 4$ dm e altura $h = \frac{10}{3}$ dm. ◀

■ PROBLEMAS ENVOLVENDO INTERVALOS QUE NÃO SÃO FINITOS E FECHADOS

► **Exemplo 5** Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro (1.000 cm^3) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar a quantidade de material usado na confecção da lata?

Solução Sejam

$$h = \text{altura da lata (em cm)}$$

$$r = \text{raio da lata (em cm)}$$

$$S = \text{área da superfície da lata (em } \text{cm}^2\text{)}$$

Supondo não haver perda nem superposição, a quantidade de material necessária para a confecção será igual à área da superfície da lata. Como a lata consiste em dois discos circulares de raio r e uma folha retangular com dimensões h por $2\pi r$ (Figura 4.5.7), a área da superfície será

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (13)$$

Como S depende de duas variáveis, r e h , vamos procurar por alguma condição no problema que permita expressar uma delas em termos da outra. Para isso, observe que o volume

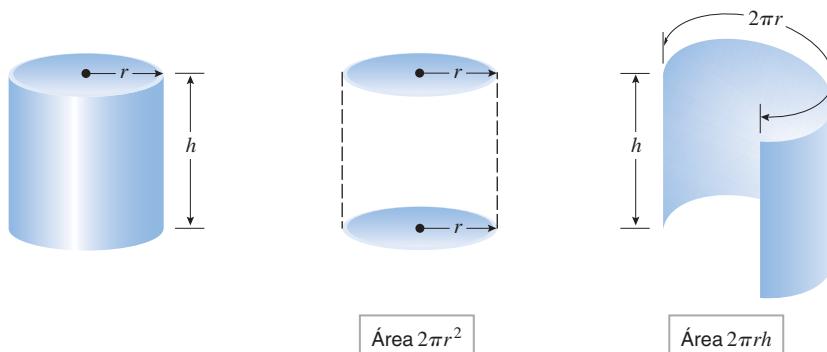


Figura 4.5.7

da lata é de 1.000 cm³; assim, a partir da fórmula $V = \pi r^2 h$ para o volume do cilindro, tem-se que

$$1000 = \pi r^2 h \quad \text{ou} \quad h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad (14-15)$$

Substituindo (15) em (13), obtemos

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \quad (16)$$

Assim, reduzimos o problema a encontrar um valor de r no intervalo $(0, +\infty)$ com o qual S é mínimo. Como S é uma função contínua de r no intervalo $(0, +\infty)$ e

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \right) = +\infty$$

a análise da Tabela 4.4.3 implica S ter um mínimo no intervalo $(0, +\infty)$. Como esse mínimo deve ocorrer em um ponto crítico, calculamos

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \quad (17)$$

Equacionando $dS/dr = 0$, obtemos

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 5,4 \quad (18)$$

Como (18) é o único ponto crítico no intervalo $(0, +\infty)$, esse valor de r dá lugar ao valor mínimo de S . A partir de (15), o valor de h correspondente a esse r é

$$h = \frac{1000}{\pi(10/\sqrt[3]{2\pi})^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2r$$

Não é acidental nesse problema que o mínimo ocorra quando a altura da lata é igual ao diâmetro de sua base (Exercício 29).

Segunda solução A conclusão de que um mínimo ocorre no valor de r em (18) pode ser deduzida do Teorema 4.4.4 e do teste da derivada segunda, observando que

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

é positiva se $r > 0$, e logo é positiva se $r = 10/\sqrt[3]{2\pi}$. Isso implica que, no ponto crítico $r = 10/\sqrt[3]{2\pi}$, ocorre um mínimo relativo e, portanto, um mínimo absoluto.

Terceira solução Uma maneira alternativa de justificar que o ponto crítico $r = 10/\sqrt[3]{2\pi}$ corresponde a um mínimo de S é olhar para o gráfico de S versus r (Figura 4.5.8). ▲

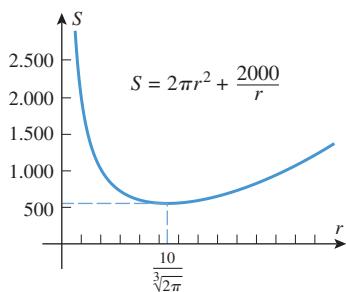


Figura 4.5.8

No Exemplo 5, a área de superfície S não tem máximo absoluto, pois S cresce sem cota quando o raio r tende a 0 (Figura 4.5.8). Assim, se tivéssemos perguntado pela lata que maximizasse a quantidade de material usado em sua confecção, não haveria solução do problema. Os problemas de otimização sem solução são chamados de *problemas mal-condicionados*.

► **Exemplo 6** Encontre um ponto na curva $y = x^2$ que esteja mais próximo do ponto $(18, 0)$.

Solução A distância L entre $(18, 0)$ e um ponto (x, y) arbitrário na curva $y = x^2$ (Figura 4.5.9) é dada por

$$L = \sqrt{(x - 18)^2 + (y - 0)^2}$$

Como (x, y) está na curva, x e y satisfazem $y = x^2$; assim,

$$L = \sqrt{(x - 18)^2 + x^4} \quad (19)$$

Como não há restrições sobre x , o problema se reduz a encontrar um valor de x em $(-\infty, +\infty)$ com o qual (19) é mínima. A distância L e seu quadrado L^2 são minimizados no mesmo ponto (veja o Exercício 68). Assim, o valor mínimo de L em (19) e o valor mínimo de

$$S = L^2 = (x - 18)^2 + x^4 \quad (20)$$

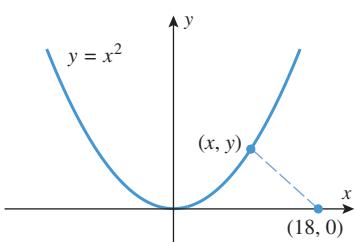


Figura 4.5.9

ocorrem no mesmo valor de x .

A partir de (20),

$$\frac{dS}{dx} = 2(x - 18) + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 36 \quad (21)$$

logo, os pontos críticos satisfazem $4x^3 + 2x - 36 = 0$ ou, de forma equivalente,

$$2x^3 + x - 18 = 0 \quad (22)$$

Para resolver a equação acima, começamos verificando os divisores de -18 para ver se o polinômio à esquerda tem alguma raiz inteira (ver Apêndice C). Os divisores são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ e ± 18 . Uma verificação desses valores mostra que $x = 2$ é uma raiz, logo $x - 2$ é um fator desse polinômio. Após dividir o polinômio por esse fator, podemos reescrever (22) como

$$(x - 2)(2x^2 + 4x + 9) = 0$$

Assim, as soluções restantes de (22) satisfazem a equação quadrática

$$2x^2 + 4x + 9 = 0$$

Contudo, essa equação não tem soluções reais (use a fórmula quadrática), de modo que $x = 2$ é o único ponto crítico de S . Para determinar a natureza desse ponto crítico, vamos usar o teste da derivada segunda. A partir de (21),

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 12x^2 + 2, \quad \text{logo} \quad \left. \frac{d^2S}{dx^2} \right|_{x=2} = 50 > 0$$

o que mostra que em $x = 2$ ocorre um mínimo relativo. Uma vez que $x = 2$ é o único extremo relativo para L , tem-se, a partir do Teorema 4.4.4, que em $x = 2$ também ocorre um valor mínimo absoluto de L . Assim, o ponto sobre a curva $y = x^2$ mais próximo de $(18, 0)$ é

$$(x, y) = (x, x^2) = (2, 4) \blacktriangleleft$$

■ UMA APLICAÇÃO À ECONOMIA

Três funções de importância para um economista ou um industrial são:

$C(x)$ = custo total da produção de x unidades de um produto durante certo período de tempo

$R(x)$ = receita total da venda de x unidades do produto durante o período de tempo

$P(x)$ = lucro total obtido na venda de x unidades do produto durante o período de tempo

Elas são denominadas, respectivamente, **função custo**, **função receita** e **função lucro**. Se todas as unidades produzidas forem vendidas, elas estarão relacionadas por

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ [\text{lucro}] &= [\text{receita}] - [\text{custo}] \end{aligned} \quad (23)$$

O custo total $C(x)$ da produção de x unidades pode ser expresso como uma soma

$$C(x) = a + M(x) \quad (24)$$

onde a é uma constante denominada **despesas gerais** e $M(x)$ é uma função representando o **custo de manufatura**. As despesas gerais, as quais incluem custos fixos como aluguel e seguro, não dependem de x ; devem ser pagas mesmo que não haja produção. Por outro lado, o custo de manufatura $M(x)$, o qual inclui itens como custo do material e do trabalho, depende do número de artigos manufaturados. Mostra-se em Economia que, com hipóteses simplificadoras adequadas, $M(x)$ pode ser expresso na forma

$$M(x) = bx + cx^2$$

onde b e c são constantes. Substituindo isso em (24), obtemos

$$C(x) = a + bx + cx^2 \quad (25)$$

Se uma indústria puder vender todos os artigos produzidos por p dólares cada, então sua receita total $R(x)$ (em dólares) será

$$R(x) = px \quad (26)$$

e seu lucro total $P(x)$ (em dólares) será

$$P(x) = [\text{receita total}] - [\text{custo total}] = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

Assim, se a função custo for dada por (25),

$$P(x) = px - (a + bx + cx^2) \quad (27)$$

Dependendo de fatores como número de empregados, maquinário disponível, condições econômicas e concorrência, há uma limitação superior l no número de artigos que um fabricante é capaz de produzir e vender. Desse modo, durante um período de tempo fixo, a variável x em (27) irá satisfazer

$$0 \leq x \leq l$$

Ao determinar o valor (ou valores) de x em $[0, l]$ que maximiza(m) (27), a firma pode determinar quantas unidades de seu produto devem ser fabricadas e vendidas para obter o maior lucro. Isso está ilustrado no exemplo numérico a seguir.



Jim Karageorge/Getty Images

O lucro de uma empresa farmacêutica é uma função da quantidade de unidades produzidas.

Exemplo 7 Uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de \$200 por unidade. Se o custo total de produção (em dólares) para x unidades for

$$C(x) = 500.000 + 80x + 0,003x^2$$

e se a capacidade de produção da firma for de, no máximo, 30.000 unidades em um tempo especificado, quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro?

Solução Como a receita total da venda de x unidades é $R(x) = 200x$, o lucro $P(x)$ sobre x unidades será

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (500.000 + 80x + 0,003x^2) \quad (28)$$

Como a capacidade de produção é de, no máximo, 30.000 unidades, x deve estar no intervalo $[0, 30.000]$. A partir de (28),

$$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0,006x) = 120 - 0,006x$$

Equacionando $dP/dx = 0$, obtemos

$$120 - 0,006x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 20.000$$

Como esse ponto crítico está no intervalo $[0, 30.000]$, o lucro máximo deve ocorrer em um dos pontos

$$x = 0, \quad x = 20.000 \quad \text{ou} \quad x = 30.000$$

Substituindo esses valores em (28), obtemos a Tabela 4.5.5, que mostra que o lucro máximo $P = \$700.000$ ocorre quando $x = 20.000$ unidades forem fabricadas e vendidas no tempo especificado. ◀

Tabela 4.5.5

x	0	20.000	30.000
$P(x)$	-500.000	700.000	400.000

■ ANÁLISE MARGINAL

Os economistas chamam $P'(x)$, $R'(x)$ e $C'(x)$ de **lucro marginal**, **receita marginal** e **custo marginal**, respectivamente, e interpretam essas quantidades como o lucro, a receita e os custos adicionais que resultam da produção e da venda de uma unidade adicional do produto, quando o nível de produção e de vendas deste é de x unidades. Essas interpretações seguem da aproximação linear local das funções lucro, receita e custo. Por exemplo, tem-se a partir da Fórmula (2), da Seção 3.5, que, quando os níveis de produção e de vendas são de x unidades, a aproximação linear local da função lucro é

$$P(x + \Delta x) \approx P(x) + P'(x)\Delta x$$

Assim, se $\Delta x = 1$ (uma unidade adicional produzida e vendida), essa fórmula implica que

$$P(x + 1) \approx P(x) + P'(x)$$

e, portanto, o *acréscimo* no lucro, resultante da produção e da venda de uma unidade adicional, pode ser aproximado por

$$P(x + 1) - P(x) \approx P'(x)$$

Analogamente, $R(x + 1) - R(x) = R'(x)$ e $C(x + 1) - C(x) \approx C'(x)$.

■ UM PRINCÍPIO BÁSICO DE ECONOMIA

Tem-se, a partir de (23), que $P'(x) = 0$ tem as mesmas soluções que $C'(x) = R'(x)$, o que implica que o lucro máximo deve ocorrer nos pontos em que a receita marginal é igual ao custo marginal; isto é:

O lucro máximo ocorre em um ponto no qual o custo de fabricação e de venda de uma unidade adicional de um produto é aproximadamente igual à receita gerada por uma unidade adicional.

No Exemplo 7, o lucro máximo ocorre com $x = 20.000$ unidades. Observe que

$C(20.001) - C(20.000) = \$200,003$ e $R(20.001) - R(20.000) = \200 , o que é consistente com esse princípio básico de Economia.



EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.5 (Ver página 288 para respostas.)

- Um número positivo x é somado com seu recíproco. O menor valor possível dessa soma é obtido minimizando $f(x) = \dots$ com x no intervalo \dots .
- Dois números não negativos x e y têm uma soma igual a 10. O maior produto possível desses dois números é obtido maximizando $f(x) = \dots$ com x no intervalo \dots .
- Um retângulo no plano xy tem um vértice na origem, um vértice adjacente no ponto $(x, 0)$ e um terceiro vértice no segmento de reta de $(0, 4)$ a $(3, 0)$. A maior área possível do retângulo é obtida maximizando $A(x) = \dots$ com x no intervalo \dots .
- Uma caixinha aberta no topo é construída com uma cartolina medindo 20 por 32 centímetros cortando-se fora quadrados iguais de lado medindo x centímetros dos quatro cantos e dobrando-se os lados. O maior volume possível da caixinha é obtido maximizando $V(x) = \dots$ com x no intervalo \dots .

EXERCÍCIOS 4.5

- Encontre um número no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ tal que a soma do número com seu recíproco seja
 - a menor possível
 - a maior possível
- Como escolher dois números não negativos tais que sua soma seja 1 e a soma de seus quadrados seja
 - a maior possível?
 - a menor possível?

3. Um campo retangular está limitado por uma cerca em três de seus lados e por um córrego reto no quarto lado. Encontre as dimensões do campo com área máxima que pode ser cercado com 1.000 m de cerca.
4. Um campo deve ter o formato de um triângulo retângulo, com a hipotenusa ao longo de um rio reto e uma cerca delimitando os dois catetos do campo. Encontre as dimensões do campo de maior área que pode ser cercado com 1.000 m lineares de cerca.
5. Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa \$3 o metro, enquanto os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de \$2 o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com \$6.000?
6. Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com lados de comprimento 6, 8 e 10 cm. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área, supondo que ele está posicionado conforme a Figura Ex-6.
7. Resolva o Exercício 6 supondo o retângulo posicionado conforme a Figura Ex-7.

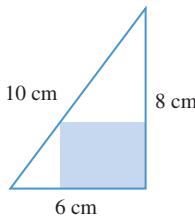


Figura Ex-6

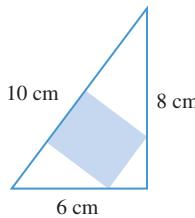


Figura Ex-7

8. Um retângulo tem dois cantos inferiores no eixo x e dois cantos superiores na curva $y = 16 - x^2$. Dentre todos esses retângulos, quais as dimensões daquele que tem maior área?
9. Encontre as dimensões do retângulo com área máxima que pode ser inscrito em um círculo com raio de 10 cm.
10. Encontre o ponto P do primeiro quadrante que pertença à curva $y = x^{-2}$ tal que um retângulo com lados nos eixos coordenados e um vértice em P tenha o menor perímetro possível.
11. Uma área retangular com 288 m^2 deve ser cercada. Em dois lados opostos, será usada uma cerca que custa \$1 o metro e, nos lados restantes, uma cerca que custa \$2 o metro. Encontre as dimensões do retângulo com o menor custo.
12. Mostre que, dentre todos os retângulos com perímetro p , o quadrado é o que tem área máxima.
13. Mostre que, dentre todos os retângulos com área A , o quadrado tem o perímetro mínimo.
14. Um fio com 12 cm pode ser curvado formando um círculo, dobrado formando um quadrado ou cortado em duas partes formando um círculo e um quadrado. Quanto do fio deve ser usado no círculo para que a área total englobada pela(s) figura(s) seja:
 (a) máxima?
 (b) mínima?

15. Um retângulo R no plano tem vértices em $(\pm 8, \pm 12)$, e um quadrado S no plano tem seus lados paralelos aos eixos coordenados, mede 100 por 100 e tem seu canto inferior esquerdo na reta $y = -3x$. Qual é a maior área possível de uma região no plano que esteja contida em ambos, R e S ?
16. Resolva o problema do Exercício 15 se S for um quadrado 16 por 16.
17. Resolva o problema do Exercício 15 se o canto inferior esquerdo de S estiver na reta $y = -6x$.
18. Um cartão retangular deve conter 42 centímetros quadrados de área impressa. As margens no topo, na base e de um dos lados do cartão devem medir 1 cm e a margem do outro lado deve medir 2 cm. Quais devem ser as dimensões de um cartão desses que tenha a menor área?
19. Uma caixa de base quadrada é mais alta do que larga. Para poder mandá-la pelo correio dos EUA, sua altura e o perímetro da base devem somar não mais do que 108 polegadas. Qual é o volume máximo dessa caixa?
20. Uma caixa de base quadrada é mais larga do que alta. Para poder mandá-la pelo correio dos EUA, sua largura e o perímetro de um dos lados (não quadrado) devem somar não mais do que 108 polegadas. Qual é o volume máximo dessa caixa?
21. Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de metal de 3 por 8 cm, cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Encontre o volume máximo que uma caixa dessas pode ter.
22. Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2.250 cm^3 . O material para a base e a tampa do recipiente custa \$2 por cm^2 e o dos lados, \$3 por cm^2 . Encontre as dimensões do recipiente de menor custo.
23. Um recipiente com a forma de um paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2.000 cm^3 . O custo da base e da tampa é o dobro do custo dos lados. Encontre as dimensões do recipiente de menor custo.
24. Um recipiente de base quadrada, lados verticais e aberto em cima deve ser feito de 90 m^2 de material. Encontre as dimensões do recipiente com o maior volume.
25. Um recipiente em forma de paralelepípedo tem dois lados quadrados e é aberto em cima. Se o volume for V unidades cúbicas, encontre as dimensões do recipiente com a área de superfície mínima.
26. A janela de uma igreja consiste em um retângulo com semicírculo em cima e deve ter um perímetro p . Encontre o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima.
27. Encontre as dimensões de um cilindro circular reto com o maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio R .
28. Encontre as dimensões de um cilindro circular reto com a maior área de superfície que pode ser inscrito em uma esfera de raio R .
29. Uma lata cilíndrica fechada deve ter um volume de V unidades cúbicas. Mostre que uma lata com área superficial mínima é obtida quando a altura for igual ao diâmetro da base.

30. Uma lata cilíndrica fechada deve ter uma área superficial de S unidades quadradas. Mostre que uma lata com volume máximo é obtida quando a altura for igual ao diâmetro da base.
31. Uma lata cilíndrica aberta em cima deve conter 500 cm^3 de líquido. Encontre a altura e o raio que minimizam a quantidade de material necessário para confeccioná-la.
32. Uma lata de sopa com forma de cilindro circular reto, raio r e altura h deve ter um volume V . A tampa e a base são cortadas de quadrados, conforme a Figura Ex-32 a seguir. Se os cantos sombreados forem os únicos refugos, encontre a razão r/h para a lata que requer menos material (incluindo o refugo).
33. Uma armação em arame consiste em dois quadrados idênticos, cujos vértices estão ligados por quatro fios retos de mesmo comprimento (Figura Ex-33 a seguir). Se a armação for feita com um único fio de arame de comprimento L , quais devem ser as dimensões para obter uma caixa com o maior volume?

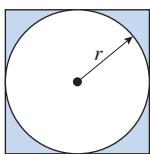


Figura Ex-32



Figura Ex-33

34. Suponha que a soma das áreas das superfícies de uma esfera e de um cubo seja constante.
- Mostre que a soma dos volumes é mínima quando o diâmetro da esfera for igual ao comprimento de uma aresta do cubo.
 - Quando a soma dos volumes será máxima?
35. Encontre a altura e o raio de um cone com altura inclinada L cujo volume é o maior possível.
36. Um cone é feito de uma folha circular com raio R recortando um setor e colando os lados que sobraram (Figura Ex-36). Qual é o máximo volume possível para o cone?

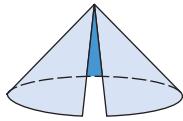
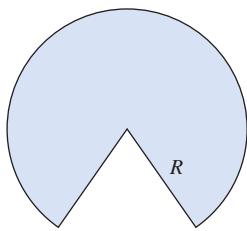


Figura Ex-36

37. Um copo de papel em forma de cone deve conter 100 cm^3 de água. Encontre a altura e o raio do copo que requer a menor quantidade de papel.
38. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de menor área que pode circunscrever um círculo de raio R .
39. Encontre a altura e o raio de um cone circular reto com o menor volume que pode circunscrever uma esfera de raio R .
40. Uma fazenda de gado permite 20 novilhos por 50 m^2 de pasto. O peso médio de seus novilhos no mercado é de 900 kg. Estimativas do Departamento de Agricultura (EUA) indicam que o

peso médio ficará reduzido em 22,5 kg para cada novilho que for acrescentado nos 50 m^2 de pasto. Quantos novilhos devem ser colocados nos 50 m^2 para que o peso médio deles seja o maior possível?

41. Uma companhia explora minério de níquel. Se a companhia extrair x toneladas de minério, pode vendê-lo a $p = 225 - 0,25x$ dólares por tonelada. Encontre as funções receita e receita marginal. Qual é o nível de produção que fornece a maior receita?
42. Um produtor de fertilizante constata que, se produzir x unidades de fertilizante, pode vender seu produto a $p = 300 - 0,1x$ dólares por unidade. O custo total de produção (em dólares) de x unidades é

$$C(x) = 15.000 + 125x + 0,025x^2$$

Se a capacidade de produção da empresa for de, no máximo, 1.000 unidades de fertilizante num intervalo de tempo especificado, quantas unidades deveriam ser manufaturadas e vendidas nesse intervalo de tempo para maximizar o lucro?

43. (a) Uma indústria química vende ácido sulfúrico a granel a \$100 por unidade. Se o custo de produção total diário em dólares para x unidades for
- $$C(x) = 100.000 + 50x + 0,0025x^2$$
- e se a capacidade de produção diária for de, no máximo, 7.000 unidades, quantas unidades de ácido sulfúrico devem ser fabricadas e vendidas diariamente para maximizar o lucro?
- (b) Beneficiaria ao industrial expandir a capacidade de produção diária?
- (c) Usando análise marginal, aproxime o efeito sobre o lucro causado por um aumento de 7.000 para 7.001 unidades na produção diária.

44. Uma firma determina que x unidades de seu produto podem ser vendidas diariamente a p dólares a unidade, onde

$$x = 1.000 - p$$

O custo de produção de x unidades diárias é

$$C(x) = 3.000 + 20x$$

- Encontre a função receita $R(x)$.
- Encontre a função lucro $P(x)$.
- Supondo que a capacidade máxima de produção é de 500 unidades por dia, determine quantas unidades a companhia deve produzir e vender por dia para maximizar seu lucro.
- Encontre o lucro máximo.
- Qual é o preço unitário a ser cobrado para obter o lucro máximo?

45. Em um certo processo de fabricação química, o peso diário y de produção defeituosa depende do peso x de toda a produção, de acordo com a fórmula empírica

$$y = 0,01x + 0,00003x^2$$

onde x e y estão em quilos. Se o lucro for \$100 por kg do produto químico sem defeito e a perda for de \$20 por kg de produto químico defeituoso produzido, quantos quilos do produto devem ser produzidos diariamente para maximizar o lucro diário total?

46. Um motorista de caminhão autônomo cobra de um cliente \$15 por hora dirigida, acrescido do custo do combustível. Dirigindo a uma velocidade de v quilômetros por hora, o caminhão consegue fazer $10 - 0,07v$ km por litro de combustível. Se o combustível custa \$1,50 por litro, qual é a velocidade v que minimiza o custo para o cliente?

47. Um trapézio é inscrito em um semicírculo com raio 2, de forma que um lado está sobre o diâmetro (Figura Ex-47). Encontre a maior área possível para o trapézio. [Sugestão: Expressse os lados do trapézio em termos de θ .]

48. Um canal de drenagem deve ser feito de tal forma que a secção transversal é um trapézio com os lados igualmente inclinados (Figura Ex-48). Se os lados e a base tiverem um comprimento de 5 m, como escolher o ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), de forma que a área da secção transversal do canal seja máxima?

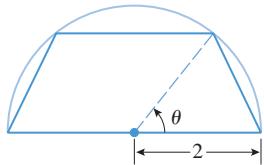


Figura Ex-47

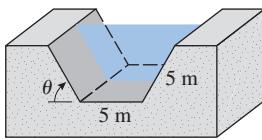


Figura Ex-48

49. Uma lâmpada é suspensa acima do centro de uma mesa circular de raio r . A que altura acima da mesa ela deve ser colocada para se obter o máximo de iluminação na borda da mesa? [Suponha que a iluminação I seja diretamente proporcional ao cosseno do ângulo de incidência ϕ dos raios de luz e inversamente proporcional ao quadrado da distância l da fonte de luz (Figura Ex-49).]

50. Uma prancha é usada para escorar um muro e deve passar por cima de uma cerca de 8 pés de altura e a 1 pé do muro (Figura Ex-50). Qual é o comprimento da menor escora que pode ser usada? [Sugestão: Expressse o comprimento da escora em termos do ângulo θ mostrado na figura].

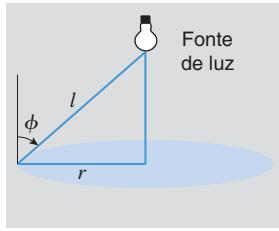


Figura Ex-49

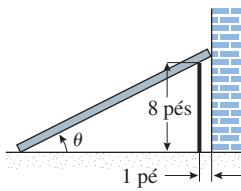


Figura Ex-50

51. Duas partículas A e B estão em movimento no plano xy . Suas coordenadas em cada instante do tempo t ($t \geq 0$) são dadas por $x_A = t$, $y_A = 2t$, $x_B = 1 - t$ e $y_B = t$. Encontre a distância mínima entre A e B .
52. Siga as instruções do Exercício 51, com $x_A = t$, $y_A = t^2$, $x_B = 2t$ e $y_B = 2$.
53. Encontre as coordenadas do ponto P na curva

$$y = \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$$

de modo que o segmento da reta tangente em P , determinado pelos eixos coordenados, tenha o menor comprimento.

54. Encontre a coordenada x do ponto P na parábola

$$y = 1 - x^2 \quad (0 < x \leq 1)$$

de modo que o triângulo formado pela reta tangente em P e os eixos coordenados tenha a menor área.

55. Onde, na curva $y = (1 + x^2)^{-1}$, a reta tangente tem a maior inclinação?

56. Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t seja dado por $N = 5.000(25 + te^{-t/20})$.

- (a) Encontre o maior e o menor número de bactérias no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 100$.
 (b) Em que momento, no intervalo de tempo de (a), o número de bactérias decresce mais rapidamente?

57. O contorno da Lagoa Circular é um círculo com diâmetro de 2 km. A rotina de treinamento de Camila começa num ponto E do lado leste da lagoa. Ela corre ao longo da margem pelo norte até um ponto P a partir do qual ela nada em linha reta a distância (se houver) de P até o ponto W diametralmente oposto a E . (Figura Ex-57). Se Camila correr a 8 km/h e nadar a 2 km/h, qual a distância que ela deveria correr para terminar esse percurso

- (a) no menor tempo possível?
 (b) no maior tempo possível?

58. Um homem está sentado em um barco a 1 km da margem (reta) de um lago. Uma cidade está localizada nessa margem a 1 km do ponto da margem do lago que está mais próximo do homem. Ele pretende remar em linha reta até um ponto P na margem oposta e depois caminhar o restante ao longo da margem (Figura Ex-58). Para que ponto ele deve remar a fim de chegar a seu destino no menor tempo se ele

- (a) pode andar a 8 km/h e remar a 5 km/h?
 (b) pode andar a 8 km/h e remar a 6 km/h?

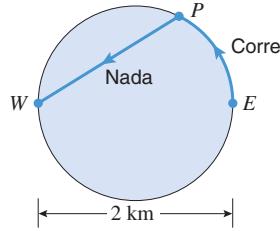


Figura Ex-57

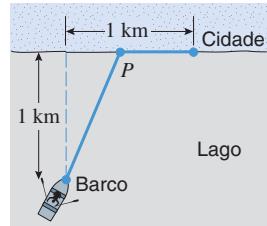


Figura Ex-58

59. Um cano com diâmetro desprezível deve ser carregado horizontalmente em torno de um canto ligando duas passagens com 2,40 m e 1,20 m de largura (Figura Ex-59). Qual é o comprimento máximo que o cano pode ter?

Fonte: Uma discussão interessante desse problema, na qual o diâmetro do cano não é desprezível, foi feita por Norman Miller no *American Mathematical Monthly*, Vol. 56, 1949, p. 177-179.

60. Uma barreira de concreto cuja seção transversal é um triângulo isósceles acompanha um muro a uma distância de 1 metro em um terreno plano. A altura da barreira é de 3 m e a base da seção transversal mede 8 m. Um cano de diâmetro des-

prezível apoiado na barreira tem uma ponta no chão e a outra no muro (Figura Ex-60). Qual é o comprimento mínimo que pode ter esse cano?

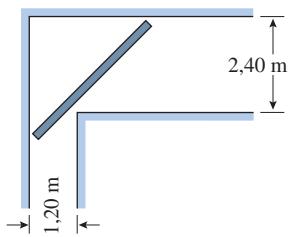


Figura Ex-59

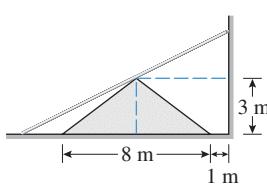


Figura Ex-60

61. Suponha que a intensidade de uma fonte pontual de luz seja diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional à distância da fonte. Dois pontos de luz com potências S e $8S$ estão separados por uma distância de 90 cm. Onde, no segmento de reta entre as duas fontes, a intensidade é mínima?
62. Dados os pontos $A(2, 1)$ e $B(5, 4)$, encontre o ponto P do intervalo $[2, 5]$ do eixo x que maximize o ângulo APB .
63. A beirada inferior de um quadro de 10 pés de altura em exposição está 2 pés acima do nível dos olhos de um observador. Supondo que a melhor visão é obtida quando é máximo o ângulo subentendido pelo quadro no olho do observador, a qual distância do quadro este deveria ficar?

ENFOCANDO CONCEITOS

64. O *Princípio de Fermat* (biografia à página 275) na óptica afirma que a luz, viajando de um ponto para outro, segue aquele caminho para o qual o tempo total no percurso é mínimo. Em um meio uniforme, os caminhos de “tempo mínimo” e de “menor distância” vêm a ser iguais; assim, a luz, se não obstruída, viaja em linha reta. Suponha que tenhamos uma fonte de luz, um espelho plano e um observador em um meio uniforme. Se um raio de luz deixa a fonte, bate em um espelho e vai até o observador, então sua trajetória consiste em dois segmentos de reta, conforme mostra a Figura Ex-64. De acordo com o princípio de Fermat, a trajetória é tal que o tempo t gasto no percurso é mínimo ou, como o meio é uniforme, a trajetória será tal que a distância total percorrida de A a P a B será a menor possível. Suponha que o mínimo ocorre quando $dt/dx = 0$, mostre que o raio de luz irá atingir o espelho em um ponto P , tal que o “ângulo de incidência” θ_1 será igual ao “ângulo de reflexão” θ_2 .

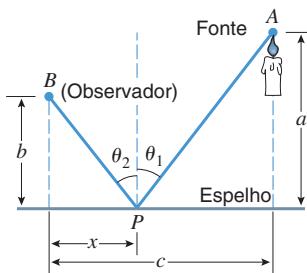


Figura Ex-64

65. O princípio de Fermat (Exercício 64) também explica por que um raio de luz que passa entre ar e água se inclina (refração). Imagine dois meios uniformes (como água e ar) e um raio de luz viajando de uma fonte A em um meio para um observador B em outro meio (Figura Ex-65). Sabe-se que a luz viaja a uma velocidade constante em um meio uniforme, porém mais vagarosamente em um meio mais denso (como a água) do que em um menos denso (como o ar). Consequentemente, o percurso de menor tempo entre A e B não é necessariamente uma reta, mas uma reta quebrada de A para P e para B , permitindo que a luz leve vantagem de sua maior velocidade no meio menos denso. A *Lei de Refração de Snell* (biografia na página 288) afirma que a trajetória do raio de luz é tal que

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

onde v_1 é a velocidade da luz no primeiro meio, v_2 , no segundo e θ_1 e θ_2 são os ângulos mostrados na Figura Ex-65. Mostre que isso segue da hipótese de que o caminho de tempo mínimo ocorre quando $dt/dx = 0$.

66. Um fazendeiro deseja caminhar a uma taxa constante de seu estábulo até um rio reto, encher um balde e levar para casa no menor tempo.
 - (a) Explique como esse problema se relaciona com o princípio de Fermat e o problema da reflexão da luz do Exercício 64.
 - (b) Use o resultado do Exercício 64 para descrever geometricamente qual o melhor caminho para o fazendeiro seguir.
 - (c) Use a parte (b) para determinar onde o fazendeiro deverá encher o balde se a casa e o estábulo estiverem localizados como na Figura Ex-66.

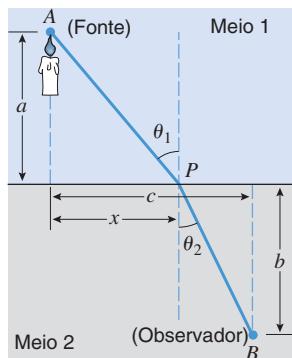


Figura Ex-65

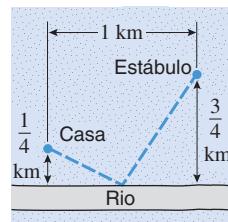


Figura Ex-66

67. Se uma quantidade física desconhecida é medida n vezes, as medidas x_1, x_2, \dots, x_n muitas vezes variam, dependendo de fatores incontroláveis, como temperatura, pressão atmosférica, etc. Assim, um cientista muitas vezes se depara com o problema de obter, a partir de n medidas observadas distintas, uma estimativa \bar{x} de uma quantidade desconhecida x . Um método de obter tal estimativa está baseado no princípio de Fermat. Suponha que a medida x_i é a i -ésima medida de n medidas. Se a medida x_i é a menor medida, o que significa que a soma das distâncias entre a medida x_i e as demais medidas é mínima? Use esse princípio para obter a estimativa \bar{x} da seguinte maneira:

princípio dos mínimos quadrados, que estabelece que a estimativa \bar{x} deve ser escolhida de forma a minimizar

$$s = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$$

que é a soma dos quadrados dos desvios entre a estimativa \bar{x} e os valores medidos. Mostre que a estimativa resultante do princípio dos mínimos quadrados é

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Isto é, \bar{x} é a média aritmética dos valores observados.

68. Prove: Se $f(x) \geq 0$ em um intervalo e se $f(x)$ tiver um valor máximo nesse intervalo em x_0 , então a função $\sqrt{f(x)}$ também tem um valor máximo em x_0 . Analogamente para valores mínimos. [Sugestão: Use o fato de que \sqrt{x} é uma função crescente no intervalo $[0, +\infty)$.]

69. **Texto** Discuta a importância de encontrar, em problemas de máximos e mínimos aplicados, os intervalos de valores possíveis impostos nas variáveis por restrições físicas.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.5

1. $x + \frac{1}{x}; (0, +\infty)$
2. $x(10 - x); [0, 10]$
3. $x \left(-\frac{4}{3}x + 4\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x; [0, 3]$
4. $x(20 - 2x)(32 - 2x) = 4x^3 - 104x^2 + 640x; [0, 10]$

4.6 MOVIMENTO RETILÍNEO

Nesta seção, continuaremos o estudo do movimento retilíneo iniciado na Seção 2.1. Definiremos matematicamente a noção de “aceleração” e mostraremos como utilizar as ferramentas do Cálculo, desenvolvidas anteriormente neste capítulo, para analisar mais profundamente o movimento retilíneo.

■ REVISÃO DE TERMINOLOGIA

Conforme vimos na Seção 2.1, uma partícula que pode se mover em qualquer sentido ao longo de uma reta coordenada é dita em **movimento retilíneo**. A reta pode ser um eixo x , um eixo y ou qualquer reta coordenada inclinada. Em discussões gerais, utilizaremos um eixo s como a reta do movimento. Vamos supor que foram escolhidas unidades para medir a distância e o tempo e que iniciamos a observação do movimento no instante $t = 0$. Quando a partícula se move ao longo do eixo s , sua coordenada s é alguma função do tempo, digamos $s = s(t)$. Dizemos que $s(t)$ é a **função posição** da partícula* e que o gráfico de s versus t é a **curva posição versus tempo**. Se a coordenada de uma partícula no instante t_1 for $s(t_1)$ e a coordenada em um tempo t_2 posterior for $s(t_2)$, então $s(t_2) - s(t_1)$ será denominado **deslocamento** da partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. O deslocamento descreve a variação na posição da partícula.

A Figura 4.6.1 mostra uma curva posição versus tempo típica para uma partícula em movimento retilíneo. Podemos observar, a partir do gráfico, que a coordenada da partícula no instante $t = 0$ é s_0 e deduzir, a partir do sinal de s , quando a partícula está do lado negativo ou positivo da origem durante sua trajetória ao longo da reta coordenada.

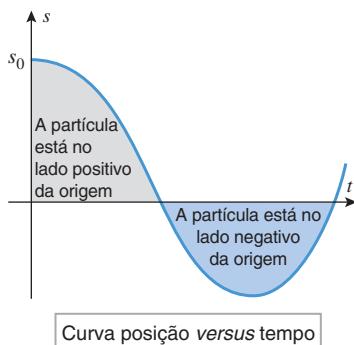


Figura 4.6.1

Willebrord van Rijen Snell (1591-1626) Matemático holandês. Snell sucedeu a seu pai no posto de professor de Matemática na Universidade de Leiden em 1613 e é mais famoso pelo resultado sobre refração da luz que leva seu nome. Embora o fenômeno tenha sido estudado desde a Grécia antiga com o astrônomo Ptolomeu, até o trabalho de Snell a relação era incor-

retamente pensada como sendo $\theta_1/v_1 = \theta_2/v_2$. A Lei de Snell foi publicada por Descartes em 1638, sem dar o devido crédito a Snell. Ele também descobriu um método de determinação de distâncias por triangulação que deu início à técnica moderna de confecção de mapas.

* Ao escrever $s = s(t)$ em vez da expressão mais familiar $s = f(t)$, estamos usando a letra s tanto para a variável dependente quanto para o nome da função, o que vem a ser prática comum na Engenharia e na Física.

► **Exemplo 1** A Figura 4.6.2a mostra a curva posição *versus* tempo para uma partícula em movimento em um eixo s . Descreva em palavras como varia a posição da partícula em relação ao tempo.

Solução A partícula está na posição $s = -3$ no instante $t = 0$. Ela se move no sentido positivo até o instante $t = 4$, já que s está crescendo. No instante $t = 4$, a partícula está na posição $s = 3$. Nesse instante, a partícula troca de sentido de movimento e se move no sentido negativo até o instante $t = 7$, pois s é decrescente. No instante $t = 7$, a partícula está na posição $s = -1$; dali em diante, ela permanece estacionada, pois s é constante para $t > 7$. Isso está ilustrado esquematicamente na Figura 4.6.2b. ◀

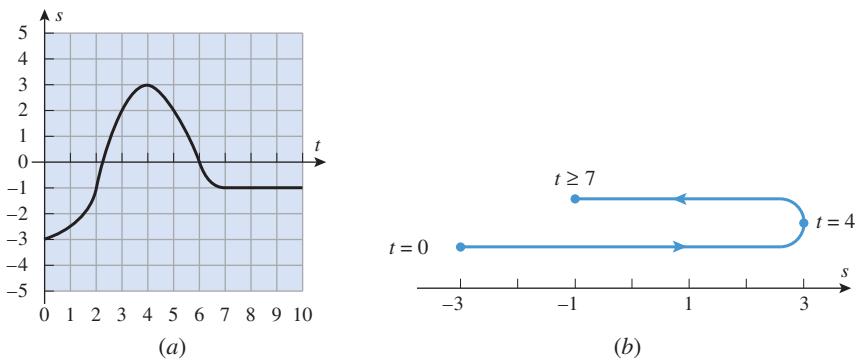


Figura 4.6.2

■ VELOCIDADE E VELOCIDADE ESCALAR

Para distinguir a velocidade instantânea da velocidade média, um nome mais adequado para $v(t)$ seria **função velocidade instantânea**. Contudo, vamos seguir a prática comum de chamá-la de “função velocidade”, deixando subentendido que ela descreve a velocidade instantânea.

Conforme vimos na Fórmula (5) da Seção 2.1 e na Fórmula (4) da Seção 2.2, a velocidade instantânea de uma partícula em movimento retilíneo é a derivada da função posição. Assim, se $s(t)$ for a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, então definimos a **função velocidade** $v(t)$ da partícula por

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

O sinal da velocidade diz o sentido do movimento: um valor positivo de $v(t)$ significa que s está crescendo com o tempo, de modo que a partícula se move no sentido positivo, e um valor negativo de $v(t)$ significa que s está decrescendo com o tempo, de modo que a partícula se move no sentido negativo. Se $v(t) = 0$, então a partícula está momentaneamente parada.

Para uma partícula em movimento retilíneo, é importante distinguir entre sua **velocidade**, que descreve quão rápido e em qual sentido a partícula se move, e sua **velocidade escalar**, que descreve somente quão rápido a partícula se move. Essa distinção é feita definindo a velocidade escalar como o valor absoluto da velocidade. Assim, uma partícula com velocidade de 2 m/s tem uma velocidade escalar de 2 m/s e está se movendo no sentido positivo, enquanto uma partícula com velocidade de -2 m/s também tem uma velocidade escalar de 2 m/s, mas está se movendo no sentido negativo.

Como a velocidade escalar instantânea de uma partícula é o valor absoluto de sua velocidade instantânea, definimos sua **função velocidade escalar** por

$$|v(t)| = |s'(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \quad (2)$$

A função rapidez, que é sempre não negativa, diz quão rápido a partícula está se movendo, mas não informa o sentido do movimento.

► **Exemplo 2** Seja $s(t) = t^3 - 6t^2$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s , onde s está em metros, enquanto t é dado em segundos. Encontre as funções ve-

locidade e velocidade escalar e mostre os gráficos da posição, da velocidade e da velocidade escalar *versus* tempo.

Solução A partir de (1) e (2), a velocidade instantânea e a velocidade escalar são dadas por

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t \quad \text{e} \quad |v(t)| = |3t^2 - 12t|$$

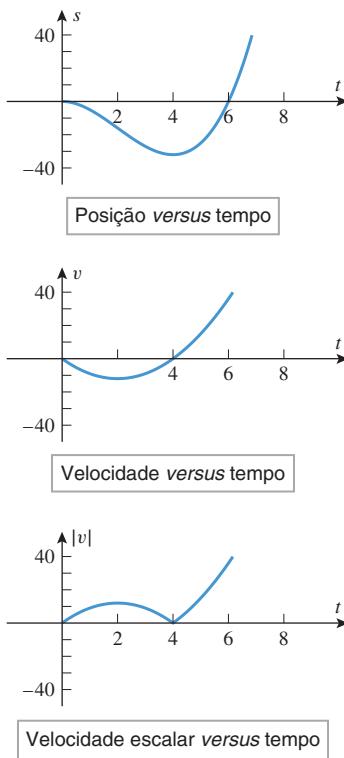


Figura 4.6.3

Os gráficos da Figura 4.6.3 fornecem uma importante informação visual sobre o movimento da partícula. Por exemplo, a curva posição *versus* tempo nos diz que a partícula está do lado negativo da origem com $0 < t < 6$, do lado positivo da origem com $t > 6$ e está na origem nos instantes $t = 0$ e $t = 6$. A curva velocidade *versus* tempo nos diz que a partícula move-se na direção negativa se $0 < t < 4$, na direção positiva se $t > 4$ e está momentaneamente parada nos instantes $t = 0$ e $t = 4$ (a velocidade é zero). A curva velocidade escalar *versus* tempo nos diz que a velocidade escalar da partícula é crescente com $0 < t < 2$, decrescente com $2 < t < 4$ e novamente crescente com $t > 4$.

ACELERAÇÃO

No movimento retilíneo, a taxa segundo a qual a velocidade instantânea de uma partícula varia em relação ao tempo é denominada **aceleração instantânea** ou, simplesmente, **aceleração**. Assim, se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função velocidade $v(t)$, então definimos a **função aceleração** da partícula por

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

Alternativamente, podemos usar o fato de que $v(t) = s'(t)$ para expressar a função aceleração em termos da função posição por

$$a(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (4)$$

Exemplo 3 Seja $s(t) = t^3 - 6t^2$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s , onde s está em metros e t , em segundos. Encontre a função aceleração instantânea $a(t)$ e mostre o gráfico da aceleração *versus* o tempo.

Solução Pelo Exemplo 2, a velocidade instantânea da partícula é $v(t) = 3t^2 - 12t$; logo, a aceleração instantânea é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

e a curva da aceleração *versus* tempo é a reta na Figura 4.6.4. Note que, nesse exemplo, a aceleração tem unidades de m/s^2 , uma vez que v está em metros por segundo (m/s) e o tempo, em segundos (s). ◀

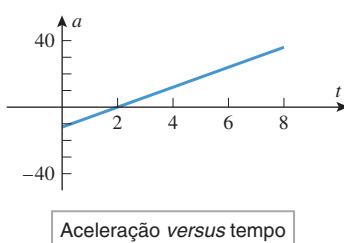


Figura 4.6.4

AUMENTANDO E DIMINUINDO A VELOCIDADE

Dizemos que uma partícula em movimento retilíneo está **aumentando a velocidade** se a velocidade escalar é crescente, e está **diminuindo a velocidade** se a velocidade escalar é decres-

cente. Em linguagem corrente, se um objeto está aumentando a velocidade, dizemos que está “acelerando” e, se estiver diminuindo a velocidade, está “desacelerando”, o que nos levaria a pensar que uma partícula em movimento retilíneo estará aumentando a velocidade se sua aceleração for positiva e diminuindo a velocidade se sua aceleração for negativa. Embora isso seja verdadeiro para uma partícula em movimento no sentido positivo, *não é válido* para uma partícula em movimento no sentido negativo. Isso é assim porque aceleração positiva implica velocidade crescente, e aumentar uma velocidade negativa decresce seu valor absoluto; analogamente, uma aceleração negativa implica uma velocidade decrescente, e diminuir uma velocidade negativa aumenta seu valor absoluto.

Essa discussão informal pode ser resumida como segue (Exercício 41):

Se $a(t) = 0$ ao longo de um certo intervalo, o que isso implica quanto ao movimento da partícula durante esse intervalo?

INTERPRETAÇÃO DO SINAL DA ACELERAÇÃO Uma partícula em movimento retilíneo está aumentando sua velocidade quando a velocidade e a aceleração tiverem o mesmo sinal, e diminuindo sua velocidade quando tiverem sinais opostos.

► **Exemplo 4** Nos Exemplos 2 e 3, encontramos as curvas velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo para uma partícula com função posição $s(t) = t^3 - 6t^2$. Use essas curvas para determinar quando a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade e confirme se seus resultados estão consistentes com a curva da velocidade escalar *versus* tempo obtida no Exemplo 2.

Solução No intervalo de tempo $0 < t < 2$, a velocidade e a aceleração são negativas; logo, a partícula está aumentando a velocidade. Isso está de acordo com a curva da velocidade escalar *versus* tempo, pois nesse intervalo a velocidade escalar é crescente. No intervalo $2 < t < 4$, a velocidade é negativa e a aceleração é positiva; assim, a partícula está diminuindo a velocidade. Isso também está de acordo com a curva velocidade escalar *versus* tempo, pois nesse intervalo a velocidade escalar é decrescente. Por fim, no intervalo $t > 4$, a velocidade e a aceleração são positivas, desse modo a partícula está aumentando a velocidade, o que de novo está de acordo com a curva velocidade escalar *versus* tempo. ◀

■ ANALISANDO A CURVA POSIÇÃO VERSUS TEMPO

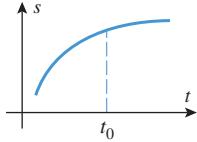
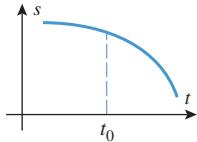
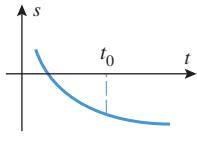
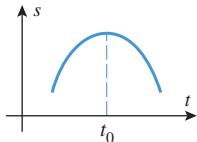
A curva posição *versus* tempo contém todas as informações significativas sobre a posição e a velocidade de uma partícula em movimento retilíneo.

- Se $s(t) > 0$, a partícula está no lado positivo do eixo s .
- Se $s(t) < 0$, a partícula está no lado negativo do eixo s .
- A inclinação da reta tangente em qualquer instante do tempo é a velocidade instantânea naquele instante.
- Quando a curva tiver inclinação positiva, a velocidade é positiva e a partícula se move na direção positiva.
- Quando a curva tiver inclinação negativa, a velocidade é negativa e a partícula se move na direção negativa.
- Quando a curva tiver inclinação nula, a velocidade é zero e a partícula está momentaneamente parada.

Informações sobre a aceleração de uma partícula em movimento retilíneo também podem ser deduzidas da curva posição *versus* tempo, examinando sua concavidade. Por exemplo, sabemos que a curva posição *versus* tempo será côncava para cima nos intervalos onde $s''(t) > 0$ e para baixo onde $s''(t) < 0$. No entanto, a partir de (4), sabemos que $s''(t)$ é a aceleração instantânea; logo, nos intervalos onde a curva posição *versus* tempo for côncava para cima, a partícula terá aceleração positiva, e onde for côncava para baixo, a aceleração será negativa.

A Tabela 4.6.1 resume nossas observações sobre a curva posição *versus* tempo.

Tabela 4.6.1
ANÁLISE DO MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA

CURVA POSIÇÃO VERSUS TEMPO	CARACTERÍSTICAS DA CURVA EM $t = t_0$	COMPORTAMENTO DA PARTÍCULA NO INSTANTE $t = t_0$
	<ul style="list-style-type: none"> $s(t_0) > 0$ Curva com inclinação positiva Curva côncava para baixo 	<ul style="list-style-type: none"> Partícula no lado positivo da origem Partícula movendo-se no sentido positivo Velocidade decrescente Partícula diminuindo a velocidade
	<ul style="list-style-type: none"> $s(t_0) > 0$ Curva com inclinação negativa Curva côncava para baixo 	<ul style="list-style-type: none"> Partícula no lado positivo da origem Partícula movendo-se no sentido negativo Velocidade decrescente Partícula aumentando a velocidade
	<ul style="list-style-type: none"> $s(t_0) < 0$ Curva com inclinação negativa Curva côncava para cima 	<ul style="list-style-type: none"> Partícula no lado negativo da origem Partícula movendo-se no sentido negativo Velocidade crescente Partícula diminuindo velocidade
	<ul style="list-style-type: none"> $s(t_0) > 0$ Curva com inclinação zero Curva côncava para baixo 	<ul style="list-style-type: none"> Partícula no lado positivo da origem Partícula momentaneamente parada Velocidade decrescente

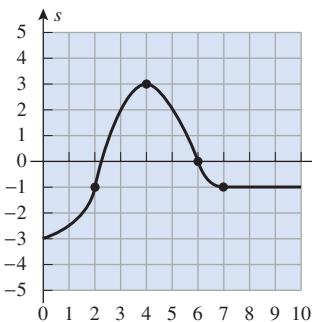


Figura 4.6.5

► **Exemplo 5** Use a curva posição *versus* tempo da Figura 4.6.5 para determinar quando a partícula do Exemplo 1 está aumentando e quando está diminuindo a velocidade.

Solução De $t = 0$ a $t = 2$, a aceleração e a velocidade são positivas; logo, a partícula está aumentando a velocidade. De $t = 2$ a $t = 4$, a aceleração é negativa e a velocidade, positiva; logo, a partícula está diminuindo a velocidade. Em $t = 4$, a velocidade é zero; logo, a partícula parou momentaneamente. De $t = 4$ a $t = 6$, a aceleração é negativa e a velocidade também; logo, a partícula está aumentando a velocidade. De $t = 6$ a $t = 7$, a aceleração é positiva e a velocidade é negativa; logo, a partícula está diminuindo a velocidade. Daí por diante, a velocidade é zero e, assim, a partícula parou. ◀

► **Exemplo 6** Suponha que $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$ seja a função posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s . Analise o movimento da partícula com $t \geq 0$.

Solução As funções velocidade e aceleração são dadas por

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 6(t - 2)(t - 5)$$

$$a(t) = v'(t) = 12t - 42 = 12\left(t - \frac{7}{2}\right)$$

- **Direção do movimento:** A análise de sinais da função velocidade na Figura 4.6.6 mostra que a partícula está se movendo no sentido positivo ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t < 2$, para momentaneamente no instante $t = 2$, move-se no sentido negativo ao

longo do intervalo de tempo $2 < t < 5$, para momentaneamente no instante $t = 5$ e, daí em diante, segue no sentido positivo.

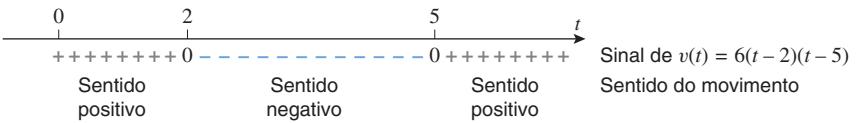


Figura 4.6.6

- *Variação na velocidade escalar:* A Figura 4.6.7 mostra uma comparação dos sinais das funções velocidade e aceleração. Como a partícula está aumentando a velocidade quando os sinais são iguais e diminuindo quando são opostos, vemos que a partícula está diminuindo a velocidade no intervalo de tempo $0 \leq t < 2$ e, então, para momentaneamente no instante $t = 2$. Em seguida, ela acelera ao longo do intervalo de tempo $2 < t < \frac{7}{2}$. A aceleração instantânea no instante $t = \frac{7}{2}$ é zero, de modo que a partícula não está nem aumentando nem diminuindo a velocidade. Ao longo do intervalo de tempo $\frac{7}{2} < t < 5$, a partícula está diminuindo a velocidade e, então, para momentaneamente no instante $t = 5$. Daí em diante, aumenta a velocidade.

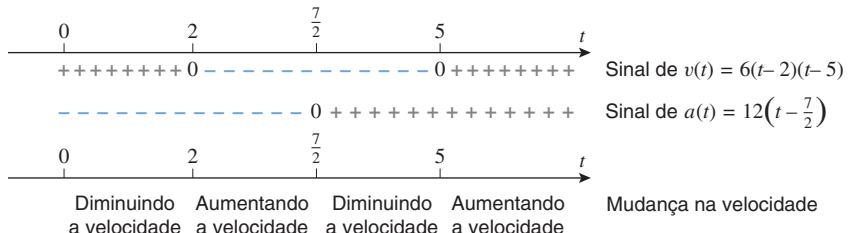


Figura 4.6.7

- *Conclusões:* O diagrama na Figura 4.6.8 resume esquematicamente a informação acima. A linha marcada abaixo da figura é apenas descritiva, com o verdadeiro trajeto ocorrendo no eixo coordenado, para lá e para cá. As coordenadas da partícula nos instantes $t = 0$, $t = 2$, $t = \frac{7}{2}$ e $t = 5$ foram calculadas a partir de $s(t)$. Os segmentos em vermelho indicam que a partícula está aumentando a velocidade, e os azuis indicam que está diminuindo. ◀

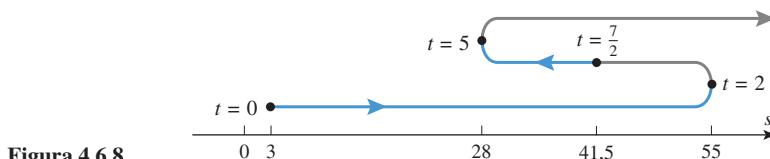


Figura 4.6.8

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.6 (Ver página 296 para respostas.)

- As funções velocidade $v(t)$ e posição $s(t)$ de uma partícula em movimento retilíneo estão relacionadas pela equação _____, e as funções aceleração $a(t)$ e velocidade $v(t)$ estão relacionadas pela equação _____.
- Suponha que uma partícula se move ao longo do eixo s com função posição $s(t) = 7t - 2t^2$. No instante $t = 3$, a posição da partícula é _____, sua velocidade é _____, sua velocidade escalar é _____ e sua aceleração é _____.
- Uma partícula em movimento retilíneo está aumentando a velocidade se os sinais de sua velocidade e aceleração são _____ e diminuindo a velocidade se os sinais são _____.
- Suponha que uma partícula se move ao longo do eixo s com função posição $s(t) = t^4 - 24t^2$ ao longo do intervalo $t \geq 0$. A partícula desacelera no(s) intervalo(s) de tempo _____.

EXERCÍCIOS 4.6  Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Abaixo estão os gráficos de três funções posição. Em cada caso, determine o sinal da velocidade e o da aceleração e, então, se a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade.

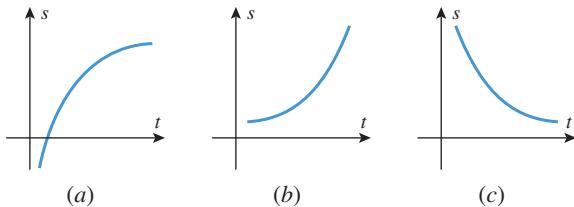


Figura Ex-1

2. Abaixo estão os gráficos de três funções velocidade. Em cada caso, determine o sinal da aceleração e, então, se a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade.

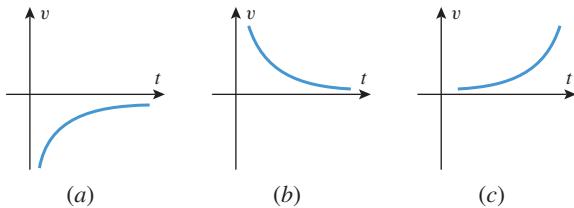


Figura Ex-2

3. Abaixo está o gráfico de uma função posição de uma partícula movendo-se em um eixo horizontal x .

- A partícula está se movendo para a esquerda ou para a direita no instante t_0 ?
- A aceleração é positiva ou negativa no instante t_0 ?
- A partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade no instante t_0 ?
- E no instante t_1 , está aumentando ou diminuindo a velocidade?

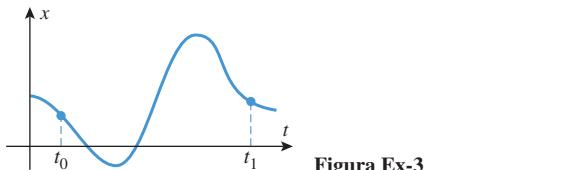


Figura Ex-3

4. Para os gráficos a seguir, associe as funções posição (a)–(c) com as funções velocidade (I)–(III) correspondentes.

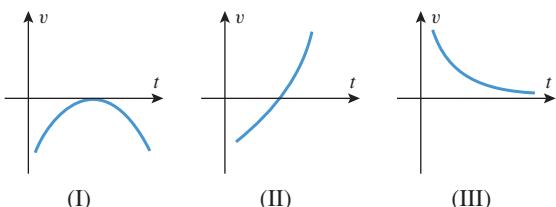
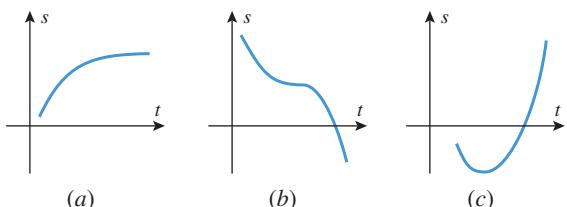


Figura Ex-4

5. Esboce um gráfico razoável de s versus t para um camundongo fechado em um corredor estreito (um eixo s com o sentido positivo para a direita) correndo para frente e para trás da seguinte forma: corre para a direita com uma velocidade constante de 1,2 m/s por um tempo, então gradualmente diminui para 0,6 m/s, logo em seguida passa para 2,0 m/s e, então, gradualmente vai diminuindo até parar, mas imediatamente reverte a direção e logo atinge 1,2 m/s.

6. A figura abaixo mostra o gráfico de s versus t para uma formiga movendo-se ao longo de um cano estreito vertical (um eixo s com sentido positivo para cima).

- Quando, se é que ocorre, a formiga atinge a origem?
- Quando, se é que ocorre, a formiga está com a velocidade zero?
- Quando, se é que ocorre, a formiga move-se para baixo?

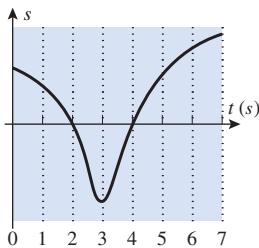


Figura Ex-6

7. A figura a seguir mostra o gráfico velocidade versus tempo, para uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado. Faça um esboço dos gráficos velocidade escalar versus tempo e aceleração versus tempo.

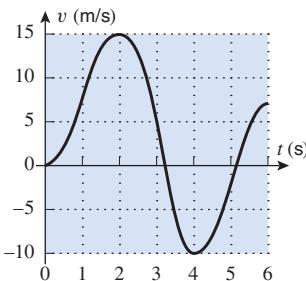


Figura Ex-7

8. A figura a seguir mostra o gráfico posição versus tempo para um elevador que sobe 40 m entre uma parada e outra.

- Estime a velocidade do elevador no meio da subida.

- (b) Faça um esboço dos gráficos das curvas velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo.

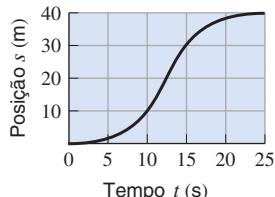


Figura Ex-8

9-12 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

9. Uma partícula estará aumentando sua velocidade se o gráfico da posição *versus* tempo for crescente.
10. A velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo.
11. A aceleração é o valor absoluto da velocidade.
12. Se o gráfico da posição *versus* tempo for crescente e côncavo para baixo, então a partícula estará diminuindo sua velocidade.
13. A figura abaixo mostra o gráfico velocidade *versus* tempo em um teste. Usando esse gráfico, estime:
 - (a) A aceleração a 60 milhas por hora (em pés por segundo ao quadrado, lembrando que 1 milha/h/s = 1,467 pés/s²).
 - (b) O instante em que ocorre a aceleração máxima.

Fonte: Dados da *Car and Driver Magazine*, dezembro 2010.

14. A figura abaixo mostra o gráfico velocidade *versus* tempo em um teste. Usando esse gráfico, estime:
 - (a) A aceleração a 60 milhas por hora (em pés por segundo ao quadrado, lembrando que 1 milha/h/s = 1,467 pés/s²).
 - (b) O instante em que ocorre a aceleração máxima.

Fonte: Dados da *Car and Driver Magazine*, março 2011.

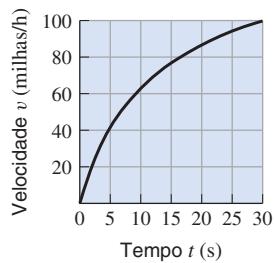


Figura Ex-13

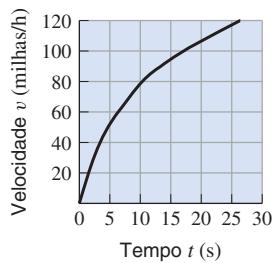


Figura Ex-14

15-16 A função $s(t)$ descreve a posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t está em segundos.

- (a) Faça uma tabela mostrando a posição, a velocidade e a aceleração com duas casas decimais nos instantes $t = 1, 2, 3, 4$ e 5 .
- (b) Em cada um dos tempos de (a), verifique se a partícula está parada; se não estiver, determine o sentido do movimento.
- (c) Em cada um dos tempos de (a), verifique se a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade, ou nenhum dos dois. ■

15. $s(t) = \sin \frac{\pi t}{4}$

16. $s(t) = t^4 e^{-t}, \quad t \geq 0$

17-22 A função $s(t)$ descreve a posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t está em segundos.

- (a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
- (b) Encontre no instante $t = 1$ a posição, a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração.
- (c) Em que instantes a partícula está parada?
- (d) Quando a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade?
- (e) Encontre a distância total percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 5$. ■

17. $s(t) = t^3 - 3t^2, \quad t \geq 0$

18. $s(t) = t^4 - 4t^2 + 4, \quad t \geq 0$

19. $s(t) = 9 - 9 \cos(\pi t/3), \quad 0 \leq t \leq 5$

20. $s(t) = \frac{t}{t^2 + 4}, \quad t \geq 0$

21. $s(t) = (t^2 + 8)e^{-t/3}, \quad t \geq 0$

22. $s(t) = \frac{1}{4}t^2 - \ln(t+1), \quad t \geq 0$

23. Seja $s(t) = t / (t^2 + 5)$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t está em segundos. Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para $t \geq 0$ e use os gráficos quando for necessário.

- (a) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que ocorre a primeira reversão do sentido do movimento da partícula e, então, encontre esse instante.
- (b) Encontre a posição exata da primeira reversão do sentido do movimento da partícula.
- (c) Use o gráfico apropriado para fazer estimativas dos intervalos onde a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade e depois encontre esses intervalos.

24. Seja $s(t) = t / e^t$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t está em segundos. Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para $t \geq 0$ e use os gráficos quando for necessário.

- (a) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que há a primeira reversão do sentido do movimento da partícula e, então, encontre esse instante.
- (b) Encontre a posição exata da primeira reversão do sentido do movimento da partícula.
- (c) Use os gráficos apropriado para fazer estimativas dos intervalos onde a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade e, depois, encontre esses intervalos.

25-32 É dada uma função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado. Use o método do Exemplo 6 para analisar o movimento da partícula em $t \geq 0$ e faça um esboço esquemático do movimento (como o da Figura 4.6.8). ■

25. $s = -4t + 3$

26. $s = 5t^2 - 20t$

27. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$

28. $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$

29. $s = 16t e^{-(t^2/8)}$

30. $s = t + \frac{25}{t+2}$

31. $s = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 1, & t \geq 2\pi \end{cases}$

32. $s = \begin{cases} 2t(t-2)^2, & 0 \leq t < 3 \\ 13 - 7(t-4)^2, & t \geq 3 \end{cases}$

33. Seja $s(t) = 5t^2 - 22t$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, sendo s em metros e t em segundos.

- (a) Encontre a velocidade escalar máxima da partícula no intervalo $1 \leq t \leq 3$.
 (b) No intervalo de (a), quando a partícula está mais longe da origem? Qual é sua posição nesse instante?

34. Seja $s = 100/(t^2 + 12)$ a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta coordenada, onde s está em metros e t está em segundos. Encontre a velocidade escalar máxima da partícula para $t \geq 0$ e o sentido do movimento dela quando está com velocidade escalar máxima.

- 35-36 É dada uma função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta coordenada. (a) Estime s e v quando $a = 0$. (b) Estime s e a quando $v = 0$. ■

35. $s = \ln(3t^2 - 12t + 13)$ 36. $s = t^3 - 6t^2 + 1$

37. Seja $s = \sqrt{2t^2 + 1}$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado.

- (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de v versus t e faça uma conjectura sobre a velocidade da partícula quando $t \rightarrow +\infty$.
 (b) Verifique sua conjectura obtendo $\lim_{t \rightarrow +\infty} v$.

38. (a) Use a regra da cadeia para mostrar que, para uma partícula em movimento retilíneo, $a = v(dv/ds)$.
 (b) Seja $s = \sqrt{3t+7}$, $t \geq 0$. Encontre uma fórmula para v em termos de s e use a equação de (a) para determinar a aceleração quando $s = 5$.

39. Suponha que as funções posição de duas partículas P_1 e P_2 , movendo-se ao longo de uma mesma reta, sejam

$$s_1 = \frac{1}{2}t^2 - t + 3 \quad \text{e} \quad s_2 = -\frac{1}{4}t^2 + t + 1$$

respectivamente, com $t \geq 0$.

- (a) Prove que P_1 e P_2 não colidem.
 (b) Qual é a menor distância entre P_1 e P_2 ?
 (c) Durante quais intervalos de tempo elas se movem em sentidos opostos?

40. Sejam $s_A = 15t^2 + 10t + 20$ e $s_B = 5t^2 + 40t$, $t \geq 0$, as funções posição dos carros A e B movendo-se ao longo de faixas paralelas retas de uma estrada.

- (a) Quão adiantado está o carro A em relação ao carro B quando $t = 0$?
 (b) Em que instantes os dois carros estão alinhados?
 (c) Em que instantes os carros têm a mesma velocidade e qual é o carro que está na frente nesse momento?

41. Prove que uma partícula aumenta sua velocidade se a velocidade e a aceleração tiverem o mesmo sinal e diminui no caso de sinais contrários. [Sugestão: Seja $r(t) = |v(t)|$, e encontre $r'(t)$ usando a regra da cadeia.]

42. **Texto** Um velocímetro numa bicicleta calcula a velocidade escalar da bicicleta medindo o tempo de rotação de uma volta de sua roda. Explique como essa medida pode ser usada para calcular uma velocidade média e discuta quão bem ela aproxima a velocidade instantânea da bicicleta.

43. **Texto** Um foguete amador é disparado para o alto e retorna ao chão depois de acabar seu combustível. Descreva a aceleração do foguete e quando o foguete está aumentando ou diminuindo sua velocidade durante o voo. Acompanhe sua descrição com um gráfico da aceleração versus tempo do foguete.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 4.6

1. $v(t) = s'(t)$; $a(t) = v'(t)$ 2. 3; -5; 5; -4 3. iguais; opostos 4. $2 < t < 2\sqrt{3}$

4.7 MÉTODO DE NEWTON

Na Seção 1.5, mostramos como aproximar as raízes de uma equação $f(x) = 0$ usando o Teorema do Valor Intermediário. Nesta seção, estudaremos uma técnica denominada Método de Newton, que, em geral, é mais eficiente do que aquele método. O Método de Newton é a técnica usada por muitos programas de computadores comerciais e científicos para encontrar raízes.

■ MÉTODO DE NEWTON

Em Álgebra elementar, aprende-se que a solução de uma equação de primeiro grau $ax + b = 0$ é dada pela fórmula $x = -b/a$ e que as soluções da equação de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

são dadas pela fórmula quadrática. Existem fórmulas também para soluções de equações de terceiro e quarto grau, embora muito complicadas para uso prático. Em 1826, foi mostrado pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel que é impossível construir uma fórmula semelhante para soluções de uma equação *geral* de quinto ou maior grau. Assim, para uma equação polinomial *específica* de quinto grau, como

$$x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 17x - 8 = 0$$

pode ser difícil ou impossível encontrar valores exatos para todas as soluções. Dificuldades análogas ocorrem com equações não polinomiais, como

$$x - \cos x = 0$$

Para essas equações, as soluções são geralmente aproximadas de alguma forma, frequentemente pelo método que vamos expor a seguir.

Vamos supor que estejamos tentando encontrar uma raiz r da equação $f(x) = 0$ e que por algum método, como gerando o gráfico de $y = f(x)$ e examinando seu corte com o eixo x , tenhamos obtido uma aproximação inicial x_1 rudimentar de r . Se $f(x_1) = 0$, então $r = x_1$. Se $f(x_1) \neq 0$, então entendemos que é mais fácil resolver uma equação linear do que a equação proposta. A melhor aproximação linear de $y = f(x)$ perto de $x = x_1$ é dada pela reta tangente ao gráfico de f em x_1 ; portanto, deve ser razoável esperar que o corte dessa reta com o eixo x forneça uma melhor aproximação de r . Denotemos esse corte por x_2 (Figura 4.7.1). Agora, podemos tratar x_2 da mesma maneira como tratamos x_1 . Se $f(x_2) = 0$, então $r = x_2$. Se $f(x_2) \neq 0$, entramos construindo a reta tangente ao gráfico de f em x_2 e tomamos x_3 como sendo o corte dessa reta com o eixo x . Continuando dessa maneira, podemos gerar uma sucessão de valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ que geralmente converge para r . Esse procedimento para aproximar r é denominado **Método de Newton**.

Para implementar analiticamente o Método de Newton, precisamos obter uma fórmula que nos diga como calcular cada aproximação melhorada a partir da aproximação precedente.

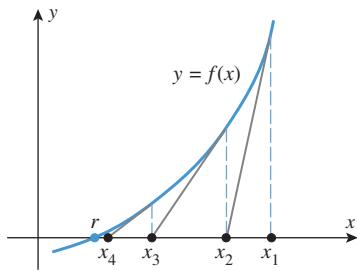


Figura 4.7.1



Niels Henrik Abel (1802–1829) Matemático norueguês. Abel era filho de um pobre ministro luterano e de uma mãe extraordinariamente bela, de quem herdou sua surpreendente beleza. Em sua breve vida de 26 anos, ele viveu na pobreza e sofreu uma sucessão de adversidades; ainda assim, conseguiu provar resultados importantes que alteraram para sempre o panorama da Matemática. Aos 13 anos, foi mandado para longe de casa, para uma escola cujos melhores dias já haviam passado. Por um golpe de sorte, a escola acabara de contratar o professor Bernt Michael Holmboe, o qual rapidamente descobriu a extraordinária habilidade de Abel para a Matemática. Juntos, eles estudaram os livros de Cálculo de Euler, os trabalhos de Newton e os dos matemáticos franceses da época. Quando de sua formatura, Abel já estava a par da maior parte da grande literatura matemática. Em 1820, seu pai morreu, deixando a família em um terrível aperto financeiro. Abel somente conseguiu entrar na Universidade de Christiania, em Oslo, porque ganhou um quarto de graça e vários professores o sustentaram com seus próprios salários. A universidade não tinha cursos avançados em Matemática; assim, Abel recebeu um grau preliminar em 1822 e continuou sozinho seus estudos de Matemática. Em 1824, publicou por conta própria a prova da impossibilidade da solução algébrica de uma equação polinomial geral de quinto grau. Com esperança de que o levaria ao reconhecimento e à aceitação pela comunidade matemática, Abel enviou o artigo ao grande matemático alemão Gauss, que negligentemente o declarou uma “monstru-

idade”, colocando-o de lado. Porém, em 1826, o artigo de Abel sobre equações de quinto grau e outros trabalhos foram publicados na primeira edição de uma nova revista, fundada por seu amigo Leopold Crelle. No verão de 1826, ele completou um trabalho histórico sobre funções transcendentas, que submeteu à Academia de Ciência da França, na esperança de se consolidar como um grande matemático, pois muitos jovens ganharam rápida distinção ao ter seus trabalhos aceitos pela Academia. No entanto, Abel esperou em vão, pois o artigo ou foi ignorado ou perdido por um dos jurados e não apareceu de novo, senão dois anos após sua morte. Esse artigo foi posteriormente descrito por um grande matemático como “a descoberta matemática do século”. Após submeter seu artigo, Abel voltou à Noruega, com tuberculose e uma grande dívida. Enquanto ganhava a vida com dificuldade como professor particular, continuava a produzir grandes trabalhos, e sua fama se espalhou. Logo, grandes esforços foram feitos para obter para ele uma posição matemática adequada. Temendo que seu grande trabalho tivesse sido perdido pela Academia, enviou uma prova do resultado principal para Crelle, em janeiro de 1829. Em abril, sofreu uma violenta hemorragia e morreu. Dois dias após, Crelle escreveu informando-o de que uma nomeação estava assegurada para ele em Berlim e que seus dias de pobreza tinham acabado! O grande artigo de Abel foi, finalmente, publicado pela Academia 12 anos após sua morte.

[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Niels_Henrik_Abel2.jpg]

Para tanto, observamos que a forma ponto-inclinação da reta tangente a $y = f(x)$, na aproximação inicial x_1 , é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad (1)$$

Se $f'(x_1) \neq 0$, então essa reta não é paralela ao eixo x e, consequentemente, corta-o em algum ponto $(x_2, 0)$. Substituindo as coordenadas desse ponto em (1), obtemos

$$-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Resolvendo em x_2 , obtemos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2)$$

A próxima aproximação pode ser obtida mais facilmente. Se considerarmos x_2 como a aproximação inicial e x_3 como a nova aproximação, podemos simplesmente aplicar (2) com x_2 em lugar de x_1 e x_3 em lugar de x_2 . Portanto

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad (3)$$

desde que $f'(x_2) \neq 0$. Em geral, se x_n for a enésima aproximação, então será evidente, a partir do padrão em (2) e (3), que a aproximação melhorada x_{n+1} será dada por

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

► **Exemplo 1** Use o Método de Newton para aproximar as soluções reais de

$$x^3 - x - 1 = 0$$

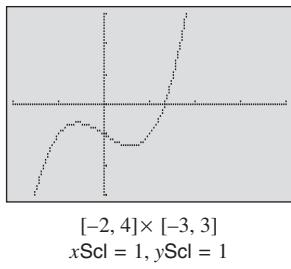


Figura 4.7.2

Solução Seja $f(x) = x^3 - x - 1$; logo, $f'(x) = 3x^2 - 1$ e (4) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} \quad (5)$$

A partir do gráfico de f na Figura 4.7.2, vemos que a equação dada tem uma só raiz real. Essa solução está entre 1 e 2, pois $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Vamos usar como primeira aproximação $x_1 = 1,5$ ($x_1 = 1$ ou $x_1 = 2$ também seriam escolhas razoáveis).

Fazendo $n = 1$ em (5) e substituindo $x_1 = 1,5$, obtemos

$$x_2 = 1,5 - \frac{(1,5)^3 - 1,5 - 1}{3(1,5)^2 - 1} \approx 1,34782609 \quad (6)$$

(Usamos uma calculadora que exibe 9 dígitos.) A seguir, fazendo $n = 2$ em (5) e substituindo x_2 , obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1,32520040 \quad (7)$$

Se continuarmos esse processo até que sejam geradas duas aproximações sucessivas iguais, obteremos

$$x_1 = 1,5$$

$$x_2 \approx 1,34782609$$

$$x_3 \approx 1,32520040$$

$$x_4 \approx 1,32471817$$

$$x_5 \approx 1,32471796$$

$$x_6 \approx 1,32471796$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitas calculadoras e programas de computador calculam internamente com mais casas decimais do que conseguem exibir. Sempre que possível, devemos utilizar os valores estocados calculados em contas anteriores, em vez de os valores exibidos na tela do recurso computacional. Assim, no Exemplo 1, o valor de x_2 utilizado em (7) deveria ser o valor estocado de x_2 , e não o valor exibido em (6).

Neste ponto, não há necessidade de continuar mais adiante, pois atingimos o limite de precisão de nossa calculadora, e todas as aproximações subsequentes geradas por ela provavelmente serão iguais. Assim, a solução é aproximadamente $x \approx 1,32471796$. ◀

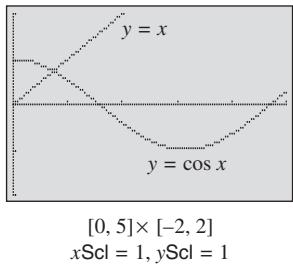


Figura 4.7.3

► **Exemplo 2** Fica evidente, a partir da Figura 4.7.3, que se x estiver em radianos, então a equação

$$\cos x = x$$

tem uma solução entre 0 e 1. Use o Método de Newton para aproximá-la.

Solução Reescreva a equação como

$$x - \cos x = 0$$

e aplique (4) com $f(x) = x - \cos x$. Como $f'(x) = 1 + \sin x$, (4) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n} \quad (8)$$

A partir da Figura 4.7.3, a solução parece mais próxima de $x = 1$ do que de $x = 0$; logo, vamos usar $x_1 = 1$ (em radianos) como aproximação inicial. Fazendo $n = 1$ em (8) e substituindo $x_1 = 1$, obtemos

$$x_2 = 1 - \frac{1 - \cos 1}{1 + \sin 1} \approx 0,750363868$$

A seguir, vamos fazer $n = 2$ em (8) e, substituindo o valor de x_2 acima, obteremos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos x_2}{1 + \sin x_2} \approx 0,739112891$$

Se continuarmos esse processo até que sejam geradas duas aproximações sucessivas iguais, obteremos

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &\approx 0,750363868 \\ x_3 &\approx 0,739112891 \\ x_4 &\approx 0,739085133 \\ x_5 &\approx 0,739085133 \end{aligned}$$

Assim, no limite da precisão de nossa calculadora, a solução da equação $\cos x = x$ é $x \approx 0,739085133$. ◀

■ ALGUMAS DIFICULDADES COM O MÉTODO DE NEWTON

Quando o Método de Newton funciona, as aproximações convergem para a solução com grande velocidade. Há situações, porém, nas quais o método falha. Por exemplo, se $f'(x_n) = 0$ com algum n , então (4) envolve uma divisão por zero, tornando impossível gerar x_{n+1} . Porém, isso pode ser previsto, pois a reta tangente a $y = f(x)$ é paralela ao eixo x quando $f'(x_n) = 0$, ou seja, ela não cruza o eixo x para gerar a próxima aproximação (Figura 4.7.4).

O Método de Newton também pode falhar por outras razões; às vezes, ele pode ignorar a raiz que tentamos encontrar e convergir para outra; e, às vezes, também pode não收敛ir de todo. Por exemplo, considere a equação

$$x^{1/3} = 0$$

cuja única solução é $x = 0$. Vamos tentar aproximar essa solução pelo Método de Newton começando com $x_0 = 1$. Tomando $f(x) = x^{1/3}$, a Fórmula (4) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^{1/3}}{\frac{1}{3}(x_n)^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

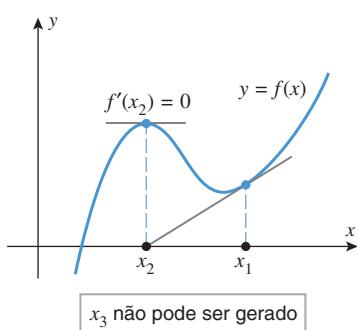


Figura 4.7.4

Começando com $x_1 = 1$, a sequência de valores gerados por essa fórmula é

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = -8, \dots$$

que, obviamente, não converge para $x = 0$. A Figura 4.7.5 ilustra o que está acontecendo geometricamente nessa situação.

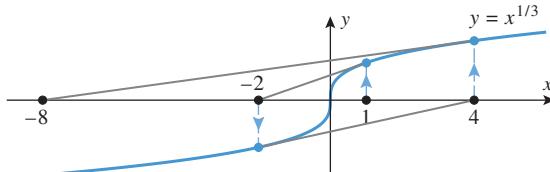


Figura 4.7.5

Para aprender mais sobre as condições de convergência do Método de Newton e para uma discussão sobre a questão dos erros, o leitor deve consultar um livro de Análise Numérica. Para uma discussão mais profunda do Método de Newton e sua relação com os estudos atuais sobre caos e fractais, o leitor pode ler o artigo “Newton’s Method and Fractal Patterns”, de Phillip Straffin, publicado em *Applications of Calculus*, MAA Notes, Vol. 3, nº 29, 1993, da Mathematical Association of America.



EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.7 (Ver página 302 para respostas.)

- Use o gráfico ao lado para estimar x_2 e x_3 se o Método de Newton for aplicado à equação $y = f(x)$ com $x_1 = 8$.
- Suponha que $f(1) = 2$ e que $f'(1) = 4$. Se o Método de Newton for aplicado a $y = f(x)$ com $x_1 = 1$, então $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que $f(0) = 3$ e que $x_2 = 3$ quando o Método de Newton for aplicado a $y = f(x)$ com $x_1 = 0$. Então $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Se o Método de Newton for aplicado a $y = e^x - 1$ com $x_1 = \ln 2$, então $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

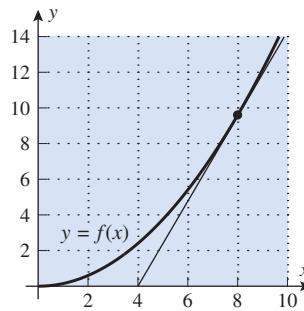


Figura Ex-1

EXERCÍCIOS 4.7 Recurso Gráfico

Nestes exercícios, dê as respostas com tantas casas decimais quantas forem permitidas por seu recurso computacional, mas siga o procedimento delineado na caixa Domínio da Tecnologia à página 298. ■

- Aproxime $\sqrt{2}$ aplicando o Método de Newton à equação $x^2 - 2 = 0$.
- Aproxime $\sqrt[3]{5}$ aplicando o Método de Newton à equação $x^3 - 5 = 0$.
- Aproxime $\sqrt[3]{6}$ aplicando o Método de Newton à equação $x^3 - 6 = 0$.
- Qual equação devemos usar para aproximar a raiz enésima de a pelo Método de Newton?

5-8 A equação dada tem uma solução real. Aproxime-a pelo Método de Newton. ■

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 5. $x^3 - 2x - 2 = 0$ | 6. $x^3 + x - 1 = 0$ |
| 7. $x^5 + x^4 - 5 = 0$ | 8. $x^5 - 3x + 3 = 0$ |

9-14 Use um recurso gráfico computacional para determinar quantas soluções tem a equação e, então, use o Método de Newton para aproximar a solução que satisfaça a condição dada. ■

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 9. $x^4 + x^2 - 4 = 0; x < 0$ | 10. $x^5 - 5x^3 - 2 = 0; x > 0$ |
| 11. $2 \cos x = x; x > 0$ | 12. $\sin x = x^2; x > 0$ |

13. $x - \operatorname{tg} x = 0; \pi/2 < x < 3\pi/2$

14. $1 + e^x \operatorname{sen} x = 0; \pi/2 < x < 3\pi/2$

15-20 Use um recurso gráfico computacional para determinar o número de vezes que as curvas se intersectam; aplique, então, o Método de Newton, quando necessário, para aproximar as coordenadas x das intersecções. ■

15. $y = x^3$ e $y = 1 - x$

16. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x^3 - 2x^2 + 1$

17. $y = x^2$ e $y = \sqrt{2x + 1}$

18. $y = \frac{1}{8}x^3 - 1$ e $y = \cos x - 2$

19. $y = 1$ e $y = e^x \operatorname{sen} x; 0 < x < \pi$

20. $y = e^{-x}$ e $y = \ln x$

21-24 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

21. O Método de Newton usa a reta tangente a $y = f(x)$ em $x = x_n$ para calcular x_{n+1} .

22. O Método de Newton é um procedimento para encontrar soluções exatas de $f(x) = 0$.

23. Se $f(x) = 0$ tiver uma raiz, então o Método de Newton começando em $x = x_1$ aproximará a raiz mais próxima de x_1 .

24. O Método de Newton pode ser usado para aproximar um ponto de interseção de duas curvas.

25. A **regra mecânica** para aproximar raízes quadradas afirma que $\sqrt{a} \approx x_{n+1}$, onde

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e x_1 é qualquer aproximação positiva de \sqrt{a} .

(a) Aplique o Método de Newton a

$$f(x) = x^2 - a$$

para deduzir a regra mecânica.

(b) Use-a para aproximar $\sqrt{10}$.

26. Muitas calculadoras computam recíprocos usando a aproximação $1/a \approx x_{n+1}$, onde

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e x_1 é uma aproximação inicial de $1/a$. Essa fórmula torna possível efetuar divisões usando multiplicações e subtrações, o que é um procedimento mais rápido do que dividir diretamente.

(a) Aplique o Método de Newton a

$$f(x) = \frac{1}{x} - a$$

para deduzir essa aproximação.

(b) Use a fórmula para aproximar $\frac{1}{17}$.

27. Use o Método de Newton para aproximar o mínimo absoluto de $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 5x$.

28. Use o Método de Newton para aproximar o máximo absoluto de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, \pi]$.

29. Use o Método de Newton para aproximar, com duas casas decimais, as coordenadas x dos pontos de inflexão da função

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + x^2}$$

30. Use o Método de Newton para aproximar o máximo absoluto de $f(x) = (1 - 2x)\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

31. Use o Método de Newton para aproximar as coordenadas do ponto sobre a parábola $y = x^2$ mais próximo do ponto $(1, 0)$.

32. Use o Método de Newton para aproximar as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito sob a curva $y = \cos x$ para $0 \leq x \leq \pi/2$, conforme a Figura Ex-32.

33. (a) Mostre que, sobre um círculo de raio r , o ângulo central θ que subtende um arco de comprimento 1,5 vezes o comprimento L de sua corda satisfaz a equação $\theta = 3 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (ver Figura Ex-33).

(b) Use o Método de Newton para aproximar θ .

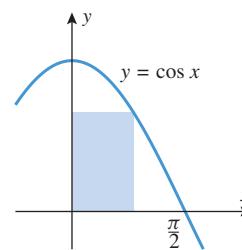


Figura Ex-32

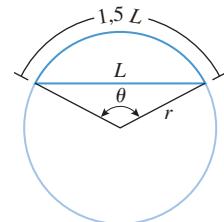


Figura Ex-33

34. Um **segmento** de um círculo é a região compreendida por um arco e sua corda (ver Figura Ex-34). Se r for o raio do círculo e θ , o ângulo subentendido no centro do círculo, então pode-se mostrar que a área A do segmento é $A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, onde θ está em radianos. Encontre o valor de θ para o qual a área do segmento é um quarto da área do círculo. Dê o valor de θ até o grau mais próximo.

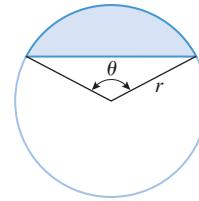


Figura Ex-34

35-36 Use o Método de Newton para aproximar todos os valores reais de y que satisfazem a equação dada para o valor de x indicado.

35. $xy^4 + x^3y = 1; x = 1$

36. $xy - \cos(\frac{1}{2}xy) = 0; x = 2$

37. Uma **anuidade** é uma sequência de pagamentos iguais que são pagos ou recebidos em intervalos regulares de tempo. Por exemplo, podemos querer depositar quantias iguais ao final de cada ano em uma poupança, a fim de acumular uma certa quantia em algum momento no futuro. Se, ao final de cada ano, forem acrescentados juros de $i \times 100\%$ sobre o saldo da conta, então dizemos que a poupança paga $i \times 100\%$ de juros, **compostos anualmente**. Pode-se mostrar que, se os depósitos de Q reais forem feitos ao final de cada ano, em uma poupança que

paga $i \times 100\%$ compostos anualmente, então, por ocasião do enésimo depósito e já depositados os juros do ano anterior, a quantia $S(n)$ na poupança é dada pela fórmula

$$S(n) = \frac{Q}{i}[(1+i)^n - 1]$$

Suponha que queiramos depositar \$5.000 em uma poupança ao final de cada ano, com o objetivo de acumular \$250.000 no 25º depósito. Qual é a taxa de juros compostos a ser paga para que possamos atingir essa meta? [Sugestão: Mostre que a taxa de juros i satisfaz a equação $50i = (1+i)^{25} - 1$ e resolva-a usando o Método de Newton.]

ENFOCANDO CONCEITOS

-  38. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

e use-o para explicar o que acontece se aplicamos o Método de Newton com o valor inicial de $x_1 = 2$. Verifique sua conclusão computando x_2 , x_3 , x_4 e x_5 .

- (b) Use o gráfico gerado em (a) para explicar o que acontece se aplicarmos o Método de Newton com um valor

inicial de $x_1 = 0,5$. Verifique sua conclusão computando x_2, x_3, x_4 e x_5 .

41. Texto Compare o Método de Newton com o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.5.7; ver o Exemplo 5 da Seção 1.5) como um método para a localização de soluções de $f(x) = 0$.

42. Texto O Método de Newton usa uma aproximação linear local de $y = f(x)$ em $x = x_n$ para encontrar uma aproximação “melhorada” x_{n+1} de um zero de f . Seu colega propõe um processo que utiliza uma aproximação quadrática local de $y = f(x)$ em $x = x_n$ para obter x_{n+1} , ou seja, utilizando os valores da função e de suas derivadas primeira e segunda. Discuta os prós e os contras dessa proposta. Reforce suas afirmações com exemplos.

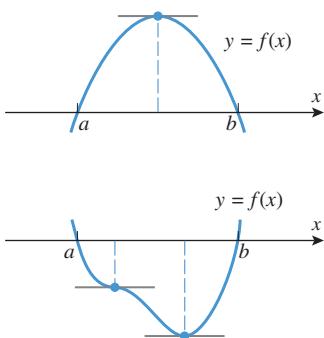


Figura 4.8.1

■ O TEOREMA DE BOLLE

Vamos começar com um caso especial do Teorema do Valor Médio, chamado de Teorema de Rolle em homenagem ao matemático Michel Rolle. Esse teorema afirma o fato geometricamente óbvio segundo o qual se o gráfico de uma função diferenciável cruzar o eixo x em dois pontos, a e b , então entre eles deve existir pelo menos um ponto onde a reta tangente é horizontal (Figura 4.8.1). O enunciado preciso do teorema é o que segue:

4.8.1 TEOREMA (Teorema de Rolle) Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se

$$f(a) = 0 \quad \text{e} \quad f(b) = 0,$$

então há pelo menos um ponto c em (a, b) , tal que $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dividiremos a prova em três casos: o caso em que $f(x) = 0$ em cada x de (a, b) , o caso em que $f(x) > 0$ em algum x de (a, b) e o caso em que $f(x) < 0$ em algum x de (a, b) .

CASO 1 Se $f(x) = 0$ em cada x de (a, b) , então $(c) = 0$ em cada c de (a, b) , pois f é uma função constante nesse intervalo.

CASO 2 Suponhamos que $f(x) > 0$ em algum x de (a, b) . Como f é contínua em $[a, b]$, segue pelo Teorema do Valor Extremo (4.4.2) que f tem um máximo absoluto em $[a, b]$. O máximo absoluto não pode ocorrer nas extremidades de $[a, b]$, porque $f(a) = f(b) = 0$, e estamos supondo que $f(x) > 0$ para algum ponto de (a, b) . Assim, o máximo absoluto precisa ocorrer em algum ponto c de (a, b) . Segue, do Teorema 4.4.3, que este ponto c é necessariamente um ponto crítico de f e, como f é diferenciável em (a, b) , esse ponto crítico é estacionário, ou seja, $f'(c) = 0$.

CASO 3 Suponhamos que $f(x) < 0$ em algum x de (a, b) . A prova nesse caso é análoga à do Caso 2 e será omitida. ■

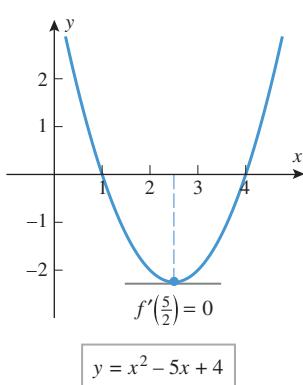


Figura 4.8.2

► **Exemplo 1** Encontre os dois pontos do corte do gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ com o eixo x e confirme que $f'(c) = 0$ em algum ponto c entre esses dois pontos de corte.

Solução A função f pode ser fatorada como

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

de modo que os pontos de corte com o eixo x são $x = 1$ e $x = 4$. Como o polinômio f é contínuo e diferenciável em toda parte, estão satisfeitas as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[1, 4]$. Assim, podemos ter certeza de que existe pelo menos um ponto c no intervalo $(1, 4)$, tal que $f'(c) = 0$. Derivando f , obtemos

$$f'(x) = 2x - 5$$

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = \frac{5}{2}$, de modo que $c = \frac{5}{2}$ é um ponto no intervalo $(1, 4)$ no qual $f'(c) = 0$ (Figura 4.8.2). ◀

► **Exemplo 2** A exigência de diferenciabilidade no Teorema de Rolle é crítica. Se f deixa de ser diferenciável, mesmo em um único ponto do intervalo (a, b) , então a conclusão do

Michel Rolle (1652-1719) Matemático francês. Rolle, filho de um lojista, frequentou somente o Ensino Fundamental. Casou-se cedo e trabalhou duro para sustentar a família com um humilde salário de escrivão para tabeliões e advogados. Mesmo com seus problemas financeiros e sua pouca instrução, Rolle estudou por si próprio Álgebra e Análise diofantina (um ramo da teoria dos números). Sua sorte mudou drasticamente em 1682, quando publicou uma elegante solução de um difícil e não resolvido problema em Análise diofantina. O reconhecimento público levou-o a ser amparado com um emprego de professor de escola fundamental e, depois, com um posto administrativo no Ministério da Guerra. Em 1685, entrou para a Academia de Ciências em uma posição inferior pela qual não recebeu salários regulares até 1699. Nela permaneceu até a morte, em 1719, por apoplexia.

Embora o forte de Rolle sempre tenha sido a Análise diofantina, seu trabalho mais importante foi um livro sobre a

Álgebra de equações, intitulado *Traité d'algèbre*, publicado em 1690. Nesse livro, Rolle estabeleceu firmemente a notação $\sqrt[n]{a}$ [antes escrita como $\sqrt{\textcircled{n}} a$] para raiz enésima de a e provou uma versão para polinômios do teorema que hoje leva seu nome. (O nome Teorema de Rolle foi dado por Giusto Bellavitis, em 1846.) Ironicamente, Rolle foi um dos mais eloquentes antagonistas iniciais do Cálculo. Ele esforçou-se intensamente para demonstrar que o Cálculo dava resultados errados e baseava-se em raciocínios falsos. Suas discussões sobre o assunto eram tão acaloradas que várias vezes a Academia de Ciências teve de intervir. Entre suas várias realizações, Rolle ajudou a avançar a ordem hoje aceita para os números negativos. Descartes, por exemplo, via -2 como menor do que -5 . Rolle antecipou-se à maioria de seus contemporâneos adotando a convenção atual em 1691.

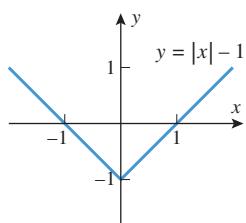


Figura 4.8.3

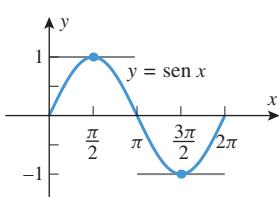


Figura 4.8.4

Nos Exemplos 1 e 3, foi possível encontrar os valores exatos de c porque a equação $f'(x) = 0$ foi facilmente resolvida. Contudo, nas aplicações do Teorema de Rolle, geralmente a **existência** de c é mais importante do que seu valor exato.

teorema pode não valer. Por exemplo, a função $f(x) = |x| - 1$ mostrada na Figura 4.8.3 tem raízes em $x = -1$ e $x = 1$, mas não existe reta tangente horizontal ao gráfico de f no intervalo $(-1, 1)$. ◀

Exemplo 3 Se f satisfaz as condições do Teorema de Rolle em $[a, b]$, então o teorema garante a existência de *pelo menos* um ponto c em (a, b) no qual $f'(c) = 0$. Pode, entretanto, haver mais de um c . Por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua e diferenciável em toda parte, de modo que satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[0, 2\pi]$, cujos extremos são raízes de f . Conforme indica a Figura 4.8.4, existem dois pontos no intervalo $[0, 2\pi]$ nos quais o gráfico de f tem reta tangente horizontal, $c_1 = \pi/2$ e $c_2 = 3\pi/2$. ◀

O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema de Rolle é um caso especial de um resultado mais geral, denominado **Teorema do Valor Médio**. Geometricamente, esse teorema afirma que, entre dois pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ quaisquer do gráfico de uma função diferenciável f , existe pelo menos um ponto onde a reta tangente ao gráfico é paralela à reta secante que passa por A e B (Figura 4.8.5).

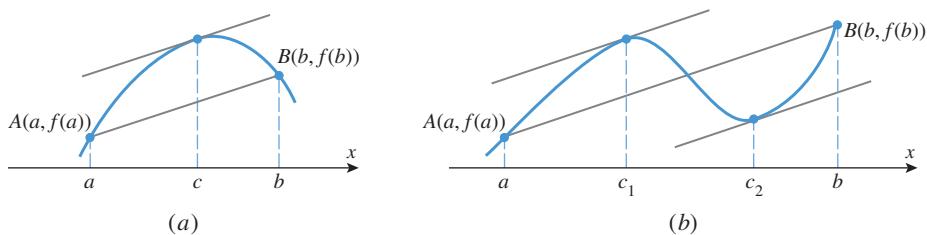
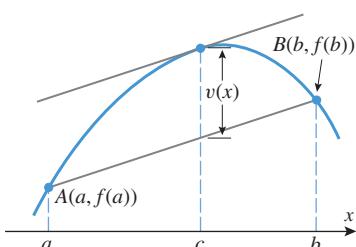


Figura 4.8.5

Observe que a inclinação da reta secante que passa por $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e que a inclinação da reta tangente em c na Figura 4.8.5a é $f'(c)$. Analogamente, na Figura 4.8.5b, as inclinações das retas tangentes em c_1 e c_2 são $f'(c_1)$ e $f'(c_2)$, respectivamente. Como retas não verticais paralelas têm a mesma inclinação, o Teorema do Valor Médio pode ser enunciado precisamente como segue.



A reta tangente é paralela à reta secante onde é máxima a distância vertical $v(x)$ entre a reta secante e o gráfico de f .

Figura 4.8.6

4.8.2 TEOREMA (Teorema do Valor Médio) Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então existe pelo menos um ponto c em (a, b) , tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

MOTIVAÇÃO PARA A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.8.2 A Figura 4.8.6 sugere que (1) será válida (isto é, a reta tangente será paralela à reta secante) em um ponto c no qual a distância entre a curva e a reta secante for máxima. Assim, para provar o teorema, é natural começar por uma fórmula para a distância vertical $v(x)$ entre a curva $y = f(x)$ e a reta secante ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.8.2 Como a equação da reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou, de forma equivalente,

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

a diferença $v(x)$ entre a altura do gráfico de f e a da reta secante é

$$v(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right] \quad (2)$$

Como $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , $v(x)$ também o é. Além disso,

$$v(a) = 0 \quad \text{e} \quad v(b) = 0$$

logo, $v(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[a, b]$. Portanto, existe um ponto c em (a, b) tal que $v'(c) = 0$. No entanto, a partir da Equação (2),

$$v'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

assim,

$$v'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $v'(c) = 0$, temos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \blacksquare$$

► Exemplo 4 Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 1$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, 2]$ e encontre todos os valores de c do intervalo $(0, 2)$ nos quais a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta secante que liga os pontos $(0, f(0))$ e $(2, f(2))$.

Solução A função f é contínua e diferenciável em toda parte, pois é um polinômio. Em particular, f é contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $(0, 2)$; assim, as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas com $a = 0$ e $b = 2$. Contudo,

$$f(a) = f(0) = 1, \quad f(b) = f(2) = 3$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4}, \quad f'(c) = \frac{3c^2}{4}$$

Desse modo, a Fórmula (1) torna-se

$$\frac{3c^2}{4} = \frac{3 - 1}{2 - 0} \quad \text{ou} \quad 3c^2 = 4$$

tendo as duas soluções $c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm1,15$. Porém, somente a solução positiva está no intervalo $(0, 2)$; esse valor de c está de acordo com a Figura 4.8.7. \blacktriangleleft

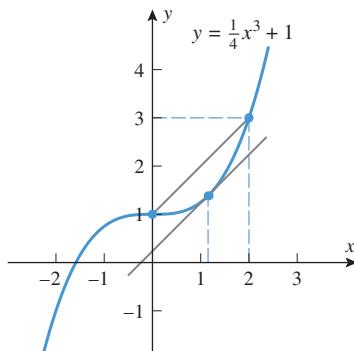


Figura 4.8.7

■ UMA INTERPRETAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO USANDO A VELOCIDADE

Há uma interpretação interessante do Teorema do Valor Médio quando $x = f(t)$ for a curva posição versus tempo para um carro movendo-se ao longo de uma estrada reta. Nesse caso, o lado direito de (1) é a velocidade média do carro no intervalo de tempo $a \leq t \leq b$, enquanto o lado esquerdo é a velocidade instantânea em $t = c$. Assim, o Teorema do Valor Médio implica que pelo menos uma vez durante o intervalo de tempo a velocidade instantânea deve ser igual à velocidade média. Isso está de acordo com a nossa experiência no mundo real: se a velocidade média em uma viagem for de 80 km/h, então, em algum instante, o velocímetro marcou 80 km/h.

► **Exemplo 5** Um motorista está dirigindo em uma estrada reta com o limite de velocidade de 80 km/h. Às 08 horas e 05 minutos da manhã, um controlador cronometra a velocidade do carro como sendo de 75 km/h e, 5 minutos depois, um segundo controlador, 10 km adiante na estrada, cronometra a velocidade do carro como sendo de 80 km/h. Explique por que o motorista poderia receber uma multa por excesso de velocidade.

Solução O motorista percorreu 10 km em 5 minutos ($= \frac{1}{12}$ h); logo, sua velocidade média foi de 120 km/h. O Teorema do Valor Médio garante que, pelo menos uma vez ao longo dos 10 km, o motorista dirigiu a 120 km/h. ◀

■ CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Havíamos afirmado, no começo desta seção, que o Teorema do Valor Médio é o ponto de partida para muitos resultados importantes em Cálculo. Como exemplo disso, vamos usá-lo para provar o Teorema 4.1.2, uma de nossas ferramentas fundamentais para a análise de gráficos de funções.

4.1.2 TEOREMA (Revisado) Seja f uma função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) .

- (a) Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b) , então f é crescente em $[a, b]$.
- (b) Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b) , então f é decrescente em $[a, b]$.
- (c) Se $f'(x) = 0$ com qualquer valor de x em (a, b) , então f é constante em $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO (a) Sejam x_1 e x_2 pontos em $[a, b]$, sendo $x_1 < x_2$. Precisamos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Como as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas em todo o intervalo $[a, b]$, também estão no subintervalo $[x_1, x_2]$. Assim, há algum ponto c no intervalo aberto (x_1, x_2) , tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou, de forma equivalente,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (3)$$

Como c está no intervalo aberto (x_1, x_2) , tem-se que $a < c < b$; portanto, $f'(c) > 0$. Porém, como $x_1 < x_2$, tem-se que $x_2 - x_1 > 0$. Segue, a partir de (3), que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou, equivalente, $f(x_1) < f(x_2)$, que é o que queríamos provar. As demonstrações de (b) e (c) são análogas e deixadas como exercícios. ■

■ TEOREMA DA DIFERENÇA CONSTANTE

Sabemos, de nosso estudo anterior sobre derivadas, que a derivada de uma constante é zero. A parte (c) do Teorema 4.1.2 é a recíproca daquele resultado, isto é, uma função cuja derivada é zero em um intervalo deve ser constante naquele intervalo. Se aplicarmos isso à diferença de duas funções, obteremos o seguinte teorema útil.

4.8.3 TEOREMA (Teorema da Diferença Constante) Se f e g forem funções diferenciáveis em um intervalo e se $f'(x) = g'(x)$ em cada x do intervalo, então $f - g$ é constante nesse intervalo; ou seja, existe uma constante k tal que $f(x) - g(x) = k$ ou, equivalentemente,

$$f(x) = g(x) + k$$

em cada x do intervalo.

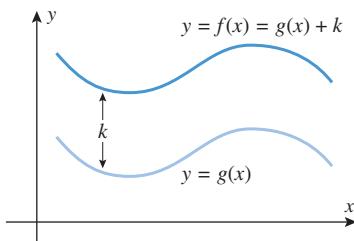
DEMONSTRAÇÃO Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer do intervalo tais que $x_1 < x_2$. Como as funções f e g são diferenciáveis no intervalo, elas são contínuas nesse intervalo. Como $[x_1, x_2]$ é um subintervalo, segue que f e g são contínuas em $[x_1, x_2]$ e diferenciáveis em (x_1, x_2) . Além disso, segue, das propriedades básicas de derivada e continuidade, que o mesmo é verdadeiro para a função

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

Como

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

segue da parte (c) do Teorema 4.1.2 que $F(x) = f(x) - g(x)$ é constante no intervalo $[x_1, x_2]$. Isso significa que $f(x) - g(x)$ tem o mesmo valor nos dois pontos x_1 e x_2 do intervalo. Como esses dois pontos são arbitrários, segue que $f - g$ é constante no intervalo. ■



Se $f'(x) = g'(x)$ em um intervalo, então os gráficos de f e g são translações verticais um do outro.

Figura 4.8.8

Geometricamente, o Teorema da Diferença Constante nos diz que, se f e g têm a mesma derivada em um intervalo, então, nesse intervalo, os gráficos de f e g são translações verticais um do outro (Figura 4.8.8).

► **Exemplo 6** A parte (c) do Teorema 4.1.2 pode ser útil para estabelecer identidades. Por exemplo, embora não necessitemos do Cálculo para provar a identidade

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (4)$$

isso pode ser feito tomando $f(x) = \arcsen x + \arccos x$. Segue das Fórmulas (9) e (10) da Seção 3.3 que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\arcsen x] + \frac{d}{dx}[\arccos x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

de modo que $f(x) = \arcsen x + \arccos x$ é constante no intervalo $[-1, 1]$. Essa constante pode ser encontrada calculando o valor de f em qualquer ponto conveniente desse intervalo. Por exemplo, usando $x = 0$, obtemos

$$f(0) = \arcsen 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

provando (4). ◀

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 4.8 (Ver página 310 para respostas.)

1. Seja $f(x) = x^2 - x$.
 - Um intervalo no qual f satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle é _____.
 - Encontre todos os valores de c que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle para a função f no intervalo de (a).
2. Use o gráfico de f em anexo para encontrar um intervalo $[a, b]$ no qual é aplicável o Teorema de Rolle e encontre todos os valores de c naquele intervalo que satisfazem a conclusão do teorema.
3. Seja $f(x) = x^2 - x$.
 - Encontre um ponto b tal que a inclinação da reta secante por $(0, 0)$ e $(b, f(b))$ seja igual a 1.
 - Encontre todos os valores de c que satisfazem a conclusão do Teorema do Valor Médio para a função f no intervalo $[0, b]$, onde b é o ponto encontrado em (a).
4. Use o gráfico de f em anexo para estimar todos os valores de c que satisfazem a conclusão do Teorema do Valor Médio nos intervalos
 - $[0, 8]$
 - $[0, 4]$

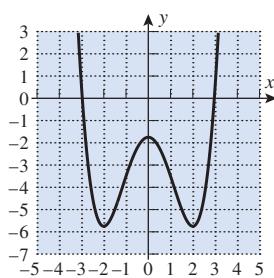


Figura Ex-2

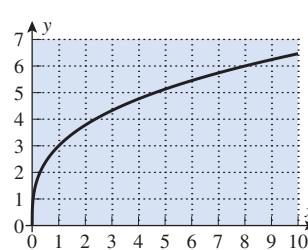


Figura Ex-4

5. Encontre uma função f tal que o gráfico de f contenha o ponto $(1, 5)$ e tal que, para cada valor de x_0 , a reta tangente ao gráfi-

co de f em x_0 seja paralela à reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ em x_0 .

EXERCÍCIOS 4.8 Recurso Gráfico

- 1-4** Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas nos intervalos e encontre todos os valores de c nesses intervalos que satisfazem a conclusão do teorema. ■

1. $f(x) = x^2 - 8x + 15$; $[3, 5]$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$; $[0, 4]$
3. $f(x) = \cos x$; $[\pi/2, 3\pi/2]$
4. $f(x) = \ln(4 + 2x - x^2)$; $[-1, 3]$

- 5-8** Verifique se as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas nos intervalos e encontre todos os valores de c nesses intervalos que satisfazem a conclusão do teorema. ■

5. $f(x) = x^2 - x$; $[-3, 5]$
6. $f(x) = x^3 + x - 4$; $[-1, 2]$
7. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[-5, 3]$
8. $f(x) = x - \frac{1}{x}$; $[3, 4]$

-  9. (a) Encontre um intervalo $[a, b]$ no qual

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle.

- (b) Gere o gráfico de $f'(x)$ e use-o para fazer estimativas de todos os valores de c obtidos em (a) que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle.
- (c) Use o Método de Newton para melhorar as estimativas obtidas em (b).

-  10. Seja $f(x) = x^3 - 4x$.

- (a) Encontre a equação da reta secante que passa pelos pontos $(-2, f(-2))$ e $(1, f(1))$.
- (b) Mostre que há somente um número c no intervalo $(-2, 1)$ que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio para a reta secante em (a).
- (c) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.
- (d) Use um recurso gráfico computacional para gerar a reta secante de (a) e a tangente de (c) no mesmo sistema de coordenadas e confirme visualmente que as duas são paralelas.

- 11-14 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

11. O Teorema de Rolle afirma que se f for uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$, então existirá um ponto entre a e b no qual a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal.
12. Se f for contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existirá um ponto entre a e b no qual a taxa de variação instantânea de f é igual à taxa de variação média de f em $[a, b]$.

- 13.** O Teorema da Diferença Constante afirma que, se duas funções tiverem derivadas num intervalo que diferem por uma constante, então as funções têm os mesmos valores no intervalo.

- 14.** Uma aplicação do Teorema do Valor Médio é provar que uma função com derivada positiva num intervalo é crescente nesse intervalo.

ENFOCANDO CONCEITOS

15. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$.

- (a) Mostre que não há no intervalo $(0, \pi)$ um ponto c tal que $f'(c) = 0$, embora $f(0) = f(\pi) = 0$.
- (b) Explique por que o resultado de (a) não viola o Teorema de Rolle.

16. Sejam $f(x) = x^{2/3}$, $a = -1$ e $b = 8$.

- (a) Mostre que não há no intervalo (a, b) um ponto c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- (b) Explique por que o resultado de (a) não viola o Teorema do Valor Médio.

17. (a) Mostre que, se f for diferenciável no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e se os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = f'(x)$ estiverem no mesmo sistema de coordenadas, então entre qualquer par de f há pelo menos um de f' .
- (b) Dê alguns exemplos que ilustrem isso.

18. Reveja as Fórmulas (8) e (9) da Seção 2.1 e use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se f for diferenciável em $(-\infty, +\infty)$, então em qualquer intervalo $[x_0, x_1]$ há pelo menos um ponto em (x_0, x_1) no qual a taxa de variação instantânea de y em relação a x é igual à taxa de variação média, no mesmo intervalo.

- 19-21** Use o resultado do Exercício 18 nestes exercícios. ■

19. Um automóvel percorre 4 km de uma estrada reta em 5 minutos. Prove que o velocímetro mostra, pelo menos uma vez durante o percurso, exatamente 48 km/h.

20. Às 11h da manhã, a temperatura externa era de 76°F. Às 11h da noite, havia caído para 52°F.

- (a) Mostre que, em algum instante durante esse período, a temperatura estava decrescendo a uma taxa de 2°F/h.
- (b) Suponha ser de seu conhecimento que a temperatura atingiu os 88°F em algum momento entre as 11h da manhã e as 11h da noite. Mostre que, em algum instante durante esse período, a temperatura estava caindo a uma taxa maior do que 3°F/h.

21. Suponha que dois corredores de 100 metros rasos acabam empatados. Mostre que, pelo menos uma vez durante a corrida, ambos tiveram a mesma velocidade.

22. Use o fato de que

$$\frac{d}{dx}[x \ln(2-x)] = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

para mostrar que a equação $x = (2-x) \ln(2-x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 1)$.

23. (a) Use o Teorema da Diferença Constante (4.8.3) para mostrar que, se $f'(x) = g'(x)$ em cada x do intervalo $(-\infty, +\infty)$, e se f e g têm o mesmo valor em algum ponto x_0 , então $f(x) = g(x)$ em cada x de $(-\infty, +\infty)$.
 (b) Use o resultado de (a) para confirmar a identidade trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

24. (a) Use o Teorema da Diferença Constante (4.7.3) para mostrar que, se $f'(x) = g'(x)$ em cada x de $(-\infty, +\infty)$, e se $f(x_0) - g(x_0) = c$ em algum ponto x_0 , então

$$f(x) - g(x) = c$$

em cada x de $(-\infty, +\infty)$.

- (b) Use o resultado de (a) para mostrar que a função

$$h(x) = (x-1)^3 - (x^2+3)(x-3)$$

é constante em cada x de $(-\infty, +\infty)$ e encontre a constante.

- (c) Verifique o resultado de (b) multiplicando e simplificando a fórmula de $h(x)$.

25. Seja $g(x) = xe^x - e^x$. Encontre $f(x)$, tal que $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

26. Seja $g(x) = \operatorname{arc tg} x$. Encontre $f(x)$, tal que $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

ENFOCANDO CONCEITOS

27. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se f for diferenciável em um intervalo aberto, e se $|f'(x)| \leq M$ em cada x do intervalo, então

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

com quaisquer x e y do intervalo.

- (b) Use o resultado de (a) para mostrar que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$$

para todos os valores reais de x e y .

28. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se f for diferenciável em um intervalo aberto, e se $|f'(x)| \geq M$ em cada x do intervalo então

$$|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|$$

com quaisquer x e y do intervalo.

- (b) Use o resultado de (a) para mostrar que

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$$

com quaisquer valores de x e y no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

- (c) Use o resultado de (b) para mostrar que

$$|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \geq |x + y|$$

com quaisquer valores de x e y no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

29. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}}$$

se $0 < x < y$.

- (b) Use o resultado de (a) para mostrar que, se $0 < x < y$, então $\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(x+y)$.
 (a média aritmética é maior que a média geométrica).

30. Mostre que, se f for diferenciável em um intervalo aberto e se $f'(x) \neq 0$ no intervalo, a equação $f(x) = 0$ pode ter no máximo uma raiz real no intervalo.

31. Use o resultado do Exercício 30 para mostrar o seguinte:

- (a) A equação $x^3 + 4x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.
 (b) Se $b^2 - 3ac < 0$ e se $a \neq 0$, então a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tem exatamente uma raiz real.

32. Use a desigualdade $\sqrt{3} < 1,8$ para provar que

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,75$$

[Sugestão: Tome $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ e $b = 4$ no Teorema do Valor Médio.]

33. Use o Teorema do Valor Médio para provar que

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arc tg} x < x \quad (x > 0)$$

34. (a) Mostre que, se f e g forem funções para as quais

$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = f(x)$$

em cada x , então $f^2(x) - g^2(x)$ é uma constante.

- (b) Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ e a função $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ têm essa propriedade.

35. (a) Mostre que, se f e g forem funções para as quais

$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = -f(x)$$

em cada x , então $f^2(x) + g^2(x)$ é uma constante.

- (b) Dê um exemplo de funções f e g com essa propriedade.

ENFOCANDO CONCEITOS

36. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) .

Prove: Se $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, então há um ponto c em (a, b) onde $f'(c) = g'(c)$.

37. Ilustre o resultado do Exercício 36 com uma figura apropriada.

38. (a) Prove: Se $f''(x) > 0$ em cada x de (a, b) , então $f'(x) = 0$ no máximo uma vez em (a, b) .

- (b) Dê uma interpretação geométrica do resultado em (a).

39. (a) Prove a parte (b) do Teorema 4.1.2.

- (b) Prove a parte (c) do Teorema 4.1.2.

40. Use o Teorema do Valor Médio para provar o resultado seguinte: Seja f uma função contínua em x_0 e suponha que exista $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Então f é diferenciável em x_0 e

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

[Sugestão: A derivada $f'(x_0)$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

desde que esse limite exista.]

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

Encontre os valores de a e b tais que f seja diferenciável em $x = 1$.

42. (a) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

mas que $f'(0)$ não existe.

(b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(0)$ existe, mas $f''(0)$ não.

43. Use o Teorema do Valor Médio para provar o resultado seguinte: O gráfico de uma função f tem uma reta tangente vertical em $(x_0, f(x_0))$ se f é contínua em x_0 e $f'(x)$ tende ou a $+\infty$ ou a $-\infty$ quando $x \rightarrow x_0^+$ e quando $x \rightarrow x_0^-$.

44. **Texto** Suponha que $p(x)$ seja um polinômio não constante com zeros em $x = a$ e em $x = b$. Explique como o Teorema do Valor Extremo (4.4.2) junto ao Teorema de Rolle podem ser usados para mostrar que p tem algum ponto crítico entre a e b .

45. **Texto** Encontre e descreva uma situação física que ilustre o Teorema do Valor Médio.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.8

1. (a) $[0, 1]$ (b) $c = \frac{1}{2}$ 2. $[-3, 3]; c = -2, 0, 2$ 3. (a) $b = 2$ (b) $c = 1$ 4. (a) 1,5 (b) 0,8 5. $f(x) = x^2 + 4$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 4

Recurso Gráfico CAS

1. (a) Se $x_1 < x_2$, que relação deve existir entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para f ser crescente em um intervalo contendo x_1 e x_2 ? E decrescente? E constante?
 (b) Qual condição sobre f' garante que f seja crescente em um intervalo $[a, b]$? E decrescente? E constante?
 2. (a) Qual condição sobre f' garante que, em um intervalo aberto, f seja: côncava para cima, côncava para baixo?
 (b) Qual condição sobre f'' garante que, em um intervalo aberto, f seja: côncava para cima, côncava para baixo?
 (c) Em palavras, o que é um ponto de inflexão de f ?

3-10 Encontre: (a) os intervalos onde f é crescente, (b) os intervalos onde f é decrescente, (c) os intervalos abertos onde f é côncava para cima, (d) os intervalos abertos onde f é côncava para baixo e (e) as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. ■

3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 4. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

5. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

7. $f(x) = x^{1/3}(x + 4)$

8. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$

9. $f(x) = 1/e^{x^2}$

10. $f(x) = \operatorname{arc tg} x^2$

13. $f(x) = \sin x \cos x; [0, \pi]$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin x; [0, 2\pi]$

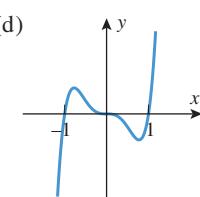
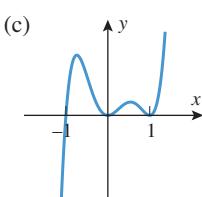
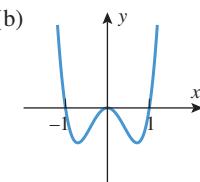
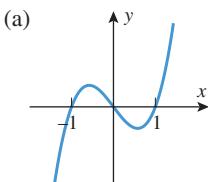
15. Em cada parte, esboce uma curva contínua $y = f(x)$ com as propriedades indicadas:

(a) $f(2) = 4, f'(2) = 1, f''(x) < 0$ com $x < 2, f''(x) > 0$ com $x > 2$

(b) $f(2) = 4, f''(x) > 0$ com $x < 2, f''(x) < 0$ com $x > 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = +\infty$

(c) $f(2) = 4, f''(x) < 0$ com $x \neq 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -1$

16. Em (a) a (d), é dado o gráfico completo de um polinômio com grau no máximo 6. Encontre equações para polinômios que produzam gráficos com esses aspectos e verifique suas respostas com um recurso gráfico computacional.



11-14 Analise a função trigonométrica f no intervalo especificado, enunciando onde f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo e dando as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. Confirme se seus resultados são consistentes com o gráfico de f gerado por um recurso gráfico. ■

11. $f(x) = \cos x; [0, 2\pi]$

12. $f(x) = \operatorname{tg} x; (-\pi/2, \pi/2)$

17. Encontre condições em a, b e c que garantam que o polinômio quadrático geral

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

seja sempre crescente ou sempre decrescente em $[0, +\infty)$.

18. Encontre condições em a, b, c e d que garantam que o polinômio cúbico geral

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

seja sempre crescente ou sempre decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

19. Use um recurso gráfico para estimar o valor de x no qual

$$f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^{x+1}}$$

está crescendo mais rapidamente.

20. Prove que, para quaisquer constantes a e k , o gráfico de

$$y = \frac{a^x}{1 + a^{x+k}}$$

tem um ponto de inflexão em $x = -k$.

21. (a) Onde no gráfico de $y = f(x)$ devemos esperar que y esteja crescendo ou decrescendo mais rapidamente em relação a x ?

(b) Em palavras, o que é um extremo relativo?

(c) Enuncie um procedimento para determinar onde podem ocorrer os extremos relativos de f .

22. Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for falsa, dê um exemplo para o qual ela falha.

(a) Se f tem um máximo relativo em x_0 , então $f(x_0)$ é o maior valor que $f(x)$ pode ter.

(b) Se o maior valor para f no intervalo (a, b) ocorre em x_0 , então f tem um máximo relativo em x_0 .

(c) Uma função tem um extremo relativo em cada um de seus pontos críticos.

23. (a) De acordo com o teste da derivada primeira, quais condições garantem que f tem um máximo relativo em x_0 ? E um mínimo relativo?

(b) De acordo com o teste da derivada segunda, quais condições garantem que f tem um máximo relativo em x_0 ? E um mínimo relativo?

- 24-26** Localize os pontos críticos e identifique quais deles correspondem a pontos estacionários. ■

24. (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

(b) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 3$

25. (a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ (b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

26. (a) $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ (b) $f(x) = x^{4/3} - 6x^{1/3}$

27. Em cada parte, encontre todos os pontos críticos e use o teste da derivada primeira para classificá-los em máximos ou mínimos relativos, ou nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^{1/3}(x - 7)^2$

(b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

(c) $f(x) = 3x - (x - 1)^{3/2}$

28. Em cada parte, encontre todos os pontos críticos e use o teste da derivada segunda (quando possível) para classificá-los em máximos ou mínimos relativos, ou em nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^{-1/2} + \frac{1}{9}x^{1/2}$

(b) $f(x) = x^2 + 8/x$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

- 29-36** Faça um gráfico completo de f , indique os limites quando $x \rightarrow \pm\infty$ e localize todos os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas (quando apropriado). ■

29. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

30. $f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3$

31. $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 1)$

32. $f(x) = x - \cos x$

33. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 5}$

34. $f(x) = \frac{25 - 9x^2}{x^3}$

35. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

36. $f(x) = (1 + x)^{2/3} (3 - x)^{1/3}$

- 37-44** Use qualquer método para encontrar os extremos relativos da função f dada. ■

37. $f(x) = x^3 + 5x - 2$

38. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$

39. $f(x) = x^{4/5}$

40. $f(x) = 2x + x^{2/3}$

41. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

42. $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

43. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

44. $f(x) = x^2 e^x$

- 45-46 Usando um recurso gráfico computacional, podem se perder aspectos importantes de um gráfico se a janela escolhida não for apropriada. Isso está ilustrado nos Exercícios 45 e 46. ■

45. (a) Gere o gráfico de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{400}x$ no intervalo $[-5, 5]$ e faça uma conjectura sobre a natureza e a localização de todos os pontos críticos.

- (b) Encontre a localização exata de todos os pontos críticos e classifique-os como máximos ou mínimos relativos, ou nenhum dos dois.

- (c) Confirme os resultados de (b) fazendo o gráfico de f em um intervalo apropriado.

46. (a) Gere o gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x$$

no intervalo $[-5, 5]$ e faça uma conjectura sobre a localização e a natureza de todos os pontos críticos.

- (b) Encontre a localização exata de todos os pontos críticos e classifique-os como máximos ou mínimos relativos, ou nenhum dos dois.

- (c) Confirme os resultados de (b) fazendo gráficos de partes de f em intervalos apropriados. [Nota: Não é possível encontrar uma única janela na qual sejam visíveis todos os pontos críticos.]

- 47.** (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $y = x$ e $y = (x^3 - 8)/(x^2 + 1)$ juntos no intervalo $[-5, 5]$ e faça uma conjectura sobre a relação entre eles.
 (b) Confirme sua conjectura em (a).

- 48.** Use diferenciação implícita para mostrar que a função definida implicitamente por $\sin x + \cos y = 2y$ tem pontos críticos, sempre que $\cos x = 0$. Use, então, o teste da derivada primeira ou segunda para classificá-los como máximos ou mínimos relativos.

49. Seja

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 15x + 7}{(2x - 1)(3x^2 + x - 1)}$$

Faça o gráfico de $y = f(x)$ e encontre as equações de todas as assíntotas horizontais e verticais. Explique por que não há assíntota vertical em $x = \frac{1}{2}$, mesmo que o denominador de f tenha um zero nesse ponto.

50. Seja

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x + 4}{x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 6x^4 + 4x - 8}$$

- (a) Use um CAS para fatorar o numerador e o denominador de f e use os resultados para determinar a localização de todas as assíntotas verticais.
 (b) Confirme que sua resposta está de acordo com o gráfico de f .
51. (a) Que desigualdade $f(x)$ precisa satisfazer para que f tenha um máximo absoluto em um ponto x_0 de um intervalo?
 (b) Que desigualdade $f(x)$ precisa satisfazer para que f tenha um mínimo absoluto em um ponto x_0 de um intervalo?
 (c) Qual é a diferença entre um extremo absoluto e um relativo?

- 52.** De acordo com o Teorema do Valor Extremo, quais condições sobre uma função f e um intervalo dados garantem que f irá ter um máximo e um mínimo absolutos no intervalo?

- 53.** Em cada parte, determine se a afirmativa é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.
 (a) Se f for diferenciável no intervalo aberto (a, b) e tiver aí um extremo absoluto, então este deve ocorrer em um ponto estacionário de f .
 (b) Se f for contínua no intervalo aberto (a, b) e tiver aí um extremo absoluto, então este deve ocorrer em um ponto estacionário de f .

54-56 Em cada parte, encontre o mínimo absoluto m e o máximo absoluto M de f no intervalo dado (se existirem) e indique onde ocorrem os extremos absolutos. ■

- 54.** (a) $f(x) = 1/x; [-2, -1]$
 (b) $f(x) = x^3 - x^4; [-1, \frac{3}{2}]$
 (c) $f(x) = x - \operatorname{tg} x; [-\pi/4, \pi/4]$
 (d) $f(x) = -|x^2 - 2x|; [1, 3]$

- 55.** (a) $f(x) = x^2 - 3x - 1; (-\infty, +\infty)$
 (b) $f(x) = x^3 - 3x - 2; (-\infty, +\infty)$

- (c) $f(x) = e^x/x^2; (0, +\infty)$
 (d) $f(x) = x^x; (0, +\infty)$

- 56.** (a) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7; (-1, 3)$
 (b) $f(x) = (3 - x)/(2 - x); (0, 2)$
 (c) $f(x) = 2x/(x^2 + 3); (0, 2)$
 (d) $f(x) = x^2(x - 2)^{1/3}; (0, 3]$

- 57.** Em cada parte, use um recurso gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos de f , se houver, no intervalo dado, e então use os métodos do Cálculo para encontrar os valores exatos.

- (a) $f(x) = (x^2 - 1)^2; (-\infty, +\infty)$
 (b) $f(x) = x/(x^2 + 1); [0, +\infty)$
 (c) $f(x) = 2 \sec x - \operatorname{tg} x; [0, \pi/4]$
 (d) $f(x) = x/2 + \ln(x^2 + 1); [-4, 0]$

- 58.** Prove que $x \leq \operatorname{arc sen} x$ em cada x de $[0, 1]$.

c 59. Seja

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^4 + 1}$$

- (a) Gere o gráfico de $y = f(x)$ e use-o para fazer estimativas das coordenadas dos extremos absolutos.
 (b) Use um CAS para resolver a equação $f'(x) = 0$ e, então, para fazer aproximações mais precisas das coordenadas de (a).

- 60.** A janela de uma igreja consiste em uma secção semicircular no topo de um retângulo, conforme mostra a Figura Ex-60. O vidro azul deixa passar metade da luz por unidade de área. Encontre o raio r da janela que admite maior luz se o perímetro de toda a janela for de P metros.

- 61.** Encontre as dimensões do retângulo com área máxima que pode ser inscrito na elipse $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$ (Figura Ex-61).

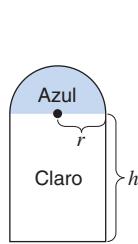


Figura Ex-60

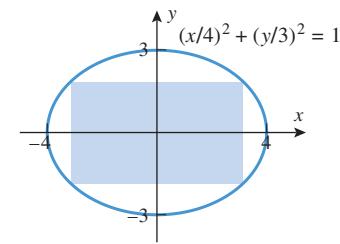


Figura Ex-61

- c 62.** Conforme mostra a figura a seguir, suponha que um barco entre em um rio no ponto $(1, 0)$ e mantenha sua direção voltada para a origem. Como resultado da forte corrente, ele segue a trajetória

$$y = \frac{x^{10/3} - 1}{2x^{2/3}}$$

onde x e y estão em quilômetros.

- (a) Faça o gráfico da trajetória seguida pelo barco.
 (b) O barco pode atingir a origem? Se não, discuta seu destino e descubra qual o próximo estará dela.

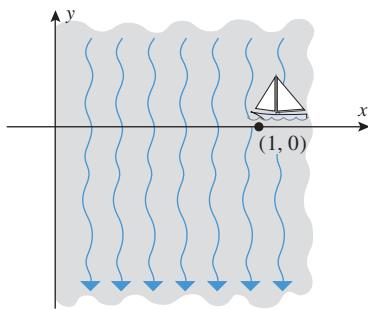


Figura Ex-62

- 63.** Uma folha de papelão quadrada com 120 cm de lado é usada para fazer uma caixa sem tampa cortando quadrados de tamanho igual dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Qual o tamanho dos quadrados que devem ser cortados fora para se obter uma caixa de maior volume possível?
- 64.** É verdadeiro ou falso que uma partícula em movimento retilíneo está aumentando sua velocidade se a velocidade for crescente e está diminuindo sua velocidade se a velocidade for decrescente? Justifique sua resposta.
- 65.** (a) Um objeto em movimento retilíneo pode reverter sua situação se a aceleração for constante? Justifique sua resposta usando uma curva velocidade *versus* tempo.
 (b) Um objeto em movimento retilíneo pode ter velocidade escalar crescente e aceleração decrescente? Justifique sua resposta usando uma curva velocidade *versus* tempo.
- 66.** Suponha que a função de posição de uma partícula em movimento retilíneo seja dada pela fórmula $s(t) = t / (2t^2 + 8)$ para $t \geq 0$.
 (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar as curvas posição, velocidade e aceleração *versus* tempo.
 (b) Use um gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que a partícula reverte sua direção e, então, encontre esse tempo.
 (c) Encontre a posição, a velocidade e a aceleração no instante em que a partícula reverte sua direção.
 (d) Use os gráficos apropriados para fazer uma estimativa dos intervalos de tempo nos quais a partícula está aumentando e dos intervalos de tempo nos quais está diminuindo sua velocidade e os encontre com exatidão.
 (e) Quando a partícula tem suas velocidades máxima e mínima?
- C 67.** Suponha que a função posição de uma partícula em movimento retilíneo seja dada pela fórmula
- $$s(t) = \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}, \quad t \geq 0$$
- (a) Use um CAS para encontrar fórmulas simplificadas para a velocidade $v(t)$ e para a aceleração $a(t)$.
 (b) Faça os gráficos das curvas posição, velocidade e aceleração *versus* tempo.
 (c) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que a partícula está mais longe da origem e sua distância até a origem nesse instante.
 (d) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do intervalo de tempo durante o qual a partícula se move na direção positiva.
- 68.** Use os gráficos apropriados para fazer estimativas dos intervalos de tempo durante os quais a partícula está aumentando sua velocidade e dos intervalos de tempo durante os quais está diminuindo.
- 69.** Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa da velocidade máxima da partícula e do instante em que ela ocorre.
- 70.** Faça uma figura apropriada e descreva a ideia básica do Método de Newton, sem usar fórmulas.
- 71.** Use o Método de Newton para aproximar todas as três soluções de $x^3 - 4x + 1 = 0$.
- 72.** Use o Método de Newton para aproximar a menor solução positiva de $\sin x + \cos x = 0$.
- 73.** Use um recurso gráfico para determinar o número de vezes que a curva $y = x^3$ intersecta a curva $y = (x/2) - 1$. Então, aplique o Método de Newton para aproximar as coordenadas x de todas as intersecções.
- 74.** De acordo com a *Lei de Kepler*, os planetas no nosso sistema solar movem-se em órbitas elípticas em torno do Sol. Se a posição do planeta mais próximo do Sol ocorrer no instante $t = 0$, então a distância r do centro do planeta até o centro do sol em um instante t posterior pode ser determinada pela equação
- $$r = a(1 - e \cos \phi)$$
- onde a é a distância média entre os centros, e é uma constante positiva que mede o achatamento da órbita elíptica e ϕ é a solução da *equação de Kepler*
- $$\frac{2\pi t}{T} = \phi - e \sin \phi$$
- na qual T é o tempo levado para uma órbita completa do planeta. Estime a distância da Terra ao Sol quando $t = 90$ dias. [Primeiro, ache ϕ da equação de Kepler e, então, use esse valor para encontrar a distância. Use $a = 150 \times 10^6$ km, $e = 0,0167$ e $T = 365$ dias.]
- 75.** Usando as fórmulas do Exercício 72, encontre a distância de Marte ao Sol quando $t = 1$ ano. Para Marte, use $a = 228 \times 10^6$ km, $e = 0,0934$ e $T = 1,88$ ano.
- 76.** Suponha que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) ; além disso, suponha que $f(a) = f(b)$. É falso ou verdadeiro que f deve ter pelo menos um ponto estacionário em (a, b) ? Justifique sua resposta.
- 77.** Em cada parte, determine se todas as hipóteses do Teorema de Rolle estão verificadas no intervalo dado. Caso não estiverem, indique qual é a hipótese que está falhando; se estiverem, encontre todos os valores de c garantidos na conclusão do teorema.
- (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$
 (b) $f(x) = x^{2/3} - 1$ em $[-1, 1]$
 (c) $f(x) = \sin(x^2)$ em $[0, \sqrt{\pi}]$
- 78.** Em cada parte, determine se todas as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão verificadas no intervalo dado. Caso não estejam, indique quais hipóteses estão falhando; se estiverem, encontre todos os valores de c garantidos na conclusão do teorema.

- (a) $f(x) = |x - 1|$ em $[-2, 2]$
 (b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ em $[2, 3]$
 (c) $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2/x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $[0, 2]$

77. Use o fato de que

$$\frac{d}{dx}(x^6 - 2x^2 + x) = 6x^5 - 4x + 1$$

para mostrar que a equação $6x^5 - 4x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 1)$.

78. Seja $g(x) = x^3 - 4x + 6$. Encontre $f(x)$, tal que $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

CAPÍTULO 4 ESTABELECENDO CONEXÕES

1. Suponha que $g(x)$ seja uma função definida e diferenciável em cada x real e que $g(x)$ tenha as seguintes propriedades:
 (i) $g(0) = 2$ e $g'(0) = -\frac{2}{3}$
 (ii) $g(4) = 3$ e $g'(4) = 3$
 (iii) $g(x)$ é côncava para cima em $x < 4$ e côncava para baixo em $x > 4$.
 (iv) $g(x) \geq -10$ para todo x .

Usando essas propriedades, responda às questões seguintes:

- (a) g tem quantos zeros?
 (b) g' tem quantos zeros?
 (c) Exatamente um dos limites é possível:

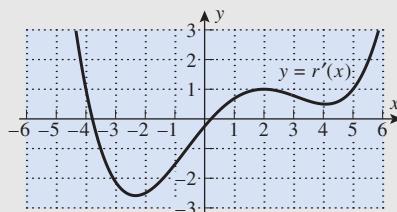
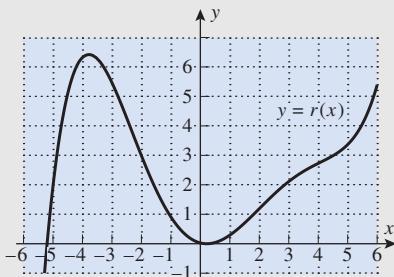
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = -5, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 5$$

Identifique qual desses resultados é possível e faça um esboço aproximado do gráfico de uma tal função $g(x)$. Explique por que os dois outros resultados são impossíveis.

2. Os dois gráficos nas figuras abaixo retratam uma função racional $r(x)$ e sua derivada $r'(x)$.
 (a) Aproxime as coordenadas de cada ponto de inflexão do gráfico de $y = r(x)$.
 (b) Suponha que $f(x)$ seja uma função contínua em toda parte e cuja derivada satisfaz

$$f'(x) = (x^2 - 4) \cdot r(x)$$

Quais são os pontos críticos de $f(x)$? Em cada ponto crítico, identifique se $f(x)$ tem um máximo relativo, um mínimo relativo ou nenhum desses. Aproxime $f''(1)$.



Figuras Ex-2

3. Com $r(x)$ dado no Exercício 2, seja $g(x)$ uma função contínua em toda parte e tal que $g'(x) = x - r(x)$. A função $g(x)$ tem um ponto de inflexão em quais valores de x ?
 4. Seja f uma função cuja derivada é contínua em toda parte. Suponha que exista um número real c tal que, quando o Método de Newton é aplicado a f , a desigualdade

$$|x_n - c| < \frac{1}{n}$$

é satisfeita para todos os valores de $n = 1, 2, 3, \dots$

- (a) Explique por que

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{2}{n}$$

com quaisquer valores de $n = 1, 2, 3, \dots$

- (b) Mostre que existe uma constante positiva M tal que

$$|f(x_n)| \leq M|x_{n+1} - x_n| < \frac{2M}{n}$$

com quaisquer valores de $n = 1, 2, 3, \dots$

- (c) Prove que, se $f(c) \neq 0$, então existe um inteiro positivo N tal que

$$\frac{|f(c)|}{2} < |f(x_n)|$$

com $n > N$. [Sugestão: Mostre que $f(x) \rightarrow f(c)$ quando $x \rightarrow c$ e então aplique a Definição 1.4.1 com $\epsilon = \frac{1}{2}|f(c)|$.]

- (d) O que pode ser concluído de (b) e (c)?

5. Quais são os elementos importantes no argumento sugerido pelo Exercício 4? É possível estender esse argumento a uma coleção maior de funções?
6. Um inseto em movimento num chão liso ao longo da beirada de um tapete grosso encontra uma irregularidade do tapete no formato de um retângulo de 2 por 3 cm que avança para fora da beirada, como ilustra a Figura Ex-6a a seguir.



Figura Ex-6a

O inseto, que quer ir do ponto A até o ponto B , caminha a $0,7 \text{ cm/s}$ pelo chão liso, mas somente a $0,3 \text{ cm/s}$ pelo tapete. Quatro opções do trajeto do inseto são as seguintes: (i) percorrer a borda da irregularidade pelo chão liso; (ii) atalhar diretamente pelo tapete até o ponto B . (Ver Figura Ex-6b.)

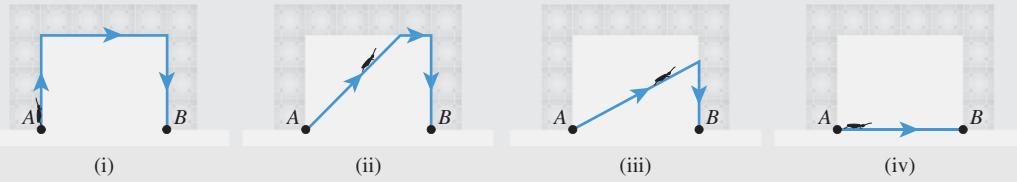


Figura Ex-6b

lhar pelo tapete até a beirada mais larga do retângulo e depois continuar pela borda; (iii) atalhar diretamente até a outra borda menor do retângulo e depois continuar pela borda; (iv) atalhar diretamente pelo tapete até o ponto B . (Ver Figura Ex-6b.)

- Calcule o tempo que o inseto leva para percorrer os trajetos (i) e (iv).
- Suponha que o inseto utilize a opção (ii) e utilize x para representar a distância total percorrida no chão liso. Identifique o intervalo apropriado para x nesse caso e determine o menor tempo que o inseto pode levar usando a opção (ii).
- Suponha que o inseto utilize a opção (iii) e utilize x novamente para representar a distância total percorrida no chão liso. Identifique o intervalo apropriado para x nesse caso e determine o menor tempo que o inseto pode levar usando a opção (iii).
- Qual das opções (i), (ii), (iii) ou (iv) oferece o trajeto mais rápido? Qual é o tempo mínimo que o inseto leva nessas opções?



Jon Ferrey/Allsport/Getty Images

Se for conhecida a velocidade de um carro de corrida durante um certo intervalo de tempo, então é possível encontrar a distância percorrida nesse intervalo de tempo usando as técnicas que serão estudadas neste capítulo.

5

INTEGRAÇÃO

Neste capítulo, começaremos com uma visão geral do problema de encontrar áreas: discutiremos o significado do termo “área” e delinearemos duas abordagens para definir e calcular áreas. Em seguida, analisaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, que é o teorema que relaciona os problemas de encontrar retas tangentes e áreas, e discutiremos técnicas de calcular áreas. Por fim, utilizaremos as ideias desenvolvidas neste capítulo para definir o valor médio de uma função, continuar nosso estudo de movimento retílineo e examinar algumas consequências da regra da cadeia no Cálculo Integral. Concluiremos este capítulo estudando funções definidas por integrais, com ênfase na função logaritmo natural.

5.1 UMA VISÃO GERAL DO PROBLEMA DE ÁREA

Nesta seção introdutória, consideraremos o problema de calcular áreas de regiões planas com contornos curvilíneos. Todos os resultados desta seção serão reexaminados com mais detalhes em seções posteriores deste capítulo. Nossa objetivo aqui é tão somente introduzir os conceitos fundamentais.

■ O PROBLEMA DA ÁREA

Muitas civilizações primitivas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos, triângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, das quais o círculo é o exemplo mais simples.

O primeiro progresso real no trato com o problema geral da área foi obtido pelo matemático grego Arquimedes, que obteve áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, parábolas, espirais e vários outros tipos de curvas, usando um procedimento genial mais tarde denominado *método de exaustão*. Esse método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente (Figura 5.1.1). À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a “exaurir” a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

Para ver como isso funciona numericamente, denote por $A(n)$ a área de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio 1. A Tabela 5.1.1 mostra os valores de $A(n)$

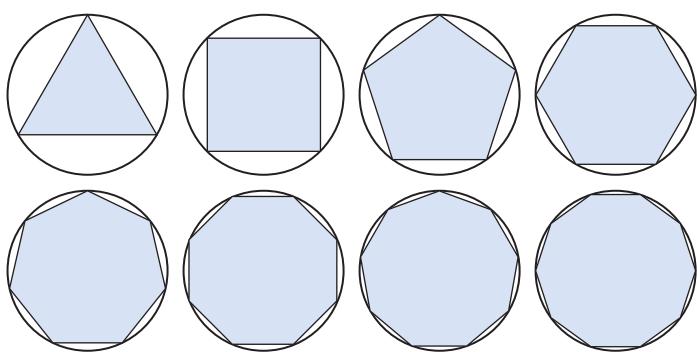


Figura 5.1.1

Tabela 5.1.1

n	$A(n)$
100	3,13952597647
200	3,14107590781
300	3,14136298250
400	3,14146346236
500	3,14150997084
1.000	3,14157198278
2.000	3,14158748588
3.000	3,14159035683
4.000	3,14159136166
5.000	3,14159182676
10.000	3,14159244688

com várias escolhas de n . Observe que, com valores grandes de n , como é de esperar, a área $A(n)$ parece estar próxima de π (unidades de área). Isso sugere que, para um círculo de raio 1, o método da exaustão é equivalente a uma equação da forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi$$

Como os matemáticos gregos suspeitavam muito do conceito de “infinito”, eles evitavam seu uso em argumentos matemáticos. Desse modo, o cálculo de áreas pelo método de exaustão era um procedimento muito complicado. Acabou ficando para Newton e Leibniz a descoberta de um método geral de obtenção de áreas que utilizasse explicitamente a noção de limite. Discutiremos o método desses matemáticos no contexto do problema seguinte.

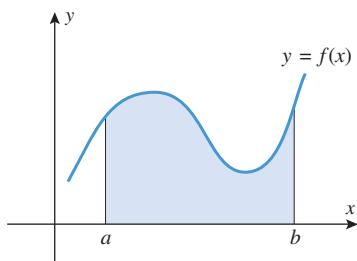


Figura 5.1.2

5.1.1 O PROBLEMA DA ÁREA Dada uma função f contínua e não negativa em um intervalo $[a, b]$, encontre a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x (Figura 5.1.2).

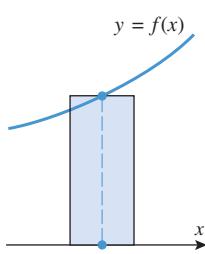


Figura 5.1.3

■ O MÉTODO DOS RETÂNGULOS PARA ENCONTRAR ÁREAS

Uma abordagem ao problema da área é a utilização do método de exaustão de Arquimedes da seguinte maneira:

- Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais e, em cada um deles, construir um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto na curva $y = f(x)$ acima do subintervalo; o ponto particular não interessa, podendo ser o que estiver acima do centro, acima dos extremos ou acima de qualquer outro ponto no subintervalo. Na Figura 5.1.3, ele está acima do centro.
- Para cada n , a área total dos retângulos pode ser vista como uma *aproximação* à área exata sob a curva acima do intervalo $[a, b]$. Além disso, fica intuitivamente evidente que, quando n cresce, essas aproximações irão se tornar cada vez melhores e tender à área exata como um limite (Figura 5.1.4). Assim, se A denota a área exata sob a curva e A_n denota a aproximação de A usando n retângulos, então

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$$

Diremos que esse é o *método dos retângulos* para o cálculo de A .

De um ponto de vista lógico, não podemos falar sobre o cálculo de áreas sem termos antes uma definição matemática precisa do termo “área”.

Adiante, neste capítulo, daremos tal definição, mas por enquanto trataremos intuitivamente do conceito.

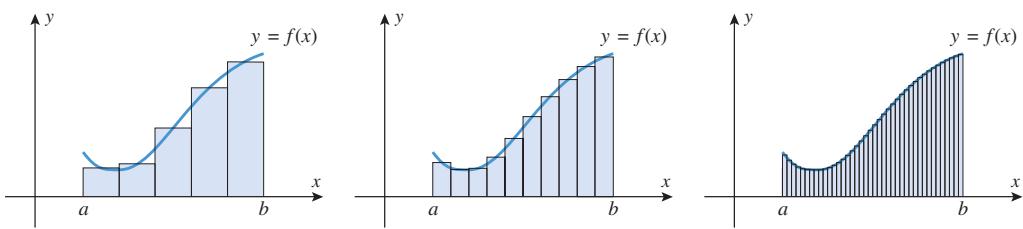


Figura 5.1.4

Para ilustrar essa ideia, vamos usar o método dos retângulos para aproximar a área sob a curva $y = x^2$ acima do intervalo $[0, 1]$ (Figura 5.1.5). Para começar, vamos subdividir o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais, cada um, portanto, com comprimento de $1/n$; as extremidades desses subintervalos ocorrem em

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$



Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.) Matemático e cientista grego. Nascido em Siracusa, na Sicília, era filho do astrônomo Fídeas e possivelmente parente de Heiron II, rei de Siracusa. A maioria dos fatos sobre sua vida vem do biógrafo romano Plutarco, que inseriu algumas páginas provocadoras sobre ele na vasta biografia do soldado romano Marcelo. Nas palavras de um escritor, “o relato sobre Arquimedes é marcante como uma finíssima fatia de presunto em um enorme sanduíche”.

Arquimedes é considerado, juntamente a Newton e Gauss, um dos três grandes matemáticos da História e, certamente, o maior da antiguidade. Seu trabalho é tão moderno em espírito e técnica que é difícil distingui-lo dos trabalhos dos matemáticos do século XVII, mesmo que feito sem os benefícios da Álgebra ou de um sistema numérico conveniente. Entre suas realizações matemáticas, desenvolveu um método geral (exaustão) para calcular áreas e volumes, tendo utilizado-o para encontrar áreas limitadas por parábolas e espirais e volumes de cilindros, paraboloides e segmentos de esferas. Elaborou um procedimento para aproximar π limitando seu valor entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Apesar das limitações do sistema numérico grego, criou métodos para encontrar raízes quadradas e um método baseado no miríade grego (10.000) para representar números tão grandes como 1 seguido por 80 bilhões de zeros.

Dentre todos os seus trabalhos, o que mais orgulhava Arquimedes era o método para encontrar o volume de uma esfera – ele mostrou que o volume de uma esfera é $2/3$ do volume do menor cilindro que a contém. Satisfazendo a um pedido seu, a figura de uma esfera e de um cilindro foi gravada na lápide de seu túmulo.

Além de Matemática, Arquimedes trabalhou extensivamente em Mecânica e Hidrostática. Quase todo estudante colegial conhece Arquimedes como um cientista distraído que, descobrindo que um objeto, ao boiar, desloca seu peso do líquido, pulou da banheira e saiu correndo nu pelas ruas de Siracusa gritando: “Eureka, eureka!” (“eu descobri!”). Arquimedes, na realidade, criou a disciplina de Hidrostática e usou-a para encontrar posições de equilíbrio para vários corpos flutuantes. Ele lançou

os postulados fundamentais da Mecânica, descobriu as leis das alavancas e calculou centros de gravidade de várias superfícies planas e de sólidos. Na agitação da descoberta das leis matemáticas da alavanca, atribuiu-se a ele a frase: “Dai-me um ponto de apoio que eu moverei a Terra”.

Embora Arquimedes estivesse mais interessado na Matemática pura do que em suas aplicações, ele era um gênio em Engenharia. Durante a segunda guerra Púnica, quando Siracusa foi atacada pela frota romana sob o comando de Marcelo, foi registrado por Plutarco que as invenções militares de Arquimedes mantiveram a frota afastada por três anos. Ele inventou supercatapultas que faziam chover pedras pesando um quarto de tonelada ou mais sobre os romanos e aterrorizantes engenhos mecânicos de ferro com “bicos e garras”, os quais, por cima das paredes da cidade, agarravam os navios e os jogavam contra as pedras. Após o primeiro revés, Marcelo chamou Arquimedes de um “Briareus geométrico (monstro mitológico com cem braços) que usava nossos navios como xícaras para tirar água do oceano”.

Finalmente, o exército romano foi vitorioso e, contrariando ordens específicas de Marcelo, Arquimedes, então com 75 anos, foi morto por um soldado romano. De acordo com um registro do incidente, o soldado fez sombra sobre a areia onde Arquimedes trabalhava em um problema matemático. Irritado, Arquimedes gritou: “não perturbe os meus círculos”. O soldado, em um acesso de raiva, matou o velho.

Embora não exista representação ou estátua desse grande homem, nove trabalhos de Arquimedes sobreviveram até os dias de hoje. De especial importância é o tratado *O Método dos Teoremas Mecânicos*, que era parte de um palimpsesto que foi encontrado em 1906 em Constantinopla. Nesse tratado, Arquimedes explica como fez algumas de suas descobertas, utilizando um raciocínio que antecipa as ideias do Cálculo Integral. Esse documento permaneceu perdido até 1998, quando foi adquirido por um colecionador particular anônimo por dois milhões de dólares.

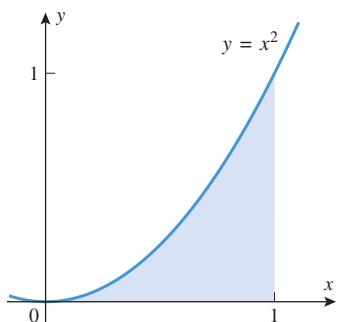


Figura 5.1.5

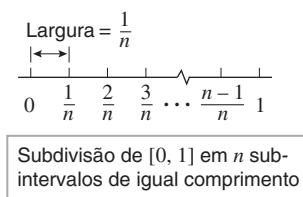


Figura 5.1.6

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso computacional para calcular o valor de A_{10} na Tabela 5.1.2. Alguns recursos computacionais têm comandos especiais para calcular somas como a de (1) para qualquer valor específico de n . Se o leitor dispuser de um recurso assim, utilize-o também para calcular A_{100} .

Tabela 5.1.2

n	4	10	100	1.000	10.000	100.000
A_n	0,468750	0,385000	0,338350	0,333834	0,333383	0,333338

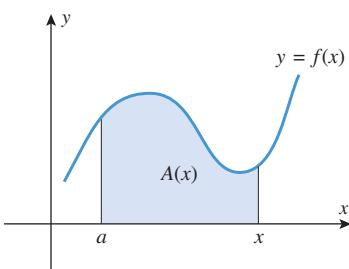


Figura 5.1.7

■ O MÉTODO DA ANTIDERIVADA PARA ENCONTRAR ÁREAS

Embora o método dos retângulos seja intuitivamente atraente, os limites que dele resultam somente podem ser calculados em certos casos. Por esse motivo, o progresso no problema da área ficou em um nível rudimentar até a segunda metade do século XVII, quando Isaac Newton e Gottfried Leibniz, independentemente, descobriram uma relação fundamental entre áreas e derivadas. Em resumo, eles mostraram que, se f é uma função contínua não negativa no intervalo $[a, b]$ e se $A(x)$ denota a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, x]$, onde x é um ponto qualquer do intervalo $[a, b]$ (Figura 5.1.7), então

$$A'(x) = f(x) \quad (2)$$

O exemplo a seguir confirma a Fórmula (2) em alguns casos em que a fórmula para $A(x)$ pode ser encontrada usando Geometria elementar.

► **Exemplo 1** Para cada uma das funções f , encontre a área $A(x)$ entre o gráfico de f e o intervalo $[a, x] = [-1, x]$, e encontre a derivada $A'(x)$ dessa função área.

- (a) $f(x) = 2$ (b) $f(x) = x + 1$ (c) $f(x) = 2x + 3$

Solução (a) Pela Figura 5.1.8a, vemos que

$$A(x) = 2(x - (-1)) = 2(x + 1) = 2x + 2$$

é a área de um retângulo de altura 2 e base $x + 1$. Para essa função área,

$$A'(x) = 2 = f(x)$$

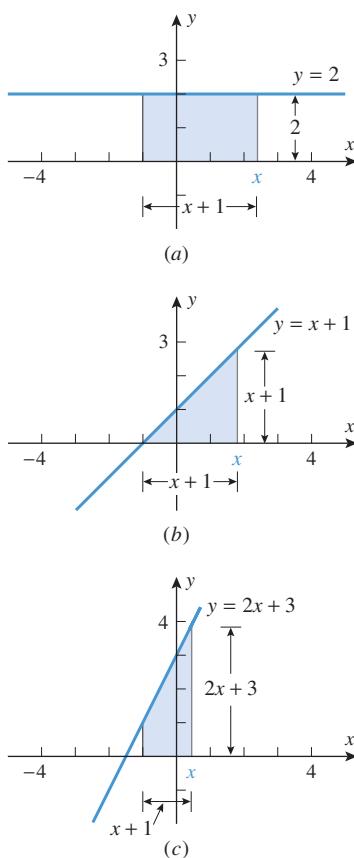


Figura 5.1.8

Substituindo o intervalo $[0, 1]$ pelo intervalo $[-1, 1]$ no Exemplo 2, o que acontece com a solução?

Solução (b) Pela Figura 5.1.8b, vemos que

$$A(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

é a área de um triângulo retângulo isósceles de altura e base iguais a $x+1$. Para essa função área,

$$A'(x) = x+1 = f(x)$$

Solução (c) Lembre que a fórmula para a área de um trapézio é $A = \frac{1}{2}(b+b')h$, onde b e b' denotam os comprimentos dos lados paralelos do trapézio, e a altura h denota a distância entre os lados paralelos. Pela Figura 5.1.8c, vemos que

$$A(x) = \frac{1}{2}((2x+3)+1)(x-(-1)) = x^2 + 3x + 2$$

é a área de um trapézio de lados paralelos de comprimentos 1 e $2x+3$ e altura $x-(-1)=x+1$. Para essa função área,

$$A'(x) = 2x+3 = f(x) \quad \blacktriangleleft$$

A Fórmula (2) é importante porque relaciona a função área A com a função f que delimita a região. Embora a fórmula para $A(x)$ possa ser difícil de ser obtida diretamente, sua derivada $f(x)$ é dada. Se soubermos recuperar uma fórmula para $A(x)$ a partir da fórmula dada de $A'(x)$, então poderemos obter a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, b]$ calculando $A(b)$.

O processo de encontrar uma função a partir de sua derivada é denominado **antiderivação**, e um procedimento para encontrar áreas através da antiderivação é denominado **método de antiderivação**. Para ilustrar esse método, vamos rever o problema de encontrar a área na Figura 5.1.5.

► **Exemplo 2** Use o método da antiderivada para encontrar a área sob o gráfico de $y = x^2$ acima do intervalo $[0, 1]$.

Solução Sejam x um ponto qualquer do intervalo $[0, 1]$ e $A(x)$ a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ acima do intervalo $[0, x]$. Segue de (2) que

$$A'(x) = x^2 \tag{3}$$

Para encontrar $A(x)$, precisamos procurar uma função cuja derivada seja x^2 . Por adivinhação, vemos que uma tal função é $\frac{1}{3}x^3$, de modo que, pelo Teorema 4.8.3,

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \tag{4}$$

com alguma constante real C . Podemos determinar o valor específico de C considerando o caso em que $x = 0$. Nesse caso, (4) implica

$$A(0) = C \tag{5}$$

Contudo, se $x = 0$, então o intervalo $[0, x]$ se reduz a um único ponto. Se concordarmos em convencionar que a área acima de um só ponto deveria ser considerada nula, então $A(0) = 0$ e (5) implica que $C = 0$. Assim, segue de (4) que

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3$$

é a função área procurada. Isso implica que a área sob o gráfico de $y = x^2$ acima do intervalo $[0, 1]$ é

$$A(1) = \frac{1}{3}(1^3) = \frac{1}{3}$$

Isso é consistente com o resultado obtido numericamente acima. ◀

Como ilustra o Exemplo 2, a antiderivação é, essencialmente, um processo de adivinhação em que tentamos “desfazer” uma diferenciação. Um dos objetivos deste capítulo é desenvolver procedimentos eficientes de antiderivação.

■ COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DO RETÂNGULO E DA ANTIDERIVADA

O método do retângulo e o da antiderivada fornecem duas abordagens bem diferentes ao problema da área, cada uma das quais é importante. Em geral, o método da antiderivada é o mais eficiente para *calcular* áreas, mas é o método do retângulo que é utilizado para *definir* formalmente a noção de área, permitindo com isso a demonstração de resultados matemáticos sobre áreas. A ideia subjacente à abordagem por retângulos também é importante, por poder ser facilmente adaptada a problemas tão diversos como encontrar o volume de um sólido, o comprimento de uma curva, a massa de um objeto e o trabalho para bombear água para fora de um tanque, para citar apenas alguns exemplos.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.1 (Ver página 322 para respostas.)

1. Seja R a região abaixo do gráfico de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e acima do intervalo $[-1, 1]$.

- (a) Use um argumento geométrico para encontrar a área de R .
 (b) Quais são as estimativas que se obtêm se a área de R for aproximada pela área total dentro dos retângulos da figura abaixo?

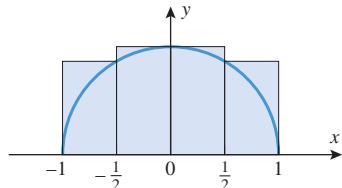


Figura Ex-1

2. Suponha que quando aproximamos a área A entre o gráfico de uma função $y = f(x)$ e um intervalo $[a, b]$ pelas áreas de n retângulos, a área total dos retângulos seja $A_n = 2 + (2/n)$, $n = 1, 2, \dots$. Então $A = \underline{\hspace{2cm}}$
3. A área sob o gráfico de $y = x^2$ acima do intervalo $[0, 3]$ é $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. Encontre a área $A(x)$ entre o gráfico da função $f(x) = x$ e o intervalo $[0, x]$ e verifique se $A'(x) = f(x)$.
5. A área sob o gráfico de $y = f(x)$ acima do intervalo $[0, x]$ é $A(x) = x + e^x - 1$. Decorre disso que $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 5.1

- 1-12** Dê uma estimativa para a área entre o gráfico da função f e o intervalo $[a, b]$. Use um esquema de aproximação com n retângulos, análogo ao desenvolvido nesta seção para a função $f(x) = x^2$. Se seu recurso computacional efetuar somatórios automaticamente, estime a área especificada usando $n = 10, 50$ e 100 retângulos. Caso contrário, estime a área usando $n = 2, 5$ e 10 retângulos. ■

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $[a, b] = [0, 1]$
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $[a, b] = [0, 1]$
3. $f(x) = \sin x$; $[a, b] = [0, \pi]$
4. $f(x) = \cos x$; $[a, b] = [0, \pi/2]$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$; $[a, b] = [1, 2]$
6. $f(x) = \cos x$; $[a, b] = [-\pi/2, \pi/2]$
7. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $[a, b] = [0, 1]$
8. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $[a, b] = [-1, 1]$
9. $f(x) = e^x$; $[a, b] = [-1, 1]$
10. $f(x) = \ln x$; $[a, b] = [1, 2]$
11. $f(x) = \arcsen x$; $[a, b] = [0, 1]$
12. $f(x) = \text{arc tg } x$; $[a, b] = [0, 1]$

- 13-18** Esboce o gráfico de cada função no intervalo dado. Em seguida, use fórmulas de área simples da Geometria para encontrar a função área $A(x)$ que dá a área entre o gráfico da função f especificada e o intervalo $[a, x]$. Confirme que $A'(x) = f(x)$ em cada caso. ■

13. $f(x) = 3$; $[a, x] = [1, x]$
14. $f(x) = 5$; $[a, x] = [2, x]$
15. $f(x) = 2x + 2$; $[a, x] = [0, x]$
16. $f(x) = 3x - 3$; $[a, x] = [1, x]$
17. $f(x) = 2x + 2$; $[a, x] = [1, x]$
18. $f(x) = 3x - 3$; $[a, x] = [2, x]$

- 19-22 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. Se $A(n)$ denota a área de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio 2, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = 2\pi$.
20. Se a área sob a curva $y = x^2$ acima de um intervalo for aproximada pela área total de uma coleção de retângulos, então a aproximação será grande demais.
21. Se $A(x)$ for a área sob o gráfico de uma função contínua não negativa acima de um intervalo $[a, x]$, então $A'(x) = f(x)$.

22. Se $A(x)$ for a área sob o gráfico de uma função contínua não negativa acima de um intervalo $[a, x]$, então $A(x)$ será uma função contínua.

ENFOCANDO CONCEITOS

23. Explique como usar a fórmula encontrada para $A(x)$ na solução do Exemplo 2 para determinar a área entre o gráfico de $y = x^2$ e o intervalo $[3, 6]$.
24. Repita o Exercício 23 para o intervalo $[-3, 9]$.
25. Sejam A a área entre o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e o intervalo $[0, 1]$ e B a área entre o gráfico de $f(x) = x^2$ e o intervalo $[0, 1]$. Explique geometricamente por que $A + B = 1$.

26. Sejam A a área entre o gráfico de $f(x) = 1/x$ e o intervalo $[1, 2]$ e B a área entre o gráfico de f e o intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Explique geometricamente por que $A = B$.

- 27-28 É dada a área $A(x)$ sob o gráfico de f e acima do intervalo $[a, x]$. Encontre a função f e o valor de a . ■

27. $A(x) = x^2 - 4$
28. $A(x) = x^2 - x$
29. **Texto** Compare e contraste os métodos do retângulo e da antiderivada.
30. **Texto** Suponha que f seja uma função contínua não negativa num intervalo $[a, b]$ e que $g(x) = f(x) + C$, em que C é uma constante positiva. Qual será a área entre os gráficos de f e g ?

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.1

1. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. 2 3. 9 4. $A(x) = \frac{x^2}{2}$; $A'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$ 5. $e^x + 1$

5.2 A INTEGRAL INDEFINIDA

Na seção anterior, vimos como a antiderivação pode ser usada para encontrar áreas com exatidão. Nesta seção, desenvolveremos alguns resultados fundamentais sobre antiderivação.

■ ANTIDERIVADAS

5.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma **antiderivada** de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

Por exemplo, a função $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$ porque, em cada x desse intervalo, temos

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3}x^3 \right] = x^2 = f(x)$$

Contudo, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ não é a única antiderivada de f nesse intervalo. Se somarmos qualquer constante C a $\frac{1}{3}x^3$, então a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ também é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$, pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3}x^3 + C \right] = x^2 + 0 = f(x)$$

Em geral, uma vez conhecida uma antiderivada, podemos obter outras antiderivadas somando constantes a essa antiderivada conhecida. Assim,

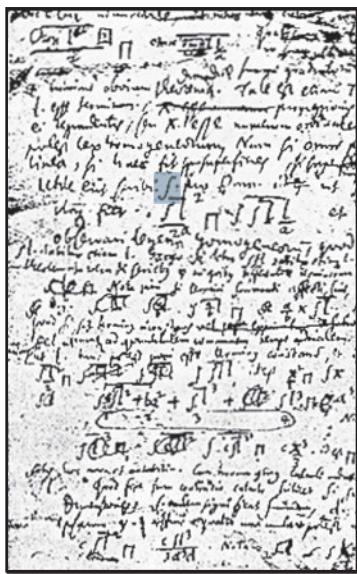
$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 + 2, \quad \frac{1}{3}x^3 - 5, \quad \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}$$

são todas antiderivadas da função $f(x) = x^2$.

É razoável perguntar se existem antiderivadas de uma função f que não podem ser obtidas adicionando-se constantes a uma antiderivada F conhecida. A resposta é *não* – uma vez conhecida uma única antiderivada de f em um intervalo, todas as outras antiderivadas nesse intervalo podem ser obtidas adicionando-se constantes àquela antiderivada. Isso acontece devido ao Teorema 4.8.3, que nos diz que se duas funções diferenciáveis têm a mesma derivada num intervalo aberto, então essas funções diferem por uma constante nesse intervalo. O teorema a seguir resume essas observações.

5.2.2 TEOREMA Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C , a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C .

■ A INTEGRAL INDEFINIDA



Reproduzido de C. I. Gerhardt's "Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern (1899)." Trecho do manuscrito de Leibniz, datado de 29 de outubro de 1675, no qual apareceu pela primeira vez o símbolo de integral (ver mancha em cor).

Trecho do manuscrito de Leibniz, datado de 29 de outubro de 1675, no qual apareceu pela primeira vez o símbolo de integral (ver mancha em cor).

O processo de encontrar antiderivadas é denominado **antiderivação**, **antidiferenciação** ou, ainda, **integração**. Assim, se

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \quad (1)$$

então, **integrando** ou **antiderivando** a função $f(x)$, obtemos uma antiderivada da forma $F(x) + C$. Para enfatizar esse processo, reescrevemos a equação (1) usando a **notação integral**

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

onde C deve ser interpretado como uma constante arbitrária. É importante observar que (1) e (2) são tão somente notações diferentes que expressam o mesmo fato. Por exemplo,

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \text{é equivalente a} \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2$$

Observe que, se derivarmos uma antiderivada de $f(x)$, voltamos a obter $f(x)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x) dx\right] = f(x) \quad (3)$$

A expressão $\int f(x) dx$ é denominada **integral indefinida**. O adjetivo *indefinida* enfatiza que o resultado da antiderivação é uma função “genérica”, descrita só a menos de um termo constante. O sinal de “s espichado” que aparece no lado esquerdo de (2) é denominado **sinal de integral**,* a função $f(x)$ é denominada **integrando** e a constante C é denominada **constante de integração**. A Equação (2) deve ser lida como segue:

A integral de $f(x)$ em relação a x é igual a $F(x)$ mais uma constante.

O símbolo diferencial dx das operações de derivação e antiderivação,

$$\frac{d}{dx}[\] \quad \text{e} \quad \int [\] dx$$

* Essa notação foi inventada por Leibniz. Nos artigos iniciais, Leibniz usou a notação “omn” (uma abreviatura da palavra latina “omnes”) para denotar integração. Então, em 29 de outubro de 1675, ele escreveu “será útil escrever \int para significar omn., assim \int por omn. l...”. Duas ou três semanas depois, ele aperfeiçou ainda mais a notação e escreveu $\int [] dx$ em vez de só \int . Essa notação é tão útil e poderosa que seu desenvolvimento por Leibniz deve ser visto como um grande marco na história da Matemática e da Ciência.

serves para identificar a variável independente. Se for utilizada uma outra variável independente em vez de x , digamos t , então a notação deve ser ajustada de acordo. Assim,

$$\frac{d}{dt}[F(t)] = f(t) \quad \text{e} \quad \int f(t) dt = F(t) + C$$

são afirmações equivalentes. A seguir, apresentamos alguns exemplos de fórmulas de derivação e as equivalentes de integração.

FÓRMULA DE DERIVADA	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO EQUIVALENTE
$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$	$\int 3x^2 dx = x^3 + C$
$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$
$\frac{d}{dt}[\operatorname{tg} t] = \sec^2 t$	$\int \sec^2 t dt = \operatorname{tg} t + C$
$\frac{d}{du}[u^{3/2}] = \frac{3}{2}u^{1/2}$	$\int \frac{3}{2}u^{1/2} du = u^{3/2} + C$

Para simplificar, dx pode, às vezes, ser absorvido no integrando. Por exemplo,

$$\int 1 dx \quad \text{pode ser escrita como} \quad \int dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{pode ser escrita como} \quad \int \frac{dx}{x^2}$$

■ FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

Integração é essencialmente um trabalho de dar palpites – dada a derivada f de uma função F , tenta-se adivinhar qual é a função F . Porém, muitas fórmulas básicas de integração podem ser obtidas diretamente de suas fórmulas de diferenciação correspondentes. Algumas das mais importantes estão na Tabela 5.2.1.

Tabela 5.2.1
FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

FÓRMULA DE DIFERENCIACÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO	FÓRMULA DE DIFERENCIACÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = x + C$	8. $\frac{d}{dx}[-\operatorname{cossec} x] = \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$	$\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cossec} x + C$
2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$	9. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
3. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$	10. $\frac{d}{dx}\left[\frac{b^x}{\ln b}\right] = b^x \quad (0 < b, b \neq 1)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b, b \neq 1)$
4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	11. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
5. $\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$	12. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arc tg} x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc tg} x + C$
6. $\frac{d}{dx}[-\operatorname{cotg} x] = \operatorname{cossec}^2 x$	$\int \operatorname{cossec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$	13. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arc sen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc sen} x + C$
7. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sec} x] = \sec x \operatorname{tg} x$	$\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \operatorname{sec} x + C$	14. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arc sec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc sec} x + C$

Ver Exercício 72 para uma discussão da Fórmula 14 da Tabela 5.2.1.

► **Exemplo 1** A segunda fórmula de integração na Tabela 5.2.1 será fácil de lembrar se for expressa em palavras:

Para integrar uma potência em x (diferente de -1), some 1 ao expoente e divida pela nova potência.

Aqui estão alguns exemplos.

Embora a Fórmula 2 na Tabela 5.2.1 não seja aplicável à integração de x^{-1} , essa função pode ser integrada reescrevendo a integral na Fórmula 11 como

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad r = 2$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \quad r = 3$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{1}{4x^4} + C \quad r = -5$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C \quad r = \frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft$$

■ PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

Nossas primeiras propriedades de antiderivadas seguem diretamente das regras do fator constante, da soma e da diferença de derivadas.

5.2.3 TEOREMA Sejam $F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, e c uma constante. Então:

(a) Uma constante pode ser movida através do sinal de integração; isto é,

$$\int cf(x) dx = cF(x) + C$$

(b) Uma antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas; isto é,

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C$$

(c) Uma antiderivada de uma diferença é a diferença das antiderivadas; isto é,

$$\int [f(x) - g(x)] dx = F(x) - G(x) + C$$

DEMONSTRAÇÃO Em geral, para estabelecer a validade de uma equação da forma

$$\int h(x) dx = H(x) + C$$

precisamos mostrar que

$$\frac{d}{dx}[H(x)] = h(x)$$

Aqui, $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente; portanto, sabemos que

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[G(x)] = g(x)$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}[cF(x)] = c \frac{d}{dx}[F(x)] = cf(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F(x) + G(x)] = \frac{d}{dx}[F(x)] + \frac{d}{dx}[G(x)] = f(x) + g(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F(x) - G(x)] = \frac{d}{dx}[F(x)] - \frac{d}{dx}[G(x)] = f(x) - g(x)$$

o que prova as três afirmações do teorema. ■

As afirmações do Teorema 5.2.3 podem ser resumidas nas seguintes fórmulas:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (4)$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (5)$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx \quad (6)$$

Contudo, essas equações devem ser aplicadas cuidadosamente para evitar erros e complicações desnecessárias provocadas pelas constantes de integração. Por exemplo, se utilizarmos (4) para integrar $2x$ escrevendo

$$\int 2x dx = 2 \int x dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = x^2 + 2C$$

então obteremos uma forma desnecessariamente complicada de constante arbitrária. Esse tipo de problema pode ser evitado colocando uma constante de integração somente no resultado, e não em contas intermediárias. Os Exercícios 65 e 66 exploram os problemas que decorrem da aplicação descuidada dessas fórmulas.

► Exemplo 2 Calcule

$$(a) \int 4 \cos x dx \quad (b) \int (x + x^2) dx$$

Solução (a) Como $F(x) = \sin x$ é uma antiderivada de $f(x) = \cos x$ (Tabela 5.2.1), obtemos

$$\int 4 \cos x dx = 4 \int \cos x dx = 4 \sin x + C$$

(4)

Solução (b) Pela Tabela 5.2.1, obtemos

$$\int (x + x^2) dx = \int x dx + \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C \quad (5)$$

As partes (b) e (c) do Teorema 5.2.3 podem ser estendidas para mais de duas funções, o que, combinando com (a), resulta na seguinte fórmula geral:

$$\begin{aligned} \int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)] dx \\ = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \cdots + c_n \int f_n(x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

► Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int (3x^6 - 2x^2 + 7x + 1) dx &= 3 \int x^6 dx - 2 \int x^2 dx + 7 \int x dx + \int 1 dx \\ &= \frac{3x^7}{7} - \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$

Às vezes, é muito útil reescrever o integrando de forma diferente antes de efetuar a integração. Isso é ilustrado no exemplo a seguir.

► Exemplo 4 Calcule

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad (b) \int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt \quad (c) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

Solução (a)

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \operatorname{cosec} x \cot g x dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

Fórmula 8 da Tabela 5.2.1

Solução (b)

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt &= \int \left(\frac{1}{t^2} - 2 \right) dt = \int (t^{-2} - 2) dt \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} - 2t + C = -\frac{1}{t} - 2t + C\end{aligned}$$

Alternativamente, efetue a integral de (c) dividindo antes o numerador pelo denominador do integrando e depois integrando.

Solução (c) Somando e subtraindo 1 do numerador do integrando, podemos reescrever a integral de modo a poder aplicar as Fórmulas 1 e 12 da Tabela 5.2.1, como segue:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx &= \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = x - \operatorname{arc tg} x + C\end{aligned}$$

CURVAS INTEGRAIS

Os gráficos das antiderivadas de uma função f são denominados **curvas integrais** de f . Sabemos a partir do Teorema 5.2.2 que, se $y = F(x)$ for uma curva integral de $f(x)$, as demais curvas integrais são translações dessa curva, uma vez que têm equações da forma $y = F(x) + C$. Por exemplo, $y = \frac{1}{3}x^3$ é uma curva integral de $f(x) = x^2$; portanto, as demais têm equações da forma $y = \frac{1}{3}x^3 + C$; reciprocamente, o gráfico de qualquer equação dessa forma é uma curva integral (Figura 5.2.1).

Em muitos problemas, estamos interessados em encontrar uma função cuja derivada satisfaça condições específicas. O exemplo a seguir ilustra um problema geométrico desse tipo.

► Exemplo 5 Suponha que uma curva $y = f(x)$ no plano xy tenha a propriedade que, em cada ponto (x, y) da curva, a reta tangente tem inclinação x^2 . Encontre uma equação dessa curva sabendo que ela passa pelo ponto $(2, 1)$.

Solução Como a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ é dy/dx , temos $dy/dx = x^2$, e

$$y = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

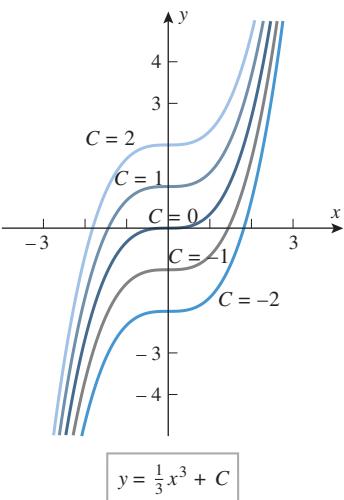


Figura 5.2.1

No Exemplo 5, a exigência de que o gráfico de f passe pelo ponto $(2, 1)$ seleciona a única curva integral $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$ da família de curvas $y = \frac{1}{3}x^3 + C$ (Figura 5.2.2).

Como a curva passa por $(2, 1)$, pode-se encontrar um valor específico para C usando o fato de que $y = 1$ se $x = 2$. Substituindo esses valores na equação anterior, obtemos

$$1 = \frac{1}{3}(2^3) + C \quad \text{ou} \quad C = -\frac{5}{3}$$

e, portanto, uma equação da curva é

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$$

(Figura 5.2.2). ◀

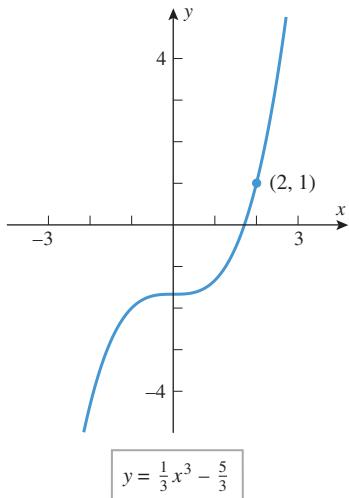


Figura 5.2.2

■ INTEGRAÇÃO DO PONTO DE VISTA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Vamos considerar agora outra forma de encarar a integração que será útil posteriormente em nosso trabalho. Suponha que $f(x)$ seja uma função conhecida e que queiramos encontrar uma função $F(x)$, tal que $y = F(x)$ satisfaça a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (8)$$

As soluções dessa equação são as antiderivadas de $f(x)$, e sabemos que elas podem ser obtidas integrando-se $f(x)$. Por exemplo, as soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad (9)$$

são

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

A Equação (8) é chamada de *equação diferencial*, pois envolve a derivada de uma função desconhecida. As equações diferenciais diferem dos tipos de equação encontrados até agora, pois a incógnita é uma *função* e não um *número*, como em uma equação do tipo $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Às vezes, não estamos interessados em encontrar todas as soluções de (8), mas somente uma solução cujo gráfico passe por um ponto especificado (x_0, y_0) . Por exemplo, no Exemplo 5, resolvemos (9) para a curva integral que passa pelo ponto $(2, 1)$.

Para simplificar, é comum no estudo das equações diferenciais denotar uma solução de $dy/dx = f(x)$ como $y(x)$ em vez de $F(x)$, como anteriormente. Com essa notação, o problema de encontrar uma função $y(x)$, cuja derivada é $f(x)$ e cuja curva integral passa pelo ponto (x_0, y_0) , é expresso como

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (10)$$

Esse problema é denominado *problema de valor inicial*, e a exigência $y(x_0) = y_0$ é uma *condição inicial* do problema.

► **Exemplo 6** Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y(0) = 1$$

Solução A solução da equação diferencial é

$$y = \int \cos x dx = \sin x + C \quad (11)$$

A condição inicial $y(0) = 1$ implica que $y = 1$ se $x = 0$; substituindo esses valores em (11), obtemos

$$1 = \sin(0) + C \quad \text{ou} \quad C = 1$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é $y = \sin x + 1$. ◀

CAMPOS DE DIREÇÕES

Se interpretarmos dy/dx como a inclinação da reta tangente, então, em um ponto (x, y) de uma curva integral da equação $dy/dx = f(x)$, a inclinação da reta tangente é igual a $f(x)$. O interessante sobre isso é que as inclinações das retas tangentes a curvas integrais podem ser obtidas sem realmente resolver a equação diferencial. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + 1}$$

então, sem resolver a equação, sabemos que no ponto $x = 1$ a inclinação da reta tangente a uma curva integral é $\sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$; mas geralmente, em $x = a$, a reta tangente a uma curva integral tem inclinação $\sqrt{a^2 + 1}$.

Uma descrição geométrica das curvas integrais de uma equação diferencial $dy/dx = f(x)$ pode ser obtida escolhendo-se uma grade retangular de pontos no plano xy , calculando-se as inclinações das retas tangentes às curvas integrais nos pontos da grade e desenhando-se pequenas porções das retas tangentes naqueles pontos. A figura resultante, denominada **campo de direções** ou **campo de inclinações**, mostra a “direção” da curva integral nos pontos da grade. Com um número razoavelmente grande de pontos na grade, muitas vezes é possível visualizar as próprias curvas integrais; por exemplo, a Figura 5.2.3a mostra um campo de direções da equação diferencial $dy/dx = x^2$, e a Figura 5.2.3b mostra o mesmo campo com as curvas integrais sobrepostas – quanto mais pontos na grade forem usados, mais completamente o campo de direções revela a forma das curvas integrais. Porém, a quantidade de cálculos pode ser considerável e, por isso, geralmente são utilizados computadores quando forem necessários muitos pontos na grade.

Os campos de direções serão estudados com mais detalhes adiante neste texto.

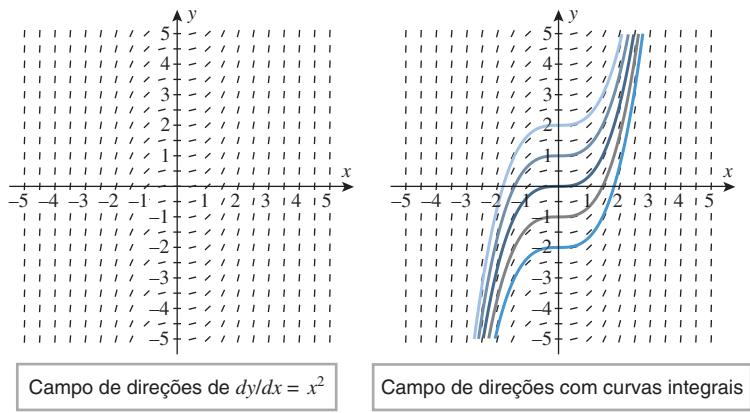


Figura 5.2.3

(a)

(b)

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 5.2 (Ver página 332 para respostas.)

- Uma função F é uma antiderivada de uma função f em um intervalo se _____ em cada x do intervalo.
- Escreva uma fórmula de integração equivalente para cada fórmula de derivação.
 - $\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 - $\frac{d}{dx}[e^{4x}] = 4e^{4x}$
- Calcule as integrais.
 - $\int [x^3 + x + 5] dx$
 - $\int [\sec^2 x - \operatorname{cossec} x \cotg x] dx$
- O gráfico de $y = x^2 + x$ é uma curva integral da função $f(x) =$ _____. Se G é uma função cujo gráfico também é uma curva integral de f , e se $G(1) = 5$, então $G(x) =$ _____.
- Um campo de direções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 - 4}$$
 tem um segmento de reta de inclinação _____ pelo ponto $(0, 5)$ e um segmento de reta de inclinação _____ pelo ponto $(-4, 1)$.

EXERCÍCIOS 5.2  

1. Em cada parte, confirme que a fórmula está correta e enuncie uma fórmula de integração correspondente.

(a) $\frac{d}{dx}[\sqrt{1+x^2}] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) $\frac{d}{dx}[xe^x] = (x+1)e^x$

2. Em cada parte, confirme que a fórmula está correta por diferenciação.

(a) $\int x \sen x \, dx = \sen x - x \cos x + C$

(b) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

ENFOCANDO CONCEITOS

3. O que é uma *constante de integração*? Por que a resposta de um problema de integração envolve uma constante de integração?
4. O que é uma *curva integral* de uma função f ? Qual é a relação entre duas curvas integrais quaisquer de uma função f ?

- 5-8** Encontre a derivada e enuncie a fórmula de integração correspondente. ■

5. $\frac{d}{dx}[\sqrt{x^3+5}]$

6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+3}\right]$

7. $\frac{d}{dx}[\sen(2\sqrt{x})]$

8. $\frac{d}{dx}[\sen x - x \cos x]$

- 9-10** Calcule a integral reescrevendo apropriadamente o integrando, se necessário, e então aplique a regra da potência (Fórmula 2 na Tabela 5.2.1). ■

9. (a) $\int x^8 \, dx$ (b) $\int x^{5/7} \, dx$ (c) $\int x^3 \sqrt{x} \, dx$

10. (a) $\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$ (b) $\int \frac{1}{x^6} \, dx$ (c) $\int x^{-7/8} \, dx$

- 11-14** Calcule cada integral aplicando adequadamente o Teorema 5.2.3 e a Fórmula (2) na Tabela 5.2.1. ■

11. $\int \left[5x + \frac{2}{3x^5}\right] \, dx$ 12. $\int [x^{-1/2} - 3x^{7/5} + \frac{1}{9}] \, dx$

13. $\int [x^{-3} - 3x^{1/4} + 8x^2] \, dx$

14. $\int \left[\frac{10}{y^{3/4}} - \sqrt[3]{y} + \frac{4}{\sqrt{y}} \right] dy$

- 15-34** Calcule a integral e verifique sua resposta por diferenciação. ■

15. $\int x(1+x^3) \, dx$ 16. $\int (2+y^2)^2 \, dy$

17. $\int x^{1/3}(2-x)^2 \, dx$ 18. $\int (1+x^2)(2-x) \, dx$

19. $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} \, dx$ 20. $\int \frac{1 - 2t^3}{t^3} \, dt$
21. $\int \left[\frac{2}{x} + 3e^x \right] \, dx$ 22. $\int \left[\frac{1}{2t} - \sqrt{2}e^t \right] \, dt$
23. $\int [3 \sen x - 2 \sec^2 x] \, dx$ 24. $\int [\operatorname{cossec}^2 t - \sec t \tg t] \, dt$
25. $\int \sec x (\sec x + \tg x) \, dx$ 26. $\int \operatorname{cossec} x (\sen x + \cotg x) \, dx$
27. $\int \frac{\sec \theta}{\cos \theta} \, d\theta$ 28. $\int \frac{dy}{\operatorname{cossec} y}$
29. $\int \frac{\sen x}{\cos^2 x} \, dx$ 30. $\int \left[\phi + \frac{2}{\sen^2 \phi} \right] d\phi$
31. $\int [1 + \sen^2 \theta \operatorname{cossec} \theta] \, d\theta$ 32. $\int \frac{\sec x + \cos x}{2 \cos x} \, dx$
33. $\int \left[\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2} \right] \, dx$
34. $\int \left[\frac{4}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{1+x+x^3}{1+x^2} \right] \, dx$
35. Calcule a integral

$$\int \frac{1}{1+\sen x} \, dx$$

multiplicando o numerador e o denominador por uma expressão apropriada.

36. Use a fórmula do ângulo duplo $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ para calcular a integral

$$\int \frac{1}{1+\cos 2x} \, dx$$

- 37-40 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

37. Se $F(x)$ for uma antiderivada de $f(x)$, então

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

38. Se C denota uma constante de integração, então ambas as equações

$$\int \cos x \, dx = \sen x + C$$

$$\int \cos x \, dx = (\sen x + \pi) + C$$

estão corretas.

39. A função $f(x) = e^{-x} + 1$ é uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^x}, \quad y(0) = 1$$

40. Cada curva integral do campo de direções

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

é o gráfico de uma função crescente de x .

41. Use um recurso gráfico computacional para gerar algumas curvas integrais representativas de $f(x) = 5x^4 - \sec^2 x$ ao longo do intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

42. Use um recurso gráfico computacional para gerar algumas curvas integrais representativas da função $f(x) = (x-1)/x$ ao longo do intervalo $(0, 5)$.

43-46 Resolva os problemas de valor inicial.

43. (a) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x}$, $y(1) = 2$

(b) $\frac{dy}{dt} = \sin t + 1$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 0$

44. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x)^3}$, $y(1) = 0$

(b) $\frac{dy}{dt} = \sec^2 t - \sin t$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

(c) $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{x^3}$, $y(0) = 0$

45. (a) $\frac{dy}{dx} = 4e^x$, $y(0) = 1$ (b) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, $y(-1) = 5$

46. (a) $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}$, $y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$

47-50 Uma partícula move-se ao longo de um eixo s com função posição $s = s(t)$ e função velocidade $v(t) = s'(t)$. Use a informação dada para encontrar $s(t)$.

47. $v(t) = 32t$; $s(0) = 20$

48. $v(t) = \cos t$; $s(0) = 2$

49. $v(t) = 3\sqrt{t}$; $s(4) = 1$

50. $v(t) = 3e^t$; $s(1) = 0$

51. Encontre a forma geral de uma função cuja derivada segunda é \sqrt{x} . [Sugestão: Resolva a equação $f''(x) = \sqrt{x}$ para $f(x)$, integrando ambos os lados duas vezes.]

52. Encontre uma função f tal que $f''(x) = x + \cos x$ e, além disso, $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$. [Sugestão: Integre ambos os lados da equação duas vezes.]

53-57 Encontre uma equação da curva que satisfaz as condições dadas.

53. Em cada ponto (x, y) da curva, a inclinação é $2x + 1$; a curva passa pelo ponto $(-3, 0)$.

54. Em cada ponto (x, y) da curva, a inclinação é $(x+1)^2$; a curva passa pelo ponto $(-2, 8)$.

55. Em cada ponto (x, y) da curva, a inclinação é $-\sin x$; a curva passa pelo ponto $(0, 2)$.

56. Em cada ponto (x, y) da curva, a inclinação é igual ao quadrado da distância entre o ponto e o eixo y ; o ponto $(-1, 2)$ está na curva.

57. Em cada ponto (x, y) da curva, y satisfaz a condição $d^2y/dx^2 = 6x$; a reta $y = 5 - 3x$ é tangente à curva no ponto onde $x = 1$.

58. Em cada parte, use um CAS para resolver o problema de valor inicial.

(a) $\frac{dy}{dx} = x^2 \cos 3x$, $y(\pi/2) = -1$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}}$, $y(0) = -2$

59. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar um campo de direções da equação diferencial $dy/dx = x$ na região $-5 \leq x \leq 5$ e $-5 \leq y \leq 5$.
 (b) Esboce algumas curvas integrais representativas da função $f(x) = x$.
 (c) Encontre uma equação para a curva integral que passa pelo ponto $(2, 1)$.

60. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar um campo de direções da equação diferencial $dy/dx = e^x/2$ na região $-1 \leq x \leq 4$ e $-1 \leq y \leq 4$.
 (b) Esboce algumas curvas integrais representativas da função $f(x) = e^{x/2}$.
 (c) Encontre uma equação para a curva integral que passa pelo ponto $(0, 1)$.

61-64 Os campos de direções dados correspondem a uma das equações diferenciais abaixo. Identifique a equação diferencial que combina com a figura e esboce curvas soluções pelos pontos destacados.

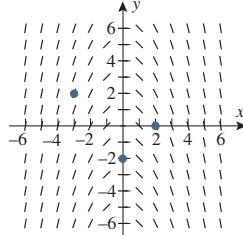
(a) $\frac{dy}{dx} = 2$

(b) $\frac{dy}{dx} = -x$

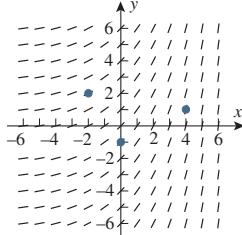
(c) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 4$

(d) $\frac{dy}{dx} = e^{x/3}$

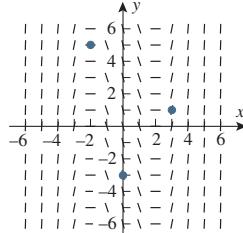
61.



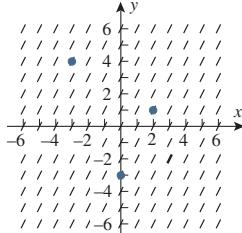
62.



63.



64.



ENFOCANDO CONCEITOS

65. Faça uma crítica da “demonstração” seguinte de que toda constante de integração é nula.

$$C = \int 0 \, dx = \int 0 \cdot 0 \, dx = 0 \int 0 \, dx = 0$$

66. Faça uma crítica da “demonstração” seguinte de que toda constante de integração é nula.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\int x \, dx \right) - \left(\int x \, dx \right) \\ &= \int (x - x) \, dx = \int 0 \, dx = C \end{aligned}$$

67. (a) Mostre que

$$F(x) = \operatorname{arc tg} x \quad \text{e} \quad G(x) = -\operatorname{arc tg}(1/x)$$

diferem por uma constante no intervalo $(0, +\infty)$ mostrando que ambas as funções são antiderivadas de uma mesma função.

- (b) Encontre a constante C tal que $F(x) - G(x) = C$ calculando as funções $F(x)$ e $G(x)$ num valor particular de x .
(c) Confira sua resposta na parte (b) usando identidades trigonométricas.

68. Sejam F e G as funções definidas por

$$F(x) = \frac{x^2 + 3x}{x} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} x + 3, & x > 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que F e G têm a mesma derivada.
(b) Mostre que $G(x) \neq F(x) + C$ com qualquer constante C .
(c) As partes (a) e (b) violam o Teorema 5.2.2? Explique.

69-70 Use uma identidade trigonométrica para calcular a integral. ■

69. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

70. $\int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$

71. Use as identidades $\cos 2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \operatorname{cos}^2 \theta - 1$ para ajudar a calcular as integrais

$$(a) \int \operatorname{sen}^2(x/2) \, dx \quad (b) \int \operatorname{cos}^2(x/2) \, dx$$

72. Lembre que

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{arc sec} x] = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Use isso para conferir a Fórmula 14 na Tabela 5.2.1.

73. A velocidade do som no ar a 0°C (273 K , na escala Kelvin) é 1.087 pés por segundo, mas a velocidade v aumenta à medida que a temperatura T sobe. Experimentos mostraram que a taxa de variação de v em relação a T é

$$\frac{dv}{dT} = \frac{1087}{2\sqrt{273}} T^{-1/2}$$

onde v está em pés/s e T , em kelvins (K). Encontre uma fórmula que expresse v como uma função de T .

74. Suponha que uma barra de metal uniforme tenha 50 cm de comprimento e esteja isolada lateralmente, enquanto as temperaturas nos extremos sejam mantidas a 25°C e 85°C , respectivamente. Suponha que o eixo x seja escolhido conforme a figura abaixo e que a temperatura $T(x)$ em cada ponto x satisfaça a equação

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Encontre $T(x)$ com $0 \leq x \leq 50$.

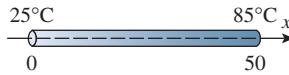


Figura Ex-74

75. **Texto** O que é um *problema de valor inicial*? Descreva a sequência de passos para resolver um problema de valor inicial.

76. **Texto** O que é um *campo de direções*? Qual a relação entre campos de direções e curvas integrais?

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.2

1. $F'(x) = f(x) \quad 2. (a) \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + C \quad (b) \int 4e^{4x} \, dx = e^{4x} + C$

3. (a) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + C \quad (b) \operatorname{tg} x + \operatorname{cossec} x + C \quad 4. 2x + 1; x^2 + x + 3 \quad 5. 0; -\frac{2}{3}$

5.3 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Nesta seção, estudaremos uma técnica denominada **substituição**, que muitas vezes pode ser usada para transformar problemas de integração complicados em problemas mais simples.

■ SUBSTITUIÇÃO u

O método da substituição pode ser motivado examinando-se a regra da cadeia do ponto de vista da antiderivadação. Com esse propósito, suponhamos que F seja uma antiderivada de f e que g seja uma função diferenciável. A derivada de $F(g(x))$ pode, pela regra da cadeia, ser expressa como

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

e, em forma integral, ser escrita como

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad (1)$$

ou, ainda, uma vez que F é uma antiderivada de f ,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad (2)$$

Para nossos propósitos, será útil tomar $u = g(x)$ e escrever $du/dx = g'(x)$ na forma diferencial $du = g'(x) dx$. Com essa notação, (2) pode ser expressa como

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad (3)$$

O processo de calcular uma integral da forma (2) convertida na forma (3) com a substituição

$$u = g(x) \quad \text{e} \quad du = g'(x) dx$$

é denominado **método da substituição u** . Aqui, nossa ênfase *não* é a interpretação da expressão $du = g'(x) dx$. Em vez disso, a notação de diferencial tem a função básica de servir como uma maneira conveniente de executar o método da substituição u . O exemplo a seguir ilustra como funciona o método.

► Exemplo 1 Calcule $\int (x^2 + 1)^{50} \cdot 2x dx$.

Solução Se tomarmos $u = x^2 + 1$, então $du/dx = 2x$, o que implica $du = 2x dx$. Assim, a integral dada pode ser escrita como

$$\int (x^2 + 1)^{50} \cdot 2x dx = \int u^{50} du = \frac{u^{51}}{51} + C = \frac{(x^2 + 1)^{51}}{51} + C \quad \blacktriangleleft$$

É importante saber que, no método da substituição u , controlamos a escolha de u , mas, uma vez feita a escolha, perdemos o controle sobre a expressão resultante para du . Assim, no último exemplo, *escolhemos* $u = x^2 + 1$, mas $du = 2x dx$ foi *calculado*. Afortunadamente, nossa escolha de u , combinada com o valor calculado de du , funcionou perfeitamente para produzir uma integral envolvendo u que foi fácil de calcular. Porém, em geral, o método da substituição u falhará se o u escolhido e o du calculado produzirem um integrando em que persistem expressões envolvendo x , ou se não soubermos calcular a integral resultante. Assim, por exemplo, a substituição $u = x^2$, $du = 2x dx$ não irá funcionar para a integral

$$\int 2x \sin x^4 dx$$

pois a substituição dá lugar à integral

$$\int \sin u^2 du$$

que continua não podendo ser calculada em termos de funções conhecidas.

Em geral, não há um método seguro e rápido para escolher u , e, em alguns casos, nenhuma escolha de u funcionará. Em tais casos, outros métodos serão necessários, alguns dos quais serão discutidos mais adiante. Fazer a escolha apropriada de u virá com a experiência, mas pode ser útil seguir o roteiro abaixo combinado com um domínio das integrais básicas da Tabela 5.2.1.

Roteiro para a Substituição u

Passo 1 Procure alguma composição $f(g(x))$ dentro do integrando para o qual a substituição

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx$$

produza uma integral expressa inteiramente em termos de u e de du . Isso pode ou não ser possível.

Passo 2 Se o Passo 1 tiver sido completado com sucesso, tente calcular a integral resultante em termos de u . Novamente, isso pode ou não ser possível.

Passo 3 Se o Passo 2 tiver sido completado com sucesso, substitua u por $g(x)$ para expressar a resposta final em termos de x .

■ SUBSTITUIÇÕES FACILMENTE IDENTIFICÁVEIS

As substituições mais fáceis ocorrem quando o integrando for a derivada de uma função conhecida, exceto por alguma constante somada ou subtraída da variável independente.

► Exemplo 2

$$\int \sin(x+9) dx = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(x+9) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x+9 \\ du = 1 \cdot dx = dx \end{array}}$$

$$\int (x-8)^{23} dx = \int u^{23} du = \frac{u^{24}}{24} + C = \frac{(x-8)^{24}}{24} + C \quad \blacktriangleleft$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x-8 \\ du = 1 \cdot dx = dx \end{array}}$$

Outra substituição u simples ocorre quando o integrando é a derivada de uma função conhecida, exceto por uma constante que multiplica ou divide a variável independente. O exemplo a seguir ilustra duas maneiras de calcular tais integrais.

► Exemplo 3 Calcule $\int \cos 5x dx$.**Solução**

$$\int \cos 5x dx = \int (\cos u) \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int \cos u du = \frac{1}{5} \sin u + C = \frac{1}{5} \sin 5x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 5x \\ du = 5 dx \text{ ou } dx = \frac{1}{5} du \end{array}}$$

Solução alternativa Há uma variação do procedimento anterior que é preferida por alguns. A substituição $u = 5x$ requer $du = 5 dx$. Se houvesse um fator 5 no integrando, então poderíamos agrupar 5 e o dx para formar o du requerido pela substituição. Como não há tal fator, vamos inserir um fator 5 e compensar pondo na frente da integral um fator de $\frac{1}{5}$. Os cálculos são os seguintes:

$$\int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \int \cos 5x \cdot 5 dx = \frac{1}{5} \int \cos u du = \frac{1}{5} \sin u + C = \frac{1}{5} \sin 5x + C \quad \blacktriangleleft$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 5x \\ du = 5 dx \end{array}}$$

Mais geralmente, a substituição $u = ax + b$, $du = a dx$ funciona quando o integrando for uma composição da forma $f(ax + b)$, onde $f(x)$ é uma função fácil de integrar.

► **Exemplo 4**

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{3}x - 8\right)^5} = \int \frac{3 du}{u^5} = 3 \int u^{-5} du = -\frac{3}{4}u^{-4} + C = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x - 8\right)^{-4} + C \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{3}x - 8 \\ du &= \frac{1}{3}dx \text{ ou } dx = 3du \end{aligned}$$

► **Exemplo 5** Calcule $\int \frac{dx}{1+3x^2}$.

Solução Substituindo

$$u = \sqrt{3}x, \quad du = \sqrt{3}dx$$

obtemos

$$\int \frac{dx}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tg} u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tg}(\sqrt{3}x) + C \quad \blacktriangleleft$$

Às vezes, com a ajuda do Teorema 5.2.3, podemos calcular uma integral complicada expressando-a como uma soma de integrais mais simples.

► **Exemplo 6**

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} + \sec^2 \pi x \right) dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \sec^2 \pi x dx \\ &= \ln|x| + \int \sec^2 \pi x dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{\pi} \int \sec^2 u du \quad \boxed{\begin{aligned} u &= \pi x \\ du &= \pi dx \text{ ou } dx = \frac{1}{\pi} du \end{aligned}} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} u + C = \ln|x| + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi x + C \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Os próximos quatro exemplos ilustram a substituição $u = g(x)$ em que $g(x)$ é uma função não linear.

► **Exemplo 7** Calcule $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Solução Fazendo $u = \sin x$, então

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad \text{logo} \quad du = \cos x dx$$

Assim,

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 8** Calcule $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Solução Fazendo $u = \sqrt{x}$, então

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{logo} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{ou} \quad 2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Assim,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2e^u du = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 9** Calcule $\int t^4 \sqrt[3]{3 - 5t^5} dt$.

Solução

$$\begin{aligned} \int t^4 \sqrt[3]{3 - 5t^5} dt &= -\frac{1}{25} \int \sqrt[3]{u} du = -\frac{1}{25} \int u^{1/3} du \\ &= -\frac{1}{25} \frac{u^{4/3}}{4/3} + C = -\frac{3}{100} (3 - 5t^5)^{4/3} + C \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 3 - 5t^5 \\ du &= -25t^4 dt \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{25} du = t^4 dt \end{aligned}$$

► **Exemplo 10** Calcule $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$.

Solução Substituindo

$$u = e^x, \quad du = e^x dx$$

obtemos

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsen u + C = \arcsen(e^x) + C \blacktriangleleft$$

■ SUBSTITUIÇÕES MENOS EVIDENTES

O método da substituição é relativamente direto, desde que o integrando contenha uma composição $f(g(x))$ facilmente reconhecível e seu resto seja um múltiplo constante de $g'(x)$. Se isso não ocorrer, o método ainda pode ser aplicável, mas pode exigir mais contas.

► **Exemplo 11** Calcule $\int x^2 \sqrt{x-1} dx$.

Solução A composição $\sqrt{x-1}$ sugere a substituição

$$u = x - 1, \quad \text{logo} \quad du = dx \tag{4}$$

Da primeira igualdade em (4),

$$x^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$$

logo,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x-1} dx &= \int (u^2 + 2u + 1)\sqrt{u} du = \int (u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2}) du \\ &= \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Exemplo 12** Calcule $\int \cos^3 x dx$.

Solução As únicas composições visíveis no integrando são

$$\cos^3 x = (\cos x)^3 \quad \text{e} \quad \cos^2 x = (\cos x)^2$$

Contudo, nem a substituição $u = \cos x$ nem a substituição $u = \cos^2 x$ funcionam (verifique). Nesse caso, não há substituição apropriada que seja sugerida pela composição contida no integrando. Por outro lado, note que, na Equação (2), a derivada $g'(x)$ aparece como um fator do integrando. Isso sugere que escrevemos

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx$$

e resolvemos a equação $du = \cos x dx$ para $u = \sin x$. Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temos

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - u^2) du \\ &= u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

► **Exemplo 13** Calcule $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$, onde $a \neq 0$ é uma constante.

Solução Uma manipulação algébrica simples e uma substituição u apropriada nos permitem usar a Fórmula 12 na Tabela 5.2.1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int \frac{a(dx/a)}{a^2(1 + (x/a)^2)} = \frac{1}{a} \int \frac{dx/a}{1 + (x/a)^2} \quad \boxed{\begin{array}{l} u = x/a \\ du = dx/a \end{array}} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan u + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

O método do Exemplo 13 leva às seguintes generalizações das Fórmulas 12, 13 e 14 na Tabela 5.2.1, com $a > 0$:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad (6)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad (7)$$

► **Exemplo 14** Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$.

Solução Aplicando (6) com $u = x$ e $a = \sqrt{2}$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C \quad \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Utilize um CAS para calcular as integrais dos exemplos desta seção. Se a resposta do CAS diferir da do livro, confirme algebraicamente se as duas coincidem. Explore o efeito de usar o CAS para simplificar as expressões produzidas para as integrais.

■ INTEGRAÇÃO USANDO SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

O advento dos sistemas algébricos computacionais tornou possível calcular vários tipos de integrais que dariam muito trabalho se feitos à mão. Por exemplo, uma calculadora manual calculou em questão de segundos a integral

$$\int \frac{5x^2}{(1+x)^{1/3}} dx = \frac{3(x+1)^{2/3}(5x^2 - 6x + 9)}{8} + C$$

Já o *Mathematica*, em um computador, leva menos tempo ainda. Porém, da mesma forma que não se quer depender de uma calculadora para calcular $2 + 2$, também não se quer depender de um CAS para integrar uma função simples como $f(x) = x^2$. Assim, mesmo que tenhamos um CAS, é desejável que desenvolvamos um nível razoável de competência no cálculo de integrais básicas. Além disso, as técnicas matemáticas introduzidas no cálculo de integrais básicas são precisamente as mesmas que os CAS utilizam para computar as integrais mais complicadas.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.3 (Ver página 340 para respostas.)

1. Indique a substituição u .

(a) $\int 3x^2(1+x^3)^{25} dx = \int u^{25} du$ se $u = \underline{\hspace{2cm}}$ e
 $du = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) $\int 2x \sen x^2 dx = \int \sen u du$ se $u = \underline{\hspace{2cm}}$
e $du = \underline{\hspace{2cm}}$.

(c) $\int \frac{18x}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{u} du$ se $u = \underline{\hspace{2cm}}$
e $du = \underline{\hspace{2cm}}$.

(d) $\int \frac{3}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+u^2} du$ se $u = \underline{\hspace{2cm}}$
e $du = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. Obtenha o integrando que falta na integral da direita e que corresponda à substituição u indicada.

(a) $\int 5(5x-3)^{-1/3} dx = \int \underline{\hspace{2cm}} du; u = 5x-3$

(b) $\int (3-\tg x) \sec^2 x dx = \int \underline{\hspace{2cm}} du;$
 $u = 3 - \tg x$

(c) $\int \frac{\sqrt[3]{8+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \underline{\hspace{2cm}} du; u = 8 + \sqrt{x}$

(d) $\int e^{3x} dx = \int \underline{\hspace{2cm}} du; u = 3x$

EXERCÍCIOS 5.3  Recurso Gráfico  CAS

- 1-12 Calcule as integrais usando a substituição indicada. ■

1. (a) $\int 2x(x^2+1)^{23} dx; u = x^2+1$

(b) $\int \cos^3 x \sen x dx; u = \cos x$

2. (a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sen \sqrt{x} dx; u = \sqrt{x}$

(b) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2+5}}$; $u = 4x^2+5$

3. (a) $\int \sec^2(4x+1) dx; u = 4x+1$

(b) $\int y \sqrt{1+2y^2} dy; u = 1+2y^2$

4. (a) $\int \sqrt{\sen \pi \theta} \cos \pi \theta d\theta; u = \sen \pi \theta$

(b) $\int (2x+7)(x^2+7x+3)^{4/5} dx; u = x^2+7x+3$

5. (a) $\int \cotg x \cossec^2 x dx; u = \cot x$

(b) $\int (1+\sen t)^9 \cos t dt; u = 1+\sen t$

6. (a) $\int \cos 2x dx; u = 2x$ (b) $\int x \sec^2 x^2 dx; u = x^2$

7. (a) $\int x^2 \sqrt{1+x} dx; u = 1+x$

(b) $\int [\cossec(\sen x)]^2 \cos x dx; u = \sen x$

8. (a) $\int \sen(x-\pi) dx; u = x-\pi$

(b) $\int \frac{5x^4}{(x^5+1)^2} dx; u = x^5+1$

9. (a) $\int \frac{dx}{x \ln x}; u = \ln x$

(b) $\int e^{-5x} dx; u = -5x$

10. (a) $\int \frac{\sin 3\theta}{1 + \cos 3\theta} d\theta; u = 1 + \cos 3\theta$
 (b) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx; u = 1 + e^x$

11. (a) $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6}; u = x^3$
 (b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}; u = \ln x$

12. (a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}}; u = 3x$
 (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}; u = \sqrt{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

13. Explique a relação entre a regra da cadeia para a derivação e o método da substituição u para a integração.
 14. Explique como a substituição $u = ax + b$ ajuda a efetuar uma integração em que o integrando é $f(ax + b)$ e $f(x)$ é uma função fácil de integrar.

15-56 Calcule as integrais usando uma substituição apropriada. ■

15. $\int (4x - 3)^9 dx$

16. $\int x^3 \sqrt{5 + x^4} dx$

17. $\int \sin 7x dx$

18. $\int \cos \frac{x}{3} dx$

19. $\int \sec 4x \tan 4x dx$

20. $\int \sec^2 5x dx$

21. $\int e^{2x} dx$

22. $\int \frac{dx}{2x}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

24. $\int \frac{dx}{1 + 16x^2}$

25. $\int t\sqrt{7t^2 + 12} dt$

26. $\int \frac{x}{\sqrt{4 - 5x^2}} dx$

27. $\int \frac{6}{(1 - 2x)^3} dx$

28. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx$

29. $\int \frac{x^3}{(5x^4 + 2)^3} dx$

30. $\int \frac{\sin(1/x)}{3x^2} dx$

31. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

32. $\int x^3 e^{x^4} dx$

33. $\int x^2 e^{-2x^3} dx$

34. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

35. $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

36. $\int \frac{t}{t^4 + 1} dt$

37. $\int \frac{\sin(5/x)}{x^2} dx$

38. $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

39. $\int \cos^4 3t \sin 3t dt$

40. $\int \cos 2t \sin^5 2t dt$

41. $\int x \sec^2(x^2) dx$

42. $\int \frac{\cos 4\theta}{(1 + 2 \sin 4\theta)^4} d\theta$

43. $\int \cos 4\theta \sqrt{2 - \sin 4\theta} d\theta$ 44. $\int \operatorname{tg}^3 5x \sec^2 5x dx$

45. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$ 46. $\int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta + 1} d\theta$

47. $\int \sec^3 2x \operatorname{tg} 2x dx$ 48. $\int [\operatorname{sen}(\operatorname{sen} \theta)] \cos \theta d\theta$

49. $\int \frac{dx}{e^x}$ 50. $\int \sqrt{e^x} dx$

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} e^{(2\sqrt{x})}}$ 52. $\int \frac{e^{\sqrt{2y+1}}}{\sqrt{2y+1}} dy$

53. $\int \frac{y}{\sqrt{2y+1}} dy$ 54. $\int x \sqrt{4-x} dx$

55. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta d\theta$

56. $\int \sec^4 3\theta d\theta$ [Sugestão: Use uma identidade trigonométrica.]

57-60 Calcule cada integral modificando, inicialmente, o formato do integrando e, então, fazendo uma substituição apropriada. ■

57. $\int \frac{t+1}{t} dt$ 58. $\int e^{2 \ln x} dx$

59. $\int [\ln(e^x) + \ln(e^{-x})] dx$ 60. $\int \cot g x dx$

61-62 Calcule as integrais com a ajuda das Fórmulas (5), (6) e (7). ■

61. (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ (b) $\int \frac{dx}{5 + x^2}$ (c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - \pi}}$

62. (a) $\int \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx$ (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$ (c) $\int \frac{dy}{y\sqrt{5y^2 - 3}}$

63-65 Calcule as integrais supondo que n seja um inteiro positivo e que $b \neq 0$. ■

63. $\int (a + bx)^n dx$ 64. $\int \sqrt[n]{a + bx} dx$

65. $\int \operatorname{sen}^n(a + bx) \cos(a + bx) dx$

C 66. Use um CAS para conferir as respostas obtidas nos Exercícios 63 a 65. Se a resposta produzida pelo CAS não estiver de acordo com a sua, mostre que elas são equivalentes. [Sugestão: Usuários do *Mathematica* podem achar muito útil aplicar o comando “Simplify” à resposta.]

ENFOCANDO CONCEITOS

67. (a) Calcule a integral $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$ por dois métodos: primeiro fazendo $u = \operatorname{sen} x$ e, depois, $u = \cos x$.
 (b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes de (a) são realmente equivalentes.

68. (a) Calcule a integral $\int (5x - 1)^2 dx$ por dois métodos: primeiro elevando ao quadrado e integrando e, depois, fazendo $u = 5x - 1$.
 (b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes em (a) são realmente equivalentes.

69-72 Resolva os problemas de valor inicial.

69. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{5x+1}$, $y(3) = -2$

70. $\frac{dy}{dx} = 2 + \operatorname{sen} 3x$, $y(\pi/3) = 0$

71. $\frac{dy}{dt} = -e^{2t}$, $y(0) = 6$

72. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{25+9t^2}$, $y\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{\pi}{30}$

73. (a) Calcule $\int [x/\sqrt{x^2+1}] dx$.

(b) Use um recurso gráfico para gerar algumas curvas integrais típicas de $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$ sobre o intervalo $(-5, 5)$.

74. (a) Calcule $\int [x/(x^2+1)] dx$.

(b) Use um recurso gráfico para gerar algumas curvas integrais típicas de $f(x) = x/(x^2+1)$ sobre o intervalo $(-5, 5)$.

75. Encontre uma função f tal que a inclinação da reta tangente em um ponto (x, y) da curva $y = f(x)$ é $\sqrt{3x+1}$, e a curva passa pelo ponto $(0, 1)$.

76. Suponha que uma população p de rãs em um lago está estimada no começo de 2010 em 100.000, e que o modelo de crescimento para a população $p(t)$ supõe que a taxa de crescimento (em milhares) após t anos será de $p'(t) = (3 + 0,12t)^{3/2}$. Estime a população projetada para o começo do ano 2015.

mento para a população $p(t)$ supõe que a taxa de crescimento (em milhares) após t anos será de $p'(t) = (3 + 0,12t)^{3/2}$. Estime a população projetada para o começo do ano 2015.

77. Seja $y(t)$ o número de células de *E. coli* num recipiente de solução nutritiva t minutos depois do início de um experimento. Suponha que $y(t)$ seja modelada pelo problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = (\ln 2)2^{t/20}, \quad y(0) = 20$$

Use esse modelo para obter uma estimativa do número de células de *E. coli* no recipiente 2 horas depois do início do experimento.

78. Deduza a Fórmula (6) de integração.

79. Deduza a Fórmula (7) de integração.

80. **Texto** Se você for calcular uma integral pela substituição u , como você decide qual parte do integrando será u ?

81. **Texto** O cálculo de uma integral pode, às vezes, levar a respostas aparentemente diferentes (Exercícios 67 e 68). Explique por que isso ocorre e dê um exemplo. Como você poderia mostrar que duas respostas aparentemente diferentes são realmente iguais?

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.3

1. (a) $1 + x^3; 3x^2 dx$ (b) $x^2; 2x dx$ (c) $1 + 9x^2; 18x dx$ (d) $3x; 3dx$

2. (a) $u^{-1/3}$ (b) $-u$ (c) $2\sqrt[3]{u}$ (d) $\frac{1}{3}e^u$

5.4 A DEFINIÇÃO DE ÁREA COMO UM LIMITE; NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

Nosso objetivo principal nesta seção é usar o método do retângulo para obtermos uma definição matematicamente precisa da “área sob uma curva”.

A NOTAÇÃO SIGMA

Para simplificar nossos cálculos, começaremos discutindo uma notação útil para expressar somas extensas em um formato compacto. Essa notação é denominada **notação sigma** ou **notação de somatório**, pois utiliza-se da letra grega maiúscula Σ (sigma) para denotar vários tipos de somas. Para ilustrar como essa notação funciona, considere a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

na qual cada termo é da forma k^2 , onde k é um dos inteiros de 1 a 5. Com a notação sigma, essa soma pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^5 k^2$$

a qual se lê “somatório de k^2 , com k variando de 1 a 5”. A notação nos diz para formar as somas dos termos que resultam quando substituímos k por inteiros sucessivos na expressão k^2 , começando com $k = 1$ e acabando com $k = 5$.

Em geral, se $f(k)$ for uma função de k , e se m e n forem tais que $m \leq n$, então

$$\sum_{k=m}^n f(k) \tag{1}$$

denota a soma dos termos que resulta quando substituímos k por inteiros sucessivos, começando com $k = m$ e acabando com $k = n$ (Figura 5.4.1).

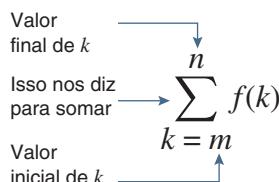


Figura 5.4.1

► **Exemplo 1**

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=4}^8 k^3 &= 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 \\
 \sum_{k=1}^5 2k &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 \\
 \sum_{k=0}^5 (2k + 1) &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\
 \sum_{k=0}^5 (-1)^k (2k + 1) &= 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 \\
 \sum_{k=-3}^1 k^3 &= (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -27 - 8 - 1 + 0 + 1 \\
 \sum_{k=1}^3 k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{5}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} + 2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} + 3 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Os números m e n em (1) são chamados, respectivamente, de **limites inferior e superior do somatório**; a letra k é chamada de **índice do somatório**. Não é essencial o uso de k como índice de somatório; qualquer outra letra pode ser usada. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{i}, \quad \sum_{j=1}^6 \frac{1}{j}, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^6 \frac{1}{n}$$

todos denotam a soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

Se os limites inferior e superior do somatório forem iguais, então a “soma” em (1) se reduz a um único termo. Por exemplo,

$$\sum_{k=2}^2 k^3 = 2^3 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Nas somas

$$\sum_{i=1}^5 2 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^2 x^3$$

a expressão à direita de Σ não envolve o índice do somatório. Em tal caso, tomamos todos os termos da soma como sendo iguais, um para cada valor admissível do índice do somatório. Assim,

$$\sum_{i=1}^5 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^2 x^3 = x^3 + x^3 + x^3$$

■ MUDANDO OS LIMITES DE SOMATÓRIOS

Uma soma pode ser escrita de mais de uma maneira usando a notação sigma com limites de somatórios diferentes e somandos correspondentemente diferentes. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^5 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{j=0}^4 (2j + 2) = \sum_{k=3}^7 (2k - 4)$$

Às vezes queremos mudar a notação sigma de uma dada soma para outra, com diferentes limites no somatório.

■ PROPRIEDADES DE SOMAS

Muitas vezes é conveniente, ao enunciar propriedades gerais de somas, utilizar uma letra subscrita como a_k em vez da notação funcional $f(k)$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{j=1}^5 a_j = \sum_{k=-1}^3 a_{k+2} \\ \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=-1}^{n-2} a_{k+2}\end{aligned}$$

Nossas primeiras propriedades dão regras básicas para a manipulação de somas.

5.4.1 TEOREMA

- (a) $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ (se c não depender de k)
- (b) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
- (c) $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$

Vamos provar (a) e (b) e deixar (c) como exercício.

DEMONSTRAÇÃO (a)

$$\sum_{k=1}^n ca_k = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \sum_{k=1}^n a_k$$

DEMONSTRAÇÃO (b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k\end{aligned}\blacksquare$$

Em palavras, podemos enunciar o Teorema 5.4.1 como segue:

- (a) Um fator constante pode ser movido para fora do somatório.
- (b) O somatório se distribui sobre somas.
- (c) O somatório se distribui sobre diferenças.

■ FÓRMULAS DE SOMATÓRIOS

O teorema a seguir enumera algumas fórmulas úteis de somas de potências de inteiros. As deduções dessas fórmulas podem ser encontradas no Apêndice D, no Volume 2.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os CAS fornecem meios para encontrar fórmulas fechadas como as do Teorema 5.4.2. Use um CAS para confirmar as fórmulas daquele teorema e, então, encontre fórmulas fechadas para

$$\sum_{k=1}^n k^4 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n k^5$$

5.4.2 TEOREMA

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitos recursos computacionais fornecem alguma maneira de calcular somas expressas na notação sigma. Se o leitor dispuser de um desses recursos, use-o para conferir a veracidade do resultado do Exemplo 2.

► **Exemplo 2** Calcule $\sum_{k=1}^{30} k(k+1)$.

Solução

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{30} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{30} k^2 + \sum_{k=1}^{30} k \\ &= \frac{30(31)(61)}{6} + \frac{30(31)}{2} = 9920 \end{aligned} \quad \text{Teorema 5.4.2 (a), (b)}$$

Em fórmulas como

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ou} \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

o lado esquerdo da igualdade é chamado de uma soma em **forma aberta**, enquanto o lado direito é chamado de **forma fechada**; a forma aberta indica os termos a serem somados, enquanto a fechada é uma fórmula explícita para a soma.

► **Exemplo 3** Expresse $\sum_{k=1}^n (3+k)^2$ em forma fechada.

Solução

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3+k)^2 &= 4^2 + 5^2 + \cdots + (3+n)^2 \\ &= [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + (3+n)^2] - [1^2 + 2^2 + 3^2] \\ &= \left(\sum_{k=1}^{3+n} k^2 \right) - 14 \\ &= \frac{(3+n)(4+n)(7+2n)}{6} - 14 = \frac{1}{6}(73n + 21n^2 + 2n^3) \end{aligned}$$

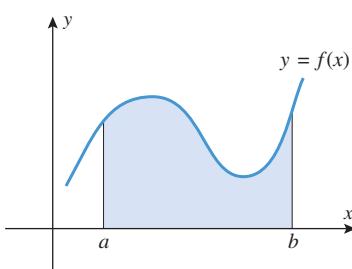


Figura 5.4.2

A DEFINIÇÃO DE ÁREA

Passamos, agora, ao problema de dar uma definição precisa do que significa a “área sob uma curva”. Especificamente, suponha que a função f seja contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e que R denote a região delimitada inferiormente pelo eixo x , lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva $y = f(x)$ (Figura 5.4.2). Usando o método dos retângulos da Seção 5.1, podemos motivar a definição da área de R como segue.

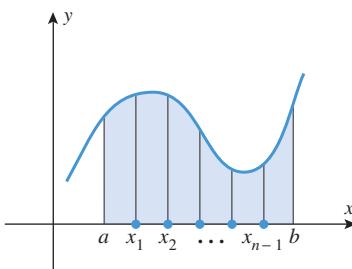


Figura 5.4.3

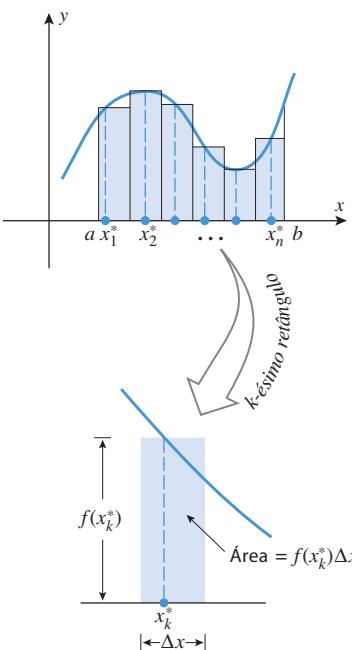


Figura 5.4.4

O limite em (2) deve ser interpretado assim: dado um número $\epsilon > 0$ qualquer, a desigualdade

$$\left| A - \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x \right| < \epsilon$$

vale quando n for suficientemente grande, independentemente da escolha dos pontos x_k^* .

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais inserindo $n - 1$ pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

(Figura 5.4.3). Cada um desses subintervalos tem comprimento $(b - a)/n$, que costuma ser denotado por

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- Acima de cada subintervalo, construímos um retângulo cuja altura é o valor de f em um ponto arbitrariamente selecionado no subintervalo. Assim, se

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

denotam os pontos selecionados nos subintervalos, então os retângulos têm alturas $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ e áreas

$$f(x_1^*)\Delta x, \quad f(x_2^*)\Delta x, \dots, \quad f(x_n^*)\Delta x$$

(Figura 5.4.4).

- A união dos retângulos forma uma região R_n , cuja área pode ser considerada como uma aproximação da área A da região R ; ou seja,

$$A = \text{área}(R) \approx \text{área}(R_n) = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x$$

(Figura 5.4.5). Isso pode ser expresso mais compactamente na notação sigma como

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x$$

- Repetimos o processo usando cada vez mais subintervalos e definimos a área R como o “limite” das aproximações dadas pelas áreas das regiões R_n quando n cresce sem parar. Assim, definimos a área A por

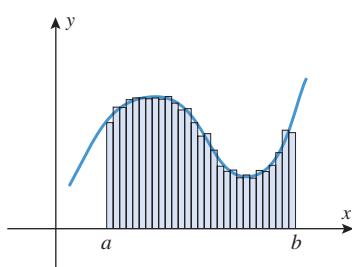
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x$$

Resumindo, temos a definição seguinte.

5.4.3 DEFINIÇÃO (Área Sob uma Curva) Se a função f for contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ em cada x de $[a, b]$, então a **área** sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x \quad (2)$$

OBSERVAÇÃO

Figura 5.4.5 $\text{área}(R_n) \approx \text{área}(R)$

Há uma diferença de interpretação entre $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, onde n representa um inteiro positivo e x representa um número real. Adiante estudaremos detalhadamente os limites do tipo $\lim_{n \rightarrow +\infty}$, mas por enquanto basta dizer que as técnicas computacionais que estivemos utilizando para os limites do tipo $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ também valem para $\lim_{n \rightarrow +\infty}$.

Os valores de $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ em (2) podem ser escolhidos arbitrariamente, portanto é concebível que escolhas distintas desses valores possam produzir valores distintos de A . Se isso fosse possível, então a Definição 5.4.3 não seria uma definição aceitável de área. Felizmente, isso não ocorre; prova-se em disciplinas avançadas que, se f for contínua (como estamos supondo), então resulta o mesmo valor de A , independentemente da escolha dos pontos x_k^* . Na prática, esses pontos são escolhidos de alguma forma sistemática; algumas escolhas comuns consistem em tomar sempre

- a extremidade esquerda de cada subintervalo, ou
- a extremidade direita de cada subintervalo, ou
- o ponto médio de cada subintervalo.

Para sermos mais específicos, suponha que o intervalo $[a, b]$ tenha sido dividido em n partes iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ pelos pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} e sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ (Figura 5.4.6). Então,

$$x_k = a + kx \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Assim, as escolhas do extremo esquerdo, do extremo direito e do ponto médio para $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ são dadas por

$$x_k^* = x_{k-1} = a + (k-1)\Delta x \quad \boxed{\text{Extremidade esquerda}} \quad (3)$$

$$x_k^* = x_k = a + k\Delta x \quad \boxed{\text{Extremidade direita}} \quad (4)$$

$$x_k^* = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x \quad \boxed{\text{Ponto médio}} \quad (5)$$

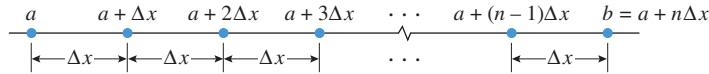


Figura 5.4.6

Sempre que for aplicável, escolheremos o método da antiderivada para encontrar áreas. Contudo, os exemplos a seguir ajudam a reforçar as ideias que acabamos de discutir.

► **Exemplo 4** Use a Definição 5.4.3, com x_k^* dado pela extremidade direita de cada subintervalo, para encontrar a área entre o gráfico de $f(x) = x^2$ e o intervalo $[0, 1]$.

Solução O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

de modo que segue, por (4), que

$$x_k^* = a + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x &= \sum_{k=1}^n (x_k^*)^2 \Delta x = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \quad \boxed{\text{Parte (b) do Teorema 5.4.2}} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

do que segue que

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{3}$$

Observe que isso é consistente com os resultados na Tabela 5.1.2 e a discussão relacionada na Seção 5.1. ◀

Na resolução do Exemplo 4, utilizamos uma das fórmulas de “formas fechadas” de somatórios do Teorema 5.4.2. Os resultados a seguir resumem algumas consequências do Teorema 5.4.2 que podem ajudar no cálculo de áreas pela Definição 5.4.3.

Qual é o padrão sugerido pelas partes (b) a (d) do Teorema 5.4.4? A parte (a) se encaixa nesse padrão? Qual seria sua conjectura para o valor de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^n k^{m-1}$$

5.4.4 TEOREMA

- | | |
|---|---|
| $(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1$ | $(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}$ |
| $(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}$ | $(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}$ |

Deixamos a cargo do leitor demonstrar o Teorema 5.4.4.

► **Exemplo 5** Use a Definição 5.4.3, com x_k^* dado pelo ponto médio de cada subintervalo, para encontrar a área abaixo da parábola $y = f(x) = 9 - x^2$ e acima do intervalo $[0, 3]$.

Solução O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

de modo que segue, por (5), que

$$x_k^* = a + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta x = \left(k - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{n} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_k^*) \Delta x &= [9 - (x_k^*)^2] \Delta x = \left[9 - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{n} \right)^2 \right] \left(\frac{3}{n} \right) \\ &= \left[9 - \left(k^2 - k + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{9}{n^2} \right) \right] \left(\frac{3}{n} \right) \\ &= \frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} k^2 + \frac{27}{n^3} k - \frac{27}{4n^3} \end{aligned}$$

do que segue que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} k^2 + \frac{27}{n^3} k - \frac{27}{4n^3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 27 \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{4n^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right) \right] \\ &= 27 \left[1 - \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 1 \right] = 18 \quad \text{Teorema 5.4.4} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS DA ÁREA

O método da antiderivada discutido na Seção 5.1 (e a ser estudado com mais detalhes adiante) é uma ferramenta apropriada para encontrar a área exata sob uma curva sempre que soubermos encontrar uma antiderivada do integrando. Contudo, se não conseguirmos encontrar uma antiderivada, só nos resta tentar obter uma *aproximação* a área. A Definição 4.3 fornece uma maneira de alcançar isso. Segue dessa definição que, se n for grande, então

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x = \Delta x \sum_{k=1}^n f(x_k^*) = \Delta x [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \quad (6)$$

será uma boa aproximação da área A . Se uma das Fórmulas (3), (4) ou (5) for usada para escolher os pontos x_k^* em (6), dizemos que o resultado é a **aproximação pela extremidade esquerda**, a **aproximação pela extremidade direita** ou a **aproximação pelo ponto médio** da área A , respectivamente (Figura 5.4.7).

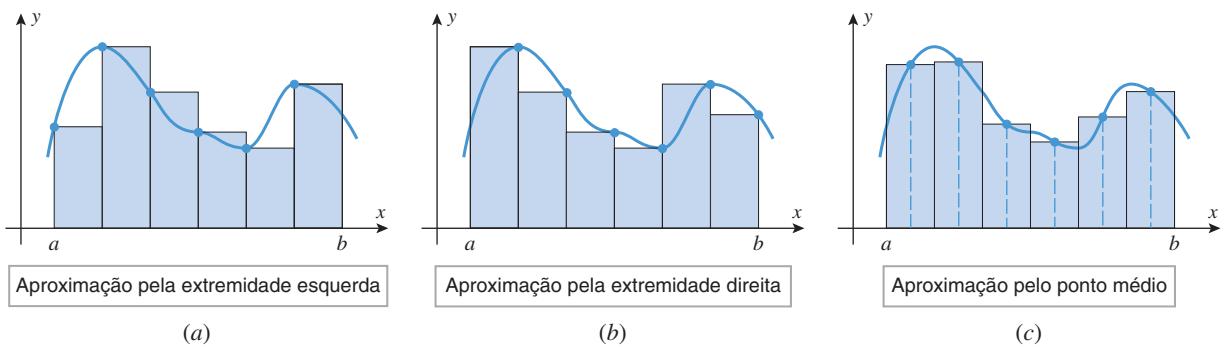


Figura 5.4.7

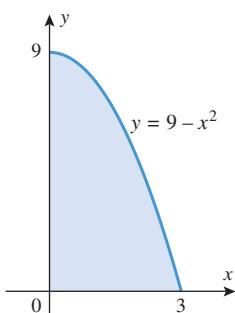


Figura 5.4.8

► Exemplo 6 Encontre as aproximações pelas extremidades esquerda e direita e pelo ponto médio da área abaixo da curva $y = 9 - x^2$ acima do intervalo $[0, 3]$, com $n = 10$, $n = 20$ e $n = 50$ (Figura 5.4.8). Compare a precisão desses três métodos.

Solução Os detalhes dos cálculos para o caso $n = 10$ estão exibidos com seis casas decimais na Tabela 5.4.1, e os resultados de todos os cálculos estão dados na Tabela 5.4.2. No Exemplo 5, mostramos que a área exata é 18 (ou seja, 18 unidades de área), de modo que, nesse caso, a aproximação pelo ponto médio é mais precisa do que as aproximações pelos extremos. Isso também é evidente geometricamente a partir da Figura 5.4.9. Nessa figura, também podemos ver que a aproximação pela extremidade esquerda superestima a área, e a aproximação pela extremidade direita a subestima. Adiante neste texto, investigaremos o erro que resulta quando a área é aproximada pela regra do ponto médio. ◀

■ ÁREA LÍQUIDA COM SINAL

Na Definição 5.4.3, supomos que f seja contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$. Se f for contínua e tomar tanto valores positivos quanto negativos em $[a, b]$, então o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \quad (7)$$

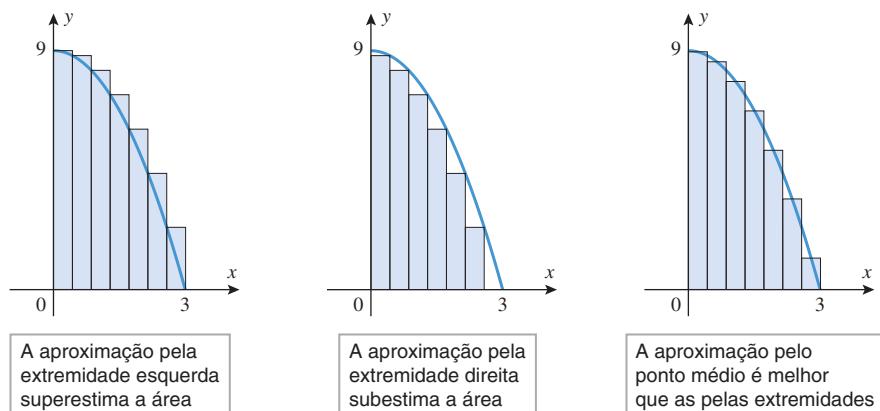
não mais representa a área entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ no eixo x ; o limite representa agora uma diferença de áreas – a área acima de $[a, b]$ e abaixo da curva $y = f(x)$ menos a área abaixo de $[a, b]$ e acima da curva $y = f(x)$. Chamamos isso de **área líquida com sinal**

Tabela 5.4.1
 $n = 10, \Delta x = (b - a)/n = (3 - 0)/10 = 0,3$

k	APROXIMAÇÃO PELA EXTREMIDADE ESQUERDA		APROXIMAÇÃO PELA EXTREMIDADE DIREITA		APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO	
	x_k^*	$9 - (x_k^*)^2$	x_k^*	$9 - (x_k^*)^2$	x_k^*	$9 - (x_k^*)^2$
1	0,0	9,000000	0,3	8,910000	0,15	8,977500
2	0,3	8,910000	0,6	8,640000	0,45	8,797500
3	0,6	8,640000	0,9	8,190000	0,75	8,437500
4	0,9	8,190000	1,2	7,560000	1,05	7,897500
5	1,2	7,560000	1,5	6,750000	1,35	7,177500
6	1,5	6,750000	1,8	5,760000	1,65	6,277500
7	1,8	5,760000	2,1	4,590000	1,95	5,197500
8	2,1	4,590000	2,4	3,240000	2,25	3,937500
9	2,4	3,240000	2,7	1,710000	2,55	2,497500
10	2,7	1,710000	3,0	0,000000	2,85	0,877500
		64,350000		55,350000		60,075000
$\Delta x \sum_{k=1}^n f(x_k^*)$		(0,3)(64,350000)		(0,3)(55,350000)		(0,3)(60,075000)
		= 19,305000		= 16,605000		= 18,022500

Tabela 5.4.2

n	APROXIMAÇÃO PELA EXTREMIDADE ESQUERDA		APROXIMAÇÃO PELA EXTREMIDADE DIREITA		APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO
10	19,305000		16,605000		18,022500
20	18,663750		17,313750		18,005625
50	18,268200		17,728200		18,000900

**Figura 5.4.9**

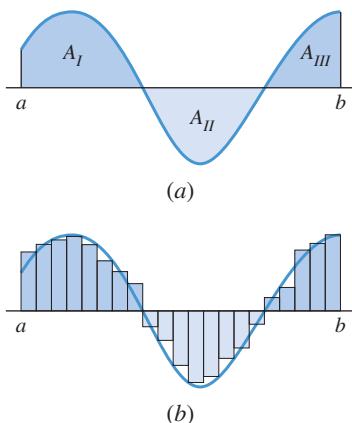


Figura 5.4.10

Assim como na Definição 5.4.3, pode ser provado que sempre existe o limite em (9) e que o mesmo valor de A resulta independentemente da escolha dos pontos nos subintervalos.

entre o gráfico de $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$. Por exemplo, na Figura 5.4.10a, a área líquida com sinal entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é

$$(A_I + A_{III}) - A_{II} = [\text{área acima de } [a, b]] - [\text{área abaixo de } [a, b]]$$

Para explicar por que o limite em (6) representa essa área líquida com sinal, vamos subdividir o intervalo $[a, b]$ da Figura 5.4.10a em n subintervalos iguais e examinar os termos da soma

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \quad (8)$$

Se $f(x_k^*)$ for positivo, então o produto $f(x_k^*) \Delta x$ representa a área do retângulo com altura $f(x_k^*)$ e base Δx (os retângulos azul escuro na Figura 5.4.10b). Porém, se $f(x_k^*)$ for negativo, então o produto $f(x_k^*) \Delta x$ é o negativo da área do retângulo com altura $|f(x_k^*)|$ e base Δx (os retângulos azul claro na Figura 5.4.10b). Assim, (8) representa a área total dos retângulos azul escuro menos a área total dos retângulos azul claro. À medida que n cresce, os retângulos azul escuro preenchem as regiões com áreas A_I e A_{III} e os azul claro preenchem a região com área A_{II} , o que explica por que o limite em (7) representa a área total com sinal entre $y = f(x)$ e $[a, b]$. Formalizamos isso na definição seguinte.

5.4.5 DEFINIÇÃO (Área Líquida com Sinal) Se a função f for contínua em $[a, b]$, então a **área líquida com sinal** A entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \quad (9)$$

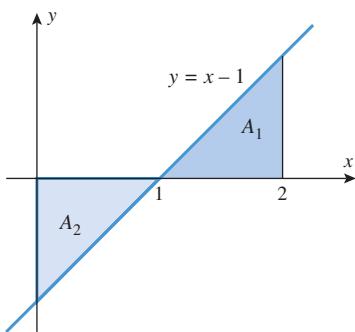


Figura 5.4.11

A Figura 5.4.11 mostra o gráfico de $f(x) = x - 1$ sobre o intervalo $[0, 2]$. Geometricamente, é evidente que são iguais as áreas A_1 e A_2 nessa figura, de modo que é de se esperar que seja nula a área líquida com sinal entre o gráfico de f e o intervalo $[0, 2]$.

► **Exemplo 7** Confirme que a área líquida com sinal entre o gráfico de $f(x) = x - 1$ e o intervalo $[0, 2]$ é zero usando a Definição 5.4.5 com x_k^* dada pela extremidade esquerda de cada subintervalo.

Solução O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

de modo que segue, por (3), que

$$x_k^* = a + (k-1)\Delta x = (k-1) \left(\frac{2}{n} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x &= \sum_{k=1}^n (x_k^* - 1) \Delta x = \sum_{k=1}^n \left[(k-1) \left(\frac{2}{n} \right) - 1 \right] \left(\frac{2}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{4}{n^2} \right) k - \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n} \right] \end{aligned}$$

do que segue que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4 \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \right) - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right) - 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right) \right] \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \right) - 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Teorema 5.4.4

Isso confirma que a área com sinal é zero. ◀

✓ EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 5.4 (Ver página 352 para respostas.)

1. (a) Escreva a soma de duas maneiras:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \sum_{k=1}^4 \underline{\hspace{2cm}} = \sum_{j=0}^3 \underline{\hspace{2cm}}$$

- (b) Expresse a soma $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$ usando notação de somatório.

2. Expresse a soma em forma fechada.

$$(a) \sum_{k=1}^n k \quad (b) \sum_{k=1}^n (6k+1) \quad (c) \sum_{k=1}^n k^2$$

3. Divida o intervalo $[1, 3]$ em $n = 4$ subintervalos de igual tamanho.

- (a) Cada subintervalo tem comprimento _____.

- (b) As extremidades esquerdas dos subintervalos são _____.

- (c) Os pontos médios dos subintervalos são _____.

- (d) As extremidades direitas dos subintervalos são _____.

4. Encontre a aproximação pela extremidade esquerda da área entre a curva $y = x^2$ e o intervalo $[1, 3]$ usando $n = 4$ subdivisões iguais do intervalo.

5. A aproximação pela extremidade direita da área líquida com sinal entre $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\sum_{k=1}^n \frac{6k+1}{n^2}$$

Encontre o valor exato dessa área líquida com sinal.

EXERCÍCIOS 5.4 [C] CAS

1. Calcule

$$\begin{array}{lll} (a) \sum_{k=1}^3 k^3 & (b) \sum_{j=2}^6 (3j-1) & (c) \sum_{i=-4}^1 (i^2 - i) \\ (d) \sum_{n=0}^5 1 & (e) \sum_{k=0}^4 (-2)^k & (f) \sum_{n=1}^6 \sin n\pi \end{array}$$

2. Calcule

$$\begin{array}{lll} (a) \sum_{k=1}^4 k \sin \frac{k\pi}{2} & (b) \sum_{j=0}^5 (-1)^j & (c) \sum_{i=7}^{20} \pi^2 \\ (d) \sum_{m=3}^5 2^{m+1} & (e) \sum_{n=1}^6 \sqrt{n} & (f) \sum_{k=0}^{10} \cos k\pi \end{array}$$

- 3-8 Escreva cada expressão com a notação de somatório, mas não a calcule. ■

3. $1 + 2 + 3 + \dots + 10$

4. $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot 20$

5. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 20$

6. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 15$

7. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$

8. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

9. (a) Escreva com a notação de somatório a soma dos inteiros pares de 2 a 100.

- (b) Escreva com a notação de somatório a soma dos inteiros ímpares de 1 a 99.

10. Expresse com a notação de somatório

$$\begin{array}{l} (a) a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \\ (b) -b_0 + b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 \\ (c) a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\ (d) a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + a b^4 + b^5 \end{array}$$

- 11-16 Use o Teorema 5.4.2 para calcular as somas e verifique suas respostas usando um recurso computacional. ■

11. $\sum_{k=1}^{100} k$

12. $\sum_{k=1}^{100} (7k+1)$

13. $\sum_{k=1}^{20} k^2$

14. $\sum_{k=4}^{20} k^2$

15. $\sum_{k=1}^{30} k(k-2)(k+2)$

16. $\sum_{k=1}^6 (k - k^3)$

- 17-20 Expresse as somas em formas fechadas. ■

17. $\sum_{k=1}^n \frac{3k}{n}$

18. $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n}$

19. $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^3}{n^2}$

20. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{n} - \frac{2k}{n} \right)$

21-24 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

21. Dado qualquer inteiro positivo n ,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

22. A aproximação pelo ponto médio é a média das aproximações pelas extremidades esquerda e direita.
23. Cada aproximação pela extremidade direita da área sob o gráfico de $y = x^2$ acima de um intervalo $[a, b]$ será uma superestimação.
24. Dada qualquer função contínua f , a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ (no qual f estiver definida) é igual ao valor absoluto da área líquida com sinal entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$.

ENFOCANDO CONCEITOS

25. (a) Escreva as três primeiras e as duas últimas parcelas da soma

$$\sum_{k=1}^n \left(2 + k \cdot \frac{3}{n}\right)^4 \frac{3}{n}$$

Explique por que essa soma dá a aproximação pela extremidade direita da área sob a curva $y = x^4$ acima do intervalo $[2, 5]$.

- (b) Mostre que uma mudança adequada na variação do índice do somatório de (a) pode fornecer a aproximação pela extremidade esquerda da área sob a curva $y = x^4$ acima do intervalo $[2, 5]$.

26. Para uma função f que é contínua em $[a, b]$, a Definição 5.4.5 diz que a área líquida com sinal A entre $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

Dê interpretações geométricas para os símbolos n , x_k^* e Δx . Explique como interpretar o limite dessa definição.

27-30 Divida o intervalo especificado em $n = 4$ subintervalos de igual tamanho e, então, calcule

$$\sum_{k=1}^4 f(x_k^*) \Delta x$$

tomando x_k^* como (a) a extremidade esquerda de cada subintervalo, (b) o ponto médio de cada subintervalo e (c) a extremidade direita de cada subintervalo. Ilustre cada parte com um gráfico de f que inclui os retângulos cujas áreas estão representadas na soma. ■

27. $f(x) = 3x + 1$; $[2, 6]$ 28. $f(x) = 1/x$; $[1, 9]$
 29. $f(x) = \cos x$; $[0, \pi]$ 30. $f(x) = 2x - x^2$; $[-1, 3]$

C 31-34 Use um recurso computacional com capacidade para tratar de somatórios ou um CAS para obter um valor aproximado da área entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo especificado com $n = 10, 20$

e 50 subintervalos usando a aproximação (a) pela extremidade esquerda, (b) pelo ponto médio e (c) pela extremidade direita. ■

31. $f(x) = 1/x$; $[1, 2]$ 32. $f(x) = 1/x^2$; $[1, 3]$
 33. $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 4]$ 34. $f(x) = \sin x$; $[0, \pi/2]$

35-40 Use a Definição 5.4.3 tomando x_k^* como a extremidade direita de cada subintervalo para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo especificado. ■

35. $f(x) = x/2$; $[1, 4]$ 36. $f(x) = 5 - x$; $[0, 5]$
 37. $f(x) = 9 - x^2$; $[0, 3]$ 38. $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$; $[0, 3]$
 39. $f(x) = x^3$; $[2, 6]$ 40. $f(x) = 1 - x^3$; $[-3, -1]$

41-44 Use a Definição 5.4.3 tomando x_k^* como a extremidade esquerda de cada subintervalo para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo especificado. ■

41. $f(x) = x/2$; $[1, 4]$ 42. $f(x) = 5 - x$; $[0, 5]$
 43. $f(x) = 9 - x^2$; $[0, 3]$ 44. $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$; $[0, 3]$

45-48 Use a Definição 5.4.3 tomando x_k^* como o ponto médio de cada subintervalo para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo especificado. ■

45. $f(x) = 2x$; $[0, 4]$ 46. $f(x) = 6 - x$; $[1, 5]$
 47. $f(x) = x^2$; $[0, 1]$ 48. $f(x) = x^2$; $[-1, 1]$

49-53 Use a Definição 5.4.5 tomando x_k^* como a extremidade direita de cada subintervalo para encontrar a área líquida com sinal entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo especificado. ■

49. $f(x) = x$; $[-1, 1]$. Confira sua resposta com um argumento geométrico simples.
 50. $f(x) = x$; $[-1, 2]$. Confira sua resposta com um argumento geométrico simples.

51. $f(x) = x^2 - 1$; $[0, 2]$ 52. $f(x) = x^3$; $[-1, 1]$

53. (a) Mostre que a área abaixo do gráfico de $y = x^3$ e acima do intervalo $[0, b]$ é $b^4/4$.
 (b) Encontre uma fórmula para a área abaixo de $y = x^3$ e acima do intervalo $[a, b]$, onde $a \geq 0$.

54. Encontre a área entre o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o intervalo $[0, 1]$. [Sugestão: Use o resultado do Exercício 25 da Seção 5.1.]

55. Uma artista deseja criar uma forma rudimentar de triângulo usando ladrilhos quadrados uniformes colados pelas arestas. Ela coloca n ladrilhos em fila para formar a base do triângulo e, então, faz cada linha sucessiva com dois ladrilhos a menos que a precedente. Ache uma fórmula para o número de ladrilhos usados na peça. [Sugestão: Sua resposta irá depender de n ser par ou ímpar.]

56. Uma artista deseja criar uma escultura colando esferas uniformes. Ela cria uma base com formato retangular que tem 50 esferas de um lado e 30 esferas do outro. Então, cria camadas sucessivas colando esferas no sulco da camada precedente. Quantas esferas irá ter a escultura?

57-60 Considere a soma

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 [(k+1)^3 - k^3] &= [5^3 - 4^3] + [4^3 - 3^3] \\ &\quad + [3^3 - 2^3] + [2^3 - 1^3] \\ &= 5^3 - 1^3 = 124\end{aligned}$$

Para simplificar, listamos as parcelas em ordem invertida. Observe como o cancelamento possibilitou que a soma se retráisse como um telescópio. Dizemos que uma soma é **telescópica** quando uma parte de cada parcela cancela outra de alguma parcela vizinha, deixando somente partes da primeira e da última parcelas sem cancelar. Calcule as somas telescopicas neste exercícios. ■

57. $\sum_{k=5}^{17} (3^k - 3^{k-1})$

58. $\sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

59. $\sum_{k=2}^{20} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2} \right)$

60. $\sum_{k=1}^{100} (2^{k+1} - 2^k)$

61. (a) Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

[Sugestão: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$]

(b) Use o resultado de (a) para encontrar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

62. (a) Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

[Sugestão: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$]

(b) Use o resultado de (a) para encontrar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

63. Seja \bar{x} a média aritmética de n números x_1, x_2, \dots, x_n . Use o Teorema 5.4.1 para provar que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

64. Seja

$$S = \sum_{k=0}^n ar^k$$

Mostre que $S - rS = a - ar^{n+1}$ e, portanto,

$$\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

(Uma soma dessa forma é denominada **soma geométrica**.)

65. Escrevendo por extenso as somas, determine se são válidas as seguintes identidades

$$\begin{aligned}(a) \quad &\int \left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^n \left[\int f_i(x) dx \right] \\ (b) \quad &\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dx} [f_i(x)] \right]\end{aligned}$$

66. Quais das seguintes identidades são válidas?

$$\begin{aligned}(a) \quad &\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \quad (b) \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ (c) \quad &\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (d) \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\end{aligned}$$

67. Prove a parte (c) do Teorema 5.4.1.

68. Prove o Teorema 5.4.4.

69. Texto O que é uma *área líquida com sinal*? De que forma esse conceito expande nossa aplicação do método do retângulo?

70. Texto Tomando por base o Exemplo 6, poderíamos conjecturar que a aproximação pelo ponto médio sempre fornece uma aproximação melhor do que as aproximações pelas extremidades. Discuta os méritos dessa conjectura.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.4

-
- 1.** (a) $\frac{1}{2k}; \frac{1}{2(j+1)}$ (b) $\sum_{k=1}^5 10^k$ **2.** (a) $\frac{n(n+1)}{2}$ (b) $3n(n+1)+n$ (c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **3.** (a) 0,5 (b) 1; 1,5; 2; 2,5
 (c) 1,25; 1,75; 2,25; 2,75 (d) 1,5; 2; 2,5; 3 **4.** 6,75 **5.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 4n}{n^2} = 3$

5.5 A INTEGRAL DEFINIDA

Nesta seção, introduziremos a noção de “integral definida”, que relaciona o conceito de área a outros conceitos importantes, como comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho.

SOMAS DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA

Em nossa definição de área líquida com sinal (Definição 5.4.5), supusemos que, dado um número positivo n , o intervalo $[a, b]$ foi subdividido em n subintervalos de mesmo comprimento para criar as bases dos retângulos da aproximação. Para algumas funções, pode ser mais conveniente utilizar retângulos com bases de comprimentos diferentes (ver Estabelecendo Conexões, Exercícios 2 e 3). Contudo, se quisermos exaurir uma área com retângulos de larguras diferentes, é importante que as subdivisões sucessivas sejam construídas de tal modo que as larguras dos retângulos tendam a zero com n crescente (Figura 5.5.1). Assim, devemos evitar o tipo de situação que ocorre na Figura 5.5.2, em que nunca é subdividida a metade da direita do intervalo. Se permitissemos esse tipo de subdivisão, o erro na aproximação não tenderia a zero com n crescente.

Uma **partição** do intervalo $[a, b]$ é uma coleção de pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

que dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad x_3 = x_3 - x_2, \dots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

Dizemos que a partição é **regular** se os subintervalos têm, todos, o mesmo comprimento

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

No caso de uma partição regular, as larguras dos retângulos da aproximação tendem a zero quando n cresce. Como isso não precisa ser o caso para uma partição qualquer, precisamos medir o “tamanho” dessas larguras de alguma maneira. Uma abordagem é denotar o maior comprimento de um subintervalo por $\max \Delta x_k$. A magnitude $\max \Delta x_k$ é denominada **norma** da partição. Por exemplo, a Figura 5.5.3 mostra uma partição do intervalo $[0, 6]$ em quatro subintervalos de norma igual a 2.

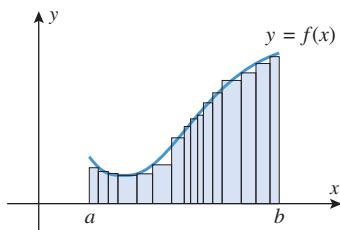


Figura 5.5.1

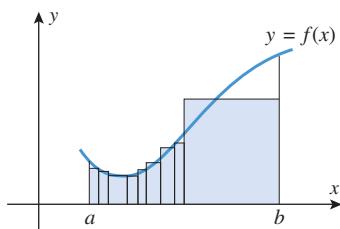


Figura 5.5.2

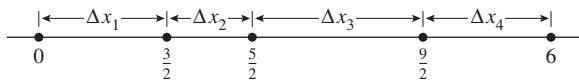


Figura 5.5.3

$$\max \Delta x_k = \Delta x_3 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$$

Se quisermos generalizar a Definição 5.4.5 para permitir subintervalos de comprimentos diferentes, deveremos substituir o comprimento constante Δx pelos comprimentos variáveis Δx_k . Uma vez feito isso, a soma

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \quad \text{é substituída por} \quad \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Também devemos trocar a expressão $n \rightarrow +\infty$ por alguma que garanta que os comprimentos de todos os intervalos tendam a zero. Para isso, utilizaremos a expressão $\max \Delta x_k \rightarrow 0$. Utilizando nosso conceito intuitivo de área, esperamos que a área líquida com sinal entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ deva satisfazer a equação

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Alguns autores usam o símbolo $||\Delta||$ em vez de $\max \Delta x_k$ para a norma da partição, caso em que $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ deve ser trocado por $||\Delta|| \rightarrow 0$.

(Adiante veremos que isso ocorre.) O limite que aparece nessa expressão é um dos conceitos fundamentais do Cálculo Integral e constitui a base da definição seguinte.

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é **integrável** em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

que é denominado **integral definida** de f de a até b . Os números a e b são denominados **limite de integração inferior** e **limite de integração superior**, respectivamente, e $f(x)$ é denominado **integrando**.

A notação usada para a integral definida merece algum comentário. Historicamente, a expressão “ $f(x) dx$ ” era interpretada como uma “área infinitesimal” de um retângulo de altura $f(x)$ e base “infinitesimal” dx . Então, a área total sob a curva era obtida “somando” essas áreas infinitesimais. O símbolo “ \int ” é um “S” espinhado que era usado para indicar essa soma. Para nós, o símbolo “ \int ” de integral e o símbolo “ dx ” podem servir para lembrar que a integral definida é realmente o limite de um somatório quando $\Delta x_k \rightarrow 0$. A soma que aparece na Definição 5.5.1 é chamada de **soma de Riemann**, e a integral definida é, às vezes, denominada **integral de Riemann** para homenagear o matemático alemão Bernhard Riemann, que formulou muitos dos conceitos básicos do Cálculo Integral. (A razão para a semelhança entre as notações de integral definida e integral indefinida será esclarecida na próxima seção, onde estabeleceremos uma relação entre os dois tipos de “integração”.)



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) Matemático alemão. Bernhard Riemann, como é comumente conhecido, era filho de um ministro protestante. Recebeu de seu pai a educação elementar e, com pouca idade, mostrou talento em Aritmética. Em 1846, entrou na Universidade de Göttingen para estudar Teologia e Filosofia, mas logo transferiu-se para a Matemática. Estudou física com W. E. Weber e Matemática com Carl Friedrich Gauss, considerado por alguns o maior matemático de todos os tempos. Em 1851, recebeu seu Ph.D sob a orientação de Gauss e permaneceu em Göttingen para lecionar. Em 1862, um mês após seu casamento, sofreu um ataque de pleurisia e permaneceu extremamente doente pelo restante da vida. Finalmente, sucumbiu à tuberculose em 1866, com 39 anos.

O trabalho de Riemann em Geometria está cercado de uma história interessante. Para sua aula introdutória, antes de tornar-se professor assistente, submeteu três tópicos possíveis a Gauss. Gauss surpreendeu Riemann, escolhendo o que ele menos gos-

tava, os fundamentos da Geometria. A aula parecia uma cena de filme. O velho e enfraquecido Gauss, um gigante em seu tempo, observando intensamente seu jovem brilhante protegido juntar as partes de seu trabalho em um sistema belo e completo. Dizem que Gauss ficou ofegante de prazer quando a aula estava chegando ao fim e voltou para a casa maravilhado com o talento de seu estudante. Gauss morreu pouco depois. Os resultados apresentados por Riemann naquele dia acabaram sendo a ferramenta fundamental, usada por Einstein, cerca de 50 anos depois, para desenvolver a teoria da Relatividade.

Além de seu trabalho em Geometria, Riemann fez grandes contribuições à teoria das funções complexas e à Física Matemática. A noção de integral definida, presente na maioria de cursos de Cálculo, deve-se a ele. Sua morte prematura foi uma grande perda para a Matemática, uma vez que seu trabalho era brilhante e de importância fundamental.

[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg]

O limite que aparece na Definição 5.5.1 é um pouco diferente dos tipos de limite discutidos no Capítulo 1. Falando um tanto vagamente, a intenção da expressão

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = L$$

é transmitir a ideia de que podemos forçar as somas de Riemann a ficarem tão próximas quanto quisermos de L , independentemente da escolha dos valores de x_k^* , tomando a norma da partição suficientemente pequena. Embora seja possível dar uma definição formal desse limite, vamos simplesmente usar argumentos intuitivos sempre que aplicarmos a Definição 5.5.1.

Embora a função não precise ser contínua em um intervalo para poder ser integrável nesse intervalo (Exercício 42), estaremos interessados basicamente em integrais definidas de funções contínuas. O teorema a seguir, que enunciamos sem prova, diz que, se uma função for contínua em um intervalo fechado finito, então essa função será integrável nesse intervalo, e sua integral definida será a área líquida com sinal entre o gráfico da função e o intervalo.

5.5.2 TEOREMA Se uma função f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$ e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ será

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

OBSERVAÇÃO

A Fórmula (1) segue da integrabilidade de f , que nos permite utilizar qualquer partição para calcular a integral. Em particular, se utilizarmos partições regulares de $[a, b]$, então

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

com qualquer valor de k . Isso implica que $\max \Delta x_k = (b-a)/n$, do que segue que $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ se, e somente se, $n \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x = A$$

Nos casos mais simples, podemos calcular integrais definidas de funções contínuas usando fórmulas da Geometria plana para calcular áreas com sinal.

Subentende-se, no Exemplo 1, que as unidades da área são as unidades de comprimentos elevados ao quadrado, mesmo não explicitando quaisquer unidades de comprimento.

► **Exemplo 1** Esboce a região cuja área está representada pela integral definida e calcule a integral usando uma fórmula apropriada de Geometria.

$$(a) \int_1^4 2 dx \quad (b) \int_{-1}^2 (x+2) dx \quad (c) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Solução (a) O gráfico do integrando é a reta horizontal $y = 2$; portanto, a região é um retângulo de altura 2, estendendo-se sobre o intervalo de 1 até 4 (Figura 5.5.4a). Assim,

$$\int_1^4 2 dx = (\text{área do retângulo}) = 2(3) = 6$$

Solução (b) O gráfico do integrando é a reta $y = x + 2$; portanto, a região é um trapézio, cuja base se estende de $x = -1$ a $x = 2$ (Figura 5.5.4b). Assim,

$$\int_{-1}^2 (x+2) dx = (\text{área do trapézio}) = \frac{1}{2}(1+4)(3) = \frac{15}{2}$$

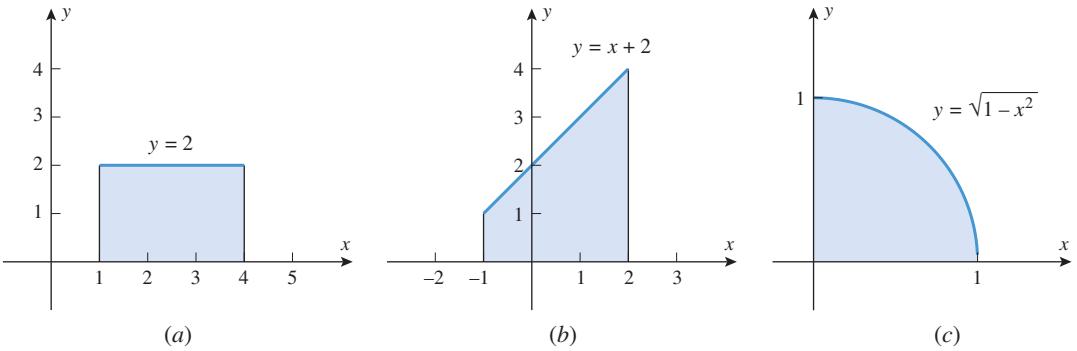


Figura 5.5.4

Solução (c) O gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$ é o semicírculo superior de raio 1 e centro na origem; portanto, a região é o quarto de círculo superior direito estendendo-se de $x = 0$ a $x = 1$ (Figura 5.5.4c). Assim,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = (\text{área do quarto de círculo}) = \frac{1}{4}\pi(1^2) = \frac{\pi}{4}$$

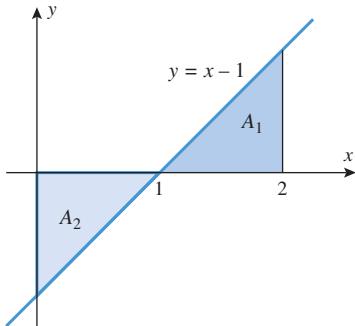


Figura 5.5.5

► Exemplo 2 Calcule

$$(a) \int_0^2 (x - 1) dx \quad (b) \int_0^1 (x - 1) dx$$

Solução O gráfico de $y = x - 1$ está na Figura 5.5.5, e deixamos a cargo do leitor verificar que ambas as regiões triangulares têm área $\frac{1}{2}$. No intervalo $[0, 2]$, a área líquida com sinal é $A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ e, no intervalo $[0, 1]$, a área líquida com sinal é $-A_2 = -\frac{1}{2}$. Assim,

$$\int_0^2 (x - 1) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 (x - 1) dx = -\frac{1}{2}$$

(Lembre que, no Exemplo 7 da Seção 5.4, utilizamos a Definição 5.4.5 para mostrar que é nula a área líquida com sinal entre o gráfico de $v = x - 1$ e o intervalo $[0, 2]$.) ▲

■ PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Supõe-se, na Definição 5.5.1, que $[a, b]$ seja um intervalo finito fechado com $a < b$ e, portanto, o limite superior de integração de uma integral definida é maior do que o limite inferior. É conveniente, porém, estender essa definição para incluir os casos em que os limites de integração são iguais ou o limite inferior é maior do que o superior. Com essa finalidade, faremos as seguintes definições especiais.

5.5.3 DEFINIÇÃO

- (a) Se a estiver no domínio de f , definimos

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

- (b) Se f for integrável em $[a, b]$, definimos

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

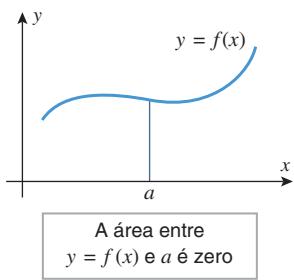


Figura 5.5.6

A parte (a) dessa definição é consistente com a ideia intuitiva de que a área entre um ponto no eixo x e a curva $y = f(x)$ deva ser zero (Figura 5.5.6). A parte (b) da definição é simplesmente uma convenção útil; ela estabelece que, intercambiando-se os limites de integração, inverte-se o sinal da integral.

► Exemplo 3

$$(a) \int_1^1 x^2 dx = 0$$

$$(b) \int_1^0 \sqrt{1-x^2} dx = - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

Exemplo 1(c)

Uma vez que as integrais definidas são dadas por limites, elas herdam muitas das propriedades dos limites. Por exemplo, sabemos que constantes podem ser movidas através do sinal de limite e que o limite de uma soma ou diferença é a soma ou diferença dos limites. Assim, o leitor não deve se surpreender com o teorema a seguir, enunciado sem prova formal.

5.5.4 TEOREMA Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e se c for uma constante, então cf , $f + g$ e $f - g$ serão integráveis em $[a, b]$ e

$$(a) \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$(b) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(c) \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

A parte (b) desse teorema pode ser estendida a mais do que duas funções. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] dx \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \cdots + \int_a^b f_n(x) dx \end{aligned}$$

Algumas das propriedades das integrais definidas podem ser motivadas interpretando-se a integral como uma área. Por exemplo, se f for contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e se c for um ponto entre a e b , então a área sob $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ poderá ser dividida em duas partes e expressa como a área sob o gráfico de a a c mais a área sob o gráfico de c a b (Figura 5.5.7), isto é,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Esse é um caso especial do teorema a seguir sobre integrais definidas, o qual enunciaremos sem prova.

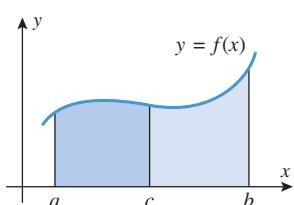


Figura 5.5.7

5.5.5 TEOREMA Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a , b e c , então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

O teorema a seguir, que enunciaremos sem prova, também pode ser motivado interpretando as integrais definidas como áreas.

5.5.6 TEOREMA

(a) Se f for integrável em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ em cada x de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(b) Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ em cada x de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

A parte (b) do Teorema 5.5.6 afirma que é possível integrar ambos os lados de uma desigualdade $f(x) \geq g(x)$, sem alterar o sentido da mesma. Caso $b > a$, ambas as partes do teorema continuam válidas se trocarmos \geq por \leq , $>$ ou $<$ em toda parte.

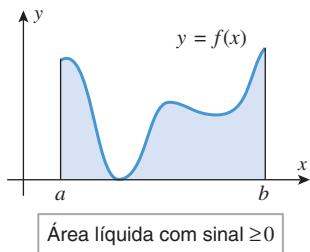


Figura 5.5.8

Geometricamente, a parte (a) desse teorema estabelece o fato óbvio de que, se f for não negativa em $[a, b]$, então a área líquida com sinal entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ será também não negativa (Figura 5.5.8). A parte (b) tem uma interpretação simples quando f e g forem não negativas em $[a, b]$, afirmando que, se o gráfico de f não passar por baixo do de g , então a área sob o gráfico de f será pelo menos tão grande quanto aquela sob o gráfico de g (Figura 5.5.9).

► Exemplo 4 Calcule

$$\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1-x^2}) dx$$

Solução A partir das partes (a) e (c) do Teorema 5.5.4, podemos escrever

$$\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^1 5 dx - \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 5 dx - 3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

A primeira integral dessa diferença pode ser interpretada como a área de um retângulo de altura 5 e base 1; portanto, seu valor é 5 e, pelo Exemplo 1, o valor da segunda integral é $\pi/4$. Assim,

$$\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1-x^2}) dx = 5 - 3 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 5 - \frac{3\pi}{4} \quad \blacktriangleleft$$

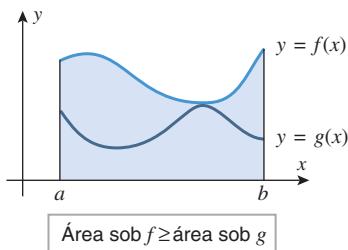


Figura 5.5.9

■ DESCONTINUIDADES E INTEGRABILIDADE

No final do século XIX e no início do século XX, os matemáticos começaram a investigar condições sob as quais o limite que define uma integral deixa de existir, ou seja, condições sob as quais uma função deixa de ser integrável. Esse assunto é bem complexo e foge do contexto deste livro. Porém, existem alguns resultados básicos sobre integrabilidade que são importantes; começaremos com uma definição.

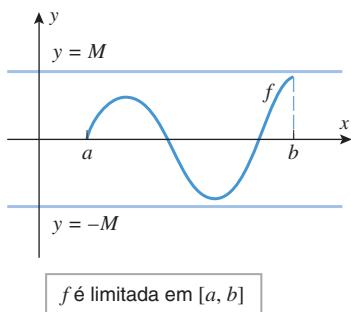


Figura 5.5.10

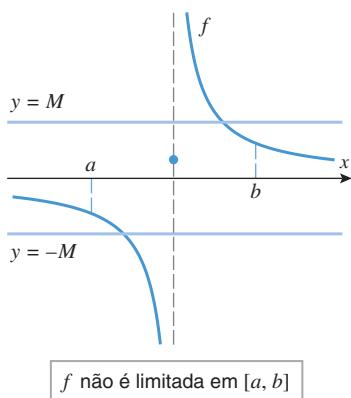


Figura 5.5.11

5.5.7 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f definida em um intervalo é **limitada** no intervalo se existir algum número M positivo tal que

$$-M \leq f(x) \leq M$$

em cada x do intervalo. Geometricamente, isso significa que o gráfico de f no intervalo fica entre as retas $y = -M$ e $y = M$.

Por exemplo, uma função contínua f é limitada em *qualquer* intervalo finito fechado, pois o Teorema do Valor Extremo (4.4.2) impõe que f tenha um máximo e um mínimo absolutos no intervalo; logo, seu gráfico está entre as retas $y = -M$ e $y = M$, desde que M seja grande o suficiente (Figura 5.5.10). Ao contrário, uma função que tem uma assimetria vertical dentro de um intervalo não é limitada nesse intervalo, pois seu gráfico dentro dele não pode ser forçado a ficar entre as retas $y = -M$ e $y = M$, não importando quão grande tomarmos o valor de M (Figura 5.5.11).

O teorema a seguir, enunciado sem prova, lista alguns fatos sobre a integrabilidade de funções com descontinuidades. Nos exercícios, incluímos alguns problemas relacionados com esse teorema (Exercícios 42, 43 e 44).

5.5.8 TEOREMA Seja f uma função definida em um intervalo finito fechado $[a, b]$.

- (a) Se f tiver um número finito de descontinuidades em $[a, b]$, mas for limitada em $[a, b]$, então será integrável em $[a, b]$.
- (b) Se f não for limitada em $[a, b]$, então não será integrável em $[a, b]$.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.5 (Ver página 362 para respostas.)

1. Em cada parte, use a partição de $[2, 7]$ da figura abaixo.



Figura Ex-1

- (a) Qual é o número n de subintervalos nessa partição?
- (b) $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$; $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$; $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$; $x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
- (c) $\Delta x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$; $\Delta x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; $\Delta x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$; $\Delta x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
- (d) A norma dessa partição é $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. Seja $f(x) = 2x - 8$. Use a partição de $[2, 7]$ do Exercício 1 acima e as escolhas $x_1^* = 2, x_2^* = 4, x_3^* = 5$ e $x_4^* = 7$ para calcular a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^4 f(x_k^*) \Delta x_k$$

3. Use a figura abaixo para calcular

$$\int_2^7 (2x - 8) dx$$

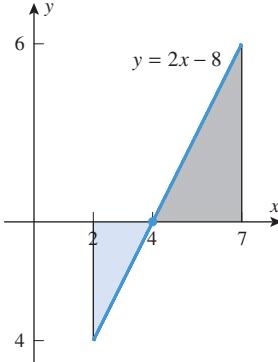


Figura Ex-3

4. Suponha que $g(x)$ seja uma função para a qual

$$\int_{-2}^1 g(x) dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_1^2 g(x) dx = -2$$

Use essa informação para calcular as integrais definidas.

- (a) $\int_1^2 5g(x) dx$
- (b) $\int_{-2}^2 g(x) dx$
- (c) $\int_1^1 [g(x)]^2 dx$
- (d) $\int_2^{-2} 4g(x) dx$

EXERCÍCIOS 5.5

1-4 Encontre o valor de

(a) $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ (b) $\max \Delta x_k$. ■

1. $f(x) = x + 1; a = 0, b = 4; n = 3;$

$\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 1, \Delta x_3 = 2;$

$x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{3}{2}, x_3^* = 3$

2. $f(x) = \cos x; a = 0, b = 2\pi; n = 4;$

$\Delta x_1 = \pi/2, \Delta x_2 = 3\pi/4, \Delta x_3 = \pi/2, \Delta x_4 = \pi/4;$

$x_1^* = \pi/4, x_2^* = \pi, x_3^* = 3\pi/2, x_4^* = 7\pi/4$

3. $f(x) = 4 - x^2; a = -3, b = 4; n = 4;$

$\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 2, \Delta x_3 = 1, \Delta x_4 = 3;$

$x_1^* = -\frac{5}{2}, x_2^* = -1, x_3^* = \frac{1}{4}, x_4^* = 3$

4. $f(x) = x^3; a = -3, b = 3; n = 4;$

$\Delta x_1 = 2, \Delta x_2 = 1, \Delta x_3 = 1, \Delta x_4 = 2;$

$x_1^* = -2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 2$

5-8 Use os valores dados de a e b para expressar os limites seguintes como integrais. (Não calcule as integrais). ■

5. $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (x_k^*)^2 \Delta x_k; a = -1, b = 2$

6. $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (x_k^*)^3 \Delta x_k; a = 1, b = 2$

7. $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 4x_k^*(1 - 3x_k^*) \Delta x_k; a = -3, b = 3$

8. $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\operatorname{sen}^2 x_k^*) \Delta x_k; a = 0, b = \pi/2$

9-10 Use a definição 5.5.1 para expressar as integrais como limites de somas de Riemann. (Não calcule as integrais.) ■

9. (a) $\int_1^2 2x \, dx$ (b) $\int_0^1 \frac{x}{x+1} \, dx$

10. (a) $\int_1^2 \sqrt{x} \, dx$ (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos x) \, dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

11. Explique informalmente por que o Teorema 5.5.4(a) decorre da Definição 5.5.1.

12. Explique informalmente por que o Teorema 5.5.6(a) decorre da Definição 5.5.1.

13-16 Esboce a região cuja área com sinal é representada pela integral definida e calcule a integral usando uma fórmula apropriada de Geometria quando for necessário. ■

13. (a) $\int_0^3 x \, dx$ (b) $\int_{-2}^{-1} x \, dx$
 (c) $\int_{-1}^4 x \, dx$ (d) $\int_{-5}^5 x \, dx$
14. (a) $\int_0^2 (1 - \frac{1}{2}x) \, dx$ (b) $\int_{-1}^1 (1 - \frac{1}{2}x) \, dx$
 (c) $\int_2^3 (1 - \frac{1}{2}x) \, dx$ (d) $\int_0^3 (1 - \frac{1}{2}x) \, dx$
15. (a) $\int_0^5 2 \, dx$ (b) $\int_0^\pi \cos x \, dx$
 (c) $\int_{-1}^2 |2x - 3| \, dx$ (d) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$
16. (a) $\int_{-10}^{-5} 6 \, dx$ (b) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{sen} x \, dx$
 (c) $\int_0^3 |x - 2| \, dx$ (d) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$

17. Em cada parte, calcule a integral, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

(a) $\int_{-2}^0 f(x) \, dx$ (b) $\int_{-2}^2 f(x) \, dx$
 (c) $\int_0^6 f(x) \, dx$ (d) $\int_{-4}^6 f(x) \, dx$

18. Em cada parte, calcule a integral, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

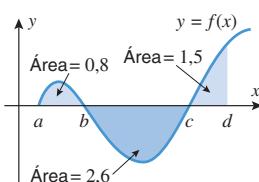
(a) $\int_0^1 f(x) \, dx$ (b) $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$
 (c) $\int_1^{10} f(x) \, dx$ (d) $\int_{1/2}^5 f(x) \, dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

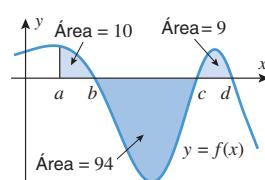
19-20 Use as áreas mostradas nas figuras para encontrar

(a) $\int_a^b f(x) \, dx$ (b) $\int_b^c f(x) \, dx$
 (c) $\int_a^c f(x) \, dx$ (d) $\int_a^d f(x) \, dx$. ■

19.



20.



21. Obtenha $\int_{-1}^2 [f(x) + 2g(x)] dx$ se

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^2 g(x) dx = -3$$

22. Obtenha $\int_1^4 [3f(x) - g(x)] dx$ se

$$\int_1^4 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_1^4 g(x) dx = 10$$

23. Obtenha $\int_1^5 f(x) dx$ se

$$\int_0^1 f(x) dx = -2 \quad \text{e} \quad \int_0^5 f(x) dx = 1$$

24. Obtenha $\int_3^{-2} f(x) dx$ se

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(x) dx = -6$$

25-28 Use o Teorema 5.5.4 e fórmulas apropriadas de Geometria para calcular as integrais. ■

25. $\int_{-1}^3 (4 - 5x) dx$

26. $\int_{-2}^2 (1 - 3|x|) dx$

27. $\int_0^1 (x + 2\sqrt{1 - x^2}) dx$

28. $\int_{-3}^0 (2 + \sqrt{9 - x^2}) dx$

29-32 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

29. Se $f(x)$ for integrável em $[a, b]$, então $f(x)$ será contínua em $[a, b]$.

30. Vale

$$0 < \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

31. Se a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ for negativa, então $f(x) \leq 0$ em cada $a \leq x \leq b$.

32. A função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

é integrável em qualquer intervalo fechado $[a, b]$.

33-34 Use o Teorema 5.5.6 para determinar se o valor da integral é positivo ou negativo. ■

33. (a) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{1-x} dx$

(b) $\int_0^4 \frac{x^2}{3-\cos x} dx$

34. (a) $\int_{-3}^{-1} \frac{x^4}{\sqrt{3-x}} dx$

(b) $\int_{-2}^2 \frac{x^3-9}{|x|+1} dx$

35. Prove que se f for contínua e se $m \leq f(x) \leq M$ em $[a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

36. Encontre os valores máximo e mínimo de $\sqrt{x^3+2}$ com $0 \leq x \leq 3$. Use tais valores, junto às desigualdades do Exercício 35, para encontrar cotas no valor da integral

$$\int_0^3 \sqrt{x^3+2} dx$$

37-38 Calcule as integrais completando o quadrado e aplicando fórmulas apropriadas de Geometria. ■

37. $\int_0^{10} \sqrt{10x - x^2} dx$

38. $\int_0^3 \sqrt{6x - x^2} dx$

39-40 Calcule o limite expressando-o como uma integral definida no intervalo $[a, b]$ e aplicando uma fórmula apropriada de Geometria. ■

39. $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3x_k^* + 1)\Delta x_k; a = 0, b = 1$

40. $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - (x_k^*)^2} \Delta x_k; a = -2, b = 2$

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Seja $f(x) = C$ uma função constante.

(a) Use uma fórmula de Geometria para mostrar que

$$\int_a^b f(x) dx = C(b-a)$$

(b) Mostre que o valor de qualquer soma de Riemann para $f(x)$ sobre $[a, b]$ é $C(b-a)$. Use a Definição 5.5.1 para mostrar que

$$\int_a^b f(x) dx = C(b-a)$$

42. Defina a função f em $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Use a Definição 5.5.1 para mostrar que

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

43. Pode-se mostrar que todo intervalo contém números racionais e irracionais. Aceitando isso, a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

pode ser integrável em um intervalo fechado $[a, b]$? Explique seu raciocínio.

44. Defina a função f por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Segue, pelo Teorema 5.5.8(b), que f não é integrável no intervalo $[0, 1]$. Aplique a Definição 5.5.1 para provar que isso realmente ocorre. [Sugestão: Argumente que, independentemente de quão pequena seja a norma de uma partição de $[0, 1]$, sempre haverá alguma escolha de x_1^* que torne a soma de Riemann da Definição 5.5.1 tão grande quanto quieramos.]

45. Em cada parte, use os Teoremas 5.5.2 e 5.5.8 para decidir se a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.

- (a) $f(x) = \cos x$
 (b) $f(x) = \begin{cases} x/|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 (c) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 (d) $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

46. **Texto** Escreva um parágrafo curto discutindo as semelhanças e as diferenças entre as integrais indefinidas e as definidas.

47. **Texto** Escreva um parágrafo explicando informalmente o que significa uma função ser “integrável”.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.5

1. (a) $n = 4$ (b) 2; 3; 4,5; 6,5; 7 (c) 1; 1,5; 2; 0,5 (d) 2 2. 3 3. 5 4. (a) -10 (b) 3 (c) 0 (d) -12

5.6 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Nesta seção, estabeleceremos duas relações básicas entre as integrais definida e indefinida que, juntas, formam um resultado conhecido como “Teorema Fundamental do Cálculo”. Uma parte desse teorema relaciona os métodos do retângulo e da antiderivada com o cálculo de área, enquanto a outra parte fornece um poderoso método para o cálculo de integrais definidas usando antiderivadas.

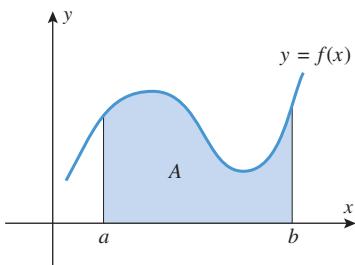


Figura 5.6.1

■ O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Como nas seções anteriores, começamos supondo f não negativa e contínua em um intervalo $[a, b]$; nesse caso, a área A sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, b]$ é representada pela integral definida

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

(Figura 5.6.1).

A discussão do método da antiderivada na Seção 5.1 sugere que, se $A(x)$ for a área sob o gráfico de f de a até x (Figura 5.6.2), então:

- $A'(x) = f(x)$
- $A(a) = 0$ A área sob a curva de a até a é a área acima de um único ponto e, portanto, é zero.
- $A(b) = A$ A área sob a curva de a até b é A .

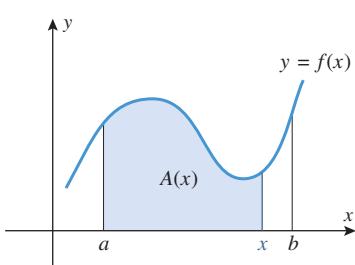
A fórmula $A'(x) = f(x)$ afirma que $A(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, o que implica que qualquer antiderivada de $f(x)$ em $[a, b]$ pode ser obtida acrescentando-se uma constante a $A(x)$. Consequentemente, seja

$$F(x) = A(x) + C$$

uma antiderivada qualquer de $f(x)$. Subtraindo $F(a)$ de $F(b)$, obtemos

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a) = A - 0 = A$$

Figura 5.6.2



Logo, (1) pode ser expressa como

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

Embora esse resultado tenha sido obtido sujeito à hipótese de que f é não negativa em $[a, b]$, essa hipótese não é essencial.

5.6.1 TEOREMA (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte I) Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

DEMONSTRAÇÃO Sejam x_1, x_2, \dots, x_{n-1} pontos quaisquer em $[a, b]$, tais que

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

Esses pontos dividem $[a, b]$ em n subintervalos

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b] \quad (3)$$

cujo comprimento, como antes, denotaremos por

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$$

(ver Figura 5.6.3). Por hipótese, $F'(x) = f(x)$ em cada x de $[a, b]$; logo, F satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio (4.8.2) em cada subintervalo em (3). Portanto, podemos encontrar pontos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nos respectivos subintervalos em (3), tais que

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= F'(x_1^*)(x_1 - a) = f(x_1^*)\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= F'(x_2^*)(x_2 - x_1) = f(x_2^*)\Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= F'(x_3^*)(x_3 - x_2) = f(x_3^*)\Delta x_3 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= F'(x_n^*)(b - x_{n-1}) = f(x_n^*)\Delta x_n \end{aligned}$$

Somando as equações precedentes, obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k \quad (4)$$

Vamos, agora, aumentar n de tal forma que $\max \Delta x_k \rightarrow 0$. Como se supõe f contínua, o lado direito de (4) tende a $\int_a^b f(x) dx$, pelo Teorema 5.5.2 e pela Definição 5.5.1. Porém, o lado

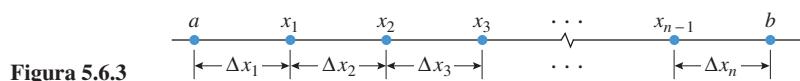


Figura 5.6.3

esquerdo de (4) é independente de n ; ou seja, o lado esquerdo de (4) permanece constante quando n aumenta. Assim,

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \blacksquare$$

É usual denotar a diferença $F(b) - F(a)$ por

$$F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{ou} \quad [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por exemplo, usando a primeira dessas notações, podemos expressar (2) como

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)]_a^b \quad (5)$$

Às vezes, escrevemos

$$F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a)$$

quando for importante enfatizar que a e b são valores da variável x .

A integral no Exemplo 1 representa a área de um certo trapézio. Esboce esse trapézio e calcule sua área usando Geometria.

► **Exemplo 1** Calcule $\int_1^2 x dx$.

Solução A função $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma antiderivada de $f(x) = x$; assim, a partir de (2),

$$\int_1^2 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 2** No Exemplo 5 da Seção 5.4, usamos a definição de área para mostrar que a área sob o gráfico de $y = 9 - x^2$ e acima do intervalo $[0, 3]$ é de 18 (unidades de área). Agora, podemos resolver esse problema com muito mais facilidade usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$A = \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \left(27 - \frac{27}{3} \right) - 0 = 18 \blacktriangleleft$$

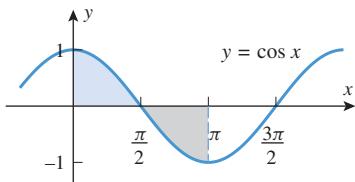


Figura 5.6.4

► **Exemplo 3**

- Encontre a área sob a curva $y = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$ (Figura 5.6.4).
- Faça uma conjectura sobre o valor da integral

$$\int_0^{\pi} \cos x dx$$

e a confirme usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Solução (a) Como $\cos x \geq 0$ no intervalo $[0, \pi/2]$, a área A sob a curva é

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Solução (b) A área dada pode ser interpretada como a área com sinal entre o gráfico de $y = \cos x$ e o intervalo $[0, \pi]$. O gráfico na Figura 5.6.4 sugere que a parte da área acima do

eixo x é igual à parte abaixo dele; logo, a conjectura é de que a área com sinal é zero. Isso implica que o valor da integral é zero, o que é confirmado pelos cálculos

$$\int_0^\pi \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ A RELAÇÃO ENTRE AS INTEGRAIS DEFINIDA E INDEFINIDA

Observe que, nos exemplos precedentes, nenhuma constante de integração foi incluída nas antiderivadas. Em geral, quando for aplicado o Teorema Fundamental do Cálculo, não há necessidade de incluir uma constante de integração, pois, de qualquer forma, ela irá sumir. Para entender isso, seja F uma antiderivada do integrando em $[a, b]$ e C uma constante qualquer; então,

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x) + C]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Assim, quando estivermos calculando a integral definida, podemos omitir a constante de integração em

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x) + C]_a^b$$

e expressar (5) como

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int f(x) \, dx \Big|_a^b \quad (6)$$

que relaciona as integrais definida e indefinida.

► Exemplo 4

$$\int_1^9 \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx \Big|_1^9 = \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_1^9 = \frac{2}{3}(27 - 1) = \frac{52}{3} \quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 5

A Tabela 5.2.1 nos será útil nos cálculos a seguir.

$$\int_4^9 x^2 \sqrt{x} \, dx = \int_4^9 x^{5/2} \, dx = \frac{2}{7}x^{7/2} \Big|_4^9 = \frac{2}{7}(2187 - 128) = \frac{4118}{7} = 588\frac{2}{7}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{5} \, dx = -\frac{1}{5} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{5} [\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos 0] = -\frac{1}{5}[0 - 1] = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \, dx = \tan x \Big|_0^{\pi/3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan 0 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$$

$$\int_0^{\ln 3} 5e^x \, dx = 5e^x \Big|_0^{\ln 3} = 5[e^{\ln 3} - e^0] = 5[3 - 1] = 10$$

$$\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \Big|_{-e}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-e| = 0 - 1 = -1$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Consulte o manual de seu CAS a respeito do cálculo de integrais definidas e confira os resultados obtidos no Exemplo 5.

ADVERTÊNCIA

As exigências do Teorema Fundamental do Cálculo de que f seja contínua em $[a, b]$ e de que F seja uma antiderivada para f em todo intervalo $[a, b]$ não podem ser esquecidas. A desconsideração dessas hipóteses quase certamente levará a resultados incorretos. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x^2$ deixa de ser contínua em $x = 0$ por dois motivos: $f(x)$ não está definida em $x = 0$ e não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Assim, o Teorema Fundamental do Cálculo não deveria ser usado para integrar f em qualquer intervalo que contenha $x = 0$. Contudo, se ignorarmos isso e aplicarmos cegamente a Fórmula (2) no intervalo $[-1, 1]$, poderemos calcular *incorrectamente* a integral $\int_{-1}^1 (1/x^2) dx$ tomando os valores da antiderivada $-1/x$ nos extremos e obtendo a resposta

$$\left. -\frac{1}{x} \right|_{-1}^1 = -[1 - (-1)] = -2$$

Como $f(x) = 1/x^2$ é uma função não negativa, é impossível obter um valor negativo para essa integral definida.

O Teorema Fundamental do Cálculo pode ser aplicado, sem modificações, a integrais definidas em que o limite inferior da integração é maior do que ou igual ao limite superior da integração.

► Exemplo 6

$$\int_1^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\int_4^0 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_4^0 = \frac{0}{2} - \frac{16}{2} = -8$$

O último resultado está de acordo com o que teria sido obtido revertendo-se os limites de integração, conforme a Definição 5.5.3(b):

$$\int_4^0 x dx = - \int_0^4 x dx = - \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = - \left[\frac{16}{2} - \frac{0}{2} \right] = -8 \quad \blacktriangleleft$$

Para integrar uma função contínua que é definida por partes em um intervalo $[a, b]$, divida o intervalo em subintervalos nos pontos em que a função é descontínua e integre separadamente em cada intervalo de acordo com o Teorema 5.5.5.

► Exemplo 7 Calcule $\int_0^3 f(x) dx$ se

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Solução Ver Figura 5.6.5. A partir do Teorema 5.5.5, podemos integrar de 0 a 2 e de 2 a 3 separadamente e tomar daí os resultados. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 (3x - 2) dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = \left(\frac{8}{3} - 0 \right) + \left(\frac{15}{2} - 2 \right) = \frac{49}{6} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Se f for uma função contínua no intervalo $[a, b]$, definimos a **área total** entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ como

$$\text{área total} = \int_a^b |f(x)| dx \quad (7)$$

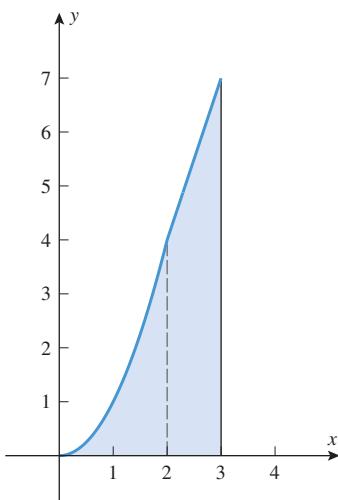


Figura 5.6.5

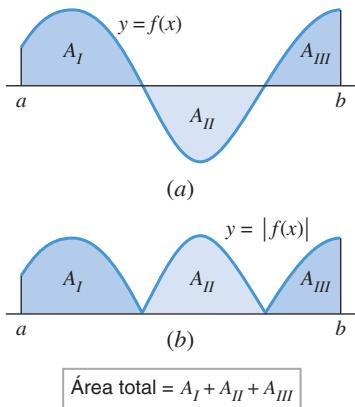


Figura 5.6.6

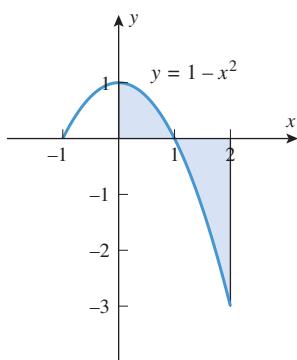


Figura 5.6.7

(Figura 5.6.6). Para calcular a área total usando a Fórmula (7), começamos dividindo o intervalo de integração em subintervalos nos quais $f(x)$ não troca de sinal. Nos subintervalos em que $0 \leq f(x)$, trocamos $|f(x)|$ por $f(x)$; e nos subintervalos em que $f(x) \leq 0$, trocamos $|f(x)|$ por $-f(x)$. A soma das integrais assim obtidas fornece a área total.

► Exemplo 8 Encontre a área total entre a curva $y = 1 - x^2$ e o eixo x sobre o intervalo $[0, 2]$ (Figura 5.6.7).

Solução A área A é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |1 - x^2| dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 -(1 - x^2) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = 2 \end{aligned}$$

VARIÁVEIS MUDAS

Para o cálculo de uma integral definida usando o Teorema Fundamental do Cálculo é necessário encontrar uma antiderivada do integrando; assim, é importante saber que tipos de função têm antiderivadas. É o nosso próximo objetivo mostrar que toda função contínua tem antiderivadas, mas, para fazer isso, precisamos antes de alguns resultados preliminares.

A Fórmula (6) mostra que há uma estreita relação entre as integrais

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int f(x) dx$$

Porém, as integrais definida e indefinida diferem em alguns aspectos importantes. Em primeiro lugar, ambas são objetos de classes diferentes – a integral definida é um *número* (a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$), enquanto a integral indefinida é uma *função* ou, mais precisamente, um conjunto de funções [as antiderivadas de $f(x)$]. No entanto, os dois tipos de integral também diferem no papel desempenhado pela variável de integração. Em uma integral indefinida, a variável de integração é “transmitida” à antiderivada, pois integrar uma função de x produz uma função de x , integrar uma função de t produz uma função de t e assim por diante. Por exemplo,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{e} \quad \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Por outro lado, a variável de integração de uma integral definida não é transmitida ao resultado final, já que este é um número. Assim, integrar uma função de x sobre um intervalo e integrar a mesma função de t sobre o mesmo intervalo de integração produz o mesmo valor da integral. Por exemplo,

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1}^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \quad \text{e} \quad \int_1^3 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{t=1}^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Contudo, esse último resultado não deveria ser surpreendente, pois a área sob o gráfico da curva $y = f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$ do eixo x é igual à área sob o gráfico da curva $y = f(t)$ sobre um intervalo $[a, b]$ do eixo t (Figura 5.6.8).

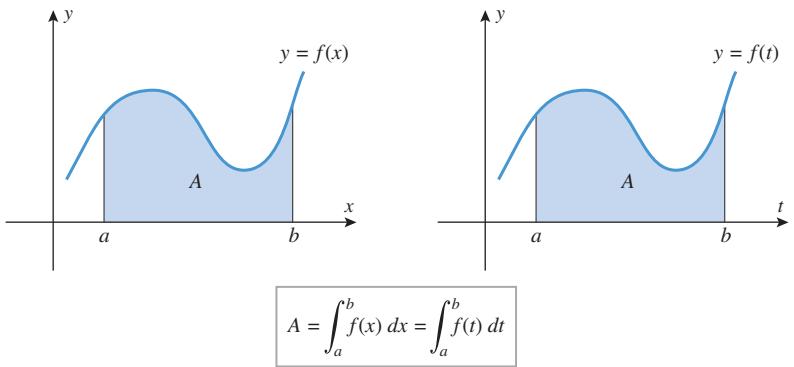


Figura 5.6.8

Uma vez que a variável de integração em uma integral definida não desempenha nenhum papel, ela é usualmente chamada de **variável muda**. Em suma:

Sempre que for conveniente mudar a letra usada para a variável de integração em uma integral definida, isso pode ser feito sem alterar o valor da integral.

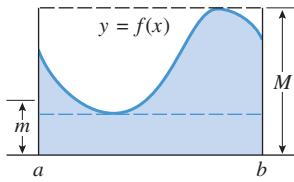


Figura 5.6.9

■ O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Para atingir o objetivo de mostrar que funções contínuas têm antiderivadas, vamos desenvolver uma propriedade básica das integrais definidas, conhecida como *Teorema do Valor Médio para Integrais*. No próximo capítulo, usaremos esse teorema para ampliar a ideia usual de “valor médio” para torná-la aplicável a funções contínuas, mas aqui o teorema será útil no desenvolvimento de outros resultados.

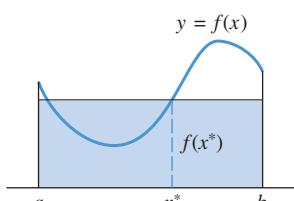
Seja f uma função contínua e não negativa em $[a, b]$, e m e M os valores mínimo e máximo de $f(x)$ nesse intervalo. Considere os retângulos de alturas m e M sobre o intervalo $[a, b]$ (Figura 5.6.9). É claro, geometricamente a partir da figura, que a área

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

sob $y = f(x)$ é, pelo menos, tão grande quanto a área do retângulo de altura m e não maior do que a área do retângulo de altura M . É, portanto, razoável supor que exista um retângulo sobre o intervalo $[a, b]$ com alguma altura apropriada $f(x^*)$ entre m e M , cuja área seja precisamente A ; isto é,

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a)$$

(Figura 5.6.10). Esse é um caso especial do seguinte resultado.



A área do retângulo sombreado é igual à área da região sombreada na Figura 5.6.9

Figura 5.6.10

5.6.2 TEOREMA (Teorema do Valor Médio para Integrais) Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existirá pelo menos um ponto x^* em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a) \quad (8)$$

DEMONSTRAÇÃO Pelo Teorema do Valor Extremo (4.4.2), f toma os valores mínimo m e máximo M em $[a, b]$. Assim, dado qualquer x em $[a, b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

e, pelo Teorema 5.5.6(b),

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

ou

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a) \quad (9)$$

ou

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

Isso significa que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (10)$$

é um número entre m e M , e como $f(x)$ assume todos os valores entre m e M em $[a, b]$, tem-se, a partir do Teorema do Valor Intermediário (1.5.7), que $f(x)$ deve tomar o valor (10) em algum ponto x^* de $[a, b]$; isto é,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = f(x^*) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) \, dx = f(x^*)(b-a) \blacksquare$$

► Exemplo 9 Já que $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[1, 4]$, o Teorema do Valor Médio para Integrais garante existir algum ponto x^* em $[1, 4]$, tal que

$$\int_1^4 x^2 \, dx = f(x^*)(4-1) = (x^*)^2(4-1) = 3(x^*)^2$$

No entanto,

$$\int_1^4 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = 21$$

logo,

$$3(x^*)^2 = 21 \quad \text{ou} \quad (x^*)^2 = 7 \quad \text{ou} \quad x^* = \pm\sqrt{7}$$

Portanto, $x^* = \sqrt{7} \approx 2,65$ é o número em $[1, 4]$, cuja existência está garantida pelo Teorema do Valor Médio para Integrais. ◀

■ PARTE 2 DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Na Seção 5.1, foi dado um argumento informal para mostrar que, se f for contínua e não negativa em $[a, b]$ e se $A(x)$ for a área sob o gráfico de $y = f(x)$ sobre o intervalo $[a, x]$ (Figura 5.6.2), então $A'(x) = f(x)$. Contudo, $A(x)$ pode ser expressa como a integral definida

$$A(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

(onde usamos t como variável de integração para evitar confusão com o x que aparece no limite de integração superior). Dessa forma, a relação $A'(x) = f(x)$ pode ser expressa como

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) \, dt \right] = f(x)$$

Esse é um caso especial do resultado seguinte mais geral, o qual se aplica mesmo que f assuma valores negativos.

5.6.3 TEOREMA (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2) Se f for contínua em um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x) \quad (11)$$

DEMONSTRAÇÃO Vamos mostrar primeiro que $F(x)$ está definida em cada ponto x do intervalo. Se $x > a$ e x estiver no intervalo, então o Teorema 5.5.2 aplicado no intervalo $[a, x]$ e a continuidade de f asseguram que $F(x)$ está definida; e se x estiver no intervalo e $x \leq a$, então a Definição 5.5.3, combinada com o Teorema 5.5.2, garante que $F(x)$ está definida. Assim, $F(x)$ está definida em cada x do intervalo.

A seguir, mostraremos que $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo. Se x não for uma extremidade, então tem-se, a partir da definição de derivada, que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad \text{Teorema 5.5.5} \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais (5.6.2) ao integrando em (12), obtemos

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} [f(t^*) \cdot h] = f(t^*) \quad (13)$$

onde t^* é algum número entre x e $x+h$. Como t^* está cercado entre x e $x+h$, segue que $t^* \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$. Assim, a continuidade de f em x implica que $f(t^*) \rightarrow f(x)$ quando $h \rightarrow 0$. Portanto, segue de (12) e (13) que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t^*) = f(x)$$

Se x for uma extremidade do intervalo, então os limites bilaterais da demonstração devem ser trocados pelos limites laterais apropriados, mas, a não ser por isso, os argumentos são idênticos. ■

Em palavras, a Fórmula (11) afirma que:

Se uma integral definida tiver um limite de integração superior variável, um limite de integração inferior constante e um integrando contínuo, então a derivada da integral em relação ao seu limite superior é igual ao integrando calculado no limite superior.

► **Exemplo 10** Encontre

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x t^3 dt \right]$$

aplicando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e, então, confirme o resultado fazendo a integração e depois diferenciando.

Solução O integrando é uma função contínua; assim, a partir de (11),

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x t^3 dt \right] = x^3$$

Alternativamente, calculando a integral e depois diferenciando, obtemos

$$\int_1^x t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{t=1}^x = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}, \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \right] = x^3$$

de modo que coincidem os dois métodos para derivar a integral. ◀

► Exemplo 11

Como

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

é contínua em todo intervalo que não contém a origem, tem-se, a partir de (11), que, no intervalo $(0, +\infty)$, temos

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right] = \frac{\sin x}{x}$$

Diferentemente do exemplo anterior, não há uma forma de calcular a integral em termos de funções conhecidas, de modo que a Fórmula (11) fornece o único método simples de encontrar a derivada. ◀

■ A DIFERENCIACÃO E A INTEGRAÇÃO SÃO PROCESSOS INVERSOS

Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo nos dizem que a diferenciação e a integração são processos inversos, no sentido de que cada uma desfaz o efeito da outra. Para ver por que isso ocorre, note que a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (5.6.1) afirma que

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

o que significa que, se o valor de $f(a)$ for conhecido, então a função f pode ser obtida a partir de sua derivada f' por integração. Reciprocamente, a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (5.6.3) afirma que

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

o que significa que a função f pode ser obtida a partir de sua integral por diferenciação. Dessa forma, a diferenciação e a integração podem ser encaradas como processos inversos.

É comum tratar as Partes 1 e 2 do Teorema Fundamental do Cálculo como um único teorema, e nos referimos a esses resultados como o *Teorema Fundamental do Cálculo*. Esse teorema ocupa o posto de uma das maiores descobertas da história da Ciência, e sua formulação por Newton e Leibniz é vista, geralmente, como sendo “a descoberta do Cálculo”.

■ INTEGRANDO TAXAS DE VARIAÇÃO

O Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \tag{14}$$

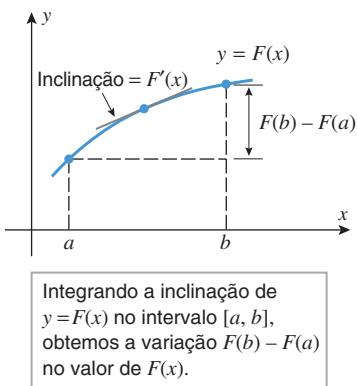


Figura 5.6.11

tem uma interpretação muito útil que pode ser vista reescrevendo-o em uma forma ligeiramente diferente. Como F é uma antiderivada de f no intervalo $[a, b]$, podemos usar a relação $F'(x) = f(x)$ para reescrever (14) como

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad (15)$$

Nessa fórmula, podemos interpretar $F'(x)$ como a taxa de variação de $F(x)$ em relação a x , e $F(b) - F(a)$ como a variação no valor de $F(x)$ quando x cresce de a até b (Figura 5.6.11). Assim, resulta o seguinte princípio bastante útil.

5.6.4 INTEGRANDO UMA TAXA DE VARIAÇÃO Integrando a taxa de variação de $F(x)$ em relação a x no intervalo $[a, b]$, obtemos a variação no valor de $F(x)$ que ocorre quando x cresce de a até b .

A seguir, alguns exemplos dessa ideia:

- Se $s(t)$ for a posição de uma partícula em movimento retilíneo, então $s'(t)$ é a velocidade instantânea da partícula no instante t , e

$$\int_{t_1}^{t_2} s'(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é o deslocamento (ou a mudança de posição) da partícula entre os momentos t_1 e t_2 .

- Se $P(t)$ for uma população (plantas, animais ou pessoas) no instante t , então $P'(t)$ é a taxa segundo a qual a população está variando no instante t , e

$$\int_{t_1}^{t_2} P'(t) dt = P(t_2) - P(t_1)$$

é a variação na população entre os momentos t_1 e t_2 .

- Se $A(t)$ for a área de um derramamento de óleo em um instante t , então $A'(t)$ é a taxa segundo a qual a área do derramamento varia no instante t , e

$$\int_{t_1}^{t_2} A'(t) dt = A(t_2) - A(t_1)$$

é a variação na área do derramamento entre os momentos t_1 e t_2 .

- Se $P'(x)$ for o lucro marginal que resulta da produção e da venda de x unidades de um produto (ver Seção 4.5), então

$$\int_{x_1}^{x_2} P'(x) dx = P(x_2) - P(x_1)$$

é a variação no lucro que resulta quando o nível de produção aumenta de x_1 para x_2 unidades.



Mitchell Funk/Getty Images

A análise matemática desempenha um papel importante no entendimento do crescimento populacional humano.

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 5.6 (Ver página 376 para respostas.)

1. (a) Se $F(x)$ for uma antiderivada de $f(x)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

(b) $\int_a^b F'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (a) $\int_0^2 (3x^2 - 2x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 (c) $\int_0^{\frac{1}{2} \ln 5} e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 (d) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Para a função $f(x) = 3x^2 - 2x$ e um intervalo $[a, b]$, o ponto x^* garantido pelo Teorema do Valor Médio para integrais é $x^* = \frac{2}{3}$. Segue que

$$\int_a^b (3x^2 - 2x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. A área de um vazamento de óleo, t segundos depois do início do vazamento, está crescendo a uma taxa de $25 \text{ m}^2/\text{s}$. Entre os tempos $t = 2$ e $t = 4$, a área do vazamento aumentou $\underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$.

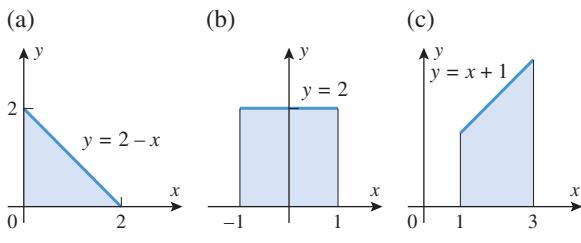
EXERCÍCIOS 5.6



Recursos Gráficos



1. Em cada parte, use uma integral definida para encontrar a área da região e verifique sua resposta usando uma fórmula apropriada de Geometria.



2. Em cada parte, use uma integral definida para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado e verifique sua resposta usando uma fórmula apropriada de Geometria.
- (a) $f(x) = x$; $[0, 5]$
 (b) $f(x) = 5$; $[3, 9]$
 (c) $f(x) = x + 3$; $[-1, 2]$

3. Em cada parte, esboce uma figura análoga à Figura 5.6.10 para a região especificada. [Considere $y = f(x)$ a fronteira superior da região. Se x^* for único, identifique $f(x^*)$ e x^* no esboço. Caso contrário, identifique $f(x^*)$ no esboço e determine todos os valores de x^* que satisfazem a Equação (8).]
- (a) A região da parte (a) do Exercício 1.
 (b) A região da parte (b) do Exercício 1.
 (c) A região da parte (c) do Exercício 1.

4. Em cada parte, esboce uma figura análoga à Figura 5.6.10 para a função e o intervalo especificados. [Se x^* for único, identifique $f(x^*)$ e x^* no esboço. Caso contrário, identifique $f(x^*)$ no esboço e determine todos os valores de x^* que satisfazem a Equação (8).]
- (a) A função e o intervalo da parte (a) do Exercício 2.
 (b) A função e o intervalo da parte (b) do Exercício 2.
 (c) A função e o intervalo da parte (c) do Exercício 2.

- 5-10 Encontre a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado. ■

5. $f(x) = x^3$; $[2, 3]$ 6. $f(x) = x^4$; $[-1, 1]$
 7. $f(x) = 3\sqrt{x}$; $[1, 4]$ 8. $f(x) = x^{-2/3}$; $[1, 27]$
 9. $f(x) = e^{2x}$; $[0, \ln 2]$ 10. $f(x) = \frac{1}{x}$; $[1, 5]$

- 11-12 Encontre todos os valores de x^* no intervalo dado que satisfazem a Equação (8) do Teorema do Valor Médio para Integrais (5.6.2) e explique o que esses números representam. ■

11. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 3]$
 (b) $f(x) = x^2 + x$; $[-12, 0]$

12. (a) $f(x) = \sin x$; $[-\pi, \pi]$ (b) $f(x) = 1/x^2$; $[1, 3]$

- 13-30 Calcule a integral usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo. ■

13. $\int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 12) dx$ 14. $\int_{-1}^2 4x(1-x^2) dx$

15. $\int_1^4 \frac{4}{x^2} dx$ 16. $\int_1^2 \frac{1}{x^6} dx$

17. $\int_4^9 2x\sqrt{x} dx$ 18. $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

19. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta$ 20. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta d\theta$

21. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x dx$ 22. $\int_0^{\pi/3} (2x - \sec x \tan x) dx$

23. $\int_{\ln 2}^3 5e^x dx$ 24. $\int_{1/2}^1 \frac{1}{2x} dx$

25. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

27. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 28. $\int_{-\sqrt{2}}^{-2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

29. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 3\sqrt[3]{t} \right) dt$ 30. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(x + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$

- 31-34 Use o Teorema 5.5.5 para calcular as integrais dadas. ■

31. (a) $\int_{-1}^1 |2x-1| dx$ (b) $\int_0^{3\pi/4} |\cos x| dx$

32. (a) $\int_{-1}^2 \sqrt{2+|x|} dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{2} - \cos x \right| dx$

33. (a) $\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$ (b) $\int_1^4 \frac{|2-x|}{x} dx$

34. (a) $\int_{-3}^3 \left| x^2 - 1 - \frac{15}{x^2 + 1} \right| dx$

(b) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \left| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{2} \right| dx$

35-36 É dada uma função $f(x)$ definida por partes num intervalo. Nestes exercícios: (a) use o Teorema 5.5.5 para encontrar a integral de $f(x)$ no intervalo; (b) encontre uma antiderivada de $f(x)$ no intervalo; (c) use as partes (a) e (b) para verificar a validade da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo. ■

35. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ 1/x^2, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

37-40 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

37. Não existe função diferenciável $F(x)$ alguma tal que $F'(x) = |x|$.

38. Se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e se a integral definida de $f(x)$ nesse intervalo for nula, então a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[a, b]$.

39. Se $F(x)$ for uma antiderivada de $f(x)$ e $G(x)$ for uma antiderivada de $g(x)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

se, e só se,

$$G(a) + F(b) = F(a) + G(b)$$

40. Se $f(x)$ for contínua em toda parte e

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

então a equação $F(x) = 0$ tem pelo menos uma solução.

41-44 Use um recurso computacional para encontrar a aproximação pelo ponto médio da integral usando $n = 20$ subintervalos, e então encontre o valor exato da integral usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo. ■

41. $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

42. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

43. $\int_{-1}^1 \sec^2 x dx$

44. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

45-48 Esboce a regra descrita e encontre sua área. ■

45. A região abaixo da curva $y = x^2 + 1$ e acima do intervalo $[0, 3]$.

46. A região abaixo da curva $y = x - x^2$ e acima do eixo x .

47. A região abaixo da curva $y = 3 \sin x$ e acima do intervalo $[0, 2\pi/3]$.

48. A região abaixo do intervalo $[-2, -1]$, mas acima da curva $y = x^3$.

49-52 Esboce a curva e encontre a área total entre a curva e o intervalo dado do eixo x . ■

49. $y = x^2 - x; [0, 2]$

50. $y = \sin x; [0, 3\pi/2]$

51. $y = e^x - 1; [-1, 1]$

52. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}; [\frac{1}{2}, 2]$

53. Um aluno quer encontrar a área delimitada pelos gráficos de $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 0,8$.

(a) Mostre que a área exata é $\arcsin 0,8$.

(b) O aluno usa uma calculadora para aproximar o resultado da parte (a) até a segunda casa decimal e obtém a resposta incorreta de 53,13. Qual foi o erro dele? Encontre a aproximação correta.

ENFOCANDO CONCEITOS

54. Explique por que o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser aplicado sem modificações a integrais definidas em que o limite de integração inferior é maior do que ou igual ao limite de integração superior.

55. (a) Se $h'(t)$ for a taxa de variação da altura de uma criança em centímetros por ano, o que representa a integral $\int_0^{10} h'(t) dt$ e quais são suas unidades?

(b) Se $r'(t)$ for a taxa de variação do raio de um balão esférico medida em centímetros por segundo, o que representa a integral $\int_1^2 r'(t) dt$ e quais são suas unidades?

(c) Se $H(t)$ for a taxa de variação da velocidade do som em relação à temperatura medida em m/s por °C, o que representa a integral $\int_{32}^{100} H(t) dt$ e quais são suas unidades?

(d) Se $v(t)$ for a velocidade de uma partícula em movimento retílineo medida em cm/h, o que representa a integral $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$, e quais são suas unidades?

56. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{100}(x+2)(x+1)(x-3)(x-5)$$

e use o gráfico para fazer uma conjectura sobre o sinal da integral

$$\int_{-2}^5 f(x) dx$$

(b) Verifique sua conjectura calculando a integral.

57. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_1^x (3t^2 - 3) dt$$

(a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.

(b) Verifique o resultado de (a) integrando e depois diferenciando.

58. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_{\pi/4}^x \cos 2t dt$$

- (a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.
 (b) Verifique o resultado de (a) integrando e depois diferenciando.

59-62 Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar as derivadas. ■

59. (a) $\frac{d}{dx} \int_1^x \sin(t^2) dt$ (b) $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$

60. (a) $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ (b) $\frac{d}{dx} \int_1^x \ln t dt$

61. $\frac{d}{dx} \int_x^0 t \sec t dt$ [Sugestão: Use a Definição 5.5.3(b).]

62. $\frac{d}{du} \int_0^u |x| dx$

63. Seja $F(x) = \int_4^x \sqrt{t^2 + 9} dt$. Encontre

- (a) $F(4)$ (b) $F'(4)$ (c) $F''(4)$

64. Seja $F(x) = \int_{\sqrt{3}}^x \operatorname{arc tg} t dt$. Encontre

- (a) $F(\sqrt{3})$ (b) $F'(\sqrt{3})$ (c) $F''(\sqrt{3})$.

65. Seja $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$ para $-\infty < x < +\infty$.

- (a) Encontre o valor de x em que F atinge seu valor mínimo.
 (b) Encontre os intervalos nos quais F é somente crescente ou somente decrescente.
 (c) Encontre os intervalos abertos nos quais F é somente côncava para cima ou somente côncava para baixo.

C 66. Use a geração de gráficos e a integração numérica de um CAS para gerar o gráfico da função F do Exercício 65 no intervalo $-20 \leq x \leq 20$ e confirme que o gráfico está de acordo com os resultados obtidos naquele exercício.

- 67.** (a) Em qual intervalo aberto a fórmula

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

representa uma antiderivada de $f(x) = 1/x$?

- (b) Encontre um ponto em que o gráfico de F cruza o eixo x .

- 68.** (a) Em qual intervalo aberto a fórmula

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 - 9} dt$$

representa uma antiderivada de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} ?$$

- (b) Encontre um ponto em que o gráfico de F cruza o eixo x .

- 69.** (a) Suponha que um reservatório forneça água para um parque industrial a uma taxa constante de $r = 4$ galões por minuto

entre 8h30min e 9h da manhã. Quanta água o reservatório fornecerá durante esse período de tempo?

- (b) Suponha que uma das indústrias aumente seu consumo entre 9h e 10h da manhã e que a taxa segundo a qual o reservatório fornece água cresça linearmente, conforme a figura abaixo. Quanta água o reservatório fornecerá durante aquela 1 hora?
 (c) Suponha que, das 10h até as 12h da manhã, a taxa segundo a qual o reservatório fornece água seja dada pela fórmula $r(t) = 10 + \sqrt{t}$ galões por minuto, onde $t = 0$ corresponde às 10h da manhã. Quanta água o reservatório fornecerá durante aquele período de 2 horas?

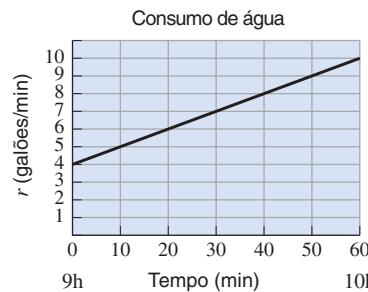


Figura Ex-69

- 70.** Uma engenheira de tráfego monitora o trânsito durante uma hora do horário de pico da tarde. A partir de seus dados, ela estima que, entre as 4h30min e as 5h30min da tarde, a taxa $R(t)$ segundo a qual os carros entram em uma certa via expressa é dada pela fórmula $R(t) = 100(1 - 0,0001t^2)$ carros por minuto, onde t é o tempo (em minutos) desde as 4h30min da tarde.
- Quando ocorre o pico de fluxo de trânsito para dentro da via expressa?
 - Estime o número de carros que entram na via expressa durante a hora monitorada.

71-72 Calcule cada limite interpretando-o como uma soma de Riemann em que os intervalos são divididos em n subintervalos de igual comprimento. ■

71. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4n} \sec^2 \left(\frac{\pi k}{4n} \right); [0, \frac{\pi}{4}]$

72. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}; [0, 1]$

73. Prove o Teorema do Valor Médio para Integrais (Teorema 5.6.2) aplicando o Teorema do Valor Médio (4.8.2) a uma antiderivada F de f .

74. Texto Escreva um parágrafo curto descrevendo as várias maneiras pelas quais a integração e a derivação podem ser vistas como processos inversos. (Discuta ambas as integrais, definidas e indefinidas.)

75. Texto Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e seja x^* o ponto garantido pelo Teorema do Valor Médio para Integrais. Explique geometricamente por que $f(x^*)$ pode ser interpretado como um “valor médio” de $f(x)$ em $[a, b]$. (Na Seção 5.8, discutiremos o conceito de “valor médio” mais detalhadamente.)

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.6

1. (a) $F(b) - F(a)$ (b) $F(b) - F(a)$ (c) $f(x)$ 2. (a) 4 (b) 0 (c) $\sqrt{5} - 1$ (d) $\pi/3$ 3. 0 4. 150

5.7 MOVIMENTO RETILÍNEO REVISTO USANDO INTEGRAÇÃO

Na Seção 4.6, usamos a derivada para definir as noções de velocidade e aceleração instantâneas para uma partícula em movimento retilíneo. Nesta seção, retomaremos o estudo de tal movimento utilizando as ferramentas da integração.

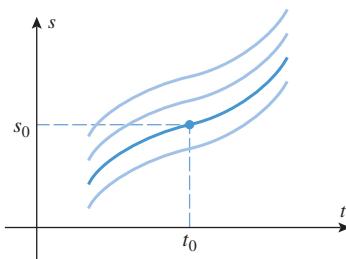
■ ENCONTRANDO POSIÇÃO E VELOCIDADE POR INTEGRAÇÃO

Lembre que, na Seção 4.6 (ver Fórmulas (1) e (3)), vimos que, se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função posição $s(t)$, então sua velocidade e aceleração instantâneas são dadas pelas fórmulas

$$v(t) = s'(t) \quad \text{e} \quad a(t) = v'(t)$$

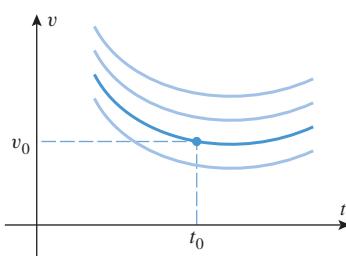
Segue dessas fórmulas que $s(t)$ é uma antiderivada de $v(t)$ e que $v(t)$ é uma antiderivada de $a(t)$, ou seja,

$$s(t) = \int v(t) dt \quad \text{e} \quad v(t) = \int a(t) dt \quad (1-2)$$



Há uma única função posição tal que $s(t_0) = s_0$.

Figura 5.7.1



Há uma única função velocidade tal que $v(t_0) = v_0$.

Figura 5.7.2

Pela Fórmula (1), se conhecermos a função velocidade $v(t)$ de uma partícula em movimento retilíneo, então a integração de $v(t)$ produz uma família de funções posição com aquela função velocidade. Se, além disso, soubermos a posição s_0 da partícula em algum instante t_0 , então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função posição (Figura 5.7.1). Analogamente, se conhecermos a função aceleração $a(t)$ da partícula, então a integração de $a(t)$ produz uma família de funções velocidade com aquela função aceleração. Se, além disso, soubermos a velocidade v_0 da partícula em algum instante t_0 , então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função velocidade (Figura 5.7.2).

► **Exemplo 1** Uma partícula move-se com velocidade $v(t) = \cos \pi t$ ao longo de um eixo coordenado. Sabendo que a partícula tem a coordenada $s = 4$ no instante $t = 0$, encontre sua função posição.

Solução A função posição é

$$s(t) = \int v(t) dt = \int \cos \pi t dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi t + C$$

Como $s = 4$ quando $t = 0$, tem-se que

$$4 = s(0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} 0 + C = C$$

Assim,

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi t + 4 \quad \blacktriangleleft$$

■ CALCULANDO DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA POR INTEGRAÇÃO

Lembre que o deslocamento de uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um intervalo de tempo é sua coordenada final menos sua coordenada inicial. Assim, se a função

posição da partícula for $s(t)$, então seu deslocamento ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é $s(t_1) - s(t_0)$. Isso pode ser escrito em forma integral como

Lembre que a Fórmula (3) é um caso especial da fórmula

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

de integração de uma taxa de variação.

$$\left[\begin{array}{l} \text{deslocamento} \\ \text{ao longo do} \\ \text{intervalo } [t_0, t_1] \end{array} \right] = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} s'(t) dt = s(t_1) - s(t_0) \quad (3)$$

No entanto, para encontrar a distância percorrida pela partícula ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ (ou seja, o total da distância percorrida no sentido positivo mais a distância percorrida no sentido negativo), precisamos integrar o valor absoluto da função velocidade, ou seja,

$$\left[\begin{array}{l} \text{distância total percorrida} \\ \text{em um intervalo de} \\ \text{tempo } [t_0, t_1] \end{array} \right] = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt \quad (4)$$

Como o valor absoluto da velocidade é a velocidade escalar, podemos, informalmente, resumir as Fórmulas (3) e (4) como segue.

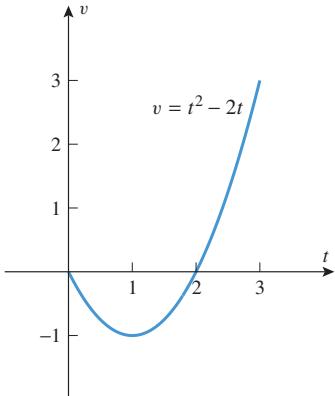


Figura 5.7.3

Integrando a velocidade ao longo de um intervalo de tempo, obtemos o deslocamento; integrando a velocidade escalar ao longo de um intervalo de tempo, obtemos a distância percorrida.

► **Exemplo 2** Uma partícula move-se ao longo de um eixo coordenado de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - 2t$ m/s (Figura 5.7.3).

- Encontre o deslocamento da partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.
- Encontre a distância total percorrida pela partícula no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

Solução (a) A partir de (3), o deslocamento é

$$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_0^3 = 0$$

Assim, em $t = 3$, a partícula está na mesma posição que em $t = 0$.

Solução (b) A velocidade pode ser escrita como $v(t) = t^2 - 2t = t(t - 2)$, logo $v(t) \leq 0$ se $0 \leq t \leq 2$ e $v(t) \geq 0$ se $2 \leq t \leq 3$. Desse modo, segue de (4) que a distância total percorrida é

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)| dt &= \int_0^2 -v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= \int_0^2 -(t^2 - 2t) dt + \int_2^3 (t^2 - 2t) dt \\ &= -\left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_2^3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ m} \end{aligned}$$

Em problemas físicos, é importante associar as unidades corretas às integrais definidas. Em geral, as unidades para a integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

serão unidades de $f(x)$ vezes unidades de x , já que a integral definida é o limite de somas de Riemann, nas quais cada termo tem essas unidades. Por exemplo, se $v(t)$ está em metros por segundo (m/s) e t é dado em segundos (s), então

$$\int_a^b v(t) dt$$

é dada em metros, pois

$$(m/s) \times s = m$$

■ ANALISANDO A CURVA VELOCIDADE VERSUS TEMPO

Na Seção 4.6, mostramos como usar a curva posição versus tempo para obter informações sobre o comportamento de uma partícula em movimento retilíneo (Tabela 4.6.1). Da mesma forma, podem ser obtidas valiosas informações da curva velocidade versus tempo. Por exemplo, a integral em (3) pode ser interpretada, geometricamente, como a área líquida com sinal entre o gráfico de $v(t)$ e o intervalo $[t_0, t_1]$; e a integral em (4), como a área total entre o gráfico de $v(t)$ e o intervalo $[t_0, t_1]$. Assim, temos o seguinte resultado.

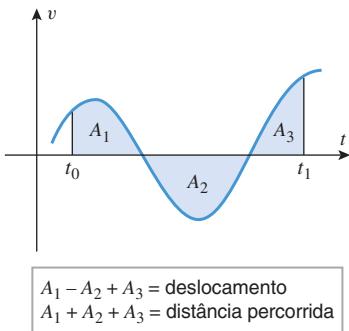


Figura 5.7.4

5.7.1 ENCONTRANDO O DESLOCAMENTO ATRAVÉS DA CURVA VELOCIDADE VERSUS TEMPO

Para uma partícula em movimento retilíneo, a área líquida com sinal entre a curva velocidade *versus* tempo e um intervalo $[t_0, t_1]$ no eixo t representa o deslocamento da partícula nesse intervalo de tempo, e a área total entre a curva velocidade *versus* tempo e o intervalo $[t_0, t_1]$ no eixo t representa a distância percorrida pela partícula nesse intervalo (Figura 5.7.4).

► **Exemplo 3** A Figura 5.7.5 mostra três curvas velocidade *versus* tempo para uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um eixo horizontal com sentido positivo para a direita. Em cada caso, encontre o deslocamento e a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 4$ e explique o que essas informações revelam sobre o movimento da partícula.

Solução (a) Na parte (a) da figura, a área e a área líquida com sinal acima do intervalo são ambas iguais a 2. Assim, no final do período de tempo, a partícula está 2 unidades à direita do ponto inicial e percorreu uma distância de 2 unidades.

Solução (b) Na parte (b) da figura, a área líquida com sinal é -2 e a área total é 2. Assim, no final do período de tempo, a partícula está 2 unidades à esquerda do ponto inicial e percorreu uma distância de 2 unidades.

Solução (c) Na parte (c) da figura, a área líquida com sinal é 0 e a área total é 2. Assim, no final do período de tempo, a partícula está de volta ao ponto inicial e percorreu uma distância de 2 unidades. Mais especificamente, percorreu 1 unidade para a direita ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$ e, depois, 1 unidade para a esquerda ao longo do intervalo de tempo $1 \leq t \leq 2$ (por quê?). ◀

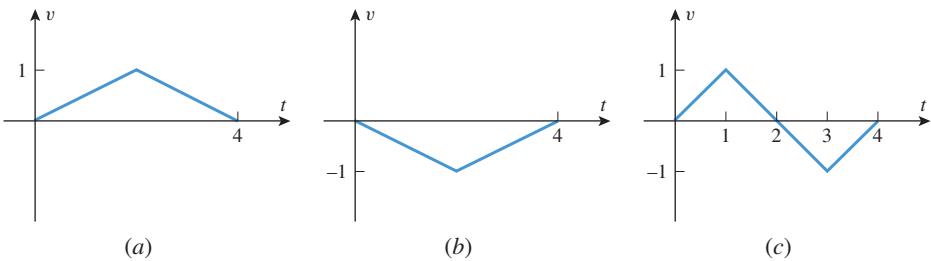


Figura 5.7.5

■ MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Um dos casos mais importantes de movimento retílineo é o movimento uniformemente acelerado, que ocorre quando a partícula tem uma **aceleração constante**. Vamos mostrar que, se uma partícula tiver aceleração constante em seu movimento ao longo de um eixo s , e se forem conhecidas sua posição e velocidade em um certo instante, digamos $t = 0$, então é possível deduzir fórmulas para a posição $s(t)$ e a velocidade $v(t)$ em qualquer instante t . Para ver como isso pode ser feito, vamos supor que a partícula tenha uma aceleração constante

$$a(t) = a \quad (5)$$

e que

$$s = s_0 \quad \text{quando} \quad t = 0 \quad (6)$$

$$v = v_0 \quad \text{quando} \quad t = 0 \quad (7)$$

onde s_0 e v_0 são conhecidos. Chamamos (6) e (7) de **condições iniciais** do movimento.

Tomando (5) como ponto de partida, podemos integrar $a(t)$ para obter $v(t)$ e, por sua vez, integrar $v(t)$ para obter $s(t)$, usando em cada caso as condições iniciais para determinar a constante de integração. Os cálculos são os seguintes:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int a dt = at + C_1 \quad (8)$$

Para determinar a constante de integração C_1 , aplicamos a condição inicial (7) a essa equação para obter

$$v_0 = v(0) = a \cdot 0 + C_1 = C_1$$

Substituindo isso em (8) e colocando em primeiro lugar o termo constante, obtemos

$$v(t) = v_0 + at$$

Como v_0 é constante, tem-se que

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2 \quad (9)$$

Para determinar a constante C_2 , aplicamos a condição inicial (6) a essa equação para obter

$$s_0 = s(0) = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2}a \cdot 0 + C_2 = C_2$$

Substituindo isso em (9) e colocando o termo constante em primeiro lugar, obtemos

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Resumindo, temos o seguinte resultado.

Como podemos deduzir, a partir do gráfico da curva velocidade versus tempo, se uma partícula movendo-se ao longo de uma reta tem movimento uniformemente acelerado?

5.7.2 MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Se uma partícula se move com uma aceleração constante a ao longo de um eixo s , e se s_0 e v_0 forem, respectivamente, a posição e a velocidade no instante $t = 0$, então as funções posição e velocidade da partícula são

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (10)$$

$$v(t) = v_0 + at \quad (11)$$

► **Exemplo 4** Suponha que uma nave espacial intergaláctica use uma vela e o “vento solar” para produzir uma aceleração constante de $0,032 \text{ m/s}^2$. Supondo que a velocidade da nave seja de 10.000 m/s quando a vela é desfraldada pela primeira vez, quanto longe a nave viajará em uma hora e qual será sua velocidade ao final dessa hora?

Solução Nesse problema, a escolha de um eixo de coordenadas está a nosso critério; logo, vamos escolhê-lo de forma a tornar os cálculos tão simples quanto possível. Consequentemente, vamos introduzir um eixo s cujo sentido positivo esteja na direção do movimento e escolher a origem coincidente com a posição da nave em $t = 0$ quando a vela for desfraldada. Assim, as Fórmulas (10) e (11) para o movimento uniformemente acelerado podem ser aplicadas com

$$s_0 = s(0) = 0, \quad v_0 = v(0) = 10.000 \quad \text{e} \quad a = 0,032$$

Como 1 hora corresponde a 3.600 segundos, tem-se a partir de (10) que em 1 hora a nave percorre a distância de

$$s(3.600) = 10.000(3.600) + \frac{1}{2}(0,032)(3.600)^2 \approx 36.200.000 \text{ m}$$

e a partir de (11) tem-se que, após 1 hora, a velocidade é de

$$v(3.600) = 10.000 + (0,032)(3.600) \approx 10.100 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

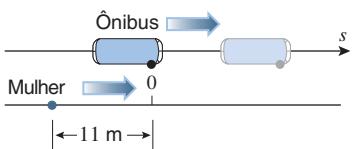


Figura 5.7.6

Exemplo 5 Um ônibus para receber passageiros, e uma mulher tenta alcançá-lo correndo a uma velocidade constante de 5 m/s. Quando ela está a 11 m da porta dianteira, o ônibus parte com uma aceleração constante de 1 m/s^2 . A partir daí, quanto tempo ela levará para chegar até a porta, se continuar a correr com a velocidade de 5 m/s?

Solução Conforme mostra a Figura 5.7.6, escolha o eixo s de tal forma que o ônibus e a mulher se movimentem no sentido positivo e a porta dianteira esteja na origem em $t = 0$, quando ele começa a se movimentar. Para pegar o ônibus depois de algum tempo t , a mulher terá de percorrer uma distância $s_w(t)$ que é igual a 11 metros mais a distância $s_b(t)$ percorrida pelo ônibus; isto é, ela irá alcançar o ônibus quando

$$s_w(t) = s_b(t) + 11 \quad (12)$$

Como a mulher tem uma velocidade constante de 5 m/s, a distância percorrida por ela em t segundos é $s_w(t) = 5t$. Assim, podemos escrever (12) como

$$s_b(t) = 5t - 11 \quad (13)$$

Como o ônibus tem uma aceleração constante de $a = 1 \text{ m/s}^2$ e como $s_0 = v_0 = 0$ em $t = 0$ (por quê?), tem-se, a partir de (10), que

$$s_b(t) = \frac{1}{2}t^2$$

Substituindo essa equação em (13) e reorganizando os termos, obtemos a equação quadrática

$$\frac{1}{2}t^2 - 5t + 11 = 0 \quad \text{ou} \quad t^2 - 10t + 22 = 0$$

Resolvendo essa equação através da fórmula quadrática, obtemos duas soluções:

$$t = 5 - \sqrt{3} \approx 3,3 \quad \text{e} \quad t = 5 + \sqrt{3} \approx 6,7$$

(verifique). Assim, a mulher pode alcançar a porta do ônibus em dois instantes diferentes, $t = 3,3 \text{ s}$ e $t = 6,7 \text{ s}$. A explicação para duas soluções é a seguinte: quando a mulher alcança a porta do ônibus pela primeira vez, ela está mais rápida do que o ônibus e pode passar pela porta sem que o motorista perceba. No entanto, à medida que o ônibus aumenta sua velocidade, ele acaba por alcançá-la e a mulher poderá emparelhar com a porta do ônibus novamente. ▶

O MODELO DE QUEDA LIVRE

Quando, a um objeto na proximidade da Terra, for conferida uma velocidade inicial vertical (para cima ou para baixo) e, em seguida, ele for deixado livre em um movimento vertical, dizemos que seu movimento é um **movimento de queda livre**. Na modelagem do movimento de queda livre, supomos que a única força atuando no objeto é a da gravidade terrestre, e que o objeto permaneça suficientemente próximo da Terra para que essa força gravitacional seja constante. Em particular, desprezamos a resistência do ar e a atração gravitacional de outros corpos celestes.

Em nosso modelo, ignoramos o tamanho físico do objeto, tratando-o como se fosse uma partícula, e supomos que o objeto se move ao longo de um eixo s cuja origem está na superfície da Terra e cujo sentido positivo é para cima. Com essa convenção, a coordenada s da partícula é a altura desta acima da superfície da Terra (Figura 5.7.7).

É um fato da Física que uma partícula em movimento de queda livre tem aceleração constante. A magnitude dessa constante, denotada pela letra g , é chamada de **constante de gravitação**, ou **aceleração devida à gravidade**, e é aproximadamente igual a $9,8 \text{ m/s}^2$ ou 32 pés/s^2 , dependendo da unidade de medição da distância.*

Lembre que uma partícula está aumentando a velocidade quando sua velocidade e aceleração têm o mesmo sinal, e diminuindo quando têm sinais opostos. Assim, por ter-

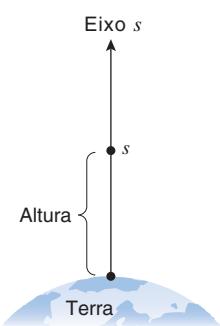


Figura 5.7.7

* De modo preciso, a constante g varia com a latitude e a distância ao centro da Terra. Porém, para movimentos em uma latitude fixa e próximos à superfície da Terra, a hipótese de uma g constante é satisfatória para muitas aplicações.

mos escolhido o sentido positivo para cima, segue que a aceleração $a(t)$ de uma partícula em queda livre é negativa para cada valor de t . De fato, observe que uma partícula em movimento para cima (velocidade positiva) está diminuindo sua velocidade, portanto sua aceleração deve ser negativa; e uma partícula em movimento para baixo (velocidade negativa) está aumentando sua velocidade, portanto, sua aceleração também deve ser negativa. Assim, concluímos que

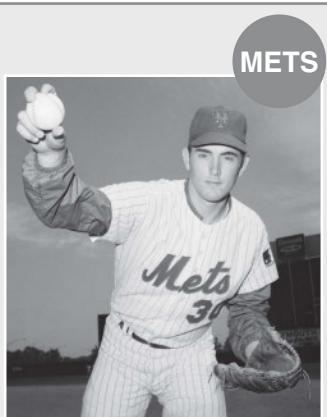
$$a(t) = -g \quad (14)$$

Segue disso, e das Fórmulas (10) e (11) do movimento uniformemente acelerado, que as funções posição e velocidade de uma partícula em movimento de queda livre são

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (15)$$

$$v(t) = v_0 - g t \quad (16)$$

Como seriam alteradas as Fórmulas (14), (15) e (16) se escolhêssemos o sentido positivo do eixo s como sendo para baixo?



Nolan Ryan PITCHER

Corbis.Bettmann

Cartão de beisebol de Nolan Ryan.

A bola no Exemplo 6 sobe quando a velocidade é positiva e desce quando é negativa, de modo que faz sentido físico que a velocidade seja zero quando a bola atinge sua altura máxima.

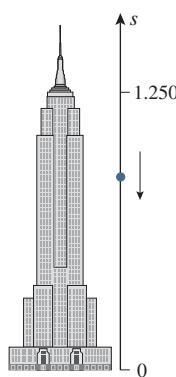


Figura 5.7.8

► Exemplo 6 Um dos lançadores de beisebol mais rápidos de todos os tempos foi Nolan Ryan, que era capaz de atirar uma bola a 150 pés/s (mais de 164 km/h). Durante sua carreira, ele teve a oportunidade de lançar no estádio Houston Astrodome (em Houston, no Texas, Estados Unidos), que foi a sede do Houston Astros de 1965 a 1999. O teto desse estádio coberto estava a 208 pés (cerca de 64 m) acima do campo. Teria sido possível para Nolan Ryan atingi-lo lançando uma bola de beisebol verticalmente com uma velocidade inicial de 100 pés/s a partir de uma altura de 7 pés?

Solução Como a distância está em pés, tomamos $g = 32$ pés/s². Inicialmente, temos $s_0 = 7$ pés e $v_0 = 100$ pés/s, de modo que, por (15) e (16), temos

$$s(t) = 7 + 100t - 16t^2$$

$$v(t) = 100 - 32t$$

A bola subirá até $v(t) = 0$, ou seja, até $100 - 32t = 0$. Resolvendo essa equação, vemos que a bola atinge sua altura máxima no instante $t = \frac{25}{8}$. Para encontrar sua altura nesse instante, substituímos esse valor de t na função posição e obtemos

$$s\left(\frac{25}{8}\right) = 7 + 100\left(\frac{25}{8}\right) - 16\left(\frac{25}{8}\right)^2 = 163,25 \text{ pés}$$

o que significa que faltam aproximadamente 45 pés (cerca de 14 m) para atingir o teto. ◀

► Exemplo 7 Uma moeda é largada a partir do repouso de um ponto próximo ao topo do Empire State Building a uma altura de 1.250 pés do solo (Figura 5.7.8). Supondo que o modelo de queda livre seja aplicável, quanto tempo ela levará para atingir o solo e qual será sua velocidade no momento do impacto?

Solução Como a distância está em pés, tomamos $g = 32$ pés/s². Inicialmente, temos $s_0 = 1.250$ e $v_0 = 0$; assim, a partir de (15),

$$s(t) = 1.250 - 16t^2 \quad (17)$$

O impacto ocorre quando $s(t) = 0$. Resolvendo a equação em t , obtemos

$$1.250 - 16t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{1.250}{16} = \frac{625}{8}$$

$$t = \pm \frac{25}{\sqrt{8}} \approx \pm 8,8 \text{ s}$$

Como $t \geq 0$, podemos descartar a solução negativa e concluir que leva $25/\sqrt{8} \approx 8,8$ s para a moeda atingir o solo. Para encontrar a velocidade no momento do impacto, substituímos $t = 25/\sqrt{8}$, $v_0 = 0$ e $g = 32$ em (16) para obter

$$v\left(\frac{25}{\sqrt{8}}\right) = 0 - 32\left(\frac{25}{\sqrt{8}}\right) = -200\sqrt{2} \approx -282,8 \text{ pés/s}$$

Assim, a velocidade no momento do impacto é

$$\left|v\left(\frac{25}{\sqrt{8}}\right)\right| = 200\sqrt{2} \approx 282,8 \text{ pés/s}$$

que é mais do que 310 km/h. ◀

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.7 (Ver página 384 para respostas.)

- Suponha que uma partícula esteja em movimento ao longo de um eixo s com velocidade $v(t) = 2t + 1$. Se no instante $t = 0$, a partícula estiver na posição $s = 2$, então sua função posição será $s(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Seja $v(t)$ a função velocidade de uma partícula que está em movimento ao longo de um eixo s com aceleração constante $a = -2$. Se $v(1) = 4$, então $v(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Seja $v(t)$ a função velocidade de uma partícula em movimento retilíneo. Suponha que $v(0) = -1$, $v(3) = 2$ e que a curva velocidade versus tempo seja uma reta. O deslocamento da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 3$ é $\underline{\hspace{2cm}}$, e a distância percorrida pela partícula ao longo desse intervalo de tempo é $\underline{\hspace{2cm}}$.
- Segundo o modelo de queda livre, de que altura deve ser largada uma moeda para atingir o solo com uma velocidade escalar de 48 pés/s?

EXERCÍCIOS 5.7

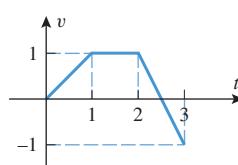
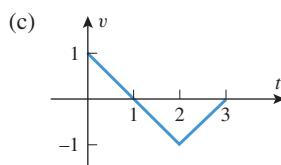
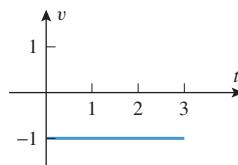
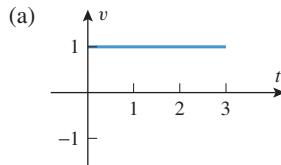


Recurso Gráfico



ENFOCANDO CONCEITOS

- Em cada parte, é dada a curva velocidade versus tempo de uma partícula que se move ao longo de uma reta. Use a curva para encontrar o deslocamento e a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.



- Uma bola é chutada para cima em um plano inclinado e volta à posição original depois de 4 s. Se a distância total percorrida pela bola for de 16 m, esboce a curva de velocidade versus tempo da bola.
- A figura a seguir mostra a curva aceleração versus tempo de uma partícula que se move ao longo de um eixo. Se a velocidade inicial da partícula for de 20 m/s, estime
 - a velocidade no instante $t = 4$ s;
 - a velocidade no instante $t = 6$ s.

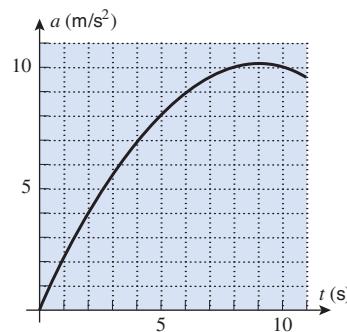


Figura Ex-3

- A figura a seguir mostra a curva velocidade versus tempo no intervalo $1 \leq t \leq 5$ de uma partícula que se move ao longo de um eixo horizontal.
 - O que pode ser dito sobre o sinal de aceleração naquele intervalo de tempo?
 - Quando a partícula está aumentando sua velocidade? E quando está diminuindo?
 - O que pode ser dito sobre a localização da partícula no instante $t = 5$, em relação à localização no instante $t = 1$? Explique seu raciocínio.

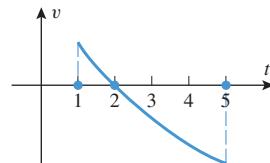


Figura Ex-4

5-8 Uma partícula move-se ao longo de um eixo s . Use a informação dada para encontrar sua função posição. ■

5. (a) $v(t) = 3t^2 - 2t$; $s(0) = 1$
 (b) $a(t) = 3 \operatorname{sen} 3t$; $v(0) = 3$; $s(0) = 3$
6. (a) $v(t) = 1 + \operatorname{sen} t$; $s(0) = -3$
 (b) $a(t) = t^2 - 3t + 1$; $v(0) = 0$; $s(0) = 0$
7. (a) $v(t) = 3t + 1$; $s(2) = 4$
 (b) $a(t) = t^{-2}$; $v(1) = 0$; $s(1) = 2$
8. (a) $v(t) = t^{2/3}$; $s(8) = 0$
 (b) $a(t) = \sqrt{t}$; $v(4) = 1$; $s(4) = -5$

9-12 Uma partícula move-se com uma velocidade de $v(t)$ m/s ao longo de um eixo s . Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo. ■

9. (a) $v(t) = \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq \pi/2$
 (b) $v(t) = \cos t$; $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$
10. (a) $v(t) = 3t - 2$; $0 \leq t \leq 2$
 (b) $v(t) = |1 - 2t|$; $0 \leq t \leq 2$
11. (a) $v(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$; $0 \leq t \leq 3$
 (b) $v(t) = \sqrt{t} - 2$; $0 \leq t \leq 3$

12. (a) $v(t) = t - \sqrt{t}$; $0 \leq t \leq 4$
 (b) $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$; $0 \leq t \leq 3$

13-16 Uma partícula move-se com aceleração $a(t)$ m/s² ao longo de um eixo s e tem velocidade v_0 m/s no instante $t = 0$. Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo. ■

13. $a(t) = 3$; $v_0 = -1$; $0 \leq t \leq 2$
14. $a(t) = t - 2$; $v_0 = 0$; $1 \leq t \leq 5$
15. $a(t) = 1/\sqrt{3t+1}$; $v_0 = \frac{4}{3}$; $1 \leq t \leq 2$
16. $a(t) = \operatorname{sen} t$; $v_0 = 1$; $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$

17. Em cada parte, use a informação dada para encontrar a posição, a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração no instante $t = 1$.

- (a) $v = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t$; $s = 0$ quando $t = 0$
 (b) $a = -3t$; $s = 1$ e $v = 0$ quando $t = 0$
18. Em cada parte, use a informação dada para encontrar a posição, a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração no instante $t = 1$.
 - (a) $v = \cos \frac{1}{3}\pi t$; $s = 0$ quando $t = \frac{3}{2}$
 - (b) $a = 4e^{2t-2}$; $s = 1/e^2$ e $v = (2/e^2) - 3$ quando $t = 0$

19. Suponha que a velocidade de uma formiga correndo ao longo da beirada de um muro seja modelada pela função

$$v(t) = \begin{cases} 5t, & 0 \leq t < 1 \\ 6\sqrt{t} - \frac{1}{t}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

onde t está em segundos e v está em centímetros por segundo (cm/s). Calcule o(s) instante(s) em que a formiga está a 4 cm de sua posição inicial.

20. Suponha que a velocidade de um camundongo correndo ao longo do rodapé de um quarto seja modelada pela função

$$v(t) = \frac{3}{t^2 + 1} - 0,5t, \quad 0 \leq t \leq 6$$

onde t está em segundos e v está em metros por segundo (m/s). (Suponha que valores positivos de v indiquem movimento para a direita.) Calcule o(s) instante(s) em que o camundongo está a 2 m de sua posição inicial.

21. Suponha que a função velocidade uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um eixo s seja $v(t) = 20t^2 - 110t + 120$ m/s e que a partícula esteja na origem no instante $t = 0$. Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para os primeiros 6 segundos de movimento.

22. Suponha que a função aceleração de uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um eixo s seja $a(t) = 4t - 30$ m/s² e que a posição e a velocidade no instante $t = 0$ sejam $s_0 = -5$ m e $v_0 = 3$ m/s. Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para os primeiros 25 segundos de movimento.

23-26 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. Cada afirmação se refere a uma partícula em movimento retilíneo. ■

23. Se a partícula tiver aceleração constante, então o gráfico da velocidade *versus* tempos será uma reta.
24. Se a partícula tiver aceleração constante não nula, então o gráfico da posição *versus* tempos será uma parábola.
25. Se a área total entre o gráfico da velocidade *versus* tempo e um intervalo de tempo $[a, b]$ for positiva, então o deslocamento da partícula nesse intervalo de tempo será não nulo.
26. Se $D(t)$ denotar a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $[0, t]$, então $D(t)$ é uma antiderivada da velocidade da partícula.

C 27-30 Para cada função velocidade $v(t)$ dada:

- (a) Gere a curva velocidade *versus* tempo e use-a para fazer uma conjectura sobre o sinal do deslocamento sobre os intervalos de tempo dados.
- (b) Use um CAS para encontrar o deslocamento. ■
27. $v(t) = 0,5 - t \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 5$
28. $v(t) = 0,5 - t \cos \pi t$; $0 \leq t \leq 1$
29. $v(t) = 0,5 - te^{-t}$; $0 \leq t \leq 5$
30. $v(t) = t \ln(t + 0,1)$; $0 \leq t \leq 1$
31. Suponha que em $t = 0$ uma partícula esteja na origem de um eixo x com uma velocidade $v_0 = 25$ cm/s. Nos primeiros 4 segundos, não há aceleração e, então, uma força retardadora age produzindo uma aceleração negativa constante de $a = -10$ cm/s².
 - (a) Esboce a curva aceleração *versus* tempo no intervalo $0 \leq t \leq 12$.
 - (b) Esboce a curva velocidade *versus* tempo no intervalo $0 \leq t \leq 12$.
 - (c) Encontre a coordenada x da partícula nos instantes $t = 8$ s e $t = 12$ s.

- (d) Qual é a coordenada x máxima da partícula no intervalo $0 \leq t \leq 12$?

32-38 Nestes exercícios, suponha que o objeto move-se com aceleração constante no sentido positivo de um eixo. Aplique as Fórmulas (10) e (11) conforme for apropriado. Em alguns dos problemas, você necessitará da relação $88 \text{ pés/s} = 60 \text{ mi/h}$. ■

- 32.** Um carro percorrendo uma estrada reta a 60 mi/h desacelera a uma taxa constante de 11 pés/s^2 .
- Quanto tempo irá levar para a velocidade ser de 45 mi/h ?
 - Qual é a distância que o carro irá percorrer antes de parar?
- 33.** Avistando a polícia, um motorista freia seu carro novo para reduzir a velocidade de 90 mi/h a 60 mi/h , a uma taxa constante ao longo de uma distância de 200 pés .
- Encontre a aceleração em pés/s^2 .
 - Quanto tempo irá levar para reduzir a velocidade a 55 mi/h ?
 - Com a aceleração obtida em (a), quanto tempo levaria para parar completamente o carro partindo das 90 mi/h ?
- 34.** Uma partícula movendo-se ao longo de uma reta está sendo acelerada a uma taxa constante de 5 m/s^2 . Encontre sua velocidade inicial se ela percorre 60 metros nos primeiros 4 segundos.
- 35.** Um motociclista, partindo do repouso, aumenta sua velocidade com uma aceleração constante de $2,6 \text{ m/s}^2$. Após ter percorrido 120 m , ele diminui a velocidade com uma aceleração constante de $-1,5 \text{ m/s}^2$ até atingir a velocidade de 12 m/s . Qual é a distância percorrida pelo motociclista até esse instante?
- 36.** Uma corredora dos 100 m arranca com uma aceleração de $4,0 \text{ m/s}^2$, a qual mantém por 2 segundos. Sua aceleração, então, cai para zero pelo restante da prova.
- Qual foi o seu tempo de corrida?
 - Faça um gráfico da distância a partir da arrancada *versus* tempo.
- 37.** Um carro, após ter parado no guichê do pedágio, saiu com uma aceleração constante de 4 pés/s^2 . No instante em que deixa o guichê, está a 2.500 pés de um caminhão viajando a uma velocidade constante de 50 pés/s . Quanto tempo o carro irá levar para alcançar o caminhão, e qual será a distância percorrida desde o guichê até esse instante?
- 38.** Na etapa final de uma corrida de barcos a remo, o desafiante está remando a uma velocidade constante de 12 m/s . No momento em que está a 100 m da linha de chegada, com o desafiante 15 m atrás, o líder está remando a 8 m/s , mas começa a acelerar constantemente a $0,5 \text{ m/s}^2$. Quem vencerá a prova?
- 39-45** Suponha que o modelo de queda livre se aplique. Resolva estes exercícios aplicando as Fórmulas (15) e (16) quando apropriado. Nestes exercícios, tome $g = 32 \text{ pés/s}^2$ ou $9,8 \text{ m/s}^2$, dependendo das unidades. ■
- 39.** Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do solo com uma velocidade inicial de 112 pés/s .
- Encontre a velocidade em $t = 3 \text{ s}$ e $t = 5 \text{ s}$.

- (b) Qual é a altura máxima atingida pelo projétil?
(c) Encontre a velocidade do projétil quando ele atingir o solo.

- 40.** Uma pedra lançada para baixo de uma altura de 112 pés atingiu o solo em 2 s . Qual é a sua velocidade inicial?
- 41.** Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do solo, com uma velocidade inicial de 16 pés/s .
- Quanto tempo irá levar para o projétil atingir o solo?
 - Por quanto tempo o projétil estará se movendo para cima?
- 42.** Em 1939, Joe Sprinz do Seals Baseball Club, de San Francisco, Estados Unidos, tentou pegar uma bola largada de um dirigível a uma altura de 800 pés (com a intenção de quebrar um recorde anterior).
- Quanto tempo levou para a bola cair os 800 pés ?
 - Qual era a velocidade da bola em milhas por hora após os 800 pés ($88 \text{ pés/s} = 60 \text{ mi/h}$)?
- [Nota: Na prática, não é possível ignorar a resistência do ar neste problema; porém, mesmo com o amortecimento devido à resistência do ar, o impacto da bola fez com que a luva de Sprinz batesse em seu rosto, fraturando o maxilar superior em 12 lugares, quebrando 5 dentes e fazendo-o cair inconsciente. Ele largou a bola!]
- 43.** Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do chão com uma velocidade inicial de 60 m/s .
- Quanto tempo leva para o projétil atingir o seu ponto mais alto?
 - A que altura chega o projétil?
 - Quanto tempo leva o projétil para cair no chão a partir do ponto mais alto?
 - Qual é a velocidade escalar do projétil ao atingir o chão?
- 44.** (a) Use os resultados do Exercício 43 para fazer uma conjectura sobre a relação entre as velocidades inicial e final de um projétil que é lançado verticalmente para cima a partir do nível do chão e retorna para o chão.
- Prove sua conjectura.
- 45.** Um projétil é disparado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 49 m/s , do alto de uma torre com 150 m de altura.
- Quanto tempo irá levar para ele atingir a altura máxima?
 - Qual é a altura máxima?
 - Quanto tempo o projétil irá levar para passar pelo ponto de partida na descida?
 - Qual será a velocidade quando ele passar pelo ponto de partida na descida?
 - Quanto tempo o projétil irá levar para atingir o solo?
 - Qual será a sua velocidade no impacto?
- 46.** **Texto** Enumere as características importantes de um gráfico da velocidade *versus* tempo e interprete cada característica em termos do movimento.
- 47.** **Texto** Use somas de Riemann para argumentar informalmente que integrar a velocidade escalar num intervalo de tempo produz a distância percorrida.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.7

1. $t^2 + t + 2$ 2. $6 - 2t$ 3. $\frac{3}{2}; \frac{5}{2}$ 4. 36 pés

5.8 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

Nesta seção, definiremos a noção de “valor médio” de uma função e apresentaremos várias aplicações dessa ideia.

■ VELOCIDADE MÉDIA REVISTA

Seja $s = s(t)$ a função posição de uma partícula em movimento retilíneo. Na Seção 2.1, definimos a velocidade média v_m da partícula sobre um intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ como sendo

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Denotemos por $v(t) = s'(t)$ a função velocidade da partícula. Na Seção 5.7, vimos que a integral de $s'(t)$ ao longo de um intervalo de tempo dá o deslocamento da partícula sobre esse intervalo. Assim,

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} s'(t) dt = s(t_1) - s(t_0)$$

Segue que

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \quad (1)$$

► Exemplo 1 Suponha que uma partícula em movimento retilíneo tenha uma velocidade no instante t dada por $v(t) = 2 + \cos t$. Encontre a velocidade média da partícula sobre o intervalo de tempo $0 \leq t \leq \pi$.

Solução Por (1), a velocidade média é

$$\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi (2 + \cos t) dt = \frac{1}{\pi} [2t + \sin t]_0^\pi = \frac{1}{\pi} (2\pi) = 2 \quad \blacktriangleleft$$

Veremos que a Fórmula (1) é um caso especial de uma fórmula do que denominaremos *valor médio* de uma função contínua num dado intervalo.

■ VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA

Em trabalhos científicos, muitas vezes as informações numéricas são resumidas calculando-se algum tipo de *média* ou *valor médio* dos dados observados. Há vários tipos de média, porém, a mais comum é a **média aritmética**, formada somando-se os dados e dividindo-se pelo número deles. Assim, a média aritmética \bar{a} dos n números a_1, a_2, \dots, a_n é

$$\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

No caso em que os a_k são valores de uma função f , digamos

$$a_1 = f(x_1), a_2 = f(x_2), \dots, a_n = f(x_n)$$

então a média aritmética \bar{a} desses valores da função é

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Vamos mostrar agora como ampliar esse conceito de tal forma que possamos calcular não somente a média aritmética de um número finito de valores da função, mas também uma média de *todos* os valores de $f(x)$ quando x varia em um intervalo fechado $[a, b]$. Com esse propósito, lembre-se do Teorema do Valor Médio para Integrais (5.6.2), que afirma que, se f for contínua no intervalo $[a, b]$, então existirá pelo menos um ponto x^* nesse intervalo tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a)$$

A quantidade

$$f(x^*) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

será nossa candidata a valor médio de f acima do intervalo $[a, b]$. Para explicar o que motiva isso, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (2)$$

e, nos sucessivos subintervalos, vamos escolher pontos arbitrários $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Então, a média aritmética dos números $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ é

$$\text{média} = \frac{1}{n} [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)]$$

ou, por (2),

$$\text{média} = \frac{1}{b - a} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x] = \frac{1}{b - a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b - a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

Como essa equação descreve o que acontece quando calculamos a média “com cada vez mais” valores de $f(x)$, somos levados à definição seguinte.

Observe que o Teorema do Valor Médio para Integrais, quando expresso na forma (3), garante haver pelo menos um ponto x^* em $[a, b]$ no qual o valor de f é igual ao seu valor médio no intervalo.

5.8.1 DEFINIÇÃO Se f for contínua em $[a, b]$, então o **valor médio** de f em $[a, b]$ é definido por

$$f_m = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

OBSERVAÇÃO

Se f for não negativa em $[a, b]$, a quantidade f_m tem uma interpretação geométrica simples, que pode ser vista escrevendo (3) como

$$f_m \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

O lado esquerdo dessa equação é a área de um retângulo de altura f_m e comprimento da base $b - a$, e o lado direito é a área sob $y = f(x)$ e acima de $[a, b]$. Assim, f_m é a altura de um retângulo construído sobre o intervalo $[a, b]$, cuja área é a mesma que aquela sob o gráfico de f naquele intervalo (Figura 5.8.1).

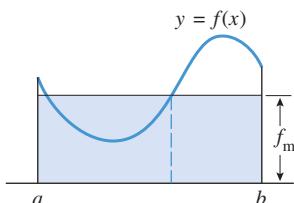
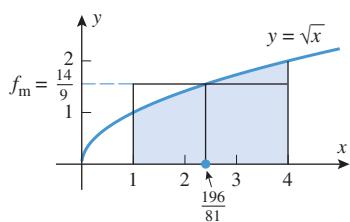
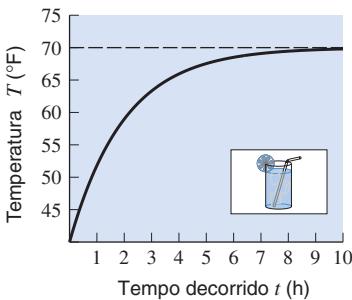


Figura 5.8.1

► **Exemplo 2** Encontre o valor médio da função $f(x) = \sqrt{x}$ acima do intervalo $[1, 4]$ e obtenha todos os pontos do intervalo nos quais o valor de f é igual ao valor médio.

Solução**Figura 5.8.2****Figura 5.8.3**

No Exemplo 3, a temperatura T da limonada aumenta desde uma temperatura inicial de 40°F até a temperatura ambiente de 70°F . Explique por que a fórmula

$$T = 70 - 30e^{-0.5t}$$

é um bom modelo para essa situação.

► Exemplo 3 Um copo de limonada a uma temperatura de 40°F é deixado em uma sala cuja temperatura constante é de 70°F . Usando um princípio da Física denominado **Lei do Resfriamento de Newton**, pode-se mostrar que, se a temperatura da limonada atingir os 52°F em uma hora, então sua temperatura T como função do tempo decorrido pode ser modelada pela equação

$$T = 70 - 30e^{-0.5t}$$

em que T está em graus Fahrenheit e t , em horas. O gráfico dessa equação, mostrado na Figura 5.8.3, confirma nossa experiência do dia a dia de que a temperatura da limonada converge gradualmente à temperatura da sala. Encontre a temperatura média T_m da limonada ao longo das primeiras 5 horas.

Solução Pela Definição 5.8.1, o valor médio de T no intervalo $[0, 5]$ é

$$T_m = \frac{1}{5} \int_0^5 (70 - 30e^{-0.5t}) dt \quad (4)$$

Para calcular a integral definida, inicialmente encontramos a integral indefinida

$$\int (70 - 30e^{-0.5t}) dt$$

fazendo a substituição

$$u = -0.5t \quad \text{de modo que} \quad du = -0.5 dt \quad (\text{ou} \quad dt = -2 du)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int (70 - 30e^{-0.5t}) dt &= \int (70 - 30e^u)(-2) du = -2(70u - 30e^u) + C \\ &= -2[70(-0.5t) - 30e^{-0.5t}] + C = 70t + 60e^{-0.5t} + C \end{aligned}$$

e (4) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{5} [70t + 60e^{-0.5t}]_0^5 = \frac{1}{5} [(350 + 60e^{-2.5}) - 60] \\ &= 58 + 12e^{-2.5} \approx 59^{\circ}\text{F} \end{aligned}$$

■ VALOR MÉDIO E VELOCIDADE MÉDIA

Agora, dispomos de duas maneiras para calcular a velocidade média de uma partícula em movimento retilíneo, pois

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \quad (5)$$

e ambas essas expressões são iguais à velocidade média. O lado esquerdo de (5) dá a taxa de variação média de s ao longo de $[t_0, t_1]$, enquanto o lado direito dá o valor médio de $v = s'$

no intervalo $[t_0, t_1]$. Isto é, a *velocidade média de uma partícula ao longo de um intervalo de tempo $[t_0, t_1]$* é igual ao valor médio da função velocidade nesse intervalo.

Como as funções velocidade costumam ser contínuas, segue da observação à margem da Definição 5.8.1 que a velocidade média de uma partícula ao longo de um intervalo de tempo é igual à sua velocidade em algum instante de tempo daquele intervalo.

► Exemplo 4 Mostre que, se um corpo largado do repouso (velocidade inicial nula) está em movimento de queda livre, então sua velocidade média no intervalo de tempo $[0, T]$ de sua queda é sua velocidade no instante $t = T/2$.

Solução Segue, da Fórmula (16) da Seção 5.7, com $v_0 = 0$, que a função velocidade do corpo é $v(t) = -gt$. Assim, sua velocidade média no intervalo de tempo $[0, T]$ é

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{T - 0} \int_0^T v(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T -gt dt \\ &= -\frac{g}{T} \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^T = -g \cdot \frac{T}{2} = v\left(\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

O resultado do Exemplo 4 pode ser generalizado para mostrar que a velocidade média de uma partícula em movimento uniformemente acelerado ao longo de um intervalo de tempo $[a, b]$ é a velocidade no instante $t = (a + b)/2$. (Ver Exercício 18.)

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.8 (Ver página 390 para respostas.)

1. A média aritmética dos n números a_1, a_2, \dots, a_n é _____.
2. Se f for contínua em $[a, b]$, então o valor médio de f em $[a, b]$ será _____.
3. Se f for contínua em $[a, b]$, então o Teorema do Valor Médio para Integrais garante que, em pelo menos um ponto x^* de $[a, b]$, _____ será igual ao valor médio de f em $[a, b]$.
4. O valor médio de $f(x) = 4x^3$ em $[1, 3]$ é _____.

EXERCÍCIOS 5.8 C CAS

1. (a) Encontre f_m de $f(x) = 2x$ em $[0, 4]$.
 (b) Encontre um ponto x^* em $[0, 4]$ tal que $f(x^*) = f_m$.
 (c) Esboce o gráfico de $f(x) = 2x$ em $[0, 4]$ e construa um retângulo acima do intervalo cuja área seja igual à área abaixo do gráfico de f naquele intervalo.
2. (a) Encontre f_m de $f(x) = x^2$ em $[0, 2]$.
 (b) Encontre um ponto x^* em $[0, 2]$ tal que $f(x^*) = f_m$.
 (c) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2$ em $[0, 2]$ e construa um retângulo acima do intervalo cuja área seja igual à área abaixo do gráfico de f naquele intervalo.

3-12 Encontre o valor médio da função no intervalo dado. ■

- | | |
|--|--|
| 3. $f(x) = 3x$; $[1, 3]$ | 4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $[-1, 8]$ |
| 5. $f(x) = \sin x$; $[0, \pi]$ | 6. $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x$; $[0, \pi/3]$ |
| 7. $f(x) = 1/x$; $[1, e]$ | 8. $f(x) = e^x$; $[-1, \ln 5]$ |
| 9. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $[1, \sqrt{3}]$ | |
| 10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $[-\frac{1}{2}, 0]$ | |

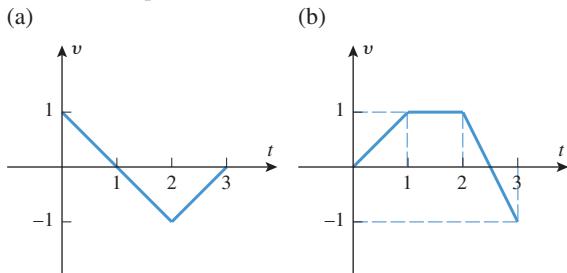
- 11.** $f(x) = e^{-2x}$; $[0, 4]$
- 12.** $f(x) = \sec^2 x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 13.** Seja $f(x) = 3x^2$.
 - (a) Encontre a média aritmética dos valores $f(0,4), f(0,8), f(1,2), f(1,6)$ e $f(2,0)$.
 - (b) Encontre a média aritmética dos valores $f(0,1), f(0,2), f(0,3), \dots, f(2,0)$.
 - (c) Encontre o valor médio de f em $[0, 2]$.
 - (d) Explique por que a resposta em (c) é menor do que as respostas em (a) e (b).
- 14.** Nas partes (a)-(d), seja $f(x) = 1 + (1/x)$.
 - (a) Encontre a média aritmética dos valores $f(\frac{6}{5}), f(\frac{7}{5}), f(\frac{8}{5}), f(\frac{9}{5})$ e $f(2)$.
 - (b) Encontre a média aritmética dos valores $f(1,1), f(1,2), f(1,3), \dots, f(2)$.
 - (c) Encontre o valor médio de f em $[1, 2]$.

- (d) Explique por que a resposta em (c) é maior do que as respostas em (a) e (b).

15. Em cada parte, é dada a curva velocidade *versus* tempo de uma partícula em movimento retilíneo. Use a curva para encontrar a velocidade média da partícula ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.



16. Suponha que uma partícula em movimento retilíneo parte do repouso e tenha uma velocidade média de 2 m/s ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$. Esboce uma curva velocidade *versus* tempo para a partícula, supondo que a partícula também está em repouso no instante $t = 5$. Explique por que sua curva satisfaz as propriedades solicitadas.

17. Seja f uma função linear. Use o gráfico de f para explicar por que o valor médio de f em $[a, b]$ é

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

18. Suponha que uma partícula move-se ao longo de uma reta coordenada com aceleração constante. Mostre que a velocidade média da partícula ao longo do intervalo $[a, b]$ é igual à velocidade que ela tem no ponto médio do intervalo.

19-22 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. (Suponha que f e g denotem funções contínuas num intervalo $[a, b]$ e que f_m e g_m denotem os respectivos valores médios de f e g em $[a, b]$.) ■

19. Se $g_m < f_m$, então $g(x) \leq f(x)$ em $[a, b]$.

20. O valor médio de um múltiplo constante de f é o mesmo múltiplo de f_m , ou seja, se c for uma constante qualquer,

$$(c \cdot f)_m = c \cdot f_m$$

21. O valor médio da soma de duas funções num intervalo é a soma dos valores médios das duas funções no intervalo; ou seja,

$$(f + g)_m = f_m + g_m$$

22. O valor médio do produto de duas funções num intervalo é o produto dos valores médios das duas funções no intervalo, ou seja,

$$(f \cdot g)_m = f_m \cdot g_m$$

23. (a) Suponha que a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $v(t) = 3t^3 + 2$.

Encontre a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1 \leq t \leq 4$ por integração.

- (b) Suponha que a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $s(t) = 6t^2 + t$. Encontre a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1 \leq t \leq 4$ algebricamente.

24. (a) Suponha que a função aceleração de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $a(t) = t + 1$. Encontre a aceleração média da partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$ por integração.

- (b) Suponha que a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $v(t) = \cos t$. Encontre a aceleração média da partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq \pi/4$ algebricamente.

25. A água está fluindo a uma taxa constante de $1 \text{ pé}^3/\text{min}$ para encher um tanque cilíndrico com 3 pés de raio e 5 pés de altura. Supondo que o tanque esteja vazio inicialmente, faça uma conjectura sobre o peso médio da água nele no intervalo de tempo necessário para enchê-lo e verifique-a por integração. [Considere a densidade específica da água como sendo de $62,4 \text{ libras por pé cúbico}$.]

26. (a) A temperatura de uma barra de metal com 10 metros de comprimento é de 15°C em uma ponta e de 30°C na outra. Supondo que a temperatura aumenta linearmente do extremo mais frio para o mais quente, qual é a temperatura média da barra?

- (b) Explique por que deve haver um ponto na barra em que a temperatura é igual à média; encontre-o.

27. Uma engenheira de tráfego monitora o trânsito durante uma hora do horário de pico da tarde. A partir de seus dados, ela estima que, entre as $4h30$ e as $5h30$ da tarde, a taxa $R(t)$ segundo a qual os carros entram em uma certa via expressa é dada pela fórmula $R(t) = 100(1 - 0,0001t^2)$ carros por minuto, onde t é o tempo (em minutos) desde as $4h30$. Encontre a taxa média, em carros por minuto, segundo a qual os carros entram na via expressa entre as $4h30$ e as 5 horas da tarde.

28. Suponha que o valor em dólares de um iate com t anos de uso seja $V(t) = 275.000e^{-0.17t}$. Qual é o valor médio do iate ao longo de seus primeiros 10 anos de uso?

29. Um grande copo contendo 60 ml de suco de laranja está sendo reabastecido com mais suco. A Figura Ex-29 mostra a taxa segundo a qual o suco está sendo vertido no copo em mililitros por segundo (ml/s). Mostre que a taxa de variação média do volume de suco no copo durante esses 5 s é igual ao valor médio da taxa de fluxo do suco para dentro do copo.

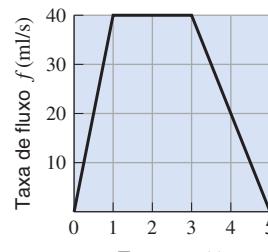


Figura Ex-29

- C** 30. A função J_0 definida por

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$$

é chamada de *função de Bessel de ordem zero*.

- (a) Encontre uma função f e um intervalo $[a, b]$ para o qual $J_0(1)$ seja o valor médio de f sobre $[a, b]$.
 - (b) Dê uma estimativa para $J_0(1)$.
 - (c) Use um CAS para traçar o gráfico de $y = J_0(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 8$.
 - (d) Dê uma estimativa para o menor zero positivo de J_0 .
31. Encontre um valor positivo de k com o qual o valor médio de $f(x) = \sqrt{3x}$ acima do intervalo $[0, k]$ seja 6.

32. Suponha que um tumor cresça a uma taxa de $r(t) = kt$ gramas por semana, para alguma constante positiva k , onde t indica o número de semanas desde que ele surgiu. Quando, durante as semanas 27 a 52, o peso do tumor é igual ao peso médio durante essas 26 semanas?

33. **Texto** Considere a afirmação seguinte: *O valor médio da taxa de variação de uma função em um intervalo é igual à taxa de variação média da função nesse intervalo*. Escreva um parágrafo curto explicando por que essa afirmação pode ser interpretada como uma reformulação da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

34. **Texto** Se um automóvel alcança uma média de 12 km por litro de gasolina, então também ocorre que, em média, esse automóvel gasta 1/12 de litro por km. Interprete essa afirmação usando o conceito de valor médio de uma função em um intervalo.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.8

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ 2. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 3. $f(x^*)$ 4. 40

5.9 CALCULANDO INTEGRAIS DEFINIDAS POR SUBSTITUIÇÃO

Nesta seção, discutiremos dois métodos para calcular integrais definidas em que é necessária uma substituição.

■ DOIS MÉTODOS PARA FAZER SUBSTITUIÇÕES EM INTEGRAIS DEFINIDAS

Lembre que, na Seção 5.3, foi visto que integrais indefinidas da forma

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

podem ser calculadas, às vezes, fazendo-se a substituição u

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx \quad (1)$$

que converte a integral para o formato

$$\int f(u) du$$

Para aplicar esse método a uma integral definida do tipo

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

precisamos levar em conta o efeito da substituição nos limites de integração de x . Há duas maneiras de fazer isso.

Método 1

Determinar primeiro a integral indefinida

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

por substituição, e então usar a relação

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \left[\int f(g(x))g'(x) dx \right]_a^b$$

para calcular a integral definida. Esse procedimento não requer qualquer modificação nos limites de integração.

Método 2

Fazer a substituição (1) diretamente na integral definida e, então, usar a relação $u = g(x)$ para substituir os limites em x , $x = a$ e $x = b$ pelos correspondentes limites em u , $u = g(a)$ e $u = g(b)$. Isso produz uma nova integral definida

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

que está expressa inteiramente em termos de u .

► Exemplo 1 Use os dois métodos acima para calcular $\int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx$.

Solução pelo Método 1

$$u = x^2 + 1, \quad \text{de modo que} \quad du = 2x dx \quad (2)$$

obtemos

$$\int x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{u^4}{8} + C = \frac{(x^2 + 1)^4}{8} + C$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx &= \left[\int x(x^2 + 1)^3 dx \right]_{x=0}^2 \\ &= \left. \frac{(x^2 + 1)^4}{8} \right|_{x=0}^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78 \end{aligned}$$

Solução pelo Método 2 Se fizermos a substituição $u = x^2 + 1$ em (2), então

$$\text{se } x = 0, \quad u = 1$$

$$\text{se } x = 2, \quad u = 5$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx &= \frac{1}{2} \int_1^5 u^3 du \\ &= \left. \frac{u^4}{8} \right|_{u=1}^5 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78 \end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado obtido pelo Método 1. ◀

O teorema a seguir estabelece as condições precisas sob as quais o Método 2 pode ser usado.

5.9.1 TEOREMA Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua em um intervalo contendo os valores de $g(x)$ com $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

DEMONSTRAÇÃO Como f é contínua em um intervalo contendo os valores de $g(x)$ com $a \leq x \leq b$, segue que f tem uma antiderivada F nesse intervalo. Tomando $u = g(x)$, a regra da cadeia implica que

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \frac{d}{dx} F(u) = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} = f(u) \frac{du}{dx} = f(g(x))g'(x)$$

em cada x de $[a, b]$. Assim, $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$ em $[a, b]$. Portanto, pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 5.6.1), temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad \blacksquare$$

A escolha do método para calcular uma integral definida por substituição é, geralmente, uma questão de gosto, mas, nos exemplos a seguir, usaremos o segundo método, por ser uma ideia nova.

► **Exemplo 2** Calcule

$$(a) \int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x dx \quad (b) \int_2^5 (2x - 5)(x - 3)^9 dx$$

Solução (a) Seja

$$u = \sin 2x, \text{ portanto } du = 2 \cos 2x dx \quad (\text{ou } \frac{1}{2}du = \cos 2x dx)$$

Com essa substituição, temos que

$$\text{se } x = 0, \quad u = \sin(0) = 0$$

$$\text{se } x = \pi/8, \quad u = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} u^5 du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} \Big|_{u=0}^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6(\sqrt{2})^6} - 0 \right] = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

Solução (b) Seja

$$u = x - 3, \quad \text{portanto } du = dx$$

Desse modo, falta resolver o fator $2x + 5$ no integrando. Contudo,

$$x = u + 3, \quad \text{portanto } 2x - 5 = 2(u + 3) - 5 = 2u + 1$$

Com essa substituição,

$$\text{se } x = 2, \quad u = 2 - 3 = -1$$

$$\text{se } x = 5, \quad u = 5 - 3 = 2$$

e então

$$\begin{aligned} \int_2^5 (2x - 5)(x - 3)^9 dx &= \int_{-1}^2 (2u + 1)u^9 du = \int_{-1}^2 (2u^{10} + u^9) du \\ &= \left[\frac{2u^{11}}{11} + \frac{u^{10}}{10} \right]_{u=-1}^2 = \left(\frac{2^{12}}{11} + \frac{2^{10}}{10} \right) - \left(-\frac{2}{11} + \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{52.233}{110} \approx 474,8 \end{aligned}$$

► **Exemplo 3** Calcule

$$(a) \int_0^{3/4} \frac{dx}{1-x} \quad (b) \int_0^{\ln 3} e^x (1+e^x)^{1/2} dx$$

Solução (a) Seja

$$u = 1 - x, \text{ portanto } du = -dx$$

Com essa substituição, temos que

$$\begin{aligned} \text{se } x = 0, & \quad u = 1 \\ \text{se } x = \frac{3}{4}, & \quad u = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{3/4} \frac{dx}{1-x} &= - \int_1^{1/4} \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| \Big|_{u=1}^{1/4} = -\left[\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \ln(1) \right] = \ln 4 \end{aligned}$$

Solução (b) Fazemos a substituição u

$$u = 1 + e^x, \quad du = e^x dx$$

e trocamos os limites de integração de x ($x = 0, x = \ln 3$) para os limites de u

$$u = 1 + e^0 = 2, \quad u = 1 + e^{\ln 3} = 1 + 3 = 4$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} e^x (1+e^x)^{1/2} dx &= \int_2^4 u^{1/2} du \\ &= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=2}^4 = \frac{2}{3} [4^{3/2} - 2^{3/2}] = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

A substituição u no Exemplo 3(a) produz uma integral em que o limite superior em u é menor do que o limite inferior. Use a Definição 5.5.3(b) para converter essa integral em uma na qual o limite inferior é menor do que o limite superior e verifique que isso produz uma integral com o mesmo valor que a do exemplo.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.9 (Ver página 396 para respostas.)

1. Suponha que g' seja contínua em $[a, b]$ e que f seja contínua em um intervalo que contém os valores de $g(x)$ com $a \leq x \leq b$. Se F for uma antiderivada de f , então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Em cada parte, use a substituição para substituir a integral dada por uma integral que envolva a variável u . (Não calcule a integral.)

$$(a) \int_0^2 3x^2(1+x^3)^3 dx; \quad u = 1+x^3$$

$$(b) \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx; \quad u = 5-x^2$$

$$(c) \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad u = \sqrt{x}$$

3. Calcule a integral fazendo uma substituição apropriada.

$$(a) \int_{-\pi}^0 \sin(3x - \pi) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(b) \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

EXERCÍCIOS 5.9

Recurso Gráfico

CAS

- 1-4 Expressa a integral em termos da variável u , mas não a calcule. ■

$$1. (a) \int_1^3 (2x-1)^3 dx; \quad u = 2x-1$$

$$(b) \int_0^4 3x\sqrt{25-x^2} dx; \quad u = 25-x^2$$

$$(c) \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi\theta) d\theta; \quad u = \pi\theta$$

$$(d) \int_0^1 (x+2)(x+1)^5 dx; \quad u = x+1$$

2. (a) $\int_{-1}^4 (5 - 2x)^8 dx; u = 5 - 2x$
(b) $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx; u = 2 + \cos x$
(c) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx; u = \operatorname{tg} x$
(d) $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx; u = x^2 + 3$
3. (a) $\int_0^1 e^{2x-1} dx; u = 2x - 1$
(b) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx; u = \ln x$
4. (a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{arc tg} x}}{1+x^2} dx; u = \operatorname{arc tg} x$
(b) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}; u = \ln x$

5-18 Calcule a integral definida de duas formas: primeiro com uma substituição u na integral definida e, depois, com uma substituição u na integral indefinida. ■

5. $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$ 6. $\int_1^2 (4x-2)^3 dx$
7. $\int_0^1 (2x-1)^3 dx$ 8. $\int_1^2 (4-3x)^8 dx$
9. $\int_0^8 x\sqrt{1+x} dx$ 10. $\int_{-3}^0 x\sqrt{1-x} dx$
11. $\int_0^{\pi/2} 4 \operatorname{sen}(x/2) dx$ 12. $\int_0^{\pi/6} 2 \cos 3x dx$
13. $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{(x^2+2)^3} dx$ 14. $\int_{1-\pi}^{1+\pi} \sec^2(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}) dx$
15. $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+4} dx$ 16. $\int_0^{\ln 5} e^x(3-4e^x) dx$
17. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ 18. $\int_{\ln 2}^{\ln(2/\sqrt{3})} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

19-22 Calcule a integral definida expressando-a em termos de u e calculando a integral resultante usando uma fórmula de Geometria. ■

19. $\int_{-5/3}^{5/3} \sqrt{25-9x^2} dx; u = 3x$
20. $\int_0^2 x\sqrt{16-x^4} dx; u = x^2$
21. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \sqrt{1-4\cos^2 \theta} d\theta; u = 2\cos \theta$
22. $\int_{e^{-3}}^{e^3} \frac{\sqrt{9-(\ln x)^2}}{x} dx; u = \ln x$

23. Uma partícula move-se em um eixo s com uma velocidade de $v(t) = \operatorname{sen} \pi t$ m/s. Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$.
24. Uma partícula move-se em um eixo s com uma velocidade de $v(t) = 3 \cos 2t$ m/s. Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq \pi/8$.
25. Encontre a área sob a curva $y = 9/(x+2)^2$ acima do intervalo $[-1, 1]$.
26. Encontre a área sob a curva $y = 1/(3x+1)^2$ acima do intervalo $[0, 1]$.
27. Encontre a área da região delimitada pelos gráficos de $y = 1/\sqrt{1-9x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{6}$.
28. Encontre a área da região delimitada pelos gráficos de $y = \operatorname{arc sen} x$, $x = 0$ e $y = \pi/2$.
29. Encontre o valor médio de $f(x) = x/(5x^2 + 1)^2$ no intervalo $[0, 2]$.
30. Encontre o valor médio de $f(x) = e^{3x}/(1 + e^{6x})$ no intervalo $[-(\ln 3)/6, 0]$.

31-50 Calcule as integrais por qualquer método. ■

31. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$ 32. $\int_1^2 \sqrt{5x-1} dx$
33. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+9}}$ 34. $\int_{\pi/2}^{\pi} 6 \operatorname{sen} x (\cos x + 1)^5 dx$
35. $\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$ 36. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-6x+9}$
37. $\int_0^{\pi/4} 4 \operatorname{sen} x \cos x dx$ 38. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx$
39. $\int_0^{\sqrt{\pi}} 5x \cos(x^2) dx$ 40. $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x} dx$
41. $\int_{\pi/12}^{\pi/9} \sec^2 3\theta d\theta$ 42. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} 2\theta d\theta$
43. $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{4-3y}}$ 44. $\int_{-1}^4 \frac{x dx}{\sqrt{5+x}}$
45. $\int_0^e \frac{dx}{2x+e}$ 46. $\int_1^{\sqrt{2}} x e^{-x^2} dx$
47. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^4}} dx$ 48. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} dx$
49. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+9x^2} dx$ 50. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{3+x^4} dx$

C 51. (a) Use um CAS para encontrar o valor exato da integral

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx$$

(b) Confirme o valor exato calculando à mão.
[Sugestão: Use a identidade $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.]

- C** 52. (a) Use um CAS para encontrar o valor exato da integral

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x \, dx$$

- (b) Confirme o valor exato calculando à mão.

[Sugestão: Use a identidade $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.]

53. (a) Encontre $\int_0^1 f(3x+1) \, dx$ se $\int_1^4 f(x) \, dx = 5$.

- (b) Encontre $\int_0^3 f(3x) \, dx$ se $\int_0^9 f(x) \, dx = 5$.

- (c) Encontre $\int_{-2}^0 xf(x^2) \, dx$ se $\int_0^4 f(x) \, dx = 1$.

54. Dado que m e n são inteiros positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx$$

fazendo uma substituição. Não tente calcular as integrais.

55. Dado que n é um inteiro positivo, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

usando uma identidade trigonométrica e fazendo uma substituição. Não tente calcular as integrais.

56. Dado que n é um inteiro positivo, calcule a integral

$$\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$$

- 57-60** Um medicamento pode ser ministrado a um paciente de várias maneiras. Dado um método particular, seja $c(t)$ a concentração (medida em mg/L) de medicamento na corrente sanguínea de um paciente t horas depois de aplicada a dose. No intervalo $0 \leq t \leq b$, a área entre o gráfico de $c = c(t)$ e o intervalo $[0, b]$ indica a “disponibilidade” do medicamento para o corpo do paciente naquele período de tempo. Em cada exercício, determine qual método oferece maior disponibilidade no intervalo dado. ■

57. Método 1: $c(t) = 5(e^{-0.2t} - e^{-t})$,

Método 2: $c(t) = 4(e^{-0.2t} - e^{-3t})$; [0, 4]

58. Método 1: $c(t) = 5(e^{-0.2t} - e^{-t})$,

Método 2: $c(t) = 4(e^{-0.2t} - e^{-3t})$; [0, 24]

59. Método 1: $c(t) = 5,78(e^{-0.4t} - e^{-1.3t})$,

Método 2: $c(t) = 4,15(e^{-0.4t} - e^{-3t})$; [0, 4]

60. Método 1: $c(t) = 5,78(e^{-0.4t} - e^{-1.3t})$,

Método 2: $c(t) = 4,15(e^{-0.4t} - e^{-3t})$; [0, 24]

61. Suponha que em $t = 0$ existam 750 bactérias em um recipiente e que a população de bactérias $y(t)$ cresça a uma taxa $y'(t) = 802,137e^{1.528t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias haverá em 12 horas?

62. Suponha que uma partícula, movendo-se ao longo de um eixo, tenha velocidade $v(t) = 25 + 10e^{-0.05t}$ pés/s.

(a) Qual é a distância percorrida pela partícula de $t = 0$ até $t = 10$?

- (b) O termo $10e^{-0.05t}$ afeta muito a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo? Explique seu raciocínio.

63. (a) A tabela abaixo mostra a fração da Lua (como vista da Terra) que está iluminada pelo Sol à meia-noite (no horário de Nova York) durante a primeira semana de 2005. Encontre a fração média da Lua que está iluminada durante essa primeira semana de 2005.

Fonte: Dados do Departamento de Astronomia Aplicada do Observatório Naval dos EUA.

- (b) A função $f(x) = 0,5 + 0,5 \operatorname{sen}(0,213x + 2,481)$ modela os dados para a iluminação da Lua durante os primeiros 60 dias de 2005. Encontre o valor médio dessa função iluminação ao longo do intervalo $[0, 7]$.

Tabela Ex-63

DIA	1	2	3	4	5	6	7
ILUMINAÇÃO	0,74	0,65	0,56	0,45	0,35	0,25	0,16

64. A eletricidade é fornecida para as casas na forma de **corrente alternada**, significando que a voltagem tem uma forma senoidal, descrita por uma equação da forma

$$V = V_p \operatorname{sen}(2\pi ft)$$

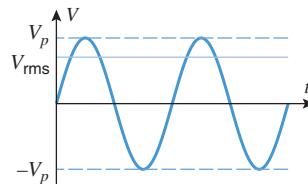
(ver figura abaixo). Nessa equação, V_p é o **pico de voltagem** ou **amplitude** da corrente, f é a **frequência** e $1/f$ é o **período**. As voltagens V e V_p são medidas em volts (V), o tempo é medido em segundos (s) e a frequência é medida em hertz (Hz) ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo por segundo}$; um **ciclo** é o termo elétrico para um período.) Os voltímetros de corrente alternada medem o que é chamado **rms** ou **raiz média quadrada** do valor de V . Por definição, isso é a raiz quadrada do valor médio de V^2 sobre um período.

- (a) Mostre que

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

[Sugestão: Calcule a média sobre o ciclo de $t = 0$ a $t = 1/f$, e use a identidade $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ para ajudar a calcular a integral.]

- (b) Nos Estados Unidos, o fornecimento de energia elétrica é feito com uma voltagem rms de 120 V, a uma frequência de 60 Hz. Qual é o pico de voltagem desse fornecimento?



$$V = V_p \operatorname{sen}(2\pi ft)$$

Figura Ex-64

65. Encontre um valor positivo de k tal que a área sob o gráfico de $y = e^{2x}$ no intervalo $[0, k]$ seja 3 unidades quadradas.

66. Use um recurso gráfico para estimar o valor de k ($k > 0$) de tal modo que a região delimitada por $y = 1/(1+kx^2)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ tenha uma área de 0,6 unidade de área.

67. (a) Encontre o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\pi/n)}{n}$$

calculando uma integral definida apropriada no intervalo $[0, 1]$.
 (b) Verifique sua resposta em (a) calculando o limite diretamente com um CAS.

ENFOCANDO CONCEITOS

68. Seja

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

- (a) Explique por que $I > 0$
 (b) Mostre que a substituição $x = 1/u$ resulta em

$$I = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = -I$$

Logo, $2I = 0$, implicando $I = 0$. No entanto, isso contradiz (a). Qual é o erro?

69. (a) Prove que, se f for uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

e dê uma explicação geométrica desse resultado.

[Sugestão: Uma forma de provar que uma quantidade q é zero é mostrar que $q = -q$.]

- (b) Prove que, se f for uma função par, então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

e dê uma explicação geométrica desse resultado.

[Sugestão: Divida o intervalo de integração de $-a$ até a em duas partes em 0.]

70. Mostre que, se f e g forem funções contínuas, então

$$\int_0^t f(t-x)g(x) dx = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$$

71. (a) Seja

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$$

Mostre que $I = a/2$.

[Sugestão: Faça $u = a - x$ e, então, observe a diferença entre o integrando resultante e o número 1.]

- (b) Use o resultado de (a) para encontrar

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx$$

- (c) Use o resultado de (a) para encontrar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

72. Calcule

$$(a) \int_{-1}^1 x \sqrt{\cos(x^2)} dx$$

$$(b) \int_0^\pi \sin^8 x \cos^5 x dx.$$

[Sugestão: Use a substituição $u = x - (\pi/2)$.]

73. **Texto** Os dois métodos de substituição discutidos nesta seção dão o mesmo resultado quando usados para calcular uma integral definida. Escreva um parágrafo curto explicando por que isso ocorre.

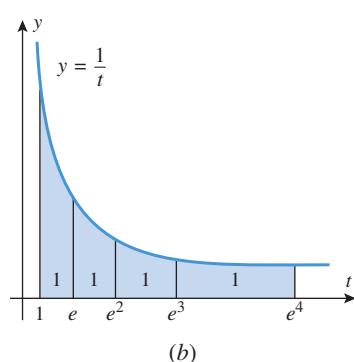
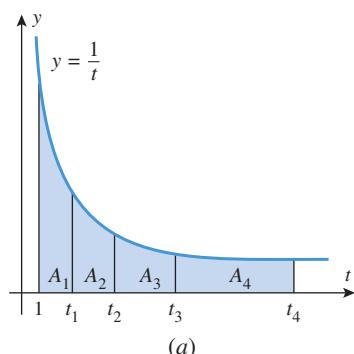
74. **Texto** Em alguns casos, o segundo método para o cálculo de integrais definidas tem vantagens claras sobre o primeiro. Forneça alguns exemplos e escreva um parágrafo curto discutindo as vantagens do segundo método em cada caso. [Sugestão: para começar, considere os resultados dos Exercícios 54 a 56, 69 e 71.]

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.9

1. $F(g(b)) - F(g(a))$ 2. (a) $\int_1^9 u^3 du$ (b) $\int_1^5 \frac{1}{2\sqrt{u}} du$ (c) $\int_0^1 2e^u du$ 3. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{7}{2}\right)$ (c) $\frac{3}{4}$

5.10 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E OUTRAS FUNÇÕES DEFINIDAS POR INTEGRAIS

Na Seção 0.5, definimos a função logaritmo natural $\ln x$ como sendo a inversa de e^x . Embora isso tenha sido conveniente e nos tenha permitido deduzir muitas propriedades de $\ln x$, seu fundamento matemático não foi muito sólido, já que aceitamos a continuidade de e^x e de todas as funções exponenciais sem demonstração. Nesta seção, mostraremos que $\ln x$ pode ser definido como uma certa integral e utilizaremos essa nova definição para provar que as funções exponenciais são contínuas. Essa definição integral também é importante nas aplicações, pois fornece uma maneira de reconhecer quando as integrais que aparecem como soluções de problemas podem ser expressas como logaritmos naturais.



Fora de escala

Figura 5.10.1

Reveja o Teorema 5.5.8 e, então, explique por que se requer x positivo na Definição 5.10.1.

Nenhuma das propriedades de $\ln x$ obtidas nesta seção deveriam ser novidade, mas agora, pela primeira vez, elas têm uma base matemática sólida.

■ A CONEXÃO ENTRE LOGARITMOS NATURAIS E INTEGRAIS

A conexão entre os logaritmos naturais e as integrais foi feita em meados do século XVII, no curso das pesquisas a respeito das áreas sob a curva $y = 1/t$. O problema era encontrar valores de $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ com os quais as áreas $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ na Figura 5.10.1a seriam iguais. Através do trabalho combinado de Isaac Newton, do padre jesuíta belga Gregory de Saint Vincent (1584-1667) e do estudante deste último, Alfonso A. de Sarasa (1618-1667), foi mostrado que, escolhendo-se os pontos

$$t_1 = e, \quad t_2 = e^2, \quad t_3 = e^3, \dots, \quad t_n = e^n, \dots$$

cada uma das áreas é 1 (Figura 5.10.1b). Assim, em notação moderna de integral

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t} dt = n$$

a qual pode ser expressa como

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t} dt = \ln(e^n)$$

Comparando-se o limite superior da integral com a expressão dentro do logaritmo, é natural pular para o resultado mais geral

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$$

que, hoje, tomamos como a definição formal de logaritmo natural.

5.10.1 DEFINIÇÃO O **logaritmo natural** de x é denotado por $\ln x$ e definido pela integral

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0 \quad (1)$$

Nossa estratégia para dar um fundamento matemático sólido para as funções logarítmicas e exponenciais é usar (1) como um ponto de partida e, então, definir e^x como a inversa de $\ln x$. Isso é o oposto exato de nossa abordagem anterior, na qual definimos $\ln x$ como sendo a inversa de e^x . Contudo, enquanto anteriormente tivemos de *supor* que e^x era contínua, agora a continuidade de e^x decorrerá de nossa definição como um *teorema*. Nosso primeiro desafio é demonstrar que as propriedades de $\ln x$ que resultam da Definição 5.10.1 são consistentes com aquelas obtidas anteriormente. Para começar, observe que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 5.6.3) implica que $\ln x$ é diferenciável e que

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{d}{dx} \left[\int_1^x \frac{1}{t} dt \right] = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad (2)$$

Isso é consistente com a fórmula da derivada de $\ln x$ que obtivemos anteriormente. Além disso, como diferenciabilidade implica continuidade, segue que $\ln x$ é uma função contínua no intervalo $(0, +\infty)$.

Outras propriedades de $\ln x$ podem ser obtidas interpretando geometricamente a integral em (1): no caso em que $x > 1$, essa integral representa a área sob a curva $y = 1/t$ desde $t = 1$ até $t = x$ (Figura 5.10.2a); no caso em que $0 < x < 1$, a integral representa o negativo da área sob a curva $y = 1/t$ desde $t = x$ até $t = 1$ (Figura 5.10.2b); e no caso em que $x = 1$, a integral tem valor 0 porque seus limites de integração inferior e superior coincidem. Essas observações geométricas implicam que

$$\ln x > 0 \quad \text{se} \quad x > 1$$

$$\ln x < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1$$

$$\ln x = 0 \quad \text{se} \quad x = 1$$

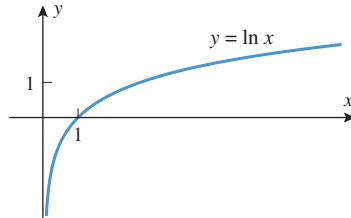
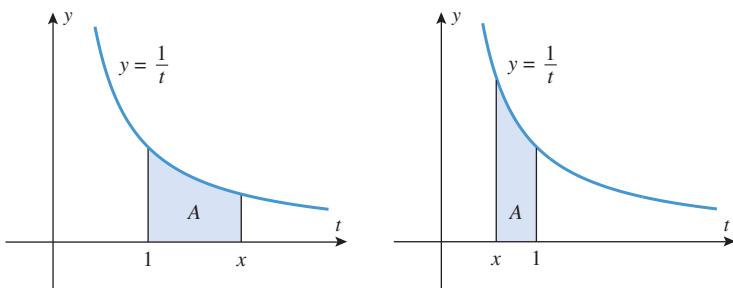


Figura 5.10.3



$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = A$$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -A$$

Figura 5.10.2

(a)

(b)

Também, como $1/x$ é positivo se $x > 0$, segue de (2) que $\ln x$ é uma função crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Tudo isso é consistente com o gráfico de $\ln x$ na Figura 5.10.3.

■ PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE $\ln x$

Podemos usar (1) para mostrar que a Definição 5.10.1 produz as propriedades algébricas padrão dos logaritmos.

5.10.2 TEOREMA *Dados quaisquer números positivos a e c e qualquer número racional r :*

- | | |
|--|---------------------------------------|
| <i>(a)</i> $\ln ac = \ln a + \ln c$ | <i>(b)</i> $\ln \frac{1}{c} = -\ln c$ |
| <i>(c)</i> $\ln \frac{a}{c} = \ln a - \ln c$ | <i>(d)</i> $\ln a^r = r \ln a$ |

DEMONSTRAÇÃO (a) Tratando a como uma constante, considere a função $f(x) = \ln(ax)$. Então

$$f'(x) = \frac{1}{ax} \cdot \frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Assim, $\ln ax$ e $\ln x$ têm a mesma derivada em $(0, +\infty)$, de modo que, nesse intervalo, essas funções devem diferir por uma constante. Logo, existe uma constante k tal que

$$\ln ax - \ln x = k \tag{3}$$

em $(0, +\infty)$. Substituindo $x = 1$ nessa equação, concluímos que $\ln a = k$ (verifique). Assim, podemos escrever (3) como

$$\ln ax - \ln x = \ln a$$

Tomar $x = c$ estabelece que

$$\ln ac - \ln c = \ln a \quad \text{ou} \quad \ln ac = \ln a + \ln c$$

DEMONSTRAÇÕES (b) E (c) A parte (b) segue imediatamente da parte (a), substituindo a por $1/c$ (verifique). Então (c) decorre de (a) e (b):

$$\ln \frac{a}{c} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{c} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{c} = \ln a - \ln c$$

DEMONSTRAÇÃO (d) Inicialmente, vamos mostrar que a parte (d) é satisfeita se r for um número inteiro não negativo qualquer. Se $r = 1$, então evidentemente vale (d); se $r = 0$, então (d) segue do fato de que $\ln 1 = 0$. Vamos supor que (d) seja válida se r for igual a algum número inteiro n . Então, segue da parte (a) que

$$\ln a^{n+1} = \ln[a \cdot a^n] = \ln a + \ln a^n = \ln a + n \ln a = (n+1) \ln a$$

De que maneira uma fileira de dominós caindo é semelhante à prova do Teorema 5.10.2(d) no caso em que r é um inteiro não negativo? (Esse argumento “dominó” usa uma versão informal de uma propriedade dos inteiros conhecida como *princípio da indução matemática*.)

Assim, se (d) for válida com r igual a algum inteiro n , então também será válida com $r = n + 1$. Contudo, como sabemos que (d) é válida com $r = 1$, segue que (d) também é válida com $r = 2$. Isso implica, porém, que (d) é válida com $r = 3$, o que por sua vez implica que (d) é válida com $r = 4$ e assim por diante. Concluímos que (d) é satisfeita se r for um número inteiro não negativo qualquer.

Em seguida, vamos supor que $r = -m$ seja um inteiro negativo. Então

$$\begin{aligned}\ln a^r &= \ln a^{-m} = \ln \frac{1}{a^m} = -\ln a^m && \text{Pela parte (b)} \\ &= -m \ln a && \text{A parte (d) é válida com potências positivas} \\ &= r \ln a\end{aligned}$$

o que mostra que (d) é válida com qualquer inteiro r negativo. Combinando esse resultado com nossa conclusão anterior de que (d) é satisfeita se r for um número inteiro não negativo, temos que (d) é válida com *qualquer* inteiro r .

Por fim, vamos supor que $r = m/n$ seja um número racional qualquer, onde $m \neq 0$ e $n \neq 0$ são inteiros. Então

$$\begin{aligned}\ln a^r &= \frac{n \ln a^r}{n} = \frac{\ln[(a^r)^n]}{n} && \text{A parte (d) é válida com potências inteiros} \\ &= \frac{\ln a^{rn}}{n} && \text{Propriedade de expoentes} \\ &= \frac{\ln a^m}{n} && \text{Definição de } r \\ &= \frac{m \ln a}{n} && \text{A parte (d) é válida com potências inteiros} \\ &= \frac{m}{n} \ln a = r \ln a\end{aligned}$$

o que mostra que (d) também é válida com números racionais r . ■

■ APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE $\ln x$

Para valores específicos de x , o valor de $\ln x$ pode ser aproximado numericamente pela integral definida em (1), digamos, usando a aproximação pelo ponto médio que foi discutida na Seção 5.4.

Tabela 5.10.1

$n = 10$		
$\Delta t = (b - a)/n = (2 - 1)/10 = 0,1$		
k	t_k^*	$1/t_k^*$
1	1,05	0,952381
2	1,15	0,869565
3	1,25	0,800000
4	1,35	0,740741
5	1,45	0,689655
6	1,55	0,645161
7	1,65	0,606061
8	1,75	0,571429
9	1,85	0,540541
10	1,95	0,512821 6,928355

$$\Delta t \sum_{k=1}^n f(t_k^*) \approx (0,1)(6,928355) \approx 0,692836$$

► Exemplo 1 Aproxime $\ln 2$ usando a aproximação do ponto médio com $n = 10$.

Solução A partir de (1), o valor exato de $\ln 2$ é representado pela integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

A regra do ponto médio está dada nas Fórmulas (5) e (9) da Seção 5.4. Em termos de t , aquela fórmula é

$$\int_a^b f(t) dt \approx \Delta t \sum_{k=1}^n f(t_k^*)$$

onde Δt é o comprimento comum dos subintervalos e $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$ são os pontos médios. Nesse caso, temos 10 subintervalos; logo, $\Delta t = (2 - 1)/10 = 0,1$. Os cálculos com seis casas decimais estão na Tabela 5.10.1. A título de comparação, uma calculadora ajustada para dispor seis casas decimais dá $\ln 2 \approx 0,693147$, de modo que o tamanho do erro na aproximação do ponto médio é de cerca de 0,000311. Maior precisão na aproximação do ponto médio pode ser obtida aumentando-se n . Por exemplo: com $n = 100$, obtém-se $\ln 2 \approx 0,693144$, a qual está correta até a quinta casa decimal. ◀

■ DOMÍNIO, IMAGEM E COMPORTAMENTO DE $\ln x$ NO INFINITO

5.10.3 TEOREMA

- (a) O domínio de $\ln x$ é $(0, +\infty)$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- (c) A imagem de $\ln x$ é $(-\infty, +\infty)$.

DEMONSTRAÇÕES (a) E (b) Já mostramos que $\ln x$ está definida e é crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Para provar que $\ln x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$, devemos mostrar que, dado qualquer número $M > 0$, o valor de $\ln x$ excede M para valores suficientemente grandes de x . Para mostrar isso, seja N um inteiro qualquer. Se $x > 2^N$, então

$$\ln x > \ln 2^N = N \ln 2 \quad (4)$$

pelo Teorema 5.10.2(d). Como

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt > 0$$

segue que $N \ln 2$ pode ser feito arbitrariamente grande, bastando escolher N suficientemente grande. Em particular, podemos escolher N de tal modo que $N \ln 2 > M$. Agora, segue de (4) que, se $x > 2^N$, então $\ln x > M$, e isso prova que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Além disso, observando que $v = 1/x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$, podemos usar o limite precedente e o Teorema 5.10.2(b) para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{v \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{v} = \lim_{v \rightarrow +\infty} (-\ln v) = -\infty$$

DEMONSTRAÇÃO (c) Segue da parte (a), da continuidade de $\ln x$ e do Teorema do Valor Intermediário (2.5.7) que $\ln x$ toma cada valor real quando x varia sobre o intervalo $(0, +\infty)$ (por quê?). ■

■ DEFINIÇÃO DE e^x

No Capítulo 0, definimos $\ln x$ como a inversa da função exponencial natural e^x . Agora que dispomos de uma definição formal de $\ln x$ em termos de uma integral, definiremos a função exponencial natural como a inversa de $\ln x$.

Como $\ln x$ é crescente e contínua em $(0, +\infty)$, com imagem dada por $(-\infty, +\infty)$, existe exatamente uma solução (positiva) da equação $\ln x = 1$. Agora *definimos* e como a única solução de $\ln x = 1$, de modo que

$$\ln e = 1 \quad (5)$$

Além disso, se x for um número real qualquer, existe uma única solução positiva y de $\ln y = x$, de modo que, com valores irracionais de x , *definimos* e^x como sendo essa solução. Assim, quando x for irracional, definimos e^x por

$$\ln e^x = x \quad (6)$$

Observe que, com valores racionais de x , também temos $\ln e^x = x \ln e = x$ pelo Teorema 5.10.2(d). Também segue imediatamente que $e^{\ln x} = x$ com qualquer $x > 0$. Assim, (6) define a função exponencial com quaisquer valores reais de x como a inversa da função logaritmo natural.

5.10.4 DEFINIÇÃO A inversa da função logaritmo natural $\ln x$ é denotada por e^x e denominada *função exponencial natural*.

Podemos, agora, estabelecer a diferenciabilidade de e^x e confirmar que

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

5.10.5 TEOREMA A função exponencial natural e^x é diferenciável, e portanto contínua, em $(-\infty, +\infty)$, e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

DEMONSTRAÇÃO Como $\ln x$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} > 0$$

em cada x de $(0, +\infty)$, segue, do Teorema 3.3.1, com $f(x) = \ln x$ e $f^{-1}(x) = e^x$, que e^x é diferenciável em $(-\infty, +\infty)$ e que sua derivada é

$$\frac{d}{dx} \underbrace{[e^x]}_{f^{-1}(x)} = \underbrace{\frac{1}{1/e^x}}_{f'(f^{-1}(x))} = e^x \blacksquare$$

■ EXPOENTES IRRACIONAIS

Lembre que, no Teorema 5.10.2(d), vimos que, se $a > 0$ e r for um número racional, então $\ln a^r = r \ln a$. Segue que $a^r = e^{\ln a^r} = e^{r \ln a}$ vale com quaisquer valores positivos de a e qualquer número racional r . No entanto, essa expressão $e^{r \ln a}$ faz sentido com *qualquer* número real r , tanto racional quanto irracional, de modo que é um bom candidato para dar sentido a a^r com qualquer número real r .

Use a Definição 5.10.6 para provar que, se $a > 0$ e r é um número real, então $\ln a^r = r \ln a$.

5.10.6 DEFINIÇÃO Se $a > 0$ e r é um número real, então definimos a^r por

$$a^r = e^{r \ln a} \quad (7)$$

Com essa definição, podemos mostrar que as propriedades algébricas padrão de expoentes, como

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (a^p)(b^p) = (ab)^p$$

valem com quaisquer valores reais de a , b , p e q , onde a e b são positivos. Além disso, usando (7) com um expoente real r , podemos definir a função potência x^r , cujo domínio consiste em todos os números reais positivos; e, com uma base b positiva qualquer, podemos definir a função exponencial b^x de base b , cujo domínio consiste em todos os números reais.

5.10.7 TEOREMA

(a) Dado qualquer número real r , a função potência x^r é diferenciável em $(0, +\infty)$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

(b) Dado $b > 0$ e $b \neq 1$, a função exponencial b^x de base b é diferenciável em $(-\infty, +\infty)$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x \ln b$$

DEMONSTRAÇÃO A diferenciabilidade de $x^r = e^{r \ln x}$ e de $b^x = e^{x \ln b}$ em seus domínios segue da diferenciabilidade de $\ln x$ em $(0, +\infty)$ e de e^x em $(-\infty, +\infty)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^r] &= \frac{d}{dx}[e^{r \ln x}] = e^{r \ln x} \cdot \frac{d}{dx}[r \ln x] = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1} \\ \frac{d}{dx}[b^x] &= \frac{d}{dx}[e^{x \ln b}] = e^{x \ln b} \cdot \frac{d}{dx}[x \ln b] = b^x \ln b \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Nas Fórmulas (7) e (8) da Seção 1.3 e na Fórmula (1) da Seção 3.2, expressamos e como o valor de um limite. Agora, dispomos das ferramentas matemáticas necessárias para provar a existência desses limites.

5.10.8 TEOREMA

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

DEMONSTRAÇÃO Provaremos a parte (a); as provas das partes (b) e (c) seguem desse limite e são deixadas como exercício. Primeiro observamos que

$$\frac{d}{dx}[\ln(x+1)] \Big|_{x=0} = \frac{1}{x+1} \cdot 1 \Big|_{x=0} = 1$$

Contudo, usando a definição da derivada, obtemos

$$\begin{aligned}1 &= \frac{d}{dx}[\ln(x+1)] \Big|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(0+h+1) - \ln(0+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \ln(1+h) \right]\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = 1 \tag{8}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\ln(1+x))/x} && \text{Definição 5.10.6} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))/x} && \text{Teorema 1.5.5} \\ &= e^1 && \text{Equação (8)} \\ &= e \quad \blacksquare\end{aligned}$$

■ LOGARITMOS GERAIS

Observamos que, dado $b > 0$ e $b \neq 1$, a função b^x é injetora, portanto possui uma função inversa. Usando a definição de b^x , podemos resolver $y = b^x$ em x como uma função de y :

$$\begin{aligned}y &= b^x = e^{x \ln b} \\ \ln y &= \ln(e^{x \ln b}) = x \ln b \\ \frac{\ln y}{\ln b} &= x\end{aligned}$$

Assim, a função inversa de b^x é $(\ln x)/(\ln b)$.

5.10.9 DEFINIÇÃO Dado $b > 0$ e $b \neq 1$, definimos a função *logaritmo de base b*, denotada por $\log_b x$, por

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \quad (9)$$

Segue imediatamente dessa definição que $\log_b x$ é a função inversa de b^x e que satisfaz as propriedades da Tabela 0.5.3. Além disso, $\log_b x$ é diferenciável, e portanto contínua, em $(0, +\infty)$, sendo sua derivada dada por

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b}$$

Como última observação de consistência, observamos que $\log_e x = \ln x$.

■ FUNÇÕES DEFINIDAS POR INTEGRAIS

As funções que vimos até agora neste livro são denominadas *funções elementares*; elas incluem polinômios, funções racionais, funções potências, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções trigonométricas e todas as outras que podem ser obtidas dessas por adição, subtração, multiplicação, radiciação e composição.

Entretanto, há muitas funções importantes que não se incluem nessa categoria. Tais funções surgem de muitas maneiras, mas comumente aparecem no decorrer da solução de problemas de valor inicial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (10)$$

No Exemplo 6 da Seção 5.2 e na discussão que o precede, vimos que o método básico para resolver (10) é integrar $f(x)$ e, então, usar a condição inicial para determinar a constante de integração. Pode-se provar que, se f for contínua, então (10) tem uma única solução, que é a obtida com esse procedimento. Há, porém, outra abordagem: em vez de resolver individualmente cada problema de valor inicial, podemos encontrar uma fórmula geral para a solução de (10) e, então, aplicá-la na solução de problemas específicos. Vamos mostrar agora que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (11)$$

é uma fórmula para a solução de (10). Para confirmar, precisamos mostrar que $dy/dx = f(x)$ e que $y(x_0) = y_0$. Os cálculos são os seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \right] = 0 + f(x) = f(x) \\ y(x_0) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = y_0 + 0 = y_0 \end{aligned}$$

► **Exemplo 2** No Exemplo 6 da Seção 5.2, mostramos que a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y(0) = 1$$

é $y(x) = 1 + \sin x$. Esse problema também pode ser resolvido aplicando-se a Fórmula (11) com $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Então,

$$y(x) = 1 + \int_0^x \cos t dt = 1 + [\sin t]_{t=0}^x = 1 + \sin x \quad \blacktriangleleft$$

No último exemplo, fomos capazes de efetuar a integração da Fórmula (11) e de expressar a solução do problema de valor inicial como uma função elementar. Há casos, contudo,

nos quais isso não é possível, e então a solução do problema deve ser deixada em termos de uma integral “não calculada”. Por exemplo, a solução por (11) do problema do valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}, \quad y(0) = 1$$

é

$$y(x) = 1 + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Entretanto, pode ser mostrado que é impossível expressar a integral nessa solução em termos de funções elementares. Assim, encontramos uma *nova* função, que consideramos estar *definida* pela integral. Um parente próximo dessa função, conhecido como **função erro**, desempenha um papel importante em Probabilidade e Estatística; ela é denotada por $\text{erf}(x)$ e é definida por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (12)$$

De fato, muitas das funções mais importantes nas ciências e na Engenharia estão definidas como integrais e têm nomes e notações especiais associados a elas. Por exemplo, as funções definidas por

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad \text{e} \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad (13-14)$$

são chamadas de **funções seno e cosseno de Fresnel**, respectivamente, em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), que primeiro as encontrou em seu estudo da difração das ondas de luz.

■ DETERMINAÇÃO DOS VALORES E DOS GRÁFICOS DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR INTEGRAIS

Os valores a seguir, de $S(1)$ e $C(1)$, foram produzidos por um CAS que tem um algoritmo para aproximar integrais definidas:

$$S(1) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \approx 0,438259, \quad C(1) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \approx 0,779893$$

Para gerar os gráficos de funções definidas por integrais, os programas de computador escolhem um conjunto de valores de x no domínio, aproximam a integral em cada um desses valores e, então, fazem o gráfico com os pontos resultantes. Assim, há muito cálculo envolvido na geração de tais gráficos, uma vez que cada ponto requer a aproximação de uma integral. Os gráficos das funções de Fresnel da Figura 5.10.4 foram gerados dessa forma, usando um CAS.

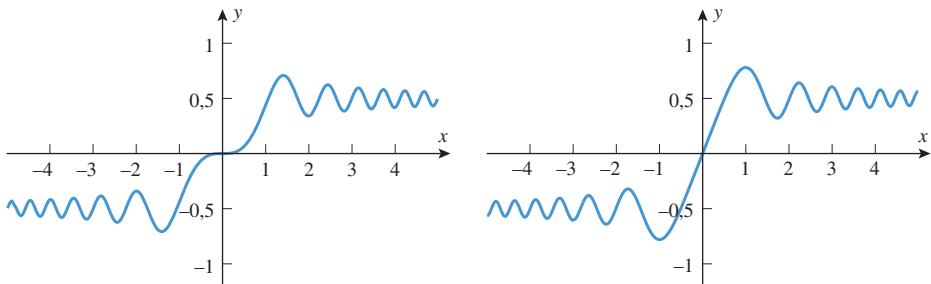


Figura 5.10.4

Função seno de Fresnel

Função cosseno de Fresnel

OBSERVAÇÃO

Embora as funções de Fresnel exijam uma quantidade razoável de cálculo para gerar os gráficos, as derivadas de $S(x)$ e $C(x)$ são fáceis de obter usando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (5.6.3); elas são

$$S'(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \quad \text{and} \quad C'(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \quad (15-16)$$

Essas derivadas podem ser usadas para determinar a localização dos extremos relativos e de pontos de inflexão, bem como de outras propriedades de $S(x)$ e $C(x)$.

■ INTEGRAIS COM FUNÇÕES COMO LIMITES DE INTEGRAÇÃO

Várias aplicações podem levar a integrais em que um ou ambos os limites de integração são funções de x . Alguns exemplos são

$$\int_x^1 \sqrt{\sin t} dt, \quad \int_{x^2}^{\sin x} \sqrt{t^3 + 1} dt, \quad \int_{\ln x}^{\pi} \frac{dt}{t^7 - 8}$$

Vamos completar esta seção mostrando como diferenciar integrais da forma

$$\int_a^{g(x)} f(t) dt \quad (17)$$

onde a é uma constante. Derivadas de outros tipos de integrais com funções por limite de integração serão discutidas nos exercícios.

Para diferenciar (17), podemos considerar a integral como uma composição $F(g(x))$, onde

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Aplicando, então, a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^{g(x)} f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} [F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Teorema 5.6.3

Assim,

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^{g(x)} f(t) dt \right] = f(g(x))g'(x) \quad (18)$$

Em palavras:

Para diferenciar uma integral com um limite inferior constante e um limite superior igual a uma função, substitua o limite superior no integrando e multiplique pela derivada do limite superior.

► Exemplo 3

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^{\sin x} (1 - t^2) dt \right] = (1 - \sin^2 x) \cos x = \cos^3 x \quad \blacktriangleleft$$



EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.10 (Ver página 408 para respostas.)

1. $\int_1^{1/e} \frac{1}{t} dt = \underline{\hspace{2cm}}$

4. A solução do problema de valor inicial

2. Dê uma estimativa de $\ln 2$ usando a Definição 5.10.1 e
- (a) a aproximação pela extremidade esquerda, com $n = 2$.
 - (b) a aproximação pela extremidade direita, com $n = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^3, \quad y(0) = 2$$

3. $\pi^{1/(\ln \pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$

que é definida por uma integral é $y = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{e^{-x}} \frac{1}{1+t^4} dt \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 5.10  Recurso Gráfico  CAS

1. Esboce a curva $y = 1/t$ e sombreie a região sob a curva cuja área é
 (a) $\ln 2$ (b) $-\ln 0,5$ (c) 2
 2. Esboce a curva $y = 1/t$ e sombreie duas regiões diferentes, sob a curva, cuja área seja $\ln 1,5$.
 3. Dado que $\ln a = 2$ e $\ln c = 5$, encontre
 (a) $\int_1^{ac} \frac{1}{t} dt$ (b) $\int_1^{1/c} \frac{1}{t} dt$
 (c) $\int_1^{a/c} \frac{1}{t} dt$ (d) $\int_1^{a^3} \frac{1}{t} dt$.
 4. Dado que $\ln a = 9$, encontre
 (a) $\int_1^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} dt$ (b) $\int_1^{2a} \frac{1}{t} dt$
 (c) $\int_1^{2/a} \frac{1}{t} dt$ (d) $\int_2^a \frac{1}{t} dt$.
 5. Aproxime $\ln 5$ usando a regra do ponto médio com $n = 10$ e estime a magnitude do erro comparando sua resposta com a produzida diretamente por um recurso computacional.
 6. Aproxime $\ln 3$ usando a regra do ponto médio com $n = 20$ e estime a magnitude do erro comparando sua resposta com a produzida diretamente por um recurso computacional.
 7. Simplifique a expressão e obtenha os valores de x com os quais sua simplificação seja válida.
 (a) $e^{-\ln x}$ (b) $e^{\ln x^2}$
 (c) $\ln(e^{-x^2})$ (d) $\ln(1/e^x)$
 (e) $\exp(3 \ln x)$ (f) $\ln(xe^x)$
 (g) $\ln(e^x - \sqrt[3]{x})$ (h) $e^x - \ln x$
 8. (a) Seja $f(x) = e^{-2x}$. Encontre o valor exato mais simples de $f(\ln 3)$.
 (b) Seja $f(x) = e^x + 3e^{-x}$. Encontre o valor exato mais simples de $f(\ln 2)$.
- 9-10** Expresse a quantidade dada como uma potência de e . ■
9. (a) 3^π (b) $2^{\sqrt{2}}$
 10. (a) π^{-x} (b) $x^{2x}, x > 0$
- 11-12** Encontre os limites fazendo uma substituição apropriada nos limites dados pelo Teorema 5.10.8. ■
11. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$
 12. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/(3x)}$
- 13-14** Encontre $g'(x)$ usando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e verifique sua resposta calculando a integral e depois diferenciando. ■
13. $g(x) = \int_1^x (t^2 - t) dt$
 14. $g(x) = \int_\pi^x (1 - \cos t) dt$

15-16 Encontre a derivada usando a Fórmula (18) e verifique sua resposta calculando a integral e depois derivando o resultado. ■

15. (a) $\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt$
16. (a) $\frac{d}{dx} \int_{-1}^{x^2} \sqrt{t+1} dt$
17. Seja $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2 + 1} dt$. Encontre
 (a) $F(0)$ (b) $F'(0)$ (c) $F''(0)$
18. Seja $F(x) = \int_2^x \sqrt{3t^2 + 1} dt$. Encontre
 (a) $F(2)$ (b) $F'(2)$ (c) $F''(2)$

19-22 Verdadeiro/Falso Determine se a equação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. $\int_1^{1/a} \frac{1}{t} dt = - \int_1^a \frac{1}{t} dt$, com $0 < a$.

20. $\int_1^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^a \frac{1}{t} dt$, com $0 < a$.

21. $\int_{-1}^e \frac{1}{t} dt = 1$

22. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_1^{1+x^2} \frac{1}{t} dt + C$

- [c] 23.** (a) Use a Fórmula (18) para encontrar

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} t \sqrt{1+t} dt$$

- (b) Use um CAS para calcular a integral e diferenciar a função resultante.
 (c) Use o comando de simplificação do CAS, se necessário, para confirmar que as respostas de (a) e (b) são iguais.

24. Mostre que

(a) $\frac{d}{dx} \left[\int_x^a f(t) dt \right] = -f(x)$

(b) $\frac{d}{dx} \left[\int_{g(x)}^a f(t) dt \right] = -f(g(x))g'(x)$.

25-26 Use os resultados do Exercício 24 para encontrar a derivada. ■

25. (a) $\frac{d}{dx} \int_x^\pi \cos(t^3) dt$
26. (a) $\frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt$
- (b) $\frac{d}{dx} \int_{\tan x}^3 \frac{t^2}{1+t^2} dt$
- (b) $\frac{d}{dx} \int_{1/x}^\pi \cos^3 t dt$

27. Encontre

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$$

escrevendo

$$\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt = \int_{3x}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt + \int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

28. Use o Exercício 24(b) e a ideia do Exercício 27 para mostrar que

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

29. Use o resultado obtido no Exercício 28 para efetuar as seguintes diferenciações:

$$(a) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t dt \quad (b) \frac{d}{dx} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t} dt.$$

30. Prove que a função

$$F(x) = \int_x^{5x} \frac{1}{t} dt$$

é constante no intervalo $(0, +\infty)$ usando o Exercício 28 para encontrar $F'(x)$. Obtenha a constante.

ENFOCANDO CONCEITOS

31. Seja $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, onde f é a função do gráfico a seguir.

- (a) Encontre $F(0), F(3), F(5), F(7)$ e $F(10)$.
- (b) Em quais subintervalos de $[0, 10]$ F é crescente e em quais é decrescente?
- (c) Onde F toma seu valor máximo e onde toma seu valor mínimo?
- (d) Esboce o gráfico de F .

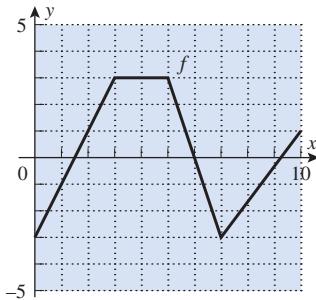


Figura Ex-31

32. Determine o(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de F do Exercício 31.

- 33-34 Expresse $F(x)$ por partes, de forma que não envolva uma integral. ■

$$33. F(x) = \int_{-1}^x |t| dt$$

$$34. F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

- 35-38 Use a Fórmula (11) para resolver o problema de valor inicial. ■

$$35. \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + 1}{x}, \quad y(1) = 2 \quad 36. \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 0$$

$$37. \frac{dy}{dx} = \sec^2 x - \tan x, \quad y(\pi/4) = 1$$

$$38. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}, \quad y(e) = 1$$

39. Suponha que, em $t = 0$, P_0 pessoas tenham a doença X, e que um certo modelo para a transmissão dela prediga que a taxa de transmissão é de $r(t)$ pessoas por dia. Escreva uma fórmula para o número de pessoas que terão a doença X após x dias.

40. Suponha que $v(t)$ seja a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s. Escreva uma fórmula para a coordenada da partícula no tempo T , se ela estiver no ponto s_1 em $t = 1$.

ENFOCANDO CONCEITOS

41. A figura abaixo mostra os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = \int_0^x f(t) dt$. Determine de qual função são os gráficos e explique seu raciocínio.

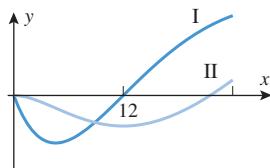


Figura Ex-41

42. (a) Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_1^b t^{k-1} dt \quad (b > 0)$$

- (b) Verifique sua conjectura calculando a integral e depois encontrando o limite. [Sugestão: Interprete o limite como a definição da derivada de uma função exponencial.]

43. Seja $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado abaixo.

- (a) Onde ocorrem os mínimos relativos de F ?
- (b) Onde ocorrem os máximos relativos de F ?
- (c) No intervalo $[0, 5]$, onde ocorre o máximo absoluto de F ?
- (d) No intervalo $[0, 5]$, onde ocorre o mínimo absoluto de F ?
- (e) Onde F é côncava para cima e onde é côncava para baixo?
- (f) Esboce o gráfico de F .

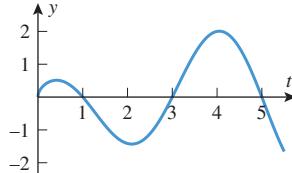


Figura Ex-43

- c 44. Os programas CAS têm comandos para trabalhar com a maioria das funções não elementares importantes. Verifique seu manual para informações sobre a função erro $\text{erf}(x)$ [veja a Fórmula (12)] e, então, faça o seguinte.

- (a) Gere o gráfico de $\text{erf}(x)$.
- (b) Use o gráfico para fazer uma conjectura sobre a existência e a localização de possíveis máximos e mínimos relativos de $\text{erf}(x)$.

- (c) Verifique sua conjectura em (b) usando a derivada de $\text{erf}(x)$.
(d) Use o gráfico para fazer uma conjectura sobre a existência e a localização de possíveis pontos de inflexão de $\text{erf}(x)$.
(e) Verifique sua conjectura em (d) usando a derivada segunda de $\text{erf}(x)$.
(f) Use o gráfico para fazer uma conjectura sobre a existência de assíntotas horizontais de $\text{erf}(x)$.
(g) Verifique sua conjectura em (f) usando o CAS para encontrar os limites de $\text{erf}(x)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.
- 45.** As funções seno e cosseno de Fresnel $S(x)$ e $C(x)$ foram definidas nas Fórmulas (13) e (14) e têm seus gráficos mostrados na Figura 5.10.4. Suas derivadas foram dadas nas Fórmulas (15) e (16).
- (a) Em que pontos $C(x)$ tem mínimos relativos? E máximos relativos?
(b) Onde ocorrem os pontos de inflexão de $C(x)$?
(c) Confirme que suas respostas em (a) e (b) estão em conformidade com o gráfico de $C(x)$.

46. Encontre o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \ln t \, dt$$

47. Encontre uma função f e um número a tais que

$$4 + \int_a^x f(t) \, dt = e^{2x}$$

48. (a) Dê um argumento geométrico para mostrar que

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} \, dt < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

(b) Use o resultado de (a) para provar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

(c) Use o resultado de (b) para provar que

$$e^{x/(x+1)} < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < e, \quad x > 0$$

e, portanto, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

(d) Use o resultado em (b) para provar que

$$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+1}, \quad x > 0$$

49. Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de

$$y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+1} - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

na janela $[0, 100] \times [0; 0,2]$. Use esse gráfico e a parte (d) do Exercício 48 para fazer uma estimativa grosseira do erro na aproximação

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{50} \right)^{50}$$

50. Prove: Se f for contínua em um intervalo aberto e a for um ponto qualquer no intervalo, então

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

é contínua no intervalo.

51. Texto Um estudante alega que a definição

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

oferece um raciocínio circular, pois para calcular o valor da integral precisamos conhecer o valor de $\ln x$. Escreva um parágrafo curto que responda à objeção do estudante.

52. Texto Escreva um parágrafo curto comparando a Definição 5.10.1 com a definição da função logaritmo natural dada no Capítulo 0. Não esqueça de incluir as questões de continuidade e diferenciabilidade.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.10

1. -1 2. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{7}{12}$ 3. e 4. $y = 2 + \int_0^x \cos t^3 \, dt$ 5. $-\frac{e^{-x}}{1 + e^{-4x}}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 5 Recurso Gráfico CAS

1-8 Calcule as integrais. ■

1. $\int \left[\frac{1}{2x^3} + 4\sqrt{x} \right] dx$ 2. $\int [u^3 - 2u + 7] du$
3. $\int [4 \sin x + 2 \cos x] dx$ 4. $\int \sec x (\tan x + \cos x) dx$
5. $\int [x^{-2/3} - 5e^x] dx$ 6. $\int \left[\frac{3}{4x} - \sec^2 x \right] dx$

7. $\int \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$

8. $\int \left[\frac{12}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{1-x^4}{1+x^2} \right] dx$

9. Resolva o problema de valor inicial

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} = \cos x - 5e^x$, $y(0) = 0$
 (c) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x}$, $y(1) = 2$ (d) $\frac{dy}{dx} = xe^{x^2}$, $y(0) = 0$

10. A figura abaixo mostra o campo de direções de uma equação diferencial $dy/dx = f(x)$. Qual das seguintes funções tem mais chances de ser $f(x)$?

$$\sqrt{x}, \quad \sin x, \quad x^4, \quad x$$

Explique seu raciocínio.

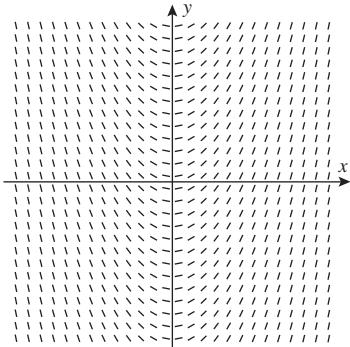


Figura Ex-10

11. (a) Mostre que as substituições $u = \sec x$ e $u = \tan x$ produzem valores diferentes para a integral

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx$$

(b) Explique por que ambos estão corretos.

12. Use as duas substituições no Exercício 11 para estimar a integral definida

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan x \, dx$$

e confirme que os resultados são iguais.

13. Calcule a integral

$$\int \frac{x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 - 2x^2}} \, dx$$

fazendo a substituição $u = x^2 - 1$.

14. Calcule a integral

$$\int \sqrt{1 + x^{-2/3}} \, dx$$

fazendo a substituição $u = 1 + x^{2/3}$.

- 15-18 Calcule à mão as integrais e verifique suas respostas com um CAS, se disponível. ■

15. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{5 + 2 \sin 3x}} \, dx$

16. $\int \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

17. $\int \frac{x^2}{(ax^3 + b)^2} \, dx$

18. $\int x \sec^2(ax^2) \, dx$

19. Expresse

$$\sum_{k=4}^{18} k(k-3)$$

na notação com somatório, com

- (a) $k = 0$ como limite inferior do somatório
 (b) $k = 5$ como limite inferior do somatório

20. (a) Preencha a lacuna:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n \underline{\hspace{2cm}}$$

- (b) Use a parte (a) para provar que a soma dos n primeiros inteiros ímpares consecutivos é um quadrado perfeito.

21. Encontre a área sob o gráfico de $f(x) = 4x - x^2$ acima do intervalo $[0, 4]$ usando a Definição 5.4.3, tomando x_k^* como sendo a extremidade *direita* de cada subintervalo.
22. Encontre a área sob o gráfico de $f(x) = 5x - x^2$ acima do intervalo $[0, 5]$ usando a Definição 5.4.3, tomando x_k^* como sendo a extremidade *esquerda* de cada subintervalo.

- 23-24 Use um recurso computacional para encontrar as aproximações pelas extremidades esquerda, direita e pelo ponto médio da área abaixo da curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado, usando $n = 10$ subintervalos. ■

23. $y = \ln x$; $[1, 2]$

24. $y = e^x$; $[0, 1]$

25. A *integral definida* de f no intervalo $[a, b]$ está definida como o limite

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Explique o significado dos vários símbolos do lado direito dessa equação.

26. Dê um argumento geométrico para calcular

$$\int_0^1 |2x - 1| \, dx$$

27. Suponha que

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^2 f(x) \, dx = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^3 f(x) \, dx = -1, \quad \int_0^1 g(x) \, dx = 2$$

Em cada parte, use essa informação para calcular a integral dada, se possível. Se não houver informação suficiente para calcular a integral, então aponte isso.

(a) $\int_0^2 f(x) \, dx$ (b) $\int_1^3 f(x) \, dx$ (c) $\int_2^3 5f(x) \, dx$

(d) $\int_1^0 g(x) \, dx$ (e) $\int_0^1 g(2x) \, dx$ (f) $\int_0^1 [g(x)]^2 \, dx$

28. Em cada parte, use a informação do Exercício 27 para calcular a integral dada. Se não houver informação suficiente, então aponte isso.

- (a) $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ (b) $\int_0^1 f(x)g(x) dx$
 (c) $\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx$ (d) $\int_0^1 [4g(x) - 3f(x)] dx$

29. Em cada parte, calcule a integral. Quando apropriado, use uma fórmula geométrica.

- (a) $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2}) dx$
 (b) $\int_0^3 (x\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{9 - x^2}) dx$
 (c) $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4} dx$

30. Em cada parte, encontre o limite interpretando-o como o limite de uma soma de Riemann, na qual o intervalo $[0, 1]$ está dividido em n subintervalos de mesmo comprimento.

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/n} + e^{2/n} + e^{3/n} + \cdots + e^{n/n}}{n}$

31-38 Calcule as integrais usando o Teorema Fundamental do Cálculo e (se for necessário) propriedades da integral definida. ■

31. $\int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7) dx$ 32. $\int_{-1}^2 x(1 + x^3) dx$
 33. $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$ 34. $\int_1^8 (5x^{2/3} - 4x^{-2}) dx$
 35. $\int_0^1 (x - \sec x \tan x) dx$
 36. $\int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{t}} - 5\sqrt{t} - t^{-3/2} \right) dt$
 37. $\int_0^2 |2x - 3| dx$ 38. $\int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{2} - \sin x \right| dx$

39-42 Encontre a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado. ■

39. $f(x) = \sqrt{x}; [1, 9]$ 40. $f(x) = x^{-3/5}; [1, 4]$
 41. $f(x) = e^x; [1, 3]$ 42. $f(x) = \frac{1}{x}; [1, e^3]$

43. Encontre a área que está acima do eixo x mas abaixo da curva $y = (1 - x)(x - 2)$. Faça um esboço dessa região.

44. Use um CAS para aproximar a área da região do primeiro quadrante que se situa abaixo da curva $y = x + x^2 - x^3$ e acima do eixo x .

45-46 Esboce a curva e encontre a área total entre ela e o intervalo dado no eixo x . ■

45. $y = x^2 - 1; [0, 3]$ 46. $y = \sqrt{x+1} - 1; [-1, 1]$

47. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_1^x (t^3 + 1) dt$$

- (a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.
 (b) Confira o resultado de (a) primeiro integrando e depois derivando.

48. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_4^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

- (a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.
 (b) Confira o resultado de (a) primeiro integrando e depois derivando.

49-54 Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e (quando for necessário) a Fórmula (18) da Seção 5.10 para encontrar as derivadas. ■

49. $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x e^{t^2} dt \right]$ 50. $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{t}{\cos t^2} dt \right]$
 51. $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x |t - 1| dt \right]$ 52. $\frac{d}{dx} \left[\int_\pi^x \cos \sqrt{t} dt \right]$
 53. $\frac{d}{dx} \left[\int_2^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+t^3} dt \right]$ 54. $\frac{d}{dx} \left[\int_e^{\sqrt{x}} (\ln t)^2 dt \right]$

55. Enuncie as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo e explique qual o significado da frase “diferenciação e integração são processos inversos”.

56. Seja $F(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 3}{t^4 + 7} dt$.

- (a) Encontre os intervalos nos quais F é crescente e aqueles nos quais é decrescente.
 (b) Encontre os intervalos abertos nos quais F é côncava para cima e os nos quais é côncava para baixo.
 (c) Encontre os valores de x , se houver, nos quais a função F tem extremos absolutos.
 (d) Use um CAS para fazer o gráfico de F e confirme que os resultados de (a), (b) e (c) estão de acordo com o gráfico.

57. (a) Use derivada para provar que a função

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

é constante no intervalo $(0, +\infty)$.

- (b) Determine o valor constante da função na parte (a) e, então, interprete (a) como uma identidade envolvendo a função arco tangente.

58. Qual é o domínio natural da função

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 - 9} dt?$$

Explique seu raciocínio.

59. Em cada parte, determine os valores de x com os quais $F(x)$ é positiva, negativa ou zero, sem efetuar a integração. Explique seu raciocínio.

(a) $F(x) = \int_1^x \frac{t^4}{t^2 + 3} dt$ (b) $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{4 - t^2} dt$

60. Use um CAS para aproximar o maior e o menor valor da integral

$$\int_{-1}^x \frac{t}{\sqrt{2 + t^3}} dt$$

com $1 \leq x \leq 3$.

61. Encontre todos os valores de x^* no intervalo dado cuja existência é garantida pelo Teorema do Valor Médio para Integrais e explique o que esses números representam.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 3]$ (b) $f(x) = 1/x$; $[1, e]$

62. Um tumor de 10 g é descoberto em um rato de laboratório em 1º de março. O tumor cresce a uma taxa de $r(t) = t/7$ gramas por semana, onde t denota o número de semanas desde 1º de março. Qual será a massa do tumor em 7 de junho?

63. Use o gráfico de f abaixo para encontrar o valor médio de f no intervalo $[0, 10]$.

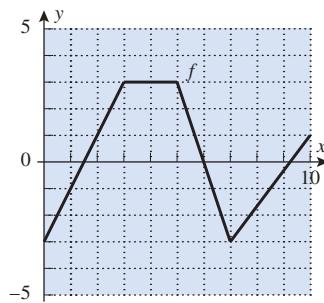


Figura Ex-63

64. Encontre o valor médio de $f(x) = e^x + e^{-x}$ acima do intervalo $[\ln \frac{1}{2}, \ln 2]$.

65. Deduza as fórmulas para as funções posição e velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo com movimento uniformemente acelerado.

66. A velocidade de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s é medida em intervalos de 5 segundos durante 40 segundos, e a função velocidade está modelada por uma curva lisa que passa pelos pontos dados, conforme a figura a seguir. Use esse modelo em cada parte.

- (a) A partícula tem aceleração constante? Explique seu raciocínio.
- (b) Há algum intervalo de 15 segundos durante o qual a aceleração é constante? Explique seu raciocínio.
- (c) Estime a distância percorrida pela partícula de $t = 0$ a $t = 40$.
- (d) Estime a velocidade média da partícula no período de 40 segundos.
- (e) A partícula está diminuindo sua velocidade alguma vez durante os 40 segundos? Explique seu raciocínio.
- (f) Há informação suficiente para determinar a coordenada s da partícula em $t = 10$? Se houver, encontre-a. Se não, explique qual a informação adicional necessária.

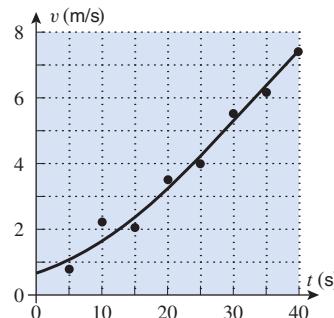


Figura Ex-66

- 67-70 Uma partícula move-se ao longo de um eixo s . Use a informação dada para encontrar a função posição da partícula. ■

67. $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1$; $s(0) = 1$

68. $a(t) = 4 \cos 2t$; $v(0) = -1$, $s(0) = -3$

69. $v(t) = 2t - 3$; $s(1) = 5$

70. $a(t) = \cos t - 2t$; $v(0) = 0$, $s(0) = 0$

- 71-74 Uma partícula move-se com velocidade $v(t)$ m/s ao longo de um eixo s . Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo dados. ■

71. $v(t) = 2t - 4$; $0 \leq t \leq 6$

72. $v(t) = |t - 3|$; $0 \leq t \leq 5$

73. $v(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}$; $1 \leq t \leq 3$

74. $v(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$; $4 \leq t \leq 9$

- 75-76 Uma partícula move-se com aceleração $a(t)$ m/s² ao longo de um eixo s e tem velocidade v_0 m/s no instante $t = 0$. Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo dados. ■

75. $a(t) = -2$; $v_0 = 3$; $1 \leq t \leq 4$

76. $a(t) = \frac{1}{\sqrt{5t + 1}}$; $v_0 = 2$; $0 \leq t \leq 3$

77. Um carro desloca-se a 72 km/h ao longo de uma estrada reta desacelerando a uma taxa constante de 1 m/s².
- (a) Quanto tempo leva para a velocidade chegar a 54 km/h?
 - (b) Qual a distância que o carro percorrerá até parar?

78. Suponha que a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s seja $v(t) = 20t^2 - 100t + 50$ m/s e que a partícula está na origem no instante $t = 0$. Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ nos primeiros 6 segundos do movimento.

79. Uma bola é jogada verticalmente para cima a partir de uma altura de s_0 metros com velocidade inicial de v_0 m/s. Se ela for pega na altura s_0 , determine sua velocidade média no ar usando o modelo de queda livre.

80. Uma pedra, largada de uma altura desconhecida, bate no chão com uma velocidade de 24 m/s. Encontre a altura da qual ela foi largada.

81-88 Calcule as integrais fazendo uma substituição apropriada.

81. $\int_0^1 (2x+1)^4 dx$

82. $\int_{-5}^0 x\sqrt{4-x} dx$

83. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

84. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$

85. $\int_0^1 \sin^2(\pi x) \cos(\pi x) dx$

86. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

87. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

88. $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2} dx$

89. Calcule os limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$

90. Encontre uma função f e um número a tais que

$$2 + \int_a^x f(t) dt = e^{3x}$$

CAPÍTULO 5 ESTABELECENDO CONEXÕES

1. Considere a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n 2x_k^* \Delta x_k$$

da integral de $f(x) = 2x$ num intervalo $[a, b]$.

- (a) Mostre que se x_k^* for o ponto médio do k -ésimo subintervalo, então a soma de Riemann é telescópica. (Veja os Exercícios 57 a 60 da Seção 5.4 para outros exemplos de somas telescópicas.)
- (b) Use a parte (a), a Definição 5.5.1 e o Teorema 5.5.2 para calcular a integral definida de $f(x) = 2x$ em $[a, b]$.

2. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $[0, 4]$ e, portanto, integrável nesse intervalo. Calcule

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx$$

usando a Definição 5.5.1. Use subintervalos de tamanhos desiguais dados pela partição

$$0 < 4(1)^2/n^2 < 4(2)^2/n^2 < \dots < 4(n-1)^2/n^2 < 4$$

e tome x_k^* como a extremidade direita do k -ésimo subintervalo.

3. Com as modificações necessárias, repita o Exercício 2 para

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$$

4. Dados uma função contínua f e um número real positivo m , denote por g a função definida pela composição $g(x) = f(mx)$.

- (a) Suponha que

$$\sum_{k=1}^n g(x_k^*) \Delta x_k$$

seja uma soma de Riemann qualquer para a integral de g em $[0, 1]$. Use a correspondência $u_k = mx_k$, $u_k^* = mx_k^*$ para criar uma soma de Riemann para a integral de f em $[0, m]$. Qual é a relação entre os valores das duas somas de Riemann?

- (b) Use a parte (a), a Definição 5.5.1 e o Teorema 5.5.2 para encontrar uma equação que relacione a integral de g em $[0, 1]$ com a integral de f em $[0, m]$.
- (c) Qual é a relação entre a resposta da parte (b) e o Teorema 5.9.1?

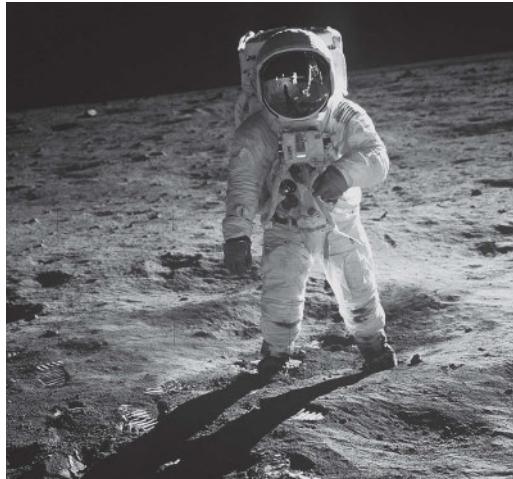
5. Dada uma função contínua f , seja g a função definida por $g(x) = 2xf(x^2)$.

- (a) Suponha que

$$\sum_{k=1}^n g(x_k^*) \Delta x_k$$

seja uma soma de Riemann qualquer para a integral de g em $[2, 3]$, com $x_k^* = (x_k + x_{k-1})/2$ sendo o ponto médio do k -ésimo subintervalo. Use a correspondência $u_k = x_k^2$, $u_k^* = (x_k^*)^2$ para criar uma soma de Riemann para a integral de f em $[4, 9]$. Qual é a relação entre os valores das duas somas de Riemann?

- (b) Use a parte (a), a Definição 5.5.1 e o Teorema 5.5.2 para encontrar uma equação que relacione a integral de g em $[2, 3]$ com a integral de f em $[4, 9]$.
- (c) Qual é a relação entre a resposta da parte (b) e o Teorema 5.9.1?



Cortesia NASA

6

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA GEOMETRIA, NAS CIÊNCIAS E NA ENGENHARIA

O Cálculo é essencial nas contas que devem ser feitas para pousar um astronauta na Lua.

No capítulo anterior, introduzimos a integral definida como o limite de somas de Riemann, no contexto de encontrar áreas. No entanto, as somas de Riemann e as integrais definidas têm aplicações que se estendem muito além dos problemas de área. Neste capítulo, mostraremos como as somas de Riemann e as integrais definidas surgem em problemas como obter o volume e a superfície de um sólido ou o comprimento de uma curva plana, calcular o trabalho feito por uma força, encontrar o centro de gravidade de uma região plana, encontrar a pressão e a força exercidas por um fluido sobre um objeto submerso e encontrar as propriedades de cabos suspensos.

Embora esses problemas sejam diversos, todos os cálculos requeridos podem ser abordados pelo mesmo procedimento utilizado para encontrar áreas, ou seja, quebrando os cálculos em “partes pequenas”, fazendo uma aproximação boa porque a parte é pequena, somando as aproximações das partes e obtendo uma soma de Riemann que aproxime a quantidade toda a ser calculada, para então tomar o limite da soma de Riemann e obter um resultado exato.

6.1 ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

No capítulo anterior, mostramos como encontrar a área entre uma curva $y = f(x)$ e um intervalo no eixo x . Aqui, vamos mostrar como encontrar a área entre duas curvas.

■ UMA REVISÃO DE SOMAS DE RIEMANN

Antes de considerar o problema de encontrar a área entre duas curvas, é conveniente rever os princípios básicos do cálculo de área como uma integral definida. Lembre que, se f for contínua e não negativa em $[a, b]$, então a integral definida para a área A abaixo de $y = f(x)$ e acima do intervalo fechado $[a, b]$ é obtida em quatro passos (Figura 6.1.1):

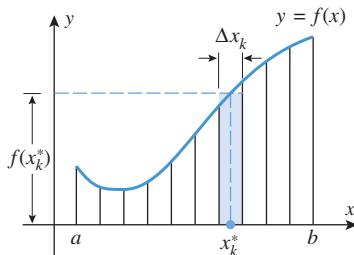


Figura 6.1.1

- Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e usá-los para dividir a região sob a curva $y = f(x)$ em n faixas.
- Supondo ser Δx_k a largura da k -ésima faixa, aproximar a área daquela faixa pela área $f(x_k^*)\Delta x_k$ de um retângulo com largura Δx_k e altura $f(x_k^*)$, onde x_k^* é um ponto do k -ésimo intervalo.
- Somar as áreas aproximadas das faixas para aproximar toda a área A pela soma de Riemann:

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

O efeito do processo de limite sobre a soma de Riemann

Figura 6.1.2

- Tomar o limite das somas de Riemann, quando o número de subintervalos crescer e suas amplitudes tenderem a zero. Isso faz com que o erro na aproximação tenda a zero e produza a seguinte integral definida para a área exata A :

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

A Figura 6.1.2 ilustra o efeito do processo de tomar o limite sobre as várias partes da soma de Riemann:

- A quantidade x_k^* na soma de Riemann torna-se a variável x na integral definida.
- O comprimento de intervalo Δx_k na soma de Riemann torna-se o dx na integral definida.
- O intervalo $[a, b]$, que é a união dos subintervalos de comprimentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ não aparece explicitamente na soma de Riemann, mas é representado pelos limites de integração inferior e superior na integral definida.

■ ÁREA ENTRE $y = f(x)$ E $y = g(x)$

Vamos considerar, agora, a seguinte extensão do problema da área.

6.1.1 PRIMEIRO PROBLEMA DE ÁREA Suponha que f e g sejam funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ e

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b$$

[Isso significa que a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$ e que as duas podem se tocar, mas não se cruzam.] Encontre a área A da região delimitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 6.1.3a).

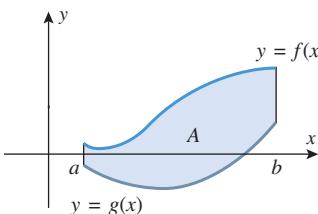
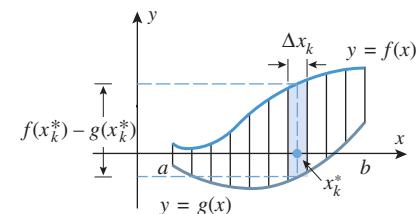


Figura 6.1.3



(a) (b)

Para resolver esse problema, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, o que tem o efeito de subdividir a região em n faixas (Figura 6.1.3b). Supondo que a largura da k -ésima faixa seja Δx_k , então a área da faixa pode ser aproximada pelo retângulo com a mesma largura e altura $f(x_k^*) - g(x_k^*)$, onde x_k^* é um ponto qualquer do k -ésimo subintervalo. Somando essas aproximações, a soma de Riemann a seguir aproxima a área A :

$$A \approx \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k$$

Tomando o limite quando n crescer e a largura dos subintervalos tender a zero, obtemos a seguinte integral definida para a área entre as curvas:

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Em resumo, temos o seguinte resultado:

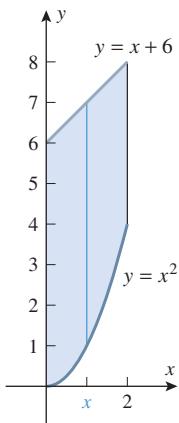


Figura 6.1.4

O que representa a integral em (1) quando os gráficos de f e g se cruzam ao longo do intervalo $[a, b]$? Como deveríamos proceder, nesse caso, para encontrar a área entre as duas curvas?

6.1.2 FÓRMULA PARA A ÁREA Se f e g forem funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ em cada x de $[a, b]$, então a área da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$, à esquerda pela reta $x = a$ e à direita pela reta $x = b$ é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (1)$$

► **Exemplo 1** Encontre a área da região limitada acima por $y = x + 6$, abaixo por $y = x^2$ e nas laterais por $x = 0$ e $x = 2$.

Solução A região e a secção transversal estão na Figura 6.1.4. A secção transversal se estende de $g(x) = x^2$ na base até $f(x) = x + 6$ no topo. Movendo-se a secção transversal através da região, a posição mais à esquerda será $x = 0$ e a mais à direita, $x = 2$. Assim, de (1)

$$A = \int_0^2 [(x + 6) - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3}$$

É possível os contornos superior e inferior intersectarem-se em um ou em ambos os extremos; nesses casos, as laterais da região serão pontos em vez de segmentos de reta verticais (Figura 6.1.5). Quando isso ocorrer, precisamos determinar os pontos de intersecção para obter os limites de integração.

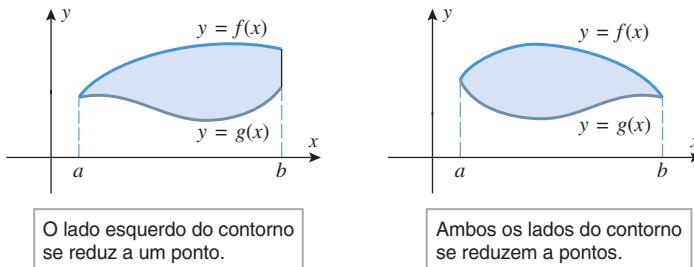


Figura 6.1.5

O lado esquerdo do contorno se reduz a um ponto.

Ambos os lados do contorno se reduzem a pontos.

► **Exemplo 2** Encontre a área da região englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 6$.

Solução O esboço da região (Figura 6.1.6) mostra que o contorno inferior é $y = x^2$ e o superior, $y = x + 6$. Nos extremos da região, os contornos têm as mesmas coordenadas y ; assim, para encontrar os extremos, equacionamos

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x + 6 \quad (2)$$

Isso fornece

$$x^2 = x + 6 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad (x + 2)(x - 3) = 0$$

a partir do que obtemos

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = 3$$

Embora as coordenadas y dos extremos não sejam essenciais à nossa solução, elas podem ser obtidas a partir de (2) substituindo $x = -2$ e $x = 3$ em qualquer uma das equações. Disso resulta $y = 4$ e $y = 9$; logo, as intersecções superior e inferior dos contornos são $(-2, 4)$ e $(3, 9)$.

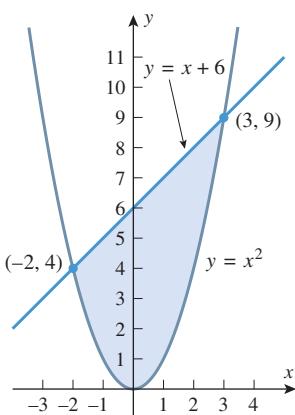


Figura 6.1.6

A partir de (1), com $f(x) = x + 6$, $g(x) = x^2$, $a = -2$ e $b = 3$, obtemos a área

$$A = \int_{-2}^3 [(x+6) - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 = \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3} \right) = \frac{125}{6} \quad \blacktriangleleft$$

Caso f e g sejam *não negativas* no intervalo $[a, b]$, a fórmula

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

estabelece que a área A entre as curvas pode ser obtida subtraindo a área abaixo de $y = g(x)$ da área abaixo de $y = f(x)$ (Figura 6.1.7).

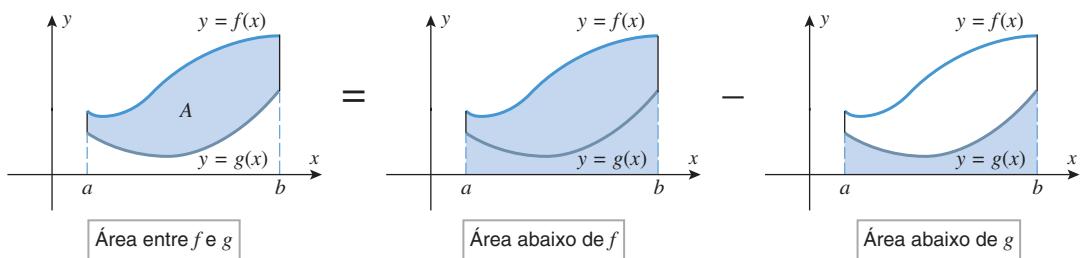


Figura 6.1.7

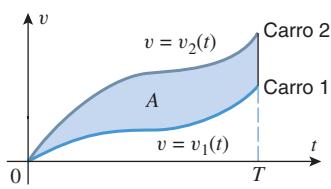


Figura 6.1.8

► Exemplo 3 A Figura 6.1.8 mostra as curvas velocidade *versus* tempo para dois carros de corrida movendo-se em uma pista reta, partindo do repouso no mesmo instante. O que representa a área A entre as curvas e acima do intervalo $0 \leq t \leq T$?

Solução A partir de (1)

$$A = \int_0^T [v_2(t) - v_1(t)] dt = \int_0^T v_2(t) dt - \int_0^T v_1(t) dt$$

Como v_1 e v_2 são funções não negativas em $[0, T]$, segue da Fórmula (4) da Seção 5.7 que a integral de v_1 em $[0, T]$ é a distância percorrida pelo carro 1 durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$ e a integral de v_2 em $[0, T]$ é a distância percorrida pelo carro 2 durante o mesmo intervalo de tempo. Como $v_1(t) \leq v_2(t)$ em $[0, T]$, o carro 2 percorre uma distância maior do que o carro 1 no mesmo intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$ e a área A representa a distância que o carro 2 está à frente do carro 1 no instante T . \blacktriangleleft

Algumas regiões podem dar algum trabalho para encontrar o integrando e os limites de integração em (1). A seguir, esboçamos um procedimento sistemático que pode ser seguido na obtenção dessa fórmula.

Não é necessário fazer um esboço exageradamente preciso no Passo 1; o único propósito desse esboço é determinar qual curva é o contorno superior e qual é o contorno inferior.

Encontrando os Limites de Integração para a Área entre Duas Curvas

Passo 1 Esboce a região e, então, trace um segmento de reta vertical através dela em um ponto x arbitrário do eixo x , ligando os contornos superior e inferior (Figura 6.1.9a).

Passo 2 A coordenada y na extremidade superior do segmento de reta esboçado no Passo 1 será $f(x)$, na inferior será $g(x)$, e o comprimento do segmento de reta será $f(x) - g(x)$. Isso é o integrando em (1).

Passo 3 Para determinar os limites de integração, imagine mover o segmento de reta para a esquerda e depois para a direita. A posição mais à esquerda em que o segmento de reta ainda intersecta a região é $x = a$, e a mais à direita é $x = b$ (Figuras 6.1.9b e 6.1.9c).

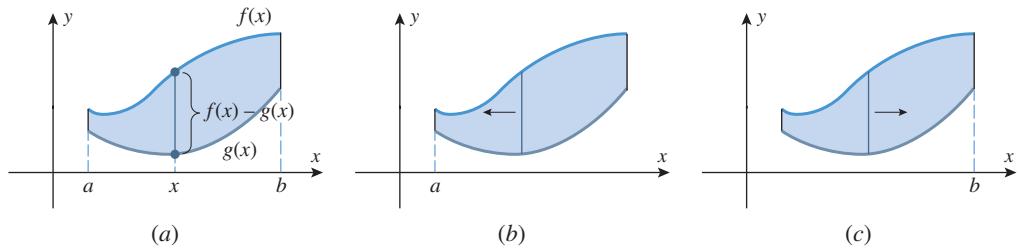


Figura 6.1.9

Há uma maneira bem conveniente de lembrar esse procedimento:

Olhando para o segmento de reta vertical como uma “seção transversal” da região pelo ponto x , então a Fórmula (1) afirma que a área entre as curvas é obtida integrando o comprimento da seção transversal ao longo do intervalo $[a, b]$.

É possível que os contornos superior e inferior de uma região consistam em duas ou mais curvas, caso em que será conveniente subdividir a região em pedaços menores e, só então, aplicar a Fórmula (1). Isso está ilustrado no exemplo seguinte.

► **Exemplo 4** Encontre a área da região englobada por $x = y^2$ e $y = x - 2$.

Solução Para determinar os contornos apropriados da região, precisamos saber onde as curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$ intersectam-se. No Exemplo 2, encontramos as intersecções equacionando as expressões para y . Aqui é mais fácil reescrever a última equação como $x = y + 2$ e, então, equacionar as expressões para x , ou seja:

$$x = y^2 \quad \text{e} \quad x = y + 2 \quad (3)$$

Disso resulta

$$y^2 = y + 2 \quad \text{ou} \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad (y + 1)(y - 2) = 0$$

e obtemos $y = -1$, $y = 2$. Substituindo esses valores em qualquer das duas equações em (3), vemos que os correspondentes valores de x são $x = 1$ e $x = 4$, respectivamente, de modo que os pontos de intersecção são $(1, -1)$ e $(4, 2)$ (Figura 6.1.10a).

Para aplicar a Fórmula (1), devemos escrever, nas equações dos contornos, y explicitamente em função de x . O contorno superior pode ser escrito como $y = \sqrt{x}$ (reescrevendo $x = y^2$ como $y = \pm\sqrt{x}$ e escolhendo o + para a parte superior da curva). O contorno inferior consiste em duas partes:

$$\gamma = -\sqrt{x} \quad \text{se} \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad \gamma = x - 2 \quad \text{se} \quad 1 < x < 4$$

(Figura 6.1.10b). Por causa dessa mudança na fórmula do contorno inferior, é necessário dividir a região em duas partes e encontrar as áreas separadamente.

A partir de (1), com $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$, $a = 0$ e $b = 1$, obtemos

$$A_1 = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

A partir de (1), com $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$, $a = 1$ e $b = 4$, obtemos

$$A_2 = \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)] dx = \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^4 = \left(\frac{16}{3} - 8 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{19}{6}$$

Figura 6.1.10

Logo, a área de toda a região é

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$$

■ REVERTENDO OS PAPÉIS DE x E y

Às vezes, é possível evitar a divisão da região em partes integrando-se em relação a y em vez de x . Vamos mostrar agora como isso pode ser feito.

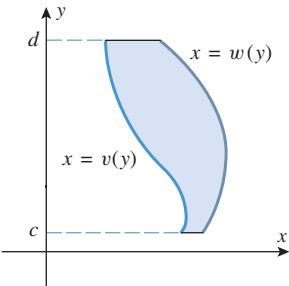


Figura 6.1.11

6.1.3 SEGUNDO PROBLEMA DE ÁREA Suponha que w e v sejam funções contínuas de y no intervalo fechado $[c, d]$ e que

$$w(y) \geq v(y) \quad \text{com } c \leq y \leq d$$

[Isso significa que a curva $x = w(y)$ está à direita da curva $x = v(y)$ e que elas podem se tocar, mas não se cruzam.] Encontre a área A da região limitada à esquerda por $x = v(y)$, à direita por $x = w(y)$ e acima e abaixo pelas retas $y = d$ e $y = c$, respectivamente (Figura 6.1.11).

Procedendo-se como na dedução de (1), mas com os papéis de x e y trocados, somos levados à seguinte analogia de 6.1.2.

6.1.4 FÓRMULA PARA A ÁREA Se w e v forem funções contínuas e $w(y) \geq v(y)$ em cada y de $[c, d]$, então a área da região limitada à esquerda por $x = v(y)$, à direita por $x = w(y)$, acima por $y = d$ e abaixo por $y = c$ é

$$A = \int_c^d [w(y) - v(y)] dy \quad (4)$$

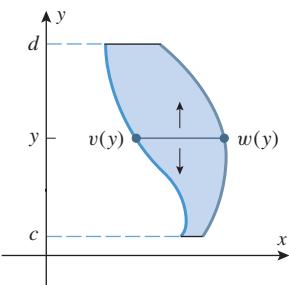


Figura 6.1.12

O princípio que norteia a aplicação dessa fórmula é o mesmo que em (1): o integrando em (4) pode ser visto como o comprimento de uma seção transversal horizontal em um ponto arbitrário do eixo y , caso em que a Fórmula (4) afirma que a área pode ser encontrada integrando-se o comprimento da seção transversal horizontal acima do intervalo $[c, d]$ no eixo y (Figura 6.1.12).

No Exemplo 4, dividimos a região em duas partes para facilitar a integração em relação a x . No exemplo seguinte, veremos que é possível evitar a divisão da região integrando em relação a y .

► **Exemplo 5** Encontre a área da região englobada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$, integrando em relação a y .

Solução A partir da Figura 6.1.10, vemos que o contorno esquerdo é $x = y^2$, o direito é $y = x - 2$ e a região se estende acima do intervalo $-1 \leq y \leq 2$. Porém, para aplicar (4), as equações dos contornos devem ser dadas explicitamente como funções de y . Assim, reescrevemos $y = x - 2$ como $x = y + 2$. Segue, de (4), que

$$A = \int_{-1}^2 [(y + 2) - y^2] dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

o que está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 4. ◀

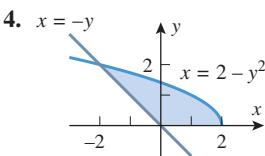
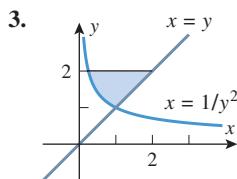
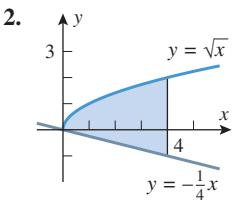
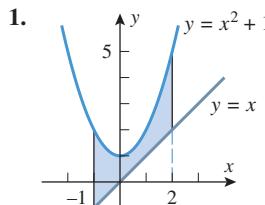
A escolha entre as Fórmulas (1) e (4) é, geralmente, ditada pela forma da região e pela fórmula que requer a menor quantidade de subdivisões. Contudo, às vezes podemos escolher a fórmula que requer mais subdivisões por ser mais fácil calcular a integral resultante.

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 6.1 (Ver página 421 para respostas.)

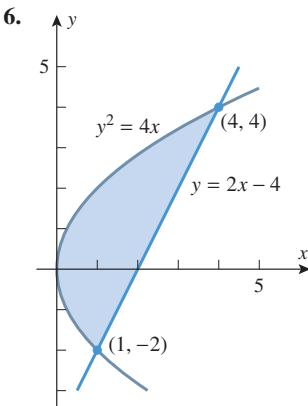
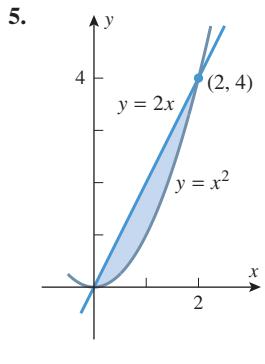
1. Uma expressão integral para a área da região situada entre as curvas $y = 20 - 3x^2$ e $y = e^x$ e limitada lateralmente por $x = 0$ e $x = 2$ é _____.
2. Uma expressão integral para a área do paralelogramo delimitado por $y = 2x + 8$, $y = 2x - 3$, $x = -1$ e $x = 5$ é _____. O valor dessa integral é _____.
3. (a) Os pontos de intersecção do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e da reta $y = x + 2$ são _____ e _____.
- (b) Expressa como uma integral definida em relação a x , _____ dá a área da região dentro do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e acima da reta $y = x + 2$.
- (c) Expressa como uma integral definida em relação a y , _____ dá a área da região descrita em (b).
4. A área da região englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt[3]{x}$ é _____.

EXERCÍCIOS 6.1 Recurso Gráfico CAS

1-4 Encontre a área da região sombreada. ■



5-6 Encontre a área da região sombreada integrando (a) em relação a x e (b) em relação a y . ■



7-18 Esboce a região englobada pelas curvas e encontre a área. ■

7. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$
8. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
9. $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$
10. $y = \sec^2 x$, $y = 2$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$
11. $x = \sin y$, $x = 0$, $y = \pi/4$, $y = 3\pi/4$
12. $x^2 = y$, $x = y - 2$
13. $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = \ln 2$

14. $x = 1/y$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e$

15. $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = |x|$ 16. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = 2$

17. $y = 2 + |x - 1|$, $y = -\frac{1}{5}x + 7$

18. $y = x$, $y = 4x$, $y = -x + 2$

19-26 Use um recurso gráfico computacional, quando necessário, para encontrar a área da região englobada pelas curvas. ■

19. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, $y = 0$

20. $y = x^3 - 2x^2$, $y = 2x^2 - 3x$

21. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$

22. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$ 23. $x = y^3 - y$, $x = 0$

24. $x = y^3 - 4y^2 + 3y$, $x = y^2 - y$

25. $y = xe^{x^2}$, $y = 2|x|$

26. $y = \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$, $y = \frac{3}{x}$

27-30 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. [Em cada exercício, suponha que f e g sejam funções contínuas distintas de $[a, b]$ e que A denote a área da região delimitada pelos gráficos de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ e $x = b$.] ■

27. Se f e g diferirem por uma constante positiva c , então $A = c(b - a)$.

28. Se

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = -3$$

então $A = 3$.

29. Se

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = 0$$

então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cruzam pelo menos uma vez em $[a, b]$.

30. Se

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ não se cruzam em $[a, b]$.

31. Dê uma estimativa para o valor de k ($0 < k < 1$), tal que a região englobada por $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $x = 0$ e $x = k$ tenha uma área de 1 unidade.

32. Dê uma estimativa para a área da região do primeiro quadrante englobada por $y = \sin 2x$ e $y = \arcsin x$.

33. Use um CAS para encontrar a área englobada pelas curvas $y = 3 - 2x$ e $y = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^2$.

34. Use um CAS para encontrar a área exata englobada pelas curvas $y = x^5 - 2x^3 - 3x$ e $y = x^3$.

35. Encontre uma reta horizontal $y = k$ que divida a área englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

36. Encontre uma reta vertical $x = k$ que divida a área englobada pelas curvas $x = \sqrt{y}$, $x = 2$ e $y = 0$ em duas partes iguais.

37. (a) Encontre a área da região englobada pela parábola $y = 2x - x^2$ e o eixo x .

(b) Encontre o valor de m de tal forma que a reta $y = mx$ divida a região de (a) em duas regiões de mesma área.

38. Encontre a área da região englobada pela curva $y = \sin x$ e a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(5\pi/6, 1/2)$ na curva.

39-42 Use o método de Newton (Seção 4.7), quando necessário, para aproximar as coordenadas x das intersecções das curvas com pelo menos quatro casas decimais; em seguida, use isso para aproximar a área da região. ■

39. A região que está abaixo da curva $y = \sin x$ e acima da reta $y = 0,2x$, sendo $x \geq 0$.

40. A região entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = \cos x$.

41. A região englobada pelos gráficos de $y = (\ln x)/x$ e $y = x - 2$.

42. A região englobada pelos gráficos de $y = 3 - 2 \cos x$ e $y = 2/(1+x^2)$.

43. Encontre a área da região englobada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 2 \sin x$.

44. Com referência à figura abaixo, encontre o valor de k de forma que as áreas sombreadas sejam iguais.

Fonte: Este exercício é baseado no Problema A1 da 54^a Competição Matemática Anual William Lowell Putnam.

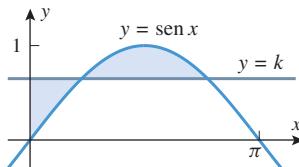


Figura Ex-44

ENFOCANDO CONCEITOS

45. Dois carros de corrida, lado a lado em uma pista reta, movem-se com funções velocidade $v_1(t)$ m/s e $v_2(t)$ m/s, respectivamente. Suponha que ambos estejam alinhados no instante $t = 60$ s. Interprete o valor da integral

$$\int_0^{60} [v_2(t) - v_1(t)] dt$$

nesse contexto.

46. A figura a seguir mostra as curvas aceleração *versus* tempo para dois carros movendo-se ao longo de uma pista reta, começando alinhados e acelerando a partir do repouso. O que representa a área A entre as curvas acima do intervalo $0 \leq t \leq T$? Justifique sua resposta.

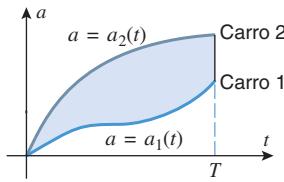


Figura Ex-46

47. As curvas da figura abaixo modelam as taxas de nascimento e morte (em milhões de pessoas por ano) de um certo país durante um período de 50 anos. O que representa a área A entre as curvas acima do intervalo [1960, 2010]? Justifique sua resposta.

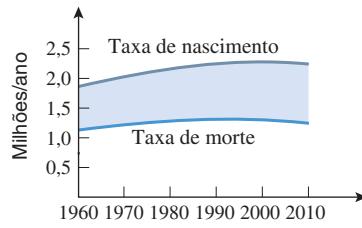


Figura Ex-47

48. A figura abaixo mostra as taxas segundo as quais um medicamento é absorvido e eliminado pela corrente sanguínea de um indivíduo. Ambas as taxas são dadas em unidades de microgramas por hora ($\mu\text{g}/\text{h}$) e exibidas num período de 8 horas. O que representa a área A entre as curvas acima do intervalo $[0, 8]$? Justifique sua resposta.

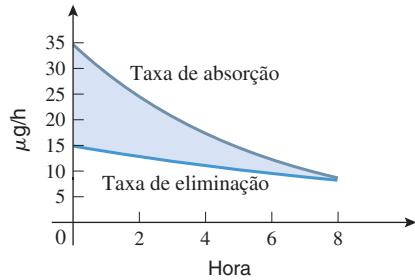


Figura Ex-48

49. Encontre a área da região envolvida pela curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ e os eixos coordenados.

50. Mostre que a área da elipse da figura abaixo é πab . [Sugestão: Use uma fórmula de Geometria.]

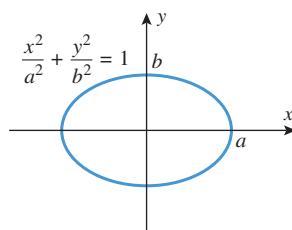


Figura Ex-50

51. Texto Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e que os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cruzem várias vezes. Descreva um procedimento passo a passo para determinar a área delimitada pelos gráficos de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ e $x = b$.

52. Texto Suponha que R e S sejam duas regiões no plano xy situadas entre duas retas L_1 e L_2 paralelas ao eixo y . Suponha que cada reta paralela ao eixo y entre L_1 e L_2 intersecte R e S em segmentos de reta de comprimentos iguais. Dê um argumento informal mostrando que as áreas de R e S são iguais. (Faça hipóteses razoáveis sobre as fronteiras de R e S .)

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.1

1. $\int_0^2 [(20 - 3x^2) - e^x] dx$
2. $\int_{-1}^5 [(2x + 8) - (2x - 3)] dx; 66$
3. (a) (a) $(-2, 0); (0, 2)$ (b) $\int_{-2}^0 [\sqrt{4 - x^2} - (x + 2)] dx$
- (c) $\int_0^2 [(y - 2) + \sqrt{4 - y^2}] dy$
4. $\frac{5}{12}$

6.2 VOLUMES POR FATIAMENTO; DISCOS E ARRUELAS

Na seção anterior, mostramos que a área de uma região plana delimitada por duas curvas pode ser obtida integrando-se o comprimento de uma seção transversal genérica sobre um intervalo apropriado. Nesta seção, veremos que o mesmo princípio básico pode ser usado para obter os volumes de certos sólidos tridimensionais.

VOLUMES POR FATIAMENTO

Lembre que o princípio básico para encontrar a área de uma região plana é dividir a região em faixas finas, aproximar a área de cada faixa pela de um retângulo, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral para a área. Sob condições apropriadas, a mesma estratégia pode ser usada para encontrar o volume de um sólido. A ideia é dividir o sólido em fatias finas, aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral para o volume (Figura 6.2.1).

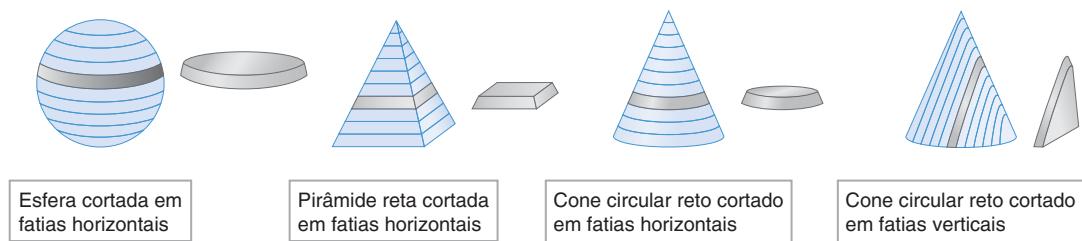


Figura 6.2.1



Figura 6.2.2

O que faz funcionar esse método é o fato de que uma fatia *fina* tem seções transversais que não variam muito nem em tamanho nem em forma, o que, como veremos, faz com que fique fácil aproximar seus volumes (Figura 6.2.2). Além disso, quanto mais fina a fatia, menor a variação em suas seções transversais e melhor a aproximação. Assim, uma vez aproximados os volumes das fatias, podemos formar uma soma de Riemann cujo limite é o volume de todo o sólido. Daremos em breve os detalhes, mas primeiro precisamos discutir como encontrar o volume de um sólido cujas seções transversais não variem nem em tamanho nem em forma (isto é, sejam congruentes).

Um dos exemplos mais simples de um sólido com seções transversais congruentes é um cilindro circular reto de raio r , uma vez que todas as seções transversais tomadas perpendiculares ao eixo central são regiões circulares de raio r . O volume V de um cilindro circular de raio r e altura h pode ser dado em termos da altura e da área de uma seção transversal como

$$V = \pi r^2 h = [\text{área de uma seção transversal}] \times [\text{altura}] \quad (1)$$

Esse é um caso especial de uma fórmula mais geral que se aplica a sólidos denominados cilindros retos. Um *cilindro reto* é um sólido que é gerado quando uma região plana é transladada ao longo de uma reta ou *eixo* que é perpendicular a ela (Figura 6.2.3).

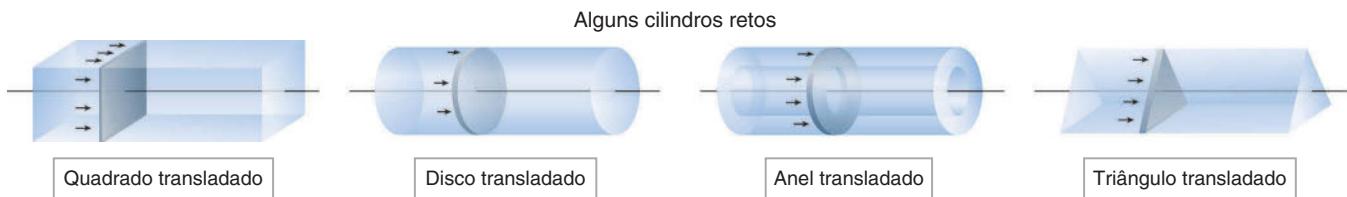


Figura 6.2.3

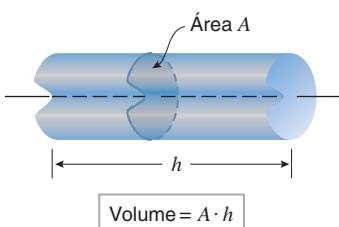


Figura 6.2.4

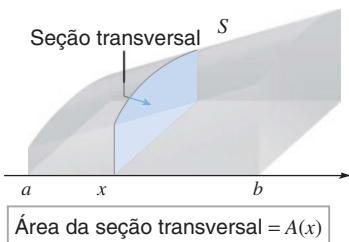


Figura 6.2.5

Se um cilindro reto for gerado pela transladação de uma região de área A ao longo de uma distância h , então dizemos que h é a *altura* (ou a *extensão*) do cilindro e o volume V deste é definido por

$$V = A \cdot h = [\text{área de uma seção transversal}] \times [\text{altura}] \quad (2)$$

(Figura 6.2.4). Observe que isso está de acordo com a Fórmula (1) para o volume do cilindro *circular* reto.

Agora temos todas as ferramentas necessárias à resolução do seguinte problema.

6.2.1 PROBLEMA Seja S um sólido que se estende ao longo do eixo x e que é limitado à esquerda e à direita, respectivamente, pelos planos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$ (Figura 6.2.5). Encontre o volume V do sólido, supondo que sua seção transversal tenha área $A(x)$, conhecida em cada ponto x do intervalo $[a, b]$.

Para resolver esse problema, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, o que tem o efeito de dividir o sólido em n fatias, como mostra o lado esquerdo da Figura 6.2.6. Se admitirmos que a espessura do k -ésimo subintervalo seja Δx_k , então o volume da fatia poderá ser aproximado pelo volume de um cilindro reto com espessura (altura) Δx_k e seção transversal com área $A(x_k^*)$, onde x_k^* é um ponto qualquer do k -ésimo intervalo (ver a parte direita da Figura 6.2.6).

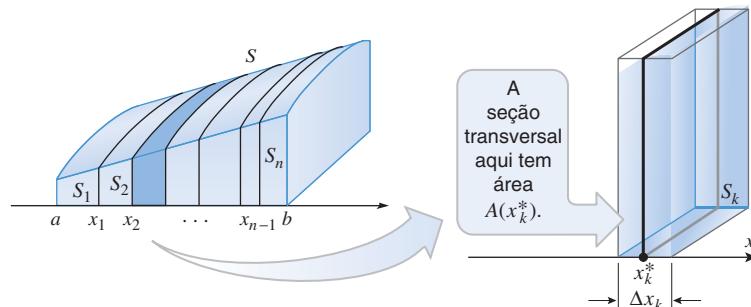


Figura 6.2.6

Somando essas aproximações, obtemos a seguinte soma de Riemann que aproxima o volume V :

$$V \approx \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e as extensões dos subintervalos tendem a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b A(x) dx$$

Em suma, temos o resultado seguinte.

Fica subentendido em nossas contas que as unidades de volume são o cubo das unidades de comprimento (por exemplo, pol³ ou m³).

6.2.2 FÓRMULA PARA O VOLUME Seja S um sólido delimitado por dois planos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$. Se, dado qualquer x em $[a, b]$, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x for $A(x)$, então o volume do sólido será

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (3)$$

desde que $A(x)$ seja integrável.

Há um resultado análogo se a seção transversal for perpendicular ao eixo y .

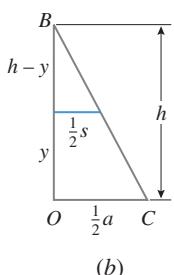
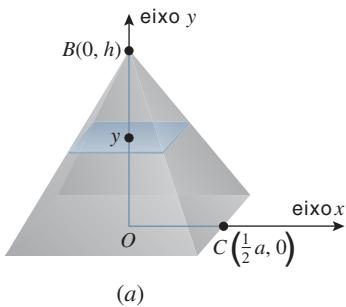
6.2.3 FÓRMULA PARA O VOLUME Seja S um sólido delimitado por dois planos perpendiculares ao eixo y em $y = c$ e $y = d$. Se, dado qualquer y em $[c, d]$, a área da seção transversal a S perpendicular ao eixo y for $A(y)$, então o volume do sólido será

$$V = \int_c^d A(y) dy \quad (4)$$

desde que $A(y)$ seja integrável.

Em palavras, essas fórmulas afirmam:

O volume de um sólido pode ser obtido integrando-se a área da seção transversal de um extremo ao outro do sólido.



► **Exemplo 1** Obtenha a fórmula para o volume de uma pirâmide reta de altura h e cuja base é um quadrado com lados de comprimento a .

Solução Conforme ilustrado na Figura 6.2.7a, introduzimos um sistema retangular de coordenadas no qual o eixo y passa pelo ápice e é perpendicular à base, o eixo x passa pela base e é paralelo a um lado dela.

Em qualquer ponto y de $[0, h]$ sobre o eixo y , a seção transversal perpendicular ao eixo y é um quadrado. Se s for o comprimento de um lado desse quadrado, então, por semelhança de triângulos (Figura 6.2.7b), temos

$$\frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}a} = \frac{h-y}{h} \quad \text{ou} \quad s = \frac{a}{h}(h-y)$$

Assim, a área $A(y)$ da seção transversal em y é

$$A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$$

Figura 6.2.7

e, por (4), o volume é

$$V = \int_0^h A(y) dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} (h-y)^2 dy = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy$$

$$= \frac{a^2}{h^2} \left[-\frac{1}{3}(h-y)^3 \right]_{y=0}^h = \frac{a^2}{h^2} \left[0 + \frac{1}{3}h^3 \right] = \frac{1}{3}a^2h^3$$

Isto é, o volume é $\frac{1}{3}$ da área da base vezes a altura. ▶

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Um **sólido de revolução** é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta que está no mesmo plano da região; a reta é denominada **eixo de revolução**. Muitos sólidos conhecidos são desse tipo (Figura 6.2.8).

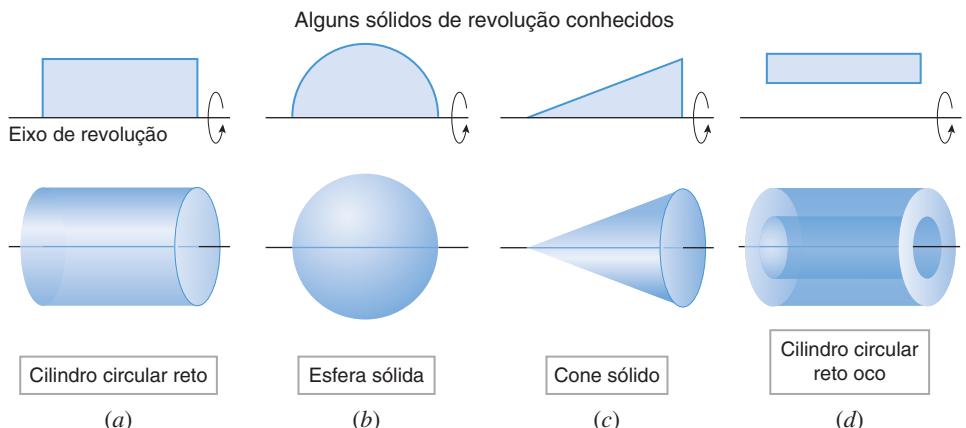


Figura 6.2.8

(a)

(b)

(c)

(d)

■ VOLUME POR DISCOS PERPENDICULARES AO EIXO x

Estaremos interessados no seguinte problema geral.

6.2.4 PROBLEMA Seja f contínua e não negativa em $[a, b]$ e seja R a região que é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 6.2.9a). Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x .

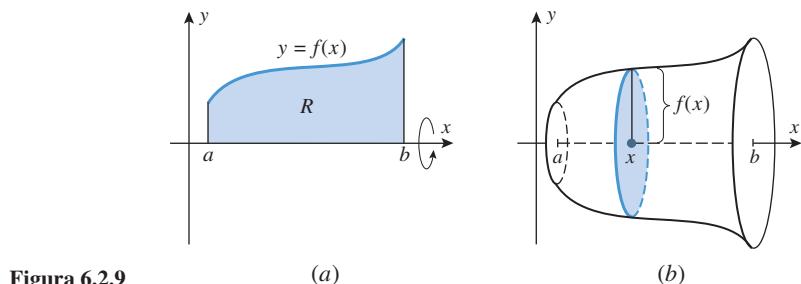


Figura 6.2.9

(a)

(b)

Podemos resolver esse problema por fatiamento. Para isso, observamos que a seção transversal do sólido tomada perpendicularmente ao eixo x no ponto x é um disco de raio $f(x)$ (Figura 6.2.9b). A área dessa região é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

Assim, por (3), o volume de sólido é

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \quad (5)$$

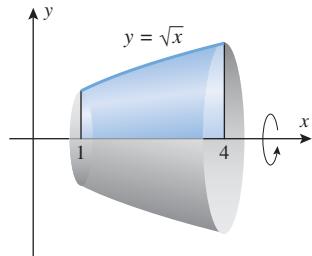


Figura 6.2.10

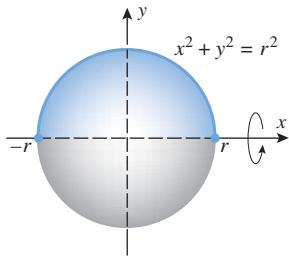
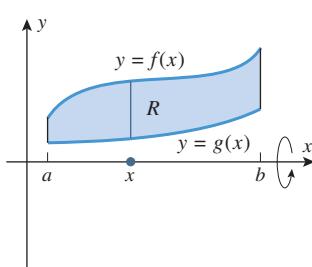


Figura 6.2.11



(a)

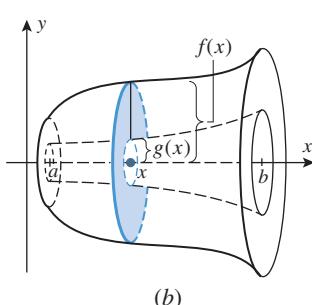


Figura 6.2.12

Como as secções transversais têm a forma de disco, a aplicação dessa fórmula é chamada de **método dos discos**.

► **Exemplo 2** Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $y = \sqrt{x}$ e acima do intervalo $[1, 4]$ é girada em torno do eixo x (Figura 6.2.10).

Solução A partir de (5), o volume é

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \int_1^4 \pi x dx = \left[\frac{\pi x^2}{2} \right]_1^4 = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

► **Exemplo 3** Obtenha a fórmula para o volume de uma esfera de raio r .

Solução Conforme indicado na Figura 6.2.11, uma esfera de raio r pode ser gerada girando-se o disco semicircular superior que está entre o eixo x e

$$x^2 + y^2 = r^2$$

em torno do eixo x . Como a metade superior desse círculo é o gráfico de $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, segue de (5) que o volume da esfera é

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

■ VOLUME POR ARRUELAS PERPENdiculares AO EIXO x

Nem todo sólido de revolução tem interior sólido; alguns têm buracos ou canais, que criam superfícies interiores, como na Figura 6.2.8d. Assim, estaremos interessados em problemas do tipo a seguir.

6.2.5 PROBLEMA Sejam f e g contínuas e não negativas em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq g(x)$ em cada x de $[a, b]$. Seja R a região que é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 6.2.12a). Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x (Figura 6.2.12b).

Podemos resolver esse problema por fatiamento. Para isso, observe que a seção transversal do sólido perpendicular ao eixo x é a região anular ou “em forma de arruela” com raio interior $g(x)$ e raio exterior $f(x)$ (Figura 6.2.12b); logo, sua área é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)$$

Assim, por (3), o volume do sólido é

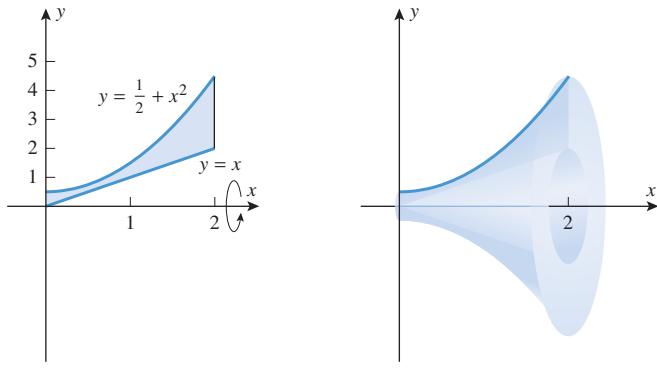
$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \quad (6)$$

Como as secções transversais têm forma de arruelas, a aplicação dessa fórmula é chamada de **método das arruelas**.

► **Exemplo 4** Encontre o volume do sólido gerado quando a região entre os gráficos das equações $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$ e $g(x) = x$ que está acima do intervalo $[0, 2]$ é girada em torno do eixo x .

Solução Inicialmente, esboçamos a região (Figura 6.2.13a) e, em seguida, imaginamo-la girando em torno do eixo x (Figura 6.2.13b). A partir de (6), o volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = \int_0^2 \pi([\frac{1}{2} + x^2]^2 - x^2) dx \\ &= \int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4} + x^4\right) dx = \pi\left[\frac{x}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{69\pi}{10} \end{aligned}$$



Escalas desiguais nos eixos

A região definida por f e g

O sólido de revolução resultante

Figura 6.2.13

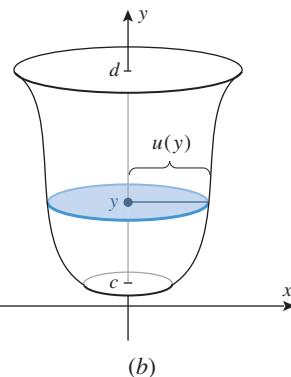
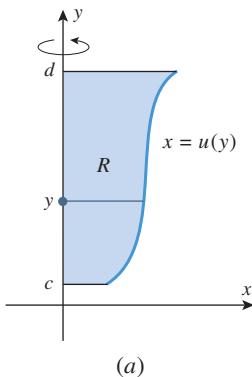
(a)

(b)

■ VOLUMES POR DISCOS E ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO y

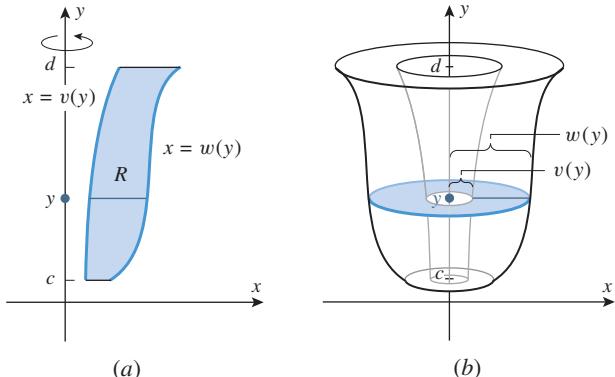
O método dos discos e das arruelas tem análogos quando as regiões são giradas em torno do eixo y (Figuras 6.2.14 e 6.2.15). Usando o método do fatiamento e a Fórmula (4), o leitor não deve ter dificuldades para deduzir as seguintes fórmulas para o volume dos sólidos nas figuras.

$$\begin{array}{ll} V = \int_c^d \pi[u(y)]^2 dy & V = \int_c^d \pi([w(y)]^2 - [v(y)]^2) dy \\ \text{Discos} & \text{Arruelas} \end{array} \quad (7-8)$$



Discos

Figura 6.2.14



Arruelas

Figura 6.2.15

► **Exemplo 5** Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por \$y = \sqrt{x}\$, \$y = 2\$ e \$x = 0\$ é girada em torno do eixo \$y\$.

Solução Inicialmente, esboçamos a região e o sólido (Figura 6.2.16). As seções transversais perpendiculares ao eixo \$y\$ são discos; logo, aplicaremos (7). No entanto, primeiramente, precisamos reescrever \$y = \sqrt{x}\$ como \$x = y^2\$. Assim, a partir de (7), com \$u(y) = y^2\$, o volume é

$$V = \int_c^d \pi[u(y)]^2 dy = \int_0^2 \pi y^4 dy = \frac{\pi y^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

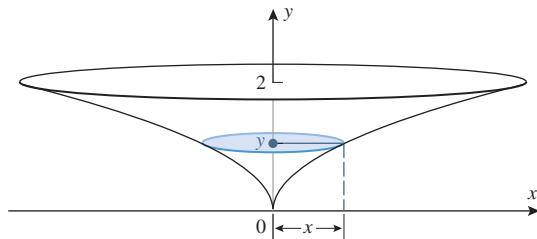
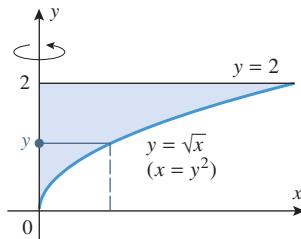


Figura 6.2.16

■ OUTROS EIXOS DE REVOLUÇÃO

É possível utilizar os métodos dos discos e das arruelas para encontrar o volume de um sólido de revolução cujo eixo de revolução não seja um dos eixos coordenados. Em vez de desenvolver uma nova fórmula para cada situação, vamos usar as Fórmulas (3) e (4) e integrar uma área transversal apropriada para encontrar o volume.

► **Exemplo 6** Encontre o volume do sólido gerado quando a região abaixo da curva \$y = x^2\$ acima do intervalo \$[0, 2]\$ for girada em torno da reta \$y = -1\$.

Solução Inicialmente, esboçamos a região e o eixo de revolução e, em seguida, imaginamos a região girando em torno desse eixo (Figura 6.2.17). Em cada \$x\$ do intervalo \$0 \leq x \leq 2\$,

a seção transversal do sólido perpendicular ao eixo $y = -1$ é uma arruela de raio exterior $x^2 + 1$ e raio interior 1. Como a área dessa arruela é

$$A(x) = \pi([x^2 + 1]^2 - 1^2) = \pi(x^4 + 2x^2)$$

segue, de (3), que o volume do sólido é

$$V = \int_0^2 A(x) dx = \int_0^2 \pi(x^4 + 2x^2) dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{176\pi}{15}$$

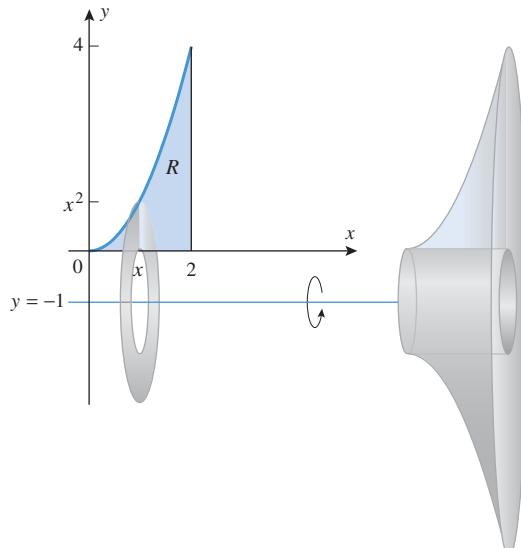


Figura 6.2.17

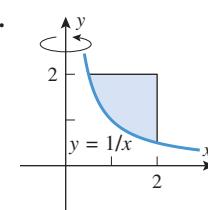
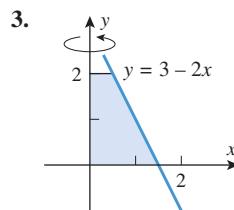
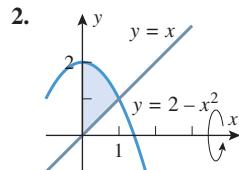
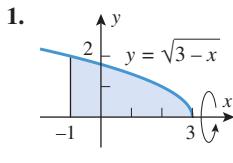
EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 6.2 (Ver página 431 para respostas.)

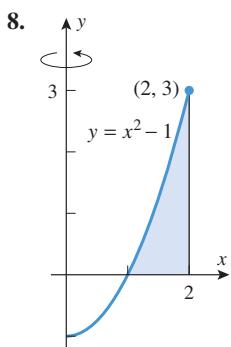
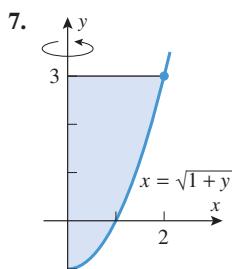
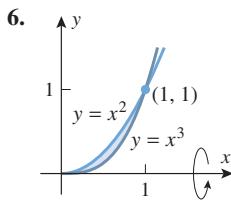
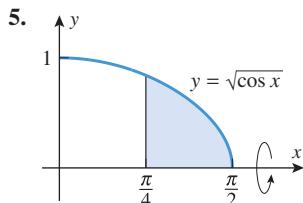
- Um sólido S se estende ao longo do eixo x de $x = 1$ até $x = 3$. Dado x entre 1 e 3, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x é $3x^2$. Uma expressão integral para o volume de S é _____. O valor dessa integral é _____.
- Um sólido S é gerado fazendo girar em torno do eixo x a região delimitada pelo eixo x e pela curva $y = \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x \leq \pi$).
 - Dado x entre 0 e π , a área da seção transversal de S em x , perpendicular ao eixo x , é $A(x) =$ _____.
 - Uma expressão integral para o volume de S é _____.
 - O valor da integral em (b) é _____.
- Um sólido S é gerado fazendo girar em torno do eixo x a região delimitada pela reta $y = 2x + 1$ e a curva $y = x^2 + 1$.

- Dado x entre _____ e _____, a área da seção transversal de S em x , perpendicular ao eixo x , é $A(x) =$ _____.
- Uma expressão integral para o volume de S é _____.
- Um sólido S é gerado fazendo girar em torno do eixo y a região delimitada pela reta $y = x + 1$ e a curva $y = x^2 + 1$.
 - Dado y entre _____ e _____, a área da seção transversal de S em y , perpendicular ao eixo y , é $A(y) =$ _____.
 - Uma expressão integral para o volume de S é _____.

EXERCÍCIOS 6.2 [C] CAS

- 1-4** Encontre o volume do sólido que resulta quando a região sombreada gira em torno do eixo indicado. ■





9. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = x^2$ e o eixo x de $x = 0$ até $x = 2$ e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo x , são quadrados.
10. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = \sec x$ e o eixo x de $x = \pi/4$ até $x = \pi/3$ e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo x , são quadrados.

11-18 Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada pelas curvas dadas gira em torno do eixo x . ■

11. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 3$

12. $y = 9 - x^2$, $y = 0$

13. $x = \sqrt{y}$, $x = y/4$

14. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$.

[Sugestão: Use a identidade $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.]

15. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 3$

16. $y = e^{-2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

17. $y = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$

18. $y = \frac{e^{3x}}{\sqrt{1 + e^{6x}}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

19. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = x^3$ e o eixo y de $y = 0$ até $y = 1$ e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo y , são quadrados.

20. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $x = 1 - y^2$ e o eixo y e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo y , são quadrados.

21-26 Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada pelas curvas dadas gira em torno do eixo y . ■

21. $x = \operatorname{cossec} y$, $y = \pi/4$, $y = 3\pi/4$, $x = 0$

22. $y = x^2$, $x = y^2$

23. $x = y^2$, $x = y + 2$

24. $x = 1 - y^2$, $x = 2 + y^2$, $y = -1$, $y = 1$

25. $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$

26. $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}$ ($x > 0$), $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$

27-30 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. [Nestes exercícios, suponha que um sólido S de volume V seja delimitado por dois planos paralelos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$ e que, dado qualquer x em $[a, b]$, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x seja $A(x)$.] ■

27. Se cada seção transversal de S perpendicular ao eixo x for um quadrado, então S é um paralelepípedo retangular (ou seja, tem um formato de caixa).

28. Se cada seção transversal de S for um disco ou uma arruela, então S é um sólido de revolução.

29. Se x for dado em centímetros, então $A(x)$ deve ser uma função quadrática de x , pois as unidades de $A(x)$ serão centímetros quadrados.

30. O valor médio de $A(x)$ no intervalo $[a, b]$ é dado por $V/(b - a)$.

31. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região acima do eixo x e abaixo da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

gira em torno do eixo x .

32. Seja V o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 2$ e $x = b$ ($0 < b < 2$) gira em torno do eixo x . Encontre o valor de b para o qual $V = 3$.

33. Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = \sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{2x}$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x . [Sugestão: Divida o sólido em duas partes.]

34. Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x . [Sugestão: Divida o sólido em duas partes.]

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Suponha que f seja uma função contínua em $[a, b]$ e seja R a região delimitada pela curva $y = f(x)$ e a reta $y = k$ de $x = a$ até $x = b$. Usando o método dos discos, deduza e explique uma fórmula para o volume do sólido que resulta quando a região R é feita girar em torno da reta $y = k$. Enuncie e explique as hipóteses adicionais sobre f , se as houver, que são necessárias para a validade da fórmula obtida.

36. Suponha que v e w sejam funções contínuas em $[c, d]$ e seja R a região delimitada pelas curvas $x = v(y)$ e $x = w(y)$ de $y = c$ até $y = d$. Usando o método das arruelas, deduza e explique uma fórmula para o volume do sólido que resulta quando a região R é feita girar em torno da reta $x = k$. Enuncie e explique as hipóteses adicionais sobre v e w , se

as houver, que são necessárias para a validade da fórmula obtida.

37. Considere o sólido que resulta quando a região sombreada do Exercício 1 gira em torno da reta $y = 2$.

- (a) Faça uma conjectura sobre qual é maior: o volume desse sólido ou o volume do sólido do Exercício 1. Explique seu raciocínio.
 (b) Confira sua conjectura calculando esse volume e comparando-o com o volume obtido no Exercício 1.

38. Considere o sólido que resulta quando a região sombreada do Exercício 4 gira em torno da reta $x = 2,5$.

- (a) Faça uma conjectura sobre qual é maior: o volume desse sólido ou o volume do sólido do Exercício 4. Explique seu raciocínio.
 (b) Confira sua conjectura calculando esse volume e comparando-o com o volume obtido no Exercício 4.

39. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 9$ gira em torno da reta $x = 9$.

40. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região do Exercício 35 gira em torno da reta $y = 3$.

41. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $x = y^2$ e $x = y$ gira em torno da reta $y = -1$.

42. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região do Exercício 41 gira em torno da reta $x = -1$.

43. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = x^2$ e $y = x^3$ for girada em torno da reta $x = 1$.

44. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região do Exercício 43 for girada em torno da reta $y = -1$.

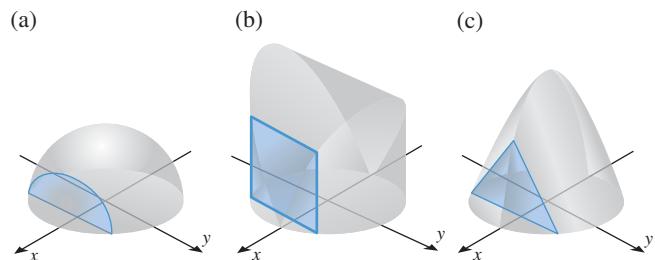
45. A ponta cônica de reentrada de um veículo espacial é desenhada de tal forma que uma seção transversal tomada x pés da ponta e perpendicular ao eixo de simetria é um círculo com raio de $\frac{1}{4}x^2$ pés. Encontre o volume da ponta cônica sabendo que seu comprimento é de 20 pés.

46. Um certo sólido tem uma altura de 1 m e uma seção transversal, tomada x metros acima da base do sólido, é uma região anular de raio interno x^2 m e raio externo \sqrt{x} m. Encontre o volume do sólido.

47. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

48. A base de um certo sólido é a região delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$. Cada seção transversal perpendicular ao eixo x é um semicírculo, com diâmetro de um lado a outro da base. Encontre o volume do sólido.

49. Nas partes (a) a (c), encontre o volume do sólido cuja base é o interior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ e cujas seções transversais tomadas perpendicularmente à base são
 (a) semicírculos (b) quadrados
 (c) triângulos equiláteros



50. Conforme a figura abaixo, a cúpula de uma catedral foi projetada com três suportes semicirculares de raio r , de modo que cada seção transversal horizontal é um hexágono regular. Mostre que o volume dessa cúpula é $r^3\sqrt{3}$.



Figura Ex-50

- C 51-54 Use um CAS para estimar o volume do sólido que resulta quando a região delimitada pela curva gira em torno do eixo indicado. ■

51. $y = \sin^8 x$, $y = 2x/\pi$, $x = 0$, $x = \pi/2$; eixo x

52. $y = \pi^2 \operatorname{sen} x \cos^3 x$, $y = 4x^2$, $x = 0$, $x = \pi/4$; eixo x

53. $y = e^x$, $x = 1$, $y = 1$; eixo y

54. $y = x\sqrt{\operatorname{arc tg} x}$, $y = x$; eixo x

55. A figura abaixo mostra uma **calota esférica** de raio ρ e altura h cortada de uma esfera de raio r . Mostre que o volume V da calota pode ser expresso como

(a) $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ (b) $V = \frac{1}{6}\pi h(3\rho^2 + h^2)$.

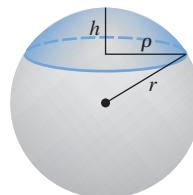


Figura Ex-55

56. Se um fluido entra em um tanque semiesférico com raio de 3 m, a uma taxa de $0,5 \text{ m}^3/\text{min}$, com que velocidade estará subindo quando a profundidade for de 1,5 m? [Sugestão: Veja o Exercício 55.]

- 57.** A figura a seguir mostra as dimensões de uma pequena lâmpada em 10 pontos igualmente espaçados.
- Use fórmulas de Geometria para fazer uma primeira estimativa do volume englobado pela parte de vidro da lâmpada.
 - Use a média das aproximações pelas extremidades à esquerda e à direita para aproximar o volume.

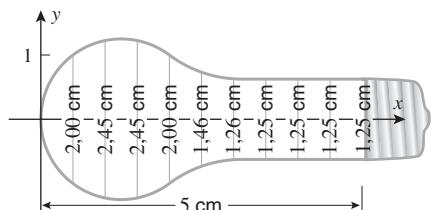


Figura Ex-57

- 58.** Use o resultado do Exercício 55 para encontrar o volume do sólido que sobra quando um buraco de raio $r/2$ é feito através do centro de uma esfera de raio r e verifique sua resposta por integração.
- 59.** Conforme a figura abaixo, um copo de coquetel com a forma de um hemisfério com diâmetro de 8 cm contém uma cereja com 2 cm de diâmetro. Se o copo for preenchido até uma profundidade de h cm, que volume de líquido ele conterá? [Sugestão: Considere primeiro o caso em que a cereja está parcialmente submersa e, depois, quando ela está totalmente submersa.]



Figura Ex-59

- 60.** Encontre o volume do toro que resulta quando a região interior ao círculo de raio r com centro em um ponto $(h, 0)$, $h > r$, gira em torno do eixo y . [Sugestão: Use fórmulas apropriadas de Geometria plana para ajudar no cálculo da integral definida.]
- 61.** Uma cunha é cortada de um cilindro circular reto de raio r por dois planos: um perpendicular ao eixo do cilindro e o outro fazendo um ângulo θ com o primeiro. Encontre o volume da

fatia por fatiamento perpendicular ao eixo y , conforme a figura abaixo.

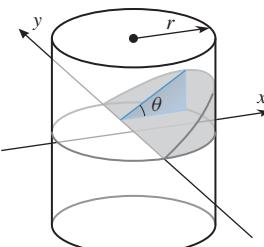


Figura Ex-61

- 62.** Encontre o volume da cunha descrita no Exercício 61 por fatiamento perpendicular ao eixo x .
- 63.** Dois cilindros circulares retos de raio r têm eixos que se interseccionam em ângulos retos. Encontre o volume do sólido comum a ambos. [Sugestão: Um oitavo do sólido está esboçado na Figura Ex-63.]
- 64.** Em 1635, Bonaventura Cavalieri, um aluno de Galileu, estabeleceu o seguinte resultado, chamado **princípio de Cavalieri**: *Se dois sólidos tiverem a mesma altura, e se as áreas de suas seções transversais, tomadas paralelas e a iguais distâncias de suas bases, forem sempre iguais, então os sólidos têm o mesmo volume.* Use esse resultado para obter o volume do cilindro oblíquo da Figura Ex-64. (Veja Exercício 52 da Seção 6.1 para uma versão planar do Princípio de Cavalieri.)

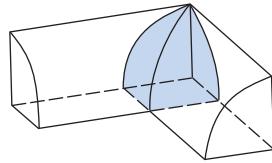


Figura Ex-63

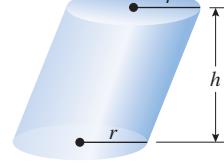


Figura Ex-64

- 65. Texto** Use os resultados desta seção para deduzir o Princípio de Cavalieri (Exercício 64).
- 66. Texto** Escreva um parágrafo curto explicando como as Fórmulas (4) a (8) podem ser vistas como consequências da Fórmula (3).

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.2

- 1.** $\int_1^3 3x^2 dx; 26$ **2.** (a) $\pi \operatorname{sen} x$ (b) $\int_0^\pi \pi \operatorname{sen} x dx$ (c) 2π **3.** (a) 0; 2; $\pi[(2x+1)^2 - (x^2+1)^2] = \pi[-x^4 + 2x^2 + 4x]$
4. (a) 1; 2; $\pi[(y-1) - (y-1)^2] = \pi[-y^2 + 3y - 2]$ (b) $\int_1^2 \pi[-y^2 + 3y - 2] dy$

6.3 VOLUMES POR CAMADAS CILÍNDRICAS

Os métodos para os cálculos de volume discutidos até o momento dependem de nossa habilidade em computar a área da seção transversal de um sólido e integrá-la através dele. Nesta seção, vamos desenvolver outro método para encontrar volumes que pode ser aplicado quando a área da seção transversal não puder ser encontrada ou a integração for muito difícil.

CAMADAS CILÍNDRICAS

Nesta seção, estaremos interessados no seguinte problema:

6.3.1 PROBLEMA Sejam f contínua e não negativa em $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) e R a região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Encontre o volume V do sólido de revolução S gerado pela rotação da região R em torno do eixo y (Figura 6.3.1).

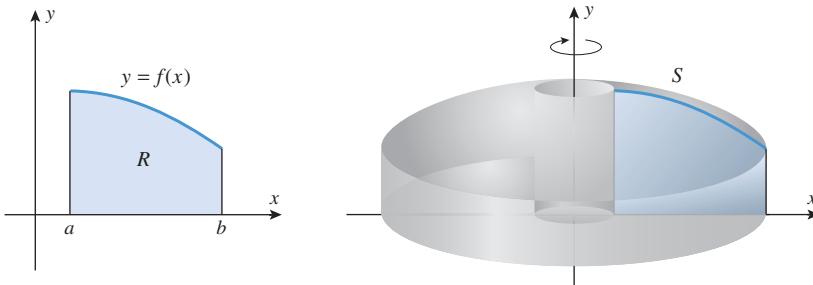


Figura 6.3.1

Às vezes, problemas desse tipo podem ser resolvidos pelos métodos dos discos ou das arruelas perpendiculares ao eixo y , mas quando tais métodos não são aplicáveis ou a integral for difícil, o *método das camadas cilíndricas*, também denominado *método das cascas*, que discutiremos a seguir, frequentemente funciona.

Uma *camada cilíndrica* é um sólido envolvido por dois cilindros retos concêntricos (Figura 6.3.2). O volume V de uma camada cilíndrica com raio interno r_1 , raio externo r_2 e altura h pode ser escrito como

$$\begin{aligned} V &= [\text{área da seção transversal}] \cdot [\text{altura}] \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2}(r_1 + r_2)\right] \cdot h \cdot (r_2 - r_1) \end{aligned}$$

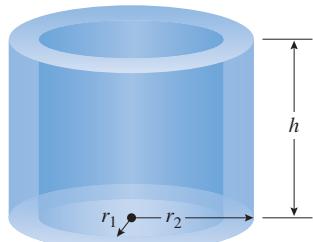


Figura 6.3.2

No entanto, $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ é o raio médio da camada e $r_2 - r_1$, sua espessura; assim,

$$V = 2\pi \cdot [\text{raio médio}] \cdot [\text{altura}] \cdot [\text{espessura}] \quad (1)$$

Vamos mostrar agora como essa fórmula pode ser usada para resolver o Problema 6.3.1. A ideia subjacente é dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e, desse modo, subdividir a região R em n faixas, R_1, R_2, \dots, R_n (Figura 6.3.3a). Quando a região R gira em torno do eixo y , essas faixas geram os sólidos S_1, S_2, \dots, S_n em “forma de tubo”, alinhados um dentro do outro, e que, juntos, formam todo o sólido S (Figura 6.3.3b). Assim, o volume V do sólido pode ser obtido somando os volumes dos tubos; isto é,

$$V = V(S_1) + V(S_2) + \cdots + V(S_n)$$

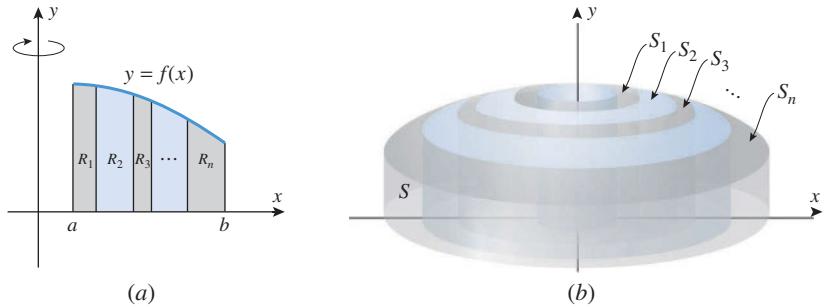


Figura 6.3.3

(a)

(b)

Como regra, os tubos terão superfícies superiores curvas; portanto, não haverá uma fórmula simples para seus volumes. Porém, se as faixas forem finas, podemos aproximar cada uma por um retângulo (Figura 6.3.4a). Esses retângulos, quando giram em torno do eixo y , produzem camadas cilíndricas cujos volumes se aproximam bastante dos volumes gerados pelas faixas originais (Figura 6.3.4b). Vamos mostrar que, somando os volumes das camadas cilíndricas, podemos obter uma soma de Riemann que aproxima o volume V e, tomando o limite das somas de Riemann, podemos obter uma integral para o volume exato V .

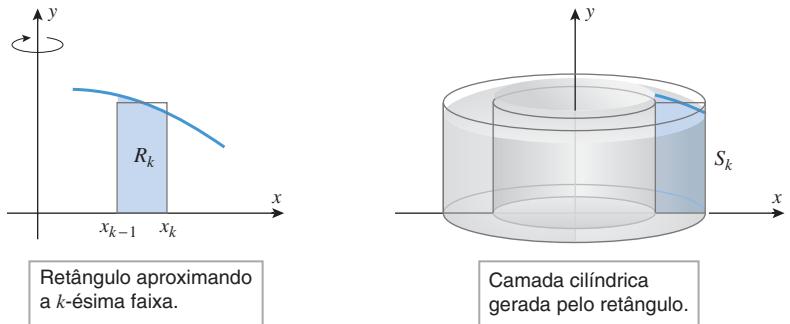


Figura 6.3.4

(a)

(b)

Para implementar essa ideia, vamos supor que a k -ésima faixa se estende do ponto x_{k-1} ao ponto x_k e que a extensão dessa faixa seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Se x_k^* for o *ponto médio* do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e se construirmos um retângulo de altura $f(x_k^*)$ acima desse intervalo, então, fazendo esse retângulo girar em torno do eixo y , obtemos uma camada cilíndrica de altura $f(x_k^*)$, raio médio x_k^* e espessura Δx_k (Figura 6.3.5). A partir de (1), o volume V_k dessa camada cilíndrica é

$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k$$

Somando os volumes das n camadas cilíndricas, obtemos a seguinte soma de Riemann que aproxima o volume V :

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k$$

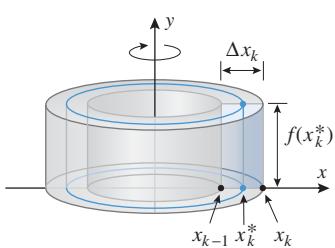


Figura 6.3.5

Tomando o limite quando n cresce e a extensão dos subintervalos tende a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Em suma, temos o seguinte resultado:

6.3.2 VOLUME POR CAMADAS CILÍNDRICAS EM TORNO DO EIXO y Sejam f uma função contínua não negativa em $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) e R a região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo y é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad (2)$$

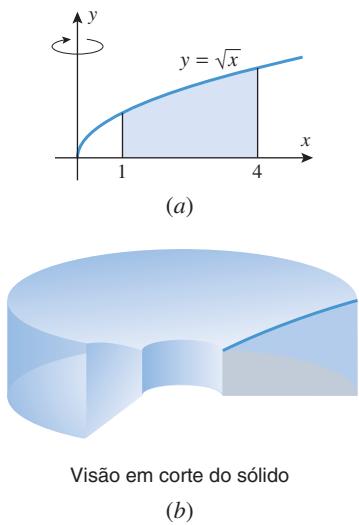


Figura 6.3.6

► **Exemplo 1** Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região envolvida por $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ e o eixo x .

Solução Inicialmente, esboçamos a região (Figura 6.3.6a); em seguida, imaginamo-la girando em torno do eixo y (Figura 6.3.6b). Como $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ e $b = 4$, a Fórmula (2) fornece

$$V = \int_1^4 2\pi x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_1^4 x^{3/2} dx = \left[2\pi \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_1^4 = \frac{4\pi}{5} [32 - 1] = \frac{124\pi}{5}$$

■ VARIAÇÕES DO MÉTODO DAS CAMADAS CILÍNDRICAS

O método da camada cilíndrica é aplicável em várias situações que não preenchem as condições requeridas pela Fórmula (2). Por exemplo, a região pode estar limitada entre duas curvas, ou o eixo de revolução pode ser uma outra reta que não o eixo y. Porém, em vez de desenvolver uma fórmula separada para cada situação possível, vamos considerar uma maneira geral de pensar no método das camadas cilíndricas, que pode ser adaptada a cada nova situação que surgir.

Com esse propósito, precisaremos reexaminar o integrando na Fórmula (2): em cada ponto x no intervalo $[a, b]$, o segmento de reta vertical do eixo x até a curva $y = f(x)$ pode ser visto como a seção transversal da região R em x (Figura 6.3.7a). Quando a região R gira em torno do eixo y , a seção transversal em x varre a *superfície* de um cilindro circular reto de altura $f(x)$ e raio x (Figura 6.3.7b). A área dessa superfície é

$$2\pi x f(x)$$

(Figura 6.3.7c), que é o integrando em (2). Assim, a Fórmula (2) pode ser vista informalmente da seguinte maneira.

6.3.3 UM PONTO DE VISTA INFORMAL SOBRE CAMADAS CILÍNDRICAS O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região R em torno de um eixo pode ser obtido integrando-se a área da superfície gerada por uma seção transversal arbitrária de R tomada paralelamente ao eixo de revolução.

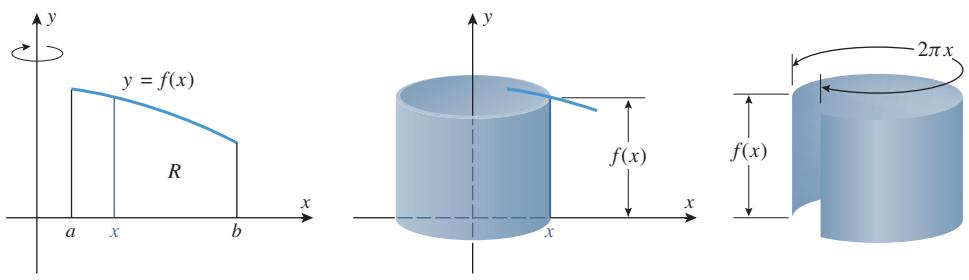


Figura 6.3.7

Os seguintes exemplos ilustram como aplicar esse resultado nas situações em que a Fórmula (2) não for aplicável.

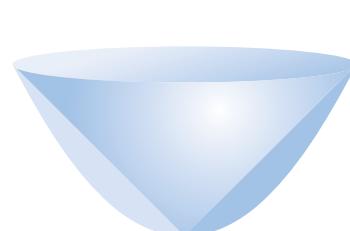
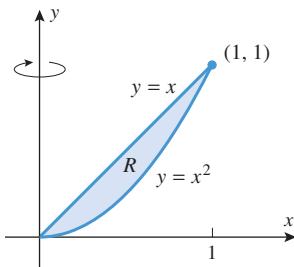
► Exemplo 2 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região R delimitada por $y = x$ e $y = x^2$ do primeiro quadrante (Figura 6.3.8a).

Solução Conforme a parte (b) da Figura 6.3.8, em cada x de $[0, 1]$ a seção transversal de R paralela ao eixo y gera uma superfície cilíndrica de altura $x - x^2$ e raio x . Como a área dessa superfície é

$$2\pi x(x - x^2)$$

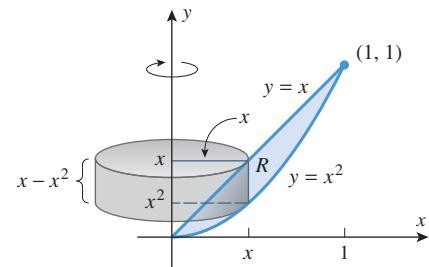
o volume do sólido é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$



Este sólido parece uma bacia com um interior em forma de cone

(a)



(b)

Figura 6.3.8

► Exemplo 3 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y = -1$ da região R abaixo de $y = x^2$ e acima do intervalo $[0, 2]$.

Solução Inicialmente, esboçamos o eixo de rotação e, em seguida, imaginamos a região grande em torno desse eixo (Figura 6.3.9a). Conforme ilustrado na Figura 6.3.9b, em cada y no intervalo $0 \leq y \leq 4$, a seção transversal de R paralela ao eixo x gera uma superfície cilíndrica de altura $2 - \sqrt{y}$ e raio $y + 1$. Como a área dessa superfície é

$$2\pi(y + 1)(2 - \sqrt{y})$$

segue que o volume do sólido é

$$\begin{aligned} \int_0^4 2\pi(y + 1)(2 - \sqrt{y}) dy &= 2\pi \int_0^4 (2y - y^{3/2} + 2 - y^{1/2}) dy \\ &= 2\pi \left[y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2} + 2y - \frac{2}{3}y^{3/2} \right]_0^4 = \frac{176\pi}{15} \end{aligned}$$

Observe que o volume encontrado no Exemplo 3 coincide com o volume do mesmo sólido encontrado pelo método das arruelas no Exemplo 6 da Seção 6.2. Confirme que o volume obtido no Exemplo 2 pelo método das camadas cilíndricas também pode ser obtido pelo método das arruelas.

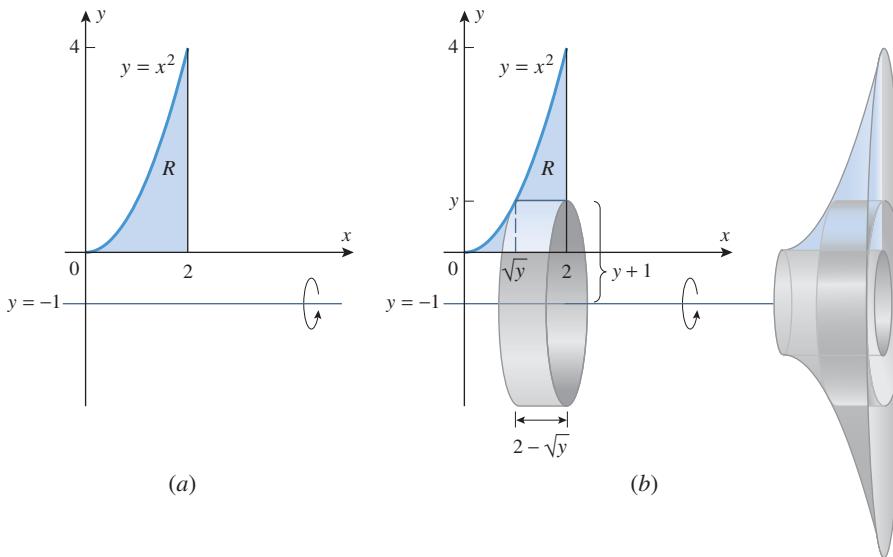


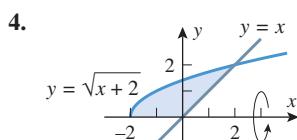
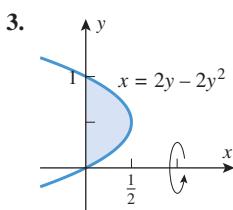
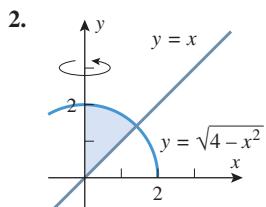
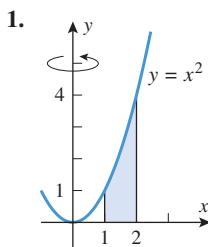
Figura 6.3.9

✓ EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 6.3 (Ver página 438 para respostas.)

- Seja R a região entre o eixo x e a curva $y = 1 + \sqrt{x}$, com $1 \leq x \leq 4$.
 - Dado x entre 1 e 4, a área da superfície cilíndrica gerada pela rotação em torno do eixo y da seção transversal vertical de R em x é _____.
 - Usando camadas cilíndricas, uma expressão integral para o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo y é _____.
- Seja R a região descrita no Exercício 1.
 - Dado x entre 1 e 4, a área da superfície cilíndrica gerada pela rotação em torno da reta $x = 5$ da seção transversal vertical de R em x é _____.

EXERCÍCIOS 6.3 C CAS

- 1-4** Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando a região sombreada gira em torno do eixo indicado. ■



- Usando camadas cilíndricas, uma expressão integral para o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno da reta $x = 5$ é _____.
- Um sólido S é gerado pela rotação em torno do eixo x da região englobada pelas curvas $x = (y - 2)^2$ e $x = 4$. Usando camadas cilíndricas, uma expressão integral para o volume de S é _____.

- 5-12** Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando a região englobada pelas curvas gira em torno do eixo y . ■

- $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$
- $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $x = 9$, $y = 0$
- $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$
- $y = \cos(x^2)$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $y = 0$
- $y = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $x = 2$
- $y = 2x - x^2$, $y = 0$
- $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$
- $y = e^{x^2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$, $y = 0$

- 13-16** Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando a região englobada pelas curvas gira em torno do eixo x . ■

13. $y^2 = x$, $y = 1$, $x = 0$

14. $x = 2y$, $y = 2$, $y = 3$, $x = 0$

15. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$ 16. $xy = 4$, $x + y = 5$

17-20 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

17. O volume de uma camada cilíndrica é igual ao produto da espessura da camada com a área de superfície do cilindro cuja altura é a da camada e cujo raio é igual à média dos raios exterior e interior da camada.

18. O método das camadas cilíndricas é um caso especial do método de integração de áreas de seções transversais discutido na Seção 6.2.

19. No método das camadas cilíndricas, a integração é efetuada num intervalo do eixo de coordenadas que é perpendicular ao eixo de revolução do sólido.

20. A aproximação das somas de Riemann

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k \quad \left(\text{onde } x_k^* = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right)$$

para o volume de um sólido de revolução é exata se f for uma função constante.

C 21. Use um CAS para encontrar o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = e^x$ e $y = 0$ para $1 \leq x \leq 2$ gira em torno do eixo y .

C 22. Use um CAS para encontrar o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = \cos x$, $y = 0$ e $x = 0$ com $0 \leq x \leq \pi/2$ gira em torno do eixo y .

C 23. Considere a região situada à direita do eixo y , à esquerda da reta vertical $x = k$ ($0 < k < \pi$) e entre a curva $y = \sin x$ e o eixo x . Use um CAS para estimar o valor de k para o qual o sólido que resulta quando essa região gira em torno do eixo y tem um volume igual a 8 unidades cúbicas.

ENFOCANDO CONCEITOS

24. Sejam R_1 e R_2 regiões com a forma mostrada abaixo. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando

- (a) a região R_1 gira em torno do eixo y
- (b) a região R_2 gira em torno do eixo x

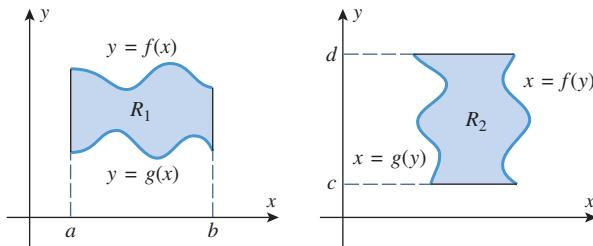


Figura Ex-24

25. (a) Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que é gerado quando a região sob a curva

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x$$

e acima de $[0, 1]$ gira em torno do eixo y .

(b) Para esse problema, o método das camadas cilíndricas é mais fácil ou mais difícil do que o método do fatiamento discutido na última seção? Explique.

26. Sejam f uma função contínua e não negativa em $[a, b]$ e R a região delimitada por $y = f(x)$ e $y = 0$ para $a \leq x \leq b$. Usando o método das camadas cilíndricas, deduza e explique uma fórmula para o volume do sólido que resulta quando a região R gira em torno da reta $x = k$, sendo $k \leq a$.

27-28 Usando o método das camadas cilíndricas, monte uma integral (mas não a calcule) para o volume do sólido gerado quando a região R é girada em torno (a) da reta $x = 1$ e (b) da reta $y = -1$. ■

27. R é a região delimitada pelos gráficos $y = x$, $y = 0$ e $x = 1$.

28. R é a região do primeiro quadrante delimitada pelos gráficos de $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$ e $x = 0$.

29. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que é gerado quando a região envolvida por $y = 1/x^3$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$ gira em torno da reta $x = -1$.

30. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que é gerado quando a região envolvida por $y = x^3$, $y = 1$ e $x = 0$ gira em torno da reta $y = 1$.

31. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do cone gerado quando o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, r)$ e $(h, 0)$, sendo $r > 0$ e $h > 0$, gira em torno do eixo x .

32. A região entre a curva $y^2 = kx$ e a reta $x = \frac{1}{4}k$ gira em torno da reta $x = \frac{1}{2}k$. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido resultante. (Suponha $k > 0$.)

33. Conforme a figura a seguir, um buraco cilíndrico é feito passando pelo centro de uma esfera. Mostre que o volume do sólido remanescente depende somente do comprimento L do buraco e não do tamanho da esfera.

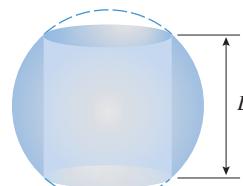


Figura Ex-33

34. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do toro obtido fazendo girar o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ em torno da reta $x = b$, sendo $b > a > 0$. [Sugestão: Pode ajudar na integração imaginar que a integral é uma área.]

35. Sejam V_x e V_y os volumes dos sólidos resultantes quando a região limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = b$ ($b > \frac{1}{2}$) gira em torno dos eixos x e y , respectivamente. Há algum valor de b para o qual $V_x = V_y$?
36. (a) Encontre o volume V do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = 1/(1+x^4)$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$ ($b > 1$) gira em torno do eixo y .
 (b) Encontre $\lim_{b \rightarrow +\infty} V$.
37. **Texto** Diante da tarefa de calcular o volume de um sólido de revolução, qual seria o seu procedimento para decidir o método utilizado, se o dos discos, o das arruelas ou o das camadas cilíndricas?
38. **Texto** Com ambos os métodos dos discos/arruelas e o das camadas cilíndricas, integramos uma “área” para obter o volume de um sólido de revolução. Contudo, essas duas abordagens são bastante diferentes. Escreva um parágrafo curto discutindo essas diferenças.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 6.3

1. (a) $2\pi x(1 + \sqrt{x})$ (b) $\int_1^4 2\pi x(1 + \sqrt{x}) dx$ 2. $2\pi(5-x)(1 + \sqrt{x})$ (b) $\int_1^4 2\pi(5-x)(1 + \sqrt{x}) dx$
 3. $\int_0^4 2\pi y[4 - (y-2)^2] dy$

6.4 COMPRIMENTO DE UMA CURVA PLANA

Nesta seção, utilizaremos as ferramentas do Cálculo para estudar o problema de encontrar o comprimento de uma curva plana.

■ COMPRIMENTO DE ARCO

Nosso primeiro objetivo é definir o que se entende por **comprimento de arco**, ou simplesmente **comprimento**, de uma curva plana $y = f(x)$ acima de um intervalo $[a, b]$ (Figura 6.4.1). Uma vez alcançado isso, poderemos nos concentrar no problema de calcular comprimentos de arco. Para evitar complicações desnecessárias, impomos a exigência de que f' seja contínua em $[a, b]$, caso em que dizemos que $y = f(x)$ é uma **curva lisa** em $[a, b]$, ou então que f é uma **função lisa**, ou **suave**, em $[a, b]$. Assim, passamos a nos ocupar do problema seguinte.

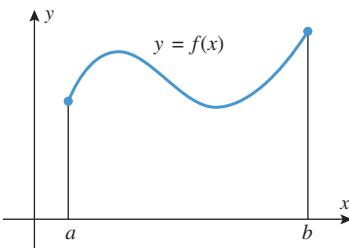


Figura 6.4.1

6.4.1 PROBLEMA DO COMPRIMENTO DE ARCO Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva lisa no intervalo $[a, b]$. Defina e obtenha uma fórmula para o comprimento de arco L da curva $y = f(x)$ acima do intervalo $[a, b]$.

Intuitivamente, podemos pensar no comprimento de arco de uma curva como o número obtido alinhando um pedaço de barbante com a curva e, então, medindo o comprimento do barbante depois de esticado.

Para definir o comprimento de arco de uma curva, começamos quebrando a curva em segmentos pequenos. Então, aproximamos esses segmentos da curva por segmentos de reta e somamos os comprimentos dos segmentos de reta para formar uma soma de Riemann. A Figura 6.4.2 ilustra como tais segmentos de reta tendem a se tornar aproximações cada vez melhores da curva, à medida que aumenta o número de segmentos utilizados. Quando o número de segmentos aumenta, as somas de Riemann correspondentes tendem a uma integral definida cujo valor será tomado como sendo o comprimento de arco L da curva.

Para implementar nossa ideia de resolução do Problema 6.4.1, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Como mostra a Figura 6.4.3a, sejam P_0, P_1, \dots, P_n os pontos da curva com coordenadas x iguais

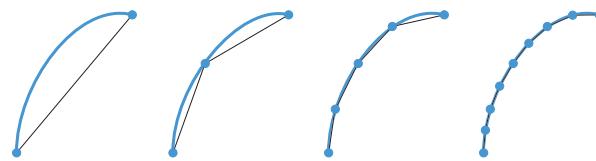


Figura 6.4.2

Segmentos de reta mais curtos
aproximam melhor a reta.

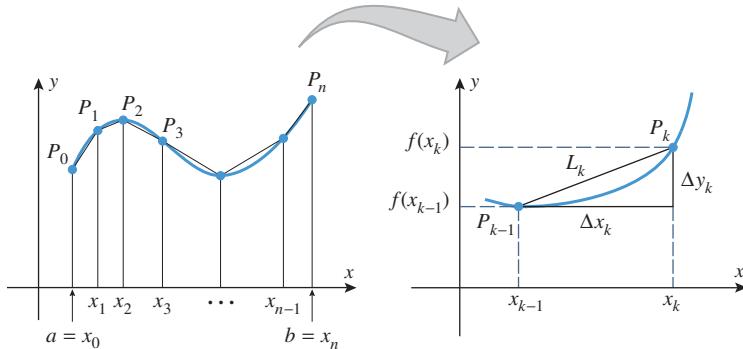


Figura 6.4.3

(a)

(b)

a $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b = x_n$; agora, liguemos esses pontos por segmentos de reta. Esses segmentos de reta formam um **caminho poligonal** que pode ser considerado como uma aproximação da curva $y = f(x)$. Como indica a Figura 6.4.3b, o comprimento L_k do k -ésimo segmento do caminho poligonal é

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \quad (1)$$

Agora, se somarmos os comprimentos desses segmentos de reta, obteremos a seguinte aproximação do comprimento L da curva

$$L \approx \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \quad (2)$$

Para colocar isso na forma de uma soma de Riemann, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio (4.8.2). Esse teorema implica que existe um ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \quad \text{ou} \quad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*) \Delta x_k$$

e, portanto, podemos reescrever (2) como

$$L \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(x_k^*)]^2 (\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

Explique por que a aproximação em (2) não pode ser maior do que L .

Assim, tomado o limite quando n cresce e as extensões dos subintervalos tendem a zero, obtemos a integral seguinte que define o comprimento de arco L :

$$L = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Em suma, temos a seguinte definição.

6.4.2 DEFINIÇÃO Se $y = f(x)$ for uma curva lisa no intervalo $[a, b]$, então o comprimento de arco L dessa curva sobre $[a, b]$ será definido por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (3)$$

Esse resultado fornece tanto uma definição quanto uma fórmula para o cálculo do comprimento de arcos. Quando for conveniente, (3) pode ser expressa como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4)$$

Além disso, para uma curva expressa na forma $x = g(y)$, em que g' é contínua em $[c, d]$, o comprimento de arco L de $y = c$ até $y = d$ pode ser expresso como

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (5)$$

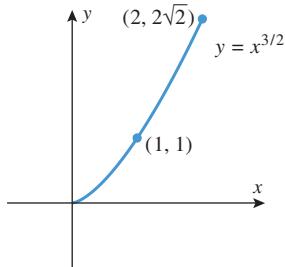


Figura 6.4.4

► Exemplo 1 Encontre o comprimento de arco da curva $y = x^{3/2}$ de $(1, 1)$ até $(2, 2\sqrt{2})$ (Figura 6.4.4) de duas formas: (a) usando a Fórmula (4) e (b) usando a Fórmula (5).

Solução (a) Uma vez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

e como a curva se estende de $x = 1$ a $x = 2$, usando (4) obtemos

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

Para calcular essa integral, fazemos a substituição u

$$u = 1 + \frac{9}{4}x, \quad du = \frac{9}{4}dx$$

e, então, mudando os limites x de integração ($x = 1, x = 2$) para os limites u correspondentes ($u = \frac{13}{4}, u = \frac{22}{4}$):

$$\begin{aligned} L &= \frac{4}{9} \int_{13/4}^{22/4} u^{1/2} du = \frac{8}{27} u^{3/2} \Big|_{13/4}^{22/4} = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{22}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} \right] \\ &= \frac{22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}}{27} \approx 2,09 \end{aligned}$$

Solução (b) Para aplicar a Fórmula (5), precisamos primeiro reescrever a equação $y = x^{3/2}$ de tal forma que x seja expresso como uma função de y . Isso fornece $x = y^{2/3}$ e

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

Como a curva se estende de $y = 1$ até $y = 2\sqrt{2}$, usando (5) obtemos

$$L = \int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4}{9}y^{-2/3}} dy = \frac{1}{3} \int_1^{2\sqrt{2}} y^{-1/3} \sqrt{9y^{2/3} + 4} dy$$

Para calcular essa integral, fazemos a substituição u

$$u = 9y^{2/3} + 4, \quad du = 6y^{-1/3} dy$$

e mudamos os limites y de integração ($y = 1$, $y = 2\sqrt{2}$) para os correspondentes limites u ($u = 13$, $u = 22$). Isso dá

$$L = \frac{1}{18} \int_{13}^{22} u^{1/2} du = \frac{1}{27} u^{3/2} \Big|_{13}^{22} = \frac{1}{27} [(22)^{3/2} - (13)^{3/2}] = \frac{22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}}{27}$$

Esse resultado está de acordo com a parte (a); porém, a integração aqui é mais enfadonha. Nos problemas em que houver uma escolha entre (4) ou (5), é usual o caso em que uma das fórmulas leva a cálculos mais simples do que a outra. ◀

O arco desde o ponto $(1, 1)$ ao ponto $(2, 2\sqrt{2})$ na Figura 6.4.4 é quase reto, de modo que o comprimento de arco deveria ser somente um pouco maior do que a distância em linha reta entre esses dois pontos. Mostre que isso realmente ocorre.

■ ENCONTRANDO O COMPRIMENTO DE ARCO POR MÉTODOS NUMÉRICOS

No próximo capítulo, desenvolveremos algumas técnicas de integração que nos permitirão encontrar valores exatos de outras integrais encontráveis no cálculo de comprimento de arco; contudo, falando vagamente, a maioria dessas integrais é impossível de ser calculada em termos de funções elementares. Nesses casos, geralmente aproximamos a integral utilizando algum método numérico, como a aproximação pelo ponto médio discutida na Seção 5.4.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se seu recurso computacional dispor de um comando para integração numérica, use-o para confirmar que o comprimento de arco L no Exemplo 2 é, aproximadamente, $L \approx 3,8202$.

► **Exemplo 2** A partir de (4), o comprimento de arco de $y = \sin x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ é dado pela integral

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx$$

Essa integral não pode ser calculada em termos de funções elementares; porém, usando um recurso computacional capaz de fazer integração numérica, obtemos a aproximação $L \approx 3,8202$. ◀

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.4 (Ver página 443 para respostas.)

- Dizemos que uma função é lisa, ou suave, em $[a, b]$ se f' for _____ em $[a, b]$.
- Se uma função f for lisa em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$ acima de $[a, b]$ é _____.
- A distância entre os pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$ é _____.
- Seja L o comprimento da curva $y = \ln x$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$.
 - Integrando em relação a x , uma expressão integral para L é _____.
 - Integrando em relação a y , uma expressão integral para L é _____.

EXERCÍCIOS 6.4 [C] CAS

- Use o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento do segmento de reta de $y = 2x$ entre $(1, 2)$ e $(2, 4)$ e confirme que o valor está de acordo com o comprimento calculado usando a:
 - Fórmula (4)
 - Fórmula (5)
- Use o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento do segmento de reta de $y = 5x$ entre $(0, 0)$ e $(1, 5)$ confirme que o valor está de acordo com o comprimento calculado usando a:
 - Fórmula (4)
 - Fórmula (5)
- 3-8** Encontre o comprimento de arco exato das curvas acima dos intervalos dados. ■
- $y = 3x^{3/2} - 1$ de $x = 0$ até $x = 1$
- $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$ de $y = 0$ até $y = 1$
- $y = x^{2/3}$ de $x = 1$ até $x = 8$
- $y = (x^6 + 8)/(16x^2)$ de $x = 2$ até $x = 3$
- $24xy = y^4 + 48$ de $y = 2$ até $y = 4$
- $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4}y^{-2}$ de $y = 1$ até $y = 4$

9-12 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

9. O gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$ é uma curva lisa em $[-1, 1]$.

10. A aproximação

$$L \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

do comprimento de arco não está dada como uma soma de Riemann.

11. A aproximação

$$L \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

do comprimento de arco é exata quando f for uma função linear de x .

12. Na nossa definição de comprimento de arco do gráfico de $y = f(x)$, é necessário que $f'(x)$ seja uma função contínua para que f satisfaça as hipóteses do Teorema do Valor Médio (4.8.2).

c 13-14 Expresse o comprimento de arco exato da curva acima do intervalo dado como uma integral que tenha sido simplificada para eliminar o radical; em seguida, calcule a integral usando um CAS. ■

13. $y = \ln(\sec x)$ de $x = 0$ até $x = \pi/4$

14. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \pi/4$ até $x = \pi/2$

ENFOCANDO CONCEITOS

15. Considere a curva $y = x^{2/3}$.

- Esboce a parte da curva entre $x = -1$ e $x = 8$.
- Explique por que a Fórmula (4) não pode ser usada para encontrar o comprimento de arco da curva esboçada em (a).
- Encontre o comprimento de arco da curva esboçada em (a).

16. O segmento curvilíneo $y = x^2$ de $x = 1$ até $x = 2$ pode também ser expresso como o gráfico de $x = \sqrt{y}$ de $y = 1$ até $y = 4$. Monte duas integrais que deem o comprimento de arco desse segmento, uma usando integração em relação a x e a outra usando integração em y . Obtenha uma substituição que mostre que essas duas integrais são iguais.

17. Considere os segmentos de curva $y = x^2$ de $x = \frac{1}{2}$ até $x = 2$ e o segmento de curva $y = \sqrt{x}$ de $x = \frac{1}{4}$ até $x = 4$.

- Faça o gráfico dos dois segmentos de curva e utilize-os para explicar por que os comprimentos desses dois segmentos deveriam ser iguais.
- Monte integrais que deem os comprimentos de arco dos dois segmentos de curva, com integração em relação a x . Demonstre com uma substituição que essas duas integrais são iguais.
- Monte integrais que deem os comprimentos de arco dos dois segmentos de curva, com integração em relação a y .
- Aproxime o comprimento de arco de cada segmento de curva usando a Fórmula (2) com $n = 10$ subintervalos iguais.
- Qual das duas aproximações em (d) é mais precisa? Explique.

(f) Use a aproximação pelo ponto médio com $n = 10$ subintervalos para aproximar cada integral de comprimento de arco em (d).

(g) Use uma calculadora com integração numérica para aproximar cada integral de comprimento de arco em (b) até quatro casas decimais.

18. Siga as instruções do Exercício 17 para os segmentos de curva $y = x^{8/3}$ de $x = 10^{-3}$ até $x = 1$ e para o segmento de curva $y = x^{3/8}$ de $x = 10^{-8}$ até $x = 1$.

19. Siga as instruções do Exercício 17 para os segmentos de curva $y = \operatorname{tg} x$ de $x = 0$ até $x = \pi/3$ e para o segmento de curva $y = \operatorname{arc tg} x$ de $x = 0$ até $x = \sqrt{3}$.

20. Seja $y = f(x)$ uma curva lisa no intervalo fechado $[a, b]$. Prove que, se m e M são números não negativos, tais que $m \leq |f'(x)| \leq M$ para cada x em $[a, b]$, então o comprimento de arco L de $y = f(x)$ acima do intervalo $[a, b]$ satisfaz as desigualdades

$$(b - a)\sqrt{1 + m^2} \leq L \leq (b - a)\sqrt{1 + M^2}$$

21. Use o resultado do Exercício 20 para mostrar que o comprimento de arco L de $y = \sec x$ acima do intervalo $0 \leq x \leq \pi/3$ satisfaz

$$\frac{\pi}{3} \leq L \leq \frac{\pi}{3}\sqrt{13}$$

c 22. Um jogador de basquete converte uma cesta. Suponha que a trajetória da bola a partir do momento em que é lançada até entrar no arco seja descrita por

$$y = 2,15 + 2,09x - 0,41x^2, \quad 0 \leq x \leq 4,6$$

onde x é a distância horizontal (em metros) desde o ponto em que é lançada e y é a distância vertical (em metros) acima do chão. Use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para aproximar a distância percorrida pela bola desde o momento em que é lançada até entrar no arco. Arredonde o resultado para duas casas decimais.

c 23. O vão central da ponte Golden Gate (na Califórnia, Estados Unidos) mede 4.200 pés e está suspenso por cabos que sobem 500 pés acima da rodovia em torres de ambos os lados. Aproximadamente, qual é o comprimento da parte do cabo que liga as duas torres dos dois lados? [Sugestão: Como indica a figura abaixo, suponha que o cabo seja modelado por uma parábola $y = ax^2$ que passa pelo ponto $(2.100, 500)$. Use um CAS ou uma calculadora com capacidade de integração numérica para aproximar o comprimento do cabo. Arredonde sua resposta até o pé mais próximo.]

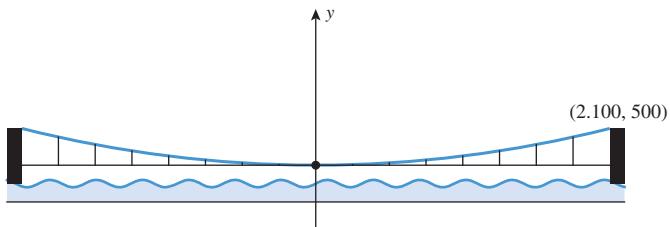


Figura Ex-23

- C 24.** Conforme a figura abaixo, uma viga horizontal com dimensões 2 pol × 6 pol × 16 pés (12 pol = 1 pé) fixada nos dois extremos é sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 120 lb/pé. Como resultado da carga, a linha central da viga sofre uma deflexão, que é descrita por

$$y = -1,67 \times 10^{-8}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)$$

($0 \leq x \leq 192$), onde $L = 192$ pol é o comprimento da viga sem carga, x é a distância horizontal ao longo da viga, medida em polegadas, a partir do extremo esquerdo, e y é a deflexão da linha central em polegadas.

- (a) Faça o gráfico de y versus x com $0 \leq x \leq 192$.
- (b) Encontre a deflexão máxima da linha central.
- (c) Use um CAS ou uma calculadora com integração numérica para encontrar o comprimento da linha central da viga carregada. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

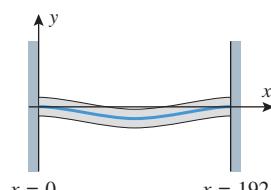


Figura Ex-24

- C 25.** Um golfista dá uma tacada com sucesso. Suponha que a trajetória da bola do momento da tacada até atingir a grama seja descrita por

$$y = 12,54x - 0,41x^2$$

onde x é a distância horizontal em jardas (1 jarda = 0,91 m) desde o ponto onde a bola é atingida, e y é a distância vertical em jardas acima da parte plana do campo de golfe entre os buracos. Use um CAS ou uma calculadora com integração numérica para encontrar a distância percorrida pela bola desde o momento da tacada até atingir a grama. Suponha que a parte plana do campo entre os buracos e a grama está no mesmo nível e arredonde sua resposta para duas casas decimais.

- 26-34** Nestes exercícios, estamos supondo alguma familiaridade com os conceitos básicos de curvas paramétricas. ■

- C 26.** Suponha que nenhum segmento da curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

seja percorrido mais de uma vez quando t cresce de a até b . Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo pontos t_1, t_2, \dots, t_{n-1} entre $a = t_0$ e $b = t_n$. Seja L o comprimento de arco da curva. Dê um argumento informal para justificar a aproximação

$$L \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

Se dx/dt e dy/dt forem funções contínuas de $a \leq t \leq b$, então pode ser mostrado que, quando $\Delta t_k \rightarrow 0$, essa soma converge a

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

- 27-32** Use a fórmula do comprimento de arco do Exercício 26 para encontrar o comprimento de arco da curva. ■

- 27. $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$ ($0 \leq t \leq 1$)
- 28. $x = (1+t)^2$, $y = (1+t)^3$ ($0 \leq t \leq 1$)
- 29. $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$)
- 30. $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$)
- 31. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$)
- 32. $x = e^t (\sin t + \cos t)$, $y = e^t (\cos t - \sin t)$ ($1 \leq t \leq 4$)

- C 33.** (a) Mostre que o comprimento de arco total da elipse

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

é dado por

$$4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 t} dt$$

- (b) Use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para aproximar o comprimento de arco de (a). Arredonde sua resposta para duas casas decimais.
- (c) Suponha que as equações paramétricas de (a) descrevam a trajetória de uma partícula movendo-se no plano xy , onde t está em segundos e x e y , em centímetros. Use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para aproximar a distância percorrida pela partícula de $t = 1,5$ s até $t = 4,8$ s. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

- 34.** Mostre que o comprimento de arco total da elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, com $a > b > 0$, é dado por

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt$$

onde $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$.

- 35. Texto** Na nossa discussão do Problema do Comprimento de Arco 6.4.1, deduzimos a aproximação

$$L \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

Discuta o significado geométrico dessa aproximação. (Não esqueça de abordar a aparência da derivada f' .)

- 36. Texto** Dê exemplos nos quais a Fórmula (4) do comprimento de arco não possa ser aplicada diretamente e descreva seu procedimento para encontrar o comprimento de arco em cada caso. (Discuta o uso de fórmulas alternativas e o uso de métodos numéricos.)

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.4

1. contínua
2. $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
3. $\sqrt{(e-1)^2 + 1}$
4. (a) $\int_1^e \sqrt{1 + (1/x)^2} dx$ (b) $\int_0^1 \sqrt{1 + e^{2y}} dy$

6.5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Nesta seção, consideraremos o problema de encontrar a área de uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana em torno de uma reta.

■ ÁREA DE SUPERFÍCIE

Uma *superfície de revolução* é uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo que se situa no mesmo plano da curva. Por exemplo, a superfície de uma esfera pode ser gerada ao se fazer girar um semicírculo em torno de seu diâmetro, e a superfície lateral de um cilindro circular reto pode ser gerada pela rotação de um segmento de reta em torno de um eixo paralelo a ele (Figura 6.5.1).

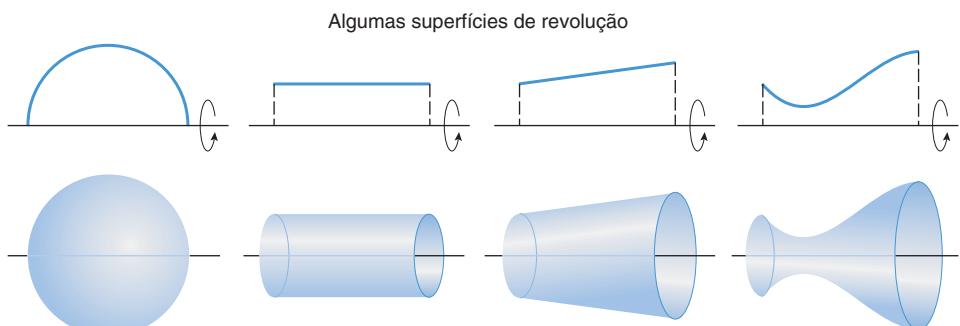


Figura 6.5.1

Nesta seção, abordaremos o problema seguinte.

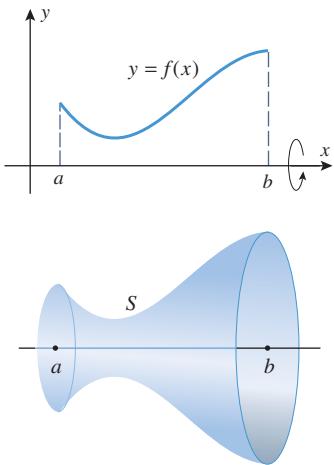


Figura 6.5.2

6.5.1 PROBLEMA DA ÁREA DE SUPERFÍCIE Suponha que f seja uma função lisa e não negativa em $[a, b]$ e que uma superfície de revolução seja gerada pela rotação da parte da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x (Figura 6.5.2). Defina o que podemos entender por *área S* da superfície e encontre uma fórmula para calculá-la.

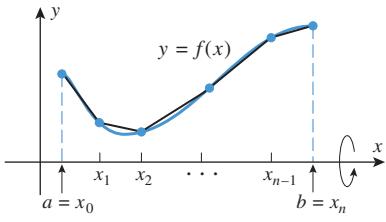
Para motivar uma definição apropriada de área S de uma superfície de revolução, vamos decompor a superfície em pequenas seções cujas áreas possam ser aproximadas por fórmulas elementares. Somando as aproximações das áreas das seções, obteremos uma soma de Riemann que aproxima S , e tomando o limite da soma de Riemann, obteremos uma integral para o valor exato de S .

Para implementar essa ideia, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, inserindo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Conforme ilustrado na Figura 6.5.3a, os pontos correspondentes do gráfico de f definem um caminho poligonal que aproxima a curva $y = f(x)$ acima do intervalo $[a, b]$. Quando esse caminho poligonal gira em torno do eixo x , gera uma superfície que consiste em n partes, cada uma delas sendo um tronco de cone circular reto (Figura 6.5.3b). Assim, a área de cada parte da superfície aproximante pode ser obtida pela fórmula

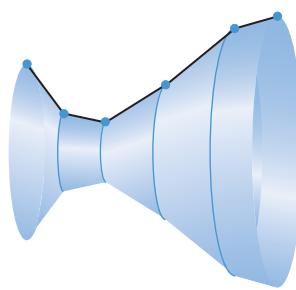
$$S = \pi(r_1 + r_2)l \quad (1)$$

para a área lateral S de um tronco de cone de altura l e raios das bases r_1 e r_2 (Figura 6.5.4). Conforme sugerido pela Figura 6.5.5, o k -ésimo tronco de cone tem raios $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ e altura Δx_k . Sua altura inclinada é o comprimento L_k do k -ésimo segmento de reta da poligonal, o qual, pela Fórmula (1) da Seção 6.4, é

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$



(a)



(b)

Figura 6.5.3

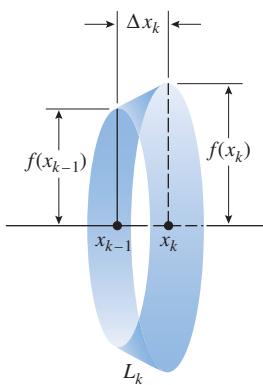


Figura 6.5.5

Assim, a área lateral S_k do k -ésimo tronco de cone é

$$S_k = \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

Se somarmos essas áreas, vamos obter a seguinte aproximação da área S da superfície inteira:

$$S \approx \sum_{k=1}^n \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \quad (2)$$

Para colocar isso na forma de uma soma de Riemann, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio (4.8.2). Esse teorema implica a existência de um ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k , tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \quad \text{ou} \quad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x_k$$

e, assim, podemos reescrever (2) como

$$\begin{aligned} S &\approx \sum_{k=1}^n \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(x_k^*)]^2(\Delta x_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k \end{aligned} \quad (3)$$

No entanto, isso ainda não é uma soma de Riemann, pois envolve as variáveis x_{k-1} e x_k . Para eliminar essas variáveis da expressão, observe que o valor médio dos números $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ está entre esses números. Dessa forma, a continuidade de f e o Teorema do Valor Intermediário (1.5.7) implicam a existência de um ponto x_k^{**} entre x_{k-1} e x_k , de tal modo que

$$\frac{1}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] = f(x_k^{**})$$

Assim, (2) pode ser expressa como

$$S \approx \sum_{k=1}^n 2\pi f(x_k^{**})\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k$$

Embora essa expressão esteja próxima à forma de uma soma de Riemann, ela não é uma soma de Riemann verdadeira, pois envolve duas variáveis x_k^* e x_k^{**} , em vez de somente x_k^* . Entretanto, prova-se, em Cálculo avançado, que isso não tem nenhum efeito sobre o limite, devido à continuidade de f . Desse modo, podemos supor que $x_k^{**} = x_k^*$ ao tomar o limite, o que sugere que S possa ser definida como

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi f(x_k^{**})\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Em suma, temos a seguinte definição:

Um tronco de cone

Figura 6.5.4

6.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função lisa e não negativa em $[a, b]$, então a área da superfície de revolução gerada pela rotação da parte da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x será definida por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Esse resultado fornece tanto uma definição quanto uma fórmula para o cálculo de áreas de superfícies. Quando for conveniente, essa fórmula também pode ser expressa como

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4)$$

Além disso, se g for não negativa e $x = g(y)$ for uma curva lisa em $[c, d]$, então a área da superfície gerada quando a parte da curva $x = g(y)$ entre $y = c$ e $y = d$ gira em torno do eixo y pode ser expressa como

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (5)$$

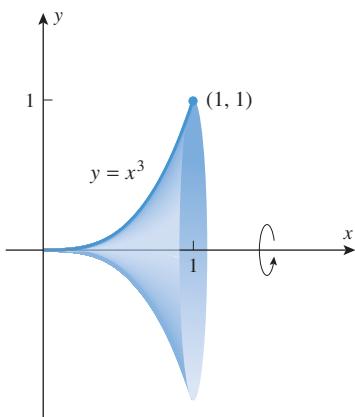


Figura 6.5.6

► **Exemplo 1** Encontre a área da superfície gerada pela rotação da parte da curva $y = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo x .

Solução Inicialmente, esboçamos a curva e, em seguida, imaginamo-la girando em torno do eixo x (Figura 6.5.6). Como $y = x^3$, temos $dy/dx = 3x^2$ e, portanto, a partir de (4), a área S da superfície é

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3 (1 + 9x^4)^{1/2} dx \\ &= \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} u^{1/2} du \quad \boxed{\begin{array}{l} u = 1 + 9x^4 \\ du = 36x^3 dx \end{array}} \\ &= \frac{2\pi}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=1}^{10} = \frac{\pi}{27} (10^{3/2} - 1) \approx 3,56 \end{aligned}$$

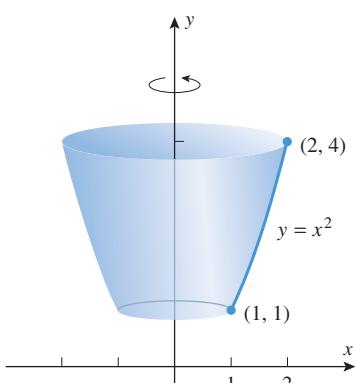


Figura 6.5.7

► **Exemplo 2** Encontre a área da superfície gerada pela rotação da parte da curva $y = x^2$ entre $x = 1$ e $x = 2$ em torno do eixo y .

Solução Inicialmente, esboçamos a curva e, em seguida, imaginamo-la girando em torno do eixo y (Figura 6.5.7). Como a curva gira em torno do eixo y , vamos aplicar a Fórmula (5). Com essa finalidade, vamos reescrever $y = x^2$ como $x = \sqrt{y}$ e observar que os valo-

res de y correspondentes a $x = 1$ e $x = 2$ são $y = 1$ e $y = 4$. Uma vez que $x = \sqrt{y}$, temos $dx/dy = 1/(2\sqrt{y})$ e, portanto, a partir de (5), a área da superfície é

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \int_1^4 2\pi\sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2} dy \\ &= \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1} dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} u^{1/2} du \quad \boxed{\begin{array}{l} u = 4y + 1 \\ du = 4 dy \end{array}} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=5}^{17} = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 30,85 \end{aligned}$$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.5 (Ver página 449 para respostas.)

- Se f for uma função lisa e não negativa em $[a, b]$, então a área de superfície S da superfície de revolução que é gerada quando a parte da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ gira em torno do eixo x é _____.
- A área lateral do tronco de cone de altura inclinada $\sqrt{10}$ e raios de base $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ é _____.
- Uma expressão integral para a área da superfície que é gerada quando o segmento de reta que liga $(3, 1)$ a $(6, 2)$ gira em torno do eixo x é _____.
- Uma expressão integral para a área da superfície que é gerada quando o segmento de reta que liga $(3, 1)$ a $(6, 2)$ gira em torno do eixo y é _____.

EXERCÍCIOS 6.5 C CAS

- 1-4** Encontre a área da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo x . ■

- $y = 7x$, $0 \leq x \leq 1$
- $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$
- $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$
- $x = \sqrt[3]{y}$, $1 \leq y \leq 8$

- 5-8** Encontre a área da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo y . ■

- $x = 9y + 1$, $0 \leq y \leq 2$
- $x = y^3$, $0 \leq y \leq 1$
- $x = \sqrt{9 - y^2}$, $-2 \leq y \leq 2$
- $x = 2\sqrt{1 - y}$, $-1 \leq y \leq 0$

- C 9-12** Use um CAS para encontrar a área exata da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo dado. ■

- $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 3$; eixo x
- $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^{-1}$, $1 \leq x \leq 2$; eixo x

- 11.** $8xy^2 = 2y^6 + 1$, $1 \leq y \leq 2$; eixo y

- 12.** $x = \sqrt{16 - y}$, $0 \leq y \leq 15$; eixo y

- C 13-16** Use um CAS, ou uma calculadora com integração numérica, para aproximar a área da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo dado. Arredonde sua resposta para duas casas decimais. ■

- $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$; eixo x
- $x = \operatorname{tg} y$, $0 \leq y \leq \pi/4$; eixo y
- $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$; eixo x
- $y = e^x$, $1 \leq y \leq e$; eixo y

- 17-20 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

- A área de superfície lateral S de um cone circular reto de altura h e raio de base r é $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.
- A área de superfície lateral de um tronco de cone de altura inclinada l e raios de base r_1 e r_2 é igual à área de superfície lateral de um cilindro circular reto de altura l e raio de base igual à média de r_1 e r_2 .

19. A aproximação

$$S \approx \sum_{k=1}^n 2\pi f(x_k^{**}) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

da área de superfície é exata se f for uma função constante positiva.

20. A expressão

$$\sum_{k=1}^n 2\pi f(x_k^{**}) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k$$

não é uma verdadeira soma de Riemann de

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

21-22 Aproxime a área da superfície usando a Fórmula (2) com $n = 20$ subintervalos de mesmo comprimento. Arredonde sua resposta para duas casas decimais. ■

21. A superfície do Exercício 13.

22. A superfície do Exercício 16.

ENFOCANDO CONCEITOS

23. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva suave no intervalo $[a, b]$ e que $f(x) \geq 0$ para cada $a \leq x \leq b$. Deduza uma fórmula para a área da superfície gerada quando a curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gira em torno da reta $y = -k$ ($k > 0$).
24. Será um raciocínio circular usar a Definição 6.5.2 para encontrar a área de superfície de um tronco de um cone circular reto? Explique sua resposta.

25. Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$. [Sugestão: Gire o semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x .]

26. A figura abaixo mostra uma calota esférica de altura h , cortada de uma esfera de raio r . Mostre que a área da superfície S da calota é $S = 2\pi rh$. [Sugestão: Faça uma parte apropriada do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ girar em torno do eixo y .]

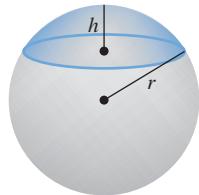


Figura Ex-26

27. A parte da esfera cortada por dois planos paralelos é chamada de **zona**. Use o resultado do Exercício 26 para mostrar que a área da superfície de uma zona depende do raio da esfera e da distância entre os planos, mas não da localização da zona.

28. Seja $y = f(x)$ uma curva lisa no intervalo $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ com $a \leq x \leq b$. Pelo Teorema do Valor Extremo (4.4.2), a função f tem um valor máximo K e um valor mínimo k em $[a, b]$. Prove: Se L for o comprimento de curva da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, e se S for a área da superfície gerada quando essa curva gira em torno do eixo x , então

$$2\pi kL \leq S \leq 2\pi KL$$

29. Use os resultados do Exercício 28 e do Exercício 21 da Seção 6.4 para mostrar que a área S da superfície gerada quando a curva $y = \sec x$, $0 \leq x \leq \pi/3$ gira em torno do eixo x satisfaz

$$\frac{2\pi^2}{3} \leq S \leq \frac{4\pi^2}{3}\sqrt{13}$$

30. Seja $y = f(x)$ uma curva suave em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ com $a \leq x \leq b$. Sejam A a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ e S a área da superfície gerada quando essa seção da curva gira em torno do eixo x .

- (a) Prove que $2\pi A \leq S$.
 (b) Para quais funções f é $2\pi A = S$?

31-37 Nestes exercícios, estamos separando alguma familiaridade com os conceitos básicos de curvas paramétricas. ■

31-32 Nestes exercícios, divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos t_1, t_2, \dots, t_{n-1} entre $a = t_0$ e $b = t_n$ e suponha que $x'(t)$ e $y'(t)$ sejam funções contínuas tais que nenhuma parte da curva

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

seja percorrida mais de uma vez. ■

31. Seja S a área da superfície gerada quando a curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) gira em torno do eixo x . Explique como S pode ser aproximada por

$$S \approx \sum_{k=1}^n (\pi[y(t_{k-1}) + y(t_k)]) \times \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

Usando resultados do Cálculo avançado, pode ser mostrado que, quando $\Delta t_k \rightarrow 0$, essa soma converge a

$$S = \int_a^b 2\pi y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (\text{A})$$

32. Seja S a área da superfície gerada quando a curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) gira em torno do eixo y . Explique como S pode ser aproximada por

$$S \approx \sum_{k=1}^n (\pi[x(t_{k-1}) + x(t_k)]) \times \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

Usando resultados do Cálculo avançado, pode ser mostrado que, quando $\Delta t_k \rightarrow 0$, essa soma converge a

$$S = \int_a^b 2\pi x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (\text{B})$$

33-37 Use as Fórmulas (A) e (B) dos Exercícios 31 e 32.

- 33.** Encontre a área da superfície gerada quando a curva paramétrica $x = t^2$, $y = 2t$ ($0 \leq t \leq 4$) gira em torno do eixo x .

- c 34.** Use um CAS para encontrar a área da superfície gerada quando a curva paramétrica

$$x = \cos^2 t, \quad y = 5 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$$

gira em torno do eixo x .

- 35.** Encontre a área da superfície gerada quando a curva paramétrica $x = t$, $y = 2t^2$ ($0 \leq t \leq 1$) gira em torno do eixo y .

- 36.** Encontre a área da superfície gerada quando as equações $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) giram em torno do eixo y .

- 37.** Fazendo girar o semicírculo

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

em torno do eixo x , mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

- 38. Texto** Compare a dedução da Definição 6.5.2 com a da Definição 6.4.2. Discuta as características geométricas que resultam nas semelhanças das duas definições.

- 39. Texto** Discuta o que dá errado se substituirmos os troncos de cones circulares retos por cilindros circulares retos na dedução da Definição 6.5.2.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.5

$$1. \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \quad 2. 3\sqrt{10}\pi \quad 3. \int_3^6 (2\pi) \left(\frac{x}{3}\right) \sqrt{\frac{10}{9}} dx = \int_3^6 \frac{2\sqrt{10}\pi}{9} x dx \quad 4. \int_1^2 (2\pi)(3y)\sqrt{10} dy$$

6.6 TRABALHO

Nesta seção, usaremos as ferramentas de integração desenvolvidas no capítulo precedente para estudar alguns dos princípios básicos do “trabalho”, um dos conceitos fundamentais da Física e da Engenharia.

■ O PAPEL DO TRABALHO NA FÍSICA E NA ENGENHARIA

Nesta seção, estaremos interessados em dois conceitos relacionados, *trabalho* e *energia*. Em um cenário familiar, quando empurramos um carro que não pega por uma certa distância, estamos realizando trabalho; e o efeito desse trabalho é fazer o carro se movimentar. A energia do movimento causada pelo trabalho é a *energia cinética* do carro. A relação exata entre trabalho e energia cinética é governada por um princípio da Física, a *relação trabalho-energia*. No que segue, tocaremos nessa ideia, mas um estudo detalhado da relação entre trabalho e energia será deixado para os cursos de Física e de Engenharia. Nossa meta principal aqui será explicar o papel da integração no estudo do trabalho.

■ TRABALHO FEITO POR UMA FORÇA CONSTANTE APlicADA NA DIREÇÃO E NO SENTIDO DO MOVIMENTO

Quando um carro é empurrado, a velocidade atingida por ele depende da força F com a qual é empurrado e da distância d durante a qual a força é aplicada (Figura 6.6.1). Assim, força e distância são os ingredientes do trabalho na definição seguinte.

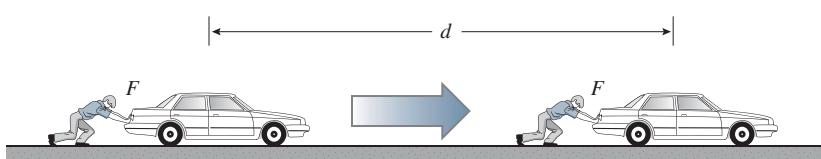


Figura 6.6.1

6.6.1 DEFINIÇÃO Se uma força constante de magnitude F for aplicada na direção e no sentido do movimento de um objeto, e se esse objeto se mover por uma distância d , então definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto como sendo

$$W = F \cdot d \quad (1)$$

Se empurrarmos um objeto que não se move (p. ex., uma parede de tijolos), podemos ficar cansados, mas não realizamos trabalho. Por quê?

Unidades comuns de medida de força são newtons (N) no sistema MKS (metro, quilo e segundo), dina (din) no sistema CGS (centímetro, grama e segundo) e libras (lb) no sistema Britânico de Engenharia (BE). Um newton é a força necessária para dar a uma massa de 1 kg uma aceleração de 1 m/s^2 ; um dina é a força necessária para dar a uma massa de 1 g uma aceleração de 1 cm/s^2 ; e uma libra de força é a força necessária para dar a uma massa de 1 libra (lb) uma aceleração de 32 pés/s^2 .

Tem-se, a partir da Definição 6.6.1, que o trabalho tem unidades de força vezes distância. As unidades mais comuns de trabalho são o newton-metro (N·m), o dina-centímetro (din · cm) e o pé-libra (pé · lb). Conforme indicado na Tabela 6.6.1, um newton-metro é também chamado de **joule** (J) e um dina-centímetro, de **erg**. Já 1 pé-libra equivale aproximadamente a 1,36 J.

Tabela 6.6.1

SISTEMA	FORÇA	×	DISTÂNCIA	=	TRABALHO
MKS	newton (N)		metro (m)		joule (J)
CGS	dina (din)		centímetro (cm)		erg
BE	libra (lb)		pé (ft)		pé-libra (pé · lb)
FATORES DE CONVERSÃO					
$1 \text{ N} = 10^5 \text{ din} \approx 0,225 \text{ lb}$			$1 \text{ lb} \approx 4,45 \text{ N}$		
$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \approx 0,738 \text{ pé-libra}$			$1 \text{ pé-libra} \approx 1,36 \text{ J} = 1,36 \times 10^7 \text{ erg}$		



Stephen Sutton/DUOMO Archive/PCN Photography Inc.

Vasili Alexeev quebrando o recorde de levantamento de peso, com 562 lb, na Olimpíada de 1976. Durante oito anos seguidos, ele ganhou medalhas de ouro olímpicas, venceu seis campeonatos mundiais e quebrou 80 recordes. Em 1999, ele foi homenageado na Grécia como o melhor esportista do século XX.

► **Exemplo 1** Um objeto move-se 5 pés ao longo de uma reta, enquanto sujeito a uma força constante de 100 lb no sentido de seu movimento. O trabalho realizado é

$$W = F \cdot d = 100 \cdot 5 = 500 \text{ pés · lb}$$

Um objeto move-se 25 m ao longo de uma reta, enquanto sujeito a uma força constante de 4 N, no sentido de seu movimento. O trabalho realizado é

$$W = F \cdot d = 4 \cdot 25 = 100 \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ J} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 2** Na Olimpíada de 1976, Vasili Alexeev espantou o mundo levantando 562 lb a cerca de 2 m desde o chão até acima de sua cabeça, quebrando um recorde. Igualmente espantoso foi o feito de Paul Anderson, que, em 1957, de bruços no chão e usando as costas, levantou 6.270 lb de chumbo e de peças de automóvel por uma altura de 1 cm. Quem realizou mais trabalho?

Solução Para levantar um objeto, é necessário aplicar uma força suficiente para vencer a força gravitacional exercida pela Terra. A força que a Terra exerce no objeto é o seu peso; dessa forma, Alexeev aplicou uma força de 562 lb por uma distância de 2 m, enquanto Anderson aplicou uma força de 6.270 lb por uma distância de 1 cm. Como libras são unidades do sistema BE, metros são unidades do MKS e centímetros são unidades do CGS, precisamos decidir em qual sistema vamos trabalhar. Vamos usar o sistema MKS e, portanto, expressar em joules o trabalho dos dois homens. Usando a Tabela 6.6.1, obteremos

$$562 \text{ lb} \approx 562 \text{ lb} \times 4,45 \text{ N/lb} \approx 2.500 \text{ N}$$

$$6.270 \text{ lb} \approx 6.270 \text{ lb} \times 4,45 \text{ N/lb} \approx 27.900 \text{ N}$$

Usando esses valores e o fato de que $1\text{ cm} = 0,01\text{ m}$, obtemos

$$\text{trabalho de Alexeev} = (2.500\text{ N}) \times (2\text{ m}) \approx 5.000\text{ J}$$

$$\text{trabalho de Anderson} = (27.900\text{ N}) \times (0,01\text{ m}) \approx 279\text{ J}$$

Logo, muito embora o levantamento de Anderson tenha exigido uma enorme força para cima, ela foi aplicada por tão pouca distância que Alexeev realizou mais trabalho. \blacktriangleleft

■ TRABALHO FEITO POR UMA FORÇA VARIÁVEL APLICADA NA DIREÇÃO E NO SENTIDO DO MOVIMENTO

Muitos problemas importantes tratam de encontrar o trabalho realizado por uma força *variável* aplicada na direção e no sentido do movimento. Por exemplo, a Figura 6.6.2a mostra uma mola em seu estado natural (nem comprimida, nem esticada). Se quisermos puxar o bloco horizontalmente (Figura 6.6.2b), então teremos de aplicar uma força cada vez maior para vencer a força crescente da mola esticada. Assim, nosso próximo objetivo é definir o que entendemos por trabalho realizado por uma força variável e encontrar uma fórmula para calculá-lo. Isso irá requerer Cálculo.

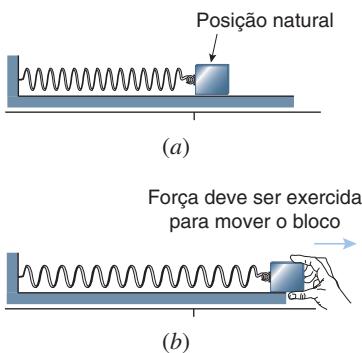


Figura 6.6.2

6.6.2 PROBLEMA Suponha que um objeto se move no sentido positivo, ao longo de um eixo coordenado, sujeito a uma força variável $F(x)$ que é aplicada no sentido do movimento. Defina o que entendemos por *trabalho* W realizado pela força sobre o objeto, quando este se move de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

A ideia básica para resolver esse problema é dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos suficientemente pequenos para que a força não varie muito em cada intervalo. Isso nos permitirá tratar a força como constante em cada intervalo e, em cada um deles, aproximar o trabalho usando a Fórmula (1). Somando as aproximações do trabalho nos subintervalos, iremos obter uma soma de Riemann, que aproxima o trabalho W em todo intervalo; tomando o limite das somas de Riemann, iremos obter uma integral para W .

Para implementar essa ideia, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, inserindo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Podemos usar a Fórmula (1) para aproximar o trabalho W_k realizado no k -ésimo subintervalo, escolhendo um ponto qualquer x_k^* nesse intervalo e considerando a força como tendo um valor constante $F(x_k^*)$ em todo o intervalo. Uma vez que o comprimento do k -ésimo subintervalo é $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, obtemos a aproximação

$$W_k \approx F(x_k^*) \Delta x_k$$

Somando essas aproximações, obtemos a seguinte soma de Riemann, que aproxima o trabalho W realizado em todo o intervalo:

$$W \approx \sum_{k=1}^n F(x_k^*) \Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e as extensões dos subintervalos tendem a zero, obtemos a integral definida

$$W = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx$$

Em suma, temos o seguinte resultado:

6.6.3 DEFINIÇÃO Suponha que um objeto se move no sentido positivo ao longo de um eixo coordenado pelo intervalo $[a, b]$, enquanto sujeito a uma força variável $F(x)$ que é aplicada no sentido do movimento. Então, definimos o *trabalho* W realizado pela força sobre o objeto por

$$W = \int_a^b F(x) dx \quad (2)$$

A *lei de Hooke* [Robert Hooke (1635-1703), físico inglês] afirma que, sob condições apropriadas, uma mola esticada x unidades além de seu comprimento natural puxa de volta com uma força

$$F(x) = kx$$

onde k é uma constante (chamada de *constante da mola* ou *rígidez da mola*). O valor de k depende de fatores como a espessura da mola e o material usado em sua composição. Como $k = F(x)/x$, a constante k tem unidades de força por unidade de comprimento.

► **Exemplo 3** Uma mola exerce uma força de 5 N quando esticada 1 m além de seu comprimento natural.

- Encontre a constante k da mola.
- Quanto trabalho é necessário para esticar a mola 1,8 m além de seu comprimento natural?

Solução (a) A partir da lei de Hooke,

$$F(x) = kx$$

A partir dos dados, $F(x) = 5$ N quando $x = 1$ m, logo $5 = k \cdot 1$. Assim, a constante da mola é $k = 5$ newtons por metro (N/m). Isso significa que a força $F(x)$ necessária para esticar a mola em x metros é

$$F(x) = 5x \quad (3)$$

Solução (b) Coloquemos a mola ao longo de um eixo coordenado, conforme a Figura 6.6.3. Queremos encontrar o trabalho W necessário para esticar a mola pelo intervalo de $x = 0$ a $x = 1,8$. A partir de (2) e (3), o trabalho necessário é

$$W = \int_a^b F(x) dx = \int_0^{1,8} 5x dx = \left[\frac{5x^2}{2} \right]_0^{1,8} = 8,1 \text{ J} \quad \blacktriangleleft$$

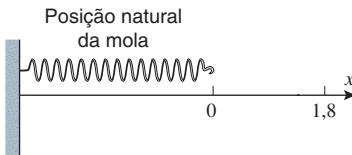
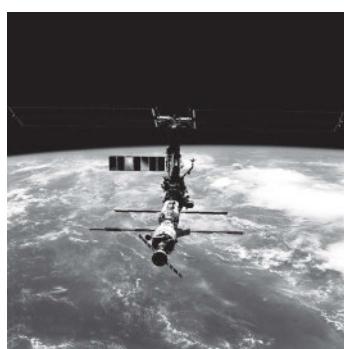


Figura 6.6.3



NASA Marshall Space Flight Center Collection

A Estação Espacial Internacional tem tido ocupação humana contínua desde 2 de novembro de 2000 e é um esforço cooperativo de EUA, Rússia, Europa, Japão e Canadá.

► **Exemplo 4** O peso de um astronauta (ou, mais precisamente, seu *peso terrestre*) é a força exercida sobre ele pela gravidade da Terra. À medida que o astronauta se move para cima no espaço, a atração gravitacional da Terra decresce e, portanto, o mesmo acontece com seu peso. Iremos mostrar, mais adiante, que, se supusermos que a Terra seja uma esfera com um raio de 4.000 milhas (cerca de 6.400 km), então um astronauta que pesa 150 libras (cerca de 68 kg) na Terra terá um peso de

$$w(x) = \frac{2.400.000.000}{x^2} \text{ lb}, \quad x \geq 4.000$$

a uma distância de x milhas do centro da Terra (Exercício 25). Use essa fórmula para determinar o trabalho em pés-libras necessário para elevar o astronauta até a Estação Espacial Internacional que está a 220 milhas acima da superfície da Terra.

Solução Como a Terra tem um raio de 4.000 milhas, o astronauta será elevado para um ponto a 4.220 milhas do centro da Terra. Assim, a partir de (2), e lembrando que 1 milha = 5.280 pés, o trabalho necessário para elevá-lo é

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{4.000}^{4.220} \frac{2.400.000.000}{x^2} dx \\
 &= -\frac{2.400.000.000}{x} \Big|_{4.000}^{4.220} \\
 &\approx -568.720 + 600.000 \\
 &= 31.280 \text{ milhas-libras} \\
 &= (31.280 \text{ milhas} \cdot \text{lb}) \times (5.280 \text{ pés/milhas}) \\
 &\approx 1,65 \times 10^8 \text{ pés} \cdot \text{lb} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

■ CALCULANDO TRABALHO A PARTIR DE PRINCÍPIOS BÁSICOS

Alguns problemas não podem ser resolvidos pela substituição mecânica de dados em fórmulas, sendo preciso recorrer a princípios básicos para obter as soluções. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

► Exemplo 5 Um tanque de água cônico tem um raio de 10 pés e altura de 30 pés, estando cheio até uma profundidade de 15 pés (Figura 6.6.4a). Qual é o trabalho necessário para bombear para fora toda a água através de um orifício no topo do tanque?

Solução Nossa estratégia será dividir a água em camadas finas, aproximar o trabalho necessário para mover cada camada até o topo do tanque, somar as aproximações das camadas para obter uma soma de Riemann que aproxime o trabalho total e, então, tomar o limite das somas de Riemann para obter uma integral do trabalho total.

Para implementar essa ideia, introduzimos um eixo x , como mostra a Figura 6.6.4a, e dividimos a água em n camadas, denotando a espessura da k -ésima camada por Δx_k . Essa divisão induz uma partição do intervalo $[15, 30]$ em n subintervalos. Embora as superfícies superior e inferior da k -ésima camada estejam a distâncias diferentes do topo, essa diferença será pequena se a camada for fina, e é razoável supor que a camada inteira esteja concentrada em um único ponto x_k^* (Figura 6.6.4a). Assim, o trabalho W_k necessário para mover a k -ésima camada até o topo do tanque é, aproximadamente,

$$W_k \approx F_k x_k^* \quad (4)$$

onde F_k é a força necessária para elevar a k -ésima camada. No entanto, a força requerida para elevar a k -ésima camada é a força necessária para vencer a gravidade, e essa é a mesma que o peso da camada. Se a camada for muito fina, podemos aproximar o volume da k -ésima camada pelo volume de um cilindro de altura Δx_k e raio r_k , onde (por semelhança de triângulos)

$$\frac{r_k}{x_k^*} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

ou, equivalentemente, $r_k = x_k^*/3$ (Figura 6.6.4b). Portanto, o volume da k -ésima camada de água é, aproximadamente,

$$\pi r_k^2 \Delta x_k = \pi (x_k^*/3)^2 \Delta x_k = \frac{\pi}{9} (x_k^*)^2 \Delta x_k$$

Como a densidade de peso da água é 62,4 lb/pé³, segue que

$$F_k \approx \frac{62,4\pi}{9} (x_k^*)^2 \Delta x_k$$

Assim, por (4),

$$W_k \approx \left(\frac{62,4\pi}{9} (x_k^*)^2 \Delta x_k \right) x_k^* = \frac{62,4\pi}{9} (x_k^*)^3 \Delta x_k$$

e, portanto, o trabalho W requerido para mover todas as n camadas tem a aproximação

$$W = \sum_{k=1}^n W_k \approx \sum_{k=1}^n \frac{62,4\pi}{9} (x_k^*)^3 \Delta x_k$$

Para encontrar o valor exato do trabalho, tomamos o limite quando $\Delta x_k \rightarrow 0$. Isso fornece

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{62,4\pi}{9} (x_k^*)^3 \Delta x_k = \int_{15}^{30} \frac{62,4\pi}{9} x^3 dx \\ &= \frac{62,4\pi}{9} \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_{15}^{30} = 1.316.250\pi \approx 4.135.000 \text{ pés-lb} \end{aligned}$$

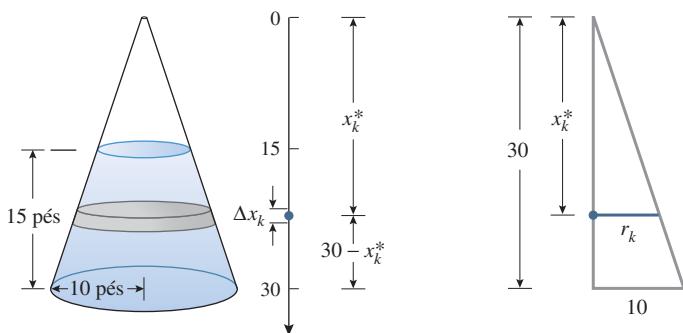


Figura 6.6.4

(a)

(b)

A RELAÇÃO TRABALHO-ENERGIA

Quando vemos um objeto em movimento, podemos ter certeza de que algum trabalho foi realizado para criar esse movimento. Por exemplo, quando largamos uma pedra de um prédio, a pedra ganha velocidade escalar porque a força da gravidade terrestre realiza trabalho sobre ela; quando um jogador de hóquei no gelo golpeia o disco com seu bastão, o trabalho realizado no disco durante o breve instante de tempo em que está em contato com o bastão cria a enorme velocidade escalar do disco deslizando sobre o gelo. Contudo, a experiência mostra que a velocidade escalar obtida por um objeto depende não só da quantidade de trabalho realizado, mas também da massa do objeto. Por exemplo, o trabalho necessário para lançar uma bola de beisebol de 150 gramas a 80 km/h aceleraria uma bola de boliche de 5 kg a menos de 14 km/h.

Usando o método da substituição para integrais definidas, obteremos uma equação simples que relaciona o trabalho realizado sobre um objeto com a velocidade e a massa do mesmo. Além disso, essa equação nos permitirá motivar uma definição apropriada da “energia do movimento” de um objeto. Como na Definição 6.6.3, vamos supor que um objeto move-se no sentido positivo ao longo de uma reta coordenada no intervalo $[a, b]$ enquanto sujeito a uma força $F(x)$ aplicada no sentido do movimento. Sejam m a massa do objeto e $x = x(t)$, $v = v(t) = x'(t)$ e $a = a(t) = v'(t)$ a posição, a velocidade e a aceleração do objeto no instante de tempo t , respectivamente. Vamos precisar do importante resultado de Física a seguir, que relaciona a força que atua em um objeto com a massa e a aceleração do objeto.



Mike Brinson/Getty Images

O trabalho realizado pelo bastão do jogador num breve instante de tempo produz a enorme velocidade do disco.

6.6.4 SEGUNDA LEI DO MOVIMENTO DE NEWTON Se um objeto de massa m for submetido a uma força F , então o objeto adquire uma aceleração a que satisfaz a equação

$$F = ma \tag{5}$$

Segue da Segunda Lei de Newton do Movimento, que

$$F(x(t)) = ma(t) = mv'(t)$$

Suponha que

$$x(t_0) = a \quad \text{e} \quad x(t_1) = b$$

com

$$v(t_0) = v_i \quad \text{e} \quad v(t_1) = v_f$$

sendo as velocidades inicial e final do objeto, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x) dx = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F(x) dx \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F(x(t)) x'(t) dt \quad \boxed{\text{Pelo Teorema 5.9.1 com } x = x(t), dx = x'(t)dt} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} mv'(t)v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} mv(t)v'(t) dt \\ &= \int_{v(t_0)}^{v(t_1)} mv dv \quad \boxed{\text{Pelo Teorema 5.9.1 com } v = v(t), dv = v'(t)dt} \\ &= \int_{v_i}^{v_f} mv dv = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \end{aligned}$$

Vemos, a partir da equação

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (6)$$

que o trabalho realizado no objeto é igual à variação na quantidade $\frac{1}{2}mv^2$ de seu valor inicial para o valor final. Dizemos que a Equação (6) expressa a **relação trabalho-energia**. Se definirmos a “energia do movimento” ou, mais precisamente, a **energia cinética** de nosso objeto como sendo

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (7)$$

então a Equação (6) nos diz que o trabalho realizado em um objeto é igual à *variação* da energia cinética do objeto. Falando informalmente, podemos dizer que o trabalho realizado em um objeto é “transformado” na sua energia cinética. As unidades de energia cinética são as mesmas unidades do trabalho. Por exemplo, no sistema MKS, a energia cinética é medida em joules (J).

► Exemplo 6 Uma sonda espacial com massa $m = 5,00 \times 10^4 \text{ kg}$ viaja no espaço exterior, sujeita somente à força de seu próprio mecanismo. Começando pelo instante em que sua velocidade é $v = 1,10 \times 10^4 \text{ m/s}$, o mecanismo é acionado continuamente por uma distância de $2,50 \times 10^6 \text{ m}$, com uma força constante de $4,00 \times 10^5 \text{ N}$ na direção e sentido do movimento. Qual é a velocidade final da sonda?

Solução Como a força aplicada pelo mecanismo é constante e na direção e sentido do movimento, o trabalho W realizado pelo mecanismo da sonda é

$$W = \text{força} \times \text{distância} = (4,00 \times 10^5 \text{ N}) \times (2,50 \times 10^6 \text{ m}) = 1,00 \times 10^{12} \text{ J}$$

A partir de (6), a energia cinética final $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ da sonda pode ser expressa em termos do trabalho W e da energia cinética inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$, como sendo

$$K_f = W + K_i$$

Assim, conhecidas a massa e a velocidade inicial, temos que

$$K_f = (1,00 \times 10^{12} \text{ J}) + \frac{1}{2}(5,00 \times 10^4 \text{ kg})(1,10 \times 10^4 \text{ m/s})^2 = 4,025 \times 10^{12} \text{ J}$$

A energia cinética final é $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$; logo, a velocidade final da sonda é

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(4,025 \times 10^{12})}{5,00 \times 10^4}} \approx 1,27 \times 10^4 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 6.6 (Ver página 458 para respostas.)

- Se uma força constante de 5 lb mover um objeto por 10 pés, então o trabalho realizado por ela no objeto será de _____.
- Um newton-metro é também chamado de _____. Um dina-centímetro é também chamado de _____.
- Suponha que um objeto move-se no sentido positivo ao longo de um eixo coordenado sobre o intervalo $[a, b]$. O trabalho rea-

lizado no objeto por uma força variável $F(x)$ aplicada no sentido do movimento é $W = _____$.

- Uma força de $F(x) = 10 - 2x$ N aplicada no sentido x positivo move um objeto por 3 m de $x = 2$ até $x = 5$. O trabalho realizado pela força no objeto é _____.

EXERCÍCIOS 6.6

ENFOCANDO CONCEITOS

- Na figura abaixo, aparece o gráfico de uma força variável $F(x)$ no sentido x positivo. Encontre o trabalho realizado pela força numa partícula que se move de $x = 0$ até $x = 3$.

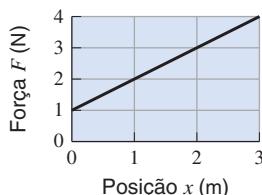


Figura Ex-1

- Uma força variável $F(x)$, no sentido positivo do eixo x , tem seu gráfico mostrado abaixo. Encontre o trabalho realizado pela força sobre uma partícula que se move de $x = 0$ a $x = 5$.

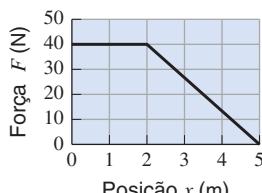


Figura Ex-2

- Para a força variável $F(x)$ do Exercício 2, considere a distância d para a qual o trabalho realizado pela força sobre a partícula quando esta se move de $x = 0$ até $x = d$ é a metade do trabalho realizado quando a partícula se move de $x = 0$ até $x = 5$. Examinando o gráfico de F , decida se d é maior ou menor do que 2,5. Explique seu raciocínio e, então, obtenha o valor exato de d .
- Suponha que uma força variável $F(x)$ seja aplicada no sentido positivo do eixo x , de tal forma que um objeto seja movido de $x = a$ até $x = b$. Relacione o trabalho realizado pela força sobre o objeto com o valor médio de F sobre $[a, b]$ e ilustre essa relação graficamente.
- Uma força constante de 10 lb no sentido positivo do eixo x é aplicada a uma partícula cuja curva velocidade versus tempo está dada na figura a seguir. Encontre o trabalho realizado pela força sobre a partícula do instante $t = 0$ até $t = 5$.

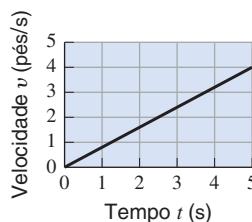


Figura Ex-5

- Uma mola exerce uma força de 6 N quando é esticada de seu comprimento natural de 4 m para um comprimento de 4,5 m. Encontre o trabalho realizado para esticar a mola de seu comprimento natural para um comprimento de 6 m.
 - Uma mola exerce uma força de 100 N quando esticada por 0,2 m além de seu comprimento natural. Qual é o trabalho necessário para esticar a mola 0,8 m além de seu comprimento natural?
 - Uma mola cujo tamanho natural é de 15 cm exerce uma força de 45 N quando esticada até um comprimento de 20 cm.
 - Encontre a constante da mola (em N/m).
 - Encontre o trabalho realizado ao esticar a mola 3 cm além de seu tamanho natural.
 - Encontre o trabalho realizado ao esticar a mola de 20 para 25 cm.
 - Suponha que um trabalho de 10 pés-lb seja necessário para esticar uma mola 1 pé além de seu comprimento natural. Qual é a constante da mola?
- 10-13 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■
- Para poder suportar o peso de um carro estacionado, a superfície de uma rodovia deve realizar trabalho contra a força de gravidade no carro.
 - Uma força de 10 N na direção do movimento de um objeto que se move 5 m em 2 s faz seis vezes o trabalho de uma força de 10 N na direção do movimento de um objeto que se move 5 m em 12 s.
 - Segue da Lei de Hooke que precisamos quadruplicar o trabalho para duplicar a distância na qual esticamos uma mola além de seu comprimento natural.
 - O trabalho e a energia cinética têm as mesmas unidades no sistema MKS.

14. Um tanque cilíndrico com raio de 5 pés e altura de 9 pés tem $\frac{2}{3}$ cheios de água. Encontre o trabalho necessário para bombear toda água por cima da borda superior do tanque.
15. Resolva o Exercício 14 supondo que o tanque de água esteja cheio até a metade.
16. Um reservatório de água, com a forma de um cone, tem 6 m de diâmetro no topo e 4,5 m de profundidade. Se ele estiver cheio até uma profundidade de 3 m, qual é o trabalho necessário para bombear toda água até o topo do reservatório?
17. O tanque na Figura Ex-17 tem água até uma profundidade de 2 m. Encontre o trabalho necessário para bombear toda a água até o topo do tanque. [Use 9.810 N/m^3 como a densidade do peso da água.]
18. Um tanque cilíndrico, mostrado na Figura Ex-18, está cheio com um líquido pesando 50 lb/pé^3 . Encontre o trabalho necessário para bombear todo o líquido a um nível de 1 pé acima do topo do tanque.

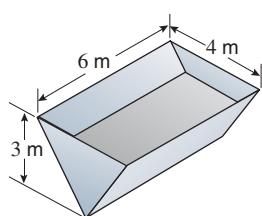


Figura Ex-17

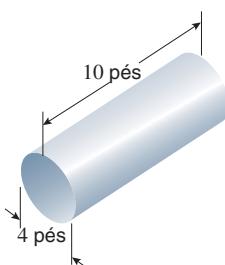


Figura Ex-18

19. Uma piscina é construída na forma de um paralelepípedo retangular com 3 m de profundidade, 4,5 m de largura e 6 m de comprimento.
- Se ela for preenchida até 30 cm abaixo do topo, qual é o trabalho necessário para bombear toda água para dentro de um ralo em sua beirada?
 - Um motor de 1 cavalo de potência pode realizar 748 J/s . Qual é a potência necessária para um motor esvaziar a piscina em 1 h?
20. Quanto trabalho é necessário para encher a piscina do Exercício 19 até o nível de 30 cm abaixo do topo, se a água for bombeada para dentro através de uma abertura localizada no fundo da piscina?
21. Uma corrente de aço com 100 pés de comprimento e pesando 15 lb/pé está pendente por uma polia. Qual é o trabalho necessário para içar a corrente pela polia?
22. Um balde de 1,5 kg contendo 10 kg de água está pendurado na ponta de uma corda de 7 m que pesa 50 g/m . A outra extremidade da corda está presa em uma roldana. Qual é o trabalho requerido para içar toda a corda para cima, enrolando-a na roldana, se a corda for içada a uma taxa de $0,7 \text{ m/s}$ e se, enquanto o balde for içado, a água vazia do balde a uma taxa de 250 g/s ?
23. Um foguete pesando 3 toneladas carrega 40 toneladas de combustível líquido. No início do voo, o combustível é queimado a uma taxa constante de 2 toneladas para cada 1.000 pés de altura vertical. Qual é o trabalho feito para elevar o foguete a uma altura de 3.000 pés?

24. Segue da Lei de Coulomb da Física, que duas cargas eletrostáticas iguais repelem-se entre si com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Suponha que duas cargas A e B repelem-se com uma força de $k \text{ N}$, quando localizadas nos pontos $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$, onde a está medido em metros. Encontre o trabalho W necessário para mover a carga A ao longo do eixo x até a origem se a carga B ficar onde está.
25. Segue da Lei de Gravitação Universal de Newton que a força gravitacional exercida pela Terra sobre um objeto varia com o inverso do quadrado de sua distância ao centro da Terra. Assim, o peso $w(x)$ de um objeto está relacionado com sua distância x do centro da Terra por uma fórmula do tipo
- $$w(x) = \frac{k}{x^2}$$
- onde k é uma constante de proporcionalidade que depende da massa do objeto.
- Use esse fato e a hipótese de que a Terra seja uma esfera com um raio de 4.000 milhas para obter a fórmula $w(x)$ usada no Exemplo 4.
 - Encontre uma fórmula para peso $w(x)$ de um satélite que está a x milhas da superfície da Terra, se seu peso na Terra for de 6.000 lb.
 - Qual é o trabalho necessário para elevar o satélite da superfície da Terra até uma posição orbital a 1.000 milhas de altura?
26. (a) A fórmula $w(x) = k/x^2$ do Exercício 25 é aplicável a todos os corpos celestes. Supondo que a Lua seja uma esfera com um raio de 1.080 milhas, encontre a força que ela exerce sobre um astronauta que está x milhas acima de sua superfície se seu peso na superfície da Lua for de 20 lb.
- (b) Qual é o trabalho necessário para elevar o astronauta até um ponto a 10,8 milhas acima da superfície da Lua?
27. O MAGLEV, o primeiro trem comercial magnético de alta velocidade do mundo, começou suas atividades normais em 2003, em um projeto de linha dupla de 30 km ligando Xangai, na China, ao Aeroporto Internacional de Pudong. Suponha que o MAGLEV tenha uma massa de $m = 4,00 \times 10^5 \text{ kg}$ e que, começando no instante em que o trem desenvolve uma velocidade de 20 m/s , o motor aplique uma força de $6,40 \times 10^5 \text{ N}$ no sentido do movimento ao longo de uma distância de $3,00 \times 10^3 \text{ m}$. Use a relação energia-trabalho (6) para obter a velocidade final do trem.
28. Suponha que uma sonda para Marte de massa $m = 2,00 \times 10^3 \text{ kg}$ esteja sujeita apenas à força de seu próprio mecanismo. A partir do instante em que sua velocidade é $v = 1,00 \times 10^4 \text{ m/s}$, o mecanismo é acionado continuamente por uma distância de $1,50 \times 10^5 \text{ m}$, com uma força constante de $2,00 \times 10^5 \text{ N}$ no sentido do movimento. Use a relação energia-trabalho para encontrar a velocidade final da sonda.
29. Em 10 de agosto de 1972, um meteorito com uma massa estimada de $4 \times 10^6 \text{ kg}$ e uma velocidade de aproximadamente 15 km/s cruzou a atmosfera acima dos Estados Unidos e do Canadá, mas felizmente não atingiu a Terra.

- (a) Supondo que ele tivesse atingido a Terra com uma velocidade de 15 km/s, qual seria sua variação de energia cinética em joules (J)?
- (b) Expressa a energia como um múltiplo da energia explosiva de 1 megaton de TNT, que é de $4,2 \times 10^{15}$ J.
- (c) A energia associada à bomba atômica de Hiroshima foi de 13 kiltons de TNT. A quantas bombas como essa equivaleria o impacto do meteorito?
- 30. Texto** Depois de ler os Exemplos 3 a 5, um estudante classificou os problemas de trabalho em “empurrar/puxar” e “bom-

bear”. Descreva essas categorias em suas próprias palavras e discuta os métodos utilizados para resolver cada tipo. Dê exemplos para mostrar que essas categorias não são mutuamente exclusivas.

- 31. Texto** Como poderemos reconhecer um problema que pode ser resolvido por meio da relação trabalho-energia? Ou seja, quais são as “pistas” e as “incógnitas” que poderiam sugerir tal solução? Discuta dois ou três exemplos.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.6

1. 50 pés-lb 2. joule; erg 3. $\int_a^b F(x) dx$ 4. 9 J

6.7 MOMENTOS, CENTROS DE GRAVIDADE E CENTROIDES

Suponha que um corpo físico rígido sofra a ação de um campo gravitacional. Como o corpo é composto de muitas partículas, cada uma das quais sendo afetada pela gravidade, a ação de um campo gravitacional sobre o corpo consiste em um grande número de forças distribuídas por todo o corpo. Contudo, é um fato da Física que essas forças individuais podem ser substituídas por uma única força atuando num ponto denominado **centro de gravidade** do corpo. Nesta seção, vamos mostrar como as integrais podem ser usadas para localizar centros de gravidade.

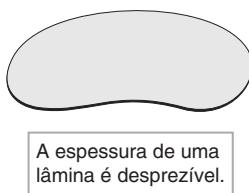


Figura 6.7.1

As unidades na Equação (1) são consistentes, pois massa = (massa/área) × área.

DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA

Consideremos um objeto achataido idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional (Figura 6.7.1). Dizemos que tal objeto é uma **lâmina**. Dizemos que uma lâmina é **homogênea** se sua composição for inteiramente uniforme e, caso contrário, dizemos que é **não homogênea**. Nesta seção, consideraremos lâminas homogêneas, sendo que lâminas não homogêneas serão discutidas no Capítulo 14. A **densidade** de uma lâmina *homogênea* é definida como sendo sua massa por unidade de área. Assim, a densidade δ de uma lâmina homogênea de massa M e área A é dada por $\delta = M/A$. Observe que a massa M de uma lâmina homogênea pode ser dada por

$$M = \delta A \quad (1)$$

► **Exemplo 1** Encontre a massa de uma lâmina triangular de vértices $(0,0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ com densidade $\delta = 3$.

Solução Usando (1) e a Figura 6.7.2, a massa M da lâmina é

$$M = \delta A = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (unidades de massa)} \quad \blacktriangleleft$$

CENTRO DE GRAVIDADE DE UMA LÂMINA

Suponha que a aceleração devida à força da gravidade seja constante, agindo verticalmente para baixo, e suponha que uma lâmina ocupe uma região R num plano xy horizontal. Pode ser mostrado que existe um único ponto (\bar{x}, \bar{y}) (que pode ou não pertencer a R) tal que o efeito

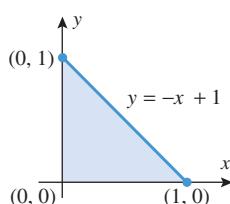
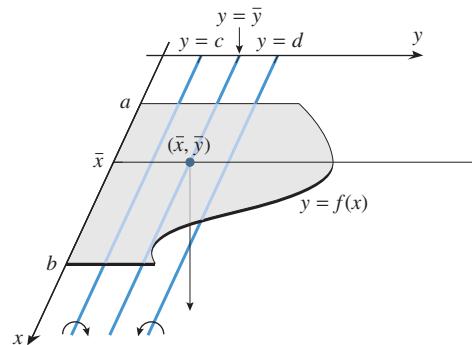


Figura 6.7.2

da gravidade sobre a lâmina é “equivalente” ao de uma só força agindo no ponto (\bar{x}, \bar{y}) . Esse ponto é denominado **centro de gravidade** da lâmina e, se estiver em R , então a lâmina estará horizontalmente equilibrada num ponto de apoio colocado em (\bar{x}, \bar{y}) . Por exemplo, o centro de gravidade de um disco homogêneo está no centro do disco, e o centro de gravidade de uma região retangular homogênea está no centro do retângulo. Para localizar o centro de gravidade de uma lâmina homogênea de formato irregular, precisamos do Cálculo.

6.7.1 PROBLEMA Seja f uma função contínua positiva do intervalo $[a, b]$. Suponha que uma lâmina homogênea de densidade constante δ ocupe uma região R de um plano horizontal xy delimitado pelos gráficos de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Encontre as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de gravidade da lâmina.

Para motivar a solução, considere o que acontece se tentarmos equilibrar a lâmina no fio de uma faca paralelo ao eixo x . Suponha que a lâmina da Figura 6.7.3 seja colocada no fio de uma faca ao longo da reta $y = c$ que não passa pelo centro de gravidade. Já que a lâmina comporta-se como se toda a sua massa estivesse concentrada no centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) , a lâmina está rotacionalmente instável, e a força de gravidade causará uma rotação em torno de $y = c$. De maneira análoga, a lâmina sofre uma rotação se for colocada no fio da faca ao longo de $y = d$. No entanto, se o fio da faca estiver ao longo da reta $y = \bar{y}$ que passa pelo centro de gravidade, a lâmina ficará perfeitamente balanceada. Similarmente, a lâmina ficará perfeitamente balanceada no fio de faca, ao longo da reta $x = \bar{x}$ que passa pelo centro de gravidade. Isto sugere que o centro de gravidade da lâmina possa ser determinado como a interseção de duas retas de equilíbrio, uma paralela ao eixo x e a outra paralela ao eixo y . A fim de determinar essas retas de equilíbrio, precisamos de algumas noções elementares sobre rotações.



Ação da força de gravidade no centro de gravidade da lâmina

Figura 6.7.3

Numa gangorra, as crianças aprendem por experiência própria que uma criança mais leve pode equilibrar outra mais pesada sentando-se mais afastada do fulcro, ou ponto de apoio da gangorra. Isso ocorre porque a tendência de um objeto produzir rotação é proporcional não somente à sua massa mas também à distância entre o objeto e o fulcro. Para tornar essa noção mais precisa, considere um eixo x , que imaginamos como uma viga sem peso. Se uma massa pontual m estiver localizada no ponto x do eixo, então a tendência de a massa produzir rotação da viga em torno do ponto a do eixo é medida pela seguinte quantidade, chamada **momento de m em torno de $x = a$** :

$$\left[\begin{array}{l} \text{momento de } m \\ \text{em torno de } a \end{array} \right] = m(x - a)$$

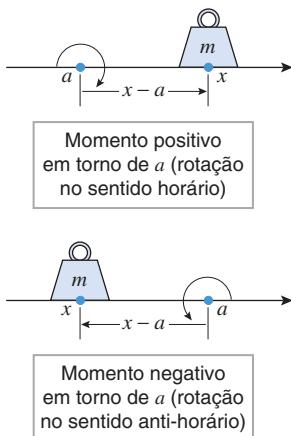


Figura 6.7.4

O número $x - a$ é chamado de **braço de alavanca**. Dependendo da localização da massa à direita ou à esquerda de a , o braço de alavanca é ou a distância entre x e a ou o valor negativo dessa distância (Figura 6.7.4). Os braços de alavanca positivos resultam em momentos positivos e rotações no sentido horário, enquanto os braços de alavanca negativos resultam em momentos negativos e rotações no sentido anti-horário.

Suponha que as massas m_1, m_2, \dots, m_n estejam localizadas nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n de um eixo de coordenadas, e um fulcro esteja localizado no ponto a (Figura 6.7.5). Dependendo de a soma dos momentos em torno de a

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - a) = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \dots + m_n(x_n - a)$$

ser positiva, negativa ou nula, uma viga sem peso ao longo do eixo gira em torno de a no sentido horário, ou no sentido anti-horário, ou fica perfeitamente balanceada. Nesse último caso, diz-se que o sistema de massas está em **equilíbrio**.



Figura 6.7.5

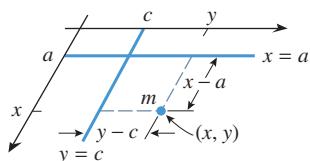


Figura 6.7.6

Essas ideias podem ser estendidas para massas distribuídas no espaço bidimensional. Se imaginarmos o plano xy como uma chapa sem peso suportando uma massa pontual m localizada num ponto (x, y) , então a tendência de a massa produzir uma rotação da chapa em torno da reta $x = a$ é $m(x - a)$, chamada de **momento de m em torno de x = a**, e a tendência de a massa produzir uma rotação em torno da reta $y = c$ é $m(y - c)$, chamada de **momento de m em torno de y = c** (Figura 6.7.6). Em resumo,

$$\left[\begin{array}{l} \text{momento de } m \\ \text{em torno da} \\ \text{linha } x = a \end{array} \right] = m(x - a) \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{l} \text{momento de } m \\ \text{em torno da} \\ \text{linha } y = c \end{array} \right] = m(y - c) \quad (2-3)$$

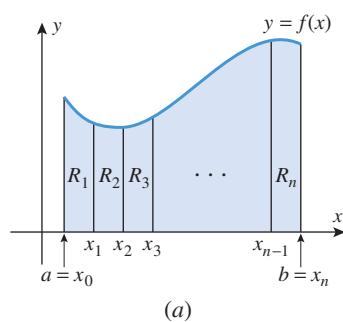
Se uma certa quantidade de massas estiver distribuída pelo plano xy , então o plano (considerado como uma chapa sem peso) fica em equilíbrio num fio de faca ao longo da reta $x = a$ se a soma dos momentos em torno da reta for nula. De maneira similar para a reta $y = c$.

Agora estamos prontos para resolver o Problema 6.7.1. A ideia básica para resolver esse problema é dividir a lâmina em faixas verticais cujas áreas possam ser aproximadas por áreas de retângulos. Essas aproximações, junto às Fórmulas (2) e (3), vão nos permitir criar uma aproximação de somas de Riemann que aproxime o momento da lâmina em torno de um eixo horizontal ou vertical. Tomando o limite das somas de Riemann obteremos, então, uma integral para o momento de uma lâmina em torno de uma reta horizontal ou vertical. Observe que, como a lâmina fica equilibrada nas retas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, o momento da lâmina em torno dessas retas deveria ser zero. Essa observação nos permitirá calcular \bar{x} e \bar{y} .

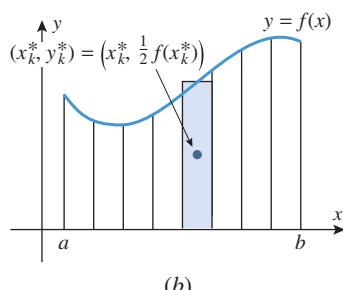
Para implementar essa ideia, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} entre $a = x_0$ e $b = x_n$, o que tem o efeito de dividir a lâmina R em n faixas R_1, R_2, \dots, R_n (Figura 6.7.7a). Suponha que a k -ésima faixa se estenda de x_{k-1} até x_k e que a largura dessa faixa seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Denotemos por x_k^* o ponto médio do k -ésimo subintervalo e approximemos a faixa R_k por um retângulo de largura Δx_k e altura $f(x_k^*)$. Por (1), a massa ΔM_k desse retângulo é $\Delta M_k = \delta f(x_k^*) \Delta x_k$ e vamos supor que o retângulo se comporta como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro $(x_k^*, y_k^*) = (x_k^*, \frac{1}{2}f(x_k^*))$ (Figura 6.7.7b). Então, segue de (2) e (3) que os momentos de R_k em torno das retas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ podem ser approximados



(a)



(b)

Figura 6.7.7

por $(x_k^* - \bar{x})\Delta M_k$ e $(y_k^* - \bar{y})\Delta M_k$, respectivamente. Somando essas aproximações, obtemos a soma de Riemann que aproxima o momento de toda a lâmina em torno das retas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, a saber:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (x_k^* - \bar{x})\Delta M_k &= \sum_{k=1}^n (x_k^* - \bar{x})\delta f(x_k^*)\Delta x_k \\ \sum_{k=1}^n (y_k^* - \bar{y})\Delta M_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_k^*)}{2} - \bar{y} \right) \delta f(x_k^*)\Delta x_k\end{aligned}$$

Tomando os limites com n crescente e as larguras de todos os intervalos tendendo a zero, obtemos as integrais definidas

$$\int_a^b (x - \bar{x})\delta f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b \left(\frac{f(x)}{2} - \bar{y} \right) \delta f(x) dx$$

que representam o momento da lâmina em torno das retas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$. Como a lâmina se equilibra nessas retas, os momentos da lâmina em torno dessas retas deveria ser nulo:

$$\int_a^b (x - \bar{x})\delta f(x) dx = \int_a^b \left(\frac{f(x)}{2} - \bar{y} \right) \delta f(x) dx = 0$$

Como \bar{x} e \bar{y} são constantes, essas equações podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}\int_a^b \delta x f(x) dx &= \bar{x} \int_a^b \delta f(x) dx \\ \int_a^b \frac{1}{2} \delta(f(x))^2 dx &= \bar{y} \int_a^b \delta f(x) dx\end{aligned}$$

a partir das quais obtemos as seguintes fórmulas do centro de gravidade da lâmina:

Centro de Gravidade (\bar{x}, \bar{y}) de uma Lâmina

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \delta x f(x) dx}{\int_a^b \delta f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} \delta(f(x))^2 dx}{\int_a^b \delta f(x) dx} \quad (4-5)$$

Observe que, em ambas as fórmulas, o denominador é a massa M da lâmina. O numerador na fórmula de \bar{x} é denotado por M_y e é denominado **primeiro momento da lâmina em torno do eixo y**; o numerador na fórmula de \bar{y} é denotado por M_x e é denominado **primeiro momento da lâmina em torno do eixo x**. Assim, podemos escrever (4) e (5) como

Fórmulas Alternativas para o Centro de Gravidade (\bar{x}, \bar{y}) de uma Lâmina

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{\text{massa de } R} \int_a^b \delta x f(x) dx \quad (6)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{\text{massa de } R} \int_a^b \frac{1}{2} \delta(f(x))^2 dx \quad (7)$$

► Exemplo 2 Encontre o centro de gravidade da lâmina triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e densidade $\delta = 3$.

Solução A lâmina é mostrada na Figura 6.7.2. No Exemplo 1, calculamos que a massa da lâmina é

$$M = \frac{3}{2}$$

O momento da lâmina em torno do eixo y é

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^1 \delta x f(x) dx = \int_0^1 3x(-x+1) dx \\ &= \int_0^1 (-3x^2 + 3x) dx = \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e o momento da lâmina em torno do eixo x é

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \frac{1}{2} \delta(f(x))^2 dx = \int_0^1 \frac{3}{2}(-x+1)^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1) dx = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por (6) e (7),

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

portanto, o centro de gravidade é $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. ◀

No caso de uma lâmina *homogênea* ocupando uma região R , o centro de gravidade da lâmina é denominado **centroide da região R** . Como a lâmina é homogênea, δ é constante. O fator δ em (4) e (5) pode ser movido para fora dos sinais de integração (e cancelado), e (4) e (5) podem ser expressas como

Como o fator da densidade foi cancelado, podemos interpretar o centroide como uma **propriedade geométrica** da região, o que o distingue do centro de gravidade, que é uma **propriedade física** de um objeto idealizado que ocupa essa região.

Centroide de uma Região R

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{1}{\text{área de } R} \int_a^b x f(x) dx \quad (8)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{1}{\text{área de } R} \int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 dx \quad (9)$$

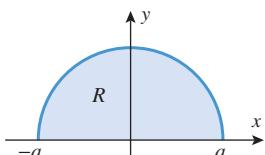


Figura 6.7.8

► **Exemplo 3** Encontre o centroide da região semicircular na Figura 6.7.8.

Solução Por simetria, temos $\bar{x} = 0$, pois o eixo y é claramente uma reta de equilíbrio. Para encontrar \bar{y} , observe inicialmente que a equação do semicírculo é $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. A partir de (9),

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\text{área de } R} \int_{-a}^a \frac{1}{2}(f(x))^2 dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \left(a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \left[\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3 \right) - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \left(\frac{4a^3}{3} \right) = \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

de modo que o centroide é $(0, 4a/3\pi)$. ◀

■ OUTROS TIPOS DE REGIÕES

A estratégia utilizada para encontrar o centro de gravidade da região do Problema 6.7.1 pode ser utilizada para encontrar o centro de gravidade de regiões que não são daquela forma.

Considere uma lâmina homogênea que ocupe uma região R delimitada por duas funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ acima do intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$ se $a \leq x \leq b$. Para encontrar o centro de gravidade dessa lâmina, podemos subdividir a lâmina em n faixas usando retas paralelas ao eixo y . Se x_k^* for o ponto médio da k -ésima faixa, essa faixa pode ser aproximada por um retângulo de largura Δx_k e altura $f(x_k^*) - g(x_k^*)$. Vamos supor que toda a massa do k -ésimo retângulo esteja concentrada em seu centro $(x_k^*, y_k^*) = (x_k^*, \frac{1}{2}(f(x_k^*) + g(x_k^*)))$ (Figura 6.7.9). Continuando o argumento como na solução do Problema 6.7.1, obtemos que o centro de gravidade da lâmina é

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} = \frac{1}{\text{área de } R} \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx \quad (10)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} = \frac{1}{\text{área de } R} \int_a^b \frac{1}{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \quad (11)$$

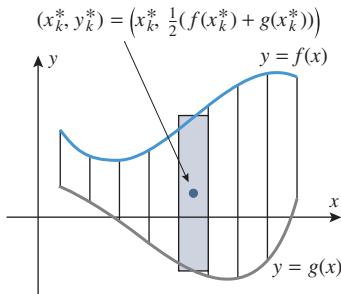


Figura 6.7.9

Note que a densidade da lâmina não aparece nas Equações (10) e (11). Esse fato reflete que o centroide é uma propriedade geométrica de R .

► Exemplo 4 Encontre o centroide da região R delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 6$.

Solução Inicialmente, observe que as duas curvas se intersectam quando $x = -2$ e $x = 3$ e que $x + 6 \geq x^2$ nesse intervalo (Figura 6.7.10). A área de R é

$$\int_{-2}^3 [(x+6) - x^2] dx = \frac{125}{6}$$

De (10) e (11), obtemos

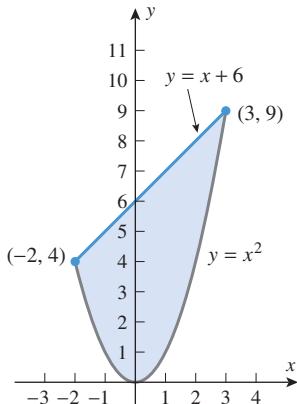


Figura 6.7.10

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\text{área de } R} \int_{-2}^3 x[(x+6) - x^2] dx \\ &= \frac{6}{125} \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_{-2}^3 \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{125}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\text{área de } R} \int_{-2}^3 \frac{1}{2} ((x+6)^2 - (x^2)^2) dx \\ &= \frac{6}{125} \int_{-2}^3 \frac{1}{2} (x^2 + 12x + 36 - x^4) dx \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 36x - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_{-2}^3 \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{250}{3} = 4 \end{aligned}$$

de modo que o centroide de R é $(\frac{1}{2}, 4)$. ◀

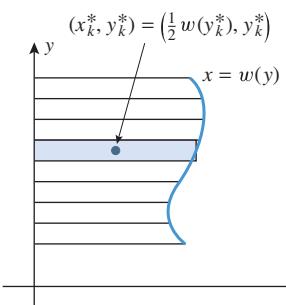


Figura 6.7.11

Suponha que w seja uma função contínua de y num intervalo $[c, d]$ com $w(y) \geq 0$ se $c \leq y \leq d$. Considere uma lâmina que ocupe uma região R limitada acima por $y = d$, abaixo por $y = c$, à esquerda pelo eixo y e à direita por $x = w(y)$ (Figura 6.7.11). Para encontrar o centro de gravidade dessa lâmina, observamos que os papéis de x e y no Problema 6.7.1 foram trocados. Agora, imaginemos a lâmina subdividida em n faixas usando retas paralelas ao eixo x . Seja y_k^* o ponto médio do k -ésimo subintervalo, e approximemos a faixa por um retângulo de largura Δy_k e altura $w(y_k^*)$. Vamos supor que toda a massa do k -ésimo retângulo esteja concentrada em seu centro $(x_k^*, y_k^*) = (\frac{1}{2}w(y_k^*), y_k^*)$ (Figura 6.7.11). Continuando o argumento como na solução do Problema 6.7.1, obtemos que o centro de gravidade da lâmina é

$$\bar{x} = \frac{\int_c^d \frac{1}{2}(w(y))^2 dy}{\int_c^d w(y) dy} = \frac{1}{\text{área de } R} \int_c^d \frac{1}{2}(w(y))^2 dy \quad (12)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d yw(y) dy}{\int_c^d w(y) dy} = \frac{1}{\text{área de } R} \int_c^d yw(y) dy \quad (13)$$

Mais uma vez, a ausência da densidade nas Equações (12) e (13) reflete a natureza geométrica do centroide.

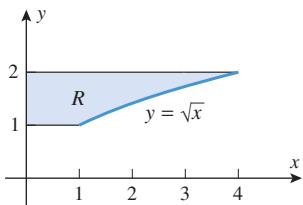


Figura 6.7.12

► Exemplo 5 Encontre o centroide da região R delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $y = 2$ e o eixo y (Figura 6.7.12).

Solução Note que $x = w(y) = y^2$ e que a área de R é

$$\int_1^2 y^2 dy = \frac{7}{3}$$

De (12) e (13), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\text{área de } R} \int_1^2 \frac{1}{2}(y^2)^2 dy = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{10} y^5 \Big|_1^2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{31}{10} = \frac{93}{70} \\ \bar{y} &= \frac{1}{\text{área de } R} \int_1^2 y(y^2) dy = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} y^4 \Big|_1^2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{28} \end{aligned}$$

de modo que o centroide de R é $(93/70, 45/28) \approx (1,329, 1.607)$. ◀

■ TEOREMA DE PAPPUS

O seguinte teorema, devido ao matemático grego Pappus, dá uma relação importante entre o centroide uma região plana R e o volume do sólido gerado pela revolução dessa região em torno de uma reta.

6.7.2 TEOREMA (Teorema de Pappus) *Se R for uma região plana limitada e L uma reta pertencente ao plano de R , mas tal que R está inteiramente de um lado de L , então o volume do sólido gerado pela revolução de R em torno de L será dado por*

$$\text{volume} = (\text{área de } R) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{distância percorrida} \\ \text{pelo centroide} \end{array} \right)$$

DEMONSTRAÇÃO Vamos provar esse teorema no caso especial em que L é o eixo y , a região R está no primeiro quadrante e é da forma dada no Problema 6.7.1. (Uma prova menos geral será indicada nos exercícios da Seção 14.8.) Nesse caso, o volume V do sólido obtido girando R em torno de L pode ser encontrado pelo método das camadas cilíndricas (Seção 6.3), sendo dado por

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

Assim, segue de (8) que

$$V = 2\pi\bar{x}[\text{área de } R]$$

Isso completa a demonstração, uma vez que $2\pi\bar{x}$ é a distância percorrida pelo centroide quando R gira em torno do eixo y . ■

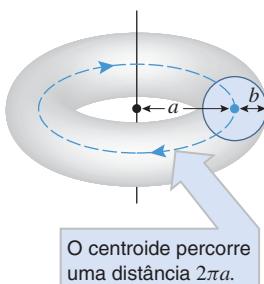


Figura 6.7.13

► Exemplo 6 Use o Teorema de Pappus para calcular o volume V do toro gerado pela rotação de uma região circular de raio b em torno de uma reta a uma distância a (maior do que b) do centro do círculo (Figura 6.7.13).

Solução Por simetria, o centroide de uma região circular é seu centro. Então, a distância percorrida pelo centroide é $2\pi a$. Como a área de um círculo de raio b é πb^2 , segue, do Teorema de Pappus, que o volume do toro é

$$V = (2\pi a)(\pi b^2) = 2\pi^2 ab^2 \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.7 (Ver página 467 para respostas.)

- A massa total de uma lâmina homogênea de área A e densidade δ é _____.
- Uma lâmina homogênea de massa M e densidade δ ocupa uma região do plano xy delimitada pelos gráficos de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, sendo f uma função contínua não negativa definida num intervalo $[a, b]$. A coordenada x do centro de gravidade da lâmina é M_y/M , em que M_y é denominado o _____ e é dado pela integral _____.
- Seja R a região compreendida pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2 - x$, para $0 \leq x \leq 1$. A área de R é $\frac{7}{6}$ e o centroide de R é _____.
- Se a região R do Exercício 3 for usada para gerar um sólido G pela rotação de R em torno de uma reta horizontal a 6 unidades acima de seu centroide, então o volume de G é _____.

EXERCÍCIOS 6.7 C CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

- Conforme indica a figura ao lado, as massas $m_1 = 5$, $m_2 = 10$ e $m_3 = 20$ estão posicionadas numa certa viga sem peso.
 - Suponha que o fulcro esteja posicionado em $x = 5$. Sem calcular a soma dos momentos em relação a 5, determine se essa soma é positiva, zero ou negativa. Explique.
 - Onde deve se colocar o fulcro para que a viga fique equilibrada?

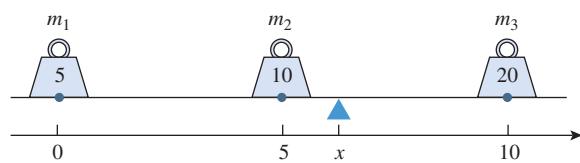


Figura Ex-1

Pappus de Alexandria (século IV d.C.) Matemático grego. Pappus viveu no início da era cristã, quando a atividade matemática estava num período de declínio. Suas principais contribuições apareceram numa série de oito livros chamados *A Coleção* (escritos cerca de 340 d.C.). Esse trabalho, que foi preservado apenas só parcialmente, continha alguns resultados originais, mas era mais dedi-

cado a deduções, aperfeiçoamentos e demonstrações de resultados de matemáticos anteriores. O teorema de Pappus, sem demonstração no Livro VII de *A Coleção*, provavelmente era conhecido e foi demonstrado anteriormente. Esse resultado é chamado, às vezes, de Teorema de Guldin, como reconhecimento ao matemático suíço Paul Guldin (1577 - 1643), que o redescobriu independentemente.

2. Conforme indica a figura abaixo, as massas $m_1 = 10$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$ e m estão posicionadas numa certa viga sem peso com um fulcro colocado no ponto 4.
- (a) Suponha que $m = 14$. Sem calcular a soma dos momentos em relação a 4, determine se essa soma é positiva, zero ou negativa. Explique.
- (b) Para qual valor de m a viga fique equilibrada?

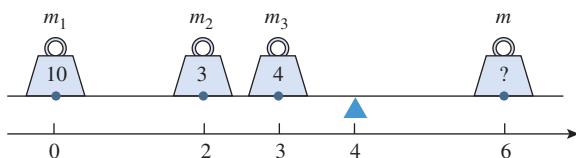
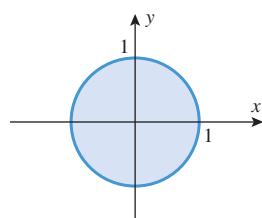
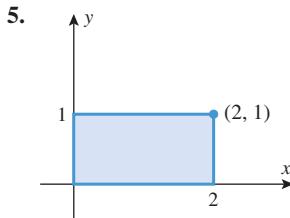
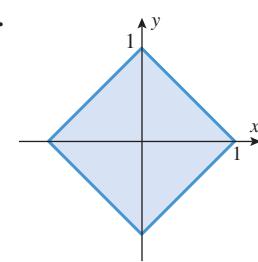
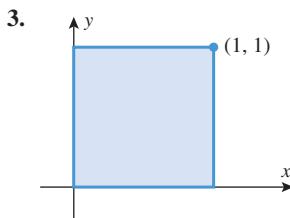
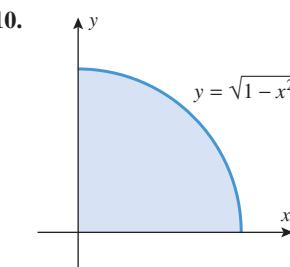
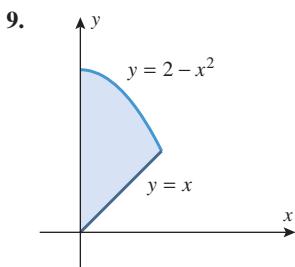
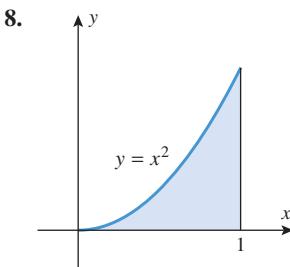
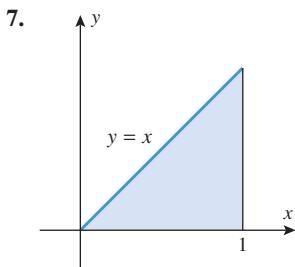


Figura Ex-2

- 3-6 Faça uma conjectura sobre as coordenadas do centroide da região e confirme-a por integração. ■



- 7-20 Encontre o centroide da região. ■



11. O triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$.
12. O triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 0)$.
13. A região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $x + y = 6$.
14. A região delimitada à esquerda pelo eixo y , à direita pela reta $x = 2$, abaixo pela parábola $y = x^2$ e acima pela reta $y = x + 6$.
15. A região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x + 2$.
16. A região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 1$.
17. A região delimitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.
18. A região delimitada pelos gráficos de $x = 1/y$, $x = 0$, $y = 1$ e $y = 2$.
19. A região delimitada pelos gráficos de $y = x$, $x = 1/y^2$ e $y = 2$.
20. A região delimitada pelos gráficos de $xy = 4$ e $x + y = 5$.

ENFOCANDO CONCEITOS

21. Use considerações de simetria para argumentar que o centroide de um triângulo isósceles fica na mediana da base do triângulo.
22. Use considerações de simetria para argumentar que o centroide de uma elipse fica na interseção dos semieixos da elipse.

- 23-26 Encontre a massa e o centro de gravidade da lâmina dada de densidade δ . ■

23. A lâmina delimitada pelo eixo x , a reta $x = 1$ e a curva $y = \sqrt{x}$; $\delta = 2$.
24. A lâmina delimitada pelo gráfico de $x = y^4$ e a reta $x = 1$; $\delta = 15$.
25. A lâmina delimitada pelo gráfico de $y = |x|$ e a reta $y = 1$; $\delta = 3$.
26. A lâmina delimitada pelo eixo x e o gráfico da equação $y = 1 - x^2$; $\delta = 3$.
- C 27-30 Use um CAS para encontrar a massa e o centro de gravidade da lâmina dada de densidade δ . ■
27. A lâmina delimitada por $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi$; $\delta = 4$.
28. A lâmina delimitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$; $\delta = 1/(e-1)$.
29. A lâmina delimitada pelo gráfico de $y = \ln x$, o eixo x e a reta $x = 2$; $\delta = 1$.
30. A lâmina delimitada pelos gráficos de $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/4$; $\delta = 1 + \sqrt{2}$.

- 31-34 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. [No Exercício 34, suponha que o quadrado girado fique no plano xy à direita do eixo y .] ■

- 31.** O centroide de um retângulo é a interseção das diagonais do retângulo.
- 32.** O centroide de um losango é a interseção das diagonais do losango.
- 33.** O centroide de um triângulo equilátero é a interseção das medianas do triângulo.
- 34.** Girando um quadrado em torno de seu centro, é possível mudar o volume do sólido de revolução obtido girando o quadrado em torno do eixo y .
- 35.** Encontre o centroide do triângulo de vértices $(0, 0)$, (a, b) e $(a, -b)$.
- 36.** Prove que o centroide de um triângulo é o ponto de interseção das três medianas do triângulo. [Sugestão: Escolha as coordenadas de tal modo que os vértices do triângulo estejam localizados em $(0, -a)$, $(0, a)$ e (b, c) .]
- 37.** Encontre o centroide do trapézio de vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(-b, c)$ e (b, c) .
- 38.** Prove que o centroide de um paralelogramo é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. [Sugestão: Escolha as coordenadas de tal modo que os vértices do paralelogramo estejam localizados em $(0, 0)$, $(0, a)$, (b, c) e $(b, a + c)$.]
- 39.** Use o Teorema de Pappus e o fato de que o volume de uma esfera de raio a é $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ para mostrar que o centroide da lâmina limitada pelo eixo x e o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ é $(0, 4a/(3\pi))$. (Esse problema foi resolvido diretamente no Exemplo 3.)
- 40.** Use o Teorema de Pappus e o resultado do Exercício 39 para calcular o volume do sólido gerado quando a região limitada pelo eixo x e o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ gira em torno da
- reta $y = -a$
 - reta $y = x - a$
- 41.** Use o Teorema de Pappus e o fato de que a área de uma elipse com semieixos a e b é πab para calcular o volume do toro elíptico gerado pela revolução da elipse
- $$\frac{(x - k)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- em torno do eixo y . Suponha que $k > a$.
- 42.** Use o Teorema de Pappus para calcular o volume do sólido gerado quando a região envolvida por $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$ é girada em torno do eixo x .
- 43.** Use o Teorema de Pappus para calcular o centroide da região triangular com vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, b)$, onde $a > 0$ e $b > 0$. [Sugestão: Gire a região em torno do eixo dos x para obter \bar{y} e em torno do eixo dos y para obter \bar{x} .]
- 44. Texto** Suponha que uma região R do plano seja decomposta em duas regiões, R_1 e R_2 , cujas áreas sejam A_1 e A_2 , respectivamente, e cujos centroides sejam (\bar{x}_1, \bar{y}_1) e (\bar{x}_2, \bar{y}_2) , respectivamente. Investigue o problema de expressar o centroide de R em termos de A_1 , A_2 , (\bar{x}_1, \bar{y}_1) e (\bar{x}_2, \bar{y}_2) . Escreva um relatório curto sobre suas investigações e apoie suas conclusões com argumento plausíveis. Podemos estender esses resultados a decomposições de R em mais do que duas regiões?
- 45. Texto** Como podemos reconhecer se um problema pode ser resolvido utilizando o Teorema de Pappus? Ou seja, quais são as “pistas” e as “incógnitas” que poderiam sugerir uma tal solução? Discuta dois ou três exemplos.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.7

1. δA 2. primeiro momento em torno do eixo y ; $\int_a^b \delta x f(x) dx$ 3. $\left(\frac{5}{14}, \frac{32}{35}\right)$ 4. 14π

6.8 PRESSÃO E FORÇA DE FLUIDOS

Nesta seção, usaremos as ferramentas de integração desenvolvidas no capítulo precedente para o estudo de pressões e de forças exercidas por fluidos sobre objetos submersos.

■ O QUE É UM FLUIDO?

Um **fluid** é uma substância que se ajusta aos contornos de qualquer recipiente no qual for colocada. O termo fluido inclui *líquidos*, como água, petróleo e mercúrio, bem como *gases*, como hélio, oxigênio e ar. O estudo dos fluidos se enquadra em duas categorias: *estática dos fluidos* (estudo dos fluidos em repouso) e *dinâmica dos fluidos* (estudo dos fluidos em movimento). Nesta seção, trataremos somente de estática dos fluidos; posteriormente, perto do final do livro, investigaremos problemas de dinâmica dos fluidos.

■ O CONCEITO DE PRESSÃO



Brand X Pictures/Getty Images, Inc.

Os sapatos de neve impedem que a mulher afunde na neve por espalhar seu peso numa área maior para reduzir sua pressão sobre a neve.

O efeito de uma força sobre um objeto depende de como ela se espalha sobre a superfície dele. Por exemplo, andando na neve com botas, o peso de nosso corpo esmaga a neve e nós afundamos. Porém, se pusermos um par de sapatos de neve, nosso peso se espalhará em uma área de superfície maior e seremos capazes de deslizar sobre a superfície. O conceito que leva em conta tanto a magnitude da força quanto a área sobre a qual é aplicada é chamado de *pressão*.

6.8.1 DEFINIÇÃO Se uma força de magnitude F for aplicada a uma superfície de área A , então definimos a *pressão* P exercida pela força sobre a superfície como sendo

$$P = \frac{F}{A} \quad (1)$$

Segue dessa definição que as unidades de pressão são força por unidade de área. As unidades mais comuns de pressão são newtons por metro quadrado (N/m^2) e libras por polegada quadrada (lb/pol^2) ou libras por pé quadrado ($lb/pé^2$) no sistema BE. Conforme indicado na Tabela 6.8.1, 1 newton por metro quadrado é chamado de *pascal* (Pa). Uma pressão de 1 Pa é bem pequena ($1 \text{ Pa} = 1,45 \times 10^{-4} \text{ lb/pol}^2$); portanto, é comum usar kilo-pascal (kPa), que equivale a 1.000 Pa.

Tabela 6.8.1
UNIDADES DE FORÇA E PRESSÃO

SISTEMA	FORÇA	÷	ÁREA	=	PRESSÃO
MKS	newton (N)		metro quadrado (m^2)		pascal (Pa)
BE	libra (lb)		pé quadrado ($pé^2$)		lb/pé ²
BE	libra (lb)		polegada quadrada (pol^2)		lb/pol ² (psi)
FATORES DE CONVERSÃO:					
$1 \text{ Pa} \approx 1,45 \times 10^{-4} \text{ lb/pol}^2 \approx 2,09 \times 10^{-2} \text{ lb/pé}^2$					
$1 \text{ lb/pol}^2 \approx 6,89 \times 10^3 \text{ Pa}$					
$1 \text{ lb/pé}^2 \approx 47,9 \text{ Pa}$					

Nesta seção, estudaremos forças e pressões sobre objetos submersos em fluidos. As pressões em si não têm nenhuma característica direcional; porém, as forças que elas criam agem sempre perpendicularmente à superfície do objeto submerso. Assim, na Figura 6.8.1, a



Blaise Pascal (1623-1662) Matemático e cientista francês. A mãe de Pascal morreu quando ele tinha três anos de idade e seu pai, um magistrado altamente instruído, cuidou pessoalmente dos estudos iniciais do rapaz. Embora Pascal mostrasse uma inclinação para a Ciência e a Matemática, seu pai recusou-se a ensiná-lo essas matérias até que dominasse latim e grego. A irmã de Pascal, sua principal biógrafa, afirma que ele descobriu sozinho as 32 primeiras proposições de Euclides, sem jamais ter lido um livro de Geometria. (Porém, é geralmente aceito que tal história é apócrifa.) Não obstante, o precoce Pascal publicou um ensaio altamente respeitável sobre seções cônicas quando tinha 16 anos de idade. Descartes, lendo o ensaio, considerou-o tão brilhante que não podia acreditar ter sido escrito por um rapaz tão jovem. Quando tinha 18 anos, sua saúde começou a esvaír-se e, até a morte, sofreu de dores constantes. Porém, sua criatividade nunca foi afetada.

As contribuições de Pascal para a Física incluem a descoberta de que a pressão do ar decrece com a altitude e o princípio da pressão dos fluidos que leva seu nome. No entanto, a originalidade de seu trabalho é questionada por alguns historiadores. Pascal deu grandes contribuições ao ramo da Matemática chamado de Geometria Projetiva, e ajudou a desenvolver a teoria de Probabilidades através de uma série de cartas trocadas com Fermat.

Em 1646, os problemas de saúde de Pascal causaram-lhe uma profunda crise emocional que o levou a tornar-se cada vez mais interessado em assuntos religiosos. Embora católico de nascimento, converteu-se a uma doutrina religiosa chamada janseenismo e gastou a maior parte de seus últimos anos escrevendo sobre religião e filosofia.

[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blaise_pascal.jpg]

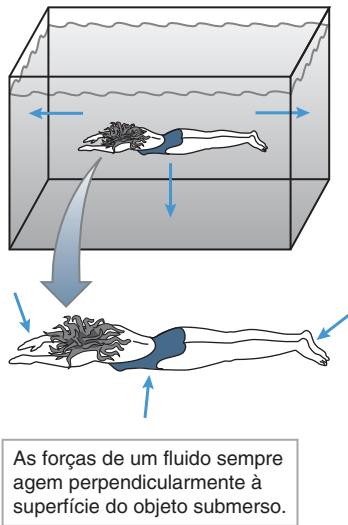


Figura 6.8.1

Tabela 6.8.2

DENSIDADE DE PESO	
MKS	N/m ³
Óleo de máquina	4.708
Gasolina	6.602
Água pura	9.810
Água do mar	10.045
Mercúrio	133.416

BE	lb/pé ³
Óleo de máquina	30,0
Gasolina	42,0
Água pura	62,4
Água do mar	64,0
Mercúrio	849,0

Todas as densidades são afetadas por variações na temperatura e na pressão. Os pesos específicos também são afetados por variações de g .

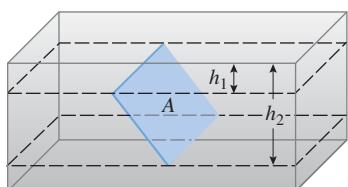


Figura 6.8.2

pressão da água cria forças horizontais sobre os lados do tanque, forças verticais sobre o fundo do tanque e, sobre as diferentes partes do corpo da nadadora, forças que variam em direção e sentido, de forma a serem sempre perpendiculares ao corpo.

► **Exemplo 1** Referindo-se à Figura 6.8.1, suponha que as costas da mão da nadadora têm uma área de superfície de $8,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e que a pressão agindo sobre ela seja de $5,1 \times 10^4 \text{ Pa}$ (um valor realista próximo do fundo de uma piscina). Encontre a força que age sobre a mão da nadadora.

Solução A partir de (1), a força F é

$$F = PA = (5,1 \times 10^4 \text{ N/m}^2)(8,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2) \approx 4,3 \times 10^2 \text{ N}$$

Isso é um valor bem grande para uma força (cerca de 100 lb no sistema BE). ◀

DENSIDADE DE FLUIDO

Os mergulhadores sabem que, quanto mais fundo estiverem, maiores são a pressão e a força que sentem sobre seus corpos. Essa sensação de pressão e de força é causada pelo peso da água e do ar sobre eles – quanto mais fundo mergulharem, maior será o peso da água e, portanto, maior a pressão.

Para calcular as pressões e as forças sobre objetos submersos, precisamos saber alguma coisa sobre as características dos fluidos nos quais eles estão submersos. Para simplificar, vamos supor que os fluidos considerados são *homogêneos*, significando que duas amostras com o mesmo volume têm a mesma massa. Segue dessa hipótese que a massa por unidade de volume é uma constante δ , a qual depende das características do fluido, mas não do tamanho e da localização da amostra; chamamos

$$\delta = \frac{m}{V} \quad (2)$$

de **densidade de massa** do fluido. Às vezes, é mais conveniente trabalhar com o peso por unidade de volume. Assim, definimos a **densidade de peso (peso específico)** ρ de um fluido como sendo

$$\rho = \frac{w}{V} \quad (3)$$

onde w é o peso da amostra do fluido de volume V . Assim, se o peso específico for conhecido, o peso w da amostra do fluido com volume V pode ser calculado pela fórmula $w = \rho V$. A Tabela 6.8.2 mostra alguns pesos específicos típicos.

PRESSÃO DE FLUIDO

Para calcular pressões e forças de fluidos, precisamos fazer uso de uma observação experimental. Suponha que uma superfície plana de área A esteja submersa em um fluido homogêneo de densidade de peso ρ de tal maneira que toda a superfície se encontre entre as profundidades h_1 e h_2 , onde $h_1 \leq h_2$ (Figura 6.8.2). Os experimentos mostram que o fluido exerce em ambos os lados da superfície uma força que é perpendicular à superfície e cuja magnitude F satisfaz as desigualdades

$$\rho h_1 A \leq F \leq \rho h_2 A \quad (4)$$

Assim, segue de (1) que a pressão $P = F/A$ em um dado lado da superfície satisfaz as desigualdades

$$\rho h_1 \leq P \leq \rho h_2 \quad (5)$$

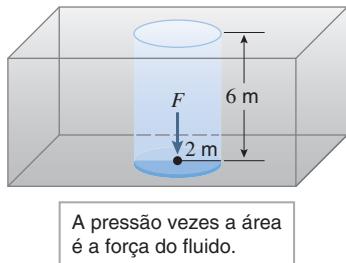


Figura 6.8.3

Observe que agora é imediato calcular a força e a pressão de um fluido em uma superfície plana que está submersa *horizontalmente* a uma profundidade h , pois então $h = h_1 = h_2$, e as desigualdades (4) e (5) tornam-se as *igualdades*

$$F = \rho h A \quad (6)$$

e

$$P = \rho h \quad (7)$$

► **Exemplo 2** Encontre a pressão e a força do fluido no topo de uma placa circular plana, com raio de 2 m, submersa horizontalmente na água a uma profundidade de 6 m (Figura 6.8.3).

Solução Como o peso específico da água é $\rho = 9.810 \text{ N/m}^3$, tem-se, a partir de (7), que a pressão do fluido é

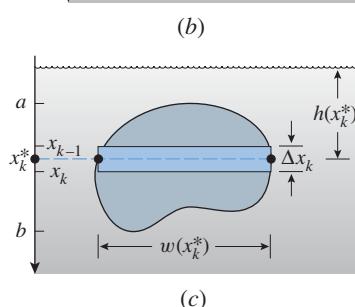
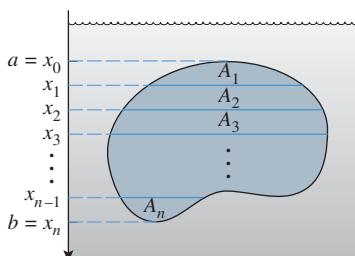
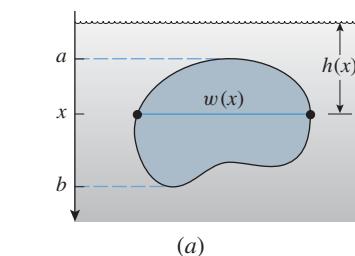
$$P = \rho h = (9.810)(6) = 58.860 \text{ Pa}$$

e a partir de (6) que a força do fluido é

$$F = \rho h A = \rho h (\pi r^2) = (9.810)(6)(4\pi) = 235.440\pi \approx 739.700 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

■ FORÇA DO FLUIDO SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL

Foi fácil calcular a força do fluido sobre a placa horizontal no Exemplo 2, pois todos os pontos estavam na mesma profundidade. O problema de encontrar a força do fluido sobre uma superfície vertical é mais complicado, pois a profundidade e, portanto, a pressão, não são constantes na superfície. Para encontrar a força do fluido sobre uma superfície vertical, vamos necessitar do Cálculo.



6.8.2 PROBLEMA Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido com peso específico ρ e que a parte submersa da superfície se estenda de $x = a$ até $x = b$, ao longo da parte positiva do eixo x (Figura 6.8.4a). Dado $a \leq x \leq b$, seja $w(x)$ a largura da superfície e $h(x)$ a profundidade do ponto x , defina o que entendemos por *força do fluido* F sobre a superfície e encontre uma fórmula para calculá-la.

A ideia básica para resolver esse problema é dividir a superfície em faixas horizontais cujas áreas possam ser aproximadas por áreas de retângulos. Essas aproximações de áreas, junto às desigualdades (4), permitirão criar uma soma de Riemann que aproxime a força total na superfície. Tomando um limite de somas de Riemann, obteremos uma integral para F .

Para implementar essa ideia, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Isso tem o efeito de dividir a superfície em n faixas com áreas A_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (Figura 6.8.4b). Segue de (4) que a força F_k na k -ésima faixa satisfaz as desigualdades

$$\rho h(x_{k-1}) A_k \leq F_k \leq \rho h(x_k) A_k$$

ou, equivalentemente,

$$h(x_{k-1}) \leq \frac{F_k}{\rho A_k} \leq h(x_k)$$

Como a função profundidade $h(x)$ cresce linearmente, deve existir algum ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k tal que

$$h(x_k^*) = \frac{F_k}{\rho A_k}$$

ou, equivalentemente,

$$F_k = \rho h(x_k^*) A_k$$

Figura 6.8.4

Agora, aproximamos a área A_k da k -ésima faixa da superfície pelo área de um retângulo de largura $w(x_k^*)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Figura 6.8.4c). Segue que F_k pode ser aproximado por

$$F_k = \rho h(x_k^*) A_k \approx \rho h(x_k^*) \cdot \underbrace{w(x_k^*) \Delta x_k}_{\text{Área do retângulo}}$$

Somando essas aproximações, obtemos a seguinte soma de Riemann, que aproxima a força total F sobre a superfície:

$$F = \sum_{k=1}^n F_k \approx \sum_{k=1}^n \rho h(x_k^*) w(x_k^*) \Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e a extensão dos subintervalos tende a zero, obtemos a integral definida

$$F = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho h(x_k^*) w(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b \rho h(x) w(x) dx$$

Em suma, temos o seguinte resultado:

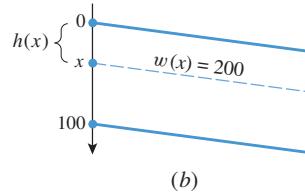
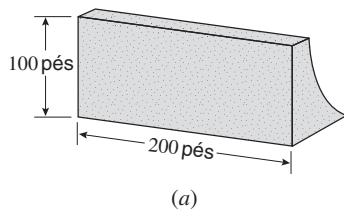


Figura 6.8.5

6.8.3 DEFINIÇÃO Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido com peso específico ρ , e que a parte submersa da superfície se estenda de $x = a$ até $x = b$ ao longo de um eixo x cujo sentido positivo seja para baixo (Figura 6.8.4a). Dado $a \leq x \leq b$, suponha que $w(x)$ seja a largura da superfície e que $h(x)$ seja a profundidade do ponto x . Então, definimos a **força do fluido** F sobre a superfície por

$$F = \int_a^b \rho h(x) w(x) dx \quad (8)$$

► **Exemplo 3** A face de um dique é um retângulo vertical com altura de 100 pés e largura de 200 pés (Figura 6.8.5a). Encontre a força total que o fluido exerce sobre a face quando a superfície da água está no nível do topo do dique.

Solução Introduzimos um eixo x com origem na superfície da água, conforme mostra a Figura 6.8.5b. Em um ponto x sobre esse eixo, a largura do dique é $w(x) = 200$ pés e a profundidade é $h(x) = x$ pés. Assim, a partir de (8) com $\rho = 62,4$ lb/pé³ (peso específico da água), obtemos como força total sobre a face

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{100} (62,4)(x)(200) dx = 12.480 \int_0^{100} x dx \\ &= 12.480 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{100} = 62.400.000 \text{ lb} \end{aligned}$$

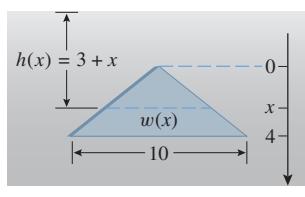
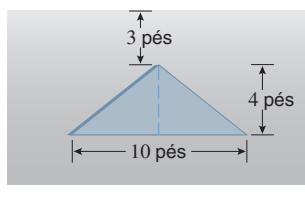


Figura 6.8.6

► **Exemplo 4** Uma placa com o formato de triângulo isósceles, com base de 10 pés e altura de 4 pés, é imersa verticalmente em óleo de máquina, conforme mostra a Figura 6.8.6a. Encontre a força F que o fluido exerce sobre a superfície da placa se o peso específico do óleo for $\rho = 30$ lb/pé³.

Solução Vamos introduzir um eixo x , conforme mostra a Figura 6.8.6b. Por semelhança de triângulos, a extensão da placa, em pés, a uma profundidade $h(x) = (3 + x)$ pés, satisfaz

$$\frac{w(x)}{10} = \frac{x}{4}, \quad \text{logo} \quad w(x) = \frac{5}{2}x$$

Assim, tem-se, a partir de (8), que a força sobre a placa é

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho h(x) w(x) dx = \int_0^4 (30)(3+x) \left(\frac{5}{2}x\right) dx \\ &= 75 \int_0^4 (3x + x^2) dx = 75 \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 3.400 \text{ lb} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.8 (Ver página 473 para respostas.)

- A unidade de pressão equivalente a 1 newton por metro quadrado (N/m^2) é chamada de _____. A unidade de pressão psi significa _____.
- Dado que o peso específico da água é 9.810 N/m^3 , a pressão de fluido em uma lâmina retangular de 2 por 3 m que está submersa horizontalmente na água a uma profundidade de 10 m é de _____. A força do fluido na placa é de _____.
- Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido de peso específico ρ e que a parte submersa da

superfície se estenda de $x = a$ até $x = b$ ao longo de um eixo x , cujo sentido positivo é para baixo. Se, com $a \leq x \leq b$, a superfície tiver largura $w(x)$ e profundidade $h(x)$, então a força de fluido na superfície é $F = \underline{\hspace{2cm}}$.

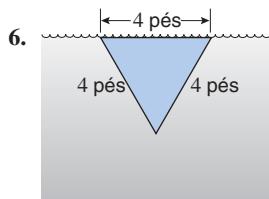
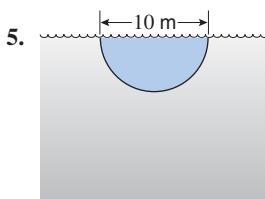
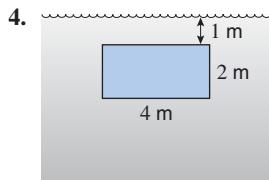
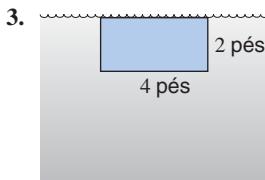
- Uma lâmina retangular com 2 m de largura por 3 m de altura está submersa verticalmente em água de tal modo que seu topo está a 5 m abaixo da superfície da água. Uma expressão integral para a força da água sobre a superfície plana é $F = \underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 6.8

Nestes exercícios, quando necessário, consulte a Tabela 6.8.2 para os pesos específicos dos fluidos. ■

- Uma placa retangular plana é imersa horizontalmente em água.
 - Encontre a força (em lb) e a pressão (em lb/pés^2) sobre a superfície superior da placa se sua área for de 100 pés^2 e a superfície estiver a 5 pés de profundidade.
 - Encontre a força (em N) e a pressão (em Pa) sobre a superfície superior da placa se sua área for de 25 m^2 e a superfície estiver a 10 m de profundidade.
- (a) Encontre a força (em N) sobre o convés de um navio afundado se sua área for de 160 m^2 e a pressão sobre o convés for de $6,0 \times 10^5 \text{ Pa}$.
 - Encontre a força (em lb) sobre a máscara de um mergulhador se sua área for de 60 pol^2 e a pressão sobre ela for de 100 lb/pol^2 .

3-8 As superfícies planas mostradas estão imersas verticalmente em água. Encontre a força do fluido sobre cada superfície. ■



- Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido de peso específico ρ . Dobrando-se ρ , dobra também a força sobre a superfície? Explique seu raciocínio.
 - Um tanque de óleo tem a forma de um cilindro circular reto, com 4 pés de diâmetro. Encontre a força total do fluido sobre um extremo quando o eixo é horizontal e o tanque está cheio até a metade com um óleo de peso específico de 50 lb/pés^3 .
 - Uma placa quadrada com a pés de lado está mergulhada em um líquido de peso específico ρ lb/pés^3 . Encontre a força do fluido sobre a placa se um vértice estiver tocando a superfície e uma diagonal for perpendicular a esta.
- 12-15 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■
- A pressão e a força têm as mesmas unidades no sistema MKS.
 - Num tanque d'água cilíndrico (com eixo vertical), a força do fluido na base do tanque é igual ao peso da água no tanque.
 - Num tanque d'água retangular, a força do fluido em qualquer um dos lados do tanque é menor do que a força do fluido na base do tanque.
 - Em qualquer tanque d'água com uma base plana, a força do fluido na base do tanque é, no máximo, igual ao peso da água no tanque, independentemente do formato do tanque.

- 16-19** A Fórmula (8) dá a força do fluido em uma superfície plana imersa verticalmente em um fluido. Mais geralmente, se uma superfície plana for submersa de tal modo que faz um ângulo de $0 \leq \theta < \pi/2$ com a vertical, então a força do fluido sobre a superfície é dada por

$$F = \int_a^b \rho h(x) w(x) \sec \theta \, dx$$

Use essa fórmula nestes exercícios. ■

- 16.** Derive a fórmula dada acima para a força do fluido sobre uma superfície plana imersa a um certo ângulo em um fluido.
- 17.** A figura abaixo mostra uma piscina retangular cujo fundo é um plano inclinado. Encontre a força da água sobre o fundo quando a piscina estiver cheia até o topo.

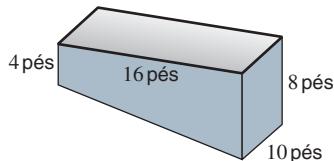


Figura Ex-17

- 18.** Por quantos pés devemos baixar a água da piscina do Exercício 17 para que a força no fundo seja reduzida por um fator de $\frac{1}{2}$?
- 19.** A figura abaixo mostra um dique cuja face é um retângulo inclinado. Encontre a força do fluido sobre a face quando o nível da água estiver no topo do dique.

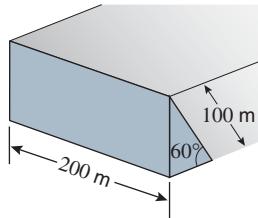


Figura Ex-19

- 20.** Uma janela de observação em um submarino é um quadrado com 2 pés de lado. Usando ρ_0 como o peso específico da água do mar, encontre a força exercida pelo fluido sobre a janela quando o submarino estiver submerso de tal forma que a ja-

nela esteja vertical e seu topo se encontre a uma profundidade de h pés.

ENFOCANDO CONCEITOS

- 21.** (a) Mostre: Se o submarino do Exercício 20 estiver descendo verticalmente a uma taxa constante, então a força do fluido sobre a janela aumenta a uma taxa constante.
 (b) Com que taxa a força do fluido sobre a janela está crescendo se o submarino estiver descendo verticalmente a 20 pés/min?
- 22.** (a) Denote por $D = D_a$ um disco de raio a submerso em um fluido de peso específico ρ de tal maneira que o centro de D esteja h unidades abaixo da superfície do fluido. Para cada valor de r no intervalo $(0, a]$, seja D_r o disco de raio r que é concêntrico com D . Escolha um lado do disco D e defina $P(r)$ como a pressão do fluido no lado escolhido de D_r . Use (5) para provar que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} P(r) = \rho h$$

- (b) Explique por que o resultado de (a) pode ser interpretado como significando que a pressão de um fluido a uma dada profundidade é a mesma em todas as direções. (Essa afirmação é uma versão de um resultado conhecido como *Princípio de Pascal*.)

- 23. Texto** Suponha que modelemos a atmosfera terrestre como um “fluido”. A pressão atmosférica no nível do mar é $P = 14,7$ lb/in² e o peso específico do ar no nível do mar é, aproximadamente, $\rho = 4,66 \times 10^{-5}$ lb/in³. Com esses números, qual seria a altura da atmosfera sobre a Terra de acordo com a Fórmula (7)? Essa resposta é razoável? Se não for, explique como poderíamos modificar nossas hipóteses para obter uma resposta mais plausível.
- 24. Texto** Suponha que o peso específico ρ de um fluido seja uma função $\rho = \rho(x)$ da profundidade dentro do fluido. Como devemos alterar a Fórmula (7) da pressão de fluido nesse caso? Dê argumentos plausíveis para sustentar sua argumentação.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.8

1. pascal; libras por polegada quadrada (sigla em inglês) 2. 98.100 Pa; 588.600 N 3. $\int_a^b \rho h(x) w(x) \, dx$ 4. $\int_0^3 9810 [(5+x)2] \, dx$

6.9 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E CABOS PENDENTES

Nesta seção, estudaremos certas combinações de e^x e e^{-x} denominadas “funções hiperbólicas”. Essas funções, que aparecem em várias aplicações em Engenharia, têm muitas propriedades em comum com as funções trigonométricas. Tais semelhanças são supreendentes, uma vez que há muito pouco no aspecto exterior que sugira qualquer relação entre exponenciais e funções trigonométricas. Isso se deve ao fato de essas relações ocorrerem dentro do contexto dos números complexos, um tópico que deixaremos para cursos mais avançados.

■ DEFINIÇÕES DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Para introduzir as funções hiperbólicas, observe que, no Exercício 65 da Seção 0.2, foi mostrado que a função e^x pode ser expressa da seguinte forma, como a soma de uma função par e de uma função ímpar:

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{Par}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{Ímpar}}$$

Essas funções são suficientemente importantes para que haja nomes e notações associados a elas: a função ímpar é chamada de *seno hiperbólico de x* e a par, *cosseno hiperbólico de x*. Elas são denotadas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dessas duas pedras fundamentais, podemos criar mais quatro funções e obter o seguinte conjunto de seis *funções hiperbólicas*.

6.9.1 DEFINIÇÕES

Seno hiperbólico

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cosseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tangente hiperbólica

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Secante hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Cossecante hiperbólica

$$\operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os sistemas algébricos computacionais têm recursos para calcular diretamente as funções hiperbólicas, o que algumas calculadoras não têm. Contudo, se o leitor quiser calcular o valor de uma função hiperbólica em uma calculadora, isso pode ser feito expressando-a em termos de funções exponenciais, como no Exemplo 1.

► Exemplo 1

$$\operatorname{senh} 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

$$\operatorname{senh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx 3,6269 \quad \blacktriangleleft$$

■ GRÁFICOS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Os gráficos das funções hiperbólicas, que aparecem na Figura 6.9.1, podem ser gerados com um recurso computacional, mas vale a pena observar que a forma geral do gráfico de $y = \cosh x$ pode ser obtida esboçando-se separadamente os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ e somando-se as coordenadas y correspondentes [ver a parte (a) da figura]. Analogamente, a forma geral do gráfico de $y = \operatorname{senh} x$ pode ser obtida esboçando-se separadamente os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ e somando-se as coordenadas y correspondentes [ver a parte (b) da figura].

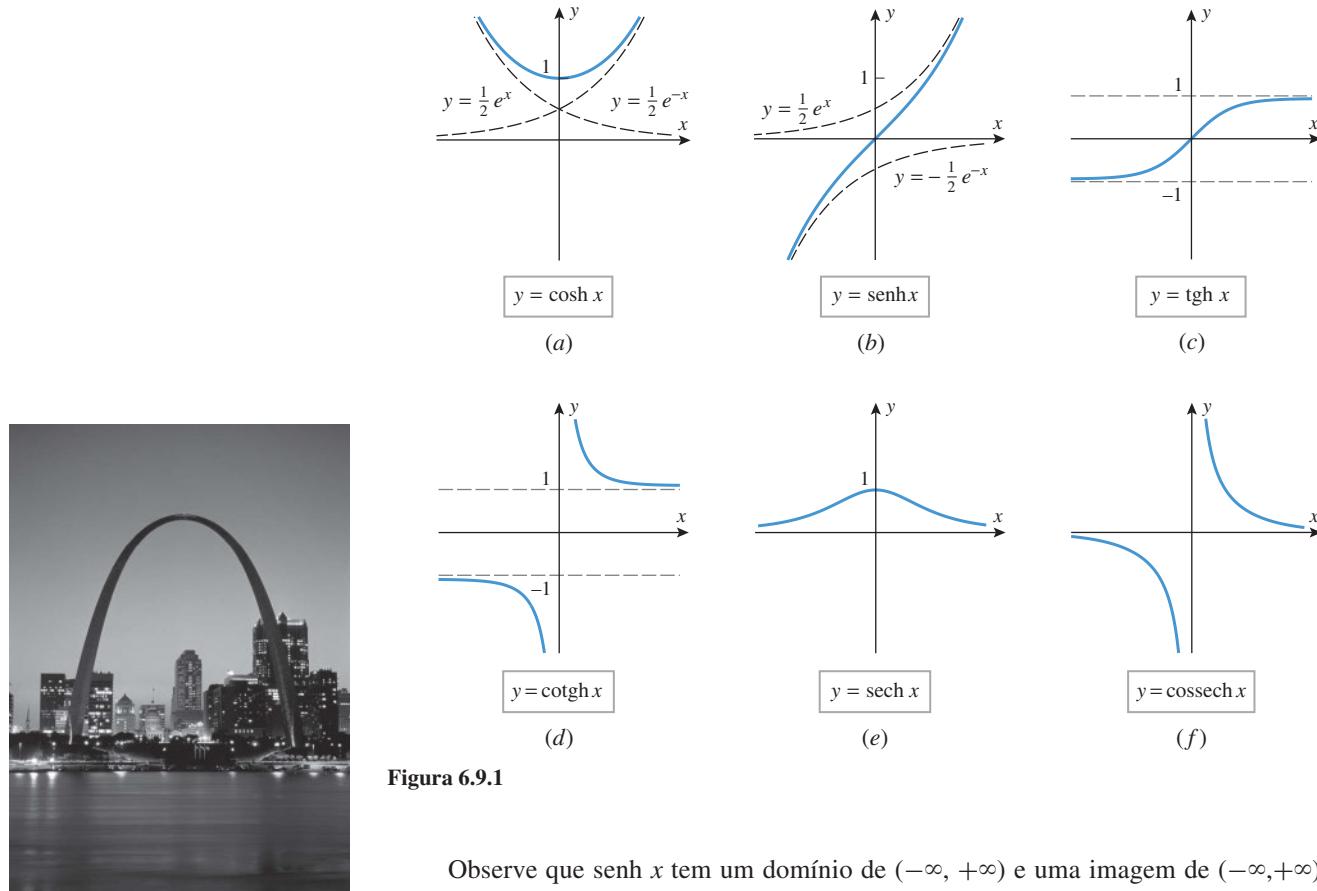


Figura 6.9.1

Glen Allison/Stone/Getty Images
O projeto do Gateway Arch, em St. Louis, nos Estados Unidos, está baseado em uma curva invertida do cosseno hiperbólico (Exercício 73).

Observe que $\operatorname{senh} x$ tem um domínio de $(-\infty, +\infty)$ e uma imagem de $(-\infty, +\infty)$, enquanto $\cosh x$ tem um domínio de $(-\infty, +\infty)$ e uma imagem de $[1, +\infty)$. Observe também que $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ são **assíntotas curvilíneas** de $y = \cosh x$, no sentido de que o gráfico dessa função fica cada vez mais próximo do gráfico de $y = \frac{1}{2}e^x$ quando $x \rightarrow +\infty$, e cada vez mais próximo de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ quando $x \rightarrow -\infty$ (ver Seção 4.3). Da mesma forma, $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ são assíntotas curvilíneas para $y = \operatorname{senh} x$, quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, respectivamente. As demais propriedades das funções hiperbólicas serão exploradas nos exercícios.

■ CABOS PENDENTES E OUTRAS APLICAÇÕES

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios dentro de sólidos elásticos e, mais geralmente, em muitos problemas nos quais a energia mecânica é gradualmente absorvida pelo meio ambiente. Elas também ocorrem quando um cabo flexível e homogêneo é suspenso entre dois pontos, como as linhas telefônicas entre dois postes. Tais cabos formam uma curva denominada **catenária** (em latim, *catena* significa “cadeia”). Se, como na Figura 6.9.2, for introduzido um sistema de coordenadas tal que o ponto mais baixo do cabo esteja no eixo y , pode ser mostrado, usando princípios da Física, que o cabo tem uma equação da forma

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

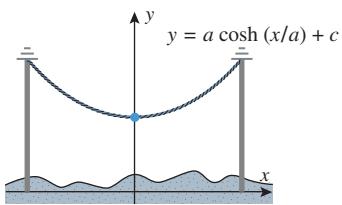


Figura 6.9.2

em que os parâmetros a e c são determinados pela distância entre os postes e a composição do caso.

■ IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

As funções hiperbólicas satisfazem várias identidades similares àquelas das funções trigonométricas. A mais fundamental delas é

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \quad (1)$$

que pode ser provada escrevendo-se

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= (\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh x - \operatorname{senh} x) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= e^x \cdot e^{-x} = 1 \end{aligned}$$

Outras identidades hiperbólicas podem ser deduzidas de modo semelhante ou, alternativamente, executando operações algébricas nas identidades conhecidas. Por exemplo, se dividirmos (1) por $\cosh^2 x$, obteremos

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

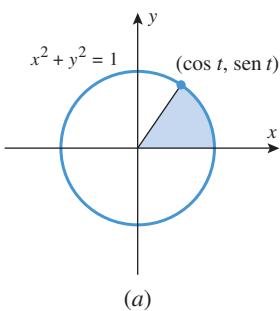
e se dividirmos (1) por $\operatorname{senh}^2 x$, obteremos

$$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cossech}^2 x$$

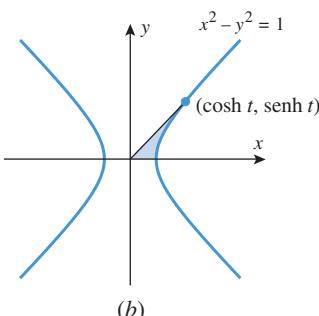
O teorema a seguir resume algumas das identidades hiperbólicas mais úteis. As provas que ainda não foram feitas serão deixadas como exercício.



Larry Aupper/Mira.com/Digital Railroad, Inc.
Um cabo flexível suspenso entre dois postes forma uma catenária.



(a)



(b)

Figura 6.9.3

6.9.2 TEOREMA

$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$	$\operatorname{senh} (x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$	$\cosh (x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	$\operatorname{senh} (x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$
$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$\cosh (x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cossech}^2 x$	$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
$\cosh (-x) = \cosh x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
$\operatorname{senh} (-x) = -\operatorname{senh} x$	$\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1 = 2 \cosh^2 x - 1$

■ POR QUE SÃO CHAMADAS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Lembre que as equações paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

representam o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 6.9.3a), como pode ser visto escrevendo-se

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Se $0 \leq t \leq 2\pi$, então o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo em radianos desde o eixo x positivo até o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ ou, alternativamente, como o dobro da área sombreada na Figura 6.9.3a (verifique). Analogamente, as equações paramétricas

$$x = \cosh t, \quad y = \operatorname{senh} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

representam uma parte da curva $x^2 - y^2 = 1$, como pode ser visto escrevendo-se

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

e observando-se que $x = \cosh t > 0$. Essa curva, que está na Figura 6.9.3b, é a metade direita de uma curva denominada **hipérbole unitária**; essa é a razão pela qual as funções nesta seção são chamadas de funções *hiperbólicas*. Pode-se mostrar que, se $t \geq 0$, então o parâmetro t pode ser interpretado como o dobro da área sombreada na Figura 6.9.3b. (Omitimos os detalhes.)

■ FÓRMULAS PARA AS DERIVADAS E AS INTEGRAIS

As fórmulas para as derivadas de $\sinh x$ e $\cosh x$ podem ser obtidas expressando-se estas funções em termos de e^x e e^{-x} :

$$\frac{d}{dx}[\sinh x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

As derivadas das funções hiperbólicas restantes podem ser obtidas expressando-as em termos de \sinh e \cosh e aplicando-se as identidades apropriadas. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\tgh x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right] = \frac{\cosh x \frac{d}{dx}[\sinh x] - \sinh x \frac{d}{dx}[\cosh x]}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

O teorema a seguir fornece uma lista completa de fórmulas de derivação e de integração para as funções hiperbólicas.

6.9.3 TEOREMA

$\frac{d}{dx}[\sinh u] = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\int \cosh u du = \sinh u + C$
$\frac{d}{dx}[\cosh u] = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\int \sinh u du = \cosh u + C$
$\frac{d}{dx}[\tgh u] = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{sech}^2 u du = \tgh u + C$
$\frac{d}{dx}[\cotgh u] = -\operatorname{cossech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{cossech}^2 u du = -\cotgh u + C$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -\operatorname{sech} u \tgh u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{sech} u \tgh u du = -\operatorname{sech} u + C$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{cossech} u] = -\operatorname{cossech} u \cotgh u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{cossech} u \cotgh u du = -\operatorname{cossech} u + C$

► Exemplo 2

$$\frac{d}{dx}[\cosh(x^3)] = \sinh(x^3) \cdot \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2 \sinh(x^3)$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(\tgh x)] = \frac{1}{\tgh x} \cdot \frac{d}{dx}[\tgh x] = \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\tgh x} \quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 3

$$\int \operatorname{senh}^5 x \cosh x dx = \frac{1}{6} \operatorname{senh}^6 x + C$$

$u = \operatorname{senh} x$
 $du = \cosh x dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tgh} x dx &= \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} dx \\ &= \ln |\cosh x| + C \\ &= \ln(\cosh x) + C \end{aligned}$$

$u = \cosh x$
 $du = \operatorname{senh} x dx$

Como $\cosh x > 0$ em cada x , estamos autorizados a abolir os sinais de valor absoluto. ◀

► Exemplo 4 Um cabo de 100 pés está preso pelas pontas no alto de dois postes de 50 pés posicionados a 90 pés de distância (Figura 6.9.4). A que altura acima do solo está o ponto médio do cabo?

Solução Pelo que vimos acima, o cabo forma uma catenária de equação

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

onde a origem está no solo a meio caminho entre os dois postes. Usando a Fórmula (4) da Seção 6.4 para o comprimento da catenária, temos

$$\begin{aligned} 100 &= \int_{-45}^{45} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{45} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad \text{Por simetria} \\ &= 2 \int_0^{45} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{x}{a} \right)} dx \\ &= 2 \int_0^{45} \cosh \left(\frac{x}{a} \right) dx \quad \text{Por (1) e por} \\ &\quad \cosh x > 0 \\ &= 2a \operatorname{senh} \left(\frac{x}{a} \right) \Big|_0^{45} = 2a \operatorname{senh} \left(\frac{45}{a} \right) \end{aligned}$$

Usando o recurso numérico de uma calculadora para resolver

$$100 = 2a \operatorname{senh} \left(\frac{45}{a} \right)$$

em a obtemos $a \approx 56,01$. Então,

$$50 = y(45) = 56,01 \cosh \left(\frac{45}{56,01} \right) + c \approx 75,08 + c$$

de modo que $c \approx -25,08$. Assim, o ponto médio do cabo está a $y(0) \approx 56,01 - 25,08 = 30,93$ pés acima do solo (Figura 6.9.4). ◀

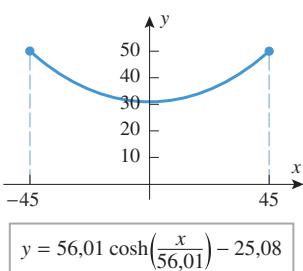


Figura 6.9.4

■ FUNÇÕES INVERSAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

A partir da Figura 6.9.1, é evidente que os gráficos de $\operatorname{senh} x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cotgh} x$ e $\operatorname{cossech} x$ passam pelo teste da reta horizontal, mas os gráficos de $\cosh x$ e $\operatorname{sech} x$ não. No último caso, restringir x como não negativo torna as funções invertíveis (Figura 6.9.5). Os gráficos das

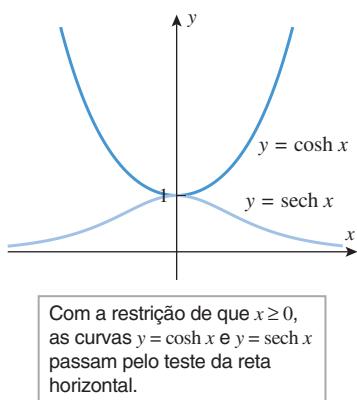


Figura 6.9.5

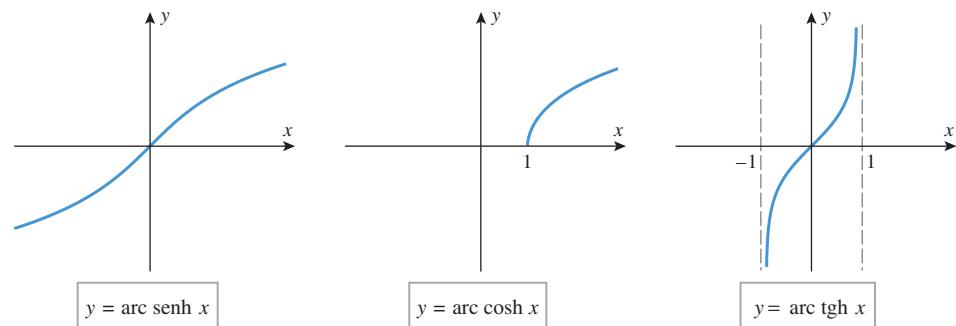


Figura 6.9.6

Tabela 6.9.1
PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	RELACIONES BÁSICAS
$\operatorname{arc senh} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\operatorname{arc senh}(\operatorname{senh} x) = x$ se $-\infty < x < +\infty$ $\operatorname{senh}(\operatorname{arc senh} x) = x$ se $-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{arc cosh} x$	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$\operatorname{arc cosh}(\operatorname{cosh} x) = x$ se $x \geq 0$ $\operatorname{cosh}(\operatorname{arc cosh} x) = x$ se $x \geq 1$
$\operatorname{arc tgh} x$	$(-1, 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$\operatorname{arc tgh}(\operatorname{tgh} x) = x$ se $-\infty < x < +\infty$ $\operatorname{tgh}(\operatorname{arc tgh} x) = x$ se $-1 < x < 1$
$\operatorname{arc cotgh} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$\operatorname{arc cotgh}(\operatorname{cotgh} x) = x$ se $x < 0$ ou $x > 0$ $\operatorname{cotgh}(\operatorname{arc cotgh} x) = x$ se $x < -1$ ou $x > 1$
$\operatorname{arc sech} x$	$(0, 1]$	$[0, +\infty)$	$\operatorname{arc sech}(\operatorname{sech} x) = x$ se $x \geq 0$ $\operatorname{sech}(\operatorname{arc sech} x) = x$ se $0 < x \leq 1$
$\operatorname{arc cossech} x$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$\operatorname{arc cossech}(\operatorname{cossech} x) = x$ se $x < 0$ ou $x > 0$ $\operatorname{cossech}(\operatorname{arc cossech} x) = x$ se $x < 0$ ou $x > 0$

■ FORMAS LOGARÍTMICAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Como as funções hiperbólicas podem ser expressas em termos de e^x , não deve constituir uma surpresa que as funções hiperbólicas inversas possam ser expressas em termos dos logaritmos naturais. O próximo teorema mostra isso.

6.9.4 TEOREMA As seguintes relações valem em cada x do domínio das funções hiperbólicas inversas dadas:

$$\begin{aligned} \text{arc senh } x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \text{arc cosh } x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \text{arc tgh } x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{arc cotgh } x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ \text{arc sech } x &= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) & \text{arc cossech } x &= \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \end{aligned}$$

Vamos mostrar como deduzir a primeira fórmula desse teorema, deixando as restantes como exercício. A ideia básica é escrever a equação $x = \operatorname{senh} y$ em termos de funções exponenciais e resolvê-la para y como uma função de x . Isso irá produzir a equação $y = \operatorname{arc senh} x$, em que $\operatorname{arc senh} x$ está expressa em termos de logaritmos naturais. Expressando $x = \operatorname{senh} y$ em termos de exponenciais, obtemos

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

a qual pode ser reescrita como

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

Multiplicando essa equação por e^y , obtemos

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

e, aplicando a fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Uma vez que $e^y > 0$, a solução envolvendo o sinal menos deve ser descartada. Assim,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Tomando o logaritmo natural, obtemos

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc senh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

► Exemplo 5

$$\operatorname{arc senh} 1 = \ln(1 + \sqrt{1^2 + 1}) = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,8814$$

$$\operatorname{arc tgh} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,5493 \quad \blacktriangleleft$$

Mostre que a derivada de $\text{arc senh } x$ pode também ser obtida tomando $y = \text{arc senh } x$ e, então, diferenciando implicitamente a equação $x = \text{senh } y$.

■ DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

As fórmulas para as derivadas das funções hiperbólicas inversas podem ser obtidas do Teorema 6.9.4. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\text{arc senh } x] &= \frac{d}{dx}[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

Esse cálculo leva a duas fórmulas de integração: a que envolve $\text{arc senh } x$ e uma fórmula equivalente envolvendo logaritmos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{arc senh } x + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

Os dois teoremas a seguir dão uma lista das fórmulas de derivação e das correspondentes fórmulas de integração para as funções hiperbólicas inversas. Algumas das provas aparecem como exercícios.

6.9.5 TEOREMA

$\frac{d}{dx}(\text{arc senh } u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\text{arc cotgh } u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad u > 1$
$\frac{d}{dx}(\text{arc cosh } u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1$	$\frac{d}{dx}(\text{arc sech } u) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad 0 < u < 1$
$\frac{d}{dx}(\text{arc tgh } u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad u < 1$	$\frac{d}{dx}(\text{arc cossech } u) = -\frac{1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad u \neq 0$

6.9.6 TEOREMA

Se $a > 0$, então

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \text{arc senh} \left(\frac{u}{a} \right) + C \quad \text{ou} \quad \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \text{arc cosh} \left(\frac{u}{a} \right) + C \quad \text{ou} \quad \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C, \quad u > a$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \text{arc tgh} \left(\frac{u}{a} \right) + C, & |u| < a \\ \frac{1}{a} \text{arc cotgh} \left(\frac{u}{a} \right) + C, & |u| > a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C, \quad |u| \neq a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \text{arc sech} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{|u|} \right) + C, \quad 0 < |u| < a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \text{arc cossech} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{|u|} \right) + C, \quad u \neq 0$$

► **Exemplo 6** Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}$, $x > \frac{3}{2}$

Solução Seja $u = 2x$. Assim, $du = 2 dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} &= \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 3^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc cosh} \left(\frac{u}{3} \right) + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc cosh} \left(\frac{2x}{3} \right) + C\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos utilizar o equivalente logarítmico de $\operatorname{arc cosh} (2x/3)$,

$$\operatorname{arc cosh} \left(\frac{2x}{3} \right) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 - 9}) - \ln 3$$

(verifique) e expressar a resposta como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2 - 9}) + C \quad \blacktriangleleft$$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.9 (Ver página 485 para respostas.)

1. $\cosh x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{senh} x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\operatorname{tgh} x = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Complete a tabela.

	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cotgh} x$	$\operatorname{sech} x$	$\operatorname{cossech} x$
DOMÍNIO						
IMAGEM						

3. As equações paramétricas

$$x = \cosh t, \quad y = \operatorname{senh} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

representam o lado direito de uma curva chamada $\underline{\hspace{2cm}}$. Eliminando o parâmetro, a equação dessa curva é dada por $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\frac{d}{dx}[\cosh x] = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\frac{d}{dx}[\operatorname{tgh} x] = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\int \cosh x dx = \underline{\hspace{2cm}} \quad \int \operatorname{senh} x dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\int \operatorname{tgh} x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

6. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arc cosh} x] = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{d}{dx}[\operatorname{arc senh} x] = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\frac{d}{dx}[\operatorname{arc tgh} x] = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 6.9 Recurso Gráfico

1-2 Aproxime a expressão até quatro casas decimais. ■

1. (a) $\operatorname{senh} 3$ (b) $\cosh(-2)$ (c) $\operatorname{tgh}(\ln 4)$
(d) $\operatorname{arc senh}(-2)$ (e) $\operatorname{arc cosh} 3$ (f) $\operatorname{arc tgh} \frac{3}{4}$
2. (a) $\operatorname{cossech}(-1)$ (b) $\operatorname{sech}(\ln 2)$ (c) $\operatorname{cotgh} 1$
(d) $\operatorname{arc sech} \frac{1}{2}$ (e) $\operatorname{arc cotgh} 3$ (f) $\operatorname{arc cossech}(-\sqrt{3})$
3. Encontre o valor numérico exato de cada expressão.
(a) $\operatorname{senh}(\ln 3)$ (b) $\cosh(-\ln 2)$
(c) $\operatorname{tgh}(2 \ln 5)$ (d) $\operatorname{senh}(-3 \ln 2)$
4. Em cada parte, reescreva a expressão como uma razão de polinômios.
(a) $\cosh(\ln x)$ (b) $\operatorname{senh}(\ln x)$
(c) $\operatorname{tgh}(2 \ln x)$ (d) $\cosh(-\ln x)$
5. Em cada parte, um valor para uma das funções hiperbólicas é dado em um ponto não especificado x_0 . Use as identidades

apropriadas para encontrar os valores exatos das cinco restantes funções hiperbólicas em x_0 .

(a) $\operatorname{senh} x_0 = 2$ (b) $\cosh x_0 = \frac{5}{4}$ (c) $\operatorname{tgh} x_0 = \frac{4}{5}$

6. Obtenha as fórmulas das derivadas para $\operatorname{cossech} x$, $\operatorname{sech} x$ e $\operatorname{cotgh} x$ das fórmulas de derivação para $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ e $\operatorname{tgh} x$.

7. Obtenha as derivadas de $\operatorname{arc cosh} x$ e $\operatorname{arc tgh} x$ diferenciando as fórmulas do Teorema 6.9.4.

8. Obtenha as coordenadas de $\operatorname{arc senh}$, $\operatorname{arc cosh}$ e $\operatorname{arc tgh}$ derivando as equações $x = \operatorname{senh} y$, $x = \cosh y$ e $x = \operatorname{tgh} y$ implicitamente.

9-28 Encontre dy/dx . ■

9. $y = \operatorname{senh}(4x - 8)$
10. $y = \cosh(x^4)$
11. $y = \operatorname{cotgh}(\ln x)$
12. $y = \ln(\operatorname{tgh} 2x)$

13. $y = \operatorname{cossech}(1/x)$
 15. $y = \sqrt{4x + \cosh^2(5x)}$
 17. $y = x^3 \operatorname{tgh}^2(\sqrt{x})$
 19. $y = \operatorname{arc senh}(\frac{1}{3}x)$
 21. $y = \ln(\operatorname{arc cosh} x)$
 23. $y = \frac{1}{\operatorname{arc tgh} x}$
 25. $y = \operatorname{arc cosh}(\cosh x)$
 27. $y = e^x \operatorname{arc sech} \sqrt{x}$

14. $y = \operatorname{sech}(e^{2x})$
 16. $y = \operatorname{senh}^3(2x)$
 18. $y = \operatorname{senh}(\cos 3x)$
 20. $y = \operatorname{arc senh}(1/x)$
 22. $y = \operatorname{arc cosh}(\operatorname{arc senh} x)$
 24. $y = (\operatorname{arc cotgh} x)^2$
 26. $y = \operatorname{arc senh}(\operatorname{tgh} x)$
 28. $y = (1 + x \operatorname{arc cossech} x)^{10}$

29-44 Calcule as integrais.

29. $\int \operatorname{senh}^6 x \cosh x \, dx$
 30. $\int \cosh(2x - 3) \, dx$
 31. $\int \sqrt{\operatorname{tgh} x} \operatorname{sech}^2 x \, dx$
 32. $\int \operatorname{cossech}^2(3x) \, dx$
 33. $\int \operatorname{tgh} x \, dx$
 34. $\int \operatorname{cotgh}^2 x \operatorname{cossech}^2 x \, dx$
 35. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \operatorname{tgh} x \operatorname{sech}^3 x \, dx$
 36. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx$
 37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 9x^2}}$
 38. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} \quad (x > \sqrt{2})$
 39. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \quad (x < 0)$
 40. $\int \frac{\operatorname{sen} \theta \, d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$
 41. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x^2}}$
 42. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 25}} \quad (x > 5/3)$
 43. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$
 44. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$

45-48 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

45. A equação $\cosh x = \operatorname{senh} x$ não tem solução.
 46. Exatamente duas das funções hiperbólicas são limitadas.
 47. Exatamente uma das funções hiperbólicas $f(x)$ é tal que a equação $f(x) = a$ tem uma única solução x , qualquer que seja o número real a .
 48. As identidades do Teorema 6.9.2 podem ser obtidas das correspondentes identidades trigonométricas substituindo as funções trigonométricas pelas funções hiperbólicas análogas.
 49. Encontre a área delimitada por $y = \operatorname{senh} 2x$, $y = 0$ e $x = \ln 3$.
 50. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \operatorname{sech} x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \ln 2$ gira em torno do eixo x .
 51. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \cosh 2x$, $y = \operatorname{senh} 2x$, $x = 0$ e $x = 5$ gira em torno do eixo x .
 52. Aproxime o valor positivo da constante a de tal modo que a área englobada por $y = \cosh ax$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$ seja de 2 unidades de área. Expressse sua resposta com pelo menos cinco casas decimais.

53. Encontre o comprimento de arco da catenária $y = \cosh x$ entre $x = 0$ e $x = \ln 2$.

54. Encontre o comprimento de arco da catenária $y = a \cosh(x/a)$ entre $x = 0$ e $x = x_1$ ($x_1 > 0$).

55. Nas partes (a) a (f), encontre os limites e confirme que estão de acordo com os gráficos nas Figuras 6.9.1 e 6.9.6.

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{senh} x$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{senh} x$
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh} x$ (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x$
 (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc sen} x$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arc tg} x$

ENFOCANDO CONCEITOS

56. Explique como podem ser obtidas as assíntotas de $y = \operatorname{tgh} x$ a partir das assíntotas curvilíneas de $y = \cosh x$ e $y = \operatorname{senh} x$.

57. Prove que $\operatorname{senh} x$ é uma função ímpar de x , que $\cosh x$ é uma função par de x e verifique que isso é consistente com os gráficos na Figura 6.9.1.

58-59 Prove as identidades.

58. (a) $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
 (b) $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$
 (c) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
 (d) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
 (e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
 (f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
 (g) $\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$
 (h) $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$

59. (a) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
 (b) $\operatorname{tgh}(x + y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$
 (c) $\operatorname{tgh} 2x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$

60. Prove:

- (a) $\operatorname{arc cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$
 (b) $\operatorname{arc tgh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$

61. Use o Exercício 60 para obter as fórmulas de derivação para $\operatorname{arc cosh} x$ e $\operatorname{arc tgh} x$.

62. Prove:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc sech} x &= \operatorname{arc cosh}(1/x), & 0 < x \leq 1 \\ \operatorname{arc cotgh} x &= \operatorname{arc tgh}(1/x), & |x| > 1 \\ \operatorname{arc cossech} x &= \operatorname{arc senh}(1/x), & x \neq 0 \end{aligned}$$

63. Use o Exercício 62 para expressar a integral

$$\int \frac{du}{1 - u^2}$$

totalmente em termos de $\operatorname{arc tgh}$.

64. Mostre que

$$(a) \frac{d}{dx} [\text{arc sech } |x|] = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) \frac{d}{dx} [\text{arc cossech } |x|] = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

65. Em cada parte, encontre o limite

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{arc cosh } x - \ln x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x}{e^x}$$

66. Use as derivadas primeira e segunda para mostrar que o gráfico de $y = \text{arc tgh } x$ é sempre crescente e tem um ponto de inflexão na origem.

67. As fórmulas de integração para $1/\sqrt{u^2 - a^2}$ no Teorema 6.9.6 são válidas se $u > a$. Mostre que a fórmula a seguir é válida se $u < -a$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\text{arc cosh} \left(-\frac{u}{a} \right) + C \quad \text{ou} \quad \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

68. Mostre que $(\text{senh } x + \cosh x)^n = \text{senh } nx + \cosh nx$.

69. Mostre que

$$\int_{-a}^a e^{tx} dx = \frac{2 \text{senh } at}{t}$$

70. Um cabo está suspenso entre dois postes conforme a Figura 6.9.2. Suponha que a equação da curva formada pelo cabo seja $y = a \cosh(x/a)$, onde a é uma constante positiva. Suponha que as coordenadas x dos pontos de suporte são $x = -b$ e $x = b$, sendo $b > 0$.

(a) Mostre que o comprimento de arco L do cabo é dado por

$$L = 2a \operatorname{senh} \frac{b}{a}$$

(b) Mostre que a flecha S (distância vertical entre o ponto mais alto e o mais baixo ao longo do cabo) é dada por

$$S = a \cosh \frac{b}{a} - a$$

71-72 Estes exercícios referem-se ao cabo suspenso descrito no Exercício 70. ■

71. Supondo que os postes estejam a 400 pés de distância e que a flecha no cabo seja de 30 pés, aproxime o comprimento do cabo aproximando a . Expressse sua resposta final até o décimo de pé mais próximo. [Sugestão: Faça primeiro $u = 200/a$.]

72. Supondo que o cabo tenha 120 pés de comprimento e que os postes estejam a 100 pés de distância, aproxime a flecha no cabo aproximando a . Expressse sua resposta final até o décimo de pé mais próximo. [Sugestão: Faça primeiro $u = 50/a$.]

73. O projeto do Gateway Arch em St. Louis, Missouri, foi elaborado pelo arquiteto Eero Saarinen e implementado usando as equações fornecidas pelo Dr. Hannskarl Badel. As equações usadas para curva central do arco foram

$$y = 693,8597 - 68,7672 \cosh(0,0100333x) \text{ pés}$$

com x entre $-299,2239$ e $299,2239$.

(a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da curva central do arco.

(b) Encontre o comprimento da curva central com quatro casas decimais.

(c) Para quais valores de x a altura do arco é 100 pés? Arredonde sua resposta para quatro casas decimais.

(d) Aproxime até o grau mais próximo o ângulo agudo que a reta tangente à curva central faz com o solo no final do arco.

74. Suponha que um tubo oco gire com uma velocidade angular constante de ω rad/s em torno de um eixo horizontal em um extremo do tubo, conforme a figura a seguir. Suponha que um objeto deslize sem atrito dentro do tubo, enquanto o tubo estiver girando. Seja r a distância do objeto ao ponto pivô no instante $t \geq 0$ e suponha que, quando $t = 0$, o objeto esteja em repouso e $r = 0$. Pode-se mostrar que, se o tubo estiver na horizontal em $t = 0$ e girando conforme a figura, então

$$r = \frac{g}{2\omega^2} [\operatorname{senh}(\omega t) - \operatorname{sen}(\omega t)]$$

durante o período em que o objeto estiver no tubo. Suponha que t esteja em segundos, r esteja em metros, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

(a) Faça o gráfico de r versus t para $0 \leq t \leq 1$.

(b) Supondo que o tubo tenha um comprimento de 1 m, aproximadamente quanto tempo o objeto levará para atingir o final do tubo?

(c) Use o resultado de (b) para aproximar dr/dt , no momento em que o objeto atingir o fim do tubo.

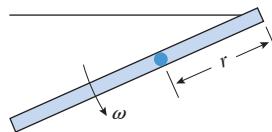


Figura Ex-74

75. A figura a seguir mostra uma pessoa puxando um barco por uma corda de comprimento a amarrada na proa e andando na beira de um cais. Supondo que a corda esteja sempre tangente à curva traçada pela proa, então essa curva, que é chamada de **tractriz**, tem a propriedade de que o segmento da reta tangente entre ela e o eixo y tem comprimento constante a . Pode-se provar que a equação dessa tractriz é

$$y = a \operatorname{arc sech} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

(a) Mostre que, para mover a proa do barco até um ponto (x, y) , a pessoa precisa andar uma distância de

$$D = a \operatorname{arc sech} \frac{x}{a}$$

da origem.

(b) Se a corda tiver um comprimento de 15 m, quanto a pessoa precisará andar a partir da origem para trazer o barco a 10 m do cais? Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

(c) Encontre a distância percorrida pela proa ao longo da tractriz quando ela se move de sua posição inicial para um ponto que está a 5 m do cais.

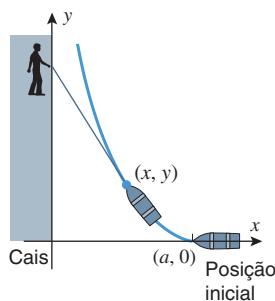


Figura Ex-75

- 76. Texto** Suponha que, analogamente às funções trigonométricas, definamos $\cosh t$ e $\operatorname{senh} t$ geometricamente usando a Figura 6.9.3b:

“Dado qualquer número real t , defina $x = \cosh t$ e $y = \operatorname{senh} t$ como os únicos valores de x e y tais que

- o ponto $P(x, y)$ está no ramo direito da hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$;
- t e y têm o mesmo sinal (ou são ambos nulos);
- a área da região delimitada pelo eixo x , o ramo direito da hipérbole unitária e o segmento de reta da origem até P é igual a $|t|/2$.

Discuta quais propriedades deveriam ser verificadas inicialmente para garantir que isso seja uma definição legítima.

- 77. Texto** Investigue quais propriedades de $\cosh t$ e $\operatorname{senh} t$ podem ser provadas diretamente a partir da definição geométrica no Exercício 76. Escreva uma breve descrição dos resultados de sua investigação.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.9

1. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}; \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2.

	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cotgh} x$	$\operatorname{sech} x$	$\operatorname{cossech} x$
DOMÍNIO	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
IMAGEM	$[1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(0, 1]$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. hipérbole unitária; $x^2 - y^2 = 1$

4. $\operatorname{senh} x$; $\cosh x$; $\operatorname{sech}^2 x$

5. $\operatorname{senh} x + C$; $\cosh x + C$; $\ln(\cosh x) + C$

6. $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\frac{1}{1-x^2}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6

- Descreva o método do fatiamento para encontrar volumes e use-o para deduzir uma fórmula integral para obter volumes pelo método dos discos.
- Enuncie uma fórmula integral para encontrar um volume pelo método das camadas cilíndricas e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.
- Enuncie uma fórmula integral para encontrar o comprimento de arco de uma curva lisa $y = f(x)$ acima de um intervalo $[a, b]$ e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.
- Enuncie uma fórmula integral para o trabalho W realizado por uma força variável $F(x)$ aplicada na direção e no sentido de movimento de um objeto que se desloca de $x = a$ para $x = b$ e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.
- Enuncie uma fórmula integral para a força fluida F exercida sobre uma superfície plana verticalmente submersa em um fluido de peso específico ρ e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.
- Seja R a região no primeiro quadrante delimitada por $y = x^2$, $y = 2 + x$ e $x = 0$. Em cada parte, monte, mas não calcule, uma integral ou uma soma de integrais que resolva o problema.
 - Encontre a área de R por integração em relação a x .
 - Encontre a área de R por integração em relação a y .
- Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo x por integração em relação a x .
- Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo x por integração em relação a y .
- Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo y por integração em relação a x .
- Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo y por integração em relação a y .
- Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno da reta $y = -3$ por integração em relação a x .
- Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno da reta $x = 5$ por integração em relação a x .
- Apresente uma soma de integrais definidas que represente a área total entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ na figura abaixo.
- Encontre a área total delimitada por $y = x^3$ e $y = x$ no intervalo $[-1, 2]$.

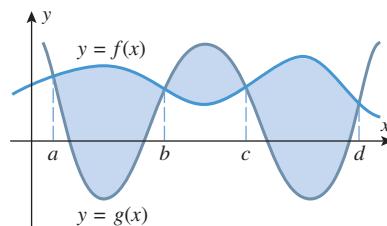


Figura Ex-7

8. A figura abaixo mostra as curvas velocidade *versus* tempo para dois carros movendo-se ao longo de uma pista reta, começando no mesmo ponto e acelerando a partir do repouso.
- Qual é a distância entre os carros após 60 s?
 - Qual é a distância entre os carros após T segundos, sendo $0 \leq T \leq 60$?

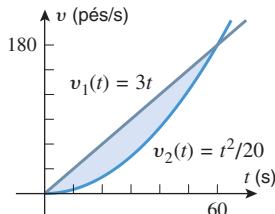


Figura Ex-8

9. Seja R a região englobada pelas curvas $y = x^2 + 4$, $y = x^3$ e o eixo y . Encontre e calcule uma integral definida que represente o volume do sólido obtido quando R gira em torno do eixo x .
10. Uma bola de futebol americano tem o formato do sólido gerado pela revolução da região delimitada entre o eixo x e a parábola $y = 4R(x^2 - \frac{1}{4}L^2)/L^2$ em torno do eixo x . Encontre seu volume.
11. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/\sqrt{x}$ para $1 \leq x \leq 4$ e cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.
12. Considere a região englobada por $y = \arcsen x$, $y = 0$ e $x = 1$. Monte, *mas não calcule*, uma integral que represente o volume do sólido obtido quando a região gira em torno do eixo x usando
- discos;
 - camadas cilíndricas.
13. Encontre o comprimento de arco no segundo quadrante da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ de $x = -8$ a $x = -1$.
14. Seja C a curva $y = e^x$ entre $x = 0$ e $x = \ln 10$. Em cada parte, monte, *mas não calcule*, uma integral que resolva o problema.
- Encontre o comprimento de arco de C integrando em relação a x .
 - Encontre o comprimento de arco de C integrando em relação a y .
15. Encontre a área da superfície obtida quando a curva $y = \sqrt{25 - x}$, $9 \leq x \leq 16$ gira em torno do eixo x .
16. Seja C a curva $27x - y^3 = 0$ entre $y = 0$ e $y = 2$. Em cada parte, monte, *mas não calcule*, uma integral ou somas de integrais que resolvam o problema.
- Encontre a área da superfície gerada quando C gira em torno do eixo x por integração em relação a x .
 - Encontre a área da superfície gerada quando C gira em torno do eixo y por integração em relação a y .
 - Encontre a área da superfície gerada quando C gira em torno da reta $y = -2$ por integração em relação a y .
17. Considere o sólido obtido quando a região englobada por $y = \sec x$, $x = 0$, $x = \pi/3$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x . En-

contre o valor médio da área de uma seção transversal desse sólido tomada perpendicularmente ao eixo x .

18. Considere o sólido obtido quando a região englobada por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x . Sem efetuar uma integração, encontre o valor médio da área de uma seção transversal desse sólido tomada perpendicularmente ao eixo x .
19. (a) Uma mola exerce uma força de 0,5 N quando esticada 0,25 m além de seu comprimento natural. Supondo que seja aplicável a lei de Hooke, qual foi o trabalho realizado para esticar a mola até esse comprimento?
- (b) Com 25 J de trabalho, qual é a distância que podemos esticar a mola além de seu comprimento natural?
20. Um barco está ancorado de tal forma que a âncora está 150 pés abaixo da superfície da água. O peso da âncora na água é de 2.000 lb e a corrente pesa 30 lb/pé. Qual é o trabalho necessário para levantar a âncora até a superfície?
- 21-22** Encontre o centroide da região. ■
21. A região limitada por $y^2 = 4x$ e $y^2 = 8(x - 2)$.
22. A metade superior da elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.
23. Em cada parte, monte, *mas não calcule*, uma integral que resolva o problema.
- Encontre a força que um fluido exerce sobre o lado de uma caixa que tem base quadrada com 3 m de lado e está cheia até uma profundidade de 1 m com líquido de peso específico ρ N/m³.
 - Encontre a força exercida por um líquido de peso específico ρ lb/pé³ sobre a superfície da placa vertical mostrada na parte (a) da Figura Ex-23.
 - Encontre a força exercida sobre um dique parabólico na parte (b) da Figura Ex-23, quando a água se estende até o topo do dique.
-
- Figura Ex-23
24. Mostre que, para qualquer valor da constante a , a função $y = \operatorname{senh}(ax)$ satisfaz a equação $y'' = a^2 y$.
25. Em cada parte, prove a identidade
- $\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$
 - $\cosh \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$
 - $\operatorname{senh} \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}$

CAPÍTULO 6 ESTABELECENDO CONEXÕES

1. Suponha que f seja uma função não negativa definida em $[0, 1]$ tal que a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[0, 1]$ seja A_1 e tal que a área da região R entre o gráfico de $g(x) = f(x^2)$ e o intervalo $[0, 1]$ seja A_2 . Em cada parte, expresse sua resposta em termos de A_1 e A_2 .
 - (a) Qual é o volume do sólido de revolução gerado girando R em torno do eixo y ?
 - (b) Encontre um valor de a tal que, se o plano xy fosse horizontal, a região R estaria equilibrada na reta $x = a$.
2. Um tanque d'água tem o formato de um tronco de cone de raio de base de 5 pés, raio do topo de 10 pés e altura vertical de 15 pés. Suponha que o tanque esteja cheio de água e considere o problema de bombear toda a água para fora do tanque através de sua borda superior.
 - (a) Resolva esse problema usando o método do Exemplo 5 da Seção 6.6.
 - (b) Resolva esse problema usando a Definição 6.6.3. [Sugestão: Imagine que a base do tronco de cone seja a cabeça de um pistão que se expande para manter um ajuste perfeito com a parede do tronco de cone quando o pistão é empurrado para cima. Qual é o resultado importante relativo à pressão d'água que deve ser utilizado?]
3. Um disco de raio a é uma lâmina não homogênea de função densidade $f(r)$ da distância r ao centro do lâmina. Modifique o argumento usado para deduzir o método das camadas cilíndricas para encontrar uma fórmula para a massa da lâmina.
4. Compare a Fórmula (10) na Seção 6.7 com a Fórmula (8) na Seção 6.8. Em seguida, dê um argumento plausível para que a força exercida numa superfície plana imersa verticalmente num fluido de peso específico constante seja igual ao produto da área da superfície pela pressão no centroide da superfície. Conclua que a força na superfície coincide com a força que seria exercida se essa superfície estivesse imersa horizontalmente na profundidade do centroide.
5. O *Princípio de Arquimedes* afirma que um sólido imerso num fluido experimenta uma força de empuxo igual ao peso do fluido deslocado pelo sólido.
 - (a) Use os resultados da Seção 6.8 para verificar o Princípio de Arquimedes no caso (i) de um sólido com formato de caixa e com um par de faces paralelas à superfície do fluido; (ii) de um sólido cilíndrico com eixo vertical; e (iii) de uma camada cilíndrica com eixo vertical.
 - (b) De um argumento plausível para a validade do Princípio de Arquimedes no caso de um sólido de revolução imerso num fluido tal que o eixo de revolução do sólido seja vertical. [Sugestão: Aproxime o sólido por uma união de camadas cilíndricas e use o resultado da parte (a).]



© AP/Wide World Photos

O contorno do teto aparentemente flutuante do complexo esportivo Stade de France (ao norte de Paris, França) é elíptico. Encontrar o comprimento de uma elipse envolve técnicas de integração numérica introduzidas neste capítulo.

7

PRINCÍPIOS DO CÁLCULO DE INTEGRAIS

Em capítulos anteriores, obtivemos muitas fórmulas básicas de integração imediatamente a partir das correspondentes fórmulas de diferenciação. Por exemplo, sabendo que a derivada de $\sin x$ é $\cos x$, fomos capazes de deduzir que a integral de $\cos x$ é $\sin x$. Subsequentemente, expandimos nosso repertório de integração através da introdução do método de substituição u . Esse método possibilitou integrar muitas funções, através da transformação de integrandos desconhecidos em conhecidos. Porém, só a substituição u não é suficiente para dar conta da grande variedade de integrais que surgem nas aplicações, portanto, técnicas de integração adicionais ainda são necessárias. Neste capítulo, discutiremos algumas dessas técnicas e forneceremos um procedimento mais sistemático de abordagem de integrais desconhecidas. Abordaremos mais aproximações numéricas de integrais definidas e exploraremos a ideia de integração em intervalos infinitos.

7.1 UMA VISÃO GERAL DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Nesta seção, daremos uma visão geral dos métodos para o cálculo de integrais e faremos uma revisão das fórmulas de integração discutidas em seções anteriores.

■ MÉTODOS DE ABORDAGEM DOS PROBLEMAS DE INTEGRAÇÃO

Há três abordagens básicas para o cálculo de integrais desconhecidas:

- **Tecnologia** – Os programas CAS, como *Mathematica*, *Maple* ou programas abertos, como *Sage*, são capazes de calcular integrais extremamente complicadas, e cada vez mais as calculadoras e os computadores estão sendo equipados com eles.
- **Tabelas** – Antes do desenvolvimento dos programas CAS, os cientistas dependiam muito de tabelas para o cálculo das difíceis integrais que surgem nas aplicações. Tais tabelas foram compiladas por muitos anos, incorporando habilidade e experiência de muita gente. Uma delas é mostrada nas páginas iniciais e finais deste livro, porém tabelas mais completas aparecem em vários livros de referência, como o *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, CRC Press, Inc., 2002.
- **Métodos de transformação** – São métodos para converter integrais desconhecidas em conhecidas. Eles incluem substituição u , manipulação algébrica do integrando e outros métodos que discutiremos neste capítulo.

Nenhum desses três métodos é perfeito; por exemplo, os programas CAS frequentemente encontram integrais que não são capazes de integrar e produzem respostas que são, às vezes, excessivamente complicadas; tabelas não são exaustivas e podem não incluir uma integral de interesse; e os métodos de transformação dependem da engenhosidade humana, que pode não ser adequada a problemas difíceis.

Neste capítulo, abordaremos os métodos de transformação e as tabelas; assim, *não será necessário* ter um CAS. Porém, se o leitor dispuser de um, poderá usá-lo para confirmar os resultados dos exemplos, e há exercícios que são elaborados para serem resolvidos com um CAS. Portanto, se o leitor dispuser de um CAS, deve lembrar que muitos dos algoritmos que ele usa estão baseados nos métodos que discutiremos aqui, e uma compreensão desses métodos irá ajudá-lo a usar seu recurso tecnológico de uma maneira mais informada.

■ UMA REVISÃO DAS FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

A seguir, uma lista das integrais básicas que encontramos até aqui:

CONSTANTES, POTÊNCIAS E EXPONENCIAIS

- | | |
|---|---|
| 1. $\int du = u + C$ | 2. $\int a du = a \int du = au + C$ |
| 3. $\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$ | 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ |
| 5. $\int e^u du = e^u + C$ | 6. $\int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C, b > 0, b \neq 1$ |

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

- | | |
|---|--|
| 7. $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 8. $\int \cos u du = \sin u + C$ |
| 9. $\int \sec^2 u du = \tg u + C$ | 10. $\int \operatorname{cossec}^2 u du = -\cotg u + C$ |
| 11. $\int \sec u \tg u du = \sec u + C$ | 12. $\int \operatorname{cossec} u \cotg u du = -\operatorname{cossec} u + C$ |
| 13. $\int \tg u du = -\ln \cos u + C$ | 14. $\int \cotg u du = \ln \sen u + C$ |

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

- | | |
|---|---|
| 15. $\int \operatorname{senh} u du = \cosh u + C$ | 16. $\int \cosh u du = \operatorname{senh} u + C$ |
| 17. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \operatorname{tgh} u + C$ | 18. $\int \operatorname{cossech}^2 u du = -\operatorname{cotgh} u + C$ |
| 19. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u du = -\operatorname{sech} u + C$ | 20. $\int \operatorname{cossech} u \operatorname{cotgh} u du = -\operatorname{cossech} u + C$ |

FUNÇÕES ALGÉBRICAS ($a > 0$)

- | |
|---|
| 21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc sen} \frac{u}{a} + C \quad (u < a)$ |
| 22. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{u}{a} + C$ |
| 23. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc sec} \left \frac{u}{a} \right + C \quad (0 < a < u)$ |

- $$24. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$
- $$25. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C \quad (0 < a < |u|)$$
- $$26. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$
- $$27. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C \quad (0 < |u| < a)$$
- $$28. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

OBSERVAÇÃO

A Fórmula 25 é uma generalização de um resultado do Teorema 6.9.6. Os leitores que não estudaram a Seção 6.9 podem, por enquanto, ignorar as Fórmulas 24 a 28, já que neste capítulo desenvolveremos outros métodos para sua obtenção.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.1 (Ver página 491 para respostas.)

1. Use manipulações algébricas e (se necessário) uma substituição u para integrar a função.

(a) $\int \frac{x+1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\int \frac{x+2}{x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\int xe^{3\ln x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Use identidades trigonométricas e (se necessário) uma substituição u para integrar a função.

(a) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\int (\cot^2 x + 1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\int \frac{1}{\sec x + \tan x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Integre a função.

(a) $\int \sqrt{x-1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\int e^{2x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\int (\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 7.1

- 1-30 Calcule as integrais fazendo a substituição u apropriada e aplicando as fórmulas revisadas nesta seção. ■

1. $\int (4-2x)^3 dx$

2. $\int 3\sqrt{4+2x} dx$

3. $\int x \sec^2(x^2) dx$

4. $\int 4x \tan(x^2) dx$

5. $\int \frac{\sin 3x}{2 + \cos 3x} dx$

6. $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$

7. $\int e^x \sinh(e^x) dx$

8. $\int \frac{\sec(\ln x) \tan(\ln x)}{x} dx$

9. $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^4}} dx$

11. $\int \cos^5 5x \sin 5x dx$

12. $\int \frac{\cos x}{\sin x \sqrt{\sin^2 x + 1}} dx$

13. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4+e^{2x}}} dx$

14. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

15. $\int \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

16. $\int (x+1) \cot(g(x^2+2x)) dx$

17. $\int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

18. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} 3\sqrt[3]{x}}$

20. $\int \sec(\sin \theta) \operatorname{tg}(\sin \theta) \cos \theta d\theta$

21. $\int \frac{\operatorname{cossech}^2(2/x)}{x^2} dx$

23. $\int \frac{e^{-x}}{4 - e^{-2x}} dx$

25. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

27. $\int \frac{x}{\operatorname{cossec}(x^2)} dx$

29. $\int x 4^{-x^2} dx$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

24. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

26. $\int \frac{\operatorname{senh}(x^{-1/2})}{x^{3/2}} dx$

28. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx$

30. $\int 2^{\pi x} dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

31. (a) Calcule a integral $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$ usando a substituição $u = \operatorname{sen} x$.
 (b) Calcule a integral $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$ usando a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.
 (c) Explique por que as respostas de (a) e (b) são consistentes.

32. (a) Deduza a identidade

$$\frac{\operatorname{sech}^2 x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x} = \operatorname{sech} 2x$$

- (b) Use o resultado de (a) para calcular $\int \operatorname{sech} x dx$

- (c) Deduza a identidade

$$\operatorname{sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

- (d) Use o resultado de (c) para calcular $\int \operatorname{sech} x dx$

- (e) Explique por que as respostas de (b) e (d) são consistentes.

33. (a) Deduza a identidade

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

- (b) Use a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ junto ao resultado de (a) para calcular $\int \operatorname{cossec} x dx$.

- (c) Use a identidade $\operatorname{cos} x = \operatorname{sen}[(\pi/2) - x]$ junto ao resultado de (a) para calcular $\int \operatorname{sec} x dx$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.1

1. (a) $x + \ln|x| + C$ (b) $x + \ln|x+1| + C$ (c) $\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arc tg} x + C$ (d) $\frac{x^5}{5} + C$ 2. (a) $-\operatorname{cos} x + C$ (b) $\operatorname{tg} x + C$
 (c) $-\operatorname{cotg} x + C$ (d) $\operatorname{ln}(1 + \operatorname{sen} x) + C$ 3. (a) $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$ (b) $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$ (c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ (d) $\frac{1}{4}\operatorname{tgh} x + C$

7.2 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Nesta seção, discutiremos uma técnica de integração que é, essencialmente, a formulação para antiderivadas da fórmula para derivação do produto de duas funções.

A REGRA DO PRODUTO E A INTEGRAÇÃO POR PARTES

Nosso objetivo principal nesta seção é desenvolver um método geral para trabalhar integrais do tipo

$$\int f(x)g(x) dx$$

Como um primeiro passo, seja $G(x)$ uma antiderivada *qualquer* de $g(x)$. Nesse caso, temos $G'(x) = g(x)$, e, portanto, a regra do produto para derivar $f(x)G(x)$ pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}[f(x)G(x)] = f(x)G'(x) + f'(x)G(x) = f(x)g(x) + f'(x)G(x) \quad (1)$$

Isso implica que $f(x)G(x)$ é uma antiderivada da função do lado direito de (1), de modo que podemos expressar (1) em forma integral por

$$\int [f(x)g(x) + f'(x)G(x)] dx = f(x)G(x)$$

ou, equivalentemente, por

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx \quad (2)$$

Essa fórmula nos permite integrar $f(x)g(x)$ integrando, em vez disso, $f'(x)G(x)$, e, em muitos casos, o resultado líquido é substituir uma integral difícil por outra mais fácil. A aplicação dessa fórmula é denominada **integração por partes**.

Na prática, costumamos reescrever (2) tomando

$$\begin{aligned} u &= f(x), & du &= f'(x) dx \\ v &= G(x), & dv &= G'(x) dx = g(x) dx \end{aligned}$$

Isso dá a seguinte formulação alternativa de (2):

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

Observe que, no Exemplo 1, omitimos a constante de integração quando calculamos v a partir de dv . Se tivéssemos incluído uma constante de integração, ela acabaria sendo jogada fora. Isso sempre ocorre com a integração por partes [Exercício 68(b)], de modo que é comum omitir a constante nessa etapa das contas. Contudo, existem certos casos em que a escolha inteligente de uma constante de integração para juntar a v pode simplificar o cálculo de $\int v du$ (Exercícios 69 a 71).

► **Exemplo 1** Use integração por partes para calcular $\int x \cos x dx$.

Solução Aplicaremos a Fórmula (3). O primeiro passo é escolher u e dv para colocar a integral no formato $\int u dv$. Tomamos

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \cos x dx$$

(Outras possibilidades serão consideradas mais adiante.) O segundo passo é calcular du a partir de u e v a partir de dv . Obtemos

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x$$

O terceiro passo é aplicar a Fórmula (3). Obtemos

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} &= \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du} \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

■ GUIA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

O objetivo principal da integração por partes é escolher u e dv para obter uma nova integral mais fácil de calcular do que a original. Em geral, não há regras imediatas e precisas para isso; é uma questão de experiência, que provém de muita prática. Uma estratégia que geralmente funciona é escolher u e dv de tal modo que u fique “mais simples” ao derivar, enquanto dv seja fácil de integrar para obter v . Assim, para a integral $\int x \cos x dx$ do Exemplo 1, ambos os objetivos foram alcançados tomando $u = x$ e $dv = \cos x dx$. No entanto, $u = \cos x$ não teria sido uma boa escolha naquele exemplo, pois $du/dx = -\sin x$ não é mais simples do que u . De fato, se tivéssemos escolhido

$$\begin{aligned} u &= \cos x & dv &= x dx \\ du &= -\sin x dx & v &= \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

teríamos obtido

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x - \int \frac{x^2}{2} (-\sin x) dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx$$

O método LIATE foi discutido no artigo “A Technique for Integration by Parts”, de Herbert Kasube, publicado na *American Mathematical Monthly*, Vol. 90, 1983, p. 210-211.

Para essa escolha de u e de dv , a integral nova é, na verdade, até mais complicada do que a integral original.

Existe outra estratégia útil para escolher u e dv , que pode ser aplicada quando o integrando é um produto de duas funções de categorias *distintas* da lista

Logarítmica, trigonométrica, Inversa, Algébrica, Trigonométrica, Exponencial

Nesse caso, costumamos ter sucesso tomando u como uma função cuja categoria ocorre antes na lista e dv como o resto do integrando. O acrônimo LIATE ajuda a lembrar essa ordem. O método não funciona sempre, mas o bastante para ser útil.

Observe, por exemplo, que o integrando no Exemplo 1 consiste no produto da função *algébrica* x e da função *trigonométrica* $\cos x$. Assim, o método LIATE sugere que deveríamos tomar $u = x$ e $dv = \cos x dx$, que já vimos ter sido uma escolha correta.

► **Exemplo 2** Calcule $\int xe^x dx$.

Solução Nesse caso, o integrando é o produto da função algébrica x com a função exponencial e^x . De acordo com LIATE, deveríamos tomar

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = e^x dx$$

de modo que

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Assim, por (3),

$$\int xe^x dx = \int u dv = uv - \int v du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 3** Calcule $\int \ln x dx$.

Solução Uma escolha é tomar $u = 1$ e $dv = \ln x dx$. No entanto, com tal escolha, encontrar v é equivalente a calcular $\int \ln x dx$, e nada foi conseguido. Portanto, a única escolha razoável é tomar

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \int dx = x \end{aligned}$$

Com essa escolha, segue por (3) que

$$\int \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \quad \blacktriangleleft$$

■ INTEGRAÇÃO POR PARTES REPETIDA

Às vezes, é necessário usar a integração por partes mais de uma vez no mesmo problema.

► **Exemplo 4** Calcule $\int x^2 e^{-x} dx$.

Solução Sejam

$$u = x^2, \quad dv = e^{-x} dx, \quad du = 2x dx, \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

de modo que, por (3),

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{-x} dx &= \int u dv = uv - \int v du \\
 &= x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2x) dx \\
 &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx
 \end{aligned} \tag{4}$$

A última integral é parecida com a original, exceto que trocamos x^2 por x . Mais uma integração por partes aplicada a $\int x e^{-x} dx$ completará o problema. Sejam

$$u = x, \quad dv = e^{-x} dx, \quad du = dx, \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

de modo que

$$\int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

Finalmente, substituindo isso na última linha de (4), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + C \\
 &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

O método LIATE sugere que as integrais do tipo

$$\int e^{ax} \sin bx dx \quad \text{e} \quad \int e^{ax} \cos bx dx$$

possam ser calculadas tomando $u = \sin bx$ ou $u = \cos bx$ e $dv = e^{ax} dx$. Contudo, isso requer uma técnica que merece atenção especial.

► Exemplo 5 Calcule $\int e^x \cos x dx$.

Solução Sejam

$$u = \cos x, \quad dv = e^x dx, \quad du = -\sin x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Assim,

$$\int e^x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \tag{5}$$

Como o integrando $\int e^x \sin x dx$ é de um tipo parecido com a integral original $\int e^x \cos x dx$, parece que nada foi alcançado. Contudo, integremos essa nova integral por partes. Sejam

$$u = \sin x, \quad dv = e^x dx, \quad du = \cos x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Assim,

$$\int e^x \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Junto à Equação (5), isso dá

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \tag{6}$$

que é uma equação que pode ser resolvida para a integral desconhecida. Obtemos

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

e, portanto,

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C \quad \blacktriangleleft$$

■ UM MÉTODO TABULADO PARA INTEGRAÇÃO POR PARTES REPETIDA

As integrais do tipo

$$\int p(x)f(x) \, dx$$

em que $p(x)$ é um polinômio, podem, às vezes, ser calculadas usando integração por partes repetida, em que u é tomado, em cada etapa, como sendo $p(x)$ ou uma de suas derivadas. Como du é calculada derivando u , a derivação repetida de $p(x)$ vai acabar resultando em 0, quando alcançamos um problema de integração simplificado. Um método conveniente para organizar as contas em duas colunas é chamado de **integração por partes tabulada**.

Outras informações sobre integração por partes tabulada podem ser encontradas nos artigos “Tabular Integration by Parts”, de David Horowitz, publicado no *College Mathematics Journal*, Vol. 21, 1990, p. 307-311, e “More on Tabular Integration by Parts”, de Leonard Gillman, publicado no *College Mathematics Journal*, Vol. 22, 1991, p. 407-410.

Integração por Partes Tabulada

Passo 1 Derive $p(x)$ repetidamente até obter 0 e liste os resultados na primeira coluna.

Passo 2 Integre $f(x)$ repetidamente e liste os resultados na segunda coluna.

Passo 3 Trace uma seta desde cada entrada da primeira coluna para a entrada uma linha abaixo na segunda coluna.

Passo 4 Identifique as setas com sinais + e – alternadamente, começando com +.

Passo 5 Para cada seta, forme o produto das expressões nos extremos inicial e final da seta e multiplique-o por +1 ou –1, de acordo com o sinal na seta. Somando esses resultados, obtemos o valor da integral.

Esse processo está ilustrado na Figura 7.2.1 para a integral $\int (x^2 - x) \cos x \, dx$.

DERIVAÇÃO REPETIDA	INTEGRAÇÃO REPETIDA
$x^2 - x$	+
$2x - 1$	–
2	+
0	–

$$\begin{aligned} \int (x^2 - x) \cos x \, dx &= (x^2 - x) \sin x + (2x - 1) \cos x - 2 \sin x + C \\ &= (x^2 - x - 2) \sin x + (2x - 1) \cos x + C \end{aligned}$$

Figura 7.2.1

► **Exemplo 6** No Exemplo 11 da Seção 5.3, calculamos $\int x^2 \sqrt{x-1} \, dx$ usando uma substituição u . Calcule essa integral usando integração por partes tabulada.

Solução

DERIVAÇÃO REPETIDA	INTEGRAÇÃO REPETIDA
x^2	$(x-1)^{1/2}$
$2x$	$\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$
2	$\frac{4}{15}(x-1)^{5/2}$
0	$\frac{8}{105}(x-1)^{7/2}$

O resultado obtido no Exemplo 6 parece bem diferente do obtido no Exemplo 11 da Seção 5.3. Mostre que as duas respostas são equivalentes.

Assim, segue que

$$\int x^2 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3}x^2(x-1)^{3/2} - \frac{8}{15}x(x-1)^{5/2} + \frac{16}{105}(x-1)^{7/2} + C \quad \blacktriangleleft$$

■ INTEGRAÇÃO POR PARTES PARA INTEGRAIS DEFINIDAS

Para integrais definidas, a fórmula correspondente a (3) é

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (7)$$

OBSERVAÇÃO

É importante não esquecer que as variáveis u e v nessa fórmula são funções de x , e que os limites de integração em (7) são limites sobre as variáveis x . Às vezes, é útil enfatizar isso escrevendo (7) como

$$\int_{x=a}^b u dv = uv \Big|_{x=a}^b - \int_{x=a}^b v du \quad (8)$$

O próximo exemplo ilustra como a integração por partes pode ser usada para integrar as funções trigonométricas inversas.

► **Exemplo 7** Calcule $\int_0^1 \operatorname{arc tg} x dx$.

Solução Sejam

$$u = \operatorname{arc tg} x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad v = x$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arc tg} x dx &= \int_0^1 u dv = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 v du \\ &= x \operatorname{arc tg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

Os limites de integração referem-se a x , isto é, $x = 0$ e $x = 1$.

No entanto,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

logo

$$\int_0^1 \operatorname{arc tg} x dx = x \operatorname{arc tg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

■ FÓRMULAS DE REDUÇÃO

A integração por partes pode ser usada para obter *fórmulas de redução* para integrais. Essas fórmulas expressam uma integral com uma potência de uma função em termos de uma integral que envolve uma potência *mais baixa* daquela função. Por exemplo, se n for um inteiro positivo e $n \geq 2$, então a integração por partes pode ser usada para obter as fórmulas de redução

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \quad (9)$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \quad (10)$$

Para ilustrar como essas fórmulas são obtidas, vamos deduzir (10). Começamos por escrever $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ e fazer

$$\begin{aligned} u &= \cos^{n-1} x & dv &= \cos x \, dx \\ du &= (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \, dx & v &= \sin x \\ &= -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int \cos^n x \, dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx \end{aligned}$$

Transpondo o último termo para o lado esquerdo, obtemos

$$n \int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

da qual segue (10). A dedução da fórmula de redução (9) é análoga (Exercício 63).

As fórmulas de redução (9) e (10) diminuem o expoente de seno (ou cosseno) em 2. Assim, se as fórmulas forem aplicadas repetidamente, o expoente pode finalmente ficar igual a 0 se n for par ou 1 se n for ímpar, e, nesse ponto, a integração pode ser completada. Vamos discutir esse método com mais detalhes na próxima seção. Por ora, daremos um exemplo de como funcionam as fórmulas de redução.

► Exemplo 8 Calcule $\int \cos^4 x \, dx$.

Solução A partir de (10), com $n = 4$,

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx && \text{Agora aplicando (10) com } n = 2. \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 7.2 (Ver página 500 para respostas.)

1. (a) Se $G'(x) = g(x)$, então

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \text{_____}$$

- (b) Se $u = f(x)$ e $v = G(x)$, então a fórmula de (a) pode ser escrita na forma $\int u dv = \text{_____}$

2. Encontre escolhas apropriadas de u e de dv para a integração por partes de cada integral. Não calcule a integral.

(a) $\int x \ln x dx; u = \text{_____}, dv = \text{_____}$

(b) $\int (x-2) \sin x dx; u = \text{_____}, dv = \text{_____}$

(c) $\int \arcsen x dx; u = \text{_____}, dv = \text{_____}$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx; u = \text{_____}, dv = \text{_____}$

3. Use integração por partes para calcular a integral.

(a) $\int xe^{2x} dx$

(b) $\int \ln(x-1) dx$

(c) $\int_0^{\pi/6} x \sin 3x dx$

4. Use a fórmula de redução para calcular $\int \sin^3 x dx$.

EXERCÍCIOS 7.2

1-38 Calcule a integral. ■

1. $\int xe^{-2x} dx$

2. $\int xe^{3x} dx$

3. $\int x^2 e^x dx$

4. $\int x^2 e^{-2x} dx$

5. $\int x \sin 3x dx$

6. $\int x \cos 2x dx$

7. $\int x^2 \cos x dx$

8. $\int x^2 \sin x dx$

9. $\int x \ln x dx$

10. $\int \sqrt{x} \ln x dx$

11. $\int (\ln x)^2 dx$

12. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

13. $\int \ln(3x-2) dx$

14. $\int \ln(x^2+4) dx$

15. $\int \arcsen x dx$

16. $\int \arccos(2x) dx$

17. $\int \arctan(3x) dx$

18. $\int x \arctan x dx$

19. $\int e^x \sin x dx$

20. $\int e^{3x} \cos 2x dx$

21. $\int \sin(\ln x) dx$

22. $\int \cos(\ln x) dx$

23. $\int x \sec^2 x dx$

24. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$

25. $\int x^3 e^{x^2} dx$

26. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

27. $\int_0^2 xe^{2x} dx$

28. $\int_0^1 xe^{-5x} dx$

29. $\int_1^e x^2 \ln x dx$

30. $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

31. $\int_{-1}^1 \ln(x+2) dx$

32. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsen x dx$

33. $\int_2^4 \arccos \sqrt{\theta} d\theta$

34. $\int_1^2 x \arccos x dx$

35. $\int_0^\pi x \sin 2x dx$

36. $\int_0^\pi (x+x \cos x) dx$

37. $\int_1^3 \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx$

38. $\int_0^2 \ln(x^2+1) dx$

39-42 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

39. O principal objetivo da integração por partes é escolher u e dv para obter um novo integrando que seja mais fácil de calcular do que o original.

40. Utilizando a estratégia LIATE para calcular $\int x^3 \ln x dx$, deveríamos escolher $u = x^3$ e $dv = \ln x dx$.

41. Para calcular $\int \ln e^x dx$ usando integração por partes, escolha $dv = e^x dx$.

42. A integração por partes tabulada é útil para integrandos da forma $\int p(x)f(x) dx$, em que $p(x)$ é um polinômio e $f(x)$ pode ser integrada repetidamente.

43-44 Calcule a integral fazendo uma substituição u e, depois, integrando por partes. ■

43. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

44. $\int \cos \sqrt{x} dx$

45. Prove que a integração por partes tabulada dá a resposta correta para

$$\int p(x)f(x) dx$$

quando $p(x)$ é um polinômio quadrático qualquer e $q(x)$ é qualquer função que possa ser integrada repetidamente.

46. As contas de qualquer integração por partes repetida podem ser organizadas usando integração por partes tabulada. Use essa organização para calcular $\int e^x \cos x dx$ de duas maneiras: pri-

meiro use derivação repetida de $\cos x$ (compare com o Exemplo 5) e, depois, derivação repetida de e^x .

47-52 Calcule a integral usando integração por partes tabulada. ■

47. $\int (3x^2 - x + 2)e^{-x} dx$

48. $\int (x^2 + x + 1) \sen x dx$

49. $\int 4x^4 \sen 2x dx$

50. $\int x^3 \sqrt{2x+1} dx$

51. $\int e^{ax} \sen bx dx$

52. $\int e^{-3\theta} \sen 5\theta d\theta$

53. Considere a integral $\int \sen x \cos x dx$.

- (a) Calcule essa integral de duas maneiras: primeiro usando integração por partes e depois usando a substituição $u = \sen x$.
- (b) Mostre que os resultados da parte (a) são equivalentes.
- (c) Qual das duas maneiras você prefere? Discuta as razões de sua preferência.

54. Calcule a integral

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

usando

- (a) integração por partes
- (b) a substituição $u = \sqrt{x^2 + 1}$.

55. (a) Encontre a área da região delimitada por $y = \ln x$, a reta $x = e$ e o eixo x .

(b) Encontre o volume do sólido gerado quando a região do item (a) gira em torno do eixo x .

56. Encontre a área da região entre $y = x \sen x$ e $y = x$ para $0 \leq x \leq \pi/2$.

57. Encontre o volume do sólido gerado quando a região entre $y = \sen x$ e $y = 0$, com $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo y .

58. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \cos x$ e $y = 0$, com $0 \leq x \leq \pi/2$, gira em torno do eixo y .

59. Uma partícula se move ao longo do eixo x com uma função velocidade $v(t) = t^3 \sen t$. Quão longe viaja a partícula do tempo $t = 0$ a $t = \pi$?

60. O estudo das ondas de dentes de serra em Engenharia elétrica leva a integrais da forma

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} t \sen(k\omega t) dt$$

onde k é um inteiro e ω é uma constante não nula. Calcule a integral.

61. Use a fórmula de redução (9) para calcular

(a) $\int \sen^4 x dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \sen^5 x dx$.

62. Use a fórmula de redução (10) para calcular

(a) $\int \cos^5 x dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$.

63. Deduza a fórmula de redução (9).

64. Em cada parte, use a integração por partes ou outros métodos para deduzir a fórmula de redução.

(a) $\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tg x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$

(b) $\int \tg^n x dx = \frac{\tg^{n-1} x}{n-1} - \int \tg^{n-2} x dx$

(c) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

65-66 Use as fórmulas de redução do Exercício 64 para calcular as integrais. ■

65. (a) $\int \tg^4 x dx$ (b) $\int \sec^4 x dx$ (c) $\int x^3 e^x dx$

66. (a) $\int x^2 e^{3x} dx$ (b) $\int_0^1 xe^{-\sqrt{x}} dx$

[Sugestão: Faça primeiro uma substituição.]

67. Seja f uma função cuja derivada segunda é contínua em $[-1, 1]$. Mostre que

$$\int_{-1}^1 xf''(x) dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1)$$

ENFOCANDO CONCEITOS

68. (a) Na integral $\int x \cos x dx$, sejam

$$u = x, \quad dv = \cos x dx,$$

$$du = dx, \quad v = \sen x + C_1$$

Mostre que a constante C_1 é cancelada, de modo que obtemos a mesma solução se omitirmos C_1 .

(b) Mostre que, em geral, vale

$$uv - \int v du = u(v + C_1) - \int (v + C_1) du$$

de modo que é justificável a omissão da constante de integração ao calcular v na integração por partes.

69. Calcule $\int \ln(x+1) dx$ usando integração por partes. Simplifique o cálculo de $\int v du$ introduzindo a constante de integração $C_1 = 1$ quando passar de dv para v .

70. Calcule $\int \ln(3x-2) dx$ usando integração por partes. Simplifique o cálculo de $\int v du$ introduzindo a constante de integração $C_1 = -\frac{2}{3}$ quando passar de dv para v . Compare a solução obtida com a resposta do Exercício 13.

71. Calcule $\int x \arc \tg x dx$ usando integração por partes. Simplifique o cálculo de $\int v du$ introduzindo a constante de integração $C_1 = \frac{1}{2}$ quando passar de dv para v .

72. Qual é a equação que resulta se aplicarmos integração por partes à integral

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

com as escolhas

$$u = \frac{1}{\ln x} \quad \text{e} \quad dv = \frac{1}{x} dx?$$

Em que sentido essa equação é válida? Em que sentido é falsa?

73. Texto Explique a relação entre a regra do produto para derivadas e a técnica de integração por partes.

74. Texto Para qual tipo de problemas as técnicas de integração por substituição e por integração por partes “competem” entre si? Descreva situações, com exemplos, em que cada uma dessas técnicas é preferível.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.2

1. (a) $\int f'(x)G(x) dx$ (b) $uv - \int v du$ 2. (a) $\ln x; x dx$ (b) $x - 2; \sin x dx$ (c) $\arcsen x; dx$ (d) $x; \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$
 3. (a) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C$ (b) $(x-1)\ln(x-1) - x + C$ (c) $\frac{1}{9}$ 4. $-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$

7.3 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Na seção anterior, obtivemos fórmulas de redução para integrar potências inteiras positivas de seno, cosseno, tangente e secante. Nesta seção, mostraremos como trabalhar com essas fórmulas de redução e discutiremos métodos para integrar outros tipos de integrais envolvendo funções trigonométricas.

■ INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO E COSSENO

Começamos recordando as fórmulas de redução que obtivemos na seção anterior.

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad (1)$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad (2)$$

No caso em que $n = 2$, essas fórmulas são

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \quad (3)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \quad (4)$$

Podemos obter formas alternativas para essas fórmulas de integração usando as identidades trigonométricas

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (5-6)$$

que provêm das fórmulas para o ângulo duplo

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \quad \text{e} \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Essas identidades dão lugar a

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (7)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (8)$$

Observe que as antiderivadas nas Fórmulas (3) e (4) envolvem os senos e os cossenos, enquanto aquelas em (7) e (8) só envolvem senos. Porém, a aparente discrepância é fácil de ser resolvida pela identidade

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

para reescrever (7) e (8) nas formas (3) e (4), ou reciprocamente.

No caso em que $n = 3$, as fórmulas de redução para integração de $\sin^3 x$ e $\cos^3 x$ são

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C \quad (9)$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C \quad (10)$$

Se quisermos, a Fórmula (9) pode ser expressa só em termos de cossenos, usando a identidade $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, e a Fórmula (10) pode ser expressa só em termos de senos, usando a identidade $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Deixamos a cargo do leitor confirmar que

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Na integração de $\sin^3 x$ e $\cos^3 x$, o *Maple* produz as Fórmulas (11) e (12), mas o *Mathematica* produz

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + C$$

Use identidades trigonométricas para conciliar os resultados dos dois programas.

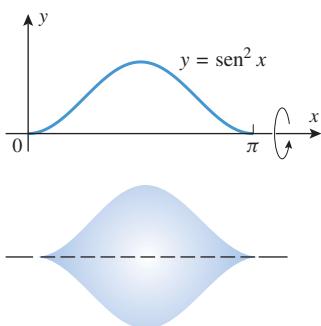


Figura 7.3.1

► **Exemplo 1** Encontre o volume V do sólido obtido quando a região sob a curva $y = \sin^2 x$ acima do intervalo $[0, \pi]$ gira em torno do eixo x (Figura 7.3.1).

Solução Usando o método dos discos, a Fórmula (5) da Seção 6.2 e a Fórmula (13) acima, obtemos

$$V = \int_0^\pi \pi \sin^4 x \, dx = \pi \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi^2 \quad \blacktriangleleft$$

■ INTEGRAÇÃO DE PRODUTOS DE SENOS E COSSENOs

Se m e n forem inteiros positivos, então a integral

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

poderá ser calculada por um dos três procedimentos dados na Tabela 7.3.1, dependendo de m e n serem par ou ímpar.

► **Exemplo 2** Calcule

$$(a) \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx \quad (b) \int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$$

Tabela 7.3.1

INTEGRAÇÃO DE PRODUTOS DE SENOS E COSSENO

$\int \sin^m x \cos^n x dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n ímpar	<ul style="list-style-type: none"> • Separe um fator de $\cos x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \sin x$ 	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
m ímpar	<ul style="list-style-type: none"> • Separe um fator de $\sin x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \cos x$ 	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ par} \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> • Use a identidade relevante para reduzir as potências de $\sin x$ e $\cos x$ 	$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{cases}$

Solução (a) Como $n = 5$ é ímpar, utilizamos o primeiro procedimento na Tabela 7.3.1:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx \\
&= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx \\
&= \int u^4 (1 - u^2)^2 du \\
&= \int (u^4 - 2u^6 + u^8) du \\
&= \frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + C \\
&= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C
\end{aligned}$$

Solução (b) Como $m = n = 4$ são expoentes pares, utilizamos o terceiro procedimento na Tabela 7.3.1:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 (\cos^2 x)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{2}[1 - \cos 2x]\right)^2 \left(\frac{1}{2}[1 + \cos 2x]\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x)^2 dx \\
&= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx
\end{aligned}$$

Note que isso pode ser obtido mais diretamente da integral original usando a identidade $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{32} \int \sin^4 u du && \begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2dx \text{ ou } dx = \frac{1}{2}du \end{aligned} \\
&= \frac{1}{32} \left(\frac{3}{8}u - \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{32}\sin 4u \right) + C && \text{Fórmula (13)} \\
&= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Integrais da forma

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx \quad (15)$$

podem ser encontradas usando as identidades trigonométricas

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (16)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (17)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (18)$$

para expressar o integrando como uma soma ou uma diferença de senos e cossenos.

► Exemplo 3 Calcule $\int \sin 7x \cos 3x \, dx$.

Solução Usando (16), obtemos

$$\int \sin 7x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 10x) \, dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{20} \cos 10x + C \quad \blacktriangleleft$$

■ INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE TANGENTE E DE SECANTE

Os procedimentos para integração de potências de tangente e secante seguem paralelamente os de seno e cosseno. A ideia é usar as seguintes fórmulas de redução (as quais foram deduzidas no Exercício 64 da Seção 7.2) para reduzir o expoente do integrando até que a integral resultante possa ser calculada:

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx \quad (19)$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx \quad (20)$$

No caso em que n for ímpar, o expoente pode ser reduzido a 1, deixando-nos com o problema de integrar $\tan x$ ou $\sec x$. Essas integrais são dadas por

$$\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C \quad (21)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad (22)$$

A Fórmula (21) pode ser obtida escrevendo-se

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= -\ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\ln |\cos x| = -\ln \frac{1}{|\cos x|}$$

Para obter a Fórmula (22), escrevemos

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\begin{aligned} u &= \sec x + \tan x \\ du &= (\sec^2 x + \sec x \tan x) \, dx \end{aligned}$$

As seguintes integrais básicas ocorrem frequentemente, e vale a pena destacá-las:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C \quad (23)$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C \quad (24)$$

A Fórmula (24) já é nossa conhecida, uma vez que a derivada de $\operatorname{tg} x$ é $\sec^2 x$. A Fórmula (23) pode ser obtida aplicando-se a fórmula de redução (19), com $n = 2$ (verifique), ou, alternativamente, usando-se a identidade

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

para escrever

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

As fórmulas

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\sec x| + C \quad (25)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \quad (26)$$

podem ser deduzidas de (21) e (22) e das fórmulas de redução (19) e (20), da seguinte maneira:

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\sec x| + C$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \int \sec x dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

■ INTEGRAÇÃO DE PRODUTOS DE TANGENTES E DE SECANTES

Se m e n forem inteiros positivos, então a integral

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$$

poderá ser calculada por um dos três procedimentos dados na Tabela 7.3.2, dependendo de m e n serem pares ou ímpares.

Tabela 7.3.2
INTEGRAÇÃO DE PRODUTOS DE TANGENTES E DE SECANTES

$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n par	<ul style="list-style-type: none"> Separar um fator de $\sec^2 x$ Aplicar a identidade relevante Fazer a substituição $u = \operatorname{tg} x$ 	$\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$
m ímpar	<ul style="list-style-type: none"> Separar um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ Aplicar a identidade relevante Fazer a substituição $u = \sec x$ 	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ ímpar} \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> Usar a identidade relevante para reduzir o integrando a potências somente de $\sec x$ Agora usar a fórmula de redução para potências de $\sec x$ 	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

► **Exemplo 4** Calcule

$$(a) \int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x dx \quad (b) \int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x dx \quad (c) \int \operatorname{tg}^2 x \sec x dx$$

Solução (a) Como $n = 4$ é par, utilizaremos o primeiro procedimento na Tabela 7.3.2:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x dx \\ &= \int u^2 (u^2 + 1) du \\ &= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C \end{aligned}$$

Solução (b) Como $m = 3$ é ímpar, utilizaremos o segundo procedimento na Tabela 7.3.2.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x (\sec x \operatorname{tg} x) dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x (\sec x \operatorname{tg} x) dx \\ &= \int (u^2 - 1) u^2 du \\ &= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C \end{aligned}$$

Solução (c) Como $m = 2$ é par e $n = 1$ é ímpar, utilizaremos o terceiro procedimento na Tabela 7.3.2:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx \\ &= \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx \quad \text{Ver (26) e (22)} \\ &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| - \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \\ &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA A INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO, COSSENO, TANGENTE E SECANTE

Os métodos nas Tabelas 7.3.1 e 7.3.2 podem ser aplicados, às vezes, se $m = 0$ ou $n = 0$ para integrar potências inteiras positivas de seno, coseno, tangente e secante, sem fórmulas de redução. Por exemplo, em vez de usar a fórmula de redução para integrar $\operatorname{sen}^3 x$, podemos aplicar o segundo procedimento na Tabela 7.3.1:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx \\ &= - \int (1 - u^2) du \\ &= \frac{1}{3} u^3 - u + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

Com a ajuda da identidade

$$1 + \cotg^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$$

as técnicas da Tabela 7.3.2 podem ser adaptadas para calcular integrais da forma

$$\int \cotg^m x \operatorname{cossec}^n x dx$$

Também é possível deduzir fórmulas de redução para potências de cotangentes e cossecantes que são análogas às Fórmulas (19) e (20).

que confere com (11).

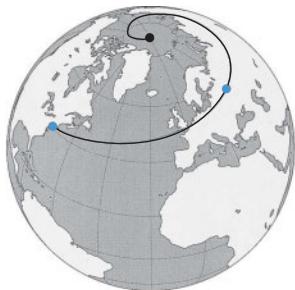


Figura 7.3.2 Um voo com leitura constante na bússola de Nova York para Moscou segue uma espiral em direção ao Polo Norte, mas é um segmento de reta em uma projeção de Mercator.

■ O MAPA-MÚNDI DE MERCATOR

A integral da sec x desempenha um papel importante nos projetos de mapas de navegação para traçar cursos náuticos e aeronáuticos. Marinheiros e pilotos geralmente mapeiam seus cursos ao longo de caminhos com uma leitura de bússola constante; por exemplo, o curso pode ser 30° a noroeste ou 135° a sudeste. Exceto para cursos paralelos ao Equador ou diretos para Norte ou Sul, um curso com leitura de bússola constante leva a uma espiral em torno da Terra em direção a um dos polos (conforme a parte superior da Figura 7.3.2). Em 1569, o matemático e geógrafo flamengo Gerhard Kramer (1512-1594) (mais conhecido pelo nome latino de Mercator) inventou um mapa-múndi chamado de *projecção de Mercator*, no qual as espirais produzidas pela leitura constante da bússola aparecem como linhas retas. Isso foi extremamente importante, pois possibilitou aos marinheiros determinar uma leitura constante da bússola entre dois pontos simplesmente conectando-os por uma linha reta sobre um mapa (como na parte inferior da Figura 7.3.2).

Supondo que a Terra seja uma esfera com raio de 6.500 km, então as curvas de latitude obtidas com um incremento de 1° são equidistantesumas das outras em cerca de 114 km (por quê?). Porém, na projeção de Mercator, as curvas de latitude tornam-se mais separadas em direção aos polos, de forma que duas curvas de latitude amplamente espaçadas nas proximidades do polo podem estar, na verdade, à mesma distância sobre a Terra do que duas curvas de latitude a pequena distância próximas ao Equador. Pode-se provar que, em um mapa de Mercator, no qual a curva equatorial tem comprimento L , a distância vertical D_β sobre o mapa entre o Equador (latitude 0°) e a curva de latitude β° é

$$D_\beta = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\beta\pi/180} \sec x \, dx \quad (27)$$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.3 (Ver página 508 para respostas.)

1. Complete cada identidade trigonométrica com uma expressão que envolva $\cos 2x$.
 - (a) $\sin^2 x = \underline{\hspace{2cm}}$
 - (b) $\cos^2 x = \underline{\hspace{2cm}}$
 - (c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \underline{\hspace{2cm}}$
2. Calcule a integral.
 - (a) $\int \sec^2 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 - (b) $\int \tan^2 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 - (c) $\int \sec x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$
 - (d) $\int \tan x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$
3. Use a substituição indicada para reescrever a integral em termos de u . Não calcule a integral.
 - (a) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$; $u = \sin x$
 - (b) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$; $u = \cos x$
 - (c) $\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx$; $u = \tan x$
 - (d) $\int \tan^3 x \sec x \, dx$; $u = \sec x$

EXERCÍCIOS 7.3

1-52 Calcule a integral. ■

1. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

2. $\int \sin^5 3x \cos 3x \, dx$

3. $\int \sin^2 5\theta \, d\theta$

4. $\int \cos^2 3x \, dx$

5. $\int \sin^3 a\theta \, d\theta$

6. $\int \cos^3 at \, dt$

7. $\int \sin ax \cos ax \, dx$

9. $\int \sin^2 t \cos^3 t \, dt$

11. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

13. $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

8. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

10. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

12. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

14. $\int \sin 3\theta \cos 2\theta \, d\theta$

15. $\int \sin x \cos(x/2) dx$
17. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$
19. $\int_0^{\pi/3} \sin^4 3x \cos^3 3x dx$
21. $\int_0^{\pi/6} \sin 4x \cos 2x dx$
23. $\int \sec^2(2x - 1) dx$
25. $\int e^{-x} \operatorname{tg}(e^{-x}) dx$
27. $\int \sec 4x dx$
29. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx$
31. $\int \operatorname{tg} 4x \sec^4 4x dx$
33. $\int \sec^5 x \operatorname{tg}^3 x dx$
35. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec x dx$
37. $\int \operatorname{tg} t \sec^3 t dt$
39. $\int \sec^4 x dx$
41. $\int \operatorname{tg}^3 4x dx$
43. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \sec^4 x dx$
45. $\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg}^2 2x dx$
47. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} dx$
49. $\int \operatorname{cotg}^3 x \operatorname{cossec}^3 x dx$
51. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx$
56. A integral $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^5 x dx$ é equivalente a uma cujo integrando é um polinômio em $\sec x$.
57. Sejam m e n inteiros não negativos e distintos. Use as Fórmulas (16) a (18) para provar:
- (a) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$
- (b) $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$
- (c) $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0.$
58. Calcule as integrais no Exercício 57 quando m e n denotam o mesmo inteiro não negativo.
59. Encontre o comprimento de arco da curva $y = \ln(\cos x)$ acima do intervalo $[0, \pi/4]$.
60. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \operatorname{tg} x$, $y = 1$ e $x = 0$ gira em torno do eixo x .
61. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região limitada por $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$ e $x = \pi/4$ gira em torno do eixo x .
62. A região limitada abaixo pelo eixo x e acima pela parte de $y = \sin x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ gira em torno do eixo x . Encontre o volume do sólido resultante.
63. Use a Fórmula (27) para mostrar que, se o comprimento da curva equatorial em uma projeção de Mercator for L , então a distância vertical D entre as curvas de latitude α° e β° do mesmo lado do Equador (onde $\alpha < \beta$) é
- $$D = \frac{L}{2\pi} \ln \left| \frac{\sec \beta^\circ + \tan \beta^\circ}{\sec \alpha^\circ + \tan \alpha^\circ} \right|$$
64. Suponha que o Equador tenha um comprimento de 100 cm em uma projeção de Mercator. Em cada parte, use o resultado do Exercício 63 para responder à questão.
- (a) Qual é a distância vertical no mapa entre o Equador e a curva de latitude 25° Norte?
- (b) Qual é a distância vertical no mapa entre New Orleans, Louisiana, nos Estados Unidos a 30° de latitude Norte, e Winnipeg, Canadá, a 50° de latitude Norte?

ENFOCANDO CONCEITOS

65. (a) Mostre que

$$\int \operatorname{cossec} x dx = -\ln |\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x| + C$$

- (b) Mostre que o resultado de (a) também pode ser escrito como

$$\int \operatorname{cossec} x dx = \ln |\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + C$$

e

$$\int \operatorname{cossec} x dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \right| + C$$

53-56 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

53. Para calcular $\int \sin^5 x \cos^8 x dx$, use a identidade trigonométrica $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ e a substituição $u = \cos x$.
54. Para calcular $\int \sin^8 x \cos^5 x dx$, use a identidade trigonométrica $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ e a substituição $u = \cos x$.
55. Muitas vezes, a identidade trigonométrica

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

é útil para calcular integrais da forma $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

66. Reescreva $\sin x + \cos x$ na forma

$$A \sin(x + \phi)$$

e use seu resultado junto com o Exercício 65 para calcular

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

67. Use o método do Exercício 66 para calcular

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} \quad (a, b \text{ não nulos})$$

68. (a) Use a Fórmula (9) da Seção 7.2 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx \quad (n \geq 2)$$

- (b) Use esse resultado para deduzir as *fórmulas de Wallis para o seno*:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \quad (n \text{ par})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} \quad (n \text{ ímpar})$$

69. Use as fórmulas de Wallis do Exercício 68 para calcular

$$(a) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx \quad (b) \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx \quad (d) \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx.$$

70. Use a Fórmula (10) da Seção 7.2 e o método do Exercício 68 para deduzir as *fórmulas de Wallis para cosseno*:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \quad (n \text{ par})$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} \quad (n \text{ ímpar})$$

71. **Texto** Descreva as várias abordagens para calcular integrais da forma

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Quais são os casos em que esses tipos de integrais se dividem?
Quais são os procedimentos e as identidades usadas em cada caso?

72. **Texto** Descreva as várias abordagens para calcular integrais da forma

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

Quais são os casos em que esses tipos de integrais se dividem?
Quais são os procedimentos e as identidades usadas em cada caso?

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.3

1. (a) $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ (b) $\frac{1 + \cos 2x}{2}$ (c) $\cos 2x$ 2. (a) $\tan x + C$ (b) $\tan x - x + C$ (c) $\ln |\sec x + \tan x| + C$ (d) $\ln |\sec x| + C$
 3. (a) $\int u^2 du$ (b) $\int (u^2 - 1)u^2 du$ (c) $\int u^3 du$ (d) $\int (u^2 - 1)du$

7.4 SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção, discutiremos um método para calcular integrais contendo radicais, através de substituições envolvendo funções trigonométricas. Mostraremos também como integrais contendo polinômios quadráticos podem, às vezes, ser calculadas completando o quadrado.

■ O MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Para começar, iremos nos ocupar com integrais que contêm expressões da forma

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

nas quais a é uma constante positiva. A ideia básica para o cálculo dessas integrais é fazer uma substituição para x que elimine o radical. Por exemplo, para eliminar o radical da expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$, podemos fazer a substituição

$$x = a \sin \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{1}$$

e observar que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)}$$

$$= a \sqrt{\cos^2 \theta} = a |\cos \theta| = a \cos \theta \quad \boxed{\cos \theta \geq 0 \text{ quando } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2}$$

A restrição sobre θ em (1) serve a dois propósitos: possibilita-nos substituir $|\cos \theta|$ por $\cos \theta$ para simplificar os cálculos e permite que a substituição possa ser reescrita como $\theta = \arcsen(x/2)$, se necessário.

► Exemplo 1 Calcule $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Solução Para eliminar o radical, fazemos a substituição

$$x = 2 \sen \theta, \quad dx = 2 \cos \theta d\theta$$

Obtemos, então:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{(2 \sen \theta)^2 \sqrt{4 - 4 \sen^2 \theta}} \\ &= \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{(2 \sen \theta)^2 (2 \cos \theta)} = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\sen^2 \theta} \\ &= \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{4} \cot \theta + C \end{aligned} \quad (2)$$

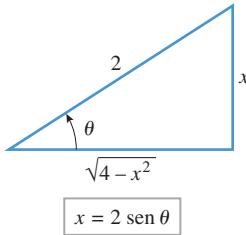


Figura 7.4.1

Nesse ponto, completamos a integração; porém, como a integral original estava expressa em termos de x , é desejável também expressar $\cot \theta$ em termos de x . Isso pode ser feito usando-se identidades trigonométricas, mas a expressão também pode ser obtida fazendo-se a substituição $x = 2 \sen \theta$ como $\sen \theta = x/2$ e representando-a geometricamente, como na Figura 7.4.1, da qual obtemos:

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Substituindo em (2), temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C \quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 2 Calcule $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Solução Há duas abordagens possíveis: podemos fazer a substituição na integral indefinida (como no Exemplo 1) e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x ; ou podemos fazer a substituição na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ .

Método 1

Usando o resultado do Exemplo 1, com os limites de integração em x , obtemos

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} [1 - \sqrt{3}] = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

Método 2

A substituição $x = 2 \sen \theta$ pode ser expressa como $x/2 = \sen \theta$ ou $\theta = \arcsen(x/2)$; logo, os limites em θ correspondentes a $x = 1$ e $x = \sqrt{2}$ são

$$x = 1: \quad \theta = \arcsen(1/2) = \pi/6$$

$$x = \sqrt{2}: \quad \theta = \arcsen(\sqrt{2}/2) = \pi/4$$

Assim, a partir de (2) no Exemplo 1, obtemos

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cossec}^2 \theta d\theta \quad \boxed{\text{Converter limites de } x \text{ para } \theta}$$

$$= -\frac{1}{4} [\cot \theta]_{\pi/6}^{\pi/4} = -\frac{1}{4} [1 - \sqrt{3}] = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 3** Encontre a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

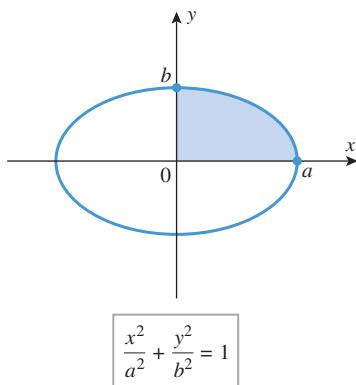


Figura 7.4.2

Solução Como a elipse é simétrica em torno dos eixos, sua área A é 4 vezes a área no primeiro quadrante (Figura 7.4.2). Se resolvemos a equação da elipse para y em termos de x , obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

onde a raiz quadrada positiva dá a equação da metade superior. Assim, a área é dada por

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Para calcular essa integral, vamos fazer a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ ($dx = a \cos \theta d\theta$) e converter os limites de integração em x para os limites em θ . Uma vez que a substituição pode ser expressa como $\theta = \operatorname{arc sen}(x/a)$, os limites de integração em θ são

$$x = 0: \theta = \operatorname{arc sen}(0) = 0$$

$$x = a: \theta = \operatorname{arc sen}(1) = \pi/2$$

Desse modo, obtemos

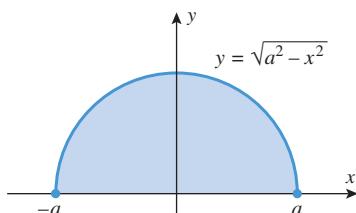


Figura 7.4.3

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2ab \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 2ab \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \pi ab \blacktriangleleft \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO

No caso especial em que $a = b$, a elipse torna-se um círculo de raio a , e a fórmula da área fica $A = \pi a^2$, conforme esperado. Vale a pena notar que

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \quad (3)$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso computacional com integração numérica, use-o, bem como a Fórmula (3), para aproximar π com três casas decimais.

uma vez que essa integral representa a área do semicírculo superior (Figura 7.4.3).

Até agora, abordamos o uso da substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ para calcular integrais envolvendo radicais da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$. A Tabela 7.4.1 resume esse método e descreve outras substituições desse tipo.

Tabela 7.4.1
SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EXPRESSÃO NO INTEGRANDO	SUBSTITUIÇÃO	RESTRIÇÃO SOBRE θ	SIMPLIFICAÇÃO
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sen \theta$	$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$	$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sen^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tg \theta$	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tg^2 \theta = a^2 \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \pi/2 & (\text{se } x \geq a) \\ \pi/2 < \theta \leq \pi & (\text{se } x \leq -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2 \tg^2 \theta$

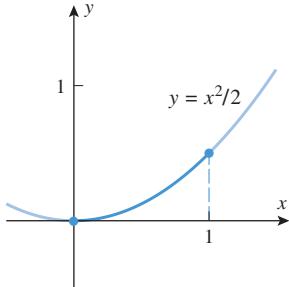


Figura 7.4.4

► **Exemplo 4** Encontre o comprimento de arco da curva $y = x^2/2$ de $x = 0$ a $x = 1$ (Figura 7.4.4).

Solução A partir da Fórmula (4) da Seção 6.4, o comprimento de arco L da curva é

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

O integrando envolve um radical da forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ com $a = 1$. Assim, da Tabela 7.4.1, fazemos a substituição

$$x = \tg \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta \quad \text{ou} \quad dx = \sec^2 \theta d\theta$$

Uma vez que essa substituição pode ser expressa como $\theta = \arctg x$, os limites de integração em θ que correspondem aos limites em x , $x = 0$ e $x = 1$ são

$$x = 0: \quad \theta = \arctg 0 = 0$$

$$x = 1: \quad \theta = \arctg 1 = \pi/4$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tg^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta \quad [1 + \tg^2 \theta = \sec^2 \theta] \\ &= \int_0^{\pi/4} |\sec \theta| \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta \quad [\sec \theta > 0, \text{ pois } -\pi/2 < \theta < \pi/2] \\ &= \left[\frac{1}{2} \sec \theta \tg \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tg \theta| \right]_0^{\pi/4} \quad [\text{Fórmula (26)} \\ &\quad \text{da Seção 7.3}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right] \approx 1,148 \end{aligned}$$

► **Exemplo 5** Calcule $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$, supondo que $x \geq 5$.

Solução O integrando envolve um radical da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ com $a = 5$; portanto, usando a Tabela 7.4.1, fazemos a substituição

$$x = 5 \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \pi/2$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 5 \sec \theta \tg \theta \quad \text{ou} \quad dx = 5 \sec \theta \tg \theta d\theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{25 \sec^2 \theta - 25}}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \tg \theta) d\theta \\ &= \int \frac{5|\tg \theta|}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \tg \theta) d\theta \\ &= 5 \int \tg^2 \theta d\theta \quad [\tg \theta \geq 0, \text{ pois } 0 \leq \theta < \pi/2] \\ &= 5 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = 5 \tg \theta - 5\theta + C \end{aligned}$$

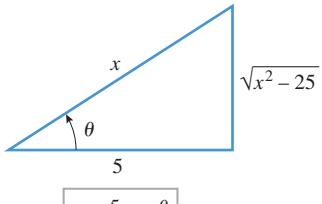
Para expressar a solução em termos de x , vamos representar a substituição $x = 5 \sec \theta$, geometricamente, pelo triângulo na Figura 7.4.5, do qual obtemos

$$\tg \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}$$

Disso e do fato de que a substituição pode ser expressa como $\theta = \text{arc sec}(x/5)$, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 25} - 5 \text{arc sec}\left(\frac{x}{5}\right) + C \quad \blacktriangleleft$$

Figura 7.4.5



■ INTEGRAIS ENVOLVENDO $ax^2 + bx + c$

As integrais que envolvem a expressão quadrática $ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$, podem ser frequentemente calculadas, primeiro completando o quadrado e, depois, fazendo uma substituição apropriada. Os exemplos a seguir ilustram essa ideia.

► **Exemplo 6** Calcule $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx$.

Solução Completando o quadrado, obtemos

$$x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 4x + 4) + 8 - 4 = (x - 2)^2 + 4$$

Assim, a substituição

$$u = x - 2, \quad du = dx$$

fornecce

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx &= \int \frac{x}{(x - 2)^2 + 4} dx = \int \frac{u + 2}{u^2 + 4} du \\ &= \int \frac{u}{u^2 + 4} du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 4} du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) + 2 \left(\frac{1}{2}\right) \text{arc tg} \frac{u}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln[(x - 2)^2 + 4] + \text{arc tg} \left(\frac{x - 2}{2}\right) + C \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 7.4 (Ver página 514 para respostas.)

1. Para cada expressão, dê uma substituição trigonométrica que elimine o radical.

(a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ _____ (b) $\sqrt{a^2 + x^2}$ _____
 (c) $\sqrt{x^2 - a^2}$ _____

2. Se $x = 2 \sec \theta$ e $0 < \theta < \pi/2$, então

(a) $\sin \theta =$ _____ (b) $\cos \theta =$ _____
 (c) $\tan \theta =$ _____

3. Em cada parte, explice a substituição trigonométrica que tentaríamos em primeiro lugar para calcular a integral. Não calcule a integral.

(a) $\int \sqrt{9 + x^2} dx$ _____
 (b) $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ _____
 (c) $\int \sqrt{1 - 9x^2} dx$ _____

(d) $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$ _____

(e) $\int \sqrt{9 + 3x^2} dx$ _____

(f) $\int \sqrt{1 + (9x)^2} dx$ _____

4. Em cada parte, determine a substituição u .

(a) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 10} dx = \int \frac{1}{u^2 + 3^2} du;$
 $u =$ _____

(b) $\int \sqrt{x^2 - 6x + 8} dx = \int \sqrt{u^2 - 1} du;$
 $u =$ _____

(c) $\int \sqrt{12 - 4x - x^2} dx = \int \sqrt{4^2 - u^2} du;$
 $u =$ _____

EXERCÍCIOS 7.4 [CAS]

1-26 Calcule a integral. ■

1. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

2. $\int \sqrt{1 - 4x^2} dx$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx$

4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 - x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2}$

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5 + x^2}} dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$

8. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 16}}$

9. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

10. $\int x^3 \sqrt{5 - x^2} dx$

11. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9x^2 - 4}}$

12. $\int \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t} dt$

13. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$

14. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 25}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

16. $\int \frac{dx}{1 + 2x^2 + x^4}$

17. $\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}}$

18. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$

19. $\int e^x \sqrt{1 - e^{2x}} dx$

20. $\int \frac{\cos \theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}} d\theta$

21. $\int_0^1 5x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$

22. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1 - x^2)^2}$

23. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{2x^2 - 4}}{x} dx$

25. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 3}}$

26. $\int_0^3 \frac{x^3}{(3 + x^2)^{5/2}} dx$

27-30 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

27. Um integrando envolvendo um radical da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ sugere a substituição $x = a \sin \theta$.

28. A substituição trigonométrica $x = a \sin \theta$ é usada com a restrição $0 \leq \theta \leq \pi$.

29. Um integrando envolvendo um radical da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ sugere a substituição $x = a \cos \theta$.

30. A área envolvida pela elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ é $\pi/2$.

ENFOCANDO CONCEITOS

31. A integral

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$$

pode ser calculada ou por substituição trigonométrica ou pela substituição $u = x^2 + 4$. Calcule-a das duas maneiras e mostre que os resultados são equivalentes.

32. A integral

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$$

pode ser calculada tanto por substituição trigonométrica quanto por manipulação algébrica, reescrevendo o numerador do integrando como $(x^2 + 4) - 4$. Calcule a integral de ambas as maneiras e mostre que os resultados obtidos são equivalentes.

33. Encontre o comprimento da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

34. Encontre o comprimento da curva $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$.

35. Encontre a área da superfície gerada quando a curva do Exercício 34 gira em torno do eixo x.

36. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $x = y(1 - y^2)^{1/4}$, $y = 0$, $y = 1$ e $x = 0$ gira em torno do eixo y.

37-48 Calcule a integral. ■

37. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

40. $\int \frac{dx}{16x^2 + 16x + 5}$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$

42. $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$

43. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$

44. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}} dx$

45. $\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 7}$

46. $\int \frac{2x + 3}{4x^2 + 4x + 5} dx$

47. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

48. $\int_0^4 \sqrt{x(4-x)} dx$

C 49-50 Há uma boa chance de que um CAS não seja capaz de calcular a integral dada. Se for esse o caso, faça uma substituição de forma a obter uma integral que seu CAS possa calcular. ■

49. $\int \cos x \sin x \sqrt{1 - \sin^4 x} dx$

50. $\int (x \cos x + \sin x) \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x} dx$

51. (a) Use a **substituição hiperbólica** $x = 3 \operatorname{senh} u$, a identidade $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$ e o Teorema 6.9.4 para calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

(b) Calcule a integral em (a) usando uma substituição trigonométrica e mostre que o resultado confere com o obtido em (a).

52. Use a substituição hiperbólica $x = \cosh u$, a identidade $\operatorname{senh}^2 u = \frac{1}{2}(\cosh 2u - 1)$ e os resultados indicados no Exercício 51 para calcular

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx, \quad x \geq 1$$

53. **Texto** A substituição trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, é recomendada para uma integral cujo integrando envolva $\sqrt{a^2 - x^2}$. Discuta as implicações de restringir θ a $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ e explique por que devemos preferir a restrição $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

54. **Texto** A substituição trigonométrica $x = a \cos \theta$ poderia ser usada com uma integral cujo integrando envolva $\sqrt{a^2 - x^2}$. Determine uma restrição apropriada para θ com a substituição $x = a \cos \theta$ e discuta como aplicar essa substituição em integrais apropriadas. Ilustre sua discussão calculando a integral do Exemplo 1 usando uma substituição desse tipo.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.4

1. (a) $x = a \operatorname{sen} \theta$ (b) $x = a \operatorname{tg} \theta$ (c) $x = a \sec \theta$ 2. (a) $\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$ (b) $\frac{2}{x}$ (c) $\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$ 3. (a) $x = 3 \operatorname{tg} \theta$ (b) $x = 3 \operatorname{sen} \theta$
 (c) $x = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta$ (d) $x = 3 \sec \theta$ (e) $x = \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta$ (f) $x = \frac{1}{9} \operatorname{tg} \theta$ 4. (a) $x - 1$ (b) $x - 3$ (c) $x + 2$

7.5 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Lembre que uma função racional é uma razão de dois polinômios. Nesta seção, vamos fornecer um método geral para a integração de funções racionais, baseado na ideia de decompor uma função racional em uma soma de funções racionais mais simples que possam ser integradas pelos métodos estudados nas seções anteriores.

■ FRAÇÕES PARCIAIS

Em Álgebra, aprende-se a combinar duas ou mais frações em uma única usando um denominador comum. Por exemplo,

$$\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1) + 3(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{5x-10}{x^2-3x-4} \quad (1)$$

Porém, para os propósitos de integração, o lado esquerdo de (1) é preferível ao lado direito, uma vez que cada um de seus termos é de fácil integração:

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{2}{x-4} dx + \int \frac{3}{x+1} dx = 2 \ln|x-4| + 3 \ln|x+1| + C$$

Assim, é desejável ter algum método que nos possibilite obter o lado esquerdo de (1) a partir do lado direito. Para ilustrar como isso pode ser feito, começamos por notar que, no lado esquerdo, os numeradores são constantes, e os denominadores são os fatores do denominador do lado direito. Dessa forma, para encontrar o lado esquerdo de (1) a partir do lado direito, devemos fatorar o denominador do lado direito e procurar constantes A e B tais que

$$\frac{5x - 10}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 1} \quad (2)$$

Uma maneira de encontrar as constantes A e B é multiplicar ambos os membros de (2) por $(x - 4)(x + 1)$, para eliminar a fração. Isso dá lugar a

$$5x - 10 = A(x + 1) + B(x - 4) \quad (3)$$

Tal relação é válida para todo x ; assim, em particular, é válida para $x = 4$ e $x = -1$. Substituindo $x = 4$ em (3), vemos que o segundo termo desaparece, dando lugar à equação $10 = 5A$ ou $A = 2$; substituindo $x = -1$ em (3), vemos que desaparece o primeiro termo da direita e resulta a equação $-15 = -5B$ ou $B = 3$. Substituindo esses valores em (2), obtemos

$$\frac{5x - 10}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{2}{x - 4} + \frac{3}{x + 1} \quad (4)$$

o que está de acordo com (1).

Um segundo método para encontrar as constantes A e B é multiplicar o lado direito de (3) e juntar as potências iguais de x para obter

$$5x - 10 = (A + B)x + (A - 4B)$$

Uma vez que os polinômios de ambos os lados são idênticos, seus coeficientes correspondentes devem ser os mesmos. Equacionando os coeficientes correspondentes nos dois lados, obtemos o seguinte sistema de equações nas incógnitas A e B :

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ A - 4B &= -10 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, temos $A = 2$ e $B = 3$, como anteriormente (verifique).

Os termos à direita de (4) são denominados *frações parciais* das expressões do lado esquerdo, pois cada um constitui uma *parte* daquela expressão. Para encontrar as frações parciais, primeiramente tivemos de fazer uma suposição sobre sua forma para, então, encontrar as constantes desconhecidas. Nossa próximo objetivo é estender essa ideia a funções racionais em geral. Para isso, vamos supor que $P(x)/Q(x)$ seja uma *função racional própria*, o que significa que o grau do numerador é menor do que o do denominador. Há um teorema em Álgebra avançada que afirma que toda função racional própria pode ser expressa como uma soma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$$

onde $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ são funções racionais da forma

$$\frac{A}{(ax + b)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

nas quais os denominadores são fatores de $Q(x)$. A soma é denominada *decomposição em frações parciais* de $P(x)/Q(x)$, e as parcelas são chamadas de *frações parciais*. Como em nosso exemplo de abertura, há duas etapas para se encontrar uma decomposição em frações parciais: determinar a forma exata da decomposição e encontrar as constantes desconhecidas.

■ ENCONTRANDO A FORMA DE UMA DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

O primeiro passo para encontrar a forma de uma decomposição em frações parciais de uma função racional própria $P(x)/Q(x)$ é fatorar completamente $Q(x)$ em fatores lineares, quadrá-

ticos e irreduzíveis e, então, juntar todos os fatores repetidos, de modo que $Q(x)$ seja expresso como um produto de fatores *distintos* da forma

$$(ax + b)^m \quad \text{e} \quad (ax^2 + bx + c)^n$$

A partir desses fatores, podemos determinar a forma da decomposição das frações parciais usando duas regras, que passamos a discutir.

■ FATORES LINEARES

Se todos os fatores de $Q(x)$ são lineares, então a decomposição em frações parciais de $P(x)/Q(x)$ pode ser determinada usando-se a seguinte regra:

REGRA DO FATOR LINEAR Para cada fator da forma $(ax + b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax + b)^m}$$

onde A_1, A_2, \dots, A_m são constantes a serem determinadas. No caso em que $m = 1$, aparece somente a primeira parcela da soma.

► **Exemplo 1** Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

Solução O integrando é uma função racional própria, que pode ser escrita como

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x - 1)(x + 2)}$$

Os fatores $x - 1$ e $x + 2$ são lineares e aparecem na primeira potência; assim, cada fator contribui com um termo na decomposição em frações parciais pela regra do fator linear. Desse modo, a decomposição tem a forma

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \quad (5)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Multiplicando ambos os membros de (5) por $(x - 1)(x + 2)$, obtemos

$$1 = A(x + 2) + B(x - 1) \quad (6)$$

Conforme discutido anteriormente, existem dois métodos para se encontrar A e B : podemos substituir valores de x escolhidos, de forma a anular termos à direita, ou podemos multiplicar o lado direito e equacionar coeficientes correspondentes nos dois lados para obter um sistema de equações que possa ser resolvido para A e B . Vamos usar a primeira abordagem.

Fazendo $x = 1$, o segundo termo em (6) desaparece e obtemos $1 = 3A$ ou $A = \frac{1}{3}$; fazendo $x = -2$, o primeiro termo em (6) desaparece e obtemos $1 = -3B$ ou $B = -\frac{1}{3}$. Substituindo esses valores em (5), obtemos a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x + 2}$$

A integração pode ser completada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 2} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{3} \ln|x + 2| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| + C \end{aligned}$$

Se os fatores de $Q(x)$ são lineares e nenhum é repetido, como no último exemplo, então o método recomendado para encontrar as constantes na decomposição em frações parciais é a substituição de valores apropriados de x para fazer desaparecer termos. Entretanto, se alguns dos fatores lineares são repetidos, então não será mais possível encontrar todas as constantes dessa forma. Nesse caso, o procedimento recomendado é encontrar tantas constantes quanto possível por substituição e, então, encontrar as demais equacionando os coeficientes. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 2 Calcule $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx$.

Solução O integrando pode ser reescrito como

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x-2)}$$

Embora x^2 seja um fator quadrático, não é irreduzível, pois $x^2 = x \cdot x$. Assim, pela regra do fator linear, x^2 introduz dois termos (uma vez que $m = 2$) da forma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

e o fator $x - 2$ introduz um termo (uma vez que $m = 1$) da forma

$$\frac{C}{x-2}$$

de modo que a decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \quad (7)$$

Multiplicando por $x^2(x-2)$, obtemos

$$2x+4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 \quad (8)$$

a qual, após a multiplicação e juntando-se as mesmas potências de x , fica

$$2x+4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B \quad (9)$$

Fazendo $x = 0$ em (8), desaparecem o primeiro e o terceiro termos; obtendo $B = -2$ e fazendo $x = 2$ em (8), o primeiro e o segundo termos desaparecem, resultando em $C = 2$ (verifique). Porém, não há substituição em (8) que produza A diretamente; portanto, fazemos uso da Equação (9) para encontrar esse valor. Isso pode ser feito equacionando-se os coeficientes de x^2 em ambos os lados para obter

$$A + C = 0 \quad \text{ou} \quad A = -C = -2$$

Substituindo os valores $A = -2$, $B = -2$ e $C = 2$ em (7), obtemos a decomposição em frações parciais

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} dx &= -2 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x-2} \\ &= -2 \ln|x| + \frac{2}{x} + 2 \ln|x-2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

■ FATORES QUADRÁTICOS

Se alguns dos fatores de $Q(x)$ são quadráticos irredutíveis, então sua contribuição para a decomposição em frações parciais de $P(x)/Q(x)$ pode ser determinada a partir da seguinte regra:

REGRA DO FATOR QUADRÁTICO Para cada fator da forma $(ax^2 + bx + c)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ são constantes a serem determinadas. No caso em que $m = 1$, aparece somente a primeira parcela da soma.

► **Exemplo 3** Calcule $\int \frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1} dx$.

Solução O denominador do integrando pode ser fatorado por agrupamento:

$$3x^3 - x^2 + 3x - 1 = x^2(3x - 1) + (3x - 1) = (3x - 1)(x^2 + 1)$$

Pela regra do fator linear, o fator $3x - 1$ introduz um termo, a saber,

$$\frac{A}{3x - 1}$$

e, pela regra do fator quadrático, o fator $x^2 + 1$ introduz um termo, a saber,

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Assim, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \quad (10)$$

Multiplicando ambos os membros de (10) por $(3x - 1)(x^2 + 1)$, obtemos

$$x^2 + x - 2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(3x - 1) \quad (11)$$

Poderíamos encontrar A substituindo $x = \frac{1}{3}$, o que faz desaparecer o último termo, e, então, determinar as constantes, equacionando os coeficientes correspondentes. Contudo, nesse caso é igualmente fácil encontrar *todas* as constantes, equacionando os coeficientes e resolvendo o sistema resultante. Com essa finalidade, multiplicamos o lado direito de (11) e juntamos as mesmas potências:

$$x^2 + x - 2 = (A + 3B)x^2 + (-B + 3C)x + (A - C)$$

Equacionando os coeficientes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} A + 3B &= 1 \\ -B + 3C &= 1 \\ A - C &= -2 \end{aligned}$$

Para resolver esse sistema, subtraímos a terceira equação da primeira para eliminar A . Então, usamos a equação resultante junto à segunda equação para obter B e C . Por fim, determinamos A a partir da primeira ou da terceira equação. Isso dá lugar a (verifique)

$$A = -\frac{7}{5}, \quad B = \frac{4}{5}, \quad C = \frac{3}{5}$$

Assim, (10) se torna

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{-\frac{7}{5}}{3x - 1} + \frac{\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}}{x^2 + 1}$$

e

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os CAS são programados para encontrar decomposições em frações parciais. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para encontrar as decomposições nos Exemplos 1, 2 e 3.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} dx &= -\frac{7}{5} \int \frac{dx}{3x - 1} + \frac{4}{5} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{7}{15} \ln|3x - 1| + \frac{2}{5} \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{5} \arctg x + C\end{aligned}\blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Calcule $\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} dx$.

Solução Observe que o integrando é uma função racional própria, uma vez que o numerador tem grau 4 e o denominador tem grau 5. Assim, o método das frações parciais é aplicável. Pela regra do fator linear, o fator $x + 2$ introduz o único termo

$$\frac{A}{x+2}$$

e, pela regra do fator quadrático, o fator $(x^2 + 3)^2$ introduz dois termos (uma vez que $m = 2$):

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}$$

Assim, a decomposição em frações parciais do integrando é

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2} \quad (12)$$

Multiplicando por $(x + 2)(x^2 + 3)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 &= A(x^2 + 3)^2 + (Bx + C)(x^2 + 3)(x + 2) + (Dx + E)(x + 2) \\ &= A(x^2 + 3)^2 + (Bx + C)(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + (Dx + E)(x + 2)\end{aligned} \quad (13)$$

a qual, após a multiplicação e juntando-se as mesmas potências de x , fica

$$\begin{aligned}3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 &= (A + B)x^4 + (2B + C)x^3 + (6A + 3B + 2C + D)x^2 \\ &\quad + (6B + 3C + 2D + E)x + (9A + 6C + 2E)\end{aligned} \quad (14)$$

Equacionando os coeficientes correspondentes em (14), obtemos o seguinte sistema de 5 equações lineares em 5 incógnitas:

$$\begin{aligned}A + B &= 3 \\ 2B + C &= 4 \\ 6A + 3B + 2C + D &= 16 \\ 6B + 3C + 2D + E &= 20 \\ 9A + 6C + 2E &= 9\end{aligned} \quad (15)$$

Métodos eficientes para a resolução de sistemas lineares como esse são estudados em uma área da Matemática denominada *Álgebra Linear*; tais métodos, no entanto, estão além do escopo deste livro. Porém, sistemas lineares de praticamente qualquer tamanho são resolvidos por computador, e a maioria dos CAS tem comandos que, em muitos casos, resolvem sistemas lineares com exatidão. Nesse caso em particular, podemos simplificar o trabalho efetuando

do primeiro a substituição $x = -2$ em (13), da qual resulta que $A = 1$. Substituindo esse valor de A em (15), teremos o sistema mais simples

$$\begin{aligned} B &= 2 \\ 2B + C &= 4 \\ 3B + 2C + D &= 10 \\ 6B + 3C + 2D + E &= 20 \\ 6C + 2E &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Esse sistema pode ser resolvido de cima para baixo, primeiro substituindo $B = 2$ na segunda equação para obter $C = 0$, depois substituindo os valores conhecidos de B e C na terceira equação para obter $D = 4$ e assim por diante. Dessa forma, obtemos

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 4, \quad E = 0$$

Portanto, (12) se torna

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

e assim

$$\begin{aligned} &\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{2x}{x^2+3} dx + 4 \int \frac{x}{(x^2+3)^2} dx \\ &= \ln|x+2| + \ln(x^2+3) - \frac{2}{x^2+3} + C \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ INTEGRANDO FUNÇÕES RACIONAIS IMPRÓPRIAS

Embora o método das frações parciais se aplique somente a funções racionais próprias, uma função racional imprópria pode ser integrada efetuando-se uma divisão e expressando-se a função como o quociente mais o resto sobre o divisor. O resto sobre o divisor será uma função racional própria, a qual pode, então, ser decomposta em frações parciais. Essa ideia está ilustrada no exemplo a seguir:

► Exemplo 5 Calcule $\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} dx$.

Solução O integrando é uma função racional imprópria, uma vez que o numerador tem grau 4 e o denominador tem grau 2. Assim, vamos primeiro efetuar a divisão:

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1 \mid x^2 + x - 2 \\ 3x^4 + 3x^3 - 6x^2 \qquad\qquad\qquad 3x^2 + 1 \\ \hline x^2 + x - 1 \\ \hline x^2 + x - 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Segue que o integrando pode ser expresso como

$$\frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = (3x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

e, portanto,

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} dx = \int (3x^2 + 1) dx + \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

A segunda integral à direita envolve uma função racional própria e pode ser calculada por uma decomposição em frações parciais. Usando o resultado do Exemplo 1, obtemos

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} dx = x^3 + x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad \blacktriangleleft$$

■ OBSERVAÇÕES FINAIS

Há alguns casos em que o método das frações parciais é inapropriado. Por exemplo, seria ineficiente usar frações parciais para efetuar a integração

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 8} dx = \ln|x^3 + 2x - 8| + C$$

já que é mais direta a substituição $u = x^3 + 2x - 8$. Analogamente, a integração

$$\int \frac{2x-1}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln(x^2+1) - \arctg x + C$$

requer somente um pouco de Álgebra, uma vez que o integrando já está na forma de frações parciais.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.5 (Ver página 523 para respostas.)

1. Uma fração parcial é uma função racional do tipo _____ ou do tipo _____.
2. (a) O que é uma função racional própria?
 (b) Qual é a condição que o grau do numerador e o grau do denominador de uma função racional devem satisfazer para que o método das frações parciais seja diretamente aplicável?
 (c) Se a condição de (b) não for satisfeita, o que deve ser feito para podermos utilizar as frações parciais?
3. Suponha que a função $f(x) = P(x)/Q(x)$ seja uma função racional própria.
 (a) Para cada fator de $Q(x)$ da forma $(ax+b)^m$, a decomposição em frações parciais de f contém a soma a seguir de m frações parciais: _____.
- (b) Para cada fator de $Q(x)$ da forma $(ax^2+bx+c)^m$, onde ax^2+bx+c é um polinômio quadrático irredutível, a decomposição em frações parciais de f contém a soma a seguir de m frações parciais: _____.
4. Complete a decomposição em frações parciais.
 - (a) $\frac{-3}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} - \frac{2}{2x-1}$
 - (b) $\frac{2x^2-3x}{(x^2+1)(3x+2)} = \frac{B}{3x+2} - \frac{1}{x^2+1}$
5. Calcule a integral.
 - (a) $\int \frac{3}{(x+1)(1-2x)} dx$
 - (b) $\int \frac{2x^2-3x}{(x^2+1)(3x+2)} dx$

EXERCÍCIOS 7.5 [C] CAS

- 1-8** Escreva a forma da decomposição em frações parciais. (Não calcule os valores numéricos dos coeficientes.) ■

1. $\frac{3x-1}{(x-3)(x+4)}$

2. $\frac{5}{x(x^2-4)}$

3. $\frac{2x-3}{x^3-x^2}$

4. $\frac{x^2}{(x+2)^3}$

5. $\frac{1-x^2}{x^3(x^2+2)}$

6. $\frac{3x}{(x-1)(x^2+6)}$

7. $\frac{4x^3-x}{(x^2+5)^2}$

8. $\frac{1-3x^4}{(x-2)(x^2+1)^2}$

- 9-34** Calcule a integral. ■

9. $\int \frac{dx}{x^2-3x-4}$

10. $\int \frac{dx}{x^2-6x-7}$

11. $\int \frac{11x+17}{2x^2+7x-4} dx$
12. $\int \frac{5x-5}{3x^2-8x-3} dx$
13. $\int \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} dx$
14. $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$
15. $\int \frac{x^2-8}{x+3} dx$
16. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$
17. $\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4} dx$
18. $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2} dx$
19. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-10} dx$
20. $\int \frac{3x+1}{3x^2+2x-1} dx$
21. $\int \frac{x^5+x^2+2}{x^3-x} dx$
22. $\int \frac{x^5-4x^3+1}{x^3-4x} dx$
23. $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} dx$
24. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2} dx$

25. $\int \frac{2x^2 - 10x + 4}{(x+1)(x-3)^2} dx$

27. $\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$

29. $\int \frac{2x^2 - 1}{(4x-1)(x^2+1)} dx$

31. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + x + 9}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$

33. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1} dx$

34. $\int \frac{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x}{x^2 + 6x + 10} dx$

35-38 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

35. A técnica das frações parciais é usada com integrais cujos integrandos são quocientes de polinômios.

36. O integrando em

$$\int \frac{3x^4 + 5}{(x^2 + 1)^2} dx$$

é uma função racional própria.

37. A decomposição em frações parciais de

$$\frac{2x+3}{x^2} \text{ é } \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$$

38. Se $f(x) = P(x)/(x+5)^3$ for uma função racional própria, então a decomposição em frações parciais de $f(x)$ tem termos com numeradores constantes e denominadores $(x+5)$, $(x+5)^2$ e $(x+5)^3$.

39-42 Calcule a integral fazendo a substituição que converte o integrando em uma função racional. ■

39. $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 5} d\theta$

40. $\int \frac{e^t}{e^{2t} - 4} dt$

41. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 4} dx$

42. $\int \frac{5 + 2 \ln x}{x(1 + \ln x)^2} dx$

43. Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = x^2/(9-x^2)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ gira em torno do eixo x .

44. Encontre a área da região sob a curva $y = 1/(1+e^x)$ acima do intervalo $[-\ln 5, \ln 5]$. [Sugestão: Faça uma substituição que converta o integrando em uma função racional.]

C 45-46 Use um CAS para calcular a integral de duas maneiras: (i) integrando diretamente e (ii) encontrando a decomposição. Integre à mão para verificar os resultados. ■

45. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$

46. $\int \frac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)^3} dx$

C 47-48 Integre à mão e verifique sua resposta usando um CAS. ■

47. $\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}$

48. $\int \frac{dx}{16x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$

ENFOCANDO CONCEITOS

49. Mostre que

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{8}$$

50. Use frações parciais para deduzir a fórmula de integração

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

51. Suponha que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrático e que a integração de

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

produza uma função sem termos trigonométricos inversos. O que isso nos diz sobre as raízes do polinômio?

52. Suponha que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrático e que a integração de

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

produza uma função sem termos logarítmicos e sem termos com arco tangente. O que isso nos diz sobre as raízes do polinômio?

53. Existe algum polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ tal que a integração de

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx$$

produza uma função sem termos logarítmicos? Se existir, dê um exemplo; se não, explique por que não pode existir tal polinômio.

54. **Texto** Suponha que $P(x)$ seja um polinômio cúbico. Enuncie uma forma geral da decomposição em frações parciais de

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x+5)^4}$$

e enuncie as implicações dessa decomposição para o cálculo da integral $\int f(x) dx$.

55. **Texto** Considere as funções

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \text{ e } g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Cada uma das integrais $\int f(x) dx$ e $\int g(x) dx$ pode ser calculada usando frações parciais e pelo menos uma outra técnica de integração. Demonstre duas técnicas diferentes para calcular cada uma dessas integrais e, em seguida, discuta as considerações que determinariam qual dessas técnicas você usaria.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.5

1. $\frac{A}{(ax+b)^k}; \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$
2. (a) Uma função racional própria é uma função racional cujo denominador tem grau maior do que o grau do numerador. (b) O grau do numerador deve ser menor do que o do denominador. (c) Divida o numerador pelo denominador, o que resulta na soma de um polinômio com uma função racional própria.
3. (a) $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$
- (b) $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$
4. (a) $A = 1$ (b) $B = 2$
5. (a) $\int \frac{3}{(x+1)(1-2x)} dx = \ln \left| \frac{x+1}{1-2x} \right| + C$ (b) $\int \frac{2x^2-3x}{(x^2+1)(3x+2)} dx = \frac{2}{3} \ln |3x+2| - \arctg x + C$

7.6 O USO DE SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS E DE TABELAS DE INTEGRAIS

Nesta seção, discutiremos como integrar usando tabelas e veremos algumas substituições especiais que podem ser testadas quando uma integral não é parecida com nenhuma de alguma tabela de integrais. Em particular, discutiremos um método para integrar funções racionais de $\sin x$ e de $\cos x$. Além disso, também trataremos de alguns assuntos relacionados ao uso de sistemas algébricos de computação para integração. Os leitores que não estão usando sistemas algébricos computacionais podem ignorar aquele material.

■ TABELAS DE INTEGRAIS

As tabelas de integrais são úteis para eliminar a necessidade de fazer longos cálculos à mão. As últimas páginas deste livro contêm uma tabela de integrais relativamente breve, à qual iremos nos referir como **Tabela de Integrais**; tabelas mais abrangentes estão publicadas em muitos livros.

Todas as tabelas de integrais têm seu próprio sistema de classificação, de acordo com a forma do integrando. Por exemplo, a Tabela de Integrais classifica as integrais em 15 categorias; *Funções Básicas, Recíprocos das Funções Básicas, Potências de Funções Trigonométricas, Produtos de Funções Trigonométricas* e assim por diante. O primeiro passo ao trabalhar com tabelas é ler toda a classificação, de forma a compreender o esquema de classificação e saber onde buscar diferentes tipos de integrais.

■ ACERTOS TOTAIS

Se tivermos sorte, a integral que estamos tentando calcular será exatamente igual a uma das formas na tabela. Porém, ao procurar acertos, podemos ter de fazer algum ajuste na variável de integração. Por exemplo, a integral

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

é um acerto total com a Fórmula (46) da Tabela de Integrais, exceto pela letra usada na variável de integração. Assim, para aplicar a Fórmula (46) à integral dada, é necessário mudar a variável de integração na fórmula de u para x . Com essa modificação mínima, obtemos

$$\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x + C$$

Aqui estão alguns outros exemplos de acertos totais.

► **Exemplo 1** Use a Tabela de Integrais para calcular

$$(a) \int \sin 7x \cos 2x \, dx \quad (b) \int x^2 \sqrt{7+3x} \, dx$$

$$(c) \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x} \, dx \quad (d) \int (x^3 + 7x + 1) \sin \pi x \, dx$$

Solução (a) O integrando pode ser classificado como um produto de funções trigonométricas. Assim, a partir da Fórmula (40), com $m = 7$ e $n = 2$, obtemos

$$\int \sin 7x \cos 2x \, dx = -\frac{\cos 9x}{18} - \frac{\cos 5x}{10} + C$$

Solução (b) O integrando pode ser classificado como uma potência de x multiplicando $\sqrt{a+bx}$. Assim, a partir da Fórmula (103), com $a = 7$ e $b = 3$, obtemos

$$\int x^2 \sqrt{7+3x} \, dx = \frac{2}{2.835} (135x^2 - 252x + 392)(7+3x)^{3/2} + C$$

Solução (c) O integrando pode ser classificado como uma potência de x dividindo $\sqrt{a^2-x^2}$. Assim, a partir da Fórmula (79), com $a = \sqrt{2}$, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x} \, dx = \sqrt{2-x^2} - \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-x^2}}{x} \right| + C$$

Solução (d) O integrando pode ser classificado como um polinômio multiplicando uma função trigonométrica. Assim, aplicamos a Fórmula (58) com $p(x) = x^3 + 7x + 1$ e $a = \pi$. As derivadas sucessivas não nulas de $p(x)$ são

$$p'(x) = 3x^2 + 7, \quad p''(x) = 6x, \quad p'''(x) = 6$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 7x + 1) \sin \pi x \, dx \\ = -\frac{x^3 + 7x + 1}{\pi} \cos \pi x + \frac{3x^2 + 7}{\pi^2} \sin \pi x + \frac{6x}{\pi^3} \cos \pi x - \frac{6}{\pi^4} \sin \pi x + C \end{aligned} \blacktriangleleft$$

■ ACERTOS QUE REQUEREM SUBSTITUIÇÕES

Às vezes, uma integral não encontrada na tabela pode tornar-se um acerto total através de uma substituição apropriada.

► **Exemplo 2** Use a Tabela de Integrais para calcular

$$(a) \int e^{\pi x} \operatorname{sen}^{-1}(e^{\pi x}) \, dx \quad (b) \int x \sqrt{x^2 - 4x + 5} \, dx$$

Solução (a) O integrando não está nem perto de qualquer uma das formas na tabela. Porem, pensando um pouco, chegamos à substituição

$$u = e^{\pi x}, \quad du = \pi e^{\pi x} \, dx$$

da qual obtemos

$$\int e^{\pi x} \arcsen(e^{\pi x}) dx = \frac{1}{\pi} \int \arcsen u du$$

O integrando é, agora, uma função básica, e a Fórmula (7) dá lugar a

$$\begin{aligned}\int e^{\pi x} \arcsen(e^{\pi x}) dx &= \frac{1}{\pi} \left[u \arcsen u + \sqrt{1 - u^2} \right] + C \\ &= \frac{1}{\pi} \left[e^{\pi x} \arcsen(e^{\pi x}) + \sqrt{1 - e^{2\pi x}} \right] + C\end{aligned}$$

Solução (b) Novamente, o integrando não está nem perto de qualquer uma das formas na tabela. No entanto, pensando um pouco, podemos concluir que é possível trazê-lo perto da forma $x\sqrt{x^2 + a^2}$ completando o quadrado para eliminar o termo que envolve o x dentro do radical. Fazendo isso, temos

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx = \int x\sqrt{(x^2 - 4x + 4) + 1} dx = \int x\sqrt{(x - 2)^2 + 1} dx \quad (1)$$

Nesse ponto, estamos mais próximos da forma $x\sqrt{x^2 + a^2}$, mas não temos um acerto, pois temos $(x - 2)^2$ em vez de x^2 dentro do radical. Contudo, podemos resolver esse problema com a substituição

$$u = x - 2, \quad du = dx$$

Com essa substituição, temos que $x = u + 2$, logo (1) pode ser expressa em termos de u como

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx = \int (u + 2)\sqrt{u^2 + 1} du = \int u\sqrt{u^2 + 1} du + 2 \int \sqrt{u^2 + 1} du$$

A primeira integral à direita é um acerto total com a Fórmula (84) com $a = 1$, e a segunda é um acerto total com a Fórmula (72) com $a = 1$. Assim, aplicando essas fórmulas, obtemos

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx = \frac{1}{3}(u^2 + 1)^{3/2} + 2 \left[\frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) \right] + C$$

Se, agora, substituirmos u por $x - 2$ (nesse caso, $u^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$), obtemos

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx &= \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 5)^{3/2} + (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ &\quad + \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) + C\end{aligned}$$

Embora correta, essa forma de resposta tem uma mistura desnecessária de radicais e expoentes fracionários. Caso desejemos, podemos “limpar” a resposta escrevendo

$$(x^2 - 4x + 5)^{3/2} = (x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

do que segue (verifique)

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx &= \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ &\quad + \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) + C \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ ACERTOS QUE REQUEREM FÓRMULAS DE REDUÇÃO

Nos casos em que a entrada em uma tabela de integral é uma fórmula de redução, devemos primeiro aplicar a fórmula, para reduzir a integral dada a uma forma na qual possa ser calculada.

► **Exemplo 3** Use a Tabela de Integrais das Capas para calcular $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x}} dx$.

Solução O integrando pode ser classificado como uma potência de x multiplicando o recíproco de $\sqrt{a+bx}$. Assim, a partir da Fórmula (107), com $a = 1$, $b = 1$ e $n = 3$, seguida pela Fórmula (106), obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x}} dx &= \frac{2x^3\sqrt{1+x}}{7} - \frac{6}{7} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \frac{2x^3\sqrt{1+x}}{7} - \frac{6}{7} \left[\frac{2}{15}(3x^2 - 4x + 8)\sqrt{1+x} \right] + C \\ &= \left(\frac{2x^3}{7} - \frac{12x^2}{35} + \frac{16x}{35} - \frac{32}{35} \right) \sqrt{1+x} + C \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ SUBSTITUIÇÕES ESPECIAIS

A Tabela de Integrais tem várias entradas envolvendo um expoente de $3/2$ ou raízes quadradas (expoente $1/2$), mas não entradas com outros expoentes fracionários. Porém, integrais envolvendo potências fracionárias de x podem, frequentemente, ser simplificadas fazendo-se a substituição $u = x^{1/n}$, na qual n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes. A integral resultante, então, envolve potências inteiras de u .

► **Exemplo 4** Calcule

$$(a) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx \quad (b) \int \sqrt{1 + e^x} dx$$

Solução (a) O integrando contém $x^{1/2}$ e $x^{1/3}$; portanto, fazemos a substituição $u = x^{1/6}$, da qual obtemos

$$x = u^6, \quad dx = 6u^5 du$$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{(u^6)^{1/2}}{1 + (u^6)^{1/3}} (6u^5) du = 6 \int \frac{u^8}{1 + u^2} du$$

Dividindo, obtemos

$$\frac{u^8}{1 + u^2} = u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1 + u^2}$$

do que segue

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= 6 \int \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1 + u^2} \right) du \\ &= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + 6 \operatorname{arc tg} u + C \\ &= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6 \operatorname{arc tg}(x^{1/6}) + C\end{aligned}$$

Solução (b) Novamente, a integral não acerta nenhuma das formas da Tabela de Integrais. Porém, a tabela inclui várias integrais contendo $\sqrt{a+bu}$. Isso sugere a substituição $u = e^x$, da qual obtemos

$$x = \ln u, \quad dx = \frac{1}{u} du$$

Assim, pela Fórmula (110) com $a = 1$ e $b = 1$, seguido pela Fórmula (108), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1+e^x} dx &= \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du \\
 &= 2\sqrt{1+u} + \int \frac{du}{u\sqrt{1+u}} \\
 &= 2\sqrt{1+u} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt{1+u}+1} \right| + C \\
 &= 2\sqrt{1+e^x} + \ln \left[\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right] + C
 \end{aligned}$$

Não é necessário valor absoluto ◀

Tente encontrar uma antiderivada no Exemplo 4(b) usando a substituição

$$u = \sqrt{1+e^x}$$

As funções que consistem em um número finito de somas, diferenças, quocientes e produtos de $\sin x$ e $\cos x$ são chamadas de **funções racionais de seno e cosseno**. Alguns exemplos são

$$\frac{\sin x + 3 \cos^2 x}{\cos x + 4 \sin x}, \quad \frac{\sin x}{1 + \cos x - \cos^2 x}, \quad \frac{3 \sin^5 x}{1 + 4 \sin x}$$

A Tabela de Integrais oferece algumas fórmulas para integrar funções racionais de seno e cosseno com o título *Recíprocos de Funções Básicas*. Por exemplo, tem-se, a partir da Fórmula (18), que

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \operatorname{tg} x - \sec x + C \quad (2)$$

Porém, uma vez que o integrando é uma função racional de seno, pode ser desejável, em uma dada aplicação, expressar o valor da integral em termos de seno e cosseno e reescrever (2) como

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + C$$

Muitas funções racionais de seno e cosseno podem ser calculadas através de um engenhoso método, descoberto pelo matemático Karl Weierstrass (ver página 102 para uma biografia). A ideia é fazer a substituição

$$u = \operatorname{tg}(x/2), \quad -\pi/2 < x/2 < \pi/2$$

da qual tem-se que

$$x = 2 \operatorname{arc tg} u, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

Para implementar essa substituição, precisamos expressar $\sin x$ e $\cos x$ em termos de u . Para isso, usaremos as identidades

$$\sin x = 2 \operatorname{sen}(x/2) \operatorname{cos}(x/2) \quad (3)$$

$$\cos x = \operatorname{cos}^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) \quad (4)$$

e a seguinte relação sugerida pela Figura 7.6.1:

$$\operatorname{sen}(x/2) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

Substituindo essas expressões em (3) e (4), obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x &= 2 \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right) = \frac{2u}{1+u^2} \\
 \operatorname{cos} x &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}
 \end{aligned}$$

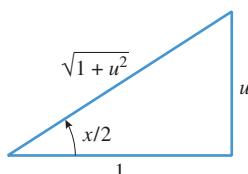


Figura 7.6.1

Em suma, mostramos que a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ pode ser implementada em uma função racional de $\sin x$ e $\cos x$, fazendo

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du \quad (5)$$

► **Exemplo 5** Calcule $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$.

Solução O integrando é uma função racional de $\sin x$ e $\cos x$, que não acerta qualquer fórmula da Tabela de Integrais, de modo que fazemos a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$. Assim, a partir de (5), obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+u^2} du}{1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right) + \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\ &= \int \frac{2 du}{(1+u^2) - 2u + (1-u^2)} \\ &= \int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u| + C = -\ln|1-\operatorname{tg}(x/2)| + C \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

A substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ irá converter qualquer função racional de $\sin x$ e $\cos x$ em uma função racional ordinária de u . No entanto, o método pode levar a decomposições em frações parciais complicadas, de modo que pode valer a pena considerar outras alternativas mais simples quando se estiver calculando à mão.

■ INTEGRANDO COM SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

As tabelas de integrais estão dando lugar, rapidamente, à integração computadorizada de sistemas algébricos computacionais. Contudo, como ocorre com muitas ferramentas poderosas, um componente importante do sistema é um operador que conheça esse sistema.

Algumas vezes, os sistemas algébricos computacionais não fornecem a forma mais geral da integral indefinida. Por exemplo, a fórmula integral

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

que pode ser obtida facilmente à mão ou, no máximo, usando a substituição $u = x-1$, é válida com $x > 1$ ou $x < 1$. Contudo, nem todos os sistemas algébricos computacionais produzem a resposta nessa forma. Algumas respostas típicas produzidas por várias versões de *Mathematica* e *Maple* são

$$\ln(-1+x), \quad \ln(x-1), \quad \ln(|x-1|)$$

Observe que nenhum dos sistemas inclui a constante de integração, de modo que a resposta produzida é uma antiderivada particular e não a antiderivada mais geral (integral indefinida). Observe também que somente uma dessas respostas inclui os sinais de valor absoluto; as antiderivadas produzidas pelos outros sistemas são válidas somente com $x > 1$. Entretanto, todos os sistemas são capazes de calcular corretamente a integral definida

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x-1} = -\ln 2$$

Vejamos, agora, como esses sistemas tratam a integral

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 - 4x + 5} dx &= \frac{1}{3}(x^2 - x - 1)\sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ &\quad + \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) \end{aligned} \quad (6)$$

que obtivemos no Exemplo 2(b) com a constante de integração. Algumas versões de CAS produzem esse resultado em formas algébricas ligeiramente diferentes, mas uma versão do *Maple* dá o resultado

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 5)^{3/2} + \frac{1}{2}(2x - 4)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \text{arc senh}(x - 2)$$

Expressando o expoente fracionário em formato de raiz e o $\text{arc senh}(x - 2)$ em forma logarítmica usando o Teorema 6.9.4, podemos reescrever isso como (6) (verifique). Uma versão do *Mathematica* produz o resultado

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} dx = \frac{1}{3}(x^2 - x - 1)\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \text{arc senh}(2 - x)$$

que pode ser reescrito na forma (6) usando o Teorema 6.9.4 junto com a identidade $\text{arc senh}(-x) = -\text{arc senh } x$ (verifique).

Às vezes, os sistemas algébricos computacionais produzem respostas inconvenientes ou que não são naturais em problemas de integração. Por exemplo, vários sistemas algébricos computacionais forneceram as respostas a seguir quando solicitados a integrar $(x + 1)^7$:

$$\frac{(x + 1)^8}{8}, \quad \frac{1}{8}x^8 + x^7 + \frac{7}{2}x^6 + 7x^5 + \frac{35}{4}x^4 + 7x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x \quad (7)$$

A primeira resposta está de acordo com o resultado calculado à mão

$$\int (x + 1)^7 dx = \frac{(x + 1)^8}{8} + C$$

que usa a substituição $u = x + 1$, enquanto a segunda forma provém da expansão de $(x + 1)^7$ e da integração termo a termo.

No Exemplo 2(a) da Seção 7.3, mostramos que

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C$$

Contudo, uma versão do *Mathematica* integra isso como

$$\frac{3}{128} \sin x - \frac{1}{192} \sin 3x - \frac{1}{320} \sin 5x + \frac{1}{1792} \sin 7x + \frac{1}{2304} \sin 9x$$

enquanto outros sistemas algébricos computacionais integram isso, essencialmente, como

$$-\frac{1}{9} \sin^3 x \cos^6 x - \frac{1}{21} \sin x \cos^6 x + \frac{1}{105} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{315} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{315} \sin x$$

Embora esses três resultados pareçam bem diferentes, eles realmente podem ser obtidos um do outro utilizando identidades trigonométricas apropriadas.

■ OS SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS TÊM LIMITAÇÕES

Um sistema algébrico computacional combina uma coleção de regras de integração (como a substituição) com uma biblioteca de funções que podem ser utilizadas para construir antiderivadas. Essas bibliotecas contêm funções elementares como polinômios, funções racionais e funções trigonométricas, bem como várias funções não elementares que surgem na Engenharia, na Física e em outras áreas aplicadas. Assim como nossa Tabela de Integrais tem apenas 121 integrais indefinidas, essas bibliotecas de CAS não cobrem todas as integrais possíveis. Se o sistema não conseguir manipular o integrando para torná-lo igual a um de sua biblioteca, o programa dará alguma indicação de que é incapaz de calcular a integral. Por exemplo, quando solicitamos calcular a integral

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2} dx \quad (8)$$

todos os sistemas mencionados anteriormente respondem exibindo alguma forma não calculada dessa integral como resposta, indicando que não conseguiram efetuar a integração.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Às vezes, uma integral que não pode ser calculada por um CAS na forma em que foi dada pode ser calculada depois de reescrita em um formato diferente ou depois de uma substituição. Se o leitor dispuser de um CAS, faça uma substituição u em (8) que permita ao CAS calcular a integral. Então, proceda ao cálculo dela.

Alguns sistemas algébricos computacionais respondem a uma integração com outra integral. Por exemplo, se tentarmos integrar e^{x^2} com o *Mathematica*, o *Maple* ou o *Sage*, obteremos alguma expressão envolvendo erf (a sigla da *função erro*, em inglês). A função erf(x) é definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

e, portanto, os três programas essencialmente só reescrevem a integral em termos de uma outra integral relacionada. De certa forma, é exatamente isso que fizemos para integrar $1/x$, pois a função logaritmo natural é (formalmente) definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

(ver Seção 5.10).

► Exemplo 6 Uma partícula se move ao longo do eixo x de tal forma que sua velocidade $v(t)$ no instante t é

$$v(t) = 30 \cos^7 t \sin^4 t \quad (t \geq 0)$$

Faça o gráfico da curva posição *versus* tempo para a partícula, sabendo que ela está em $x = 1$ quando $t = 0$.

Solução Como $dx/dt = v(t)$ e $x = 1$ quando $t = 0$, a função posição $x(t)$ é dada por

$$x(t) = 1 + \int_0^t v(s) ds$$

Alguns sistemas algébricos computacionais permitem que se obtenha um gráfico digitando diretamente essa expressão, mas em geral é mais eficiente efetuar antes a integração. Uma calculadora fornece

$$\begin{aligned} x &= \int 30 \cos^7 t \sin^4 t dt \\ &= -\frac{30}{11} \sin^{11} t + 10 \sin^9 t - \frac{90}{7} \sin^7 t + 6 \sin^5 t + C \end{aligned}$$

onde somamos a constante de integração requerida. Usando a condição inicial $x(0) = 1$, substituímos os valores $x = 1$ e $t = 0$ nessa equação para encontrar $C = 1$, de modo que

$$x(t) = -\frac{30}{11} \sin^{11} t + 10 \sin^9 t - \frac{90}{7} \sin^7 t + 6 \sin^5 t + 1 \quad (t \geq 0)$$

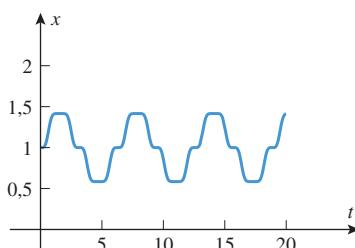


Figura 7.6.2

O gráfico de x *versus* t aparece na Figura 7.6.2. ◀

✓ EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 7.6 (Ver página 533 para respostas.)

- Encontre uma fórmula integral na Tabela de Integrais que possa ser usada para calcular a integral. Não calcule a integral.
 - $\int \frac{2x}{3x+4} dx$ _____
 - $\int \frac{1}{x\sqrt{5x-4}} dx$ _____
 - $\int x\sqrt{3x+2} dx$ _____
 - $\int x^2 \ln x dx$ _____
- Em cada parte, faça uma substituição u e, então, encontre uma fórmula integral na Tabela de Integrais que possa ser usada para calcular a integral. Não calcule a integral.
 - $\int \frac{x}{1+e^{x^2}} dx$; $u = x^2$ _____
 - $\int e^{\sqrt{x}} dx$; $u = \sqrt{x}$ _____
 - $\int \frac{e^x}{1+\sin(e^x)} dx$; $u = e^x$ _____
 - $\int \frac{1}{(1-4x^2)^{3/2}} dx$; $u = 2x$ _____

3. Em cada parte, use a Tabela de Integrais para calcular a integral. (Se necessário, faça primeiro uma substituição apropriada ou complete o quadrado.)

(a) $\int \frac{1}{4-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\int \cos 2x \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\int \frac{x}{x^2-4x+8} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 7.6 [C] CAS

- [C] 1-24 (a) Use a Tabela de Integrais para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral e, então, confirme que o resultado é equivalente ao que foi obtido em (a). ■

1. $\int \frac{4x}{3x-1} dx$

2. $\int \frac{x}{(4-5x)^2} dx$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} dx, u = 2x$

3. $\int \frac{1}{x(2x+5)} dx$

4. $\int \frac{1}{x^2(1-5x)} dx$

30. $\int x\sqrt{2x^4+3} dx, u = \sqrt{2}x^2$

5. $\int x\sqrt{2x+3} dx$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx$

31. $\int \frac{4x^5}{\sqrt{2-4x^4}} dx, u = 2x^2$

7. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-3x}} dx$

8. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x-4}} dx$

32. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{3-4x^2}} dx, u = 2x$

9. $\int \frac{1}{16-x^2} dx$

10. $\int \frac{1}{x^2-9} dx$

33. $\int \frac{\sin^2(\ln x)}{x} dx, u = \ln x$

11. $\int \sqrt{x^2-3} dx$

12. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2} dx$

34. $\int e^{-2x} \cos^2(e^{-2x}) dx, u = e^{-2x}$

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx$

14. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-2}} dx$

35. $\int xe^{-2x} dx, u = -2x$

15. $\int \sqrt{9-x^2} dx$

16. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

36. $\int \ln(3x+1) dx, u = 3x+1$

17. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

18. $\int \frac{1}{x\sqrt{6x-x^2}} dx$

19. $\int \sin 3x \sin 4x dx$

20. $\int \sin 2x \cos 5x dx$

37. $\int \frac{\cos 3x}{(\sin 3x)(\sin 3x+1)^2} dx$

21. $\int x^3 \ln x dx$

22. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}} dx$

38. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{4\ln x-1}} dx$

23. $\int e^{-2x} \sin 3x dx$

24. $\int e^x \cos 2x dx$

39. $\int \frac{x}{16x^4-1} dx$

40. $\int \frac{e^x}{3-4e^{2x}} dx$

41. $\int e^x \sqrt{3-4e^{2x}} dx$

42. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x^2} dx$

43. $\int \sqrt{5x-9x^2} dx$

44. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-5x^2}} dx$

45. $\int 4x \sin 2x dx$

46. $\int \cos \sqrt{x} dx$

47. $\int e^{-\sqrt{x}} dx$

48. $\int x \ln(2+x^2) dx$

- [C] 25-36 (a) Faça a substituição u indicada e, então, use a Tabela de Integrais para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral e, então, prove que o resultado é equivalente ao encontrado em (a). ■

25. $\int \frac{e^{4x}}{(4-3e^{2x})^2} dx, u = e^{2x}$

49. $\int \frac{1}{x^2+6x-7} dx$

26. $\int \frac{\sin 2x}{(\cos 2x)(3-\cos 2x)} dx, u = \cos 2x$

50. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(9x+4)} dx, u = 3\sqrt{x}$

28. $\int \frac{\cos 4x}{9+\sin^2 4x} dx, u = \sin 4x$

49. $\int \frac{1}{x^2+6x-7} dx$

50. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$

- [C] 49-52 (a) Complete o quadrado, faça uma substituição u adequada e, então, use a Tabela de Integrais para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral (sem completar quadrados e sem substituições) e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a). ■

51. $\int \frac{x}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$

52. $\int \frac{x}{x^2+6x+13} dx$

C 53-64 (a) Faça uma substituição u apropriada da forma $u = x^{1/n}$ ou $u = (x+a)^{1/n}$ e, então, calcule a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a). ■

53. $\int x\sqrt{x-2} dx$

54. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

55. $\int x^5\sqrt{x^3+1} dx$

56. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}} dx$

57. $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

59. $\int \frac{dx}{x(1-x^{1/4})}$

60. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

61. $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/3}}$

62. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$

63. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

64. $\int \frac{x}{(x+3)^{1/5}} dx$

C 65-70 (a) Faça a substituição u dada por (5) para converter o integrando em uma função racional de u e, então, calcule a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral (sem usar substituições) e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a). ■

65. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

66. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

67. $\int \frac{d\theta}{1-\cos \theta}$

68. $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x}$

69. $\int \frac{dx}{\sin x+\tan x}$

70. $\int \frac{\sin x}{\sin x+\tan x} dx$

71-72 Use qualquer método para resolver em x . ■

71. $\int_2^x \frac{1}{t(4-t)} dt = 0,5, \quad 2 < x < 4$

72. $\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{2t-1}} dt = 1, \quad x > \frac{1}{2}$

73-76 Use qualquer método para encontrar a área da região delimitada pelas curvas. ■

73. $y = \sqrt{25-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

74. $y = \sqrt{9x^2-4}, \quad y = 0, \quad x = 2$

75. $y = \frac{1}{25-16x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

76. $y = \sqrt{x} \ln x, \quad y = 0, \quad x = 4$

77-80 Use qualquer método para encontrar o volume do sólido gerado quando a região delimitada pelas curvas gira em torno do eixo y . ■

77. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

78. $y = \sqrt{x-4}, \quad y = 0, \quad x = 8$

79. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$

80. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 5$

81-82 Use qualquer método para encontrar o comprimento de arco da curva. ■

81. $y = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$

82. $y = 3 \ln x, \quad 1 \leq x \leq 3$

83-84 Use qualquer método para encontrar a área da superfície gerada fazendo a curva girar em torno do eixo x . ■

83. $y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

84. $y = 1/x, \quad 1 \leq x \leq 4$

C 85-86 É dada informação sobre o movimento de uma partícula ao longo de um eixo.

(a) Use um CAS para encontrar a função posição da partícula com $t \geq 0$.

(b) Faça o gráfico da curva posição *versus* tempo. ■

85. $v(t) = 20 \cos^6 t \sin^3 t, \quad s(0) = 2$

86. $a(t) = e^{-t} \sin 2t \sin 4t, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = 10$

ENFOCANDO CONCEITOS

87. (a) Use a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ para mostrar que

$$\int \sec x dx = \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)} \right| + C$$

e confirme que isso é consistente com a Fórmula (22) da Seção 7.3.

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que

$$\int \sec x dx = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| + C$$

88. Use a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ para mostrar que

$$\int \operatorname{cossec} x dx = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right] + C$$

e confirme que isso é consistente com o resultado do Exercício 65(a) da Seção 7.3.

89. Encontre uma substituição que possa ser usada para integrar uma função racional de $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ e a use para calcular

$$\int \frac{dx}{2\cosh x + \operatorname{senh} x}$$

sem expressar a integral em termos de e^x e e^{-x} .

C 90-93 Algumas integrais que podem ser calculadas à mão não podem ser calculadas por todos os sistemas algébricos computacionais. Calcule a integral à mão e verifique se pode ser calculada com um CAS. ■

90. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$

91. $\int (\cos^{32} x \operatorname{sen}^{30} x - \cos^{30} x \operatorname{sen}^{32} x) dx$

92. $\int \sqrt{x-\sqrt{x^2-4}} dx$ [Sugestão: $\frac{1}{2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^2 = ?$]

93. $\int \frac{1}{x^{10} + x} dx$

[Sugestão: Reescreva o denominador como $x^{10}(1 + x^{-9})$.]

c 94. Seja

$$f(x) = \frac{-2x^5 + 26x^4 + 15x^3 + 6x^2 + 20x + 43}{x^6 - x^5 - 18x^4 - 2x^3 - 39x^2 - x - 20}$$

- (a) Use um CAS para fatorar o denominador e, então, escreva a forma da decomposição em frações parciais. Não é necessário encontrar o valor das constantes.
- (b) Confira sua resposta em (a) usando um CAS para encontrar a decomposição em frações parciais de f .
- (c) Integre f à mão e, então, confira sua resposta integrando f com um CAS.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.6

1. (a) Fórmula (60) (b) Fórmula (108) (c) Fórmula (102) (d) Fórmula (50)

(c) Fórmula (18) (d) Fórmula (97) 3. (a) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$ (b) $\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + C$ (c) $-\frac{e^x}{2} \sqrt{1-e^{2x}} + \frac{1}{2} \arcsin e^x + C$

(d) $\frac{1}{2} \ln (x^2 - 4x + 8) + \arctg \frac{x-2}{2} + C$

2. (a) Fórmula (25) (b) Fórmula (51)

7.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA; REGRA DE SIMPSON

Quando for necessário calcular uma integral definida de uma função para a qual não pudermos encontrar uma antiderivada, precisamos nos contentar com algum tipo de aproximação numérica dessa integral. Na Seção 5.4, consideramos três dessas aproximações no contexto de áreas: as aproximações pela extremidade esquerda, pela extremidade direita e pelo ponto médio. Nesta seção, estenderemos esses métodos para integrais definidas em geral e desenvolveremos alguns métodos novos que, frequentemente, fornecem uma maior precisão com menos cálculo. Também discutiremos os erros que surgem em aproximações de integrais.

■ UMA REVISÃO DA APROXIMAÇÃO POR SOMAS DE RIEMANN

Lembre que na Seção 5.5 foi visto que a integral definida de uma função contínua f sobre um intervalo $[a, b]$ pode ser calculada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

onde a soma que aparece do lado direito é chamada de soma de Riemann. Nessa fórmula, Δx_k é o comprimento do k -ésimo subintervalo de uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ em n subintervalos e x_k^* denota um ponto arbitrário do k -ésimo intervalo. Se tomarmos todos os subintervalos com o mesmo comprimento, ou seja, com $x_k = (b-a)/n$, então, quando n cresce, as somas de Riemann acabam sendo boas aproximações da integral definida. Denotamos isso escrevendo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{b-a}{n} \right) [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \quad (1)$$

Se os valores de f nos extremos dos subintervalos forem denotados por

$$y_0 = f(a), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \dots, \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \quad y_n = f(x_n)$$

e os valores de f nos pontos médios dos subintervalos por

$$y_{m_1}, y_{m_2}, \dots, y_{m_n}$$

então segue de (1) que as aproximações pela extremidade esquerda, pela extremidade direita e pelo ponto médio, discutidas na Seção 5.4, podem ser expressas conforme indicado na Ta-

Tabela 7.7.1

APROXIMAÇÃO PELA EXTREMIDADE ESQUERDA	APROXIMAÇÃO PELA EXTREMIDADE DIREITA	APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO
$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}]$	$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_1 + y_2 + \dots + y_n]$	$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_{m_1} + y_{m_2} + \dots + y_{m_n}]$

bela 7.7.1. Embora tenhamos obtido esses resultados para funções não negativas no contexto de aproximação de áreas, elas são aplicáveis a qualquer função que seja contínua em $[a, b]$.

■ APROXIMAÇÃO TRAPEZOIDAL

Nesta seção, convém denotar as aproximações com n subintervalos pela extremidade esquerda, pela extremidade direita e pelo ponto médio, respectivamente, por L_n , R_n e M_n . Dessas três, a aproximação pelo ponto médio é a mais utilizada em aplicações. Se tomarmos a média de L_n e R_n , obteremos uma outra aproximação importante, denominada por

$$T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n)$$

e denominada *aproximação trapezoidal*:

Aproximação Trapezoidal

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \left(\frac{b-a}{2n}\right) [y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n] \quad (2)$$

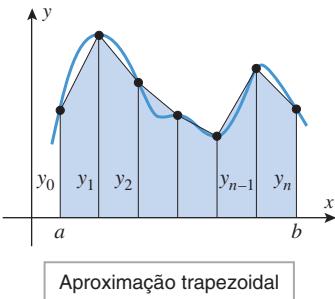


Figura 7.7.1

O nome “aproximação trapezoidal” deriva do fato de que, quando f for não negativa no intervalo de integração, essa aproximação T_n é a soma das áreas dos trapézios mostrados na Figura 7.7.1 (ver Exercício 51).

► **Exemplo 1** Na Tabela 7.7.2, aproximamos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

usando as aproximações pelo ponto médio e trapezoidal.* Em cada caso, utilizamos $n = 10$ subdivisões do intervalo $[1, 2]$, de modo que

$$\underbrace{\frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0,1}_{\text{Ponto médio}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{b-a}{2n} = \frac{2-1}{20} = 0,05}_{\text{Trapezoidal}}$$

* Em toda esta seção, daremos os valores numéricos com nove casas decimais à direita da vírgula. Se seu recurso computacional não mostrar tantas casas, será preciso fazer os ajustes necessários. O importante aqui é entender os princípios em discussão.

Tabela 7.7.2
APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO E TRAPEZOIDAL DE $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO			APROXIMAÇÃO TRAPEZOIDAL			
<i>i</i>	PONTO MÉDIO	$y_{m_i} = f(m_i) = 1/m_i$	<i>i</i>	EXTREMO	$y_i = f(x_i) = 1/x_i$	MULTIPLICADOR
	m_i			x_i		w_i
1	1,05	0,952380952	0	1,0	1,000000000	1
2	1,15	0,869565217	1	1,1	0,909090909	2
3	1,25	0,800000000	2	1,2	0,833333333	2
4	1,35	0,740740741	3	1,3	0,769230769	2
5	1,45	0,689655172	4	1,4	0,714285714	2
6	1,55	0,645161290	5	1,5	0,666666667	2
7	1,65	0,606060606	6	1,6	0,625000000	2
8	1,75	0,571428571	7	1,7	0,588235294	2
9	1,85	0,540540541	8	1,8	0,555555556	2
10	1,95	0,512820513	9	1,9	0,526315789	2
		6,928353603	10	2,0	0,500000000	1
$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx (0,1)(6,928353603) \approx 0,692835360$			13,875428063			
$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx (0,05)(13,875428063) \approx 0,693771403$						

Reescrevendo (3) e (4) no formato

$$\int_a^b f(x) dx = \text{aproximação} + \text{erro}$$

vemos que os valores positivos de E_M e E_T correspondem a subestimar e os valores negativos, a superestimar o valor da integral.

■ COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES PELO PONTO MÉDIO E TRAPEZOIDAL

Definimos os **erros** nas aproximações pelo ponto médio e trapezoidal, respectivamente, por

$$E_M = \int_a^b f(x) dx - M_n \quad \text{e} \quad E_T = \int_a^b f(x) dx - T_n \quad (3-4)$$

e definimos $|E_M|$ e $|E_T|$ como sendo os **erros absolutos** dessas aproximações. Os erros absolutos são não negativos e não distinguem entre subestimar e superestimar.

► **Exemplo 2** O valor de $\ln 2$ com nove casas decimais é

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,693147181 \quad (5)$$

de modo que, pelas Tabelas 7.7.2 e 7.7.3, podemos ver que os erros absolutos na aproximação de $\ln 2$ por M_{10} e T_{10} são

$$|E_M| = |\ln 2 - M_{10}| \approx 0,000311821$$

$$|E_T| = |\ln 2 - T_{10}| \approx 0,000624222$$

Assim, nesse caso, a aproximação pelo ponto médio é mais precisa do que a aproximação trapezoidal. ◀

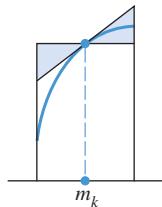
Tabela 7.7.3

ln 2 (NOVE CASAS DECIMAIAS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
0,693147181	$M_{10} \approx 0,692835360$	$E_M = \ln 2 - M_{10} \approx 0,000311821$
0,693147181	$T_{10} \approx 0,693771403$	$E_T = \ln 2 - T_{10} \approx -0,000624222$

No Exemplo 2, não foi por acaso que a aproximação de $\ln 2$ pelo ponto médio resultou mais precisa do que a aproximação trapezoidal. Para ver isso, começamos examinando a aproximação pelo ponto médio de um outro ponto de vista. Para simplificar nossa explicação, vamos supor que f seja não negativa em $[a, b]$, embora nossas conclusões sejam válidas sem essa hipótese.

Se f for uma função diferenciável, também chamamos a aproximação pelo ponto médio de **aproximação pela reta tangente**, pois para cada subintervalo a área do retângulo utilizado na aproximação pelo ponto médio é igual à área do trapézio cuja aresta superior é a reta tangente a $y = f(x)$ pelo ponto médio do subintervalo (Figura 7.7.2). A igualdade dessas áreas segue do fato de que as áreas sombreadas na figura são congruentes. Mostraremos, agora, como esse ponto de vista da aproximação pelo ponto médio pode ser usado para estabelecer critérios úteis para determinar se M_n ou T_n é a aproximação que produz a melhor aproximação em um dado intervalo.

Na Figura 7.7.2a, isolamos um subintervalo de $[a, b]$ no qual o gráfico de uma função f é côncavo para baixo e sombreamos as áreas que representam os erros nas aproximações pelo ponto médio trapezoidal no subintervalo. Na Figura 7.7.2b, mostramos uma sucessão de quatro ilustrações que tornam evidente que o erro na aproximação pelo ponto médio é menor do que aquele na aproximação trapezoidal. Se o gráfico de f fosse côncavo para cima, figuras análogas levariam à mesma conclusão. (Esse argumento, devido a Frank Buck, apareceu no *The College Mathematics Journal*, Vol. 16, nº 1, 1985.)



Os triângulos sombreados têm áreas iguais.

Figura 7.7.2

Justifique as conclusões em cada passo da Figura 7.7.3b.

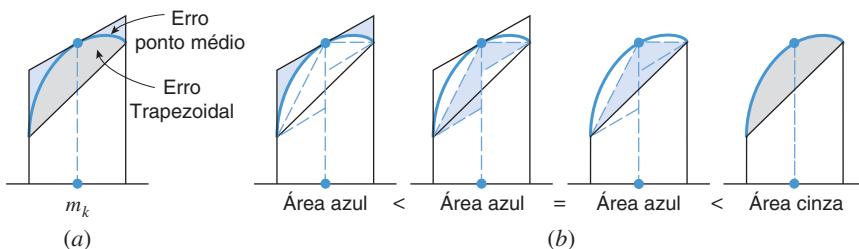


Figura 7.7.3

A Figura 7.7.3a também sugere que, em um subintervalo no qual o gráfico é côncavo para baixo, a aproximação pelo ponto médio será maior do que o valor da integral, enquanto a aproximação trapezoidal será menor. Em um intervalo onde o gráfico é côncavo para cima, ocorrerá o inverso. Em resumo, temos o seguinte resultado, que enunciamos sem prova formal.

7.7.1 TEOREMA *Seja f contínua em $[a, b]$ e sejam $|E_M|$ e $|E_T|$ os erros absolutos que resultam das aproximações pelo ponto médio e trapezoidal de $\int_a^b f(x) dx$ usando n subintervalos.*

(a) *Se o gráfico de f for côncavo para cima ou para baixo em (a, b) , então $|E_M| < |E_T|$, isto é, o erro na aproximação do ponto médio será menor do que aquele na aproximação trapezoidal.*

(b) *Se o gráfico de f for côncavo para baixo em (a, b) , então*

$$T_n < \int_a^b f(x) dx < M_n$$

(c) *Se o gráfico de f for côncavo para cima em (a, b) , então*

$$M_n < \int_a^b f(x) dx < T_n$$

► **Exemplo 3** Como o gráfico de $f(x) = 1/x$ é contínuo no intervalo $[1, 2]$ e côncavo para cima no intervalo $(1, 2)$, segue, da parte (a) do Teorema 7.7.1, que M_n sempre dará uma aproximação melhor do que T_n para

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$$

Além disso, segue da parte (c) do Teorema 7.7.1 que $M_n < \ln 2 < T_n$ com qualquer inteiro positivo n . Observe que isso é consistente com nosso cálculo no Exemplo 2. ◀

ADVERTÊNCIA

Não conclua que a aproximação pelo ponto médio sempre é melhor do que a trapezoidal; a aproximação trapezoidal pode ser melhor se a função trocar de concavidade no intervalo de integração.

► **Exemplo 4** As aproximações pelo ponto médio e trapezoidal podem ser usadas para aproximar $\sin 1$ usando a integral

$$\sin 1 = \int_0^1 \cos x dx$$

Como $f(x) = \cos x$ é contínua no intervalo $[0, 1]$ e côncava para baixo em $(0, 1)$, segue, das partes (a) e (b) do Teorema 7.7.1, que o erro absoluto de M_n será inferior a T_n e que $T_n < \sin 1 < M_n$ com qualquer inteiro positivo n . Isso é consistente com os resultados na Tabela 7.7.4 para $n = 5$ (cálculos intermediários omitidos). ◀

Tabela 7.7.4

sen 1 (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
0,841470985	$M_5 \approx 0,842875074$	$E_M = \sin 1 - M_5 \approx -0,001404089$
0,841470985	$T_5 \approx 0,838664210$	$E_T = \sin 1 - T_5 \approx 0,002806775$

► **Exemplo 5** A Tabela 7.7.5 mostra aproximações pelo ponto médio e trapezoidal de $\sin 3 = \int_0^3 \cos x$ usando $n = 10$ subdivisões do intervalo $[0, 3]$. Observe que $|E_M| < |E_T|$ e $T_{10} < \sin 3 < M_{10}$, embora esses resultados não sejam garantidos pelo Teorema 7.7.1, já que f troca de concavidade no intervalo $[0, 3]$. ◀

Tabela 7.7.5

sen 3 (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
0,141120008	$M_{10} \approx 0,141650601$	$E_M = \sin 3 - M_{10} \approx -0,000530592$
0,141120008	$T_{10} \approx 0,140060017$	$E_T = \sin 3 - T_{10} \approx 0,001059991$

■ REGRA DE SIMPSON

Lembre que a média das aproximações pelas extremidades esquerda e direita dá uma aproximação melhor, a trapezoidal. Veremos, agora, como uma média ponderada das aproximações pelo ponto médio e trapezoidal pode dar uma aproximação ainda melhor.

A evidência numérica nas Tabelas 7.7.3, 7.7.4 e 7.7.5 revela que, nesses casos, $E_T \approx -2 E_M$; portanto, $2 E_M + E_T \approx 0$ nesses casos. Isso sugere que

$$\begin{aligned} 3 \int_a^b f(x) dx &= 2 \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \\ &= 2(M_k + E_M) + (T_k + E_T) \\ &= (2M_k + T_k) + (2E_M + E_T) \\ &\approx 2M_k + T_k \end{aligned}$$

Disso resulta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3}(2M_k + T_k) \quad (6)$$

ADVERTÊNCIA

Observe que o subscrito n de S_n em (7) é sempre *par*, pois é o dobro do valor do subscrito das aproximações pelo ponto médio e trapezoidal correspondentes. Por exemplo,

$$S_{10} = \frac{1}{3}(2M_5 + T_5)$$

e

$$S_{20} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10})$$

A aproximação pelo ponto médio M_k em (6) exige calcular o valor de f em k pontos do intervalo $[a, b]$, e a aproximação trapezoidal T_k em (6) exige calcular o valor de f em $k+1$ pontos de $[a, b]$. Assim, $\frac{1}{3}(2M_k + T_k)$ usa $2k+1$ valores de f , calculados em pontos igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$. Esses pontos são obtidos com uma partição de $[a, b]$ em $2k$ subintervalos iguais indicados pelas extremidades esquerda, extremidades direita e pelos pontos médios usados em T_k e M_k , respectivamente. Tomando $n=2k$, usamos S_n para denotar a média ponderada de M_k e T_k em (6). Assim,

$$S_n = S_{2k} = \frac{1}{3}(2M_k + T_k) \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{1}{3}(2M_{n/2} + T_{n/2}) \quad (7)$$

A Tabela 7.7.6 apresenta as aproximações S_{2n} correspondentes aos dados nas Tabelas 7.7.3 até 7.7.5.

Tabela 7.7.6

VALOR DA FUNÇÃO (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
$\ln 2 \approx 0,693147181$	$\int_1^2 (1/x) dx \approx S_{20} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10}) \approx 0,693147375$	$-0,000000194$
$\operatorname{sen} 1 \approx 0,841470985$	$\int_0^1 \cos x dx \approx S_{10} = \frac{1}{3}(2M_5 + T_5) \approx 0,841471453$	$-0,000000468$
$\operatorname{sen} 3 \approx 0,141120008$	$\int_0^3 \cos x dx \approx S_{20} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10}) \approx 0,141120406$	$-0,000000398$

Usando a fórmula da aproximação pelo ponto médio na Tabela 7.7.1 e a Fórmula (2) da aproximação trapezoidal, podemos obter uma fórmula análoga para S_n . Começamos com uma partição do intervalo $[a, b]$ em um número *par* de subintervalos iguais. Se n for o número de subintervalos, então cada subintervalo tem comprimento $(b-a)/n$. Identificamos as extremidades desses subintervalos sucessivamente por $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Então, $x_0, x_2, x_4, \dots, x_n$ define uma partição de $[a, b]$ em $n/2$ subintervalos iguais, cada um de comprimento $2(b-a)/n$, e os pontos médios desses subintervalos são $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1}$, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 7.7.4. Usando $y_i = f(x_i)$, temos

$$\begin{aligned} 2M_{n/2} &= 2 \left(\frac{2(b-a)}{n} \right) [y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}] \\ &= \left(\frac{b-a}{n} \right) [4y_1 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-1}] \end{aligned}$$

Observando que $(b-a)/[2(n/2)] = (b-a)/n$, podemos expressar $T_{n/2}$ como

$$T_{n/2} = \left(\frac{b-a}{n} \right) [y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + y_n]$$

Assim, $S_n = \frac{1}{3}(2M_{n/2} + T_{n/2})$ pode ser expresso por

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \quad (8)$$

A aproximação

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n \quad (9)$$

com S_n dado por (8) é conhecida como **regra de Simpson**. O erro dessa aproximação é denotado por

$$E_S = \int_a^b f(x) dx - S_n \quad (10)$$

Como antes, o erro absoluto da aproximação (9) é dado por $|E_S|$.

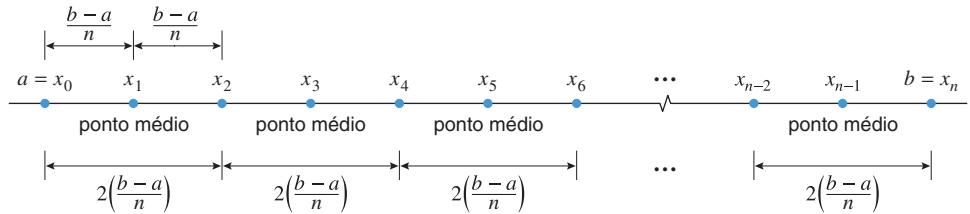


Figura 7.7.4

► **Exemplo 6** Na Tabela 7.7.7, utilizamos a regra de Simpson com $n = 10$ subintervalos para obter a aproximação

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx S_{10} = 0,693150231$$

Para essa aproximação,

$$\frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2-1}{10} \right) = \frac{1}{30}$$

Tabela 7.7.7
UMA APROXIMAÇÃO DE $\ln 2$ USANDO A REGRA DE SIMPSON

i	EXTREMO x_i	$y_i = f(x_i) = 1/x_i$	MULTIPLICADOR w_i	$w_i y_i$
0	1,0	1,000000000	1	1,000000000
1	1,1	0,909090909	4	3,636363636
2	1,2	0,833333333	2	1,666666667
3	1,3	0,769230769	4	3,076923077
4	1,4	0,714285714	2	1,428571429
5	1,5	0,666666667	4	2,666666667
6	1,6	0,625000000	2	1,250000000
7	1,7	0,588235294	4	2,352941176
8	1,8	0,555555556	2	1,111111111
9	1,9	0,526315789	4	2,105263158
10	2,0	0,500000000	1	0,500000000
				20,794506921

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \left(\frac{1}{30} \right) (20,794506921) \approx 0,693150231$$



Thomas Simpson (1710-1761) Matemático inglês. Simpson era filho de um tecelão. Ele foi treinado para seguir os passos do pai e teve pouca educação formal no começo de sua vida. Seu interesse por Ciência e Matemática surgiu em 1724, quando presenciou um eclipse do Sol e recebeu dois livros de um vendedor ambulante, um sobre Astrologia e o outro sobre Aritmética. Simpson rapidamente absorveu seus conteúdos e logo tornou-se, com sucesso, adivinho local. Sua situação financeira melhorada permitiu-lhe desistir da tecelagem e casar-se com sua patroa. Então, em 1733, um incidente desafortunado e misterioso forçou-o a mudar-se. Ele se estabeleceu em Derby, onde lecionou em uma escola noturna e, durante o dia, trabalhou em uma tecelagem. Em 1736, mudou-se para Londres e publicou seu primeiro trabalho matemático em

um periódico chamado *Ladies's Diary* (do qual, mais tarde, tornou-se editor). Em 1737, publicou um bem-sucedido livro de Cálculo, o qual possibilitou-lhe largar completamente a tecelagem e concentrar-se em ensinar e escrever. Sua sorte melhorou mais ainda em 1740, quando alguém chamado Robert Heath o acusou de plágio. A publicidade foi maravilhosa, e Simpson conseguiu escrever rapidamente uma sucessão de livros-texto de grande sucesso: *Álgebra* (dez edições mais traduções), *Geometria* (doze edições mais traduções), *Trigonometria* (cinco edições mais traduções) e inúmeros outros. É interessante notar que Simpson não descobriu a regra que leva seu nome: ela era um resultado bem conhecido em sua época.

Embora S_{10} seja uma média ponderada de M_5 e T_5 , faz sentido comparar S_{10} com M_{10} e T_{10} , já que as somas dessas três aproximações envolvem o mesmo número de parcelas. Usando os valores de M_{10} e T_{10} do Exemplo 2 e o valor de S_{10} da Tabela 7.7.7, temos

$$|E_M| = |\ln 2 - M_{10}| \approx |0,693147181 - 0,692835360| = 0,000311821$$

$$|E_T| = |\ln 2 - T_{10}| \approx |0,693147181 - 0,693771403| = 0,000624222$$

$$|E_S| = |\ln 2 - S_{10}| \approx |0,693147181 - 0,693150231| = 0,000003050$$

Comparando esses erros absolutos, fica claro que S_{10} é uma aproximação muito mais precisa de $\ln 2$ do que M_{10} ou T_{10} . 

■ INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA REGRa DE SIMPSON

A aproximação pelo ponto médio (ou pela reta tangente) e a aproximação trapezoidal de uma integral definida baseiam-se na aproximação de um segmento da curva $y = f(x)$ por um segmento de reta. A intuição sugere que essas aproximações poderiam ser melhoradas usando arcos parabólicos em vez de segmentos de reta, incorporando, assim, a concavidade da curva $y = f(x)$ na aproximação.

Essa ideia é carregada por uma fórmula, algumas vezes chamada de **regra do terço**. Essa regra expressa a integral definida de uma função quadrática $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ em termos dos valores Y_0 , Y_1 e Y_2 de g na extremidade esquerda, no ponto médio e na extremidade direita, respectivamente, do intervalo de integração $[m - \Delta x, m + \Delta x]$ (ver Figura 7.7.5):

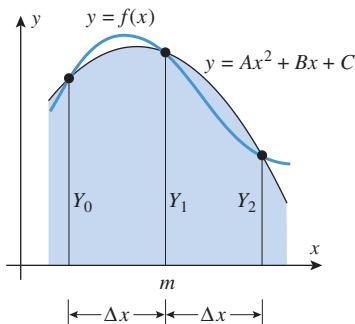


Figura 7.7.5

Deixamos a cargo do leitor verificar essa regra (Exercício 53). Aplicando a regra do terço aos subintervalos $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, com $k = 1, \dots, n/2$, chegamos à Fórmula (8) da regra de Simpson (Exercício 54). Assim, a regra de Simpson corresponde à integral de uma aproximação quadrática por partes de $f(x)$.

■ ESTIMATIVAS DOS ERROS

Há duas fontes de erros com todos os métodos estudados nesta seção: o erro *de truncamento*, ou *intrínseco*, devido à fórmula de aproximação, e o erro *de arredondamento*, introduzido nos cálculos. Em geral, aumentando n reduzimos o erro de truncamento, mas aumentamos o erro de arredondamento, já que, para n grande, necessitamos de mais cálculos. Em aplicações práticas, é importante saber quão grande devemos tomar n para garantir um grau de precisão especificado. A análise do erro de arredondamento não será considerada neste texto, por ser muito complicada. Contudo, os teoremas seguintes, provados em livros de Análise Numérica, dão cotas superiores para os erros de truncamento das aproximações pelo ponto médio, trapezoidal e pela regra de Simpson.

7.7.2 TEOREMA (Estimativa do Erro pelo Ponto Médio e Trapezoidal) Se f'' for contínua em $[a, b]$ e se K_2 for o valor máximo de $|f''(x)|$ em $[a, b]$, então

$$(a) |E_M| = \left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 K_2}{24n^2} \quad (12)$$

$$(b) |E_T| = \left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2} \quad (13)$$

7.7.3 TEOREMA (Estimativa do Erro em Simpson) Se $f^{(4)}$ for contínua em $[a, b]$ e se K_4 for o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em $[a, b]$, então

$$|E_S| = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{(b-a)^5 K_4}{180n^4} \quad (14)$$

► **Exemplo 7** Encontre uma cota superior para o erro absoluto que resulta da aproximação de

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

usando (a) a aproximação pelo ponto médio M_{10} , (b) a aproximação trapezoidal T_{10} e (c) a regra de Simpson S_{10} com $n = 10$ subintervalos.

Solução Aplicaremos as Fórmulas (12), (13) e (14) com

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad \text{e} \quad n = 10$$

Temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

Assim,

$$|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| = \frac{2}{x^3}, \quad |f^{(4)}(x)| = \left| \frac{24}{x^5} \right| = \frac{24}{x^5}$$

onde ignoramos os valores absolutos porque $f''(x)$ e $f^{(4)}(x)$ têm valores positivos em $1 \leq x \leq 2$. Como $|f''(x)|$ e $|f^{(4)}(x)|$ são contínuas e decrescentes em $[1, 2]$, ambas as funções têm seus valores máximos em $x = 1$; para $|f''(x)|$, esse valor máximo é 2 e, para $|f^{(4)}(x)|$, o valor máximo é 24. Assim, podemos tomar $K_2 = 2$ em (12) e (13) e $K_4 = 24$ em (14). Resulta

$$\begin{aligned} |E_M| &\leq \frac{(b-a)^3 K_2}{24n^2} = \frac{1^3 \cdot 2}{24 \cdot 10^2} \approx 0,000833333 \\ |E_T| &\leq \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2} = \frac{1^3 \cdot 2}{12 \cdot 10^2} \approx 0,001666667 \\ |E_S| &\leq \frac{(b-a)^5 K_4}{180n^4} = \frac{1^5 \cdot 24}{180 \cdot 10^4} \approx 0,000013333 \end{aligned}$$

Observe que as cotas superiores calculadas no Exemplo 7 são consistentes com os valores $|E_M|$, $|E_T|$ e $|E_S|$ calculados no Exemplo 6, mas são consideravelmente maiores do que aqueles valores. É bem comum que as cotas superiores dos erros absolutos dadas nos Teoremas 7.7.2 e 7.7.3 excedam substancialmente os erros absolutos verdadeiros. Contudo, isso não diminui a utilidade dessas cotas.

► **Exemplo 8** Quantos subintervalos deveriam ser usados para aproximar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

pela regra de Simpson para obter uma precisão de cinco casas decimais?

Solução Para obter uma precisão de cinco casas decimais, devemos escolher o número de subintervalos de tal modo que

$$|E_S| \leq 0,000005 = 5 \times 10^{-6}$$

Por (14), isso pode ser alcançado tomando n na regra de Simpson de tal modo que valha

$$\frac{(b-a)^5 K_4}{180n^4} \leq 5 \times 10^{-6}$$

Fazendo $a = 1$, $b = 2$ e $K_4 = 24$ (obtido no Exemplo 7) nessa desigualdade, obtemos

$$\frac{1^5 \cdot 24}{180 \cdot n^4} \leq 5 \times 10^{-6}$$

que, tomado recíprocos, pode ser escrita como

$$n^4 \geq \frac{2 \times 10^6}{75} = \frac{8 \times 10^4}{3}$$

Assim,

$$n \geq \frac{20}{\sqrt[4]{6}} \approx 12,779$$

Como n é um inteiro par, vemos que $n = 14$ é o menor valor de n que satisfaz essa exigência. Assim, a aproximação S_{14} com 14 subintervalos produz uma precisão de cinco casas decimais. \blacktriangleleft

OBSERVAÇÃO

Nos casos em que for difícil encontrar os valores de K_2 e K_4 nas Fórmulas (12), (13) e (14), poderemos trocar essas constantes por quaisquer constantes maiores. Por exemplo, suponha que uma constante K , que possa ser encontrada facilmente, dê a certeza de que $|f''(x)| < K$ no intervalo. Então $K_2 \leq K$ e

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2} \leq \frac{(b-a)^3 K}{12n^2} \quad (15)$$

de modo que o lado direito de (15) é, também, uma cota superior do valor de $|E_T|$. Contudo, utilizar K provavelmente aumentará o valor calculado do n que é necessário para a tolerância do erro dada. Muitas aplicações envolvem a resolução desses assuntos práticos concorrentes, exemplificados aqui pela compensação entre a conveniência de encontrar uma cota grosseira para $|f''(x)|$ e a eficiência de utilizar o menor n possível para a precisão desejada.

► Exemplo 9 Quantos subintervalos devem ser usados na aproximação de

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx$$

pelo ponto médio para uma precisão de três casas decimais?

Solução Para obter uma precisão de três casas decimais, precisamos escolher n de tal forma que

$$|E_M| \leq 0,0005 = 5 \times 10^{-4} \quad (16)$$

A partir de (12) com $f(x) = \cos(x^2)$, $a = 0$ e $b = 1$, um limite superior para o erro $|E_M|$ é dado por

$$|E_M| \leq \frac{K_2}{24n^2} \quad (17)$$

onde $|K_2|$ é o valor máximo de $|f''(x)|$ no intervalo $[0, 1]$. Contudo,

$$f'(x) = -2x \sin(x^2)$$

$$f''(x) = -4x^2 \cos(x^2) - 2 \sin(x^2) = -[4x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2)]$$

e, portanto,

$$|f''(x)| = |4x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2)| \quad (18)$$

Seria cansativo buscar analiticamente o valor máximo dessa função no intervalo $[0, 1]$. Dado x em $[0, 1]$, é fácil ver que cada uma das expressões x^2 , $\cos(x^2)$ e $\sin(x^2)$ é limitada por 1 em valor absoluto, de modo que $|4x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2)| \leq 4 + 2 = 6$ em $[0, 1]$. Podemos melhorar isso usando um recurso gráfico para esboçar $|f''(x)|$, como mostramos na Figura 7.7.6. É evidente pelo gráfico que

$$|f''(x)| < 4 \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1$$

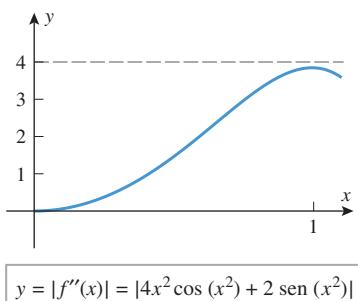


Figura 7.7.6

Desse modo, temos, a partir de (17), que

$$|E_M| \leq \frac{K_2}{24n^2} < \frac{4}{24n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

e, assim, podemos satisfazer (16) escolhendo n de forma que

$$\frac{1}{6n^2} < 5 \times 10^{-4}$$

o que pode ser escrito como

$$n^2 > \frac{10^4}{30} \quad \text{ou} \quad n > \frac{10^2}{\sqrt{30}} \approx 18,257$$

O menor valor de n que satisfaz essa desigualdade é $n = 19$. Assim, a aproximação pelo ponto médio M_{19} usando 19 subintervalos produz uma precisão de três casas decimais. ▲

■ UMA COMPARAÇÃO ENTRE OS TRÊS MÉTODOS

Dos três métodos estudados nesta seção, a regra de Simpson, em geral, produz resultados mais precisos do que as aproximações pelo ponto médio ou trapezoidal, com a mesma quantidade de trabalho. Para tornar isso plausível, vamos expressar (12), (13) e (14) em termos do comprimento do subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Obtemos

$$|E_M| \leq \frac{1}{24} K_2 (b - a) (\Delta x)^2 \quad (19)$$

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} K_2 (b - a) (\Delta x)^2 \quad (20)$$

$$|E_S| \leq \frac{1}{180} K_4 (b - a) (\Delta x)^4 \quad (21)$$

(verifique). Portanto, para a regra de Simpson, o limite superior do erro absoluto é proporcional a $(\Delta x)^4$, enquanto para aproximações pelo ponto médio e trapezoidal, é proporcional a $(\Delta x)^2$. Assim, reduzindo o comprimento do intervalo por um fator de 10, por exemplo, reduz-se o limite do erro por um fator de 100 para o ponto médio e o trapezoidal, e por um fator de 10.000 para a regra de Simpson. Isso sugere que a precisão da regra de Simpson melhora muito mais rapidamente do que a das outras aproximações.

Como nota final, observe que, se $f(x)$ for um polinômio de grau 3 ou menor, então temos $f^{(4)}(x) = 0$ em qualquer x ; assim, $K_4 = 0$ em (14) e, consequentemente, $|E_S| = 0$. Logo, a regra de Simpson dá resultados exatos para polinômios de grau 3 ou menor. Analogamente, as aproximações pelo ponto médio e trapezoidal dão resultados exatos para polinômios de grau 1 ou menor. (O leitor deve ser capaz de ver isso geometricamente.)

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.7 (Ver página 547 para respostas.)

1. Seja T_n a aproximação trapezoidal para a integral definida de $f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$ usando n subintervalos.
 - Em termos de L_n e R_n (as aproximações pelas extremidades esquerda e direita), temos $T_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Em termos dos valores y_0, y_1, \dots, y_n da função nas extremidades dos subintervalos, temos $T_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. Sejam I a integral definida de f sobre um intervalo $[a, b]$ e T_n e M_n as respectivas aproximações trapezoidal e pelo ponto médio de I com um n dado. Suponha que o gráfico de f seja côncavo para cima no intervalo $[a, b]$; ordene as quantidades T_n, M_n e I de menor para maior: $\underline{\hspace{2cm}} < \underline{\hspace{2cm}} < \underline{\hspace{2cm}}$.

3. Seja S_6 a aproximação pela regra de Simpson de $\int_a^b f(x) dx$ usando $n = 6$ subintervalos.
(a) Em termos de M_3 e T_3 (as aproximações pelo ponto médio e trapezoidal), temos $S_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.
(b) Em termos dos valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_6$ da função nos extremos dos subintervalos, temos $S_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. Suponha que $f^{(4)}$ seja contínua em $[0, 1]$ e que $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ em $[0, 1]$, com $k = 1, 2, 3, 4$. Encontre uma cota

superior para o erro absoluto que resulta de aproximar a integral definida de f sobre $[0, 1]$ usando (a) a aproximação pelo ponto médio M_{10} , (b) a aproximação trapezoidal T_{10} e (c) a regra de Simpson S_{10} .

5. Aproxime $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$ usando o método indicado.
(a) $M_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (b) $T_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
(c) $S_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 7.7 C CAS

1-6 Aproxime a integral usando (a) a aproximação M_{10} pelo ponto médio, (b) a aproximação trapezoidal T_{10} e (c) a aproximação pela regra de Simpson S_{20} usando a Fórmula (7). Em cada caso, encontre o valor exato da integral e aproxime o erro absoluto. Expressse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais. ■

1. $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$ 2. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 3. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$
4. $\int_0^2 \sin x dx$ 5. $\int_1^3 e^{-2x} dx$ 6. $\int_0^3 \frac{1}{3x+1} dx$

7-12 Use as desigualdades (12), (13) e (14) para encontrar cotas superiores para os erros nas partes (a), (b) e (c) dos exercícios indicados. ■

7. Exercício 1 8. Exercício 2 9. Exercício 3
10. Exercício 4 11. Exercício 5 12. Exercício 6

13-18 Use as desigualdades (12), (13) e (14) para encontrar um número n de subintervalos para a aproximação (a) pelo ponto médio M_n e (b) trapezoidal T_n e (c) pela regra de Simpson S_n que garanta que o erro absoluto seja menor que o valor dado. ■

13. Exercício 1; 5×10^{-4} 14. Exercício 2; 5×10^{-4}
15. Exercício 3; 10^{-3} 16. Exercício 4; 10^{-3}
17. Exercício 5; 10^{-4} 18. Exercício 6; 10^{-4}

19-22 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. A aproximação pelo ponto médio M_n é a média das aproximações pelas extremidades esquerda L_n e direita R_n .
20. Se $f(x)$ for côncava para baixo no intervalo (a, b) , então a aproximação trapezoidal T_n subestima $\int_a^b f(x) dx$.
21. A aproximação S_{50} de $\int_a^b f(x) dx$ pela regra de Simpson é uma média ponderada das aproximações M_{50} e T_{50} , em que M_{50} tem o dobro do peso de T_{50} na média.

22. A aproximação S_{50} de $\int_a^b f(x) dx$ pela regra de Simpson corresponde a $\int_a^b q(x) dx$, em que o gráfico de q é composto de 25 segmentos parabólicos ligados em pontos do gráfico de f .

23-24 Encontre uma função $g(x)$ da forma

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

cujo gráfico contenha os pontos $(m - \Delta x, f(m - \Delta x))$, $(m, f(m))$ e $(m + \Delta x, f(m + \Delta x))$, onde $f(x)$ é a função dada, e para os valores dados de m e Δx . Então, verifique a Fórmula (11):

$$\int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} g(x) dx = \frac{\Delta x}{3} [Y_0 + 4Y_1 + Y_2]$$

onde $Y_0 = f(m - \Delta x)$, $Y_1 = f(m)$ e $Y_2 = f(m + \Delta x)$. ■

23. $f(x) = \frac{1}{x}$; $m = 3$, $\Delta x = 1$

24. $f(x) = \sin^2(\pi x)$; $m = \frac{1}{6}$, $\Delta x = \frac{1}{6}$

25-30 Aproxime a integral usando a regra de Simpson S_{10} e compare sua resposta com aquela produzida por algum recurso computacional provido de integração numérica. Expressse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais. ■

25. $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ 26. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{2x^3 + 1}} dx$
27. $\int_{-1}^2 x\sqrt{2+x^3} dx$ 28. $\int_0^\pi \frac{x}{2 + \sin x} dx$
29. $\int_0^1 \cos(x^2) dx$ 30. $\int_1^2 (\ln x)^{3/2} dx$

31-32 O valor exato da integral dada é π (confira). Aproxime a integral usando (a) a aproximação M_{10} pelo ponto médio, (b) a aproximação trapezoidal T_{10} e (c) a aproximação S_{20} pela regra de Simpson usando a Fórmula (7). Dê uma estimativa do erro absoluto e expresse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais. ■

31. $\int_0^2 \frac{8}{x^2 + 4} dx$ 32. $\int_0^3 \frac{4}{9} \sqrt{9-x^2} dx$
33. No Exemplo 8, mostramos que tomando $n = 14$ subdivisões garante que a aproximação de

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

pela regra de Simpson seja precisa com cinco casas decimais. Confirme isso comparando a aproximação de $\ln 2$ pela regra de Simpson com $n = 14$ ao valor produzido diretamente de seu recurso computacional.

34. Em cada parte, determine se a aproximação trapezoidal subestima ou superestima a integral definida dada.

(a) $\int_0^1 \cos(x^2) dx$

(b) $\int_{3/2}^2 \cos(x^2) dx$

- 35-36 Encontre um valor de n que garanta que o erro absoluto na aproximação da integral com a aproximação pelo ponto médio seja inferior a 10^{-4} . Dê uma estimativa do erro absoluto e expresse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais. ■

35. $\int_0^2 x \sin x dx$

36. $\int_0^1 e^{\cos x} dx$

- 37-38 Mostre que as desigualdades (12) e (13) não têm serventia para encontrar uma cota superior para o erro absoluto que resulta de aproximar a integral dada com as aproximações tanto pelo ponto médio quanto trapezoidal. ■

37. $\int_0^1 x\sqrt{x} dx$

38. $\int_0^1 \sin \sqrt{x} dx$

- 39-40 Use a aproximação S_{10} da regra de Simpson para aproximar o comprimento da curva. Expresse sua resposta com pelo menos quatro casas decimais. ■

39. $y = \sin x$ desde $x = 0$ até $x = \pi$

40. $y = x^{-2}$ desde $x = 1$ até $x = 2$

ENFOCANDO CONCEITOS

41. A figura a seguir mostra um gráfico da curva velocidade v versus tempo t para um teste do automóvel BMW 335i. Dê uma estimativa das velocidades em $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ e 30 s a partir do gráfico, converta pé/s usando $1 \text{ milha/h} = \frac{22}{15} \text{ pés/s}$ e use essas velocidades e a regra de Simpson para aproximar o número de pés percorridos nos 30 primeiros segundos. Arredonde sua resposta até o pé mais próximo. [Sugestão: Distância percorrida = $\int_0^{30} v(t) dt$.]

Fonte: Dados da revista *Car and Driver*, setembro de 2010.

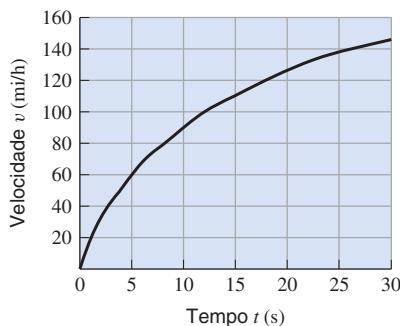
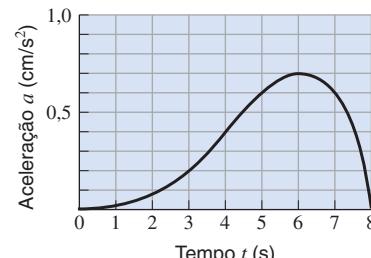


Figura Ex-41

42. Um gráfico da curva aceleração a versus tempo t para um objeto movendo-se em linha reta está na figura a seguir. Estime as acelerações em $t = 0, 1, 2, \dots, 8$ s a partir do gráfico e use a regra de Simpson para aproximar a variação da velocidade de $t = 0$ a $t = 8$ s. Arredonde sua resposta até o décimo de cm/s mais próximo. [Sugestão: Variação na velocidade = $\int_0^8 a(t) dt$.]



Tempo t (s)

Figura Ex-42

- 43-46 Os métodos de integração numérica podem ser usados em problemas nos quais os valores do integrando são somente dados por mensuração ou, então, determinados experimentalmente. Use a regra de Simpson para estimar o valor das integrais relevantes nestes exercícios. ■

43. A tabela abaixo dá as velocidades em milhas por segundo em vários instantes para um foguete de teste lançado para cima da superfície da Terra. Use esses valores para aproximar o número de milhas percorridas durante os primeiros 180 s. Arredonde sua resposta até o décimo de milha mais próximo. [Sugestão: Distância percorrida = $\int_0^{180} v(t) dt$.]

TEMPO t (s)	VELOCIDADE v (mi/s)
0	0,00
30	0,03
60	0,08
90	0,16
120	0,27
150	0,42
180	0,65

Tabela Ex-43

44. A tabela abaixo mostra as velocidades de uma bala saída da boca de um rifle em várias distâncias. Use esses valores para aproximar o número de segundos para a bala percorrer 1.800 pés. Expresse sua resposta até o centésimo de segundo mais próximo. [Sugestão: Se v for a velocidade da bala e x for a distância percorrida, então $v = dx/dt$, logo $dt/dx = 1/v$ e $t = \int_0^{1800} (1/v) dx$.]

DISTÂNCIA x (pés)	VELOCIDADE v (pés/s)
0	3.100
300	2.908
600	2.725
900	2.549
1200	2.379
1500	2.216
1800	2.059

Tabela Ex-44

45. As medidas de um caco de cerâmica descoberto em uma escavação arqueológica revelam que ele veio de um pote com uma base plana e secção transversal circular (ver figura a seguir). A

figura mostra medidas do raio interior do caco feitas a cada 4 cm a partir da base em direção ao topo. Use esses valores para aproximar o volume interno do pote até o décimo de litro mais próximo ($1 \text{ l} = 1.000\text{cm}^3$). [Sugestão: Use 6.2.3 (volume por secção transversal) para estabelecer uma integral apropriada para o volume.]

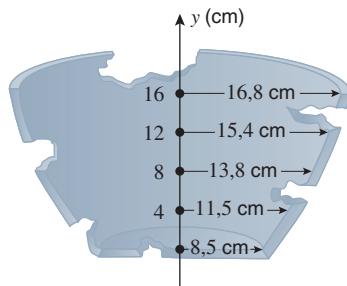


Figura Ex-45

46. Engenheiros querem construir uma estrada reta e nivelada, com 600 pés de comprimento e 75 pés de largura, fazendo um corte através de um morro (veja a figura a seguir). As alturas do morro acima da linha central da estrada proposta, obtidas de vários pontos de um mapa topográfico da região, estão na tabela que segue. Para estimar o custo da construção, eles precisam conhecer o volume de terra que deve ser removido. Aproxime esse volume, arredondando ao pé cúbico mais próximo. [Sugestão: Primeiramente, estabeleça uma integral para a área da seção transversal do corte ao longo da linha central da estrada; depois, suponha que a altura do morro não varie entre a linha central e as margens da estrada.]

DISTÂNCIA HORIZONTAL x (pés)	ALTURA h (pés)
0	0
100	7
200	16
300	24
400	25
500	16
600	0

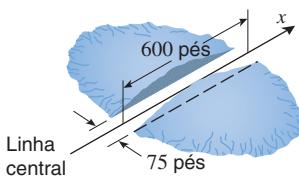


Figura Ex-46

- c) 47. Seja $f(x) = \cos(x^2)$.

- (a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f''(x)|$ em $[0, 1]$.
(b) Qual é o tamanho de n na aproximação do ponto médio de $\int_0^1 f(x) dx$ para garantir que o erro absoluto seja menor do que 5×10^{-4} ? Compare seu resultado com o obtido no Exemplo 9.
(c) Calcule a integral usando a aproximação pelo ponto médio com o valor de n obtido em (b).

- c) 48. Seja $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$.

- (a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f''(x)|$ em $[0, 1]$.

- (b) Qual é o tamanho de n na aproximação trapezoidal de $\int_0^1 f(x) dx$ para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-3} ?
(c) Calcule a integral usando a aproximação trapezoidal com o valor de n obtido em (b).

- c) 49. Seja $f(x) = \cos(x^2)$.

- (a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em $[0, 1]$.
(b) Qual é o tamanho de n na aproximação S_n de $\int_0^1 f(x) dx$ pela regra de Simpson para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-4} ?
(c) Calcule a integral usando a aproximação S_n pela regra de Simpson com o valor de n obtido em (b).

- c) 50. Seja $f(x) = \sqrt{2 + x^3}$.

- (a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em $[0, 1]$.
(b) Qual é o tamanho de n na aproximação S_n de $\int_0^1 f(x) dx$ pela regra de Simpson para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-6} ?
(c) Calcule a integral usando a aproximação S_n regra de Simpson com o valor de n obtido em (b).

ENFOCANDO CONCEITOS

51. (a) Verifique que a média das aproximações pela extremidade esquerda e pela extremidade direita dadas na Tabela 7.7.1 dá a Fórmula (2) da aproximação trapezoidal.
(b) Suponha que f seja uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e subdivida $[a, b]$ em pontos igualmente espaçados $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Encontre a área do trapézio sob o segmento de reta que liga os pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ e acima do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Mostre que o lado direito da Fórmula (2) é a soma dessas áreas de trapézios (Figura 7.7.1).
52. Seja f uma função positiva, contínua, decrescente e côncava para baixo no intervalo $[a, b]$. Suponha que o intervalo $[a, b]$ esteja subdividido em n subintervalos de mesmo comprimento. Arranje as aproximações de $\int_a^b f(x) dx$ a seguir em ordem decrescente de valores: pela extremidade esquerda, pela extremidade direita, pelo ponto médio e trapezoidal.

53. Suponha que $\Delta x > 0$ e que $g(x) = Ax^2 + Bx + C$. Seja m um número e defina $Y_0 = g(m - \Delta x)$, $Y_1 = g(m)$ e $Y_2 = g(m + \Delta x)$. Verifique a Fórmula (11):

$$\int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} g(x) dx = \frac{\Delta x}{3} [Y_0 + 4Y_1 + Y_2]$$

54. Suponha que f seja uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e subdivida o intervalo $[a, b]$ em $n + 1$ pontos igualmente espaçados $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Denotemos $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Sejam $g_1, g_2, \dots, g_{n/2}$ as funções quadráticas da forma $g_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ tais que

- o gráfico de g_1 passa pelos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2) ;
- o gráfico de g_2 passa pelos pontos $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ e (x_4, y_4) ;
- ...
- o gráfico de $g_{n/2}$ passa pelos pontos $(x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-1}, y_{n-1})$ e (x_n, y_n) .

Confira que a Fórmula (8) calcula a área sob o gráfico de uma função quadrática por partes, mostrando que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n/2} \left(\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} g_j(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots \\ &\quad + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \end{aligned}$$

- 55. Texto** Discuta duas circunstâncias diferentes nas quais é necessária a integração numérica.

- 56. Texto** Uma aproximação mais precisa com os métodos de integração numérica desta seção foi obtida aumentando o número de subdivisões do intervalo. Outra estratégia é usar o mesmo número de subintervalos, mas selecionar subintervalos de comprimentos diferentes. Discuta um esquema para fazer isso na aproximação trapezoidal de $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ com 4 subintervalos. Comente sobre as vantagens e desvantagens desse esquema.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.7

1. (a) $\frac{1}{2}(L_n + R_n)$ (b) $\left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n]$ 2. $M_n < I < T_n$ 3. (a) $\frac{2}{3}M_3 + \frac{1}{3}T_3$
 (b) $\left(\frac{b-a}{18}\right)(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$ 4. (a) $\frac{1}{2.400}$ (b) $\frac{1}{1.200}$ (c) $\frac{1}{1.800.000}$
 5. (a) $M_1 = \frac{1}{2}$ (b) $T_1 = \frac{10}{9}$ (c) $S_2 = \frac{19}{27}$

7.8 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Até aqui, concentrarmo-nos nas integrais definidas com integrandos contínuos e intervalos de integração finitos. Nesta seção, ampliaremos o conceito de integral definida para incluir intervalos de integração infinitos e integrandos que se tornam infinitos dentro dos intervalos de integração.

■ INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Supõe-se na definição da integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

que $[a, b]$ seja um intervalo finito e que o limite que define a integral exista, isto é, que a função f seja integrável. Observamos nos Teoremas 5.5.2 e 5.5.8 que funções contínuas são integráveis, bem como o são funções limitadas com um número finito de descontinuidades. Também observamos no Teorema 5.5.8 que funções que não são limitadas no intervalo de integração não são integráveis. Assim, por exemplo, uma função com uma assíntota vertical dentro do intervalo de integração não seria integrável.

Nosso objetivo principal nesta seção é ampliar o conceito de uma integral definida para permitir intervalos infinitos de integração e integrandos com as assíntotas verticais dentro do intervalo de integração. Vamos chamar as assíntotas verticais de **descontinuidades infinitas**.

e as integrais com intervalos de integração infinitos ou com descontinuidades infinitas dentro do intervalo de integração de **integrais impróprias**. Aqui estão alguns exemplos:

- Integrais impróprias com intervalos de integração infinitos:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

- Integrais impróprias com descontinuidades infinitas no intervalo de integração:

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x-1}, \quad \int_0^\pi \operatorname{tg} x dx$$

- Integrais impróprias com descontinuidades infinitas e intervalos infinitos de integração:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 9}, \quad \int_1^{+\infty} \sec x dx$$

■ INTEGRAIS SOBRE INTERVALOS INFINITOS

Para motivar uma definição razoável para integrais impróprias da forma

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

vamos começar com o caso em que f é contínua e não negativa em $[a, +\infty)$; assim, podemos pensar na integral como a área abaixo da curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, +\infty)$ (Figura 7.8.1). A princípio, podemos estar inclinados a argumentar que essa área é infinita, pois a região tem uma extensão infinita. Porém, tal argumento estará baseado em uma intuição vaga, e não em uma lógica matemática precisa, uma vez que o conceito de área foi somente definido em intervalos de *extensão finita*. Dessa forma, antes de fazer qualquer afirmativa razoável sobre a área da região na Figura 7.8.1, precisamos começar por definir o que entendemos por área dessa região. Para isso, será útil examinar um exemplo específico.

Vamos supor que estejamos interessados na área A da região que está abaixo da curva $y = 1/x^2$ e acima do intervalo $[1, +\infty)$ do eixo x . Em vez de tentar encontrá-la toda de uma vez, vamos começar por calcular a parte dela acima do intervalo finito $[1, b]$, onde $b > 1$ é arbitrário. Essa área é

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

(Figura 7.8.2). Se permitirmos b crescer de tal forma que $b \rightarrow +\infty$, então a parte da área acima de $[1, b]$ irá começar a preencher a área sobre todo o intervalo $[1, +\infty)$ (Figura 7.8.3); logo, podemos definir razoavelmente a área A sob $y = 1/x^2$ sobre o intervalo $[1, +\infty)$ como sendo

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1 \quad (1)$$

Assim, a área tem um valor finito de 1, e não é infinita, como havíamos conjecturado inicialmente.

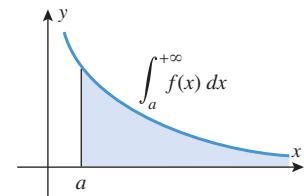


Figura 7.8.1

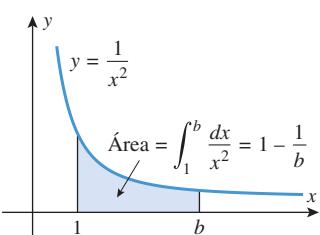
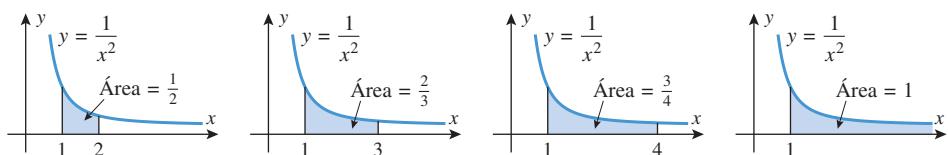


Figura 7.8.2

Figura 7.8.3



Tomando a discussão anterior como guia, vamos fazer a definição a seguir (que é aplicável a funções com valores tanto positivos quanto negativos).

Se f for uma função não negativa no intervalo $[a, +\infty)$, então interpretamos a integral imprópria da Definição 7.8.1 como a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, +\infty)$. Se a integral convergir, então a área é finita e igual ao valor da integral; se divergir, consideramos a área como sendo infinita.

7.8.1 DEFINIÇÃO A *integral imprópria de f no intervalo $[a, +\infty)$* é definida por

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

No caso em que o limite existe, dizemos que a integral imprópria *converge*, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Caso ele não exista, dizemos que a integral imprópria *diverge*, e não é atribuído qualquer valor.

► **Exemplo 1** Calcule

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Solução (a) Seguindo a definição, substituímos o limite superior infinito por um limite finito b e, então, tomamos o limite da integral resultante. Isso fornece

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Como o limite é finito, a integral converge e seu valor é $1/2$.

Solução (b)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$$

Nesse caso, a integral diverge e, portanto, não tem valor algum. ◀

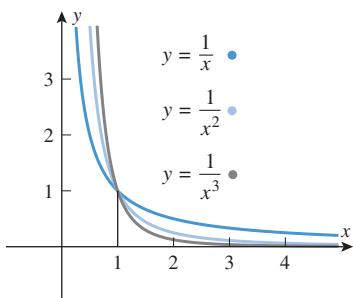


Figura 7.8.4

Como as funções $1/x^3$, $1/x^2$ e $1/x$ são não negativas no intervalo $[1, +\infty)$; temos, a partir de (1) e do último exemplo, que sobre esse intervalo a a área sob $y = 1/x^3$ é $\frac{1}{2}$, que a área sob $y = 1/x^2$ é 1 e que a área sob $y = 1/x$ é infinita. Porém, superficialmente, os gráficos das três funções são muito parecidos (Figura 7.8.4), e não há nada que sugira por que uma das áreas seja infinita e as outras duas, finitas. Uma explicação é que $1/x^3$ e $1/x^2$ tendem a zero mais rapidamente do que $1/x$ quando $x \rightarrow +\infty$, de tal forma que a área no intervalo $[1, b]$ acumula menos rapidamente sob as curvas $y = 1/x^3$ e $y = 1/x^2$ do que sob $y = 1/x$ quando $b \rightarrow +\infty$, e a diferença é suficiente para que as duas primeiras áreas sejam finitas e a terceira, infinita.

► **Exemplo 2** Com quais valores de p a integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge?

Solução Sabemos, do exemplo anterior, que a integral diverge se $p = 1$; portanto, supomos que $p \neq 1$. Nesse caso, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right]$$

Se $p > 1$, então o expoente $1-p$ é negativo e $b^{1-p} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow +\infty$; se $p < 1$, então o expoente $1-p$ é positivo e $b^{1-p} \rightarrow +\infty$ quando $b \rightarrow +\infty$. Assim, a integral converge se $p > 1$ e diverge em caso contrário. No caso convergente, o valor da integral é

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[0 - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} \quad (p > 1) \quad \blacktriangleleft$$

O seguinte teorema resume esse resultado.

7.8.2 TEOREMA

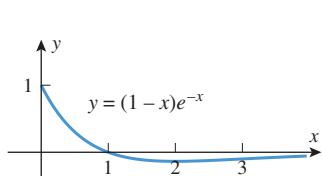
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

► **Exemplo 3** Calcule $\int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x} dx$.

Solução Inicialmente, calculamos a integral indefinida usando integração por partes. Tomando $u = 1 - x$ e $dv = e^{-x} dx$, obtemos

$$\int (1-x)e^{-x} dx = -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x} dx = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

Assim,



A área líquida com sinal entre o gráfico e o intervalo $[0, +\infty)$ é zero.

Figura 7.8.5

Se f for não negativa no intervalo $(-\infty, +\infty)$, então interpretamos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

como a área sob o gráfico de f acima do intervalo $(-\infty, +\infty)$. A área é finita e igual ao valor da integral se esta convergir, e infinita se ela divergir.

► **Exemplo 4** Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solução Vamos calcular a integral escolhendo $c = 0$ em (3). Com esse valor para c , obtemos

Embora seja costume escolher $c = 0$ em (3), essa escolha não é relevante, já que pode ser provado que nem a convergência nem o valor da integral são afetados pela escolha de c .

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctg x]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctg x]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\arctg a) = \frac{\pi}{2}$$

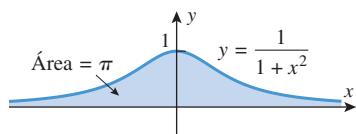
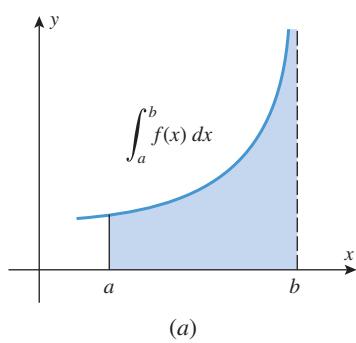


Figura 7.8.6

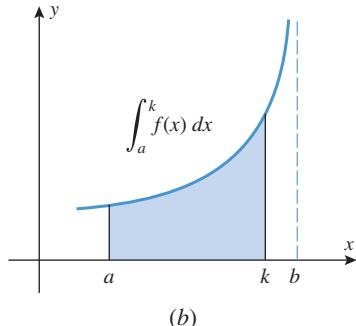
Assim, a integral converge e seu valor é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Uma vez que o integrando é não negativo no intervalo $(-\infty, +\infty)$, a integral representa a área da região mostrada na Figura 7.8.6. ◀



(a)



(b)

Figura 7.8.7

■ INTEGRAIS CUJOS INTEGRANDOS TÊM DESCONTINUIDADES INFINITAS

A seguir, vamos considerar integrais impróprias cujos integrandos têm descontinuidades infinitas. Vamos começar com o caso em que o intervalo de integração é um intervalo finito $[a, b]$ e a descontinuidade infinita ocorre na extremidade direita.

Para motivar uma definição apropriada para tal integral, vamos considerar o caso em que f é não negativa em $[a, b]$; dessa forma, podemos interpretar a integral imprópria $\int_a^b f(x) dx$ como a área da região na Figura 7.8.7a. O problema de encontrar a área dessa região é complicado pelo fato de que ela se estende indefinidamente na direção positiva de y . Porém, em vez de tentar encontrar a área toda de uma só vez, podemos proceder indiretamente, calculando a parte dela acima do intervalo $[a, k]$, onde $a \leq k < b$, e então fazendo k tender a b para completar a área toda da região (Figura 7.8.7b). Motivados por essa ideia, elaboramos a definição a seguir.

7.8.4 DEFINIÇÃO Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em b , então a **integral imprópria de f no intervalo $[a, b]$** é definida por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow b^-} \int_a^k f(x) dx \quad (4)$$

Caso o limite indicado exista, dizemos que a integral imprópria **converge**, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria **diverge**, e não é atribuído qualquer valor.

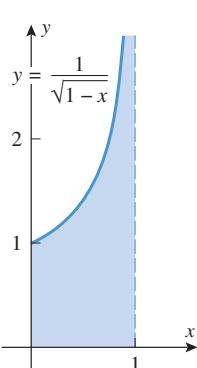


Figura 7.8.8

► **Exemplo 5** Calcule $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solução A integral é imprópria, pois o integrando tende a $+\infty$ quando x tende para o limite superior 1 pela esquerda (Figura 7.8.8). A partir de (4),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{k \rightarrow 1^-} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_0^k \\ &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \left[-2\sqrt{1-k} + 2 \right] = 2 \end{aligned}$$

As integrais impróprias com uma descontinuidade infinita na extremidade esquerda ou dentro do intervalo de integração são definidas como segue.

7.8.5 DEFINIÇÃO Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em a , então a **integral imprópria de f no intervalo $[a, b]$** é definida por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow a^+} \int_k^b f(x) dx \quad (5)$$

Dizemos que a integral **converge** se o limite existir e **diverge** caso contrário.

Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em um ponto c em (a, b) , então a **integral imprópria de f no intervalo $[a, b]$** é definida por

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6)$$

em que duas integrais do lado direito são impróprias. Dizemos que a integral imprópria do lado esquerdo **converge** se ambas as *integrais* da direita convergirem e **diverge** se *alguma delas* divergir (Figura 7.8.9).

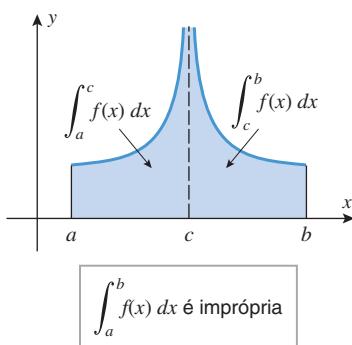


Figura 7.8.9

► **Exemplo 6** Calcule

$$(a) \int_1^2 \frac{dx}{1-x} \quad (b) \int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$$

Solução (a) A integral é imprópria porque o integrando tende a $-\infty$ quando x tende ao limite inferior 1 pela direita (Figura 7.8.10). A partir da Definição 7.8.5, obtemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{1-x} &= \lim_{k \rightarrow 1^+} \int_k^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{k \rightarrow 1^+} \left[-\ln|1-x| \right]_k^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow 1^+} [-\ln|-1| + \ln|1-k|] = \lim_{k \rightarrow 1^+} \ln|1-k| = -\infty \end{aligned}$$

Assim, a integral diverge.

Solução (b) A integral é imprópria porque o integrando tende a $+\infty$ no ponto $x = 2$, que está dentro do intervalo de integração. A partir da Definição 7.8.5, obtemos

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} \quad (7)$$

Figura 7.8.10

e precisamos investigar a convergência de ambas as integrais impróprias do lado direito. Temos

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k \rightarrow 2^-} \int_1^k \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k \rightarrow 2^-} \left[3(k-2)^{1/3} - 3(1-2)^{1/3} \right] = 3$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k \rightarrow 2^+} \int_k^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k \rightarrow 2^+} \left[3(4-2)^{1/3} - 3(k-2)^{1/3} \right] = 3\sqrt[3]{2}$$

Assim, a partir de (7),

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2} \quad \blacktriangleleft$$

ADVERTÊNCIA

Às vezes, é tentador aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo diretamente a uma integral imprópria, sem tomar os limites apropriados. Para ilustrar o que pode acontecer de errado com esse procedimento, suponha que ignoremos o fato de que a integral

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad (8)$$

é imprópria e a calculemos incorretamente como

$$-\frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -1 - (1) = -2$$

Esse resultado é evidentemente incorreto, pois o integrando nunca é negativo e, por consequência, a integral não poderia ser negativa! Para calcular (8) corretamente, deveríamos primeiro escrever

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

e, então, tratar cada parcela como uma integral imprópria. Na primeira parcela, vemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{k \rightarrow 1^-} \int_0^k \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{k \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{k-1} - 1 \right] = +\infty$$

de modo que (8) diverge.

■ COMPRIMENTO DE ARCO E ÁREA DE SUPERFÍCIE USANDO INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Nas Definições 6.4.2 e 6.5.2 para o comprimento de arco e a área de superfície, exigiu-se que a função f fosse lisa (derivada primeira contínua) para garantir a integrabilidade na fórmula resultante. Porém, essa exigência é muito restritiva, uma vez que algumas das fórmulas mais básicas em Geometria envolvem funções que não são lisas, mas que levam a integrais impróprias convergentes. Assim, vamos ampliar a definição de comprimento de arco e de área de superfície para permitir funções que não sejam lisas, mas para as quais a integral resultante na fórmula convirja.

► **Exemplo 7** Deduza a fórmula para a circunferência de um círculo de raio r .

Solução Por conveniência, vamos supor que o círculo esteja centrado na origem; nesse caso, sua equação será $x^2 + y^2 = r^2$. Encontraremos o comprimento de arco da parte do círculo que está no primeiro quadrante e, então, vamos multiplicá-lo por 4 para obter a circunferência total (Figura 7.8.11).

Como a equação do semicírculo superior é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, temos, a partir da Fórmula (4) da Seção 6.4, que a circunferência C é

$$\begin{aligned} C &= 4 \int_0^r \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 4r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Essa integral é imprópria por causa da descontinuidade infinita em $x = r$, de modo que a calculamos escrevendo

$$\begin{aligned} C &= 4r \lim_{k \rightarrow r^-} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= 4r \lim_{k \rightarrow r^-} \left[\arcsen\left(\frac{x}{r}\right) \right]_0^k && \text{Fórmula (77) da Tabela de Integrais das Capas} \\ &= 4r \lim_{k \rightarrow r^-} \left[\arcsen\left(\frac{k}{r}\right) - \arcsen 0 \right] \\ &= 4r[\arcsen 1 - \arcsen 0] = 4r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi r \end{aligned}$$

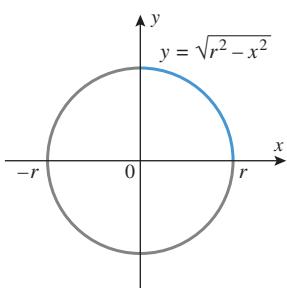


Figura 7.8.11

EXERCÍCIOS DE COMPRENSÃO 7.8 (Ver página 557 para respostas.)

1. Em cada parte, determine se a integral é imprópria e, caso positivo, dê a razão disso. Não calcule as integrais.

(a) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cotg x \, dx$ (b) $\int_{\pi/4}^{\pi} \cotg x \, dx$
 (c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$ (d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \, dx$

2. Expressse cada integral imprópria do Exercício 1 em termos de um ou mais limites apropriados. Não calcule os limites.

3. A integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} x^{-p} \, dx$$

converge a _____ desde que _____.

4. Calcule as integrais que converjam.

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$ (b) $\int_0^{+\infty} e^x \, dx$
 (c) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} \, dx$ (d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

EXERCÍCIOS 7.8 Recurso Gráfico CAS

1. Em cada parte, determine se a integral é imprópria e, se for, explique por quê.

(a) $\int_1^5 \frac{dx}{x-3}$ (b) $\int_1^5 \frac{dx}{x+3}$ (c) $\int_0^1 \ln x \, dx$
 (d) $\int_1^{+\infty} e^{-x} \, dx$ (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (f) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$

2. Em cada parte, determine todos os valores de p com os quais a integral é imprópria.

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (b) $\int_1^2 \frac{dx}{x-p}$ (c) $\int_0^1 e^{-px} \, dx$

3-32 Calcule as integrais que converjam. ■

3. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \, dx$ 4. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx$
 5. $\int_3^{+\infty} \frac{2}{x^2-1} \, dx$ 6. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \, dx$
 7. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} \, dx$ 8. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} \, dx$
 9. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$ 10. $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2+9}$
 11. $\int_{-\infty}^0 e^{3x} \, dx$ 12. $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x \, dx}{3-2e^x}$
 13. $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$ 14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \, dx$
 15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2} \, dx$ 16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \, dt$
 17. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$ 18. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
 19. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$ 20. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$
 21. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 22. $\int_{-3}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{9-x^2}}$

23. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2 \cos x}} \, dx$ 24. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg} x} \, dx$
 25. $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$ 26. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}$
 27. $\int_{-1}^8 x^{-1/3} \, dx$ 28. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$
 29. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ 30. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$
 31. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ 32. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

33-36 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

33. $\int_1^{+\infty} x^{-4/3} \, dx$ converge a 3.

34. Se f for contínua em $[a, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, então $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ converge.

35. $\int_1^2 \frac{1}{x(x-3)} \, dx$ é uma integral imprópria.

36. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} \, dx = 0$

37-40 Faça a substituição u e calcule a integral definida resultante. ■

37. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$; $u = \sqrt{x}$ [Nota: $u \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$]

38. $\int_{12}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$; $u = \sqrt{x}$ [Nota: $u \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$]

39. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} \, dx$; $u = 1 - e^{-x}$
 [Nota: $u \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow +\infty$]

40. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \, dx$; $u = e^{-x}$

C 41-42 Expresse a integral imprópria como um limite e, então, calcule esse limite com um CAS. Confirme sua resposta calculando diretamente as integrais com um CAS. ■

41. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

42. $\int_0^{+\infty} x e^{-3x} \, dx$

C 43. Em cada item, tente calcular exatamente a integral com um CAS. Se sua resposta não for numericamente simples, então use o CAS para encontrar uma aproximação numérica da integral.

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^8 + x + 1} \, dx$ (b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \, dx$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x} \, dx$ (d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, dx$

C 44. Em cada item, confirme o resultado com um CAS.

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$

(c) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \, dx = -\frac{\pi^2}{12}$

45. Encontre o comprimento de arco da curva $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ acima do intervalo $[0, 8]$.

46. Encontre o comprimento de arco da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ acima do intervalo $[0, 2]$.

47-48 Use a Regra de L'Hôpital para ajudar a calcular a integral imprópria. ■

47. $\int_0^1 \ln x \, dx$

48. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

49. Encontre a área da região entre o eixo x e a curva $y = e^{-3x}$ com $x \geq 0$.

50. Encontre a área da região entre o eixo x e a curva $y = 8/(x^2 - 4)$ com $x \geq 4$.

51. Suponha que a região entre o eixo x e a curva $y = e^{-x}$ com $x \geq 0$ gire em torno do eixo x .

- (a) Encontre o volume do sólido que é gerado.
(b) Encontre a área da superfície do sólido.

ENFOCANDO CONCEITOS

52. Suponha que f e g sejam funções contínuas e que

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

se $x \geq a$. Dê um argumento informal razoável, usando áreas, para explicar por que os seguintes resultados são verdadeiros.

- (a) Se $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ diverge.
(b) Se $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ converge e $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) \, dx$.

[Nota: Os resultados neste exercício são, às vezes, chamados de **testes de comparação** para integrais impróprias.]

53-56 Use os resultados do Exercício 52. ■

53. (a) Confirme gráfica e algebricamente que

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad (x \geq 1)$$

(b) Calcule a integral

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \, dx$$

(c) O que o resultado obtido em (b) diz sobre a integral

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \, dx?$$

54. (a) Confirme gráfica e algebricamente que

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{e^x}{2x+1} \quad (x \geq 0)$$

(b) Calcule a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x+1}$$

(c) O que o resultado obtido em (b) diz sobre a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{2x+1} \, dx?$$

55. Seja R a região à direita de $x = 1$ que é limitada pelo eixo x e pela curva $y = 1/x$. Quando essa região gira em torno do eixo x , ela gera um sólido cuja superfície é conhecida como **corneta de Gabriel** (por razões que devem ficar claras na figura abaixo). Mostre que o sólido tem um volume finito, mas que sua superfície tem uma área infinita. [Nota: Foi sugerido que se alguém pudesse saturar o interior do sólido com tinta e permitir que permeasse para a superfície, então poderíamos pintar uma superfície infinita com uma quantidade finita de tinta! O que você acha?]

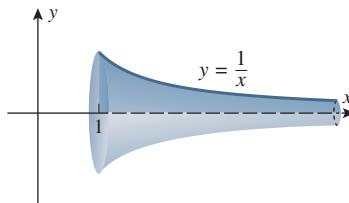


Figura Ex-55

56. Em cada parte, use o Exercício 52 para determinar se a integral converge ou diverge. Se convergir, então use a parte (b) daquele exercício para encontrar uma cota superior para o valor da integral.

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} \, dx$ (b) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^5 + 1} \, dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{2x+1} \, dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

57. Esboce a região cuja área é

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

e use seu esboço para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-y}{y}} dy$$

58. (a) Dê um argumento informal razoável, baseado em áreas, que explique por que as integrais

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

divergem.

(b) Mostre que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ diverge.

59. Em teoria eletromagnética, o potencial magnético em um ponto no eixo de uma bobina circular é dado por

$$u = \frac{2\pi NIr}{k} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

onde N, I, r, k e a são constantes. Encontre u .

C 60. A *velocidade média* \bar{v} das moléculas de um gás ideal é dada por

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$

e a *raiz média quadrada da velocidade* v_{rms} , por

$$v_{\text{rms}}^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^4 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$

onde v é a velocidade da molécula, T é a temperatura do gás, M é o peso molecular do gás e R é a constante do gás.

(a) Use um CAS para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{2a^4}, \quad a > 0$$

e esse resultado para mostrar que $\bar{v} = \sqrt{8RT/(\pi M)}$.

(b) Use um CAS para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^5}, \quad a > 0$$

e esse resultado para mostrar que $v_{\text{rms}} = \sqrt{3RT/M}$.

61-62 Um medicamento pode ser ministrado a um paciente de várias maneiras. Dado um método particular, seja $c(t)$ a concentração (medida em mg/L) de medicamento na corrente sanguínea de um paciente t horas depois de aplicada a dose. A área abaixo da curva $c = c(t)$ e acima do intervalo $[0, +\infty)$ indica a “disponibilidade” do medicamento para o corpo do paciente. Em cada exercício, determine qual método oferece maior disponibilidade no intervalo dado. ■

61. Método 1: $c_1(t) = 5(e^{-0.2t} - e^{-t})$
Método 2: $c_2(t) = 4(e^{-0.2t} - e^{-3t})$

62. Método 1: $c_1(t) = 6(e^{-0.4t} - e^{-1.3t})$

Método 2: $c_2(t) = 5(e^{-0.4t} - e^{-3t})$

63. No Exercício 25 da Seção 6.6, determinamos o trabalho necessário para levar um satélite de 6.000 libras para uma posição orbital que está 1.000 milhas acima da superfície da Terra. As ideias discutidas naquele exercício serão necessárias aqui.

- (a) Encontre uma integral definida que represente o trabalho necessário para levar um satélite de 6.000 libras para uma posição b milhas acima da superfície da Terra.
- (b) Encontre uma integral definida que represente o trabalho necessário para levar um satélite de 6.000 libras para uma distância “infinita” acima da superfície da Terra. Calcule a integral. [Nota: O resultado obtido aqui é, às vezes, chamado de trabalho necessário para “escapar” da gravidade da Terra.]

64-65 Uma *transformada* é uma fórmula que converte ou “transforma” uma função em outra. As transformadas são usadas em aplicações para converter um problema difícil em um mais fácil, cuja solução pode ser usada para resolver o problema original difícil. A *transformada de Laplace* de uma função $f(t)$, que desempenha um papel importante no estudo das equações diferenciais, é denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Nessa fórmula, s é tratada como uma constante no processo de integração; assim, a transformada de Laplace tem o efeito de transformar $f(t)$ em uma função de s . Use essa fórmula nestes exercícios. ■

64. Mostre que

- (a) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, $s > 0$
- (b) $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$, $s > 2$
- (c) $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$, $s > 0$
- (d) $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$, $s > 0$.

65. Em cada parte, encontre a transformada de Laplace.

- (a) $f(t) = t$, $s > 0$
- (b) $f(t) = t^2$, $s > 0$
- (c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$, $s > 0$

C 66. Mais adiante no livro, no Volume 2, mostraremos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Confirme que isso é razoável usando um CAS ou uma calculadora com capacidade de integração numérica.

67. Use o resultado do Exercício 66 para mostrar que

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1, \quad \sigma > 0.$$

68-69 Uma integral imprópria convergente em um intervalo infinito pode ser aproximada, primeiro, substituindo-se o(s) limite(s) infinito(s) de integração por limite(s) finito(s) e, então, usando uma técnica de integração numérica, como a regra de Simpson, para aproximar a integral com limite(s) finito(s). Essa técnica está ilustrada nestes exercícios. ■

- 68.** Suponha que a integral no Exercício 66 foi aproximada escrevendo-a primeiro como

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^K e^{-x^2} dx + \int_K^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

e, então, abandonando o segundo termo e aplicando a regra de Simpson à integral

$$\int_0^K e^{-x^2} dx$$

A aproximação resultante tem duas fontes de erro: o erro da regra de Simpson e o erro

$$E = \int_K^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

que resulta de descartar o segundo termo. Chamanos E de **erro de truncamento**.

- (a) Aproxime a integral no Exercício 66 aplicando a regra de Simpson, com $n = 10$ subdivisões à integral

$$\int_0^3 e^{-x^2} dx$$

Arredonde sua resposta para quatro casas decimais e compare a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ arredondado para quatro casas decimais.

- (b) Use o resultado obtido no Exercício 52 e o fato de que $e^{-x^2} \leq \frac{1}{3}xe^{-x^2}$ se $x \geq 3$ para mostrar que o erro de truncamento na aproximação de (a) satisfaz $0 < E < 2,1 \times 10^{-5}$.

- 69.** (a) Pode-se mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$$

Aproxime essa integral aplicando a regra de Simpson, com $n = 20$ subdivisões à integral

$$\int_0^4 \frac{1}{x^6 + 1} dx$$

Arredonde sua resposta para três casas decimais e compare-a com $\pi/3$ arredondado para três casas decimais.

- (b) Use o resultado obtido no Exercício 52 e o fato de que $1/(x^6 + 1) < 1/x^6$ se $x \geq 4$ para mostrar que o erro de truncamento na aproximação em (a) satisfaz $0 < E < 2 \times 10^{-4}$.

- 70.** Com quais valores de p a integral $\int_0^{+\infty} e^{px} dx$ converge?

- 71.** Mostre que $\int_0^1 dx/x^p$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.

- C 72.** É possível, às vezes, converter uma integral imprópria em uma integral “própria” com o mesmo valor, através de uma substituição apropriada. Calcule a integral a seguir, fazendo a substituição indicada, e investigue o que acontece se calcularmos a integral diretamente usando um CAS.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx; u = \sqrt{1-x}$$

- 73-74** Transforme a integral imprópria dada em uma integral própria fazendo a substituição u dada e, então, aproxime a integral própria pela regra de Simpson com $n = 10$ subdivisões. Arredonde sua resposta para três casas decimais. ■

73. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx; u = \sqrt{x}$

74. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx; u = \sqrt{1-x}$

- 75. Texto** O que é “impróprio” a respeito de uma integral sobre um intervalo infinito? Explique por que a Definição 5.5.1 de $\int_a^b f(x) dx$ falha com $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Discuta uma estratégia para associar um valor a $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

- 76. Texto** O que é “impróprio” a respeito de uma integral sobre um intervalo no qual o integrando tem uma descontinuidade infinita? Explique por que a Definição 5.5.1 de $\int_a^b f(x) dx$ falha se o gráfico de f tiver uma assíntota vertical em $x = a$. Discuta uma estratégia para associar um valor a $\int_a^b f(x) dx$ nessa circunstância.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.8

- 1.** (a) própria (b) imprópria, pois $\cot g x$ tem uma descontinuidade infinita em $x = \pi$ (c) imprópria, porque o intervalo de integração é infinito (d) imprópria, porque o intervalo de integração é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em $x = 1$

- 2.** (b) $\lim_{b \rightarrow \pi^-} \int_{\pi/4}^b \cot g x dx$ (c) $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 1} dx$ (d) $\lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{1}{x^2 - 1} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2 - 1} dx$

- 3.** $\frac{1}{p-1}; p > 1$ **4.** (a) 1 (b) diverge (c) diverge (d) 3

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 7

- 1-6** Calcule a integral com a ajuda de uma substituição u apropriada. ■

1. $\int \sqrt{4 + 9x} dx$

2. $\int \frac{1}{\sec \pi x} dx$

3. $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$

4. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

5. $\int x \operatorname{tg}^2(x^2) \sec^2(x^2) dx$

6. $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{x+9} dx$

- 7.** (a) Calcule a integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

de três maneiras: usando a substituição $u = \sqrt{x}$, usando a substituição $u = \sqrt{2-x}$ e completando o quadrado.

- (b) Mostre que as respostas de (a) são equivalentes.

8. Calcule a integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ usando

(a) integração por partes.

(b) a substituição $u = \sqrt{x^2 + 1}$.

9-12 Use integração por partes para calcular a integral. ■

9. $\int xe^{-x} dx$

10. $\int x \sin 2x dx$

11. $\int \ln(2x+3) dx$

12. $\int_0^{1/2} \arctan(2x) dx$

13. Calcule $\int 8x^4 \cos 2x dx$ usando integração por partes tabulada.

14. Uma partícula move-se ao longo do eixo x com função velocidade $v(t) = t^2 e^{-t}$. Qual é a distância percorrida por ela do instante $t = 0$ até o instante $t = 5$?

15-20 Calcule a integral. ■

15. $\int \sin^2 5\theta d\theta$

16. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$

17. $\int \sin x \cos 2x dx$

18. $\int_0^{\pi/6} \sin 2x \cos 4x dx$

19. $\int \sin^4 2x dx$

20. $\int x \cos^5(x^2) dx$

21-26 Calcule a integral efetuando uma substituição trigonométrica apropriada. ■

21. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

22. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16-x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

24. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}} dx$

25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$

26. $\int \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x} dx$

27-32 Calcule a integral usando o método das frações parciais. ■

27. $\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$

28. $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

29. $\int \frac{x^2+2}{x+2} dx$

30. $\int \frac{x^2+x-16}{(x-1)(x-3)^2} dx$

31. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$

32. $\int \frac{dx}{x^3+x}$

33. Considere a integral $\int \frac{1}{x^3-x} dx$.

- (a) Calcule a integral usando a substituição $x = \sec \theta$. Com quais valores de x sua resposta é válida?
- (b) Calcule a integral usando a substituição $x = \tan \theta$. Com quais valores de x sua resposta é válida?
- (c) Calcule a integral usando o método das frações parciais. Com quais valores de x sua resposta é válida?

34. Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = (x-3)/(x^3+x^2)$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

35-40 Calcule a integral usando a Tabela de Integrais. ■

35. $\int \sin 7x \cos 9x dx$

36. $\int (x^3 - x^2)e^{-x} dx$

37. $\int x \sqrt{x-x^2} dx$

38. $\int \frac{dx}{x \sqrt{4x+3}}$

39. $\int \tan^2 2x dx$

40. $\int \frac{3x-1}{2+x^2} dx$

41-42 Aproxime a integral usando (a) a aproximação pelo ponto médio M_{10} , (b) a aproximação trapezoidal T_{10} e (c) a aproximação S_{20} pela regra de Simpson. Em cada caso, encontre o valor exato da integral e aproxime o erro absoluto. Expressse sua resposta com pelo menos quatro casas decimais. ■

41. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

42. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

43-44 Use as desigualdades (12), (13) e (14) da Seção 7.7 para encontrar cotas superiores para os erros nas partes (a), (b) e (c) dos exercícios indicados. ■

43. Exercício 41.

44. Exercício 42.

45-46 Use as desigualdades (12), (13) e (14) da Seção 7.7 para encontrar um número n de subintervalos para (a) a aproximação pelo ponto médio M_n , (b) a aproximação trapezoidal T_n e (c) a aproximação S_n pela regra de Simpson para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-4} . ■

45. Exercício 41

46. Exercício 42

47-50 Calcule a integral se for convergente. ■

47. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

48. $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

49. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

50. $\int_0^1 \frac{1}{2x-1} dx$

51. Encontre a área da região que é delimitada pelo eixo x e a curva $y = (\ln x - 1)/x^2$ com $x \geq e$.

52. Encontre o volume do sólido que é gerado quando a região entre a curva $y = e^{-x}$ com $x \geq 0$ e o eixo x gira em torno do eixo y .

53. Encontre um valor positivo de a que satisfaça a equação

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = 1$$

54. Considere os seguintes métodos de calcular integrais: substituição u , integração por partes, frações parciais, fórmulas de redução e substituições trigonométricas. Em cada parte, dê a abordagem que você tentaria em primeiro lugar para calcular a integral. Se nenhuma delas parecer apropriada, aponte isso. Não é preciso calcular a integral.

(a) $\int x \sin x dx$

(b) $\int \cos x \sin x dx$

- (c) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$ (d) $\int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x dx$
 (e) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$ (f) $\int \frac{3x^2}{(x+1)^3} dx$
 (g) $\int \operatorname{arc tg} x dx$ (h) $\int \sqrt{4-x^2} dx$
 (i) $\int x \sqrt{4-x^2} dx$

55-74 Calcule a integral. ■

55. $\int \frac{dx}{(3+x^2)^{3/2}}$ 56. $\int x \cos 3x dx$
 57. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^7 \theta d\theta$ 58. $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta - 6 \sin \theta + 12} d\theta$
 59. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x dx$ 60. $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx$
 61. $\int e^{2x} \cos 3x dx$ 62. $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^{3/2} dx$

63. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ 64. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{(4-9x^2)^2}$
 65. $\int_4^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx$ 66. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$
 67. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ 68. $\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)}$
 69. $\int_0^{1/2} \operatorname{arc sen} x dx$ 70. $\int \operatorname{tg}^5 4x \sec^4 4x dx$
 71. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$ 72. $\int \frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^3 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta} d\theta$
 73. $\int_a^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$
 74. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}, \quad a, b > 0$

CAPÍTULO 7 ESTABELECENDO CONEXÕES CAS

1. Lembre, do Teorema 3.3.1 e da discussão que o precede, que, se $f'(x) > 0$, então a função f é crescente e tem uma inversa. O propósito das partes (a), (b) e (c) deste problema é mostrar que, se essa condição estiver satisfeita e se f' for contínua, então a integral definida de f^{-1} pode ser expressa em termos de uma integral definida de f .

(a) Use a integração por partes para mostrar que

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x) dx$$

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que, se $y = f(x)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy$$

(c) Mostre que, se fizermos $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$, então o resultado de (b) poderá ser escrito como

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(x) dx = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x) dx$$

2. Em cada parte, use o resultado do Exercício 1 para obter a equação e confirme que ela está correta fazendo as integrações.

- (a) $\int_0^{1/2} \operatorname{arc sen} x dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc sen}(\frac{1}{2}) - \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x dx$
 (b) $\int_e^{e^2} \ln x dx = (2e^2 - e) - \int_1^2 e^x dx$

3. A função gama, $\Gamma(x)$, é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Pode-se mostrar que essa integral imprópria converge se, e somente se, $x > 0$.

- (a) Encontre $\Gamma(1)$.
 (b) Prove: $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ com qualquer $x > 0$. [Sugestão: Use integração por partes.]
 (c) Use os resultados de (a) e (b) para encontrar $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$ e $\Gamma(4)$; depois, faça uma conjectura sobre $\Gamma(n)$ com valores inteiros positivos de n .
 (d) Mostre que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. [Sugestão: Ver Exercício 66, da Seção 7.8.]
 (e) Use os resultados obtidos em (b) e (d) para mostrar que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

4. Usando a função gama definida no Exercício 3, da Seção 7.8 mostre que

(a) $\int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n \Gamma(n+1), \quad n > 0$

[Sugestão: Tome $t = -\ln x$.]

(b) $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad n > 0$.

[Sugestão: Tome $t = x^n$. Use o resultado do Exercício 3 (b).]

- CAS 5. Um *pêndulo simples* consiste em uma massa que oscila em um plano vertical no extremo de uma haste sem massa com

comprimento L , conforme a Figura Ex-5. Suponha que um pêndulo simples seja deslocado de um ângulo θ_0 e solto a partir do repouso. Pode-se mostrar que, na ausência de atrito, o tempo T necessário para o pêndulo fazer uma oscilação completa, chamado de **período**, é dado por

$$T = \sqrt{\frac{8L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \quad (1)$$

onde $\theta = \theta(t)$ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical no instante t . A integral imprópria em (1) é difícil de ser calculada numericamente. Usando a substituição sugerida abaixo, pode-se mostrar que o período pode ser expresso como

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \quad (2)$$

onde $k = \sin(\theta_0/2)$. A integral em (2) é chamada de **integral elíptica completa de primeira espécie** e é mais facilmente calculada por métodos numéricos.

- (a) Obtenha (2) a partir de (1) substituindo

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$$

$$\cos \theta_0 = 1 - 2 \sin^2(\theta_0/2)$$

$$k = \sin(\theta_0/2)$$

e, então, fazendo a mudança de variável

$$\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{k}$$

- (b) Use (2) e a capacidade de integração numérica de seu CAS para encontrar o período de um pêndulo simples para o qual $L = 1,5$ pés, $\theta = 20^\circ$ e $g = 32$ pés/s².

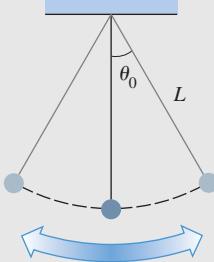


Figura Ex-5



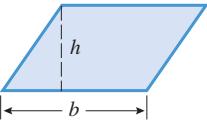
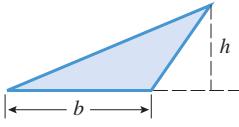
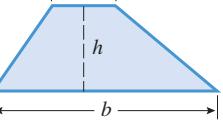
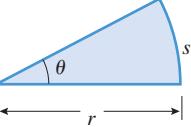
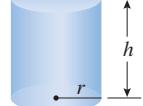
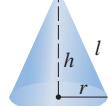
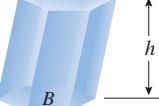
EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Para aprender como a integração numérica pode ser aplicada à análise de custo de um projeto de Engenharia, confira o módulo intitulado **Planejamento de Estradas de Ferro** em

www.grupoa.com.br

FÓRMULAS DE GEOMETRIA

A = área, S = área da superfície lateral, V = volume, h = altura, B = área da base, r = raio, l = altura inclinada, C = circunferência, s = comprimento de arco

Paralelogramo	Triângulo	Trapézio	Círculo	Setor
 $A = bh$	 $A = \frac{1}{2}bh$	 $A = \frac{1}{2}(a+b)h$	 $A = \pi r^2, C = 2\pi r$	 $A = \frac{1}{2}r^2\theta, s = r\theta$ (θ em radianos)
Cilindro circular reto	Cone circular reto	Cilindro ou prisma com bases paralelas		Esfera
 $V = \pi r^2 h, S = 2\pi rh$	 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, S = \pi rl$	 B	 B	 $V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2$
			$V = Bh$	

FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

A FÓRMULA QUADRÁTICA	A FÓRMULA BINOMIAL
As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}y^3 + \dots + nxy^{n-1} + y^n$ $(x-y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}y^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}y^3 + \dots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$

TABELA DE INTEGRAIS

FUNÇÕES BÁSICAS

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$
7. $\int \arcsin u du = u \arcsin u + \sqrt{1-u^2} + C$
8. $\int \arccos u du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$
9. $\int \text{arc tg } u du = u \text{arc tg } u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

10. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
11. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
12. $\int \cot g u du = \ln|\text{sen } u| + C$
13. $\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
 $= \ln|\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u)| + C$
14. $\int \operatorname{cosec} u du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot g u| + C$
 $= \ln|\tan \frac{1}{2}u| + C$
15. $\int \text{arc cotg } u du = u \text{arc cotg } u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$
16. $\int \text{arc sec } u du = u \text{arc sec } u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$
17. $\int \text{arc cossec } u du = u \text{arc cossec } u + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$

RECÍPROCOS DE FUNÇÕES BÁSICAS

18. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u} du = \operatorname{tg} u \mp \operatorname{sec} u + C$
 19. $\int \frac{1}{1 \pm \cos u} du = -\operatorname{cotg} u \pm \operatorname{cossec} u + C$
 20. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{tg} u} du = \frac{1}{2}(u \pm \ln |\cos u \pm \operatorname{sen} u|) + C$
 21. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} u \cos u} du = \ln |\operatorname{tg} u| + C$

22. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{cotg} u} du = \frac{1}{2}(u \mp \ln |\operatorname{sen} u \pm \cos u|) + C$
 23. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u} du = u + \operatorname{cotg} u \mp \operatorname{cossec} u + C$
 24. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{cossec} u} du = u - \operatorname{tg} u \pm \operatorname{sec} u + C$
 25. $\int \frac{1}{1 \pm e^u} du = u - \ln(1 \pm e^u) + C$

POTÊNCIAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

26. $\int \operatorname{sen}^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$
 27. $\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$
 28. $\int \operatorname{tg}^2 u du = \operatorname{tg} u - u + C$
 29. $\int \operatorname{sen}^n u du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u du$
 30. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$
 31. $\int \operatorname{tg}^n u du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u du$

32. $\int \operatorname{cotg}^2 u du = -\operatorname{cotg} u - u + C$
 33. $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C$
 34. $\int \operatorname{cossec}^2 u du = -\operatorname{cotg} u + C$
 35. $\int \operatorname{cotg}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u du$
 36. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$
 37. $\int \operatorname{cossec}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cossec}^{n-2} u \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cossec}^{n-2} u du$

PRODUTOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

38. $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$
 39. $\int \cos mu \cos nu du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

40. $\int \operatorname{sen} mu \cos nu du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$
 41. $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u du$
 $= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u du$

PRODUTOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E EXPONENCIAIS

42. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$

43. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

POTÊNCIAS DE u MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO FUNÇÕES BÁSICAS

44. $\int u \operatorname{sen} u du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$
 45. $\int u \cos u du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$
 46. $\int u^2 \operatorname{sen} u du = 2u \operatorname{sen} u + (2-u^2) \cos u + C$
 47. $\int u^2 \cos u du = 2u \cos u + (u^2-2) \operatorname{sen} u + C$
 48. $\int u^n \operatorname{sen} u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$
 49. $\int u^n \cos u du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u du$
 50. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$

51. $\int ue^u du = e^u(u-1) + C$
 52. $\int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$
 53. $\int u^n a^u du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u du + C$
 54. $\int \frac{e^u du}{u^n} = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u du}{u^{n-1}}$
 55. $\int \frac{a^u du}{u^n} = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^u du}{u^{n-1}}$
 56. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$

POLINÔMIOS MULTIPLICANDO FUNÇÕES BÁSICAS

57. $\int p(u)e^{au} du = \frac{1}{a}p(u)e^{au} - \frac{1}{a^2}p'(u)e^{au} + \frac{1}{a^3}p''(u)e^{au} - \dots$ [sinais alternados: $+ - + - \dots$]
 58. $\int p(u) \operatorname{sen} au du = -\frac{1}{a}p(u) \cos au + \frac{1}{a^2}p'(u) \operatorname{sen} au + \frac{1}{a^3}p''(u) \cos au - \dots$ [sinais alternados em pares depois do primeiro termo: $+ - - + + - - \dots$]
 59. $\int p(u) \cos au du = \frac{1}{a}p(u) \operatorname{sen} au + \frac{1}{a^2}p'(u) \cos au - \frac{1}{a^3}p''(u) \operatorname{sen} au - \dots$ [sinais alternados em pares: $+ - - + + - - \dots$]

FUNÇÕES RACIONAIS CONTENDO POTÊNCIAS DE $a + bu$ NO DENOMINADOR

$$60. \int \frac{u \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} [bu - a \ln|a + bu|] + C$$

$$61. \int \frac{u^2 \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2}(a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln|a + bu| \right] + C$$

$$62. \int \frac{u \, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right] + C$$

$$63. \int \frac{u^2 \, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left[bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right] + C$$

$$64. \int \frac{u \, du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu} \right] + C$$

$$65. \int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$66. \int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

$$67. \int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

FUNÇÕES RACIONAIS CONTENDO $a^2 \pm u^2$ NO DENOMINADOR ($a > 0$)

$$68. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

$$69. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$$

$$70. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

$$71. \int \frac{bu + c}{a^2 + u^2} \, du = \frac{b}{2} \ln(a^2 + u^2) + \frac{c}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

INTEGRAIS DE $\sqrt{a^2 + u^2}$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$ E SUAS RECÍPROCAS ($a > 0$)

$$72. \int \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$73. \int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$74. \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$75. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$76. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$77. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$$

POTÊNCIAS DE u MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO $\sqrt{a^2 - u^2}$ OU SUA RECÍPROCA

$$78. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$79. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} \, du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$80. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} \, du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$81. \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$82. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$83. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

POTÊNCIAS DE u MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ OU SUAS RECÍPROCAS

$$84. \int u \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{1}{3} (u^2 + a^2)^{3/2} + C$$

$$85. \int u \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{1}{3} (u^2 - a^2)^{3/2} + C$$

$$86. \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$87. \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \left| \frac{u}{a} \right| + C$$

$$88. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2} \, du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \arccos \left| \frac{u}{a} \right| + C$$

$$89. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} \, du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$90. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$$

$$91. \int u^2 \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 + a^2) \sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$92. \int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$93. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} \, du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$94. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2} \, du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$95. \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$96. \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

INTEGRAIS CONTENDO $(a^2 + u^2)^{3/2}$, $(a^2 - u^2)^{3/2}$, $(u^2 - a^2)^{3/2}$ ($a > 0$)

$$97. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$98. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

$$99. \int (a^2 - u^2)^{3/2} \, du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$100. \int (u^2 + a^2)^{3/2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 + 5a^2) \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$101. \int (u^2 - a^2)^{3/2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

A

GRÁFICOS DE FUNÇÕES UTILIZANDO CALCULADORAS E RECURSOS COMPUTACIONAIS

■ CALCULADORAS GRÁFICAS E SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

O desenvolvimento de novas tecnologias tem mudado significativamente como e onde matemáticos, engenheiros e cientistas executam seu trabalho, bem como sua abordagem na solução de problemas. Entre as mais significativas inovações estão os programas conhecidos como *Sistemas Algébricos Computacionais* (CAS), cujos exemplos mais comuns são o *Mathematica* e o *Maple*.* Os sistemas algébricos computacionais não apenas têm capacidade gráfica, mas, como o nome sugere, podem executar muitos dos cálculos simbólicos que ocorrem na Álgebra, no Cálculo e na Matemática Superior. Por exemplo, é trivial para um CAS executar a fatoração

$$x^6 + 23x^5 + 147x^4 - 139x^3 - 3464x^2 - 2112x + 23040 = (x + 5)(x - 3)^2(x + 8)^3$$

ou a computação numérica exata

$$\left(\frac{63456}{3177295} - \frac{43907}{22854377} \right)^3 = \frac{2251912457164208291259320230122866923}{382895955819369204449565945369203764688375}$$

A tecnologia também tornou possível gerar, em segundos, gráficos de equações e funções que, no passado, poderiam ter levado horas para ser produzidos. A Figura A.1 mostra os gráficos da função $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$ produzidos com vários recursos gráficos; os dois primeiros foram gerados com os programas *Mathematica* e *Maple*, e o terceiro com uma calculadora gráfica. As calculadoras gráficas produzem gráficos mais grosseiros do que a maioria dos programas de computador, mas têm a vantagem de ser compactas e portáteis.

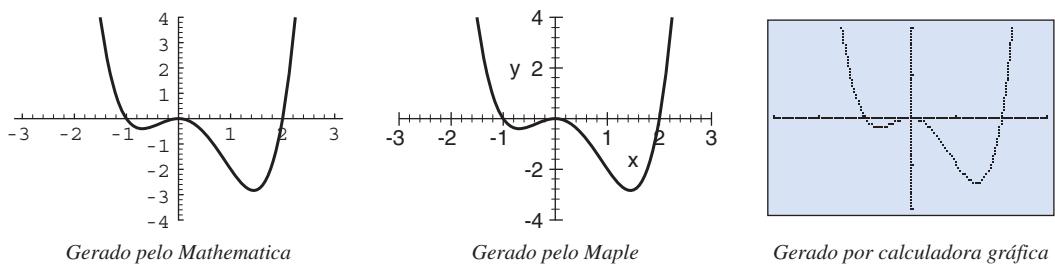


Figura A.1

* *Mathematica* é um produto da Wolfram Research, Inc. e *Maple* é um produto da Waterloo Maple Software, Inc.

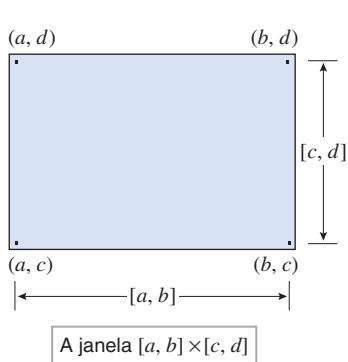


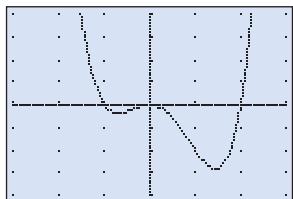
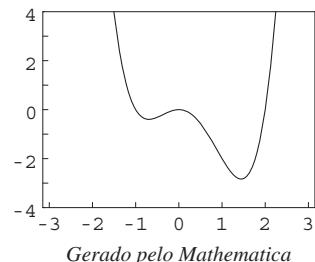
Figura A.2

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use seu próprio recurso computacional para gerar o gráfico da função

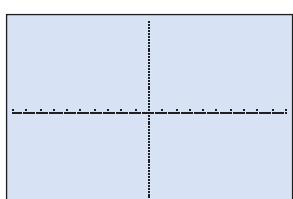
$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

na janela $[-3, 3] \times [-4, 4]$.



Gerado por calculadora gráfica

Figura A.3



$[-5, 5] \times [-5, 5]$
 $x\text{Scl} = 0,5, y\text{Scl} = 10$

Figura A.4

■ JANELAS DE INSPEÇÃO

Os recursos gráficos podem mostrar somente uma parte do plano xy em sua tela; assim, o primeiro passo ao fazer o gráfico de uma equação é determinar qual região retangular do plano xy desejamos ver exposta. Essa região é denominada **janela de inspeção** (ou **retângulo de inspeção**). Por exemplo, na Figura A.1, a janela de inspeção estende-se sobre o intervalo $[-3, 3]$ na direção x e $[-4, 4]$ na direção y . Assim, dizemos que a janela de inspeção é $[-3, 3] \times [-4, 4]$ (leia “[$-3, 3$] por [$-4, 4$]”). Em geral, se a janela de inspeção for $[a, b] \times [c, d]$, então ela se estende entre $x = a$ e $x = b$ na direção x e entre $y = c$ e $y = d$ na direção y . Dizemos que $[a, b]$ é o **intervalo x** da janela e que $[c, d]$ é o **intervalo y** da janela (Figura A.2).

Recursos gráficos diferentes denotam as janelas de inspeção de formas distintas. Por exemplo, os dois primeiros gráficos na Figura A.1 foram produzidos pelos comandos

`Plot [x^4 - x^3 - 2*x^2, {x, -3, 3}, PlotRange ->{-4, 4}]`
(Mathematica)

`plot (x^4 - x^3 - 2*x^2, x = -3..3, y = -4..4);`
(Maple)

e o último gráfico foi produzido em uma calculadora gráfica, pressionando a tecla GRAPH, depois dando os seguintes valores às variáveis que determinam os intervalos x e y :

$$x\text{Min} = -3, \quad x\text{Max} = 3, \quad y\text{Min} = -4, \quad y\text{Max} = 4$$

■ SINAIS REPRESENTANDO PONTOS NA ESCALA E GRADE DE RETAS

Para ajudar a localizar pontos visualmente em uma janela de inspeção, os recursos gráficos fornecem métodos de representar **pontos na escala** (também denominados **sinais de escalas**) sobre os eixos coordenados ou outras localizações na janela. Em programas como o *Mathematica* e o *Maple*, há comandos específicos para designar o espaço entre os sinais na escala, porém, se o usuário não der o espaçamento, o programa faz uma escolha por *default*. Por exemplo, nas duas primeiras partes da Figura A.1, os sinais sobre a escala foram escolhas por *default*.

Em algumas calculadoras gráficas, o espaçamento entre os sinais sobre a escala é determinado por duas **variáveis de escala** (também denominadas **fatores de escala**), as quais vamos denotar por

$$x\text{Scl} \text{ e } y\text{Scl}$$

(A notação varia entre calculadoras.) Essas variáveis especificam o espaçamento entre os sinais sobre as escalas nas direções x e y , respectivamente. Por exemplo, na terceira parte da Figura A.1, a janela e os sinais sobre as escalas foram especificados pelos ajustes

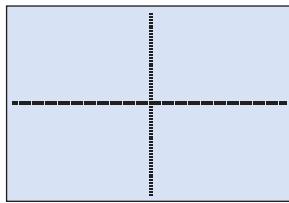
$$\begin{array}{ll} x\text{Min} = -3 & x\text{Max} = 3 \\ y\text{Min} = -4 & y\text{Max} = 4 \\ x\text{Scl} = 1 & y\text{Scl} = 1 \end{array}$$

A maioria dos recursos gráficos permite variações na disposição e na localização desses sinais. Por exemplo, a Figura A.3 mostra duas variações dos gráficos da Figura A.1; a primeira foi gerada em um computador usando uma opção de colocar sinais e números sobre os lados da janela, e a segunda foi gerada em uma calculadora usando uma opção de desenhar uma grade de retas simulando papel gráfico.

► **Exemplo 1** A Figura A.4 mostra a janela $[-5, 5] \times [-5, 5]$ com os sinais sobre a escala espaçados em 0,5 unidade na direção x e 10 unidades na direção y . Note que não há sinais visíveis na direção y , pois o sinal da origem está coberto pelo eixo x e os demais na direção x caem fora da janela. ◀

► **Exemplo 2** A Figura A.5 mostra a janela $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com os sinais sobre a escala espaçados em 0,1 unidade nas direções x e y . Nesse caso, os sinais estão tão próximos que criam um efeito de retas mais grossas sobre os eixos cooordenados. Quando isso ocorre, em geral aumentamos os fatores de escala para reduzir o número de sinais e torná-los legíveis. ◀

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA



$[-10, 10] \times [-10, 10]$
 $xScl = 0,1, yScl = 0,1$

Figura A.5

Calculadoras com recursos gráficos têm valores por *default* para a janela e para os fatores de escala. Por exemplo, uma calculadora tem uma janela *default* de $[-10, 10] \times [-10, 10]$ e fatores de escala *default* de $xScl = 1$ e $yScl = 1$. Verifique o manual para determinar os valores *default* de sua calculadora e como restaurar essa configuração. Se estiver usando um programa de computador, verifique o tutorial do mesmo para determinar os comandos que especificam o espaçamento entre os sinais sobre as escalas.

■ COMO ESCOLHER UMA JANELA DE INSPEÇÃO

Quando o gráfico de uma função se estende indefinidamente em alguma direção, nenhuma janela pode mostrá-lo todo. Em tais casos, a escolha da janela de inspeção pode afetar nossa percepção do gráfico. Por exemplo, a Figura A.6 mostra um gráfico gerado em computador de $y = 9 - x^2$, e a Figura A.7 mostra quatro vistas desse gráfico geradas em uma calculadora.

- Na parte (a), o gráfico cai completamente fora da janela; assim, ela aparece em branco (exceto por eixos e sinais).
- Na parte (b), o gráfico está quebrado em duas partes, pois sai e entra na janela.
- Na parte (c), o gráfico parece uma linha reta, pois focalizamos um pequeno segmento da curva.
- Na parte (d), temos uma visão mais completa da forma do gráfico, pois a janela compreende todos os pontos importantes; isto é, o ponto mais alto e as intersecções com o eixo x .

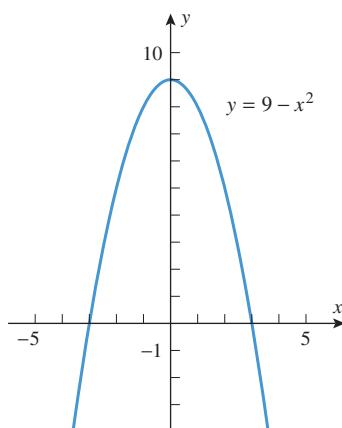


Figura A.6

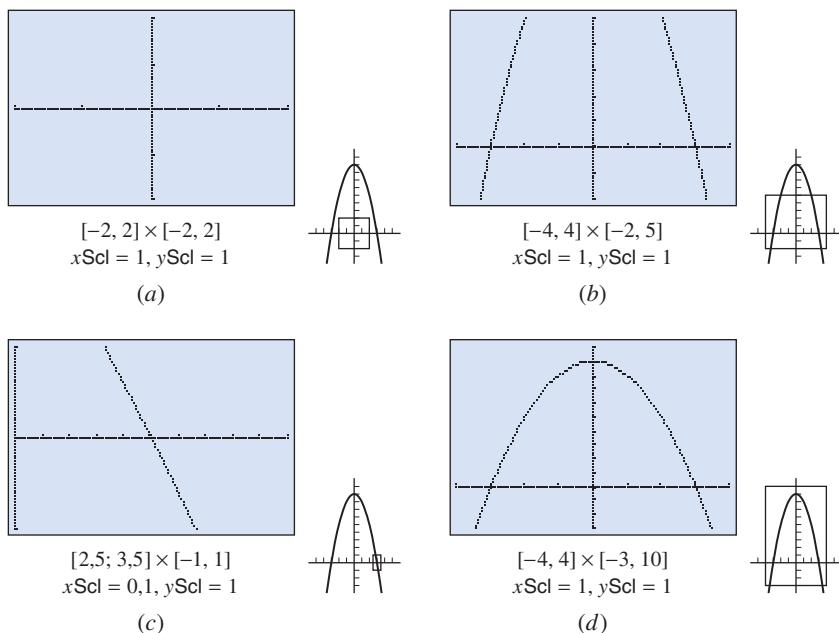
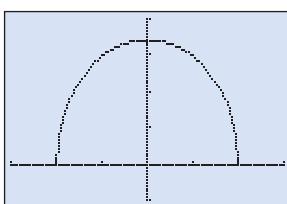


Figura A.7 Quatro vistas de $y = 9 - x^2$.

Para uma função cujo gráfico não se estenda indefinidamente em ambas as direções x e y , o domínio e a imagem da função podem ser usados para obter uma boa janela de inspeção, como mostramos no exemplo seguinte.



$[-3, 3] \times [-1, 4]$
 $x\text{Scl} = 1, y\text{Scl} = 1$

Figura A.8

► **Exemplo 3** Use o domínio e a imagem da função $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$ para determinar uma janela que contenha todo o gráfico.

Solução O domínio natural de f é $[-2, 2]$ e a imagem é $[0, \sqrt{12}]$ (verifique). Dessa forma, todo o gráfico está contido na janela de inspeção $[-2, 2] \times [0, \sqrt{12}]$. Por clareza, é preferível usar uma janela um pouco maior para evitar ter o gráfico muito próximo dos lados dela. Por exemplo, a janela $[-3, 3] \times [-1, 4]$ dá o gráfico da Figura A.8. ◀

Às vezes será impossível encontrar uma única janela de inspeção que exiba todas as características importantes de um gráfico, caso em que precisaremos decidir o que é mais importante para o problema à mão e escolher a janela de acordo.

► **Exemplo 4** Faça o gráfico da equação $y = x^3 - 12x^2 + 18$ nas seguintes janelas, discutindo as vantagens e desvantagens de cada uma.

- $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com $x\text{Scl} = 1$ e $y\text{Scl} = 1$
- $[-20, 20] \times [-20, 20]$ com $x\text{Scl} = 1$ e $y\text{Scl} = 1$
- $[-20, 20] \times [-300, 20]$ com $x\text{Scl} = 1$ e $y\text{Scl} = 20$
- $[-5, 15] \times [-300, 20]$ com $x\text{Scl} = 1$ e $y\text{Scl} = 20$
- $[1, 2] \times [-1, 1]$ com $x\text{Scl} = 0,1$ e $y\text{Scl} = 0,1$

Solução (a) A janela na Figura A.9a cortou fora a parte do gráfico que intersecta o eixo y e mostra somente duas das três raízes reais possíveis para o polinômio cúbico dado. Para contornar esse problema, precisamos alargar a janela em ambas as direções, x e y .

Solução (b) A janela da Figura A.9b mostra a intersecção do gráfico com o eixo y e as três raízes reais, mas cortou fora a parte do gráfico entre as duas raízes positivas. Além disso, os sinais na direção y estão quase ilegíveis, por estarem muito perto um do outro. Precisamos estender a janela na direção de y negativo e aumentar $y\text{Scl}$. Como não sabemos o quanto estender a janela, são necessárias algumas tentativas para obter o que queremos.

Solução (c) A janela na Figura A.9c mostra todos os principais aspectos do gráfico. Porém, temos algum espaço desperdiçado na direção x . Podemos melhorar a figura diminuindo a janela apropriadamente nessa direção.

Solução (d) A janela na Figura A.9d mostra todos os principais aspectos do gráfico sem muito desperdício de espaço. Entretanto, não oferece uma visão clara das raízes. Para obter uma visão mais próxima das raízes, precisamos abandonar a ideia de mostrar todos os principais aspectos do gráfico e escolher as janelas que focalizem as raízes.

Solução (e) A janela A.9e expõe muito pouco do gráfico, porém mostra claramente que a raiz no intervalo $[1, 2]$ é aproximadamente 1,3. ◀

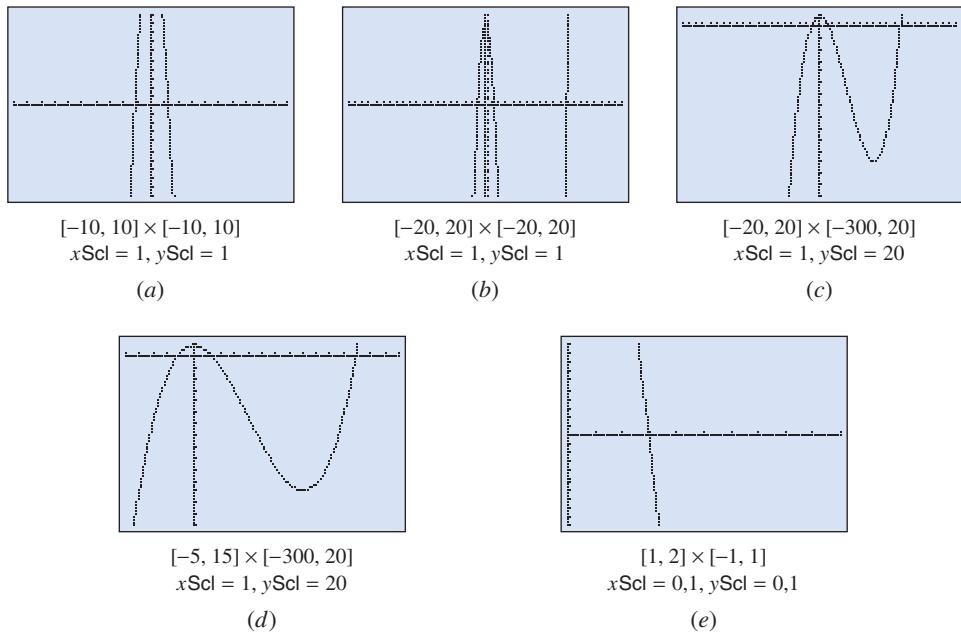


Figura A.9

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Há situações nas quais queremos determinar a janela de inspeção, escolhendo o intervalo x para a janela e permitindo que o recurso gráfico determine um intervalo y , o qual compreende os valores máximo e mínimo da função sobre o intervalo x . A maioria dos recursos gráficos fornece algum método para fazer isso; assim, verifique nas instruções para descobrir como fazê-lo. Permitir que o recurso gráfico determine o intervalo y da janela elimina muito da adivinhação do problema, como aquela na parte (b) do exemplo precedente.

FAZENDO ZOOM

O processo de aumentar ou diminuir o tamanho da janela de inspeção é denominado *fazer zoom*. Ao reduzir o tamanho da janela, vemos *menos* do gráfico como um todo, mas muitos detalhes da parte mostrada; isso é denominado *fazer o zoom para dentro*. Ao contrário, aumentando o tamanho da janela, mais vemos o gráfico como um todo, porém com menos detalhes da parte mostrada; isso é denominado *fazer o zoom para fora*. Muitas calculadoras fornecem um menu para os dois tipos de *zoom* por fatores fixo. Por exemplo, em algumas delas o efeito total de ampliação ou redução é controlado atribuindo-se valores a dois *fatores de zoom*, $x\text{Fact}$ e $y\text{Fact}$. Se

$$x\text{Fact} = 10 \quad \text{e} \quad y\text{Fact} = 5$$

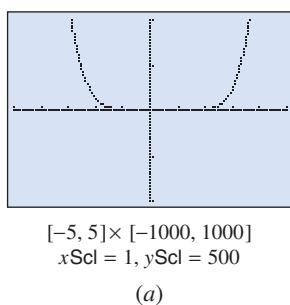
então, cada vez que um comando de *zoom* é executado, a janela de inspeção é ampliada ou reduzida por um fator de 10 na direção x e um fator de 5 na direção y . Com programas de computador, como o *Mathematica* e o *Maple*, o *zoom* é controlado ajustando-se diretamente os intervalos x e y ; contudo, há maneiras de automatizar isso através de programação.

COMPRESSÃO

A ampliação da janela de inspeção de um gráfico tem o efeito geométrico de compressão, pois uma maior parte do gráfico é espremida na tela da calculadora. Se a compressão for muito grande, então detalhes do gráfico podem ser perdidos. Dessa forma, a escolha da janela de inspeção depende, frequentemente, do que queremos ver: mais do gráfico ou mais do detalhe. A Figura A.10 mostra duas vistas da equação

$$y = x^5(x - 2)$$

Na parte (a) da figura, o intervalo y é muito grande, resultando em uma compressão vertical que obscurece os detalhes nos arredores do eixo x . Na parte (b), o intervalo y é muito menor,



(a)

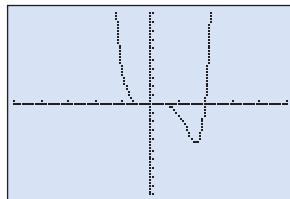


Figura A.10

e consequentemente vemos mais detalhes nas vizinhanças do eixo x , porém menos do gráfico na direção y .

► Exemplo 5 A função $f(x) = x + 0,01 \operatorname{sen}(50\pi x)$ é a soma de $f_1(x) = x$, cujo gráfico é a reta $y = x$, e $f_2(x) = 0,01 \operatorname{sen}(50\pi x)$, cujo gráfico é uma curva senoidal de amplitude 0,01 e período $2\pi/50\pi = 0,04$. Isso sugere que o gráfico de $f(x)$ segue o padrão geral da reta $y = x$, mas com altos e baixos resultantes da contribuição das ondulações senoidais, como vemos na parte (c) da Figura A.11. Gere os quatro gráficos mostrados na Figura A.11 e explique por que as oscilações são visíveis somente na parte (c).

Solução Para gerar os quatro gráficos, inicialmente devemos colocar o recurso gráfico no modo radiano.* Como as janelas de partes sucessivas do exemplo são de tamanho decrescente, com fator de 10, os leitores que utilizarem calculadoras podem fixar o fator de *zoom* em 10 unidades em ambas as direções x e y .

- Na Figura A.11a, o gráfico parece ser uma reta, pois a compressão vertical esconde as pequenas oscilações senoidais (sua amplitude é apenas 0,01).
- Na Figura A.11b, começam a aparecer pequenos altos e baixos na reta, pois há menos compressão vertical.
- Na Figura A.11c, as oscilações começam a ficar evidentes, pois a escala vertical é mais compatível com a amplitude das oscilações
- Na Figura A.11d, o gráfico parece ser uma reta, pois vemos o *zoom* de uma porção muito pequena da curva. ◀

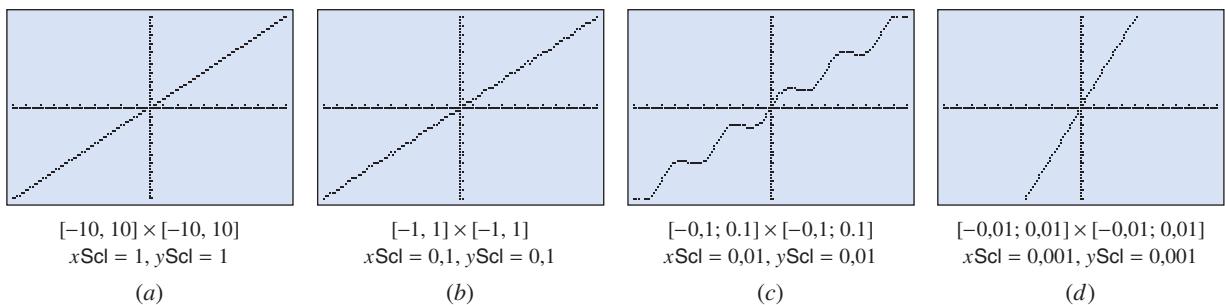


Figura A.11

DISTORÇÃO NA PROPORÇÃO DA APARÊNCIA

A Figura A.12a mostra um círculo de raio 5 e duas retas perpendiculares, esboçado em uma janela de $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com $xScl = 1$ e $yScl = 1$. Entretanto, o círculo está distorcido e as retas não parecem ser perpendiculares, pois a calculadora não usou o mesmo comprimento para 1 unidade no eixo x e 1 unidade no eixo y . (Compare o espaçamento entre os sinais sobre os eixos.) Isso é denominado **distorção na proporção da aparência**. Muitas calculadoras têm um menu para corrigir automaticamente a distorção ajustando adequadamente a janela de inspeção. Por exemplo, algumas calculadoras fazem a correção da janela $[-10, 10] \times [-10, 10]$ mudando-a para

$$[-16,9970674487; 16,9970674487] \times [-10, 10]$$

(Figura A.12b). Em programas como o *Mathematica* e o *Maple*, a distorção na proporção da aparência é controlada pelo ajuste das dimensões físicas da janela de inspeção na tela do computador, em vez de alterar os intervalos x e y da janela.

* Neste livro, seguimos a convenção de que ângulos são medidos em radianos, a não ser que a medida em graus esteja especificada.

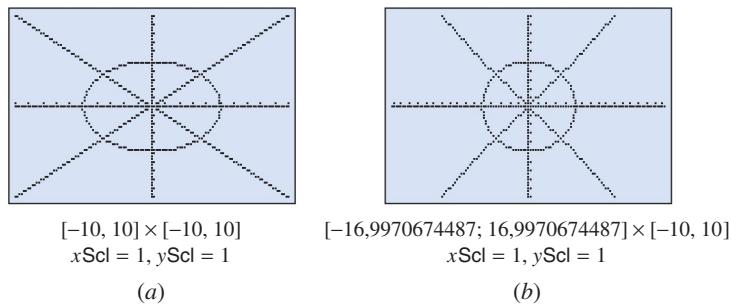


Figura A.12

■ ERRO DE AMOSTRAGEM

A janela de inspeção de um recurso gráfico é composta de uma grade retangular de pequenos blocos retangulares denominados *pixels*. Para imagens em preto e branco, cada *pixel* tem dois estados, um ativo (ou escuro) e o outro desativado (ou claro). Um gráfico é formado ativando *pixels* apropriados para exibir a forma da curva. Em uma certa calculadora bem conhecida, a grade de *pixels* consiste em 63 linhas de 127 *pixels* cada (Figura A.13), caso em que dizemos que a janela tem uma *resolução* de 127×63 (*pixels* por linha vezes o número de linhas). Uma resolução típica em tela de computador é de 1280×1024 . Quanto maior a resolução, mais lisos parecem ser os gráficos na tela.

O procedimento utilizado por um recurso gráfico para gerar um gráfico é semelhante ao de esboçar uma curva à mão: quando digitamos uma equação e escolhemos uma janela, o recurso gráfico *seleciona* as coordenadas x de certos *pixels* (sendo que essa escolha depende da janela que está sendo usada) e *calcula* as correspondentes coordenadas y . Em seguida, o recurso ativa os *pixels* cujas coordenadas mais se aproximam dos pontos calculados e utiliza um algoritmo predeterminado para ativar *pixels* intermediários adicionais para criar o formato da curva. Esse processo não é perfeito, e é possível que alguma janela produza uma falsa impressão a respeito da forma do gráfico, em geral por características importantes do gráfico estarem ocorrendo entre os pontos calculados. Isso é denominado ***erro de amostragem***. Por exemplo, a Figura A.14 mostra o gráfico de $y = \cos(10\pi x)$ gerado por uma certa calculadora bem conhecida em quatro janelas distintas. (A calculadora do leitor pode produzir resultados diferentes.) O gráfico da parte (a) tem o formato correto, mas os outros três não, devido a erros de amostragem:

- Na parte (b), ocorre que os *pixels* exibidos caem justamente nos picos da curva do cosseno, dando a impressão falsa de que o gráfico é uma reta horizontal.
 - Na parte (c), os *pixels* exibidos caem em pontos sucessivamente mais elevados do gráfico.
 - Na parte (d), os *pixels* exibidos caem em um certo padrão regular que cria mais uma impressão falsa da forma do gráfico.

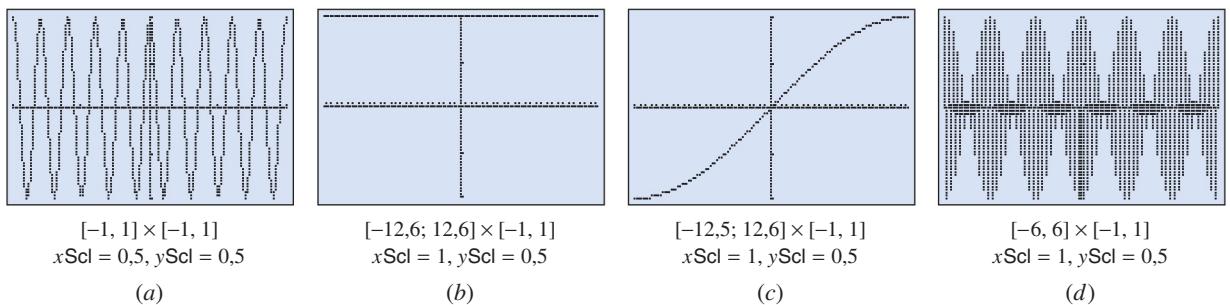


Figura A.14

OBSERVAÇÃO A Figura A.14 sugere que, para os gráficos trigonométricos com oscilações rápidas, restringir o intervalo x a poucos períodos provavelmente irá produzir representações mais precisas da forma do gráfico.

LACUNAS FALSAS

Algumas vezes, gráficos contínuos aparecam ter lacunas quando gerados em uma calculadora. Essas *lacunas falsas* costumam surgir quando o gráfico aumenta tão rapidamente que o espaço vertical se abre entre *pixels* sucessivos.

► **Exemplo 6** A Figura A.15 mostra o gráfico do semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$ em duas janelas de inspeção. Embora esse semicírculo tenha cortes no eixo x nos pontos $x = \pm 3$, a parte (a) da figura mostra lacunas falsas nesses pontos, pois não há *pixels* com coordenadas x iguais a ± 3 na janela escolhida. Na parte (b) não ocorrem lacunas, pois existem *pixels* com coordenadas x de ± 3 na janela usada. ◀

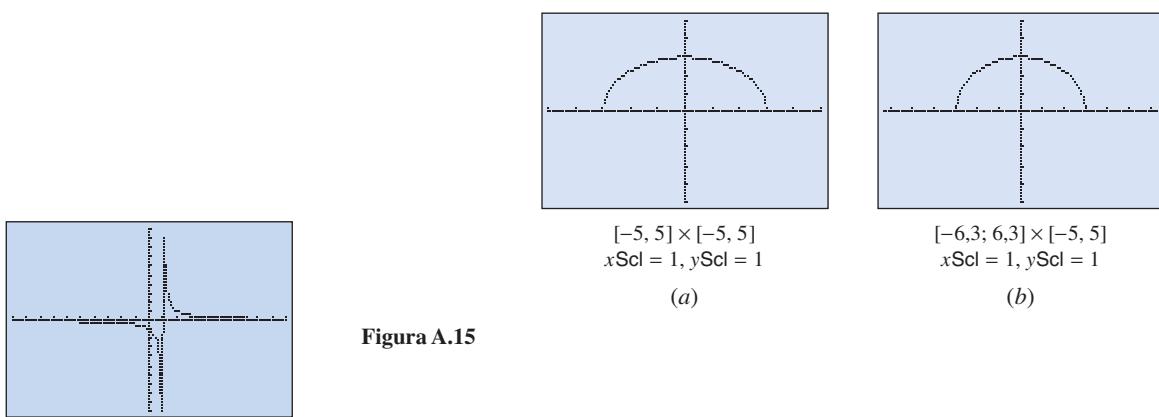


Figura A.15

SEGMENTOS DE RETA FALSOS

Além de criar lacunas falsas em gráficos contínuos, as calculadoras podem errar na direção oposta colocando *segmentos de reta falsos* nas lacunas de curvas descontínuas.

► **Exemplo 7** A Figura A.16a mostra o gráfico de $y = 1/(x - 1)$ na janela *default* de uma calculadora. Apesar de o gráfico aparente conter segmentos de reta verticais próximos de $x = 1$, estes não deviam estar lá. Realmente, há uma lacuna na curva em $x = 1$, uma vez que uma divisão por zero ocorre nesse ponto (Figura A.16b). ◀

ERROS DE OMISSÃO

A maioria dos recursos gráficos usa logaritmos para avaliar as funções com expoentes fracionários como $f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$. Contudo, como os logaritmos estão definidos somente para os números positivos, muitos recursos gráficos omitem partes dos gráficos de funções com expoentes fracionários. Por exemplo, uma calculadora faz o gráfico de $y = x^{2/3}$ como o da Figura A.17a, quando o gráfico real é o da Figura A.17b. (Para uma maneira de contornar isso, veja a discussão que precede o Exercício 23.)

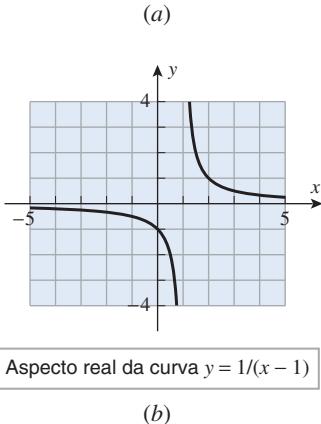


Figura A.16

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Determine se seu recurso gráfico produz o gráfico completo de $y = x^{2/3}$ para valores positivos e negativos de x .

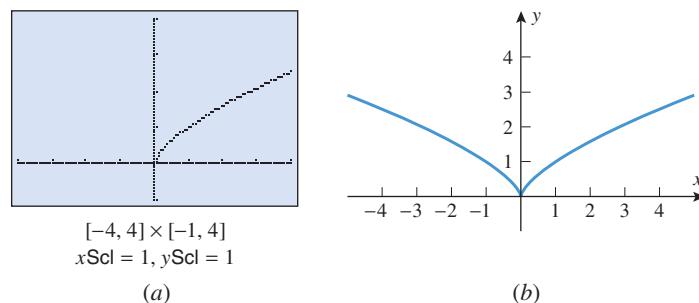


Figura A.17

■ QUAL É A VERDADEIRA FORMA DE UM GRÁFICO?

Embora os recursos gráficos sejam ferramentas poderosas na geração rápida de gráficos, eles podem produzir gráficos enganosos devido à compressão, ao erro de amostragem, a lacunas falsas e a segmentos de reta falsos. Em resumo, *os recursos gráficos podem sugerir as formas dos gráficos, mas não estabelecê-las com certeza*. Assim, quanto mais você souber sobre os gráficos das funções que está gerando, mais fácil será escolher uma boa janela de inspeção e maior será sua habilidade de julgar quão razoáveis são os gráficos produzidos por seu recurso gráfico.

■ MAIS INFORMAÇÕES SOBRE RECURSOS GRÁFICOS E CALCULADORAS

A melhor fonte de informação sobre seu recurso gráfico é o manual dele, por isso sugerimos que o leitor o consulte de tempos em tempos para aprender uma determinada técnica.

■ CURVAS PARAMÉTRICAS GERADAS COM RECURSOS GRÁFICOS

Muitos recursos gráficos permitem que façamos gráficos de equações da forma $y = f(x)$, mas não os da forma $x = g(y)$. Às vezes, somos capazes de reescrever $x = g(y)$ na forma $y = f(x)$, mas se isso for inconveniente ou impossível, então podemos fazer o gráfico de $x = g(y)$ introduzindo um parâmetro $t = y$ e expressando a equação parametricamente como $x = g(t)$, $y = t$. (Às vezes, devemos experimentar vários intervalos de t para produzir um gráfico completo.)

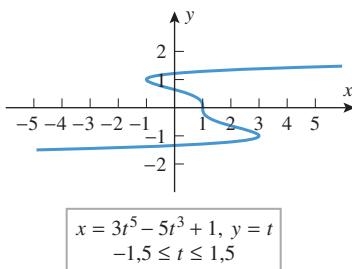


Figura A.18

► **Exemplo 8** Use um recurso computacional para fazer o gráfico da equação $x = 3y^5 - 5y^3 + 1$.

Solução Se $t = y$ for o parâmetro, então a equação poderá ser escrita na forma paramétrica como

$$x = 3t^5 - 5t^3 + 1, \quad y = t$$

A Figura A.18 mostra o gráfico dessas equações com $-1,5 \leq t \leq 1,5$. ◀

Algumas curvas paramétricas são tão complexas que é praticamente impossível visualizá-las sem algum tipo de recurso gráfico. A Figura A.19 mostra três dessas curvas.

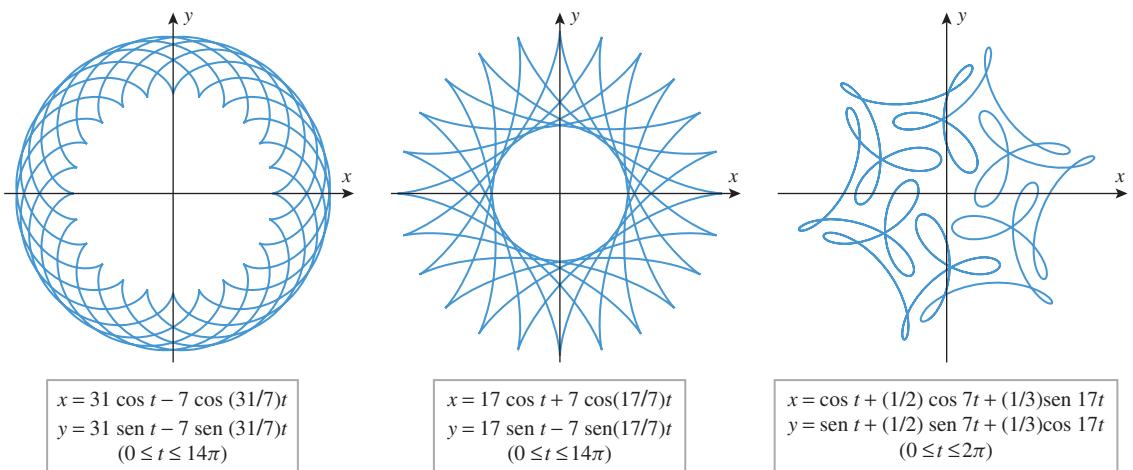


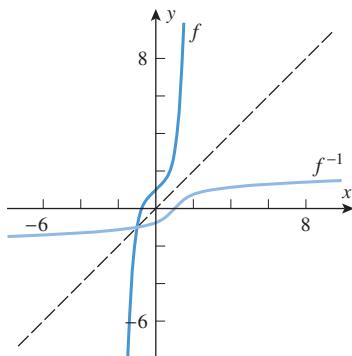
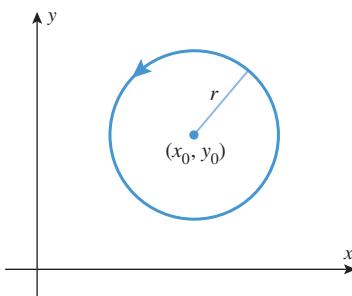
Figura A.19

■ GRÁFICOS DE FUNÇÕES INVERSAS USANDO RECURSOS GRÁFICOS

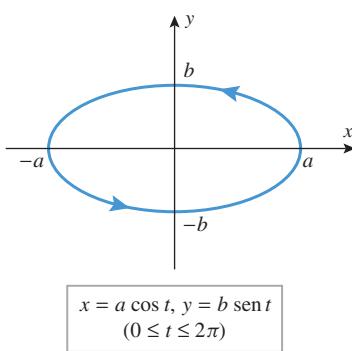
A maioria dos recursos gráficos computacionais não consegue traçar o gráfico de funções inversas diretamente. Contudo, existe uma maneira de traçar gráficos de funções inversas expressando-os parametricamente. Para ver como isso pode ser feito, suponha que estejamos

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Teste sua habilidade com seu recurso gráfico gerando algumas curvas paramétricas que lhe pareçam interessantes ou bonitas.


Figura A.20

Figura A.21
DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use a capacidade paramétrica de seu recurso gráfico computacional para gerar um círculo de raio 5 e centro em $(3, -2)$.


Figura A.22
DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use a capacidade paramétrica de seu recurso para gerar uma elipse centrada na origem e se estendendo entre -4 e 4 na direção x e entre -3 e 3 na direção y . Gere uma elipse com as mesmas dimensões, porém translada da tal forma que seu centro esteja no ponto $(2, 3)$.

interessados no gráfico da inversa de uma função injetora f . Sabemos que a equação $y = f(x)$ pode ser expressa parametricamente por

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (1)$$

e sabemos que o gráfico de f^{-1} pode ser obtido trocando x com y , já que isso reflete o gráfico de f pela reta $y = x$. Assim, por (1), o gráfico de f^{-1} pode ser representado parametricamente por

$$x = f(t), \quad y = t \quad (2)$$

Por exemplo, a Figura A.20 mostra o gráfico de $f(x) = x^5 + x + 1$ e o de sua inversa gerados com um recurso gráfico. O gráfico de f foi gerado com as equações paramétricas

$$x = t, \quad y = t^5 + t + 1$$

e o gráfico de f^{-1} foi gerado com as equações paramétricas

$$x = t^5 + t + 1, \quad y = t$$

■ TRANSLAÇÃO

Se uma curva paramétrica C for dada pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$, então a adição de uma constante a $f(t)$ transladará a curva C na direção x , e a adição de uma constante a $g(t)$ translada a curva na direção y . Assim, um círculo de raio r , com centro em (x_0, y_0) , pode ser representado parametricamente por

$$x = x_0 + r \cos t, \quad y = y_0 + r \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(Figura A.21). Se for o caso, podemos eliminar o parâmetro dessas equações notando que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 = r^2$$

Assim, obtivemos a conhecida equação em coordenadas retangulares para um círculo de raio r e centro em (x_0, y_0) :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

■ MUDANDO AS ESCALAS

Se uma curva paramétrica C é dada pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$, então a multiplicação de $f(t)$ por uma constante alonga ou comprime C na direção x , enquanto a multiplicação de $g(t)$ por uma constante alonga ou comprime C na direção y . Por exemplo, é de se esperar que as equações paramétricas

$$x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

representem uma elipse com centro na origem, uma vez que o gráfico dessas equações resulta do alongamento do círculo unitário

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

por um fator de 3 na direção x e um fator de 2 na direção y . Em geral, se a e b forem constantes positivas, então as equações paramétricas

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (3)$$

representam uma elipse, centrada na origem, e que se estende entre $-a$ e a no eixo x e entre $-b$ e b no eixo y (Figura A.22). Os números a e b são os *semieixos* da elipse. Se for o caso, podemos eliminar o parâmetro t em (3) e reescrever as equações em coordenadas retangulares como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

EXERCÍCIOS APÊNDICE A  **Recurso Gráfico**

 **1-4** Use um recurso computacional para gerar o gráfico de f nas janelas de inspeção dadas e especifique qual janela, em sua opinião, melhor descreve o gráfico. ■

1. $f(x) = x^4 - x^2$

- (a) $[-50, 50] \times [-50, 50]$ (b) $[-5, 5] \times [-5, 5]$
 (c) $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (d) $[-2, 2] \times [-1, 1]$
 (e) $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$

2. $f(x) = x^5 - x^3$

- (a) $[-50, 50] \times [-50, 50]$ (b) $[-5, 5] \times [-5, 5]$
 (c) $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (d) $[-2, 2] \times [-1, 1]$
 (e) $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$

3. $f(x) = x^2 + 12$

- (a) $[-1, 1] \times [13, 15]$ (b) $[-2, 2] \times [11, 15]$
 (c) $[-4, 4] \times [10, 28]$ (d) Uma janela de sua escolha

4. $f(x) = -12 - x^2$

- (a) $[-1, 1] \times [-15, -13]$ (b) $[-2, 2] \times [-15, -11]$
 (c) $[-4, 4] \times [-28, -10]$ (d) Uma janela de sua escolha

 **5-6** Use o domínio e a imagem de f para determinar uma janela de inspeção que contenha todo o gráfico e, então, gere-o nela. ■

5. $f(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$

6. $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

 **7-14** Gere o gráfico de f em uma janela julgada apropriada. ■

7. $f(x) = x^2 - 9x - 36$

8. $f(x) = \frac{x+7}{x-9}$

9. $f(x) = 2 \cos(80x)$

10. $f(x) = 12 \sin(x/80)$

11. $f(x) = 300 - 10x^2 + 0,01x^3$

12. $f(x) = x(30 - 2x)(25 - 2x)$

13. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

14. $f(x) = \sqrt{11x - 18}$

 **15-16** Gere o gráfico de f e determine se seus gráficos contêm segmentos de reta falsos. Esboce o gráfico verdadeiro e veja se é possível eliminar os segmentos de reta falsos mudando a janela de inspeção. ■

15. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

16. $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$

 **17.** O gráfico da equação $x^2 + y^2 = 16$ é um círculo de raio 4 e centro na origem.

- (a) Encontre a função cujo gráfico é o semicírculo superior e esboce-o.
 (b) Encontre a função cujo gráfico é o semicírculo inferior e esboce-o.
 (c) Faça o gráfico dos dois semicírculos juntos. Se os dois gráficos combinados não formarem um círculo, tente ajustar a janela de inspeção para eliminar a distorção na proporção da aparência.
 (d) Faça o gráfico da porção do círculo no primeiro quadrante.
 (e) Há alguma função cujo gráfico seja o lado direito do círculo? Explique.

 **18.** Em cada parte, faça o gráfico da equação resolvendo y em termos de x e, então, esboce juntas as funções resultantes.
 (a) $x^2/4 + y^2/9 = 1$ (b) $y^2 - x^2 = 1$

 **19.** Leia o manual de seu recurso gráfico para determinar como fazer o gráfico de funções que envolvam valores absolutos. Faça, então, os gráficos das equações dadas.

- (a) $y = |x|$ (b) $y = |x - 1|$
 (c) $y = |x| - 1$ (d) $y = |\sin x|$
 (e) $y = \sin|x|$ (f) $y = |x| - |x + 1|$

 **20.** Com base em seu conhecimento da função valor absoluto, esboce o gráfico de $f(x) = |x|/x$. Confira seu resultado usando um recurso gráfico.

21-22 A maioria dos recursos gráficos fornece uma forma de fazer o gráfico de funções definidas por partes; veja o manual para saber como. Contudo, se sua meta for somente encontrar a forma geral do gráfico, isso poderá ser feito plotando cada parte da função separadamente e combinando as partes com um esboço feito à mão. Use esse método nestes exercícios. ■

21. Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2}, & x \leq 2 \\ x^3 - 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

22. Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{1-x}, & 1 < x < 4 \\ x^2 \cos \sqrt{x}, & 4 \leq x \end{cases}$$

 **23-24** Observamos no texto que, em se tratando de funções envolvendo expoentes fracionais (ou radicais), os recursos gráficos omitem partes do gráfico. Se $f(x) = x^{p/q}$, onde p/q é uma fração positiva, já simplificada, o problema da omissão pode ser contornado da seguinte forma:

- Se p for par e q ímpar, então faça o gráfico de $g(x) = |x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.
- Se p e q forem ímpares, então faça o gráfico de $g(x) = (|x|/x)|x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$. ■

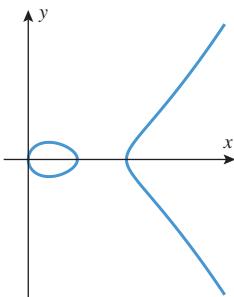
- 23.** (a) Gere os gráficos de $f(x) = x^{2/5}$ e $g(x) = |x|^{2/5}$ e determine se seu recurso gráfico omitiu parte do gráfico de f .
 (b) Gere os gráficos das funções $f(x) = x^{1/5}$ e $g(x) = (|x|/x)|x|^{1/5}$ e determine se seu recurso gráfico omitiu parte do gráfico de f .
 (c) Gere um gráfico da equação $f(x) = (x - 1)^{4/5}$ que mostre todas as suas características importantes.
 (d) Gere um gráfico da equação $f(x) = (x + 1)^{3/4}$ que mostre todas as suas características importantes.

- 24.** Os gráficos de $y = (x^2 - 4)^{2/3}$ e $y = [(x^2 - 4)]^{1/3}$ deveriam ser os mesmos. Seu recurso gráfico produz o mesmo gráfico para ambas? Se não, o que deve estar acontecendo?

-  25. Em cada parte, faça o gráfico da função para vários valores de c e descreva em um ou dois parágrafos como as mudanças em c afetam o gráfico em cada caso.
- $y = cx^2$
 - $y = x^2 + cx$
 - $y = x^2 + x + c$
-  26. O gráfico de uma equação da forma $y^2 = x(x - a)(x - b)$ (onde $0 < a < b$) é denominado **cúbica bipartida**. A figura abaixo mostra um gráfico típico dessa equação.
- Faça o gráfico da cúbica bipartida $y^2 = x(x - 1)(x - 2)$ resolvendo para y em termos de x e, então, fazendo os gráficos das duas funções resultantes.
 - Encontre os cortes no eixo x da cúbica bipartida

$$y^2 = x(x - a)(x - b)$$

e faça uma conjectura sobre como uma mudança nos valores de a e b afetaria o gráfico. Teste sua conjectura através do gráfico da cúbica bipartida para vários valores de a e b .



Cúbica bipartida

Figura Ex-26

-  27. Com base em seu conhecimento dos gráficos de $y = x$ e $y = \sin x$, faça um esboço do gráfico de $y = x \sin x$. Verifique sua conclusão usando um recurso gráfico.

-  28. Como será o gráfico de $y = \sin(1/x)$? Teste sua conclusão usando um recurso gráfico. [Sugestão: Examine o gráfico em uma sucessão de intervalos cada vez menores centrados em $x = 0$.]

-  29-30 Faça o gráfico da equação usando um recurso gráfico. ■

- $x = y^2 + 2y + 1$
- $x = \sin y, -2\pi \leq y \leq 2\pi$

- $x = y + 2y^3 - y^5$
- $x = \operatorname{tg} y, -\pi/2 < y < \pi/2$

-  31-34 Use um recurso gráfico e equações paramétricas para exibir os gráficos de f e f^{-1} na mesma tela. ■

31. $f(x) = x^3 + 0,2x - 1, -1 \leq x \leq 2$

32. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + x, -5 \leq x \leq 5$

33. $f(x) = \cos(\cos 0,5x), 0 \leq x \leq 3$

34. $f(x) = x + \sin x, 0 \leq x \leq 6$

-  35. (a) Encontre equações paramétricas da elipse centrada na origem que corta os eixos coordenados em $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 3)$ e $(0, -3)$.
- (b) Encontre equações paramétricas da elipse obtida por translação da elipse da parte (a) de tal modo que seu centro seja $(-1, 2)$.
- (c) Confirme seus resultados nas partes (a) e (b) usando um recurso computacional.

B

REVISÃO DE TRIGONOMETRIA

■ ÂNGULOS

Os ângulos em um plano podem ser gerados pela rotação de um raio (semirreta) em torno de sua extremidade. A posição inicial do raio é denominada **lado inicial** do ângulo, a posição final é chamada de **lado final** do ângulo e o ponto onde se cruzam os lados inicial e final é o **vértice** do ângulo. Vamos admitir a possibilidade de que o raio possa fazer mais de uma revolução completa. Os ângulos são considerados **positivos** se gerados no sentido anti-horário e **negativos** se gerados no sentido horário (Figura B.1).

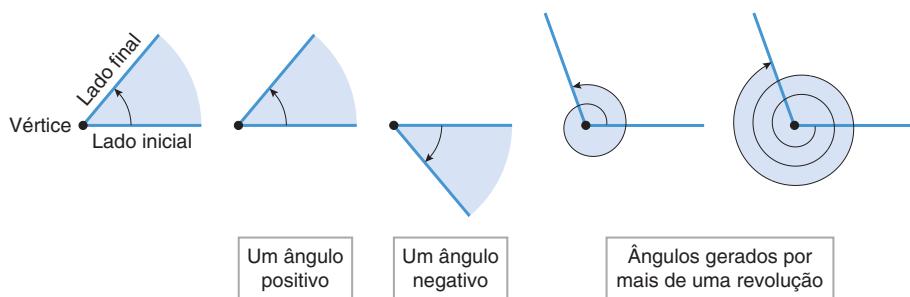


Figura B.1

Existem dois sistemas padrão de medida para descrever o tamanho de um ângulo: **medida em graus** e **medida em radianos**. Na medida em graus, 1 grau (escreve-se 1°) é a medida de um ângulo gerado por $1/360$ de uma revolução. Assim, há 360° em um ângulo de uma revolução, 180° em um ângulo de meia revolução, 90° em um ângulo de $1/4$ de revolução (**ângulo reto**) e assim por diante. Os graus são divididos em 60 partes iguais, denominadas **minutos**, e os minutos são divididos em 60 partes iguais, denominadas **segundos**. Assim, 1 minuto (escreve-se $1'$) é $1/60$ de um grau, e 1 segundo (escreve-se $1''$) é $1/60$ de um minuto. As subdivisões menores de um grau são expressas como frações de segundo.

Na medida em radianos, os ângulos são medidos pelo comprimento do arco que eles subentendem sobre um círculo de raio 1 quando o vértice está no centro. Uma unidade de arco sobre um círculo de raio 1 é denominada **radiano** (escreve-se 1 rad) (Figura B.2) e, portanto, a circunferência inteira de um círculo de raio 1 tem 2π radianos. Segue que um ângulo de 360° subentende um arco de 2π radianos, um ângulo de 180° subentende um arco de π radianos, um ângulo de 90° subentende um arco de $\pi/2$ radianos e assim por diante. A Figura B.3 e a Tabela B.1 mostram a relação entre as medidas em graus e em radianos para alguns ângulos positivos importantes.

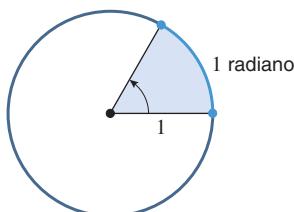


Figura B.2

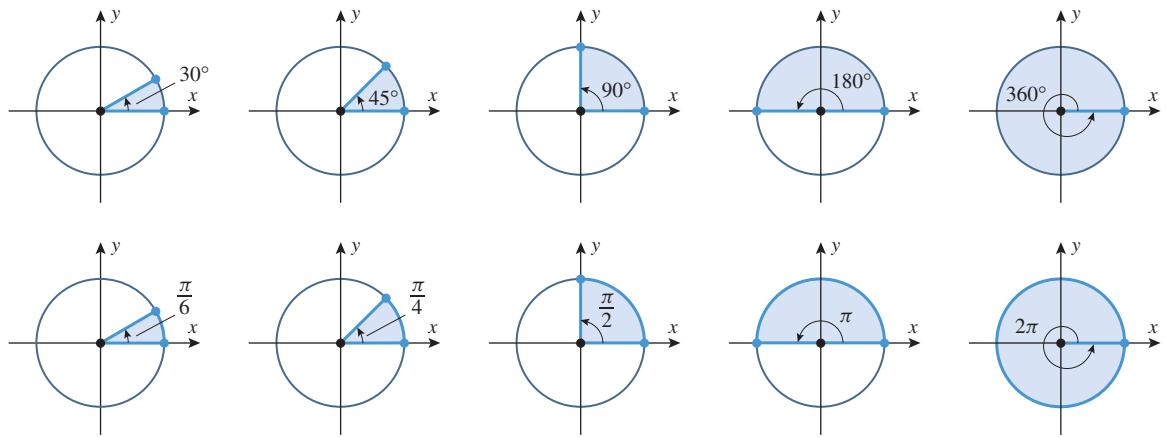


Figura B.3

Note que, na Tabela B.1, os ângulos em graus são designados pelo símbolo de grau, mas os ângulos em radianos não têm unidades especificadas. Isso é uma prática padrão – deve-se entender que as unidades são radianos quando não houver unidade especificada para um ângulo.

Tabela B.1

GRAUS	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
RADIANOS	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

A partir do fato de que π radianos correspondem a 180° , obtemos as fórmulas a seguir, que são úteis para converter graus em radianos e vice-versa.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad} \quad (1)$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 17' 44,8'' \quad (2)$$

► Exemplo 1

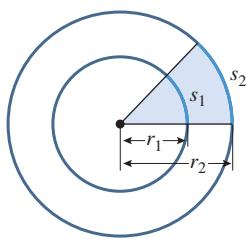
- (a) Expressse 146° em radianos (b) Expressse 3 radianos em graus

Solução (a) A partir de (1), os graus podem ser convertidos em radianos multiplicando-se pelo fator de conversão de $\pi/180$. Assim,

$$146^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \cdot 146 \right) \text{ rad} = \frac{73\pi}{90} \text{ rad} \approx 2,5482 \text{ rad}$$

Solução (b) De (2), radianos podem ser convertidos em graus multiplicando-se pelo fator de conversão de $180/\pi$. Assim,

$$3 \text{ rad} = \left(3 \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{540}{\pi} \right)^\circ \approx 171,9^\circ \blacktriangleleft$$



$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Figura B.4

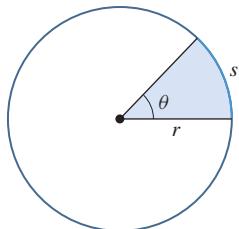
■ RELAÇÕES ENTRE COMPRIMENTO DE ARCO, ÂNGULO, RAIO E ÁREA

Há um teorema em Geometria plana que estabelece que, para dois círculos concêntricos, a razão entre os comprimentos de arco subentendidos por um ângulo central é igual à razão dos raios correspondentes (Figura B.4). Em particular, se s for o comprimento de arco subentendido sobre um círculo de raio r por um ângulo central de θ radianos, então, compa-

rando com o comprimento de arco subentendido pelo mesmo ângulo sobre um círculo de raio 1, obtemos

$$\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$$

de onde tiramos as seguintes relações entre o ângulo central θ , o raio r e o comprimento de arco subentendido s quando θ estiver em radianos (Figura B.5):



Se θ estiver em radianos, então $\theta = s/r$.

Figura B.5

$$\theta = s/r \quad \text{e} \quad s = r\theta \quad (3-4)$$

A região sombreada na Figura B.5 é chamada de **setor**. É um teorema na Geometria plana que a razão entre a área A desse setor e a área de todo o círculo é a mesma que a razão entre o ângulo central do setor e o ângulo do círculo inteiro; assim, se os ângulos estiverem em radianos, temos

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

Resolvendo-se para A , resulta a seguinte fórmula para a área de um setor em termos do raio r e do ângulo θ em radianos:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (5)$$

■ FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

O **seno**, o **cosseno**, a **tangente**, a **cotangente**, a **secante** e a **cossecante** de um ângulo agudo positivo θ podem ser definidos como razões entre os lados de um triângulo retângulo. Usando a notação da Figura B.6, essas definições tomam a seguinte forma:

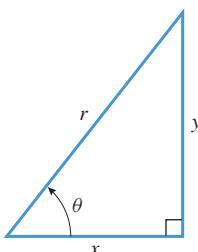


Figura B.6

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}, & \text{cossec } \theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } \theta} = \frac{r}{y} \\ \cos \theta &= \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}, & \sec \theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \frac{r}{x} \\ \tg \theta &= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \frac{y}{x}, & \cotg \theta &= \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{cateto oposto a } \theta} = \frac{x}{y} \end{aligned} \quad (6)$$

Vamos dizer que sen, cos, tg, cotg, sec e cossec são as **funções trigonométricas**. Como triângulos semelhantes têm lados proporcionais, os valores das funções trigonométricas dependem somente do tamanho de θ , e não do triângulo retângulo particular usado para calcular as razões. Além disso, nessas definições não importa se θ estiver medido em graus ou em radianos.

► Exemplo 2 Sabemos da Geometria que dois lados de um triângulo de ângulos de 45° , 45° e 90° são iguais e que a hipotenusa de um triângulo de ângulos de 30° , 60° e 90° é duas vezes o lado menor, que é o lado oposto ao ângulo de 30° . Esses fatos e o Teorema de Pitágoras fornecem a Figura B.7. A partir da figura, obtemos os resultados na Tabela B.2. ◀

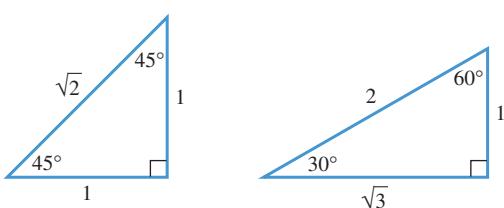


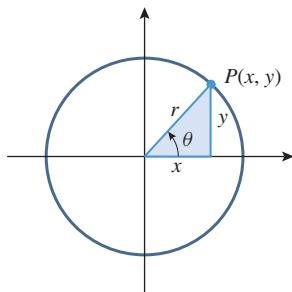
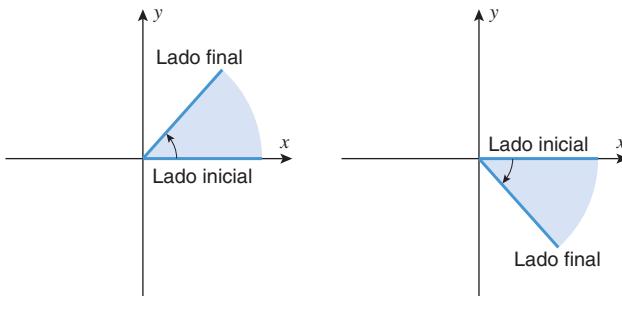
Figura B.7

Tabela B.2

$\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$,	$\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$,	$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$
$\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$,	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$,	$\operatorname{cotg} 45^\circ = 1$
$\sin 30^\circ = 1/2$,	$\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$,	$\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$
$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$,	$\sec 30^\circ = 2/\sqrt{3}$,	$\operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}$
$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$,	$\cos 60^\circ = 1/2$,	$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
$\operatorname{cosec} 60^\circ = 2/\sqrt{3}$,	$\sec 60^\circ = 2$,	$\operatorname{cotg} 60^\circ = 1/\sqrt{3}$

■ ÂNGULOS EM SISTEMAS DE COORDENADAS RETANGULARES

Como os ângulos de um triângulo retângulo estão entre 0 e 90° , as fórmulas em (6) não são diretamente aplicáveis a ângulos negativos ou maiores do que 90° . Para estender as funções trigonométricas a esses casos, será conveniente considerar ângulos em sistemas de coordenadas retangulares. Dizemos que um ângulo está em **posição padrão** em um sistema de coordenadas xy se seu vértice estiver na origem e seu lado inicial sobre o eixo x positivo (Figura B.8).

**Figura B.9****Figura B.8**

Para definir as funções trigonométricas de um ângulo θ na posição padrão, construímos um círculo de raio r , centrado na origem, e tomamos $P(x, y)$ como a intersecção do lado final de θ com esse círculo (Figura B.9). Fazemos a definição seguinte.

B.1 DEFINIÇÃO

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r}, & \cos \theta &= \frac{x}{r}, & \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{cosec} \theta &= \frac{r}{y}, & \sec \theta &= \frac{r}{x}, & \operatorname{cotg} \theta &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

Note que as fórmulas dessa definição estão de acordo com aquelas dadas em (6); logo, não há conflito com a definição anterior de funções trigonométricas para triângulos. Porém, essa definição se aplica a todos os ângulos (exceto quando ocorrer um zero no denominador).

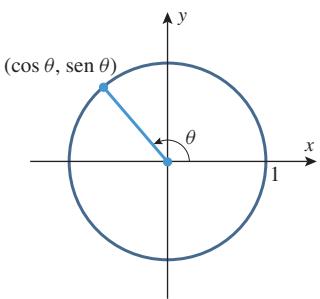


Figura B.10

No caso especial em que $r = 1$, temos que $\sin \theta = y$ e $\cos \theta = x$, portanto o lado final do ângulo θ intersecta o círculo unitário no ponto $(\cos \theta, \sin \theta)$ (Figura B.10). Temos, a partir da Definição B.1, que as funções trigonométricas remanescentes de θ são expressas por (verifique)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cotg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cossec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad (7-10)$$

Essas observações sugerem o seguinte procedimento para o cálculo de funções trigonométricas de ângulos comuns:

- Construa o ângulo θ na posição padrão de um sistema de coordenadas (x, y) .
- Encontre as coordenadas da intersecção do lado final do ângulo com o círculo unitário; as coordenadas $(x$ e y) dessa intersecção são, respectivamente, os valores de $\cos \theta$ e $\sin \theta$.
- Use as Fórmulas (7) a (10) para encontrar os valores das funções trigonométricas remanescentes a partir dos valores de $\cos \theta$ e $\sin \theta$.

► **Exemplo 3** Calcule as funções trigonométricas de $\theta = 150^\circ$.

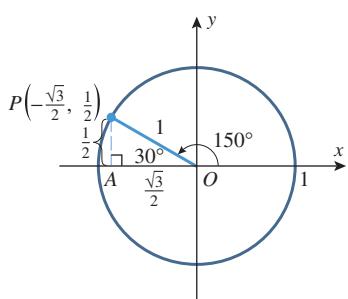


Figura B.11

Solução Construa um círculo unitário e coloque o ângulo $\theta = 150^\circ$ em posição padrão (Figura B.11). Uma vez que o ângulo $\angle AOP$ mede 30° e o triângulo $\triangle OAP$ tem ângulos de 30° , 60° e 90° , o lado AP tem comprimento $\frac{1}{2}$ (metade da hipotenusa) e o lado OA , pelo Teorema de Pitágoras, tem um comprimento de $\sqrt{3}/2$. Assim, as coordenadas de P são $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$, de onde obtemos

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cossec} 150^\circ = \frac{1}{\sin 150^\circ} = 2, \quad \sec 150^\circ = \frac{1}{\cos 150^\circ} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cotg} 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 150^\circ} = -\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Calcule as funções trigonométricas de $\theta = 5\pi/6$.

Solução Como $5\pi/6 = 150^\circ$, esse problema é equivalente ao do Exemplo 3. Daquele exemplo, obtemos

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

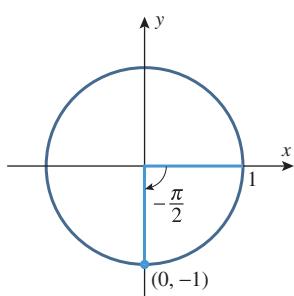
$$\operatorname{cossec} \frac{5\pi}{6} = 2, \quad \sec \frac{5\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 5** Calcule as funções trigonométricas de $\theta = -\pi/2$.

Solução De acordo com a Figura B.12, o lado final de $\theta = -\pi/2$ intersecta o círculo unitário no ponto $(0, -1)$, portanto

$$\sin(-\pi/2) = -1, \quad \cos(-\pi/2) = 0$$

Figura B.12



e, das Fórmulas (7) a (10) obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(-\pi/2) &= \frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{\cos(-\pi/2)} = \frac{-1}{0} \quad (\text{indefinida}) \\ \operatorname{cotg}(-\pi/2) &= \frac{\cos(-\pi/2)}{\operatorname{sen}(-\pi/2)} = \frac{0}{-1} = 0 \\ \sec(-\pi/2) &= \frac{1}{\cos(-\pi/2)} = \frac{1}{0} \quad (\text{indefinida}) \\ \operatorname{cossec}(-\pi/2) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(-\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Pelos métodos ilustrados nos três últimos exemplos, o leitor deve ser capaz de obter todos os resultados da Tabela B.3. Os traços indicam quantidades não definidas.

Tabela B.3

	$\theta = 0$ (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)	$2\pi/3$ (120°)	$3\pi/4$ (135°)	$5\pi/6$ (150°)	π (180°)	$3\pi/2$ (270°)	2π (360°)
$\operatorname{sen} \theta$	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1/2	- $1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1	0	1
$\operatorname{tg} \theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	- $\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	—	0
$\operatorname{cossec} \theta$	—	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	—	-1	—
$\sec \theta$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	—	-2	$-\sqrt{2}$	$-2/\sqrt{3}$	-1	—	1
$\operatorname{cotg} \theta$	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	- $1/\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

OBSERVAÇÃO

Os valores exatos das funções trigonométricas somente podem ser obtidos em casos especiais; normalmente, é necessário dispor de uma calculadora ou de um programa computacional.

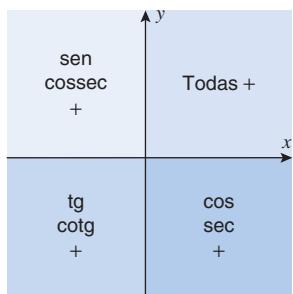


Figura B.13

Os sinais das funções trigonométricas de um ângulo são determinados pelo quadrante no qual cai o lado final do ângulo. Por exemplo, se o lado final cair no primeiro quadrante, então x e y são positivos na Definição B.1. Assim, todas as funções trigonométricas têm valores positivos. Se o lado final cair no segundo quadrante, então x é negativo e y positivo; logo, seno e cossecante são positivos, mas todas as demais funções trigonométricas são negativas. O diagrama na Figura B.13 mostra quais funções trigonométricas são positivas nos vários quadrantes. O leitor achará instrutivo conferir que os resultados na Tabela B.3 são consistentes com a Figura B.13.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Uma *identidade trigonométrica* é uma equação envolvendo funções trigonométricas que é verdadeira com todos os ângulos para os quais ambos os lados da equação estão definidos. Uma das identidades mais importantes em Trigonometria pode ser deduzida aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo na Figura B.9 para obter

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Dividindo ambos os lados por r^2 e usando as definições de $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$ (Definição B.1), obtemos o seguinte resultado fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (11)$$

As seguintes identidades podem ser obtidas de (11) dividindo-se ambos os membros por $\cos^2 \theta$ e $\sin^2 \theta$, respectivamente, e então aplicando as Fórmulas (7) a (10):

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad (12)$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (13)$$

Se (x, y) for um ponto no círculo unitário, também estarão nele os pontos $(-x, y)$, $(-x, -y)$ e $(x, -y)$ (por quê?), e os quatro pontos formam os vértices de um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados (Figura B.14a). As coordenadas x e y de cada vértice representam o seno e o cosseno de um ângulo na posição padrão, cujo lado final passa pelo vértice; assim, obtemos as identidades nas partes (b), (c) e (d) da Figura B.14 para o seno e o cosseno. Dividindo aquelas identidades, obtemos identidades para a tangente. Em suma:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta \quad (14-16)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \quad (17-19)$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \quad \tan(\pi + \theta) = \tan \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta \quad (20-22)$$

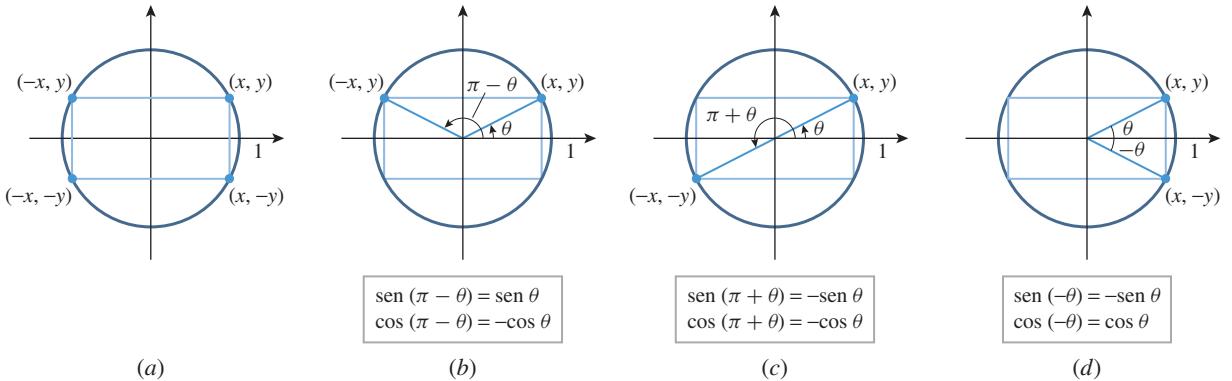


Figura B.14

Dois ângulos na posição padrão que tenham o mesmo lado final devem ter os mesmos valores para suas funções trigonométricas, pois seus lados finais intersectam o círculo unitário no mesmo ponto. Em particular, dois ângulos cujas medidas em radianos diferem por um múltiplo de 2π têm o mesmo lado final e, portanto, as suas funções trigonométricas têm os mesmos valores. Isso dá lugar às identidades

$$\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta - 2\pi) \quad (23)$$

$$\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta - 2\pi) \quad (24)$$

e, mais geralmente,

$$\sin \theta = \sin(\theta \pm 2n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

$$\cos \theta = \cos(\theta \pm 2n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

A identidade (21) implica que

$$\tan \theta = \tan(\theta + \pi) \quad \text{e} \quad \tan \theta = \tan(\theta - \pi) \quad (27-28)$$

A identidade (27) é precisamente (21) com os termos da soma em ordem inversa, e a identidade (28) segue de (21) substituindo $\theta - \pi$ no lugar de θ . Essas duas identidades estabelecem

que somar ou subtrair π de um ângulo não afeta o valor de sua tangente. Tem-se que o mesmo é verdadeiro para todo múltiplo de π ; assim,

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta \pm n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

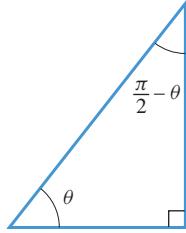


Figura B.15

A Figura B.15 mostra ângulos complementares θ e $(\pi/2) - \theta$ de um triângulo retângulo. Tem-se, a partir de (6), que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto adjacente a } (\pi/2) - \theta}{\text{hipotenusa}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \cos \theta &= \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto oposto a } (\pi/2) - \theta}{\text{hipotenusa}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\end{aligned}$$

o que fornece as identidades

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen} \theta, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg} \theta \quad (30-32)$$

onde a terceira identidade resulta da divisão das duas primeiras. Essas identidades também são válidas para ângulos que não são agudos ou que são negativos.

A LEI DOS COSSENO

O próximo teorema, denominado *lei dos cosenos*, generaliza o Teorema de Pitágoras. Esse resultado tem valor por si mesmo e também como ponto de partida de algumas identidades trigonométricas importantes.

B.2 TEOREMA (Lei dos Cossenos) Se os lados de um triângulo tiverem comprimentos a , b , c e se θ for o ângulo entre os lados com comprimentos a e b , então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

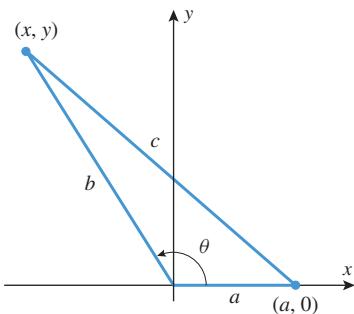


Figura B.16

DEMONSTRAÇÃO Vamos introduzir um sistema de coordenadas de tal forma que θ esteja na posição padrão com o lado de comprimento a sobre o eixo x positivo. De acordo com a Figura B.16, o lado de comprimento a se estende da origem até um ponto $(a, 0)$ e o lado b , da origem até algum ponto (x, y) . A partir da definição de $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$, temos que $\operatorname{sen} \theta = y/b$ e $\cos \theta = x/b$, logo

$$y = b \operatorname{sen} \theta, \quad x = b \cos \theta \quad (33)$$

A partir da fórmula da distância entre os pontos (x, y) e $(a, 0)$ obtemos

$$c^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$

e, portanto, por (33)

$$\begin{aligned}c^2 &= (b \cos \theta - a)^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= a^2 + b^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Vamos, agora, mostrar como usar a lei dos cosenos para obter as identidades a seguir, denominadas *fórmulas de adição* para o seno e o cosseno:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (34)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (35)$$

(36)

(37)

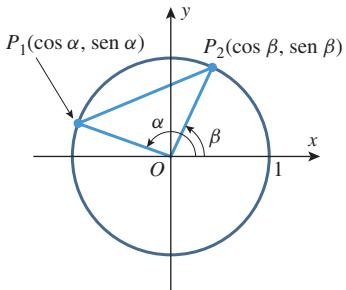


Figura B.17

Vamos deduzir primeiro (37). Em nossa dedução, vamos supor que $0 \leq \beta < \alpha < 2\pi$ (Figura B.17). Conforme a figura, os lados finais de α e β intersectam o círculo unitário nos pontos $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $P_2(\cos \beta, \sin \beta)$. Se denotarmos os comprimentos dos lados do triângulo OP_1P_2 por OP_1 , P_1P_2 e OP_2 , então $OP_1 = OP_2 = 1$ e, da fórmula da distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned}(P_1P_2)^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\&= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\&= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)\end{aligned}$$

Contudo, o ângulo $P_2OP_1 = \alpha - \beta$, de modo que da lei dos cossenos resulta que

$$\begin{aligned}(P_1P_2)^2 &= (OP_1)^2 + (OP_2)^2 - 2(OP_1)(OP_2) \cos(\alpha - \beta) \\&= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Igualando as duas expressões para $(P_1P_2)^2$ e simplificando, obtemos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

o que completa a dedução de (37).

Podemos usar (31) e (37) para deduzir (36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (-\beta)\right] \\&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(-\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(-\beta) \\&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \\&= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

As identidades (34) e (35) podem ser obtidas de (36) e (37) substituindo-se $-\beta$ por β e usando as identidades

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta, \quad \cos(-\beta) = \cos \beta$$

Deixamos para o leitor deduzir as identidades

$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \tg \beta} \quad \tg(\alpha - \beta) = \frac{\tg \alpha - \tg \beta}{1 + \tg \alpha \tg \beta} \quad (38-39)$$

A identidade (38) pode ser obtida dividindo-se (34) por (35) e, então, simplificando-se. A identidade (39) pode ser obtida de (38) substituindo-se $-\beta$ por β e simplificando-se.

No caso especial em que $\alpha = \beta$, as identidades (34), (35) e (38) dão lugar às *fórmulas do ângulo duplo*

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (40)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (41)$$

$$\tg 2\alpha = \frac{2 \tg \alpha}{1 - \tg^2 \alpha} \quad (42)$$

Usando-se a identidade $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, (41) pode ser reescrita nas formas alternativas

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad \text{e} \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (43-44)$$

Se substituirmos α por $\alpha/2$ em (43) e (44) e usarmos alguma álgebra, obteremos as *fórmulas do ângulo metade*.

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (45-46)$$

Deixamos como exercício deduzir as seguintes *fórmulas de produto em soma* a partir de (34) até (37):

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (47)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (48)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (49)$$

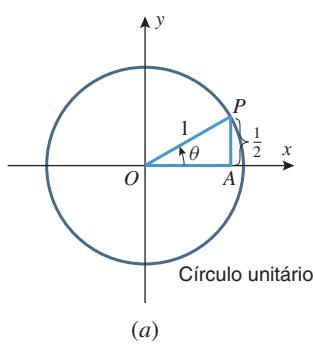
Também deixamos como exercício deduzir as seguintes *fórmulas de soma em produto*:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (50)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (51)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (52)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (53)$$



■ ENCONTRANDO UM ÂNGULO A PARTIR DO VALOR DE SUAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Há inúmeras situações nas quais é necessário encontrar um ângulo desconhecido a partir do valor conhecido de uma de suas funções trigonométricas. O exemplo a seguir ilustra um método para fazer isso.

► **Exemplo 6** Encontre θ sabendo que $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

Solução Vamos começar procurando por ângulos positivos que satisfaçam a equação. Como $\sin \theta$ é positivo, o ângulo θ deve terminar no primeiro ou no segundo quadrante. Se terminar no primeiro quadrante, então a hipotenusa do triângulo OAP na Figura B.18a é o dobro do lado AP , portanto

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Se θ terminar no segundo quadrante (Figura B.18b), então a hipotenusa no triângulo OAP é o dobro do lado AP ; logo, o ângulo $AOP = 30^\circ$, o que implica

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

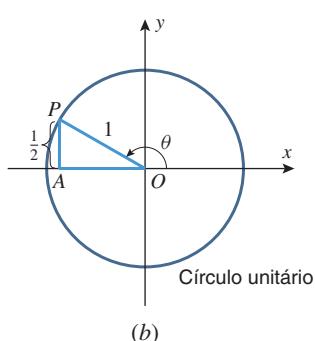


Figura B.18

Encontradas essas duas soluções, todas as outras podem ser obtidas somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 360° (2π rad) a esses ângulos. Assim, o conjunto de todas as soluções é dado pelas fórmulas

$$\theta = 30^\circ \pm n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\theta = 150^\circ \pm n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ou, em radianos,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \pm n \cdot 2\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \pm n \cdot 2\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \blacktriangleleft$$

■ ÂNGULO DE INCLINAÇÃO

A inclinação de uma reta não vertical L está relacionada com o ângulo formado entre L e o eixo x positivo. Se ϕ for o menor ângulo positivo medido no sentido anti-horário do eixo x até L , então a inclinação da reta pode ser expressa como

$$m = \tan \phi \quad (54)$$

(Figura B.19a). O ângulo ϕ , denominado **ângulo de inclinação** da reta, satisfaz $0^\circ \leq \phi < 180^\circ$ em graus (ou, de forma equivalente, $0 \leq \phi < \pi$ em radianos). Se ϕ for um ângulo agudo, então $m = \tan \phi$ é positivo e a reta inclina-se para cima à direita; e se ϕ for um ângulo obtuso, então $m = \tan \phi$ é negativo e a reta inclina-se para baixo à direita. Por exemplo, a reta cujo ângulo de inclinação é 45° tem uma inclinação de $m = \tan 45^\circ = 1$, e a reta cujo ângulo de inclinação é 135° tem uma inclinação de $m = \tan 135^\circ = -1$ (Figura B.19b). A Figura B.20 mostra uma regra conveniente de uso da reta $x = 1$ como uma “régua” para visualizar a relação entre retas com várias inclinações.

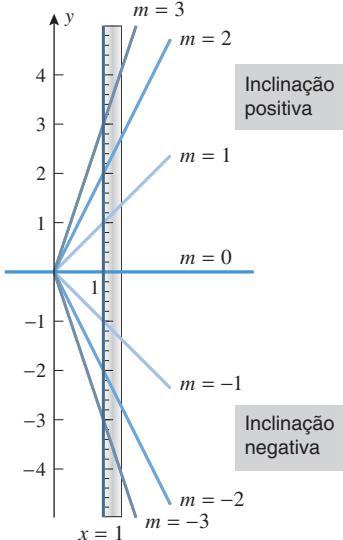


Figura B.20

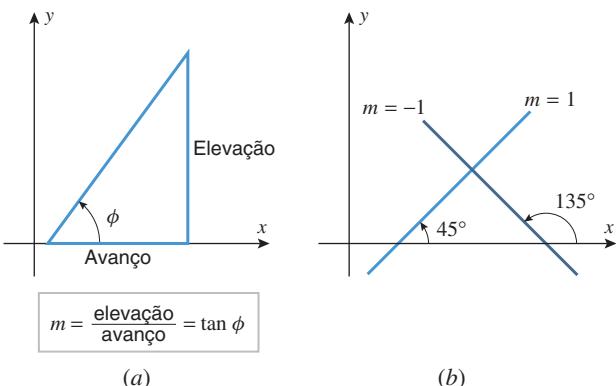


Figura B.19

EXERCÍCIOS APÊNDICE B

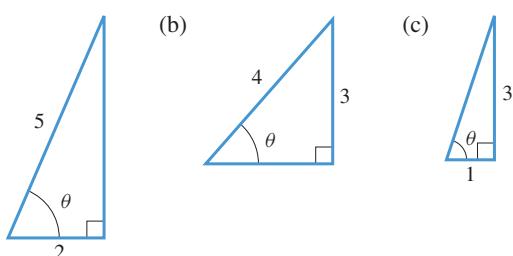
1-2 Express os ângulos em radianos. ■

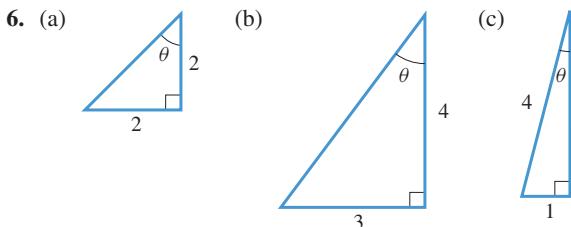
1. (a) 75° (b) 390° (c) 20° (d) 138°
 2. (a) 420° (b) 15° (c) 225° (d) 165°

3-4 Express os ângulos em graus. ■

3. (a) $\pi/15$ (b) $1,5$ (c) $8\pi/5$ (d) 3π
 4. (a) $\pi/10$ (b) 2 (c) $2\pi/5$ (d) $7\pi/6$

5-6 Encontre os valores exatos de todas as seis funções trigonométricas de θ . ■





7-12 O ângulo θ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Resolva os problemas desenhando um triângulo apropriado. Não use calculadora. ■

7. Encontre $\sin \theta$ e $\cos \theta$, dado que $\operatorname{tg} \theta = 3$.
8. Encontre $\sin \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$, dado que $\cos \theta = \frac{2}{3}$.
9. Encontre $\operatorname{tg} \theta$ e $\operatorname{cossec} \theta$, dado que $\sec \theta = \frac{5}{2}$.
10. Encontre $\operatorname{cotg} \theta$ e $\sec \theta$, dado que $\operatorname{cossec} \theta = 4$.
11. Encontre o comprimento do lado adjacente a θ , dado que a hipotenusa tem comprimento 6 e $\cos \theta = 0,3$.
12. Encontre o comprimento da hipotenusa, dado que o lado oposto a θ tem comprimento 2,4 e $\sin \theta = 0,8$.

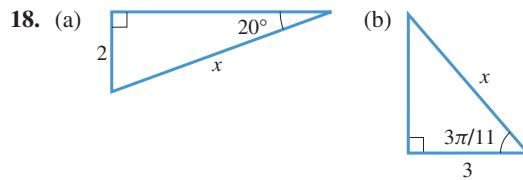
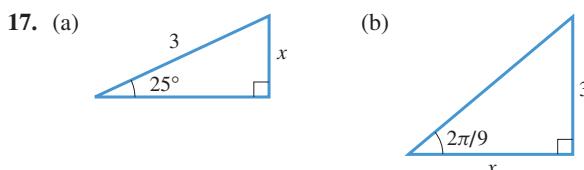
13-14 É dado o valor do ângulo θ . Encontre os valores de todas as seis funções trigonométricas de θ sem usar a calculadora. ■

13. (a) 225° (b) -210° (c) $\frac{5\pi}{3}$ (d) $-\frac{3\pi}{2}$
14. (a) 330° (b) -120° (c) $\frac{9\pi}{4}$ (d) -3π

15-16 Use as informações dadas para encontrar os valores exatos das funções trigonométricas restantes de θ . ■

15. (a) $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 (b) $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$
 (c) $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
 (d) $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$
 (e) $\operatorname{cossec} \theta = \sqrt{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 (f) $\operatorname{cossec} \theta = \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
16. (a) $\sin \theta = \frac{1}{4}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 (b) $\sin \theta = \frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
 (c) $\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{3}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 (d) $\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{3}$, $\pi < \theta < 3\pi/2$
 (e) $\sec \theta = -\frac{5}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
 (f) $\sec \theta = -\frac{5}{2}$, $\pi < \theta < 3\pi/2$

17-18 Use um recurso computacional para obter x até a quarta casa decimal. ■



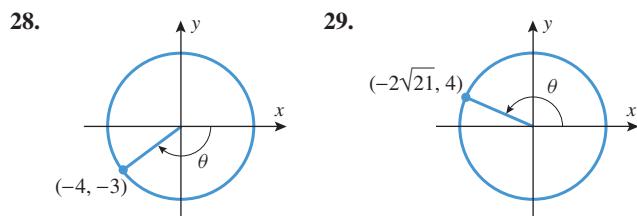
19. Em cada parte, seja θ um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Expressse as cinco funções trigonométricas restantes em termos de a .

- (a) $\sin \theta = a/3$
- (b) $\operatorname{tg} \theta = a/5$
- (c) $\sec \theta = a$

20-27 Encontre todos os valores de θ (em radianos) que satisfaçam a equação dada. Não use calculadora. ■

20. (a) $\cos \theta = -1/\sqrt{2}$ (b) $\sin \theta = -1/\sqrt{2}$
21. (a) $\operatorname{tg} \theta = -1$ (b) $\cos \theta = \frac{1}{2}$
22. (a) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ (b) $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$
23. (a) $\operatorname{tg} \theta = 1/\sqrt{3}$ (b) $\sin \theta = -\sqrt{3}/2$
24. (a) $\sin \theta = -1$ (b) $\cos \theta = -1$
25. (a) $\operatorname{cotg} \theta = -1$ (b) $\operatorname{cotg} \theta = \sqrt{3}$
26. (a) $\sec \theta = -2$ (b) $\operatorname{cossec} \theta = -2$
27. (a) $\operatorname{cossec} \theta = 2/\sqrt{3}$ (b) $\sec \theta = 2/\sqrt{3}$

28-29 Encontre os valores de todas as seis funções trigonométricas de θ . ■



30. Encontre todos os valores de θ (em radianos) tais que
 - (a) $\sin \theta = 1$
 - (b) $\cos \theta = 1$
 - (c) $\operatorname{tg} \theta = 1$
 - (d) $\operatorname{cossec} \theta = 1$
 - (e) $\sec \theta = 1$
 - (f) $\operatorname{cotg} \theta = 1$

31. Encontre todos os valores de θ (em radianos) tais que
 - (a) $\sin \theta = 0$
 - (b) $\cos \theta = 0$
 - (c) $\operatorname{tg} \theta = 0$
 - (d) $\operatorname{cossec} \theta$ é indefinida
 - (e) $\sec \theta$ é indefinida
 - (f) $\operatorname{cotg} \theta$ é indefinida

32. Como poderíamos usar uma régua e um transferidor para aproximar $\sin 17^\circ$ e $\cos 17^\circ$?

33. Encontre o comprimento de um arco circular em um círculo com raio de 4 cm subentendido por um ângulo de
 - (a) $\pi/6$
 - (b) 150°

34. Encontre o raio de um setor circular que tem um ângulo de $\pi/3$ e um comprimento de arco de 7 unidades.

35. Um ponto P movendo-se no sentido anti-horário sobre um círculo com raio de 5 cm percorre um arco com comprimento de 2 cm. Qual é o ângulo varrido por um raio do centro do círculo até P ?

65. Substitua β por $-\beta$ na identidade (50) para deduzir (51).

66. (a) Expresse $3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha$ na forma

$$C \sin(\alpha + \phi)$$

(b) Mostre que uma soma da forma

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha$$

pode ser reescrita na forma $C \sin(\alpha + \phi)$.

67. Mostre que o comprimento da diagonal do paralelogramo na figura abaixo é

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

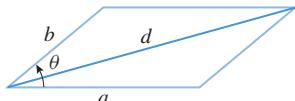


Figura Ex-67

68-69 Encontre o ângulo de inclinação da reta com inclinação m até o grau mais próximo. Use um recurso gráfico quando necessário. ■

- 68.** (a) $m = \frac{1}{2}$ (b) $m = -1$
(c) $m = 2$ (d) $m = -57$

- 69.** (a) $m = -\frac{1}{2}$ (b) $m = 1$
(c) $m = -2$ (d) $m = 57$

70-71 Encontre o ângulo de inclinação da reta até o grau mais próximo. Use um recurso gráfico quando necessário. ■

- 70.** (a) $3y = 2 - \sqrt{3}x$ (b) $y - 4x + 7 = 0$

- 71.** (a) $y = \sqrt{3}x + 2$ (b) $y + 2x + 5 = 0$

C

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMINAIS

Vamos supor, neste apêndice, que o leitor saiba dividir polinômios e usar o algoritmo de Briot-Ruffini. Se for necessário revisar essas técnicas, o leitor deve procurar um livro de Álgebra.

■ UMA BREVE REVISÃO DE POLINÔMIOS

Lembre que, se n for um inteiro não negativo, então um **polinômio de grau n** é uma função que pode ser escrita nas formas a seguir, dependendo de querermos as potências de x em ordem crescente ou decrescente:

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \quad (c_n \neq 0) \\ &c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 \quad (c_n \neq 0) \end{aligned}$$

Os números c_0, c_1, \dots, c_n são denominados **coeficientes** do polinômio. O coeficiente c_n (que multiplica a potência mais alta de x) é chamado de **coeficiente dominante**, o termo c_nx^n é conhecido como **termo dominante** e o coeficiente c_0 é o **termo constante**. Os polinômios com graus 1, 2, 3, 4 e 5 são chamados de **linear**, **quadrático**, **cúbico**, **quártico** e **quintico**, respectivamente. Por simplicidade, os polinômios gerais de grau baixo são, frequentemente, escritos sem os subscritos nos coeficientes:

$p(x) = a$	Polinômio constante
$p(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$	Polinômio linear
$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$	Polinômio quadrático
$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$	Polinômio cúbico

Quando tentamos fatorar completamente um polinômio, uma de três coisas pode ocorrer:

- Pode ser que consigamos decompor o polinômio em fatores lineares distintos, usando somente números reais, como no exemplo a seguir:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2)$$

- Pode ser que consigamos decompor o polinômio em fatores lineares, usando somente números reais, mas alguns dos fatores podem ser repetidos; por exemplo:

$$x^6 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x^3 - 3x + 2) = x^3(x - 1)^2(x - 2) \quad (1)$$

- Pode ser que consigamos decompor o polinômio em fatores lineares ou quadráticos, usando somente números reais, porém não somos capazes de decompor os fatores quadráticos sem usar números imaginários (tais fatores quadráticos são chamados de **irreduzíveis** sobre os números reais); por exemplo:

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) \end{aligned}$$

Aqui, o fator $x^2 + 1$ é irreduzível sobre os números reais.

Em geral, se $p(x)$ for um polinômio de grau n com coeficiente dominante a e se forem permitidos números imaginários, então $p(x)$ pode ser fatorado como

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \quad (2)$$

onde r_1, r_2, \dots, r_n são denominados *zeros* de $p(x)$ ou *raízes* da equação $p(x) = 0$ e (2) é denominada *fatoração linear completa* de $p(x)$. Em (2), se algum dos fatores for repetido, então eles podem ser combinados; por exemplo, se os k primeiros fatores forem distintos e os restantes forem repetições dos k primeiros, então (2) pode ser expressa como

$$p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k} \quad (3)$$

onde r_1, r_2, \dots, r_k são as raízes *distintas* de $p(x) = 0$. Os expoentes m_1, m_2, \dots, m_k mostram quantas vezes os vários fatores ocorrem na fatoração completa; por exemplo, em (3) o fator $(x - r_1)$ ocorre m_1 vezes, $(x - r_2)$ ocorre m_2 vezes e assim por diante. Algumas técnicas para fatorar polinômios são discutidas adiante neste apêndice. Em geral, se um fator $(x - r)$ ocorrer m vezes na fatoração completa de um polinômio, dizemos que r é uma raiz ou um zero *com multiplicidade m*, e se $(x - r)$ não repetir (isto é, tem multiplicidade 1), dizemos que r é uma raiz ou zero *simples*. Por exemplo, temos a partir de (1) que a equação $x^6 - 3x^4 + 2x^3 = 0$ pode ser expressa como

$$x^3(x - 1)^2(x + 2) = 0 \quad (4)$$

de modo que essa equação tem três raízes distintas: $x = 0$ com multiplicidade 3, $x = 1$ com multiplicidade 2 e uma raiz simples $x = -2$.

Observe que em (3) a soma da multiplicidade das raízes deve ser n , pois $p(x)$ tem grau n ; isto é,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

Por exemplo, em (4) as multiplicidades somam 6, que é o grau do polinômio.

Segue de (2) que um polinômio de grau n pode ter, no máximo, n raízes distintas; se todas as raízes forem simples, então haverá *exatamente n*; no caso de repetição, teremos menos do que n . Porém, na contagem das raízes de um polinômio é padrão contar as multiplicidades, pois essa convenção nos permite dizer que um polinômio de grau n tem n raízes. Por exemplo, a partir de (1) as seis raízes do polinômio $p(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3$ são

$$r = 0, 0, 0, 1, 1, -2$$

Resumindo, temos o seguinte teorema importante.

C.1 TEOREMA *Se forem permitidas raízes imaginárias e se as raízes forem contadas de acordo com suas multiplicidades, então um polinômio de grau n terá exatamente n raízes.*

■ O TEOREMA DO RESTO

Quando dois inteiros positivos são divididos, eles podem ser expressos como o quociente mais o resto sobre o divisor, onde o resto é menor que o divisor. Por exemplo:

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

Se multiplicarmos essa equação por 5, obtemos

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

que estabelece que o *numerador* é o divisor vezes o quociente mais o resto.

O seguinte teorema, que daremos sem prova, é um resultado análogo para divisão de polinômios.

C.2 TEOREMA Se $p(x)$ e $s(x)$ forem polinômios, e se $s(x)$ não for o polinômio zero, então $p(x)$ poderá ser expresso como

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$$

onde $q(x)$ e $r(x)$ são o quociente e o resto que resultam quando $p(x)$ for dividido por $s(x)$; além disso, ou $r(x)$ é o polinômio zero ou o grau de $r(x)$ é menor do que o grau de $s(x)$.

No caso especial em que $p(x)$ for dividido por um polinômio de primeiro grau da forma $x - c$, o resto deve ser alguma constante r , pois ou é zero ou tem grau menor do que 1. Assim, o Teorema C. 2 implica que

$$p(x) = (x - c)q(x) + r$$

e isso, por sua vez, implica que $p(c) = r$. Em suma, temos o seguinte teorema.

C.3 TEOREMA (Teorema do Resto) Se um polinômio $p(x)$ for dividido por $x - c$, então o resto é $p(c)$.

► **Exemplo 1** De acordo com o Teorema do Resto, o resto da divisão de

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$$

por $x + 4$ deve ser

$$p(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 4(-4) - 3 = -67$$

Mostre que é isso o que acontece.

Solução Por divisão

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 - 4x - 3 \mid x + 4 \\ 2x^3 + 8x^2 \quad\quad\quad 2x^2 - 5x + 16 \\ -5x^2 - 4x \\ \underline{-5x^2 - 20x} \\ 16x - 3 \\ \underline{16x + 64} \\ -67 \end{array}$$

o que mostra que o resto é -67 .

Solução alternativa Como estamos dividindo por uma expressão da forma $x - c$ (onde $c = -4$), podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini em vez da divisão. Os cálculos são

$$\begin{array}{r} -4 \mid 2 \quad 3 \quad -4 \quad -3 \\ \quad \quad \underline{-8} \quad 20 \quad -64 \\ \quad 2 \quad -5 \quad 16 \quad -67 \end{array}$$

mostrando, novamente, que o resto é -67 . ◀

■ O TEOREMA DA FATORAÇÃO

Fatorar um polinômio $p(x)$ é escrevê-lo como um produto de polinômios de graus menores, chamados de **fatores** de $p(x)$. Para $s(x)$ ser um fator de $p(x)$, não pode haver resto quando $p(x)$ for dividido por $s(x)$. Por exemplo, se $p(x)$ puder ser fatorado como

$$p(x) = s(x)q(x) \quad (5)$$

então,

$$\frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \quad (6)$$

logo, dividindo $p(x)$ por $s(x)$, obtemos um quociente $q(x)$ e nenhum resto. Reciprocamente, (6) implica (5), logo $s(x)$ é um fator de $p(x)$ se não existir resto quando $p(x)$ for dividido por $s(x)$.

No caso especial em que $x - c$ for um fator de $p(x)$, o polinômio $p(x)$ pode ser expresso como

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

o que implica $p(c) = 0$. Reciprocamente, se $p(c) = 0$, então, pelo Teorema do Resto, $x - c$ é um fator de $p(x)$, uma vez que o resto é zero quando $p(x)$ for dividido por $x - c$. Esses resultados estão resumidos no seguinte teorema.

C.4 TEOREMA (Teorema da Fatoração) Um polinômio $p(x)$ tem $x - c$ como um fator se, e somente se, $p(c) = 0$.

Segue desse teorema que as afirmações abaixo todas dizem a mesma coisa de diferentes maneiras:

- $x - c$ é um fator de $p(x)$
- $p(c) = 0$
- c é um zero de $p(x)$
- c é uma raiz da equação $p(x) = 0$
- c é uma solução da equação $p(x) = 0$
- c é um corte no eixo x de $y = p(x)$

► **Exemplo 2** Confirme que $x - 1$ é um fator de

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

dividindo $p(x)$ por $x - 1$ e verificando que o resto é zero.

Solução Por divisão

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 13x - 15 \mid x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \qquad \qquad \qquad x^2 - 2x - 15 \\ \qquad \qquad \qquad - 2x^2 - 13x \\ \qquad \qquad \qquad \underline{-2x^2 + 2x} \\ \qquad \qquad \qquad - 15x + 15 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{-15x + 15} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

o que mostra que o resto é zero.

Solução alternativa Como estamos dividindo por uma expressão da forma $x - c$, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini. Os cálculos são

$$\begin{array}{r} \underline{1} \\ \underline{1} & -3 & -13 & 15 \\ & 1 & -2 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

o que confirma ser zero o resto. ◀

■ USANDO UM FATOR PARA ENCONTRAR OUTROS FATORES

Se $x - c$ for um fator de $p(x)$, e se $q(x) = p(x) / (x - c)$, então

$$p(x) = (x - c)q(x) \quad (7)$$

logo, os fatores lineares adicionais de $p(x)$ podem ser obtidos fatorando-se o quociente $q(x)$.

► Exemplo 3 Fatore

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \quad (8)$$

completamente em fatores lineares.

Solução No Exemplo 2, mostramos que $x - 1$ é um fator de $p(x)$ e também vimos que $p(x) / (x - 1) = x^2 - 2x - 15$. Assim,

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x^2 - 2x - 15)$$

Fatorando-se por inspeção $x^2 - 2x - 15$, obtemos

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x - 5)(x + 3)$$

o que é a fatoração linear completa de $p(x)$. ◀

■ MÉTODOS PARA ENCONTRAR RAÍZES

Uma equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida através da fórmula quadrática, que expressa a solução da equação em termos dos coeficientes. Versões dessa fórmula eram conhecidas desde os tempos da Babilônia, e no século XVII foram obtidas fórmulas para a solução de equações cúbicas e quárticas gerais. Porém, tentativas de encontrar fórmulas para a solução de equações gerais de quinto grau ou com grau maior foram infrutíferas. A razão para isso ficou clara quando, em 1829, o matemático francês Evariste Galois (1811-1832) provou que é impossível expressar a solução de uma equação geral de quinto ou maior grau em termos de seus coeficientes usando operações algébricas.

Hoje, temos poderosos programas de computação para encontrar os zeros de polinômios específicos. Por exemplo, leva somente alguns segundos para um CAS (p. ex., *Mathematica* ou *Maple*) mostrar que os zeros do polinômio

$$p(x) = 10x^4 - 23x^3 - 10x^2 + 29x + 6 \quad (9)$$

são

$$x = -1, \quad x = -\frac{1}{5}, \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x = 2 \quad (10)$$

Os algoritmos usados por esses programas para encontrar os zeros, inteiros ou racionais, caso existam, de um polinômio estão baseados no teorema a seguir, o qual é provado em cursos avançados de Álgebra.

C.5 TEOREMA Suponha que

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

seja um polinômio com coeficientes inteiros.

- (a) Se r for um zero inteiro de $p(x)$, então r deverá ser um divisor do termo constante c_0 .
- (b) Se $r = a/b$ for um zero racional de $p(x)$, onde todos os fatores comuns de a e de b foram cancelados, então a deverá ser um divisor do termo constante c_0 , e b deverá ser um divisor do coeficiente dominante c_n .

Por exemplo, em (9), o termo constante é 6 (que tem por divisores $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 6) e o coeficiente dominante é 10 (que tem por divisores $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ e ± 10). Assim, os únicos zeros inteiros possíveis de $p(x)$ são

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6$$

e os únicos zeros racionais não inteiros possíveis são

$$\pm \frac{1}{2}, \quad \pm \frac{1}{5}, \quad \pm \frac{1}{10}, \quad \pm \frac{2}{5}, \quad \pm \frac{3}{2}, \quad \pm \frac{3}{5}, \quad \pm \frac{3}{10}, \quad \pm \frac{6}{5}$$

Usando um computador, é simples calcular $p(x)$ em cada um desses números e mostrar que seus únicos zeros são os números dados em (10).

► Exemplo 4 Resolva a equação $x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = 0$.

Solução As soluções da equação são os zeros do polinômio

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 7x - 21$$

Vamos procurar, primeiro, pelos zeros inteiros. Como todos esses zeros devem dividir o termo constante, as únicas possibilidades são $\pm 1, \pm 3, \pm 7$ e ± 21 . Substituindo esses valores em $p(x)$ (ou usando o método do Exercício 6), obtemos que $x = -3$ é um zero inteiro. Isso nos diz que $x + 3$ é um fator de $p(x)$, que pode ser escrito como

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = (x + 3) q(x)$$

onde $q(x)$ é o quociente da divisão de $x^3 + 3x^2 - 7x - 21$ por $x + 3$. Deixamos a cargo do leitor mostrar, efetuando a divisão, que $q(x) = x^2 - 7$; logo

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = (x + 3)(x^2 - 7) = (x + 3)(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$$

o que nos diz que as soluções da equação dada são $x = 3$, $x = \sqrt{7} \approx 2,65$ e $x = -\sqrt{7} \approx -2,65$. ◀

EXERCÍCIOS APÊNDICE C



- 1-2** Encontre o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ que resulta da divisão de $p(x)$ por $s(x)$. ■

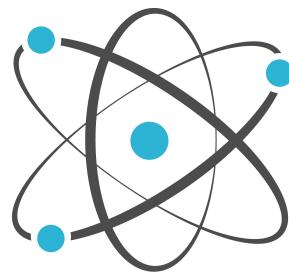
1. (a) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 5x + 10$; $s(x) = x^2 - x + 2$
 (b) $p(x) = 6x^4 + 10x^2 + 5$; $s(x) = 3x^2 - 1$
 (c) $p(x) = x^5 + x^3 + 1$; $s(x) = x^2 + x$
2. (a) $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x + 7$; $s(x) = x^2 - x + 1$
 (b) $p(x) = 2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 1$; $s(x) = 2x^2 - x + 1$
 (c) $p(x) = 5x^6 + 4x^2 + 5$; $s(x) = x^3 + 1$

- 3-4** Use o algoritmo de Briot-Ruffini para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ que resulta da divisão de $p(x)$ por $s(x)$. ■

3. (a) $p(x) = 3x^3 - 4x - 1$; $s(x) = x - 2$
 (b) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $s(x) = x + 5$
 (c) $p(x) = x^5 - 1$; $s(x) = x - 1$
4. (a) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$; $s(x) = x - 1$
 (b) $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 17x^2 - 27x - 9$; $s(x) = x + 4$
 (c) $p(x) = x^7 + 1$; $s(x) = x - 1$

5. Seja $p(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 4$. Use o algoritmo de Briot-Ruffini e o Teorema do Resto para encontrar $p(0)$, $p(1)$, $p(-3)$ e $p(7)$.
6. Seja $p(x)$ o polinômio do Exemplo 4. Use o algoritmo de Briot-Ruffini e o Teorema do Resto para calcular $p(x)$ em $x = \pm 1$, ± 3 , ± 7 e ± 21 .
7. Seja $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Encontre um polinômio $q(x)$ e uma constante r tais que
- $p(x) = (x - 2) q(x) + r$
 - $p(x) = (x + 1) q(x) + r$
8. Seja $p(x) = x^5 - 1$. Encontre um polinômio $p(x)$ e uma constante r tais que
- $p(x) = (x + 1) q(x) + r$
 - $p(x) = (x - 1) q(x) + r$
9. Em cada parte, faça uma lista de todos os possíveis candidatos a zeros racionais de $p(x)$.
- $p(x) = x^7 + 3x^3 - x + 24$
 - $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7x - 10$
 - $p(x) = x^{35} - 17$
10. Encontre todos os zeros inteiros de
- $$p(x) = x^6 + 5x^5 - 16x^4 - 15x^3 - 12x^2 - 38x - 21$$
- 11-15** Fatore completamente os polinômios. ■
- $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
 - $p(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$
 - $p(x) = x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
 - $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x - 9$
 - $p(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18$
- [c] 16.** Para cada uma das fatorações obtidas nos Exercícios 11 a 15, verifique suas respostas usando um CAS.
- 17-21** Encontre todas as soluções reais das equações. ■
- $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$
 - $2x^3 - 5x^2 - 10x + 3 = 0$
 - $3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0$
 - $2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6 = 0$
 - $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 8x + 12 = 0$
- [c] 22.** Para cada uma das equações resolvidas nos Exercícios 17 a 21, verifique sua resposta usando um CAS.
23. Obtenha todos os valores de k para os quais $x - 1$ é um fator do polinômio $p(x) = k^2x^3 - 7kx + 10$.
24. Será $x + 3$ um fator de $x^7 + 2187$? Justifique sua resposta.
- [c] 25.** Uma fatia com 3 cm de espessura é cortada de um cubo, deixando um volume de 196 cm^3 . Use um CAS para encontrar o comprimento de um lado do cubo original.
26. (a) Mostre que não há nenhum número racional positivo que exceda seu cubo por 1.
(b) Existe algum número real que excede seu cubo por 1? Justifique sua resposta.
27. Use o Teorema da Fatoração para mostrar cada uma das seguintes afirmações.
- $x - y$ é um fator de $x^n - y^n$ com qualquer valor inteiro positivo de n .
 - $x + y$ é um fator de $x^n - y^n$ com qualquer valor inteiro positivo par de n .
 - $x + y$ é um fator de $x^n + y^n$ com qualquer valor inteiro positivo ímpar de n .

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

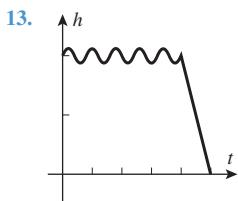


RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

By kmz

► Exercícios 0.1 (página 12)

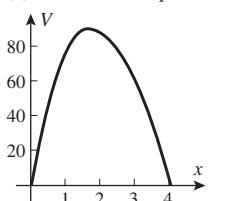
1. (a) $-2,9; -2,0; 2,35; 2,9$ (b) nenhum (c) 0 (d) $-1,75 \leq x \leq 2, 15$
(e) $y_{\max} = 2,8$ em $x = -2,6$; $y_{\min} = -2,2$ em $x = 1,2$
3. (a) sim (b) sim (c) não (d) não
5. (a) 1999, em torno de \$47.700 (b) 1933, \$41.600 (c) primeiro ano
7. (a) $-2; 10; 10; 25; 4; 27t^2 - 2$ (b) $0; 4; -4; 6; 2\sqrt{2}; f(3t) = 1/(3t)$ com $t > 1$ e $f(3t) = 6t$ com $t \leq 1$
9. (a) domínio: $x \neq 3$; imagem: $y \neq 0$ (b) domínio: $x \neq 0$; imagem: $\{-1, 1\}$ (c) domínio: $x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$; imagem: $y \geq 0$
(d) domínio: $-\infty < x < +\infty$; imagem: $y \geq 2$
(e) domínio: $x \neq (2n + \frac{1}{2})\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; imagem: $y \geq \frac{1}{2}$
(f) domínio: $-2 \leq x < 2$ ou $x > 2$; imagem: $0 \leq y < 2$ ou $y > 2$
11. (a) não; nascimentos e mortes (b) decresce por 8 horas, dá um salto para cima e se repete



15. função: $y = \sqrt{25 - x^2}$
17. função: $y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 < x \leq 5 \end{cases}$
19. Falso; por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$ cruza o eixo x em $x = \pm 1$.
21. Falso; a imagem também inclui 0.
23. (a) 2,4 (b) nenhum (c) $x \leq 2; 4 \leq x$ (d) $y_{\min} = -1$; nenhum máximo
25. $h = L(1 - \cos \theta)$

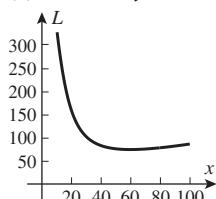
27. (a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 4x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

29. (a) $V = (8 - 2x)(15 - 2x)x$
(b) $0 < x < 4$
(c) $0 < V \leq 90$, aproximadamente



- (d) V parece ter um máximo em $x \approx 1,7$.

31. (a) $L = x + 2y$
(b) $L = x + 2000/x$
(c) $0 < x \leq 100$
(d) $x \approx 45$ m, $y \approx 22$ m

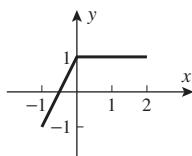


33. (a) $r \approx 3,4; h \approx 13,8$

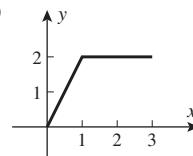
- (b) mais alto
(c) $r \approx 3,1$ cm; $h \approx 16,0$ cm; $C \approx 4,76$ centavos
35. (i) $x = 1, -2$ (ii) $g(x) = x + 1$, todo x
37. (a) 25°F (b) 13°F (c) 5°F 39. 15°F

► Exercícios 0.2 (página 24)

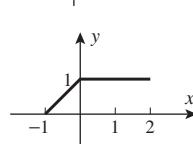
1. (a)



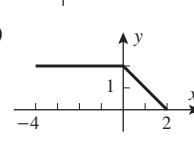
(b)



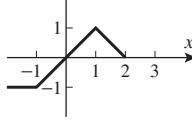
(c)



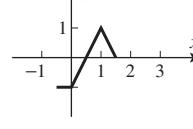
(d)



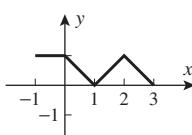
3. (a)



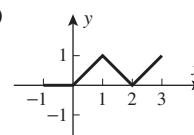
(b)



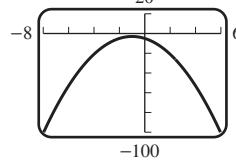
(c)



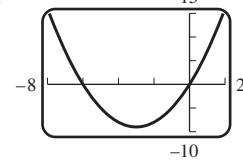
(d)



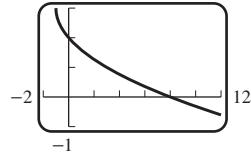
5.



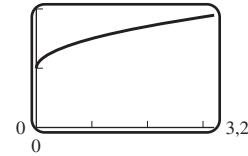
7.

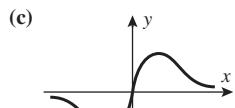
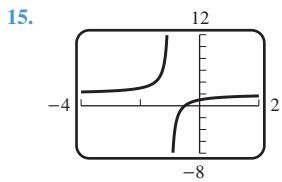
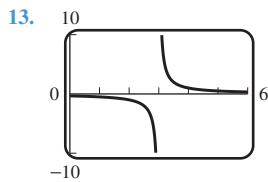


9.

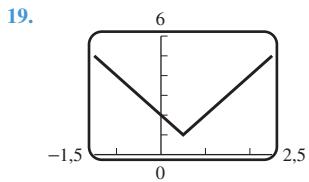
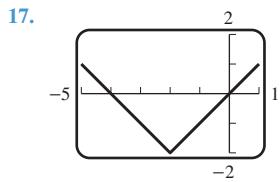


11.





61. (a) par (b) ímpar

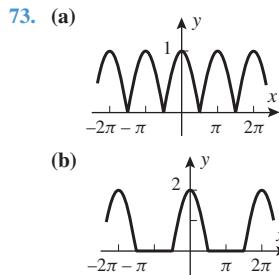
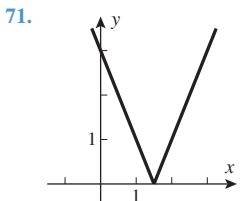
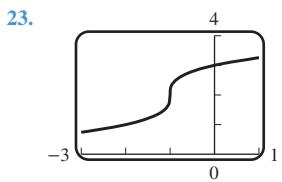
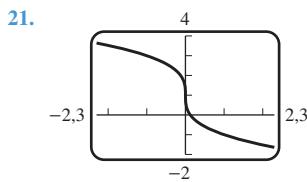
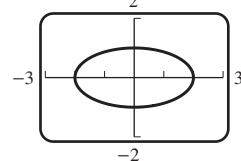


63. (a) par (b) ímpar (c) par

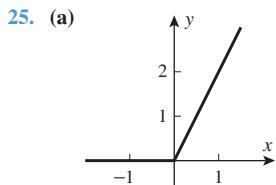
67. (a) eixo y
(b) origem
(c) eixo x, eixo y, origem

(d) nenhum (e) ímpar (f) par

69.



75. sim; $f(x) = x^k$, $g(x) = x^n$



(b) $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

27. $3\sqrt{x-1}, x \geq 1$; $\sqrt{x-1}, x \geq 1$; $2x-2, x \geq 1$; $2, x > 1$

29. (a) 3 (b) 9 (c) 2 (d) 2 (e) $\sqrt{2+h}$ (f) $(3+h)3+1$

31. $1-x, x \leq 1$; $\sqrt{1-x^2}, |x| \leq 1$

33. $\frac{1}{1-2x}, x \neq \frac{1}{2}, 1$; $-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}, x \neq 0, 1$ 35. $x^{-6} + 1$

37. (a) $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x+2$ (b) $g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 3x + 5$

39. (a) $g(x) = x^2$, $h(x) = \sin x$ (b) $g(x) = 3/x$, $h(x) = 5 + \cos x$

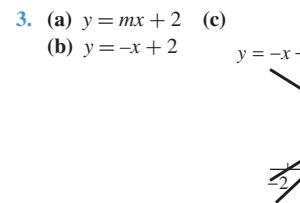
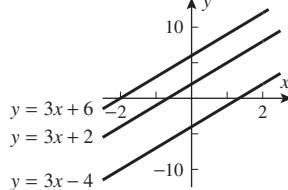
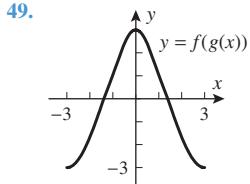
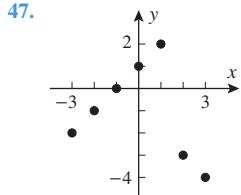
41. (a) $g(x) = x^3$, $h(x) = 1 + \sin(x^2)$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

43. Verdadeira; ver Definição 0.2.1

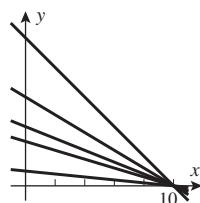
45. Verdadeira; ver Teorema 0.2.3 e a definição de função par que segue.



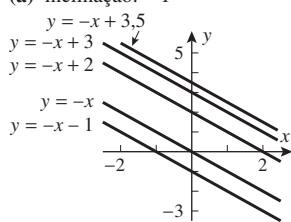
5. $y = \pm \frac{9 - x_0 x}{\sqrt{9 - x_0^2}}$

7. y

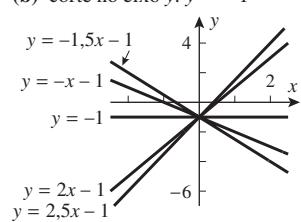
Cortes com eixo y representam valor atual do item sendo depreciado

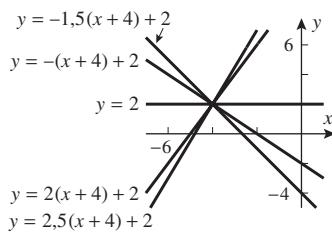
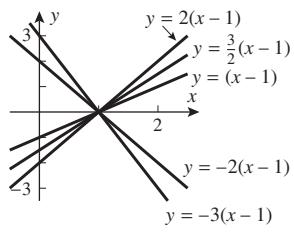


9. (a) inclinação: -1

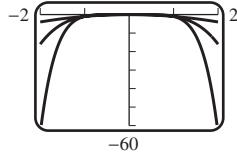
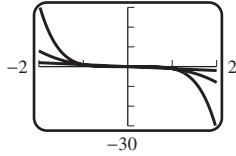


(b) corte no eixo y: $y = -1$

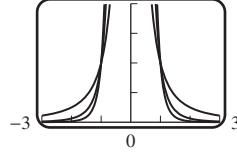
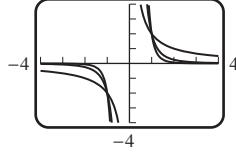


(c) passa por $(-4, 2)$ (d) corte no eixo x : $x = 1$ 

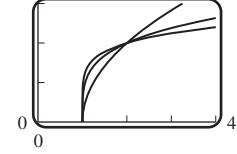
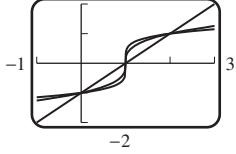
13.



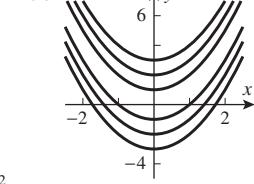
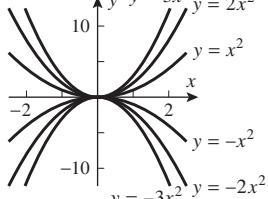
(b)



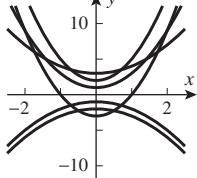
(c)



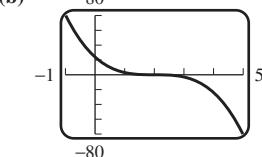
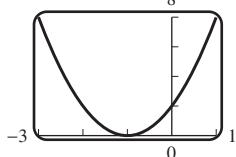
15.



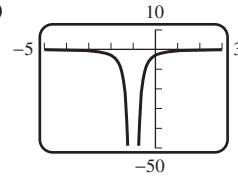
(c)



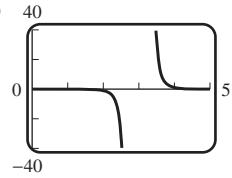
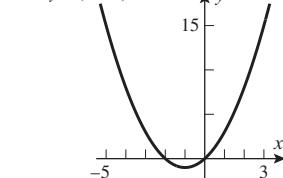
17.



(c)



(d)

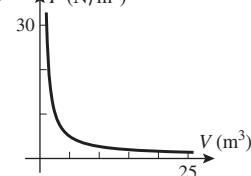
19. $y = (x + 1)^2 - 1$ 

11. (a) VI
(b) IV
(c) III
(d) V
(e) I
(f) II

21. (a) newton-metro ($\text{N}\cdot\text{m}$) (b) $20 \text{ N}\cdot\text{m}$

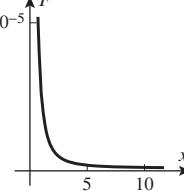
$V (\text{L})$	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0
$P (\text{N/m}^2)$	80×10^3	40×10^3	20×10^3	$13,3 \times 10^3$	10×10^3

(d)

23. (a) $k = 0,000045 \text{ N}\cdot\text{m}^2$

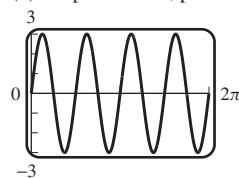
- (b) $0,000005 \text{ N}$
(d) A força torna-se infinita;
a força tende a zero.

(c)

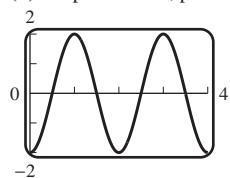
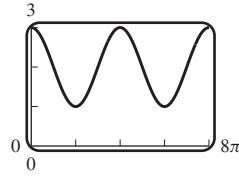


As respostas das questões Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

25. Verdadeiro; ver Figura 0.3.2(b).

27. Falso; a constante de proporcionalidade é $2 \cdot 6 = 12$.29. (a) II; $y = 1$, $x = -1$ e 2 (b) I; $y = 0$, $x = -2$ e 3 (c) IV; $y = 2$
(d) III; $y = 0$, $x = -2$ 31. (a) $y = 3 \operatorname{sen}(x/2)$ (b) $y = 4 \cos 2x$ (c) $y = -5 \operatorname{sen} 4x$ 33. (a) $y = \operatorname{sen}[x + (\pi/2)]$ (b) $y = 3 + 3 \operatorname{sen}(2x/9)$
(c) $y = 1 + 2 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 35. (a) amplitude = 3, período = $\pi/2$ 

(b) amplitude = 2, período = 2

(c) amplitude = 1, período = 4π 37. $x = \frac{5\sqrt{13}}{2} \operatorname{sen}\left(2\pi t + \operatorname{arc tg} \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

► Exercícios 0.4 (página 48)

1. (a) sim (b) não (c) sim (d) não
 3. (a) sim (b) sim (c) não (d) sim (e) não (f) não
 5. (a) sim (b) não
 7. (a) $8, -1, 0$
 - (b) $[-2, 2], [-8, 8]$
 - (c)
-
9. $\frac{1}{7}(x+6)$
11. $\sqrt[3]{(x+5)/3}$
13. $-\sqrt{3/x}$
15. $\begin{cases} (5/2)-x, & x > 1/2 \\ 1/x, & 0 < x \leq 1/2 \end{cases}$
17. $x^{1/4}-2 \cos x \geq 16$
19. $\frac{1}{2}(3-x^2) \cos x \leq 0$

21. (a) $f^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$

(b) $f^{-1}(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$

23. (a) $y = (6,214 \times 10^{-4})x$ (b) $x = \frac{10^4}{6,214}y$

(c) quantos metros em y milhas

25. (b) simetria em torno da reta $y = x$ 27. 10

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

31. Falso; $f^{-1}(2) = 2$

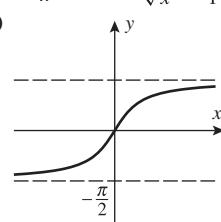
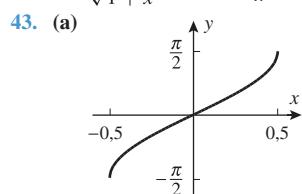
33. Verdadeiro; ver Teorema 0.4.3.

35. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$

37. (a) $0 \leq x \leq \pi$ (b) $-1 \leq x \leq 1$ (c) $-\pi/2 < x < \pi/2$

(d) $-\infty < x < +\infty$ 39. $\frac{24}{25}$

41. (a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (b) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (c) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$



45. (a) $x = 2,76258$ rad

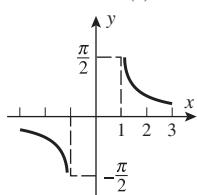
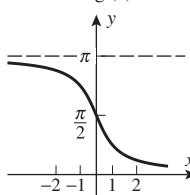
(b) $\theta = 217,59^\circ$

47. (a) 0,25545, erro

(b) $|x| \leq \operatorname{sen} 1$

49. (a) $\operatorname{arc tg}(x)$

arc cossec(x)



(b) arc cotg x: todos os x, $0 < y < \pi$

arc cossec x: $|x| \geq 1$, $0 < |y| < \pi/2$

51. (a) $55,0^\circ$ (b) $33,6^\circ$ (c) $25,8^\circ$ 53. (a) 21,1 horas (b) 2,9 horas

55. 29°

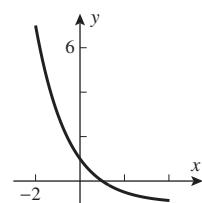
► Exercícios 0.5 (página 61)

1. (a) -4 (b) 4 (c) $\frac{1}{4}$ 3. (a) 2,9690 (b) 0,0341
5. (a) 4 (b) -5 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$ 7. (a) 1,3655 (b) -0,3011
9. (a) $2r + \frac{s}{2} + \frac{t}{2}$ (b) $s - 3r - t$
11. (a) $1 + \log x + \frac{1}{2} \log(x-3)$ (b) $2 \ln|x| + 3 \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

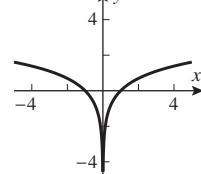
13. $\log \frac{256}{3}$ 15. $\ln \frac{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}{\cos x}$ 17. 0,01 19. e^2 21. 4

23. $\sqrt{3/2}$ 25. $-\frac{\ln 3}{2 \ln 5}$ 27. $\frac{1}{3} \ln \frac{7}{2}$ 29. -2

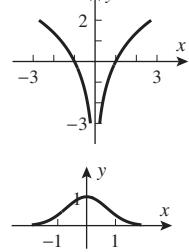
31. (a) domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-1, +\infty)$



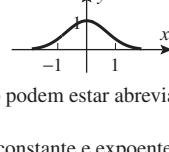
(b) domínio: $x \neq 0$; imagem: $(-\infty, +\infty)$



33. (a) domínio: $x \neq 0$; imagem: $(-\infty, +\infty)$



(b) domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(0, 1]$

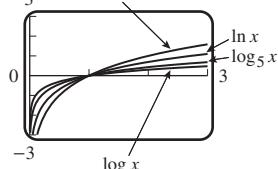


As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

35. Falso; as funções exponenciais têm base constante e expoente variável.

37. Verdadeiro; $\ln x = \log_e x$ 39. 2,8777, -0,3174

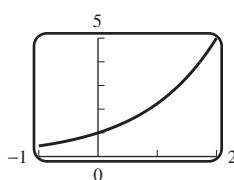
41. 43. $x \approx 1,471; 7,857$



45. (a) não (d) $y = (\sqrt{5})^x$

(b) $y = 2^{x/4}$

(c) $y = 2^{-x}$



47. $\log \frac{1}{2} < 0$, então $3 \log \frac{1}{2} < 2 \log \frac{1}{2}$ 49. 201 dias

51. (a) 7,4, básico (b) 4,2, ácido (c) 6,4, ácido (d) 5,9, ácido

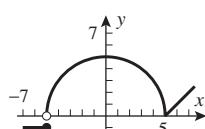
53. (a) 140 dB, causa dano (b) 120 dB, causa dano

(c) 80 dB, não causa dano (d) 75 dB, não causa dano

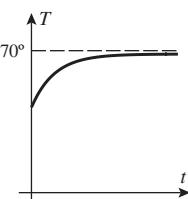
55. ≈ 200 57. (a) $\approx 5 \times 10^{16}$ J (b) $\approx 0,67$

► Capítulo 0 Exercícios de Revisão (página 63)

1.

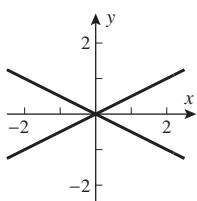


3.



5. (a) $C = 5x^2 + (64/x)$ (b) $x > 0$ 9.

7. (a) $V = (180 - 2x)(150 - x)x \text{ cm}^3$
 (b) $0 < x < 90$
 (c) $36,4 \text{ cm} \times 113,6 \text{ cm} \times 107,2 \text{ cm}$



11.

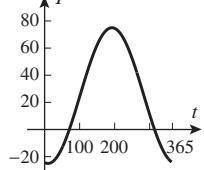
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	2	1	3	-2	-3	4	-4
$g(x)$	3	2	1	-3	-1	-4	4	-2	0
$(f \circ g)(x)$	4	-3	-2	-1	1	0	-4	2	3
$(g \circ f)(x)$	-1	-3	4	-4	-2	1	2	0	3

13. $0, -2$ 15. $1/(2-x^2), x \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}$

17. (a) ímpar (b) par (c) nenhuma das duas (d) par

19. (a) círculos de raio 1 centrados na parábola $y = x^2$
 (b) parábolas congruentes a $y = x^2$ que se abrem para cima com vértices na reta $y = x/2$

21. (a) T (b) 11 de janeiro (c) 122 dias

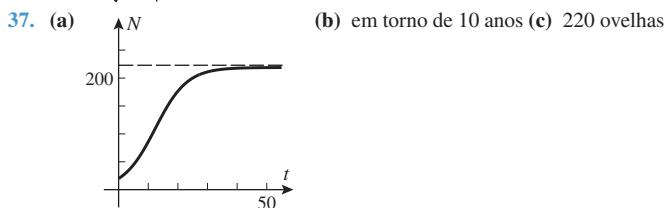
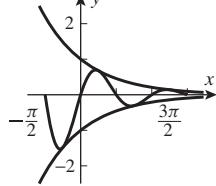


23. A: $\left(-\frac{2}{3}\pi, 1 - \sqrt{3}\right)$; B: $\left(\frac{1}{3}\pi, 1 + \sqrt{3}\right)$; C: $\left(\frac{2}{3}\pi, 1 + \sqrt{3}\right)$; D: $\left(\frac{5}{3}\pi, 1 - \sqrt{3}\right)$

27. (a) $\frac{1}{2}(x+1)^{1/3}$ (b) não há (c) $\frac{1}{2}\ln(x-1)$ (d) $\frac{x+2}{x-1}$
 (e) $\frac{1}{2+ \arcsen x}$ (f) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{3}\right), x < -\frac{2}{3\pi-2}$ ou $x > \frac{2}{3\pi+2}$

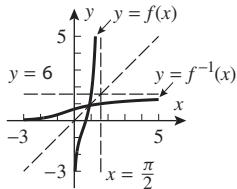
29. (a) $\frac{33}{65}$ (b) $\frac{56}{65}$ 31. 1055 km 33. $15x + 2$

35. (a) y (b) $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$



39. (b) 3.654; 332.105,108

41. (a) f é crescente (b) as assíntotas de f são $x = 0$ e $x = \pi/2$; as assíntotas de f^{-1} são $y = 0$ (com $x \rightarrow -\infty$) e $y = \pi/2$ (com $x \rightarrow +\infty$)



► Exercícios 1.1 (página 77)

1. (a) 3 (b) 3 (c) 3 (d) 3
 3. (a) -1 (b) 3 (c) não existe (d) 1
 5. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 3 7. (a) $-\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) 1
 9. (a) $+\infty$ (b) $+\infty$ (c) 2 (d) 2 (e) $-\infty$ (f) as retas $x = -2$, $x = 0, x = 2$

11.

x	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	0,99502	0,99950	0,99995	1,00005	1,00050	1,00502

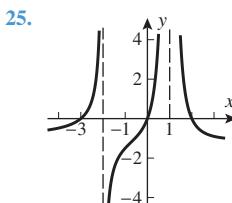
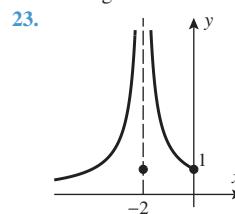
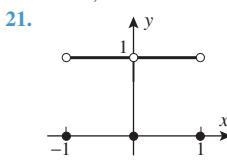
Aparentemente, o limite é 1.

13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $+\infty$ (c) $-\infty$ 15. (a) 3 (b) não existe

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

17. Falsa; ver Exemplo 6.

19. Falsa; os limites laterais também devem ser iguais.



27. $y = -2x - 1$
 29. $y = 4x - 3$

31. (a) comprimento do bastão em repouso (b) 0. À medida que a velocidade tende à da luz, o comprimento do bastão tende a zero.

► Exercícios 1.2 (página 87)

1. (a) -6 (b) 13 (c) -8 (d) 16 (e) 2 (f) $-\frac{1}{2}$
 3. 6 5. $\frac{3}{4}$ 7. 4 9. $-\frac{4}{5}$ 11. -3 13. $\frac{3}{2}$ 15. $+\infty$
 17. não existe 19. $-\infty$ 21. $+\infty$ 23. não existe 25. $+\infty$

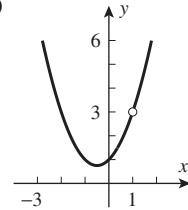
27. $+\infty$ 29. 6 31. (a) 2 (b) 2 (c) 2

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

33. Verdadeira; isso é o Teorema 1.2.2(a)

35. Falsa; ver Exemplo 9 37. $\frac{1}{4}$

39. (a) 3 (b)



41. (a) O Teorema 1.2.2(a) não pode ser aplicado

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x^2} \right) = -\infty$ 43. $a = 2$

45. O limite à esquerda e/ou à direita pode ser $\pm\infty$; ou o limite pode existir e ser igual a qualquer número real predeterminado.

► Exercícios 1.3 (página 96)

1. (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ 3. (a) 0 (b) -1
 5. (a) -12 (b) 21 (c) -15 (d) 25 (e) 2 (f) $-\frac{3}{5}$ (g) 0
 (h) não existe

7. (a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$f(x)$	1,471128	1,560797	1,569796	1,570696	1,570786	1,570795

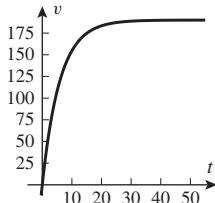
Aparentemente, o limite é $\pi/2$. (b) $\pi/2$

R6 Respostas dos exercícios ímpares

9. $-\infty$ 11. $+\infty$ 13. $\frac{3}{2}$ 15. 0 17. 0 19. $-\infty$ 21. $-\frac{1}{7}$
 23. $\frac{-\sqrt[3]{5}}{2}$ 25. $-\sqrt{5}$ 27. $1/\sqrt{6}$ 29. $\sqrt{3}$ 31. 0 33. 1
 35. 1 37. $-\infty$ 39. e

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

41. Falsa; 1^∞ é uma forma indeterminada. O limite é e^2 .
 43. Verdadeira; considere $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$.
 45. $\lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = +\infty$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = c$ 47. (a) $+\infty$ (b) -5
 51. (a) não (b) sim; $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$ em $x = n\pi + \pi/2$ e $\cotg x$ e $\operatorname{cossec} x$ em $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 55. $+\infty$ 57. $+\infty$ 59. 1 61. e
 65. (a)



- (b) $c = 190$
 (c) É a velocidade terminal do paraquedista.

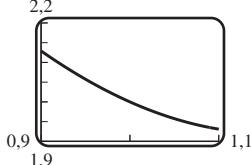
67. (a) e (c) e^a 69. $x + 2$ 71. $1 - x^2$ 73. $\operatorname{sen} x$

► Exercícios 1.4 (página 106)

1. (a) $|x| < 0,1$ (b) $|x - 3| < 0,0025$ (c) $|x - 4| < 0,000125$

3. (a) $x_0 = 3,8025$, $x_1 = 4,2025$ (b) $\delta = 0,1975$

5. $\delta = 0,0442$ 7. $\delta = 0,13$ 9. $\delta = 0,05$ 11. $\delta = 0,05$



13. $\delta = \sqrt[3]{8,001} - 2 \approx 8,332986 \cdot 10^{-5}$ 15. $\delta = 1/505 \approx 0,000198$

17. $\delta = 1$ 19. $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ 21. $\delta = \epsilon/2$ 23. $\delta = \epsilon$ 25. $\delta = \epsilon$

29. (b) 65 (c) $\epsilon/65$; 65; 65; $\epsilon/65$ 31. $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$

33. $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ 35. $\delta = 2\epsilon$

39. (a) $\sqrt{10}$ (b) 99 (c) -10 (d) -101

41. (a) $-\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$; $\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$ (b) $\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$ (c) $-\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$

43. 10 45. 999 47. -202 49. $-57,5$ 51. $N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

53. $N = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2\epsilon}$ 55. $N = (1 + 2/\epsilon)^2$

57. (a) $|x| < \frac{1}{10}$ (b) $|x - 1| < \frac{1}{1000}$

$$(c) |x - 3| < \frac{1}{10\sqrt{10}}$$

- (d) $|x| < \frac{1}{10}$

59. $\delta = 1/\sqrt{M}$ 61. $\delta = 1/M$ 63. $\delta = 1/(-M)^{1/4}$ 65. $\delta = \epsilon$

67. $\delta = \epsilon^2$ 69. $\delta = \epsilon$ 71. (a) $\delta = -1/M$ (b) $\delta = 1/M$

73. (a) $N = M - 1$ (b) $N = M - 1$

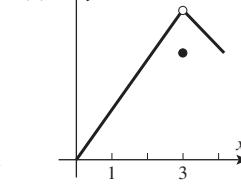
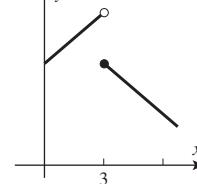
75. (a) 0,4 ampér (b) aproximadamente de 0,39474 a 0,40541 ampér (c) de $3/(7,5 + \delta)$ a $3/(7,5 - \delta)$ (d) $\delta \approx 0,01870$ (e) a corrente tende a $+\infty$.

► Exercícios 1.5 (página 118)

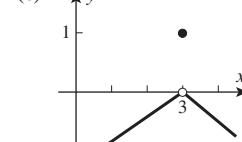
1. (a) não contínua, $x = 2$ (b) não contínua, $x = 2$
 (c) não contínua, $x = 2$ (d) contínua (e) contínua
 (f) contínua
 3. (a) não contínua, $x = 1; 3$ (b) contínua
 (c) não contínua, $x = 1$ (d) contínua
 (e) não contínua, $x = 3$ (f) contínua

5. (a) não (b) não (c) não (d) sim (e) sim (f) não (g) sim

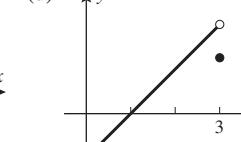
7. (a)



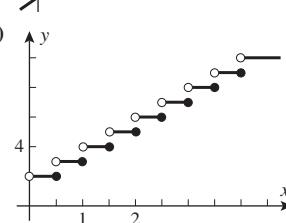
- (c)



- (d)



9. (a)



- (b) Um segundo pode custar 1 dólar.

11. nenhum 13. nenhum 15. $-1/2, 0$ 17. $-1, 0, 1$ 19. nenhum 21. nenhum

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

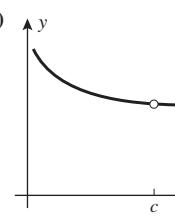
23. Verdadeira; a composição de funções contínuas é contínua.

25. Falsa; sejam f e g as funções do Exercício 6.

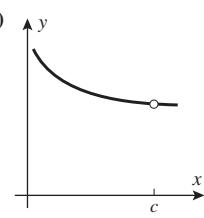
27. Verdadeira; $f(x) = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)}$

29. (a) $k = 5$ (b) $k = \frac{4}{3}$ 31. $k = 4, m = 5/3$

33. (a)



- (b)



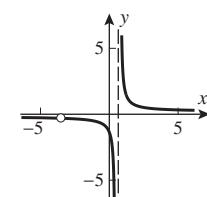
35. (a) $x = 0$, não removível (b) $x = -3$, removível

- (c) $x = 2$, removível; $x = -2$, não removível

37. (a) $x = \frac{1}{2}$, não removível;

em $x = -3$, removível

- (b) $(2x - 1)(x + 3)$



45. $f(x) = 1$ com $0 \leq x < 1$, $f(x) = -1$ com $1 \leq x \leq 2$

49. $x = -1,25$; $x = 0,75$ 51. $x = 2,24$

► Exercícios 1.6 (página 125)

1. nenhum 3. $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5. $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7. $2n\pi + (\pi/6), 2n\pi + (5\pi/6), n = 0, \pm 1, 2, \pm \dots$

9. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 11. $(0, 3) \cup (3, +\infty)$ 13. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

15. (a) $\operatorname{sen} x, x^3 + 7x + 1$ (b) $|x|, \operatorname{sen} x$ (c) $x^3, \cos x, x + 1$

17. 1 19. $-\pi/6$ 21. 1 23. 3 25. $+\infty$ 27. $\frac{7}{3}$

29. 0 31. 0 33. 1 35. 2 37. não existe 39. 0



41. (a)

x	4	4,5	4,9	5,1	5,5	6
$f(x)$	0,093497	0,100932	0,100842	0,098845	0,091319	0,076497

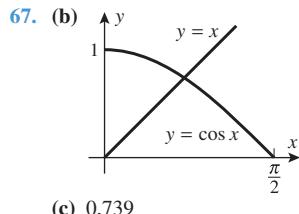
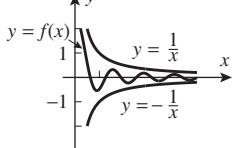
Aparentemente, o limite é $\frac{1}{10}$. (b) $\frac{1}{10}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

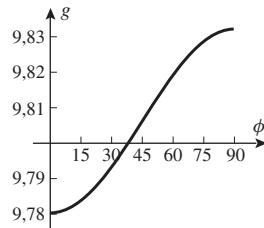
43. Verdadeira; use o Teorema do Confronto.

45. Falsa; considere $f(x) = \operatorname{arc tg} x$.47. (a) Usando graus em vez de radianos. (b) $\pi/180$ 49. $k = \frac{1}{2}$ 51. (a) 1 (b) 0 (c) 153. $-\pi$ 55. $-\sqrt{2}$ 57. 1 59. 5 61. $-|x| \leq x \cos(50\pi/x) \leq |x|$ 63. O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe

65. O limite é 0.



69. (a) A gravidade é mais forte nos polos e mais fraca no Equador.



► Capítulo 1 Exercícios de Revisão (página 128)

1. (a) 1 (b) não existe (c) não existe (d) 1 (e) 3 (f) 0
(g) 0 (h) 2 (i) $\frac{1}{2}$ 3. (a) 0,405 5. 1 7. $-3/2$ 9. $32/3$ 11. (a) $y = 0$ (b) não existe (c) $y = 2$ 13. 1 15. $3 - k$ 17. 019. e^{-3} 21. \$2.001,60; \$2.009,66; \$2.013,62; \$2.013,7523. (a) Um exemplo é $2x/(x-1)$.25. (a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ (b) $\delta = 0,0045$ 27. (a) $\delta = 0,0025$ (b) $\delta = 0,0025$ (c) $\delta = 1/9000$

(Alguns valores maiores também funcionam.)

31. (a) $-1, 1$ (b) nenhum (c) $-3, 0$ 33. não; não contínua em $x = 2$ 35. Considere $f(x) = x$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $k = 0$.

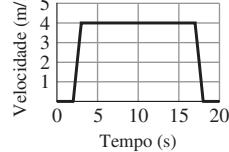
► Capítulo 1 Estabelecendo Conexões (Página 130)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

4. (a) O círculo pela origem centrado em $(0, \frac{1}{8})$.
(b) O círculo pela origem centrado em $(0, \frac{1}{2})$.
(c) O círculo não existe.
(d) O círculo pela origem centrado em $(0, \frac{1}{2})$.
(e) O círculo por $(0, 1)$ centrado na origem.
(f) O círculo pela origem centrado em $(0, \frac{1}{2g(0)})$.
(g) O círculo não existe.

► Exercícios 2.1 (página 140)

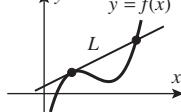
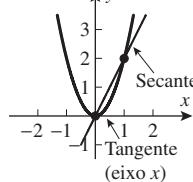
1. (a) 4 m/s (b)

3. (a) 0 cm/s (b) $t = 0, t = 2$ e $t = 4,2$ (c) máximo: $t = 1$; mínimo: $t = 3$ (d) $-7,5$ cm/s

5. reta com inclinação igual à velocidade

7. As respostas podem variar.

9. As respostas podem variar.

11. (a) 2 (b) 0 (c) $4x_0$ (d)15. (a) $2x_0$ (b) -2 17. (a) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (b) $\frac{3}{2}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

19. Verdadeira; considere $h = x - 1$, portanto, $x = 1 + h$ e $h \rightarrow 0$ equivale a $x \rightarrow 1$.

21. Falsa; a velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo.

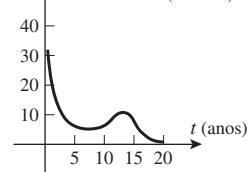
23. (a) 72° F em torno das 16h30 (b) 4° F/h
(c) -7° F/h em torno das 21h.

25. (a) primeiro ano

(b) 6 cm/ano

(c) 10 cm/ano cerca de 14 anos

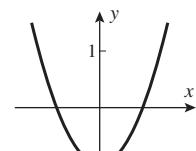
(d)

27. (a) $6.400\sqrt{10}$ m (b) $160\sqrt{10}$ m/s (c) $\frac{9}{2}\sqrt[6]{4.000}$ m/s (d) $480\sqrt{10}$ m/s 29. (a) 720 cm/min (b) 192 cm/min

► Exercícios 2.2 (página 152)

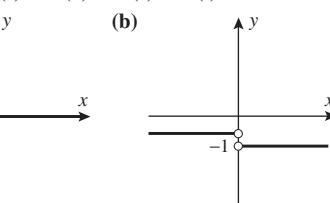
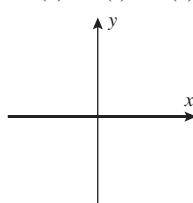
1. 2; 0; -2; -1 5.

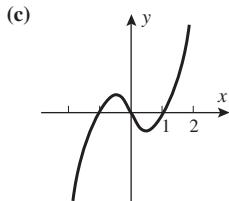
3. (b) 3 (c) 3

7. $y = 5x - 16$ 9. $4x, y = 4x - 2$ 11. $3x^2, y = 0$ 13. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{3}$ 15. $-1/x^2$ 17. $2x - 1$ 19. $-1/(2x^{3/2})$ 21. $8t + 1$

23. (a) D (b) F (c) B (d) C (e) A (f) E

25. (a)



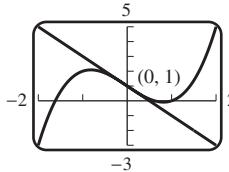


As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

27. Falso; $f'(a) = 0$ 29. Falso; por exemplo, $f(x) = |x|$

31. (a) \sqrt{x} , 1 (b) x^2 , 3 33. -2

35. $y = -2x + 1$



37. (b)

w	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001
$[f(w) - f(1)]/(w - 1)$	1,6569	1,4355	1,3911	1,3868	1,3863	1,3863

39. (a) 0,04, 0,22, 0,88 (b) melhor: $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$; pior: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

41. (a) dólares por m (b) o preço por m adicional (c) positivo (d) \$1.000

43. (a) $F \approx 200$ lb, $dF/d\theta \approx 50$ lb/rad (b) $\mu = -0,25$

45. (a) $T \approx 115^\circ$ F, $dT/dt \approx -3,35^\circ$ F/min (b) $k = -0,084$

► Exercícios 2.3 (página 161)

1. $28x^6$ 3. $24x^7 + 2$ 5. 0 7. $-\frac{1}{3}(7x^6 + 2)$

9. $-3x^{-4} - 7x^{-8}$ 11. $24x^{-9} + (1/\sqrt{x})$

13. $f'(x) = ex^{e-1} - \frac{\sqrt{10}}{x^{(1+\sqrt{10})}}$

15. $12x(3x^2 + 1)$ 17. 7 19. $2t - 1$ 21. 15 23. -8 25. 0

27. 0 29. $32t$ 31. $3\pi r^2$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

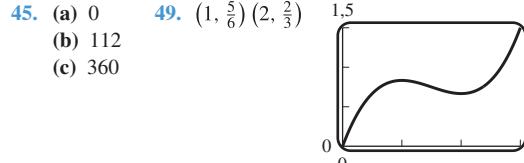
33. Verdadeira; aplique as regras da diferenciação e do múltiplo constante.

35. Falsa; $\frac{d}{dx}[4f(x) + x^3]\Big|_{x=2} = [4f'(x) + 3x^2]\Big|_{x=2} = 32$

37. (a) $4\pi r^2$ (b) 100π 35. $y = 5x + 17$

41. (a) $42x - 10$ (b) 24 (c) $2/x^3$ (d) $700x^3 - 96x$

43. (a) $-210x^{-8} + 60x^2$ (b) $-6x^{-4}$ (c) 6a

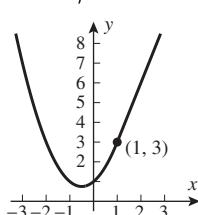


51. $y = 3x^2 - x - 2$ 53. $x = \frac{1}{2}$

55. $(2 + \sqrt{3}, -6 - 4\sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}, -6 + 4\sqrt{3})$

57. $-2x_0$ 61. $-\frac{2GmM}{r^3}$ 63. $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

65. sim, 3



67. não diferenciável em $x = 1$ 69. (a) $x = \frac{2}{3}$ (b) $x = \pm 2$ 71. (b) sim

73. (a) $n(n - 1)(n - 2) \dots 1$ (b) 0 (c) $a_n n(n - 1)(n - 2) \dots 1$

79. $-12/(2x + 1)^3$ 81. $-2/(x + 1)^3$

► Exercícios 2.4 (página 168)

1. $4x + 1$ 3. $4x^3$ 5. $18x^2 - \frac{3}{2}x + 12$

7. $-15x^{-2} - 14x^{-3} + 48x^{-4} + 32x^{-5}$ 9. $3x^2$

11. $\frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)^2}$ 13. $\frac{3x^2 - 8x}{(3x - 4)^2}$ 15. $\frac{x^{3/2} + 10x^{1/2} + 4 - 3x^{-1/2}}{(x + 3)^2}$

17. $2(1 + x^{-1})(x^{-3} + 7) + (2x + 1)(-x^{-2})(x^{-3} + 7) + (2x + 1)(1 + x^{-1})(-3x^{-4})$ 19. $3(7x^6 + 2)(x^7 + 2x - 3)^2$ 21. $\frac{7}{16}$

23. -29 25. 0 27. (a) $-\frac{37}{4}$ (b) $-\frac{23}{16}$

29. (a) 10 (b) 19 (c) 9 (d) -1 31. $-2 \pm \sqrt{3}$ 33. nenhum

35. -2 39. $F''(x) = xf''(x) + 2f'(x)$

41. $R'(120) = 1.800$; aumentando o preço por Δp dólares, a receita aumenta por aproximadamente $1.800 \Delta p$ dólares.

43. $f'(x) = -nx^{-n-1}$

► Exercícios 2.5 (página 172)

1. $-4 \sin x + 2 \cos x$ 3. $4x^2 \sin x - 8x \cos x$

5. $(1 + 5 \sin x - 5 \cos x)/(5 + \sin x)^2$ 7. $\sec x \tan x - \sqrt{2} \sec^2 x$

9. $-4 \operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x$ 11. $\sec^3 x + \sec x \tan^2 x$

13. $-\frac{\operatorname{cosec} x}{1 + \operatorname{cosec} x}$ 15. 0 17. $\frac{1}{(1 + x \tan x)^2}$ 19. $-x \cos x - 2 \sin x$

21. $-x \sin x + 5 \cos x$ 23. $-4 \sin x \cos x$

25. (a) $y = x$ (b) $y = 2x - (\pi/2) + 1$ (c) $y = 2x + (\pi/2) - 1$

29. (a) $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2$ (b) $x = -3\pi/2, \pi/2$

(c) não há reta tangente horizontal (d) $x = \pm 2\pi, \pm \pi, 0$

31. 0,087 m/grau 33. 1,75 m/grau

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

35. Falsa; pela regra do produto, $g'(x) = f(x) \cos x + f'(x) \sin x$.

37. Verdadeira; $f(x) = (\sin x)/(\cos x) = \tan x$, então $f'(x) = \sec^2 x$.

39. (a) $-\cos x$ 41. 3; 7; 11; ...

43. (a) todos os x (b) todos os x (c) $x \neq (\pi/2) + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (d) $x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (e) $x \neq (\pi/2) + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (f) $x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (g) $x \neq (2n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (h) $x \neq n\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (i) todos os x

► Exercícios 2.6 (página 178)

1. 6 3. (a) $(2x - 3)^5, 10(2x - 3)^4$ (b) $2x^5 - 3, 10x^4$

5. (a) -7 (b) -8 7. $37(x^3 + 2x)^{36}(3x^2 + 2)$

9. $-2 \left(x^3 - \frac{7}{x} \right)^{-3} \left(3x^2 + \frac{7}{x^2} \right)$ 11. $\frac{24(1 - 3x)}{(3x^2 - 2x + 1)^4}$

13. $\frac{3}{4\sqrt{3x}\sqrt{4 + \sqrt{3x}}}$ 15. $-\frac{2}{x^3} \cos \left(\frac{1}{x^2} \right)$ 17. $-20 \cos^4 x \sin x$

19. $-\frac{3}{\sqrt{x}} \cos(3\sqrt{x}) \sin(3\sqrt{x})$ 21. $28x^6 \sec^2(x^7) \tan(x^7)$

23. $-\frac{5 \sin(5x)}{2\sqrt{\cos(5x)}}$

25. $-3[x + \operatorname{cosec}(x^3 + 3)]^{-4} [1 - 3x^2 \operatorname{cosec}(x^3 + 3) \cot(x^3 + 3)]$

27. $10x^3 \sin 5x \cos 5x + 3x^2 \sin^2 5x$

29. $-x^3 \sec \left(\frac{1}{x} \right) \tan \left(\frac{1}{x} \right) + 5x^4 \sec \left(\frac{1}{x} \right)$

31. $\sin(\cos x) \sin x$ 33. $-6 \cos^2(\sin 2x) \sin(\sin 2x) \cos 2x$

35. $35(5x + 8)^6(1 - \sqrt{x})^6 - \frac{3}{\sqrt{x}}(5x + 8)^7(1 - \sqrt{x})^5$

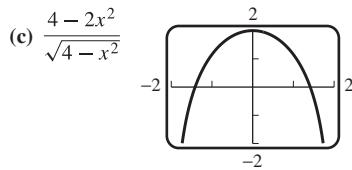
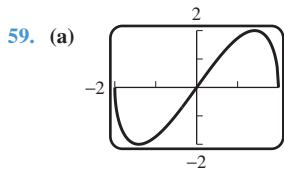
37. $\frac{33(x - 5)^2}{(2x + 1)^4}$ 39. $-\frac{2(2x + 3)^2(52x^2 + 96x + 3)}{(4x^2 - 1)^9}$

41. $5[x \sin 2x + \tan^4(x^7)]^4 [2x \cos 2x + \sin 2x + 28x^6 \tan^3(x^7) \sec^2(x^7)]$

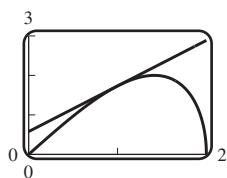
43. $y = -x$ 45. $y = -1$ 47. $y = 8\sqrt{\pi}x - 8\pi$ 49. $y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

51. $-25x \cos(5x) - 10 \sin(5x) - 2 \cos(2x)$ 53. $4(1 - x)^{-3}$

55. $3 \cot^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$ 57. $\pi(b - a) \sin 2\pi\omega$



(d) $y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1)$



As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

61. Falso; pela regra da cadeia, $\frac{d}{dx}[\sqrt{y}] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.
 63. Falso; pela regra da cadeia, $dy/dx = (-\operatorname{sen}[g(x)]) \cdot g'(x)$.
 65. (c) $f = 1/T$ (d) amplitude = 0,6 cm, $T = 2\pi/15$ segundos por oscilação, $f = 15/(2\pi)$ oscilações por segundo
 67. $\frac{7}{24}\sqrt{6}$ 69. (a) 10 lb/pol²; -2 lb/pol²/milha (b) -0,6 lb/pol²/s
 71. $\begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$
 73. (a) $-\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (b) não existe limite quando x tende a 0
 75. (a) 21 (b) -36 77. $1/2x$ 79. $\frac{2}{3}x$ 83. $f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$

► Capítulo 2 Exercícios de Revisão (página 181)

3. (a) $2x$ (b) 4 5. 58,75 pés/s 7. (a) 13 km/h (b) 7 km/h
 9. (a) $-2/\sqrt{9-4x}$ (b) $1/(x+1)^2$
 11. (a) $x = -2, -1, 1, 3$ (b) $(-\infty, -2), (-1, 1), (3, +\infty)$
 (c) $(-2, -1), (1, 3)$ (d) 4
 13. (a) 78 milhões de pessoas por ano (b) 1,3% ao ano
 15. (a) $x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$ (c) $4x \cos x + (2 - x^2) \operatorname{sen} x$
 17. (a) $(6x^2 + 8x - 17)/(3x + 2)^2$ (c) $118/(3x + 2)^3$
 19. (a) 2.000 l/min (b) 2.500 l/min 21. (a) 3,6 (b) -0,7777778
 23. $f(1) = 0, f'(1) = 5$ 25. $y = -16x, y = -145x/4$
 29. (a) $8x^7 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - 15x^{-4}$ (b) $(2x + 1)^{100}(1030x^2 + 10x - 1414)$
 31. (a) $\frac{(x-1)(15x+1)}{2\sqrt{3x+1}}$ (b) $-3(3x+1)^2(3x+2)/x^7$
 33. $x = -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 2$ 35. $y = \pm 2x$
 37. $x = n\pi \pm (\pi/4), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 39. $y = -3x + (1 + 9\pi/4)$
 41. (a) $40\sqrt{3}$ (b) 7.500

► Capítulo 2 Estabelecendo Conexões (Página 184)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

2. (c) $k = 2$ (d) $h'(x) = 0$
 3. (b) $f' \cdot g \cdot h \cdot k + f \cdot g' \cdot h \cdot k + f \cdot g \cdot h' \cdot k + f \cdot g \cdot h \cdot k'$
 4. (c) $\frac{f' \cdot g \cdot h - f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'}{g^2}$

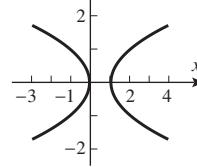
► Exercícios 3.1 (página 190)

1. (a) $(6x^2 - y - 1)/x$ (b) $4x - 2/x^2$ 3. $-\frac{x}{y}$ 5. $\frac{1 - 2xy - 3y^3}{x^2 + 9xy^2}$
 7. $\frac{-y^{3/2}}{x^{3/2}}$ 9. $\frac{1 - 2xy^2 \cos(x^2y^2)}{2x^2y \cos(x^2y^2)}$
 11. $\frac{1 - 3y^2 \operatorname{tg}^2(xy^2 + y) \sec^2(xy^2 + y)}{3(2xy + 1) \operatorname{tg}^2(xy^2 + y) \sec^2(xy^2 + y)}$ 13. $-\frac{8}{9y^3}$ 15. $\frac{2y}{x^2}$

17. $\frac{\operatorname{sen} y}{(1 + \cos y)^3}$ 19. $-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

21. Falsa; o gráfico de f só precisa coincidir com uma porção do gráfico da equação em x e y .
 23. Falsa; a equação é equivalente a $x^2 = y^2$ e $y = |x|$ satisfaz a equação.
 25. $-15^{-3/4} \approx -0,1312$ 27. $-\frac{9}{13}$ 29. $\frac{2t^3 + 3a^2}{2a^3 - 6at}$ 31. $-\frac{b^2\lambda}{a^2\omega}$
 35. (a)
 (c) $x = -y^2$ ou $x = y^2 + 1$



37. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{4}$ 41. (a)
 (c) $2\sqrt[3]{2}/3$ 43. $-\frac{2y^3 + 3t^2y}{(6ty^2 + t^3)\cos t}$

► Exercícios 3.2 (página 195)

1. $1/x$ 3. $1/(1+x)$ 5. $2x/(x^2 - 1)$ 7. $\frac{1 - x^2}{x(1 + x^2)}$ 9. $2/x$
 11. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ 13. $1 + \ln x$ 15. $2x \log_2(3 - 2x) - \frac{2x^2}{(\ln 2)(3 - 2x)}$
 17. $\frac{2x(1 + \log x) - x/(\ln 10)}{(1 + \log x)^2}$ 19. $1/(x \ln x)$ 21. $2 \operatorname{cossec} 2x$
 23. $-\frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x)$ 25. $2 \operatorname{cotg} x/(\ln 10)$ 27. $\frac{3}{x-1} + \frac{8x}{x^2+1}$
 29. $-\operatorname{tg} x + \frac{3x}{4-3x^2}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

31. Verdadeira; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ 33. Verdadeira; $1/x$ é uma função ímpar
 35. $x\sqrt[3]{1+x^2} \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(1+x^2)} \right]$
 37. $\frac{(x^2-8)^{1/3}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7x+5} \left[\frac{2x}{3(x^2-8)} + \frac{3x^2}{2(x^3+1)} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5} \right]$
 39. (a) $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$ (b) $-\frac{\ln 2}{x(\ln x)^2}$
 41. $y = ex - 2$ 43. $y = -x/e$ 45. $y = x/e$ 47. $A(w) = w/2$
 51. $f(x) = \ln(x+1)$ 53. (a) 3 (b) -5 55. (a) 0 (b) $\sqrt{2}$

► Exercícios 3.3 (página 201)

1. (b) $1/9$ 3. $-2/x^2$ 5. (a) não (b) sim (c) sim (d) sim
 7. $\frac{1}{15y^2 + 1}$ 9. $\frac{1}{10y^4 + 3y^2}$ 13. $f(x) + g(x), f(g(x))$
 15. $7e^{7x}$ 17. $x^2 e^x (x+3)$ 19. $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$
 21. $(x \sec^2 x + \operatorname{tg} x) e^{x \operatorname{tg} x}$ 23. $(1 - 3e^{3x}) e^{x - e^{3x}}$
 25. $\frac{x-1}{e^x - x}$ 27. $2^x \ln 2$ 29. $\pi^{\operatorname{sen} x} (\ln \pi) \cos x$
 31. $(x^3 - 2x)^{\ln x} \left[\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x} \ln x + \frac{1}{x} \ln(x^3 - 2x) \right]$
 33. $(\ln x)^{\operatorname{tg} x} \left[\frac{\operatorname{tg} x}{x \ln x} + (\sec^2 x) \ln(\ln x) \right]$

R10 Respostas dos exercícios ímpares

35. $(\ln x)^{\ln x} \left[\frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{1}{x} \right]$ 37. $(x^3 + x^2 - 4x + 1)e^x$

39. $((\ln 3)x^2 + 2x + (\ln 3)\sqrt{x} + 1/(2\sqrt{x}))3^x$

41. $(\ln 4)(3 \cos x - e^x)4^3 \sin x - e^x$ 43. $3/\sqrt{1 - 9x^2}$

45. $-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$ 47. $3x^2/(1 + x^6)$ 49. $-\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

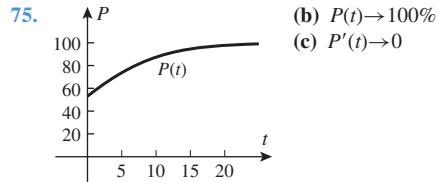
51. $\frac{e^x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} + e^x \operatorname{arc sec} x$ 53. 0 55. 0 57. $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

59. Falsa; considere $y = Ae^x$. 61. Verdadeira; use a regra da cadeia.

65. $\frac{(3x^2 + \operatorname{arc tg} y)(1+y^2)}{(1+y^2)e^y - x}$ 67. (b) $1 - (\sqrt{3}/3)$

69. (b) $y = (88x - 89)/7$



77. 3 79. $\ln 10$ 81. 12π 83. $9,8 t$; se o fluido não oferecer resistência, a velocidade aumenta a uma taxa constante de $9,8 \text{ m/s}$.

► Exercícios 3.4 (página 208)

1. (a) 6 (b) $-\frac{1}{3}$ 3. (a) -2 (b) $6\sqrt{5}$

5. (b) $A = x^2$ (c) $\frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$ (d) $12 \text{ cm}^2/\text{min}$

7. (a) $\frac{dV}{dt} = \pi \left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt} \right)$ (b) $-20\pi \text{ cm}^3/\text{s}$; decrescendo

9. (a) $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2 \theta}{x^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$ (b) $-\frac{5}{16} \text{ rad/s}$; decrescendo

11. $\frac{4\pi}{15} \text{ cm}^2/\text{min}$ 13. $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ km/h}$ 15. $4.860\pi \text{ cm}^3/\text{min}$ 17. $\frac{1}{2} \text{ m/s}$

19. $\frac{125}{\sqrt{61}}$ 21. 704 pés/s

23. (a) 500 mi, 1.716 mi (b) 1.354 mi; 27,7 mi/min

25. $\frac{9}{20\pi} \text{ m/min}$ 27. $125\pi \text{ pés}^3/\text{min}$ 29. 250 milhas/h

31. $\frac{36\sqrt{69}}{25} \text{ pés/min}$ 33. $\frac{8\pi}{5} \text{ km/s}$ 35. $600\sqrt{7} \text{ km/h}$

37. (a) $-\frac{60}{7}$ unidades por segundo (b) descendo

39. -4 unidades por segundo 41. $x = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{33}}{2}}$

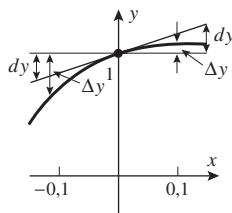
43. 4,5 cm/s; afastando 47. $\frac{20}{9\pi} \text{ cm/s}$

► Exercícios 3.5 (página 217)

1. (a) $f(x) \approx 1 + 3(x-1)$ (b) $f(1 + \Delta x) \approx 1 + 3\Delta x$ (c) 1,06

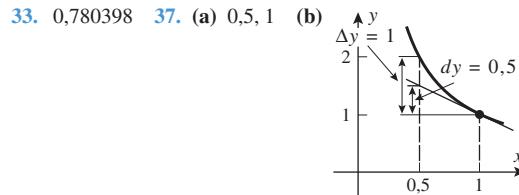
3. (a) $1 + \frac{1}{2}x$, 0,95; 1,05 17. $|x| < 1,692$

(b)



19. $|x| \leq 0,3158$ 21. (a) 0,0174533 (b) $x_0 = 45^\circ$ (c) 0,694765

23. 83,16 25. 8,0625 27. 8,9944 29. 0,1 31. 0,8573



39. $3x^2 dx$, $3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

41. $(2x-2) dx$, $2x \Delta x + (\Delta x)^2 - 2 \Delta x$

43. (a) $(12x^2 - 14x) dx$ (b) $(-x \operatorname{sen} x + \cos x) dx$

45. (a) $\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} dx$ (b) $-17(1+x)^{-18} dx$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

47. Falsa; $dy = (dy/dx) dx$ 49. Falsa; considere qualquer função linear

51. 0,0225 53. 0,0048 55. (a) $\pm 2 \text{ m}^2$ (b) lado: $\pm 1\%$; área: $\pm 2\%$

57. (a) oposto: $\pm 0,151 \text{ cm}$; adjacente: $\pm 0,087 \text{ cm}$

(b) oposto: $\pm 3,0\%$; adjacente: $\pm 1,0\%$

59. $\pm 10\%$ 61. $\pm 0,017 \text{ cm}^2$ 63. $\pm 6\%$ 65. $\pm 0,5\%$ 67. $15\pi/2 \text{ cm}^3$

69. (a) $\alpha = 1,5 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ (b) 180,1 cm de comprimento

► Exercícios 3.6 (página 226)

1. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

3. Verdadeira; a expressão $(\ln x)/x$ não está definida com $x \leq 0$.

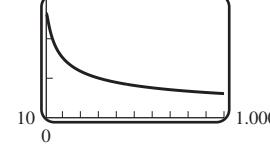
5. Falsa; aplicando repetidamente a Regra de L'Hôpital, obtemos limite 0.

7. 1 9. 1 11. -1 13. 0 15. $-\infty$ 17. 0 19. 2 21. 0

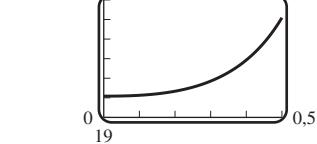
23. π 25. $-\frac{5}{3}$ 27. e^{-3} 29. e^2 31. $e^{2/\pi}$ 33. 0 35. $\frac{1}{2}$

37. $+\infty$ 39. 1 41. 1 43. 1 45. 1 47. (b) 2

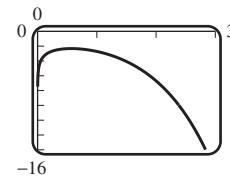
49. 0



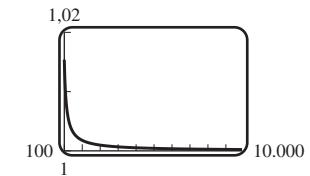
51. e^3 25



53. não há assíntota horizontal



55. $y = 1$



57. (a) 0 (b) $+\infty$ (c) 0 (d) $-\infty$ (e) $+\infty$ (f) $-\infty$ 59. 1

61. não existe 63. Vt/L 67. (a) não (b) Ambos os limites são iguais a 0.

69. não existe

► Capítulo 3 Exercícios de Revisão (página 228)

1. (a) $\frac{2-3x^2-y}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2} - 2x$ 3. $-\frac{y^2}{x^2}$

5. $\frac{y \sec(xy) \operatorname{tg}(xy)}{1 - x \sec(xy) \operatorname{tg}(xy)}$ 7. $-\frac{21}{16y^3}$

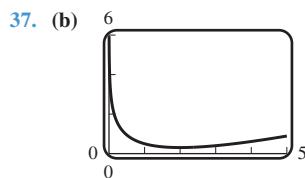
9. $2/(2-\pi)$ 13. $(\sqrt[3]{4}/3, \sqrt[3]{2}/3)$

15. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+4}$ 17. $\frac{1}{x}$ 19. $\frac{1}{3x(\ln x + 1)^{2/3}}$

21. $\frac{1}{(\ln 10)x \ln x}$ 23. $\frac{3}{2x} + \frac{2x^3}{1+x^4}$ 25. $2x$ 27. $e^{\sqrt{x}}(2 + \sqrt{x})$

29. $\frac{2}{\pi(1+4x^2)}$ 31. $e^x x^{(e^x)} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$ 33. $\frac{1}{|2x+1|\sqrt{x^2+x}}$

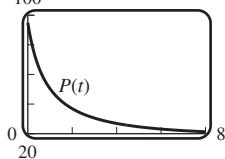
35. $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right)$



- (d) A curva deve ter uma reta tangente horizontal entre $x = 1$ e $x = 2$
(e) $x = 2$

39. e^2 41. $e^{1/e}$ 43. Não; por exemplo, $f(x) = x^3$. 45. $(\frac{1}{3}, e)$

51. (a) 100 (b) $P(t) \rightarrow 19$ (c) $P'(t) \rightarrow 0$



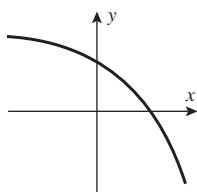
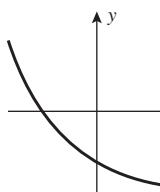
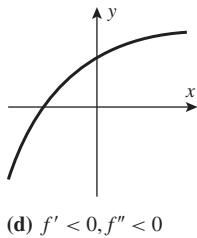
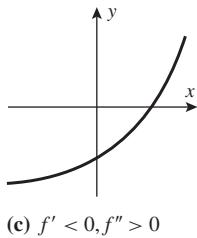
53. $+\infty, +\infty$: é; $+\infty, -\infty$: não é; $-\infty, +\infty$: não é; $-\infty, -\infty$: é.
55. $+\infty$ 57. $\frac{1}{9}$ 59. $500\pi \text{ m}^2/\text{min}$
61. (a) $-0,5; 1,0,5$ (b) $\pi/4, 1, \pi/2$ (c) $3; -1,0$
63. (a) entre 139,48 m e 144,55 m (c) $|d\phi| \leq 0,98^\circ$

► Capítulo 3 Estabelecendo Conexões (página 230)

As respostas podem ser encontradas no Manual de Soluções do Estudante.

► Exercícios 4.1 (página 241)

1. (a) $f' > 0, f'' > 0$ (b) $f' > 0, f'' < 0$



3. A: $dy/dx < 0, d^2y/dx^2 > 0$ B: $dy/dx > 0, d^2y/dx^2 < 0$
C: $dy/dx < 0, d^2y/dx^2 < 0$ 5. $x = -1, 0, 1, 2$
7. (a) $[4, 6]$ (b) $[1, 4], [6, 7]$ (c) $(1, 2), (3, 5)$ (d) $(2, 3), (5, 7)$
(e) $x = 2, 3, 5$
9. (a) $[1, 3]$ (b) $(-\infty, 1], [3, +\infty)$ (c) $(-\infty, 2), (4, +\infty)$ (d) $(2, 4)$
(e) $x = 2, 4$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

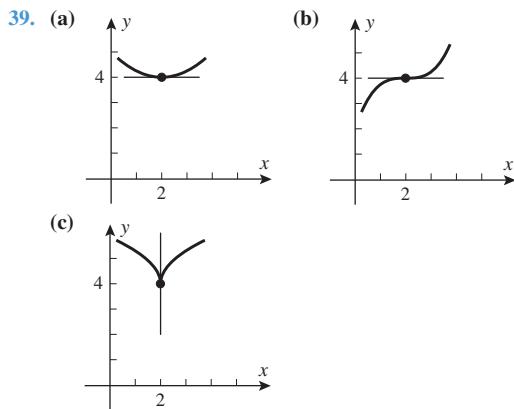
11. Verdadeira; ver a definição de decrescente: $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$.
13. Falsa; por exemplo, $f(x) = (x - 1)^3$ é crescente em $[0, 2]$ e $f'(1) = 0$.
15. (a) $[3/2, +\infty]$ (b) $(-\infty, 3/2]$ (c) $(-\infty, +\infty)$ (d) não há
(e) não há
17. (a) $(-\infty, +\infty)$ (b) não há (c) $(-1/2, +\infty)$
(d) $(-\infty, -1/2)$ (e) $-1/2$
19. (a) $[1, +\infty)$ (b) $(-\infty, 1]$ (c) $(-\infty, 0), (\frac{2}{3}, +\infty)$ (d) $(0, \frac{2}{3})$ (e) $0, \frac{2}{3}$
21. (a) $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ (b) $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right], \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

- (c) $\left(0, \frac{4-\sqrt{6}}{2}\right), \left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$ (d) $(-\infty, 0), \left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}, \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$
(e) $0, \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$

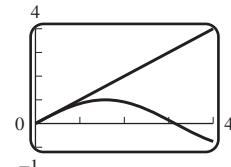
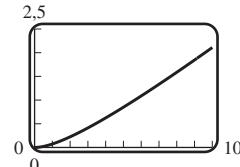
23. (a) $[-1/2, +\infty)$ (b) $(-\infty, -1/2]$ (c) $(-2, 1)$
(d) $(-\infty, -2), (1, +\infty)$ (e) $-2, 1$
25. (a) $[-1, 0], [1, +\infty)$ (b) $(-\infty, -1], [0, 1]$ (c) $(-\infty, 0), (0, +\infty)$
(d) não há (e) não há
27. (a) $(-\infty, 0]$ (b) $[0, +\infty)$ (c) $(-\infty, -1), (1, +\infty)$
(d) $(-1, 1)$ (e) $-1, 1$
29. (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $(-2, 2)$
(d) $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ (e) $-2, 2$

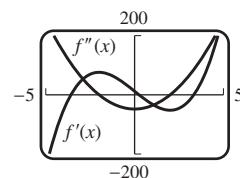
31. (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}\right)$
(d) $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}\right], \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, +\infty\right)$ (e) $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$

33. crescente: $[-\pi/4, 3\pi/4]$; decrescente: $[-\pi, -\pi/4], [3\pi/4, \pi]$; côncava para cima: $(-3\pi/4, \pi/4)$; côncava para baixo: $(-\pi, -3\pi/4), (\pi/4, \pi)$; pontos de inflexão: $-3\pi/4, \pi/4$
35. crescente: não há; decrescente: $(-\pi, \pi)$; côncava para cima: $(-\pi, 0)$; côncava para baixo: $(0, \pi)$; ponto de inflexão: 0
37. crescente: $[-\pi, -3\pi/4], [-\pi/4, \pi/4], [3\pi/4, \pi]$; decrescente: $[-3\pi/4, -\pi/4], [\pi/4, 3\pi/4]$; côncava para cima: $(-\pi/2, 0), (\pi/2, \pi)$; côncava para baixo: $(-\pi, -\pi/2), (0, \pi/2)$; pontos de inflexão: $0, \pm\pi/2$

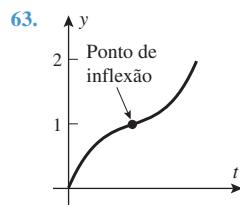


41. $1 + \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{1+x} \geq 0$ se $x > 0$ 43. $x \geq \sin x$

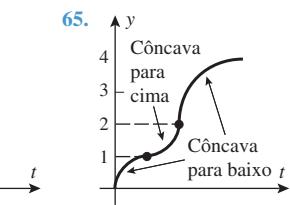


47. 
- pontos de inflexão em $x = -2, 2$
côncava para cima em $[-5, -2], [2, 5]$
côncava para baixo em $[-2, 2]$
crescente em $[-3, 5829], [0, 2513]$
e $[3, 3316; 5]$
decrecente em $[-5, -3, 5829], [0, 2513; 3, 3316]$

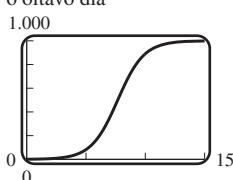
49. $-2,464202; 0,662597; 2,701605$ 53. (a) verdadeira (b) falsa
57. (c) ponto de inflexão: $(1, 0)$; côncava para cima: $(1, +\infty)$; côncava para baixo: $(-\infty, 1)$



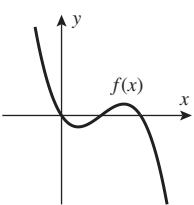
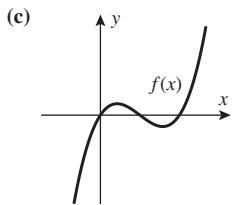
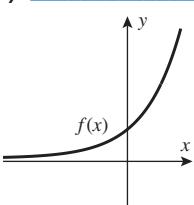
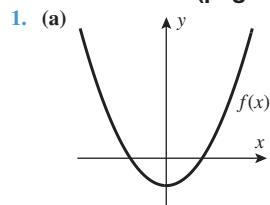
67. (a) $\frac{LAk}{(1+A)^2}$
(c) $\frac{1}{k} \ln A$



69. o oitavo dia



► Exercícios 4.2 (página 252)



5. (b) nada (c) f tem um mínimo relativo em $x = 1$,
 g não tem extremo relativo em $x = 1$.

7. Críticos: $0, \pm\sqrt{2}$; estacionários: $0, \pm\sqrt{2}$

9. Críticos: -3 e 1 ; estacionários: -3 e 1

11. Críticos: $0, \pm 5$; estacionário: 0

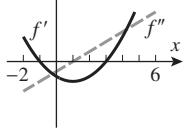
13. Críticos: $n\pi/2$ para cada inteiro n ; estacionários: $n\pi + \pi/2$ para cada inteiro n

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

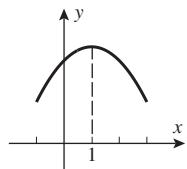
15. Falsa; por exemplo, $f(x) = (x - 1)^2(x - 1,5)$ tem um máximo relativo em $x = 1$, mas $f(2) = 0,5 > 0 = f(1)$.

17. Falsa; para aplicar o teste da derivada segunda (Teorema 4.2.4) em $x = 1$, $f'(1)$ precisa ser igual a 0.

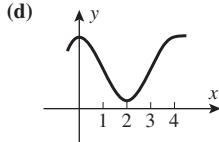
19. (a) não há (b) $x = 1$ (c) não há



21. (a) não há (b) $x = 1$ (c) não há



23. (a) 2 (b) 0 (c) 1 e 3



25. 0 (nenhum dos dois); $\sqrt[3]{5}$ (mínimo) 27. -2 (mínimo), $2/3$ (máximo)

29. 0 (mínimo) 31. -1 (mínimo), 1 (máximo)

33. máximo relativo em $(4/3, 19/3)$

35. máximo relativo em $(\pi/4, 1)$; mínimo relativo em $(3\pi/4, -1)$

37. máximo relativo em $(1, 1)$; mínimos relativos em $(0, 0)$, $(2, 0)$

39. máximo relativo em $(-1, 0)$; mínimo relativo em $(-3/5, -108/3.125)$

41. máximo relativo em $(-1, 1)$; mínimo relativo em $(0, 0)$

43. sem extremos relativos 45. mínimo relativo em $(0, \ln 2)$

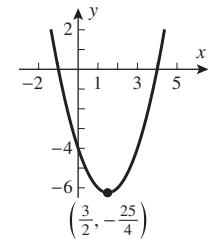
47. mínimo relativo em $(-\ln 2, -1/4)$

49. máximo relativo em $(3/2, 9/4)$; mínimos relativos em $(0, 0)$ e $(3, 0)$

51. cortes com os eixos: $(0, -4)$, $(-1, 0)$, $(4, 0)$

pontos estacionários: $(3/2, -25/4)$ (mínimo)

pontos de inflexão: nenhum

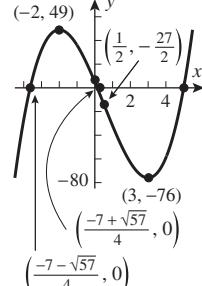


53. cortes com os eixos: $(0, 5)$, $\left(\frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}, 0\right)$, $(5, 0)$;

pontos estacionários: $(-2, 49)$

(máximo), $(3, -76)$ (mínimo)

ponto de inflexão: $(1/2, -27/2)$



55. cortes com os eixos: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$

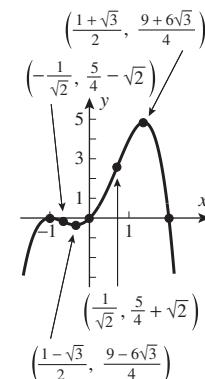
pontos estacionários: $(-1, 0)$ (máximo),

$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{9-6\sqrt{3}}{4}\right)$ (mínimo),

$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{9+6\sqrt{3}}{4}\right)$ (máximo)

pontos de inflexão: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{4}-\sqrt{2}\right)$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{4}+\sqrt{2}\right)$

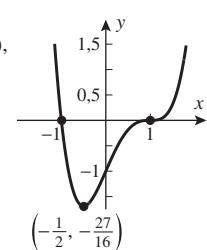


57. cortes com os eixos: $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$

pontos estacionários: $(-1/2, -27/16)$ (mínimo),

$(1, 0)$ (nenhum dos dois)

pontos de inflexão: $(0, -1)$, $(1, 0)$



59. cortes com os eixos: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$

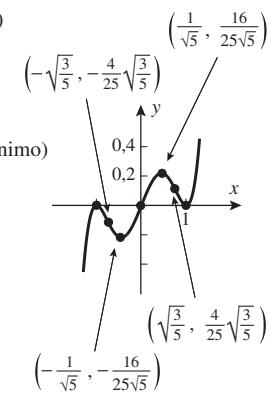
pontos estacionários: $(-1, 0)$ (máximo),

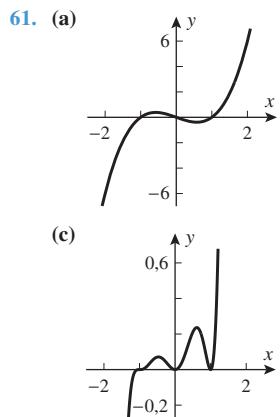
$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{16}{25\sqrt{5}}\right)$ (mínimo),

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{16}{25\sqrt{5}}\right)$ (máximo), $(1, 0)$ (mínimo)

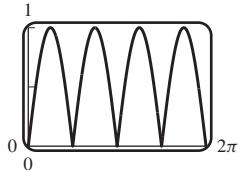
pontos de inflexão: $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{4}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$,

$(0, 0)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{4}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

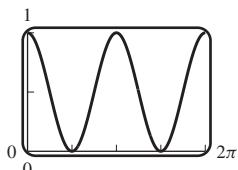




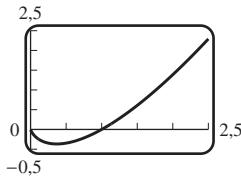
63. min. relativo 0 em $x = \pi/2; \pi; 3\pi/2$;
max. relativo 1 em $x = \pi/4; 3\pi/4; 5\pi/4; 7\pi/4$



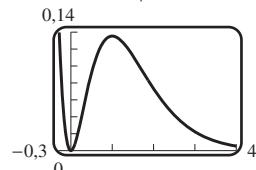
65. min. relativo 0 em $x = \pi/2; 3\pi/2$
max. relativo 1 em $x = \pi$



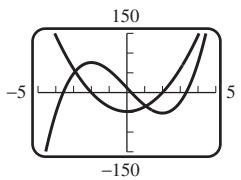
67. min. relativo $-1/e$ em $x = 1/e$



69. min. relativo 0 em $x = 0$
max. relativo $1/e^2$ em $x = 1$



71. min. relativo em $x = -3,58; 3,33$
max. relativo em $x = 0,25$

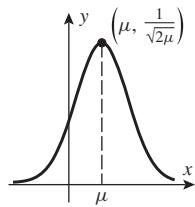


73. máximo relativo em $x \approx -0,272$; mínimo relativo em $x \approx -0,224$.

75. máximo relativo em $x = 0$; mínimo relativo em $x \approx \pm 0,618$.

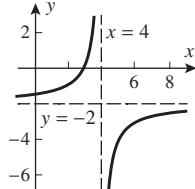
77. (a) 54 (b) 9

79. (b)

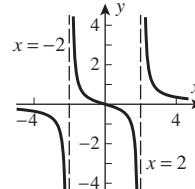


► Exercícios 4.3 (página 264)

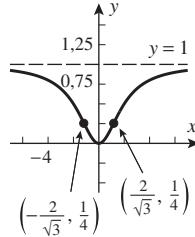
1. pontos estacionários: não há;
pontos de inflexão: não há;
assíntotas: $x = 4, y = -2$;
cruzamento de assíntota: não há.



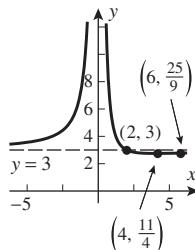
3. pontos estacionários: não há;
ponto de inflexão: $(0, 0)$;
assíntotas: $x = \pm 2, y = 0$;
cruzamento de assíntota: $(0, 0)$.



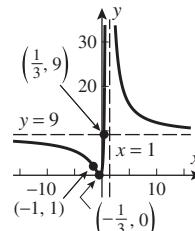
5. ponto estacionário: $(0, 0)$;
 ponto de inflexão: $(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$;
assíntotas: $y = 1$;
cruzamento de assíntota: não há.



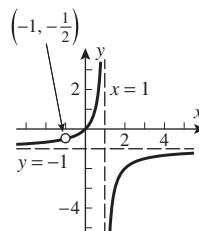
9. ponto estacionário: $(4, 11/4)$;
 ponto de inflexão: $(6, 25/9)$;
assíntotas: $x = 0, y = 3$;
cruzamento de assíntota: $(2, 3)$.



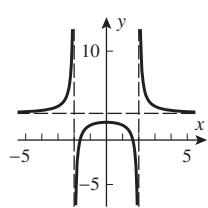
11. ponto estacionário: $(-1/3, 0)$;
 ponto de inflexão: $(-1, 1)$;
assíntotas: $x = 1, y = 9$;
cruzamento de assíntota: $(1/3, 9)$.



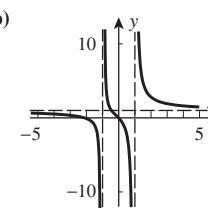
13. pontos estacionários: não há;
pontos de inflexão: não há;
assíntotas: $x = 1, y = -1$;
cruzamento de assíntota: não há.



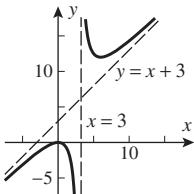
15. (a)



- (b)

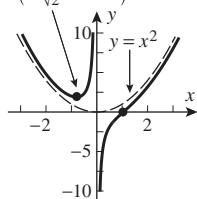


17.



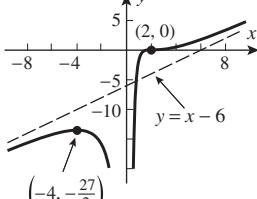
19. ponto estacionário: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$

ponto de inflexão: $(1, 0)$;
assíntotas: $y = x^2$, $x = 0$;
cruzamento de assíntota: não há.



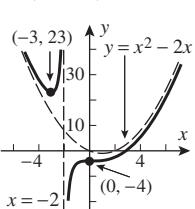
21. pontos estacionários: $(-4, -27/2)$, $(2, 0)$;

ponto de inflexão: $(2, 0)$;
assíntotas: $x = 0$, $y = x - 6$;
cruzamento de assíntota: $(2/3, -16/3)$.



23. pontos estacionários: $(-3, 23)$, $(0, -4)$;

pontos de inflexão: $(0, -4)$;
assíntotas: $x = -2$, $y = x^2 - 2x$;
cruzamento de assíntota: não há.



25. (a) VI (b) I (c) III (d) V (e) IV (f) II

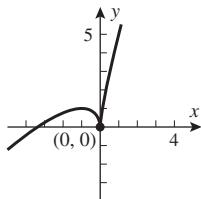
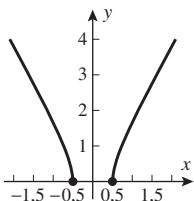
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

27. Verdadeira; se grau $P >$ grau Q , então $f(x)$ é ilimitada quando $x \rightarrow \pm\infty$; se grau $P <$ grau Q , então $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

29. Falsa; por exemplo, $f(x) = (x - 1)^{1/3}$ é contínua (com reta tangente vertical) em $x = 1$, mas $f'(x) = \frac{1}{3(x - 1)^{2/3}}$ tem uma assíntota vertical em $x = 1$.

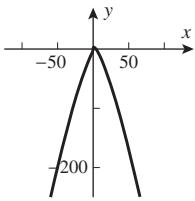
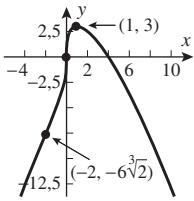
31. pontos críticos: $(\pm 1/2, 0)$;
Pontos de inflexão: não há.

33. pontos críticos: $(-1, 1)$, $(0, 0)$;
Pontos de inflexão: não há.

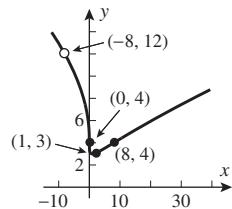


35. pontos críticos: $(0, 0)$, $(1, 3)$; pontos de inflexão: $(0, 0)$, $(-2, -6\sqrt[3]{2})$.

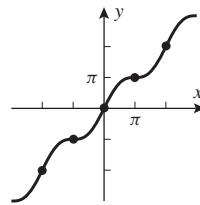
Como é difícil ver todas as características importantes em um único gráfico, mostramos dois:



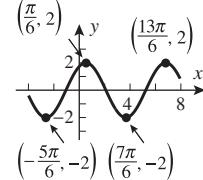
37. pontos críticos: $(0, 4)$, $(1, 3)$;
Pontos de inflexão: $(0, 4)$, $(8, 4)$.



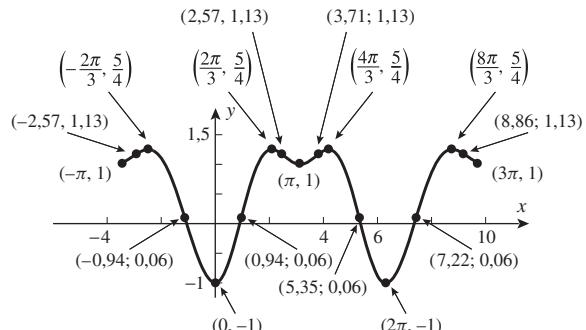
39. Extremos: não há; Pontos de inflexão: $x = \pi n$ para inteiros n



41. mínimo relativo em $x = 7\pi/6 + 2\pi n$ com n inteiro qualquer;
máximo relativo em $x = \pi/6 + 2\pi n$ com n inteiro qualquer;
Pontos de inflexão: $x = 2\pi/3 + \pi n$ com n inteiro qualquer.

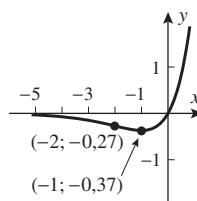


43. mínimos relativos: 1 em $x = -\pi, \pi, 3\pi, -1$ em $x = 0, 2\pi$;
máximos relativos: $5/4$ em $x = -2\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 8\pi/3$;
Pontos de inflexão onde $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$: $(-2,57; 1,13)$,
 $(-0,94; 0,06)$, $(0,94; 0,06)$, $(2,57; 1,13)$, $(3,71; 1,13)$, $(5,35; 0,06)$,
 $(7,22; 0,06)$, $(8,86; 1,13)$



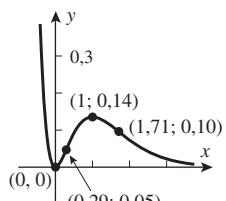
45. (a) $+\infty, 0$

(b)



43. (a) $0, +\infty$

(b)

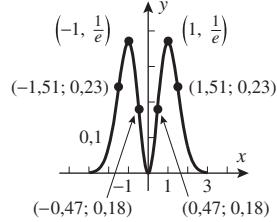


49. (a) $0, 0$

(b) máximo relativo = $1/e$ em $x = \pm 1$; mínimo relativo = 0 em $x = 0$;

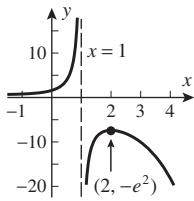
Pontos de inflexão onde $x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$:

aproximadamente $(\pm 0,47; 0,18)$, $(\pm 1,51; 0,23)$; assíntota: $y = 0$.

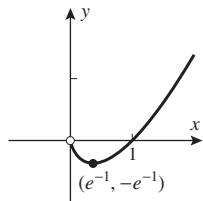


51. (a) $-\infty, 0$

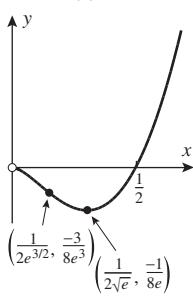
(b) máximo relativo $= -e^2$
em $x = 2$;
não há mínimo relativo;
não há pontos de inflexão;
assíntotas: $y = 0, x = 1$.

55. (a) $+\infty, 0$

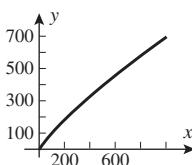
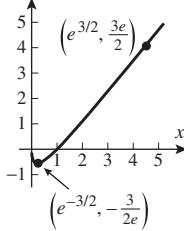
(b)



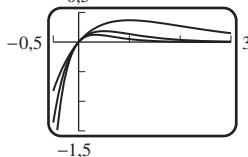
(b)

59. (a) $+\infty, 0$

(b) não há máximo relativo; mínimo relativo $= -\frac{3}{2e}$ em $x = e^{-3/2}$;
ponto de inflexão: $(e^{3/2}, 3e/2)$;
não há assíntotas. Como é difícil ver todas as características importantes em um único gráfico, mostramos dois:



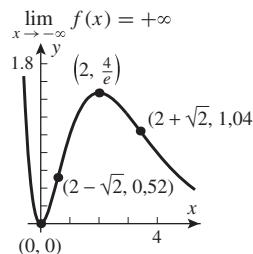
61. (a)



(b) máximo relativo em $x = 1/b$;
ponto de inflexão em $x = 2/b$

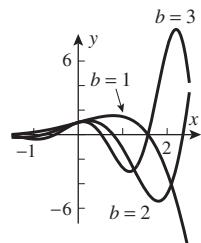
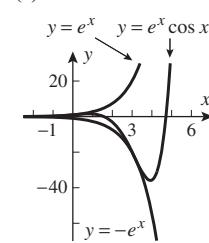
53. (a) $0, +\infty$

(b) máximo relativo $= 4/e$
em $x = 2$;
mínimo relativo $= 0$ em $x = 0$;
pontos de inflexão em $x = 2 \pm \sqrt{2}$;
assíntota: $y = 0$.



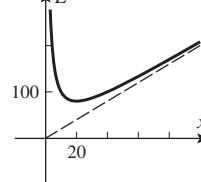
63. (a) não existe, 0

(b) $y = e^x$ e $y = e^x \cos x$ intersectam
em $x = 2\pi n$, $y = -e^x$ e $y = e^x \cos x$
intersectam em $x = 2\pi n + \pi$, com
 n inteiro qualquer.

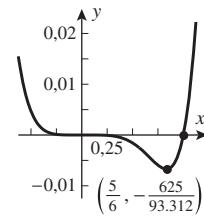
(c) Gráficos com $a = 1$:65. (a) $x = 1; 2,5; 3; 4$

(b) $(-\infty, 1], [2,5; 3]$
(c) máximo relativo em $x = 1$ e 3 ;
mínimo relativo em $x = 2,5$ (d) $x \approx 0,6; 1,9; 4$

67.



69. O gráfico não detecta os zeros em $x = 0$ e
1 e o mínimo em $x = 5/6$

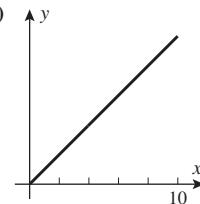


► Exercícios 4.4 (página 272)

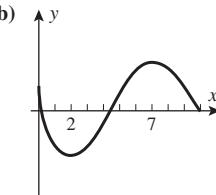
1. máximo relativo em $x = 2; 6$; máximo absoluto em $x = 6$;
mínimo relativo em $x = 4$; mínimo absoluto em $x = 0$ e 4

3.

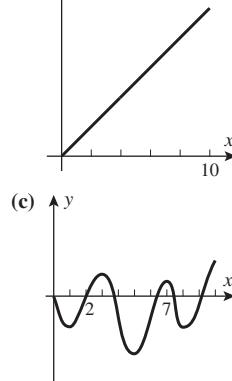
(a)



(b)



(c)



7. máximo = 2 em $x = 1$ e 2;
mínimo = 1 em $x = 3/2$.

9. máximo = 8 em $x = 4$;
mínimo = -1 em $x = 1$.

11. valor máximo $3/\sqrt{5}$ em $x = 1$,
valor mínimo $-3/\sqrt{5}$ em $x = -1$.

13. máximo = $\sqrt{2} - \pi/4$ em $x = -\pi/4$;
mínimo = $\pi/3 - \sqrt{3}$ em $x = \pi/3$.

15. valor máximo 17 em $x = -5$, valor mínimo 1 em $x = -3$.

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

17. Verdadeira; ver o Teorema do Valor Extremo (4.4.2).

19. Verdadeira; ver o Teorema 4.4.3.

21. não há máximos; mínimo $= -9/4$ em $x = 1/2$.

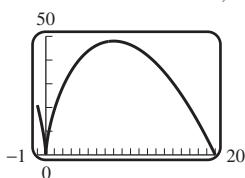
23. valor máximo $f(1) = 1$, não há mínimo

25. não há máximo, nem mínimo

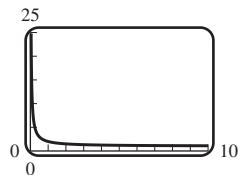
27. máximo $= -2 - 2\sqrt{2}$ em $x = -1 - \sqrt{2}$; não há mínimos.

29. não há máximos; mínimo $= 0$ em $x = 0$ e 2.

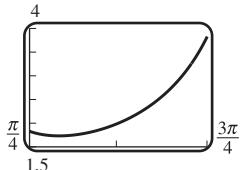
31. valor máximo 48 em $x = 8$,
valor mínimo 0 em $x = 0; 20$



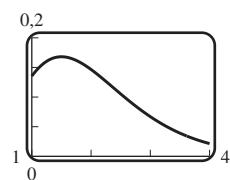
33. não há máximo, nem mínimo



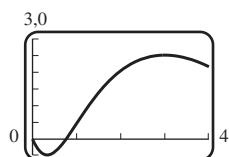
35. máximo $= 2\sqrt{2} + 1$ em $x = 3\pi/4$; mínimo $= \sqrt{3}$ em $x = \pi/3$.



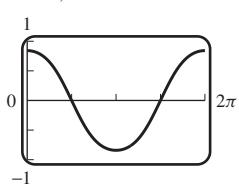
37. valor máximo $\frac{27}{8}e^{-3}$ em $x = \frac{3}{2}$;
valor mínimo $64/e^8$ em $x = 4$



39. máximo $= 5 \ln 10 - 9$ em $x = 3$;
mínimo $= 5 \ln(10/9) - 1$ em $x = 1/3$.



41. valor máximo $\sin(1) \approx 0,84147$
valor mínimo $= -\sin(1) \approx -0,84147$



43. valor máximo 2, valor mínimo $-\frac{1}{2}$

45. máximo $= 3$ em $x = 2n\pi$; mínimo $= -3/2$ em $x = \pm 2\pi/3 + 2n\pi$,
com n inteiro qualquer 49. 2, em $x = 1$

51. máximo $y = 4$ em $t = \pi$ e 3π ; mínimo $y = 0$ em $t = 0$ e 2π

Exercícios 4.5 (página 283)

1. (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ 3. 500 m paralelamente e 250 m perpendicularmente ao córrego. 5. 500 m (\$3 o metro) \times 750 m (\$2 o metro)

7. $5 \text{ cm} \times \frac{12}{5} \text{ cm}$ 9. $10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}$

11. 24 m (\$1 o metro da cerca), 12 m (\$2 o metro da cerca)

15. área máxima 108 com $x = 2$ 17. área máxima 144 com $x = 2$

19. 11.664 pol³ 21. $\frac{200}{27}$ pés³ 23. base 10 cm², altura 20 cm

25. tampa (ou base) $\sqrt[3]{3V/4}$ unidades quadradas, altura $\frac{4}{3}\sqrt[3]{3V/4}$

27. altura $= 2R/\sqrt{3}$, raio $= \sqrt{2/3}R$

31. altura $=$ raio $= \sqrt[3]{500/\pi}$ cm 33. $L/12$ por $L/12$ por $L/12$

35. altura $= L/\sqrt{3}$, raio $= \sqrt{2/3}L$

37. altura $= 2\sqrt[3]{75/\pi}$ cm, raio $= \sqrt{2}\sqrt[3]{75/\pi}$ cm

39. altura $= 4R$, raio $= \sqrt{2}R$

41. $R(x) = 225x - 0,25x^2$; $R'(x) = 225 - 0,5x$; 450 toneladas

43. (a) 7.000 unidades (b) sim (c) \$15 45. 13.722 kg 47. $3\sqrt{3}$

49. altura $= r/\sqrt{2}$ 51. $1/\sqrt{5}$ 53. $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 55. $(-1/\sqrt{3}, \frac{3}{4})$

57. (a) π km (b) $2 \arcsin(1/4)$ km 59. $(1,2)(1+2^{2/3})^{3/2}$ m

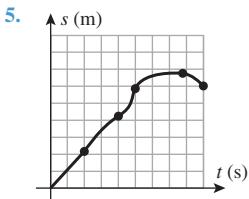
61. 30 cm a partir da fonte mais fraca 63. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ pés

Exercícios 4.6 (página 294)

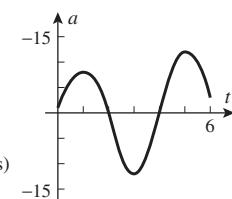
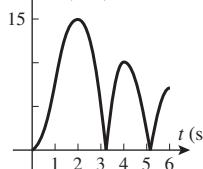
1. (a) positivo, negativo, diminuindo a velocidade
(b) positivo, positivo, aumentando a velocidade
(c) negativo, positivo, diminuindo a velocidade

3. (a) esquerda

- (b) negativa
(c) aumentando a velocidade
(d) diminuindo a velocidade



7. $|v|$ (m/s)



As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

9. Falsa; uma partícula tem velocidade positiva se o gráfico da posição versus tempo for crescente; se a velocidade positiva fosse decrescente, então a partícula estaria diminuindo a velocidade.

11. Falsa; a aceleração é a derivada da velocidade (em relação ao tempo); o valor absoluto da velocidade é a velocidade escalar.

13. (a) 6,2 pés/s² (b) $t = 0$ s

15. (a)

t	s	v	a
1	0,71	0,56	-0,44
2	1	0	-0,62
3	0,71	-0,56	-0,44
4	0	-0,79	0
5	-0,71	-0,56	0,44

 (b) parou em $t = 2$;
movendo-se para a direita em $t = 1$; movendo-se para a esquerda em $t = 3, 4$ e 5 .
(c) aumentando a velocidade em $t = 3$; diminuindo a velocidade em $t = 1$ e 5 ; nenhum dos dois em $t = 2$ e 4 .

17. (a) $v(t) = 3t^2 - 6t$, $a(t) = 6t - 6$

(b) $s(1) = -2$ m, $v(1) = -3$ m/s, $|v(1)| = 3$ m/s, $a(1) = 0$ m/s²

(c) $t = 0, 2$ (d) aumentando a velocidade em $0 < t < 1$ e $2 < t$, diminuindo a velocidade em $1 < t < 2$ (e) 58 m

19. (a) $v(t) = 3\pi \sin(\pi t/3)$, $a(t) = \pi^2 \cos(\pi t/3)$ (b) $s(1) = 9/2$ m;

$v(1) =$ velocidade escalar $= \sqrt{3\pi^2/2}$ m/s; $a(1) = \pi^2/2$ m/s²

(c) $t = 0$ s, 3 s (d) Aumentando a velocidade: $0 < t < 1,5$ e $3 < t < 4,5$; diminuindo a velocidade: $1,5 < t < 3$ e $4,5 < t < 5$

(e) 31,5 m

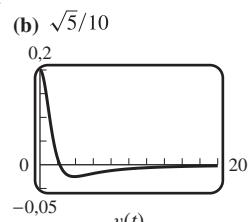
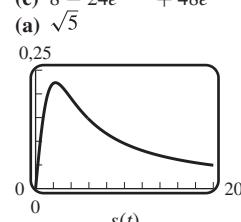
21. (a) $v(t) = -\frac{1}{3}(t^2 - 6t + 8)e^{-t/3}$, $a(t) = \frac{1}{9}(t^2 - 12t + 26)e^{-t/3}$

(b) $s(1) = 9e^{-1/3}$ m, $v(1) = -e^{-1/3}$ m/s, velocidade escalar $= e^{-1/3}$ m/s, $a(1) = \frac{5}{3}e^{-1/3}$ m/s² (c) $t = 2$ s, 4 s

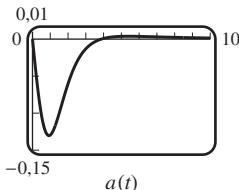
(d) Aumentando a velocidade: $2 < t < 6 - \sqrt{10}$ e $4 < t < 6 + \sqrt{10}$; diminuindo a velocidade: $0 < t < 2$, $6 - \sqrt{10} < t < 4$, $6 + \sqrt{10} < t$

(e) $8 - 24e^{-2/3} + 48e^{-4/3} - 33e^{-5/3}$

23. (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}/10$



- (c) aumentando a velocidade em $\sqrt{5} < t < \sqrt{15}$;
 diminuindo a velocidade em $0 < t < \sqrt{5}$
 e $\sqrt{15} < t$



25.

27.

Aumentando a velocidade

Diminuindo a velocidade

(Parada) $t = 4$

$t = 2$

$t = 3$

$t = 0$

s

16 18 20

Diminuindo a velocidade

(Parada)

29.

Diminuindo
a velocidade

Aumentando
a velocidade

$t \rightarrow +\infty$

$t = 0$

$t = 2\sqrt{3}$

$t = 2$

s

31. Diminuindo a velocidade (Permanentemente parada)

$t = \pi$

$t = \pi/2$

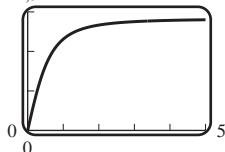
$t = 0$

$t \geq 2\pi$

s

Aumentando a velocidade

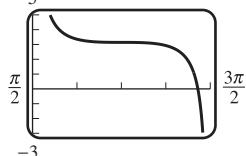
- 33.** (a) 12 m/s (b) $t = 2, s; s = -24,2 \text{ pés}$
35. (a) $t = 2 \pm 1/\sqrt{3}, s = \ln 2, v = \pm\sqrt{3}$ (b) $t = 2, s = 0, a = 6$
37. (a) $1,5$ (b) $\sqrt{2}$



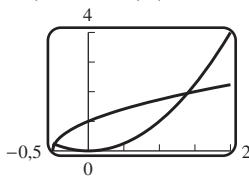
- 39.** (b) $\frac{2}{3}$ unidade (c) $0 \leq t < 1$ e $t > 2$

► Exercícios 4.7 (página 300)

- 1.** $1,414213562$ **3.** $1,817120593$ **5.** $x \approx 1,76929$
7. $x \approx 1,224439550$ **9.** $x \approx -1,24962$ **11.** $x \approx 1,02987$
13. $x \approx 4,493409458$ **15.** $x \approx 0,68233$



- 17.** $-0,474626618; 1,395336994$ **19.** $x \approx 0,58853$ ou $3,09636$



As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

21. Verdadeira; $x = x_{n+1}$ é o corte da reta tangente a $y = f(x)$ em $x = x_n$, com o eixo x.

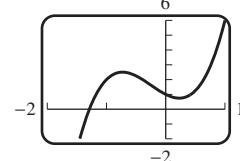
23. Falsa; por exemplo, se $f(x) = x(x - 3)^2$, o Método de Newton falha (analogamente ao que ocorre na Figura 4.7.4) com $x_1 = 1$ e aproxima a raiz $x = 3$ com $x_1 > 1$.

25. (b) 3,162277660 27. -4,098859132
 29. $x = -1$ ou $x \approx 0,17951$ 31. (0,589754512; 0,347810385)
 33. (b) $\theta \approx 2,99156$ rad ou 171° 35. -1,220744085; 0,724491959
 37. $i = 0,053362$ ou 5,33% 39. (a) Os valores não convergem.

► Exercícios 4.8 (página 308)

- 1.** $c = 4$ **3.** $c = \pi$ **5.** $c = 1$ **7.** $c = -\sqrt{5}$

9. (a) $[-2, 1]$
 (b) $c \approx -1,29$
 (c) $-1,2885843$



As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

11. Falsa; o Teorema de Rolle requer a hipótese adicional de f ser derivável em (a, b) e $f(a) = f(b) = 0$; ver Exemplo 2.

13. Falsa; o Teorema da Diferença Constante se refere a duas funções com derivadas iguais num intervalo e conclui que essas funções diferem por uma constante nesse intervalo.

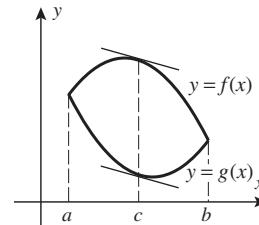
15. (b) $\operatorname{tg} x$ não é contínua em $[0, \pi]$. 25. $f(x) = xe^x - e^x + 2$

35. (b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$

37. 41. $a = 6$, $b = -3$

- 35.** (b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

37. $\uparrow y$



► Capítulo 4 Exercícios de Revisão (página 310)

- 1.** (a) $f(x_1) < f(x_2)$; $f(x_1) > f(x_2)$; $f(x_1) = f(x_2)$
 (b) $f' > 0$; $f' < 0$; $f' = 0$

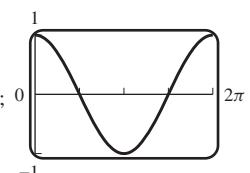
3. (a) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ (b) $(-\infty, \frac{5}{2}]$ (c) $(-\infty, +\infty)$ (d) não há (e) não há

5. (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$
 (d) $(-\infty, -\sqrt{2/3}), (\sqrt{2/3}, +\infty)$ (e) $-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}$

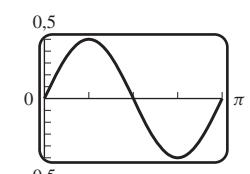
7. (a) $[-1, +\infty)$ (b) $(-\infty, -1]$ (c) $(-\infty, 0), (2, +\infty)$
 (d) $(0, 2)$ (e) $0 \in 2$

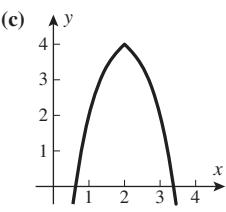
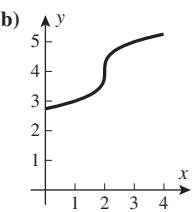
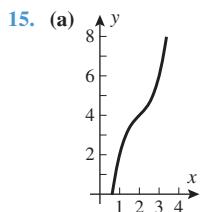
9. (a) $(-\infty, 0]$ (b) $[0, +\infty)$ (c) $(-\infty, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, +\infty)$
 (d) $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (e) $\pm 1/\sqrt{2}$

11. crescente em $[\pi, 2\pi]$;
 decrescente em $[0, \pi]$;
 côncava para cima em $(\pi/2, 3\pi/2)$;
 côncava para baixo em $(0, \pi/2), (3\pi/2, 2\pi)$
 pontos de inflexão: $(\pi/2, 0), (3\pi/2, 0)$

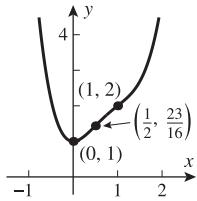


13. crescente em $[0, \pi/4]$, $[3\pi/4, \pi]$;
decrescente em $[\pi/4, 3\pi/4]$;
côncava para cima em $(\pi/2, \pi)$;
côncava para baixo em $(0, \pi/2)$;
pontos de inflexão: $(\pi/2, 0)$

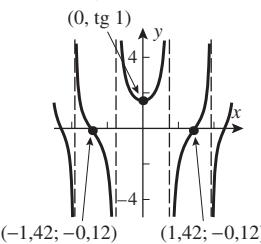




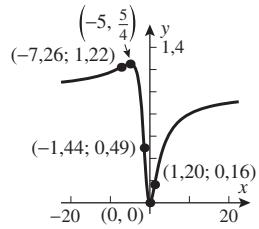
15. (a) $\frac{b}{2a} \leq 0$ 19. $x = -1$ 21. (a) em um ponto de inflexão
 25. (a) $x = \pm\sqrt{2}$ (pontos estacionários) (b) $x = 0$ (ponto estacionário)
 27. (a) max. relativo em $x = 1$, min. relativo em $x = 7$, nenhum dos dois
 em $x = 0$ (b) max. relativo em $x = \pi/2; 3\pi/2$; min. relativo em
 $x = 7\pi/6; 11\pi/6$ (c) max. relativo em $x = 5$
 29. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 min. relativo em $x = 0$
 pontos de inflexão em $x = \frac{1}{2}, 1$;
 não há assíntotas



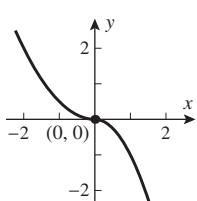
31. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ não existe; ponto crítico em $x = 0$; min. relativo em $x = 0$;
 ponto de inflexão quando $1 + 4x^2 \operatorname{tg}(x^2 + 1) = 0$; assíntotas verticais
 em $x = \pm\sqrt{\pi(n + \frac{1}{2}) - 1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$



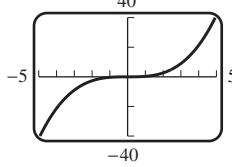
33. pontos críticos em $x = -5; 0$; max. relativo em $x = -5$, min. relativo
 em $x = 0$; pontos de inflexão em $x \approx -7,26; -1,44; 1,20$; assíntota
 horizontal $y = 1$ quando $x \rightarrow \pm\infty$



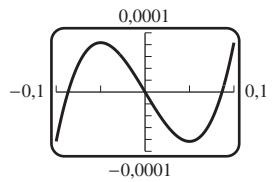
35. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
 ponto crítico em $x = 0$;
 não há extremo;
 ponto de inflexão em $x = 0$
 $(f$ muda a concavidade);
 não há assíntota



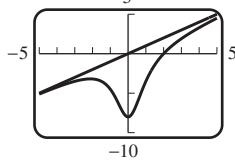
37. não há extremos relativos 39. mínimo relativo de 0 em $x = 0$
 41. mínimo relativo de 0 em $x = 0$ 43. mínimo relativo de 0 em $x = 0$
 45. (a)



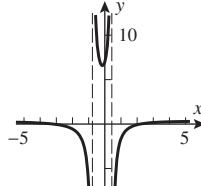
- (c) Detalhes mais finos podem ser vistos quando é feito o gráfico sobre uma janela x muito menor.



47. (a)



$$49. f(x) = \frac{x^2 + x - 7}{3x^2 + x - 1}, x \neq \frac{1}{2}$$

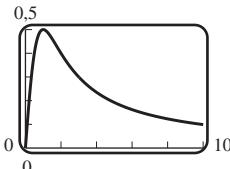
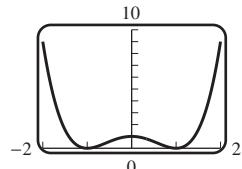


assíntota horizontal $y = 1/3$
 assíntotas verticais em
 $x = (-1 \pm \sqrt{13})/6$

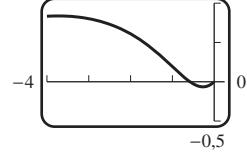
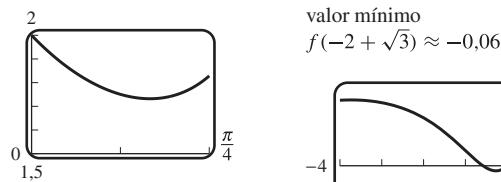
53. (a) verdadeira (b) falsa

55. (a) não há máximo; min. = $-13/4$ em $x = 3/2$
 (b) não há máximos ou mínimos (c) $m = e^2/4$ em $x = 2$
 (d) não há máximo; min. = $e^{-1/e}$ em $x = 1/e$

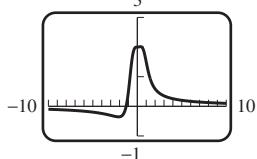
57. (a) valor mínimo 0 em $x = \pm 1$; (b) valor máximo = $1/2$ em $x = 1$;
 valor mínimo = 0 em $x = 0$



- (c) valor máximo = 2 em $x = 0$; (d) valor máximo =
 valor mínimo = $\sqrt{3}$ em $x = \pi/6$



59. (a)



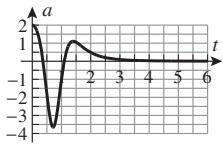
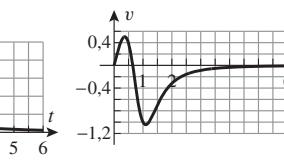
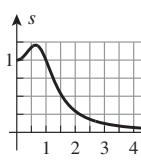
- (b) mínimo:
 $(-2,111985; -0,355116)$;
 máximo:
 $(0,372591; 2,012931)$

61. largura = $4\sqrt{2}$, altura = $3\sqrt{2}$ 63. 20 cm de lado

65. (a) sim (b) sim

67. (a) $v = -2 \frac{t(t^4 + 2t^2 - 1)}{(t^4 + 1)^2}, a = 2 \frac{3t^8 + 10t^6 - 12t^4 - 6t^2 + 1}{(t^4 + 1)^3}$

(b)

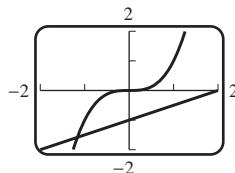


- (c) $t \approx 0,64$; $s \approx 1,2$ (d) $0 \leq t \leq 0,64$ s

(e) aumentando a velocidade quando $0 \leq t < 0,36$ e $0,64 < t < 1,1$; caso contrário, diminui a velocidade
máxima $\approx 1,05$ m/s quando $t \approx 1,10$ s

69. $x \approx -2,11491; 0,25410; 1,86081$

71. $x \approx -1,165373043$



73. 249×10^6 km

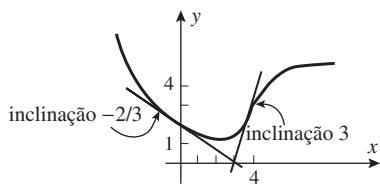
75. (a) sim, $c = 0$ (b) não
(c) sim, $c = \sqrt{\pi}/2$

73. use o Teorema de Rolle

► Capítulo 4 Estabelecendo Conexões (página 314)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

1. (a) não tem zeros (b) 1 zero (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$



73. (a) $(-2,2; 4), (2,1,2), (4,2; 3)$

(b) pontos críticos em $x = -5,1; -2; 0,2; 2$; mínimo local em $x = -5,1$ e 2; máximo local em $x = -2$; sem extremos em $x = 0,2$; $f''(1) \approx -1,2$.

3. $x = -4$ e 5 4. (d) $f(c) = 0$

6. (a) trajeto (i): 10 s; trajeto (iv): 10 s

(b) $2 \leq x \leq 5$; $\frac{4\sqrt{10}}{2,1} + \frac{5}{0,7} \approx 13,166$ s

(c) $0 \leq x \leq 2$; 10 s

(d) trajeto (i) ou trajeto (iv): 10 s

► Exercícios 5.1 (página 321)

n	2	5	10	50	100
A_n	0,853553	0,749739	0,710509	0,676095	0,671463

n	2	5	10	50	100
A_n	1,57080	1,93376	1,98352	1,99935	1,99984

n	2	5	10	50	100
A_n	0,583333	0,645635	0,668771	0,688172	0,690653

n	2	5	10	50	100
A_n	0,433013	0,659262	0,726130	0,774567	0,780106

n	2	5	10	50	100
A_n	3,71828	2,85174	2,59327	2,39772	2,37398

n	2	5	10	50	100
A_n	1,04720	0,75089	0,65781	0,58730	0,57894

13. $3(x-1)$ 15. $x(x+2)$ 17. $(x+3)(x-1)$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

19. Falsa; o limite seria a área do círculo, que é 4π .

21. Verdadeira; essa é a base do método da antiderivada.

23. área $= A(6) - A(3)$ 27. $f(x) = 2x$; $a = 2$

► Exercícios 6.2 (página 330)

1. (a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C$

(b) $\int (x+1)e^x dx = xe^x + C$

5. $\frac{d}{dx} [\sqrt{x^3 + 5}] = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}}$, logo $\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}} dx = \sqrt{x^3 + 5} + C$.

7. $\frac{d}{dx} [\operatorname{sen}(2\sqrt{x})] = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, logo $\int \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \operatorname{sen}(2\sqrt{x}) + C$.

9. (a) $(x^9/9) + C$ (b) $\frac{7}{12}x^{12/7} + C$ (c) $\frac{2}{9}x^{9/2} + C$

11. $\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{6x^4} + C$ 13. $-\frac{1}{2}x^{-2} - \frac{12}{5}x^{5/4} + \frac{8}{3}x^3 + C$

15. $(x^2/2) + (x^5/5) + C$ 17. $3x^{4/3} - \frac{12}{7}x^{7/3} + \frac{3}{10}x^{10/3} + C$

19. $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$ 21. $2 \ln|x| + 3e^x + C$

23. $-3 \cos x - 2 \operatorname{tg} x + C$ 25. $\operatorname{tg} x + \sec x + C$

27. $\operatorname{tg} \theta + C$ 29. $\sec x + C$ 31. $\theta - \cos \theta + C$

33. $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$ 35. $\operatorname{tg} x - \sec x + C$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

37. Verdadeira; isso corresponde às Equações (1) e (2).

39. Falsa; a condição inicial não está satisfeita, pois $y(0) = 2$.

41. (a) $y(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{5}{4}$

(b) $y = -\cos t + t + 1 - \pi/3$

(c) $y(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} - \frac{8}{3}$

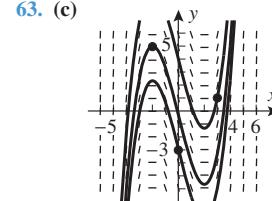
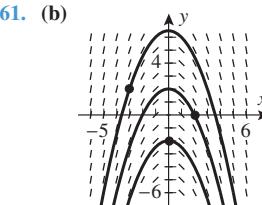
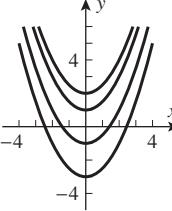
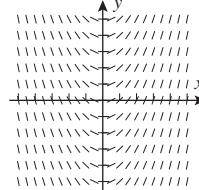
45. (a) $y = 4e^x - 3$ (b) $y(t) = \ln|t| + 5$

47. $s(t) = 16t^2 + 20$ 49. $s(t) = 2t^{3/2} - 15$

51. $f(x) = \frac{4}{15}x^{5/2} + C_1x + C_2$ 53. $y = x^2 + x - 6$

55. $f(x) = \cos x + 1$ 57. $y = x^3 - 6x + 7$

59. (a) (b) (c) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$



67. (b) $\pi/2$ 69. $\operatorname{tg} x - x + C$

71. (a) $\frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x) + C$ (b) $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x) + C$

73. $v = \frac{1087}{\sqrt{273}} T^{1/2}$ pés/s

► Exercícios 5.3 (página 338)

1. (a) $\frac{(x^2 + 1)^{24}}{24} + C$ (b) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$

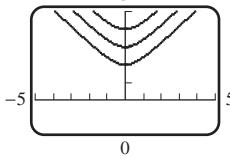
3. (a) $\frac{1}{4} \operatorname{tg}(4x + 1) + C$ (b) $\frac{1}{6}(1 + 2y^2)^{3/2} + C$

5. (a) $-\frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 x + C$ (b) $\frac{1}{10}(1 + \operatorname{sen} t)^{10} + C$

7. (a) $\frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$

(b) $-\operatorname{cotg}(\operatorname{sen} x) + C$

9. (a) $\ln|\operatorname{ln} x| + C$ (b) $-\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

- 11.** (a) $\frac{1}{3} \operatorname{arc tg}(x^3) + C$ (b) $\operatorname{arc sen}(\ln x) + C$
15. $\frac{1}{40}(4x - 3)^{10} + C$ **17.** $-\frac{1}{7} \cos 7x + C$ **19.** $\frac{1}{4} \sec 4x + C$
21. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ **23.** $\frac{1}{2} \operatorname{arc sen}(2x) + C$ **25.** $\frac{1}{21}(7t^2 + 12)^{3/2} + C$
27. $\frac{3}{2(1-2x)^2} + C$ **29.** $-\frac{1}{40(5x^4 + 2)^2} + C$ **31.** $e^{\operatorname{sen} x} + C$
33. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$ **35.** $\operatorname{arc tg} e^x + C$ **37.** $\frac{1}{5} \cos(5/x) + C$
39. $-\frac{1}{15} \cos^5 3t + C$ **41.** $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(x^2) + C$ **43.** $-\frac{1}{6}(2 - \operatorname{sen} 4\theta)^{3/2} + C$
45. $\operatorname{arc sen}(\operatorname{tg} x) + C$ **47.** $\frac{1}{6} \sec^3 2x + C$ **49.** $-e^{-x} + C$
51. $-e^{-2\sqrt{x}} + C$ **53.** $\frac{1}{6}(2y+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2y+1)^{1/2} + C$
55. $-\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{6} \cos^3 2\theta + C$ **57.** $t + \ln |t| + C$
59. $\int [\ln(e^x) + \ln(e^{-x})] dx = C$
61. (a) $\operatorname{arc sen}\left(\frac{1}{3}x\right) + C$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc tg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$
(c) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{arc sec}\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) + C$
63. $\frac{1}{b} \frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1} + C$ **65.** $\frac{1}{b(n+1)} \operatorname{sen}^{n+1}(a+bx) + C$
67. (a) $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C_1; -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_2$
(b) porque diferem por uma constante
69. $\frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} - \frac{158}{15}$ **71.** $y = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{13}{2}$
73. (a) $\sqrt{x^2 + 1} + C$ **75.** $f(x) = \frac{2}{9}(3x+1)^{3/2} + \frac{7}{9}$
(b)
- 
- 77.** 1280

► Exercícios 5.4 (página 350)

- 1.** (a) 36 (b) 55 (c) 40 (d) 6 (e) 11 (f) 0 **3.** $\sum_{k=1}^{10} k$ **5.** $\sum_{k=1}^{10} 2k$
7. $\sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1}(2k-1)$ **9.** (a) $\sum_{k=1}^{50} 2k$ (b) $\sum_{k=1}^{50} (2k-1)$ **11.** 5050
13. 2.870 **15.** 214.365 **17.** $\frac{3}{2}(n+1)$ **19.** $\frac{1}{4}(n-1)^2$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

21. Verdadeira; pelas partes (a) e (c) do Teorema 5.4.2.

23. Falsa; considere $[a, b] = [-1, 0]$.

- 25.** (a) $\left(2 + \frac{3}{n}\right)^4 \cdot \frac{3}{n}, \left(2 + \frac{6}{n}\right)^4 \cdot \frac{3}{n}, \left(2 + \frac{9}{n}\right)^4 \cdot \frac{3}{n},$
 $\left(2 + \frac{3(n-1)}{n}\right)^4 \cdot \frac{3}{n}, (2+3)^4 \cdot \frac{3}{n}$ (b) $\sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + k \cdot \frac{3}{n}\right)^4 \frac{3}{n}$

- 27.** (a) 46 (b) 52 (c) 58 **29.** (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) 0 (c) $-\frac{\pi}{4}$
31. (a) 0,7188; 0,7058; 0,6982 (b) 0,6928; 0,6931; 0,6931
(c) 0,6688; 0,6808; 0,6882
33. (a) 4,8841; 5,1156; 5,2488 (b) 5,3471; 5,3384; 5,3346
(c) 5,6841; 5,5156; 5,4088

- 35.** $\frac{15}{4}$ **37.** 18 **39.** 320 **41.** $\frac{15}{4}$ **43.** 18 **45.** 16 **47.** $\frac{1}{3}$ **49.** 0
51. $\frac{2}{3}$ **53.** (b) $\frac{1}{4}(b^4 - a^4)$

55. $\frac{n^2 + 2n}{4}$ se n for par; $\frac{(n+1)^2}{4}$ se n for ímpar. **57.** $3^{17} - 3^4$ **59.** $-\frac{399}{400}$

61. (b) $\frac{1}{2}$ **65.** (a) sim (b) sim

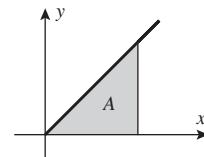
► Exercícios 5.5 (página 360)

- 1.** (a) $\frac{71}{6}$ (b) 2 **3.** (a) $-\frac{117}{16}$ (b) 3 **5.** $\int_{-1}^2 x^2 dx$
7. $\int_{-3}^3 4x(1-3x) dx$

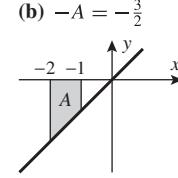
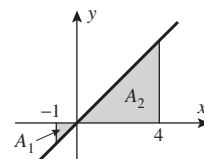
9. (a) $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2x_k^* \Delta x_k; a = 1, b = 2$

(b) $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^*}{x_k^* + 1} \Delta x_k; a = 0, b = 1$

13. (a) $A = \frac{9}{2}$

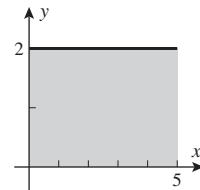


(c) $-A_1 + A_2 = \frac{15}{2}$



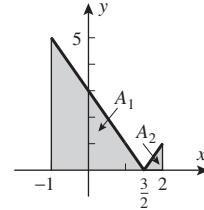
(d) $-A_1 + A_2 = 0$

15. (a) $A = 10$

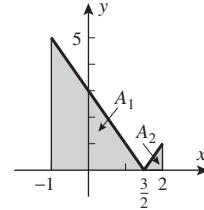


(b) $A_1 - A_2 = 0$ por simetria

(c) $A_1 + A_2 = \frac{13}{2}$



(d) $\pi/2$



17. (a) 2

(b) 4

(c) 10

(d) 10

19. (a) 0,8

(b) -2,6

(c) -1,8

(d) -0,3

21. -1 **23.** 3 **25.** -4 **27.** $(1+\pi)/2$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

29. Falsa; veja Teorema 5.5.8(a).

30. Falsa; considere $f(x) = x - 2$ em $[0, 3]$.

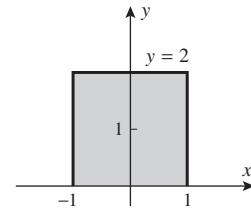
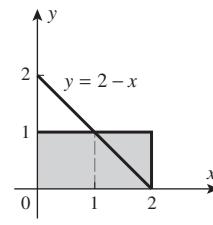
33. (a) negativo (b) positivo **37.** $\frac{25}{2}\pi$ **39.** $\frac{5}{2}$

45. (a) integrável (b) integrável (c) não integrável (d) integrável

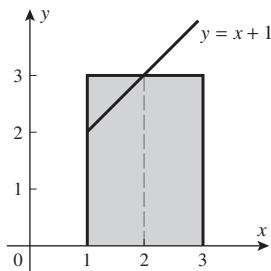
► Exercícios 5.6 (página 373)

1. (a) $\int_0^2 (2-x) dx = 2$ (b) $\int_{-1}^1 2 dx = 4$ (c) $\int_1^3 (x+1) dx = 6$

3. (a) $x^* = f(x^*) = 1$ (b) x^* é um ponto qualquer em $[-1, 1]$, $f(x^*) = 2$



(c) $x^* = 2, f(x^*) = 3$



5. $\frac{65}{4}$ 7. 14 7. $\frac{3}{2}$ 11. (a) $\frac{4}{3}$ (b) -7 13. 48 15. 3 17. $\frac{844}{5}$
 19. 0 21. $\sqrt{2}$ 23. $5e^3 - 10$ 25. $\pi/4$ 27. $\pi/12$ 29. -12
 31. (a) $5/2$ (b) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 33. (a) $e + (1/e) - 2$ (b) 1

35. (a) $\frac{17}{6}$ (b) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}, & x > 1 \end{cases}$

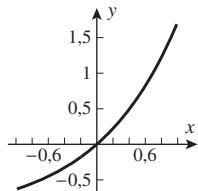
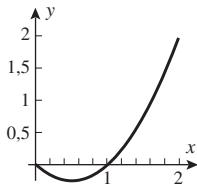
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

37. Falsa; por ser contínua, $|x|$ tem uma antiderivada.

39. Verdadeira; pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

41. 0,6659; $\frac{2}{3}$ 43. 3,1060; 2 tg 1 45. 12 47. $\frac{9}{2}$

49. área = 1 51. área = $e + e^{-1} - 2$



53. (b) modo graus; 0,93

55. (a) a variação na altura entre as idades 0 e 10 anos; centímetros.
 (b) a variação no raio entre os instantes $t = 1$ s e $t = 2$ s; centímetros.
 (c) a diferença entre as velocidades do som a 38°C e 0°C ; m/s.
 (d) a variação na posição entre os instantes t_1 e t_2 ; centímetros.

57. (a) $3x^2 - 3$ 59. (a) $\sin(x^2)$ (b) $e^{\sqrt{x}}$ 61. $-x \sec x$

63. (a) 0 (b) 5 (c) $\frac{4}{5}$

65. (a) $x = 3$ (b) crescente em $[3, +\infty)$, decrescente em $(-\infty, 3]$
 (c) côncava para cima em $(-1, 7)$, côncava para baixo em $(-\infty, -1)$ e $(7, +\infty)$

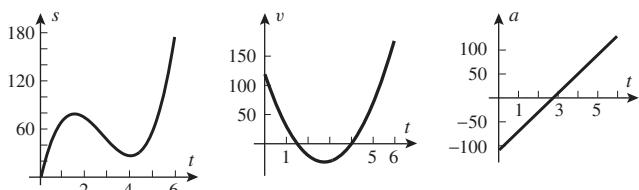
67. (a) $(0, +\infty)$ (b) $x = 1$

69. (a) 120 galões (b) 420 galões (c) 2076,36 galões 71. 1

► Exercícios 5.7 (página 382)

1. (a) deslocamento = 3; distância = 3
 (b) deslocamento = -3 distância = 3
 (c) deslocamento = $-\frac{1}{2}$; distância = $\frac{3}{2}$
 (d) deslocamento = $\frac{3}{2}$; distância = 2
3. (a) 35,3 m/s (b) 51,4 m/s 5. (a) $t^3 - t^2 + 1$ (b) $4t + 3 - \frac{1}{3} \sin 3t$
7. (a) $\frac{3}{2}t^2 + t - 4$ (b) $t + 1 - \ln t$
9. (a) deslocamento = 1 m; distância = 1 m
 (b) deslocamento = -1 m; distância = 3 m
11. (a) deslocamento = $\frac{9}{4}$ m; distância = $\frac{11}{4}$ m
 (b) deslocamento = $2\sqrt{3} - 6$ m; distância = $6 - 2\sqrt{3}$ m
13. 4, 13/3 15. $296/27, 296/27$
17. (a) $s = 2/\pi, v = 1, |v| = 1, a = 0$
 (b) $s = \frac{1}{2}, v = -\frac{3}{2}, |v| = \frac{3}{2}, a = -3$ 19. $t \approx 1,27$ s

21.

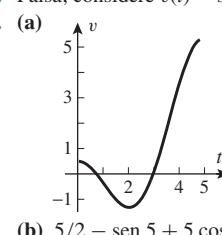


As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

23. Verdadeira; se $a(t) = a_0$, então $v(t) = a_0 t + v_0$.

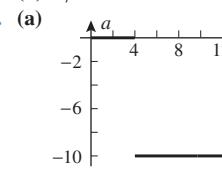
25. Falsa; considere $v(t) = \sin t$ em $[0, 2\pi]$.

27. (a)

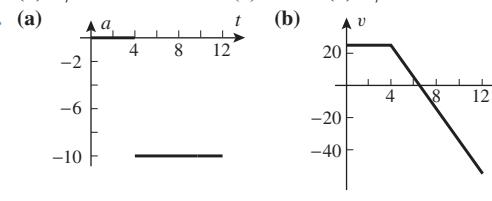


(b) $5/2 - \sin 5 + 5 \cos(5)$

31. (a)



(b)



(c)

120 cm, -20 cm (d) 131,25 cm em $t = 6,5$ s

33. (a) $-\frac{121}{5}$ pés/s² (b) $\frac{70}{33}$ s (c) $\frac{60}{11}$ s 35. 280 m 37. 50 s, 5.000 pés

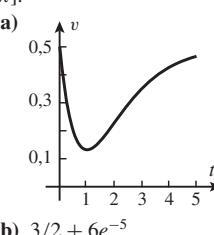
39. (a) 16 pés/s, -48 pés/s (b) 196 pés (c) 112 pés/s

41. (a) 1 s (b) $\frac{1}{2}$ s 43. (a) 6,122 s (b) 183,7 m (c) 6,122 s

(d) 60 m/s 45. (a) 5 s (b) 272,5 m (c) 10 s

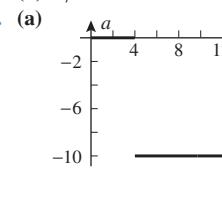
(d) -49 m/s (e) 12,46 s (f) 73,1 m/s

29. (a)

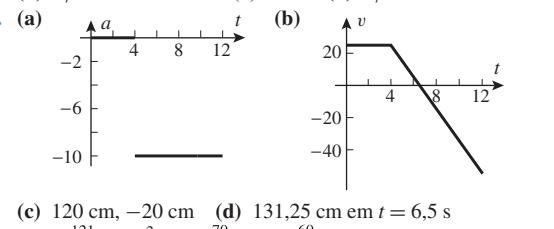


(b) $3/2 + 6e^{-5}$

(c)



(d)



(e)

120 cm, -20 cm (d) 131,25 cm em $t = 6,5$ s

33. (a) $-\frac{121}{5}$ pés/s² (b) $\frac{70}{33}$ s (c) $\frac{60}{11}$ s 35. 280 m 37. 50 s, 5.000 pés

39. (a) 16 pés/s, -48 pés/s (b) 196 pés (c) 112 pés/s

41. (a) 1 s (b) $\frac{1}{2}$ s 43. (a) 6,122 s (b) 183,7 m (c) 6,122 s

(d) 60 m/s 45. (a) 5 s (b) 272,5 m (c) 10 s

(d) -49 m/s (e) 12,46 s (f) 73,1 m/s

► Exercícios 5.8 (página 388)

1. (a) 4 (c) 3 6
 (b) 2 5. $\frac{2}{\pi}$
 7. $\frac{1}{e-1}$
 9. $\frac{\pi}{12(\sqrt{3}-1)}$

11. $\frac{1-e^{-8}}{8}$ 13. (a) 5,28 (b) 4,305 (c) 4 15. (a) $-\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{2}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

19. Falsa; seja $g(x) = \cos x; f(x) = 0$ em $[0, 3\pi/2]$.

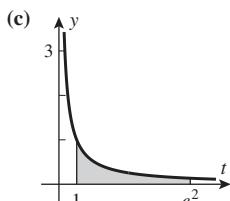
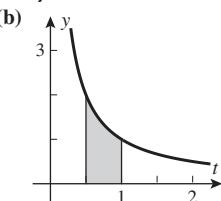
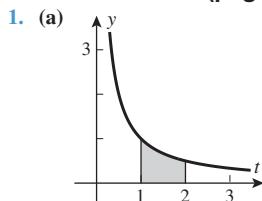
21. Verdadeira; ver Teorema 5.5.4(b).

23. (a) $\frac{263}{4}$ (b) 31 25. 1404π lb 27. 97 carros/minuto 31. 27

► Exercícios 5.9 (página 393)

1. (a) $\frac{1}{2} \int_1^5 u^3 du$ (b) $\frac{3}{2} \int_9^{25} \sqrt{u} du$ (c) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u du$
 (d) $\int_1^2 (u+1)u^5 du$ 3. (a) $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^u du$ (b) $\int_1^2 u du$
 5. 10 7. 0 9. $\frac{1192}{15}$ 11. $8 - (4\sqrt{2})$ 13. $-\frac{1}{48}$ 15. $\ln \frac{21}{13}$
 17. $\pi/6$ 19. $25\pi/6$ 21. $\pi/8$ 23. $2/\pi$ m 25. 6 27. $\pi/18$
 29. $1/21$ 31. 2 33. $\frac{2}{3}(\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$ 35. $2(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ 37. 1
 39. 0 41. $(\sqrt{3}-1)/3$ 43. $\frac{106}{405}$ 45. $(\ln 3)/2$ 47. $\pi/(6\sqrt{3})$
 49. $\pi/9$ 51. (a) $\frac{23}{4480}$ 53. (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $-\frac{1}{2}$ 57. Método 2
 59. Método 1 61. $\approx 48.233.500.000$ 63. (a) 0,45 (b) 0,461
 65. $(\ln 7)/2$ 67. (a) $2/\pi$ 71. (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\pi/4$

► Exercícios 5.10 (página 406)



3. (a) 7 (b) -5 (c) -3 (d) 6
5. 1,603210678;
a magnitude do erro é < 0,0063

7. (a) $x^{-1}, x > 0$ (b) $x^2, x \neq 0$ (c) $-x^2, -\infty < x < +\infty$
(d) $-x, -\infty < x < +\infty$ (e) $x^3, x > 0$ (f) $\ln x + x, x > 0$
(g) $x - \sqrt[3]{x}, -\infty < x < +\infty$ (h) $e^x/x, x > 0$
9. (a) $e^{\pi \ln 3}$ (b) $e^{\sqrt{2} \ln 2}$ 11. (a) \sqrt{e} (b) e^2 13. $x^2 - x$

15. (a) $3/x$ (b) 1 17. (a) 0 (b) 0 (c) 1

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

19. Verdadeira; ambas são iguais a $-\ln a$.

21. Falsa; o integrando é ilimitado em $[-1, e]$ e, portanto, a integral não está definida.

23. (a) $2x^3\sqrt{1+x^2}$ (b) $-\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + \frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} - \frac{4\sqrt{2}}{15}$

25. (a) $-\cos(x^3)$ (b) $-\operatorname{tg}^2 x$ 27. $-3\frac{3x-1}{9x^2+1} + 2x\frac{x^2-1}{x^4+1}$

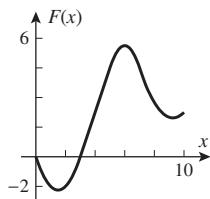
29. (a) $3x^2 \operatorname{sen}^2(x^3) - 2x \operatorname{sen}^2(x^2)$ (b) $\frac{2}{1-x^2}$

31. (a) $F(0) = 0; F(3) = 0; F(5) = 6; F(7) = 6; F(10) = 3$

(b) crescente em $[\frac{3}{2}, 6] \cup [\frac{37}{4}, 10]$, decrescendo em $[0, \frac{3}{2}] \cup [6, \frac{37}{4}]$

(c) máximo $\frac{15}{2}$ em $x = 6$, mínimo $-\frac{9}{4}$ em $x = \frac{3}{2}$

(d)



33. $F(x) = \begin{cases} (1-x^2)/2, & x < 0 \\ (1+x^2)/2, & x \geq 0 \end{cases}$ 35. $y(x) = x^2 + \ln x + 1$

37. $y(x) = \operatorname{tg} x + \cos x - (\sqrt{2}/2)$

39. $P(x) = P_0 + \int_0^x r(t) dt$ indivíduos

43. (a) $t = 3$ (b) $t = 1$ e 5

(c) $t = 5$ (d) $t = 3$

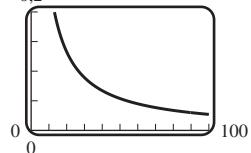
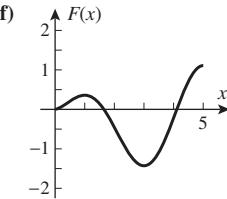
(e) F é côncava para cima em $(0, \frac{1}{2})$ e $(2, 4)$ e côncava para baixo em $(\frac{1}{2}, 2)$ e $(4, 5)$

45. (a) máximo relativo em $x = \pm\sqrt{4k+1}, k = 0, 1, \dots$; mínimo relativo em $x = \pm\sqrt{4k-1}, k = 1, 2, \dots$

(b) $x = \pm\sqrt{2k}, k = 1, 2, \dots$ e em $x = 0$

47. $f(x) = 2e^{2x}, a = \ln 2$ 49. 0,06

41. I é a derivada de II



► Capítulo 5 Exercícios de Revisão (página 408)

1. $-\frac{1}{4x^2} + \frac{8}{3}x^{3/2} + C$ 3. $-4 \cos x + 2 \sin x + C$

5. $3x^{1/3} - 5e^x + C$ 7. $\operatorname{arc tg} x + 2 \operatorname{arc sen} x + C$

9. (a) $y(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{3}$ (b) $y(x) = \sin x - 5e^x + 5$

(c) $y(x) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}x^{4/3}$ (d) $y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$

13. $\frac{1}{2} \operatorname{arc sec}(x^2 - 1) + C$ 15. $\frac{1}{3}\sqrt{5} + 2 \operatorname{sen} 3x + C$

17. $-\frac{1}{3a} \frac{1}{ax^3 + b} + C$

19. (a) $\sum_{k=0}^{14} (k+4)(k+1)$ (b) $\sum_{k=5}^{19} (k-1)(k-4)$

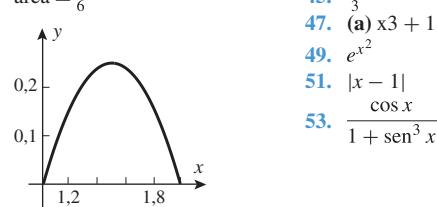
21. $\frac{32}{3}$ 23. 0,35122; 0,42054; 0,38650

27. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{35}{4}$ (d) -2 (e) não há informação suficiente (f) não há informação suficiente

29. (a) $2 + (\pi/2)$ (b) $\frac{1}{3}(10^{3/2} - 1) - \frac{9\pi}{4}$ (c) $\pi/8$

31. 48 33. $\frac{2}{3}$ 35. $\frac{3}{2}$ - sec 1 37. $\frac{5}{2}$ 39. $\frac{52}{3}$ 41. $e^3 - e$

43. área = $\frac{1}{6}$



57. $\frac{\pi}{2}; \operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc tg} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

59. (a) $F(x)$ é 0 se $x = 1$, positiva se $x > 1$ e negativa se $x < 1$

(b) $F(x)$ é 0 se $x = -1$, positiva se $-1 < x \leq 2$

e negativa se $-2 \leq x < -1$

61. (a) $\frac{4}{3}$ (b) $e - 1$ 63. $\frac{3}{10}$ 67. $\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + t + 1$

69. $t^2 - 3t + 7$ 71. 12 m, 20 m 73. $\frac{1}{3}m, \frac{10}{3} - 2\sqrt{2}$ m

75. deslocamento = -6 m; distância = $\frac{13}{2}$ m

77. (a) 5 s (b) 200 m 79. $v_0/2$ pés/s 81. $\frac{121}{5}$ 83. $\frac{2}{3}$ 85. 0

87. $2 - 2/\sqrt{e}$ 89. (a) e^2 (b) $e^{1/3}$

► Capítulo 5 Estabelecendo Conexões (Página 412)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

1. (b) $b^2 - a^2$ 2. $16/3$ 3. 12

4. (a) a soma para f é m vezes a soma para g

(b) $m \int_0^1 g(x) dx = \int_0^m f(x) du$

5. (a) as duas somas são iguais (b) $\int_2^3 g(x) dx = \int_4^9 f(u) du$

► Exercícios 6.1 (página 419)

1. 9/2 3. 1 5. (a) 4/3 (b) 4/3 7. 49/192 9. 1/2 11. $\sqrt{2}$

13. $\frac{1}{2}$ 15. $\pi - 1$ 17. 24 19. 37/12 21. $4\sqrt{2}$ 23. $\frac{1}{2}$

25. $\ln 2 - \frac{1}{2}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

27. Verdadeira; usa a Fórmula (1) para a área com $f(x) = g(x) + c$.

29. Verdadeira; o integrando deve tomar valores positivos e, também, negativos. Pelo Teorema do Valor Intermediário, o integrando deve ser igual a 0 em algum lugar do intervalo $[a, b]$.

31. $k \approx 0,9973$ 33. 9152/105 35. $9/\sqrt[3]{4}$

37. (a) 4/3 (b) $m = 2 - \sqrt[3]{4}$ 39. 1,180898334

41. 0,4814; 2,3639; 1,1897 43. 2,54270

45. A vantagem do carro 1 sobre o carro 2 no instante $t = 0$.
 47. aumento da população de 1960 a 2010 49. $a^2/6$

► Exercícios 6.2 (página 428)

1. 8π 3. $13\pi/6$ 5. $(1 - \sqrt{2}/2)\pi$ 7. 8π 9. $32/5$ 11. $256\pi/3$
 13. $2048\pi/15$ 15. 4π 17. $\pi^2/4$ 19. $3/5$ 21. 2π
 23. $72\pi/5$ 25. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

27. Falsa; veja os sólidos associados aos Exercícios 9 e 10.

29. Falsa; veja o Exemplo 2, em que a área da seção transversal é uma função linear de x .

31. $4\pi ab^2/3$ 33. π 35. $\int_a^b \pi[f(x) - k]^2 dx$ 37. (b) $40\pi/3$
 39. $648\pi/5$ 41. $\pi/2$ 43. $\pi/15$ 45. 40.000π pés³ 47. $1/30$

49. (a) $2\pi/3$ (b) $16/3$ (c) $4\sqrt{3}/3$ 51. $0,710172176$ 53. π

57. (b) esquerda $\approx 11,157$; direita $\approx 11,771$; $V \approx$ média $= 11,464$ cm³

59. $V = \begin{cases} 3\pi h^2, & 0 \leq h < 2 \\ \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3 - 4), & 2 \leq h \leq 4 \end{cases}$ 61. $\frac{2}{3}r^3 \operatorname{tg} \theta$ 63. $16r^3/3$

► Exercícios 6.3 (página 436)

1. $15\pi/2$ 3. $\pi/3$ 5. $2\pi/5$ 7. 4π 9. $20\pi/3$ 11. $\pi \ln 2$ 13. $\pi/2$
 15. $\pi/5$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

17. Verdadeira; isso é uma reformulação da Fórmula (1).

19. Verdadeira; ver a Fórmula (2).

21. $2\pi e^2$ 23. 1,73680 25. (a) $7\pi/30$ (b) mais fácil

27. (a) $\int_0^1 2\pi(1-x)x dx$ (b) $\int_0^1 2\pi(1+y)(1-y) dy$

29. $7\pi/4$ 31. $\pi r^2 h/3$ 33. $V = \frac{4}{3}\pi(L/2)^3$ 35. $b = 1$

► Exercícios 6.4 (página 441)

1. $L = \sqrt{5}$ 3. $(85\sqrt{85} - 8)/243$ 5. $\frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$ 7. $\frac{17}{6}$

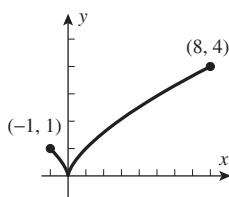
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

9. Falsa; f' não está definida nas extremidades ± 1 .

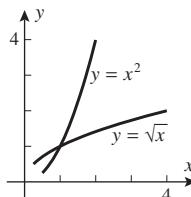
11. Verdadeira; se $f(x) = mx + c$ em $[a, b]$, então $L = \sqrt{1 + m^2}(b - a)$, o que é igual à soma dada.

13. $L = \ln(1 + \sqrt{2})$

15. (a) (b) dy/dx não existe em $x = 0$. (c) $L = (13\sqrt{13} + 80\sqrt{10} - 16)/27$



17. (a) São imagens espelhadas pela reta $y = x$.



- (b) $\int_{1/2}^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$, $\int_{1/4}^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$
 $x = \sqrt{u}$ transforma a primeira integral na segunda.

- (c) $\int_{1/4}^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy$, $\int_{1/2}^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy$

- (d) 4,0724; 4,0716

- (e) A primeira: ambas são subavaliações do comprimento de arco, de modo que a maior é mais precisa.

- (f) 4,0724; 4,0662 (g) 4,0729

19. (a) São imagens espelhadas pela reta $y = x$.

(b) $\int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$,

$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{(1+x^2)^2}} dx$,
 $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$ transforma a primeira integral na segunda.

(c) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{(1+y^2)^2}} dy$,

- (d) 2,0566; 2,0567

- (e) A segunda: ambas são subavaliações do comprimento de arco, de modo que a maior é mais precisa. (f) 2,0509; 2,0571 (g) 2,0570

23. 4,354 pés 25. 196,31 jardas 27. $(2\sqrt{2} - 1)/3$

29. π 31. $L = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$ 33. (b) 9,69 (c) 5,16 cm

► Exercícios 6.5 (página 447)

1. $35\pi\sqrt{2}$ 3. 8π 5. $40\pi\sqrt{82}$ 7. 24π 9. $16\pi/9$

11. $16.911\pi/1.024$ 13. $S \approx 14,42$ 15. $S \approx 22,94$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

17. Verdadeira; veja a Fórmula (1) com $r_1 = 0$, $r_2 = r$, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$.

19. Verdadeira; a soma é telescópica e igual à área de um cilindro.

17. 14,39 23. $S = \int_a^b 2\pi[f(x) + k]\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

33. $\frac{8}{3}\pi(17\sqrt{17} - 1)$ 35. $\frac{\pi}{24}(17\sqrt{17} - 1)$

► Exercícios 6.6 (página 456)

1. $7,5 \text{ N}\cdot\text{m}$ 3. $d = 7/4$ 5. 100 pés-lb 7. 160 J 9. 20 lb/pés

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

11. Falsa; o trabalho realizado é o mesmo.

13. Verdadeira; joules. 15. 47.385π pés-lb 17. 261.600 J

19. (a) 277.992 J (b) hp do motor = 0,468 21. 75.000 pés · lb

23. 120.000 pés-toneladas 25. (a) $2.400.000.000/x^2 \text{ lb}$

- (b) $(9,6 \times 10^{10})/(x + 4.000)^2 \text{ lb}$ (c) $2.5344 \times 10^{10} \text{ pés-lb}$

27. $v_f = 100 \text{ m/s}$

29. (a) decresce de $4,5 \times 10^{14} \text{ J}$ (b) $\approx 0,107$ (c) $\approx 8,24$ bombas

► Exercícios 6.7 (página 465)

1. (a) positiva: m_2 está no fulcro, portanto, pode ser ignorada; as massas m_1 e m_3 estão equidistantes da posição 5, mas $m_1 < m_3$, portanto a viga gira no sentido horário. (b) o fulcro deveria ser colocado $\frac{50}{7}$ unidades à direita de m_1 .

3. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 5. $(1, \frac{1}{2})$ 7. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 9. $(\frac{5}{14}, \frac{38}{35})$ 11. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

13. $(-\frac{1}{2}, 4)$ 15. $(\frac{1}{2}, \frac{8}{5})$ 17. $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$ 19. $(\frac{49}{48}, \frac{7}{3} - \ln 2)$

23. $\frac{4}{3}; (\frac{3}{5}, \frac{3}{8})$ 25. 3; $(0, \frac{2}{3})$ 27. 8; $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$

29. $\ln 4 - 1; \left(\frac{4 \ln 4 - 3}{4 \ln 4 - 4}, \frac{(\ln 2)^2 + 1 - \ln 4}{\ln 4 - 1} \right)$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

31. Verdadeira; use simetria. 33. Verdadeira; use simetria.

35. $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ 37. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{(a+2b)c}{3(a+b)}\right)$

41. $2\pi^2 abk$ 43. $(a/3, b/3)$

► Exercícios 6.8 (página 472)

1. (a) $F = 31.200 \text{ lb}$; $P = 312 \text{ lb/pés}^2$

- (b) $F = 2.452.500 \text{ N}$; $P = 98,1 \text{ kPa}$

3. $499,2 \text{ lb}$ 5. $8,175 \times 10^5 \text{ N}$ 7. $1.098.720 \text{ N}$ 9. sim 11. $\rho a^3/\sqrt{2} \text{ lb}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

13. Verdadeira; isso é uma consequência das desigualdades (4).
15. Falsa; pela Equação (7), a força pode ser arbitrariamente grande com um volume dado de água.
17. 61.748 lb
19. $9.81 \times 10^9 \text{ N}$
21. (b) $80 \rho_0 \text{ lb/min}$

► Exercícios 6.9 (página 482)

1. (a) $\approx 10,0179$
- (b) $\approx 3,7622$
- (c) $15/17 \approx 0,8824$
- (d) $\approx -1,4436$
- (e) $\approx 1,7627$
- (f) $\approx 0,9730$
3. (a) $\frac{4}{3}$
- (b) $\frac{5}{4}$
- (c) $\frac{312}{313}$
- (d) $-\frac{63}{16}$

5.	$\operatorname{senh} x_0$	$\cosh x_0$	$\operatorname{tgh} x_0$	$\operatorname{cotgh} x_0$	$\operatorname{sech} x_0$	$\operatorname{cossech} x_0$
(a)	2	$\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$	$\sqrt{5}/2$	$1/\sqrt{5}$	1/2
(b)	$3/4$	$5/4$	$3/5$	$5/3$	$4/5$	$4/3$
(c)	$4/3$	$5/3$	$4/5$	$5/4$	$3/5$	$3/4$

9. $4 \cosh(4x - 8)$
11. $-\frac{1}{x} \operatorname{cossech}^2(\ln x)$
13. $\frac{1}{x^2} \operatorname{cossech}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{cotgh}\left(\frac{1}{x}\right)$
15. $\frac{2 + 5 \cosh(5x) \operatorname{senh}(5x)}{\sqrt{4x + \cosh^2(5x)}}$
17. $x^{5/2} \operatorname{tgh}(\sqrt{x}) \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) + 3x^2 \operatorname{tgh}^2(\sqrt{x})$
19. $\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$
21. $\frac{1}{(\operatorname{arc cosh} x)\sqrt{x^2-1}}$
23. $-(\operatorname{arc tgh} x)^{-2}$
25. $\frac{\operatorname{senh} x}{|\operatorname{senh} x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
27. $-\frac{e^x}{2x\sqrt{1-x}} + e^x \operatorname{arc sech} x$
29. $\frac{1}{7} \operatorname{senh}^7 x + C$
31. $\frac{2}{3} (\operatorname{tgh} x)^{3/2} + C$
33. $\ln(\cosh x) + C$
35. $37/375$
37. $\frac{1}{3} \operatorname{arc senh} 3x + C$
39. $-\operatorname{arc sech}(e^x) + C$
41. $-\operatorname{arc cossech}|2x| + C$
43. $\frac{1}{2} \ln 3$

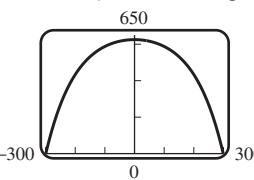
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

45. Verdadeiro; ver Figura 6.9.1
47. Verdadeiro; $f(x) = \operatorname{senh} x$
49. $16/9$
51. 5π
53. $\frac{3}{4}$

55. (a) $+\infty$
- (b) $-\infty$
- (c) 1
- (d) -1
- (e) $+\infty$
- (f) $+\infty$

63. $|u| < 1$: $\operatorname{arc tgh} u + C$; $|u| > 1$: $\operatorname{arc tgh}(1/u) + C$

65. (a) $\ln 2$
- (b) $1/2$
71. 405,9 pés

73. (a) 

 (b) 1480,2798 pés
 (c) $\pm 283,6249$ pés
 (d) 82°

75. (b) 14,44 m
- (c) $15 \ln 3 \approx 16,48 \text{ m}$

► Capítulo 6 Exercícios de Revisão (página 485)

7. (a) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx + \int_b^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^d (f(x) - g(x)) dx$
- (b) $11/4$
9. $4.352\pi/105$
11. $3/2 + \ln 4$
13. 9
15. $\frac{\pi}{6} (65^{3/2} - 37^{3/2})$
17. $3\sqrt{3}$
19. (a) $W = \frac{1}{16} \text{ J}$
- (b) 5 m
21. $(\frac{8}{5}, 0)$
23. (a) $F = \int_0^1 \rho x^3 dx \text{ N}$
- (b) $F = \int_1^4 \rho(1+x)2x dx \text{ lb/pés}^2$
- (c) $F = \int_{-10}^0 9.810|y|2\sqrt{\frac{125}{8}(y+10)} dy \text{ N}$

► Capítulo 6 Estabelecendo conexões (página 487)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

1. (a) πA_1
- (b) $a = \frac{A_1}{2A_2}$
2. 1.010.807 pés·lb
3. $\int_0^a 2\pi r f(r) dr$

► Exercícios 7.1 (página 491)

1. $-2(x-2)4 + C$
3. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(x^2) + C$
5. $-\frac{1}{3} \ln(2 + \cos 3x) + C$
7. $\cosh(e^x) + C$
9. $e^{\operatorname{tg} x} + C$
11. $-\frac{1}{30} \cos^6 5x + C$
13. $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 4}) + C$
15. $2e^{\sqrt{x-1}} + C$
17. $2 \operatorname{senh} \sqrt{x} + C$
19. $-\frac{2}{\ln 3} 3^{-\sqrt{x}} + C$
21. $\frac{1}{2} \operatorname{cotgh} \frac{2}{x} + C$
23. $-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+e^{-x}}{2-e^{-x}} \right| + C$
25. $\operatorname{arc sen}(e^x) + C$
27. $-\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$
29. $-\frac{1}{\ln 16} 4^{-x^2} + C$
31. (a) $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$
- (b) $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$
33. (b) $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
- (c) $\ln \left| \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + C$

► Exercícios 7.2 (página 498)

1. $-e^{-2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$
 3. $x^2 e^x - 2xe^x - 2e^x + C$
 5. $-\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x + C$
 7. $x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$
 9. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$
 11. $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$
 13. $x \ln(3x-2) - x - \frac{2}{3} \ln(3x-2) + C$
 15. $x \operatorname{arc sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$
 17. $x \operatorname{arc tg}(3x) - \frac{1}{6} \ln(1+9x^2) + C$
 19. $\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$
 21. $(x/2)[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
 23. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$
 25. $\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$
 27. $\frac{1}{4} (3e^4 + 1)$
 29. $(2e^3 + 1)/9$
 31. $3 \ln 3 - 2$
 33. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$
 35. $-\pi/2$
 37. $\frac{1}{3} (2\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2)$
- As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.
39. Verdadeira; ver a subseção “Guia de Integração por Partes”.
 41. Falsa; e^x não é um fator do integrando.
 43. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$
 45. $-(3x^2 + 5x + 7)e^{-x} + C$
 49. $(4x^3 - 6x) \operatorname{sen} 2x - (2x^4 - 6x^2 + 3) \cos 2x + C$
 51. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \operatorname{cos} bx) + C$
 53. (a) $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$
 55. (a) $A = 1$
 - (b) $V = \pi(e-2)$
 57. $V = 2\pi^2$
 59. $\pi^3 - 6\pi$
 61. (a) $-\frac{1}{4} \operatorname{sen}^3 x \operatorname{cos} x - \frac{3}{8} \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \frac{3}{8} x + C$
 - (b) $8/15$
 65. (a) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$
 - (b) $\frac{1}{3} \sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C$
 - (c) $x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$
 69. $(x+1) \ln(x+1) - x + C$
 71. $\frac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arc tg} x - \frac{1}{2} x + C$

► Exercícios 7.3 (página 506)

1. $-\frac{1}{4} \cos^4 x + C$
3. $\frac{\theta}{2} - \frac{1}{20} \operatorname{sen} 10\theta + C$
5. $\frac{1}{3a} \cos^3 a\theta - \cos a\theta + C$
7. $\frac{1}{2a} \operatorname{sen}^2 ax + C$
9. $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 t + C$
11. $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$
13. $-\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C$
15. $-\frac{1}{3} \cos(3x/2) - \cos(x/2) + C$
17. 2/3
19. 0
21. 7/24
23. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x-1) + C$
25. $\ln |\operatorname{cos}(e^{-x})| + C$
27. $\frac{1}{4} \ln |\operatorname{sec} 4x + \operatorname{tg} 4x| + C$
29. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$
31. $\frac{1}{16} \sec^4 4x + C$
33. $\frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C$
35. $\frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x - \frac{5}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \ln |\operatorname{sec} x + \operatorname{tg} x| + C$
37. $\frac{1}{3} \sec^3 t + C$
39. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$
41. $\frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 4x + \frac{1}{4} \ln |\operatorname{cos} 4x| + C$
43. $\frac{2}{3} \operatorname{tg}^{3/2} x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^{7/2} x + C$
45. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$
47. $-\frac{1}{2} + \ln 2$
49. $-\frac{1}{5} \operatorname{cossec}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{cossec}^3 x + C$
51. $-\frac{1}{2} \operatorname{cossec}^2 x - \ln |\operatorname{sen} x| + C$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

53. Verdadeira; $\int \sin^5 x \cos^8 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^8 x dx = -\int (1 - u^2)^2 u^8 du = -\int (u^8 - 2u^{10} + u^{12}) du$
55. Falsa; use essa identidade para ajudar a calcular as integrais da forma $\sin mx \cos nx dx$.
59. $L = \ln(\sqrt{2} + 1)$ 61. $V = \pi/2$
67. $-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} \right] + C$
65. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $3\pi/16$ (c) $\frac{8}{15}$ (d) $5\pi/32$

► Exercícios 7.4 (página 513)

1. $2 \arcsin(x/2) + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$ 3. $8 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C$
5. $\frac{1}{16} \arctan(x/2) + \frac{x}{8(4+x^2)} + C$ 7. $\sqrt{x^2-9} - 3 \arcsin(x/3) + C$
9. $-(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ 11. $\frac{\sqrt{9x^2-4}}{4x} + C$ 13. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$
15. $\ln|\sqrt{x^2-9}+x| + C$ 17. $\frac{-x}{9\sqrt{4x^2-9}} + C$
19. $\frac{1}{2} \arcsin(e^x) + \frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C$ 21. $2/3$ 23. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$
25. $\frac{10\sqrt{3}+18}{243}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

27. Verdadeira; com a restrição $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, essa substituição dá $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$ e $dx = a \cos \theta d\theta$.
29. Falsa; use a substituição $x = a \sec \theta$ com $0 \leq \theta < \pi/2$ ($x \geq a$) ou $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ($x \leq -a$).
31. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$

33. $L = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$ 35. $S = \frac{\pi}{32} [18\sqrt{5} - \ln(2+\sqrt{5})]$

37. $\arctan(x-2) + C$ 39. $\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

41. $\ln(x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}) + C$

43. $2 \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + C$

45. $\frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)\right) + C$ 47. $\pi/6$

49. $u = \sin^2 x, \frac{1}{2} \int \sqrt{1-u^2} du$
 $= \frac{1}{4} [\sin^2 x \sqrt{1-\sin^4 x} + \arcsin(\sin^2 x)] + C$

51. (a) $\operatorname{arsen}(x/3) + C$ (b) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right) + C$

► Exercícios 7.5 (página 521)

1. $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}$ 3. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$
5. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$ 7. $\frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)^2}$
9. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| + C$ 11. $\frac{5}{2} \ln |2x-1| + 3 \ln |x+4| + C$
13. $\ln \left| \frac{x(x+3)^2}{x-3} \right| + C$ 15. $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+3| + C$
17. $3x + 12 \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$
19. $\ln|x^2-3x-10| + C$
21. $x + \frac{x^3}{3} + \ln \left| \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2} \right| + C$
23. $3 \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$
25. $\frac{2}{x-3} + \ln|x-3| + \ln|x+1| + C$

27. $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \ln|x+1| + C$

29. $-\frac{7}{34} \ln|4x-1| + \frac{6}{17} \ln(x^2+1) + \frac{3}{17} \arctan x + C$

31. $3 \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C$

33. $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

35. Verdadeira; as frações parciais reescrevem funções racionais próprias

$P(x)/Q(x)$ como uma soma de temos do tipo $\frac{A}{(Bx+C)^k}$ e/ou $\frac{Dx+E}{(Fx^2+Gx+H)^k}$.

37. Verdadeira; $\frac{2x+3}{x^2} = \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$.

39. $\frac{1}{6} \ln \left(\frac{1-\sin \theta}{5+\sin \theta} \right) + C$ 41. $e^x - 2 \arctan\left(\frac{1}{2}e^x\right) + C$

43. $V = \pi \left(\frac{19}{5} - \frac{9}{4} \ln 5 \right)$ 45. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{x^2+2x+3} + C$

47. $\frac{1}{8} \ln|x-1| - \frac{1}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{12} \ln|x-3| - \frac{1}{120} \ln|x+3| + C$

► Exercícios 7.6 (página 531)

1. Fórmula (60): $\frac{4}{3}x + \frac{4}{9} \ln|3x-1| + C$

3. Fórmula (65): $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{5+2x} \right| + C$

5. Fórmula (102): $\frac{1}{5}(x-1)(2x+3)^{3/2} + C$

7. Fórmula (108): $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4-3x}-2}{\sqrt{4-3x}+2} \right| + C$

9. Fórmula (69): $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x+4}{x-4} \right| + C$

11. Fórmula (73): $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-3} - \frac{3}{2} \ln|x+\sqrt{x^2-3}| + C$

13. Fórmula (95): $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+4} - 2 \ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$

15. Fórmula (74): $\frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin\frac{x}{3} + C$

17. Fórmula (79): $\sqrt{4-x^2} - 2 \ln \left| \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C$

19. Fórmula (38): $-\frac{\sin 7x}{14} + \frac{1}{2} \sin x + C$

21. Fórmula (50): $\frac{x^4}{16} [4 \ln x - 1] + C$

23. Fórmula (42): $\frac{e^{-2x}}{13} [-2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)] + C$

25. Fórmula (62): $\frac{1}{2} \int \frac{u du}{(4-3u)^2} = \frac{1}{18} \left[\frac{4}{4-3e^{2x}} + \ln|4-3e^{2x}| \right] + C$

27. Fórmula (68): $\frac{2}{3} \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right) + C$

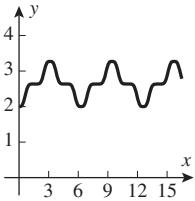
29. Fórmula (76): $\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{2} \ln|2x+\sqrt{4x^2-9}| + C$

31. Fórmula (81): $\frac{1}{4} \int \frac{u^2}{\sqrt{2-u^2}} du = -\frac{1}{4} x^2 \sqrt{2-4x^4} + \frac{1}{4} \arcsin(\sqrt{2x^2}) + C$

33. Fórmula (26): $\int \sin^2 u du = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \sin(2 \ln x) + C$

35. Fórmula (51): $\frac{1}{4} \int ue^u du = \frac{1}{4} (-2x-1)e^{-2x} + C$

37. $u = \operatorname{sen} 3x$, Fórmula (67): $\frac{1}{3} \int \frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} 3x+1} + \ln \left| \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 3x+1} \right| \right) + C$

- 39.** $u = 4x^2$, Fórmula (70): $\frac{1}{8} \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right| + C$
- 41.** $u = 2e^x$, Fórmula (74): $\frac{1}{2} \int \sqrt{3 - u^2} du = \frac{1}{2} e^x \sqrt{3 - 4e^{2x}} + \frac{3}{4} \arcsen \left(\frac{2e^x}{\sqrt{3}} \right) + C$
- 43.** $u = 3x$, Fórmula (112): $\frac{1}{3} \int \sqrt{\frac{5}{3}u - u^2} du = \frac{18x - 5}{36} \sqrt{5x - 9x^2} + \frac{25}{216} \arcsen \left(\frac{18x - 5}{5} \right) + C$
- 45.** $u = 2x$, Fórmula (44): $\int u \sen u du = \sen 2x - 2x \cos 2x + C$
- 47.** $u = -\sqrt{x}$, Fórmula (51): $2 \int ue^u du = -2(\sqrt{x} + 1)e^{-\sqrt{x}} + C$
- 49.** $x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 16$, $u = x + 3$, Fórmula (70):
 $\int \frac{du}{u^2 - 16} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 7} \right| + C$
- 51.** $x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9$; $u = x - 2$, Fórmula (77):
 $\int \frac{u + 2}{\sqrt{9 - u^2}} du = -\sqrt{5 + 4x - x^2} + 2 \arcsen \left(\frac{x - 2}{3} \right) + C$
- 53.** $u = \sqrt{x - 2}$, $\frac{2}{3}(x - 2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x - 2)^{3/2} + C$
- 55.** $u = \sqrt{x^3 + 1}$,
 $\frac{2}{3} \int u^2(u^2 - 1) du = \frac{2}{15}(x^3 + 1)^{5/2} - \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + C$
- 57.** $u = x^{1/3}$, $\int \frac{3u^2}{u^3 - u} du = \frac{3}{2} \ln |x^{2/3} - 1| + C$
- 59.** $u = x^{1/4}$, $4 \int \frac{1}{u(1-u)} du = 4 \ln \frac{x^{1/4}}{|1-x^{1/4}|} + C$
- 61.** $u = x^{1/6}$,
 $6 \int \frac{u^3}{u-1} du = 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6 \ln |x^{1/6} - 1| + C$
- 63.** $u = \sqrt{1+x^2}$, $\int (u^2 - 1) du = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} - (1+x^2)^{1/2} + C$
- 65.** $\int \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1}{u+1} du = \ln |\tg(x/2) + 1| + C$
- 67.** $\int \frac{d\theta}{1 - \cos \theta} = \int \frac{1}{u^2} du = -\cotg(\theta/2) + C$
- 69.** $\int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1-u^2}{2u} du = \frac{1}{2} \ln |\tg(x/2)| - \frac{1}{4} \tg^2(x/2) + C$
- 71.** $x = \frac{4e^2}{1+e^2}$ **73.** $A = 6 + \frac{25}{2} \arcsen \frac{4}{5}$ **75.** $A = \frac{1}{40} \ln 9$
- 77.** $V = \pi(\pi - 2)$ **79.** $V = 2\pi(1 - 4e^{-3})$
- 81.** $L = \sqrt{65} + \frac{1}{8} \ln(8 + \sqrt{65})$ **83.** $S = 2\pi \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$
- 85.** 
- 91.** $\frac{1}{31} \cos^{31} x \sen^{31} x + C$
- 93.** $-\frac{1}{9} \ln |1 + x^{-9}| + C$

► **Exercícios 7.7 (página 544)**

- 1.** $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \frac{14}{3} \approx 4,66667$
- (a) $M_{10} = 4,66760$; $|E_M| \approx 0,000933996$
- (b) $T_{10} = 4,66480$; $|E_T| \approx 0,00187099$
- (c) $S_{20} = 4,66667$; $|E_S| \approx 9,98365 \times 10^{-7}$

- 3.** $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$
- (a) $M_{10} = 1,00103$; $|E_M| \approx 0,00102882$
- (b) $T_{10} = 0,997943$; $|E_T| \approx 0,00205701$
- (c) $S_{20} = 1,00000$; $|E_S| \approx 2,11547 \times 10^{-7}$
- 5.** $\int_1^3 e^{-2x} dx = \frac{-1 + e^4}{2e^6} \approx 0,0664283$
- (a) $M_{10} = 0,0659875$; $|E_M| \approx 0,000440797$
- (b) $T_{10} = 0,0673116$; $|E_T| \approx 0,000883357$
- (c) $S_{20} = 0,0664289$; $|E_S| \approx 5,87673 \times 10^{-7}$
- 7.** (a) $|E_M| \leq \frac{9}{3.200} = 0,0028125$
- (b) $|E_T| \leq \frac{9}{1.600} = 0,005625$
- (c) $|E_S| \leq \frac{81}{10.240.000} \approx 7,91016 \times 10^{-6}$
- 9.** (a) $|E_M| \leq \frac{\pi^3}{19.200} \approx 0,00161491$
- (b) $|E_T| \leq \frac{\pi^3}{9.600} \approx 0,00322982$
- (c) $|E_S| \leq \frac{\pi^5}{921.600.000} \approx 3,32053 \times 10^{-7}$
- 11.** (a) $|E_M| \leq \frac{1}{75e^2} \approx 0,00180447$
- (b) $|E_T| \leq \frac{2}{75e^2} \approx 0,00360894$
- (c) $|E_S| \leq \frac{1}{56.250e^2} \approx 2,40596 \times 10^{-6}$
- 13.** (a) $n = 24$ (b) $n = 34$ (c) $n = 8$
- 15.** (a) $n = 13$ (b) $n = 18$ (c) $n = 4$
- 17.** (a) $n = 43$ (b) $n = 61$ (c) $n = 8$
- As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.
- 19.** Falsa; T_n é a média de L_n e R_n .
- 21.** Falsa; $S_{50} = \frac{2}{3}M_{25} + \frac{1}{3}T_{25}$
- 23.** $g(x) = \frac{1}{24}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{13}{12}$
- 25.** $S_{10} = 1,49367$; $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx 1,49365$
- 27.** $S_{10} = 3,80678$; $\int_{-1}^2 x\sqrt{1+x^3} dx \approx 3,80554$
- 29.** $S_{10} = 0,904524$; $\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 0,904524$
- 31.** (a) $M_{10} = 3,14243$; erro $E_M \approx -0,000833331$
(b) $T_{10} = 3,13993$; erro $E_T \approx 0,00166666$
(c) $S_{20} = 3,14159$; erro $E_S \approx 6,20008 \times 10^{-10}$
- 33.** $S_{14} = 0,693147984$, $|E_S| \approx 0,000000803 = 8,03 \times 10^{-7}$
- 35.** $n = 116$ **39.** 3,82019 **41.** 3,975 pés **43.** 37,9 milhas **45.** 9,3 litros
- 47.** (a) $\max |f''(x)| \approx 3,844880$ (b) $n = 18$ (c) 0,904741
- 49.** (a) O valor máximo de $|f(4)(x)|$ é, aproximadamente, 12,4282.
(b) $n = 6$ (c) $S_6 = 0,983347$

► **Exercícios 7.8 (página 554)**

- 1.** (a) imprópria; descontinuidade infinita em $x = 3$ (b) não imprópria
(c) imprópria, descontinuidade infinita em $x = 0$
(d) imprópria; intervalo infinito de integração
(e) imprópria; intervalo infinito de integração e descontinuidade infinita em $x = 1$ (f) não imprópria
- 3.** $\frac{1}{2}$ **5.** $\ln 2$ **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $-\frac{1}{4}$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** divergente **15.** 0
- 17.** divergente **19.** divergente **21.** $\pi/2$ **23.** 1 **25.** divergente
- 27.** $\frac{9}{2}$ **29.** divergente **31.** $\pi/2$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

33. Verdadeira; ver Teorema 7.8.2 com $p = \frac{4}{3} > 1$.
 35. Falsa; o integrando $\frac{1}{x(x-3)}$ é contínuo em $[1, 2]$.
 37. 2 39. 2 41. $\frac{1}{2}$
 43. (a) 2,726585 (b) 2,804364 (c) 0,219384 (d) 0,504067 45. 12
 47. -1 49. $\frac{1}{3}$ 51. (a) $V = \pi/2$ (b) $S = \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$
 53. (b) $1/e$ (c) É convergente. 55. $V = \pi$
 59. $\frac{2\pi NI}{kr} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)$ 61. Método 1
 63. (b) $2,4 \times 10^7$ mi·lb 65. (a) $\frac{1}{s^2}$ (b) $\frac{2}{s^3}$ (c) $\frac{e^{-3s}}{s}$
 69. (a) 1,047 73. 1,809

► Capítulo 7 Exercícios de Revisão (página 557)

1. $\frac{2}{27}(4+9x)^{3/2} + C$ 3. $-\frac{2}{3}\cos^{3/2}\theta + C$ 5. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3(x^2) + C$
 7. (a) $2\arcsen(\sqrt{x/2}) + C$; $-2\arcsen(\sqrt{2-x}/\sqrt{2}) + C$;
 $\arcsen(x-1) + C$
 9. $-xe^{-x} - e^{-x} + C$ 11. $x\ln(2x+3) - x + \frac{3}{2}\ln(2x+3) + C$
 13. $(4x^4 - 12x^2 + 6)\sen(2x) + (8x^3 - 12x)\cos(2x) + C$
 15. $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{20}\sen 10\theta + C$ 17. $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$
 19. $-\frac{1}{8}\sen^3(2x)\cos 2x - \frac{3}{16}\cos 2x \sen 2x + \frac{3}{8}x + C$
 21. $\frac{9}{2}\arcsen(x/3) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$ 23. $\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$
 25. $\frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} - \frac{9\ln(|\sqrt{x^2 + 9} + x|)}{2} + C$ 27. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right| + C$
 29. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6\ln|x+2| + C$
 31. $\ln|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + C$
 33. (a) $\ln\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x|} + C$, $|x| > 1$ (b) $\ln\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C$, $0 < |x| < 1$
 (c) $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$, $x \neq 0, \pm 1$
 35. Fórmula (40): $-\frac{\cos 16x}{32} + \frac{\cos 2x}{4} + C$
 37. Fórmula (113): $\frac{1}{24}(8x^2 - 2x - 3)\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{16}\arcsen(2x-1) + C$
 39. Fórmula (28): $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - x + C$
 41. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17157$
 (a) $M_{10} = 1,17138$; $|E_M| \approx 0,000190169$
 (b) $T_{10} = 1,17195$; $|E_T| \approx 0,000380588$
 (c) $S_{20} = 1,17157$; $|E_S| \approx 8,35151 \times 10^{-8}$
 43. (a) $|E_M| \leq \frac{1}{1,600\sqrt{2}} \approx 0,000441942$
 (b) $|E_T| \leq \frac{1}{800\sqrt{2}} \approx 0,000883883$
 (c) $|E_S| \leq \frac{7}{15,360,000\sqrt{2}} \approx 3,22249 \times 10^{-7}$
 45. (a) $n = 22$ (b) $n = 30$ (c) $n = 6$ 47. 1 49. 6
 51. e^{-1} 53. $a = \pi/2$ 55. $\frac{x}{3\sqrt{3+x^2}} + C$ 57. $\frac{5}{12} - \frac{1}{2}\ln 2$
 59. $\frac{1}{6}\sen^3 2x - \frac{1}{10}\sen^5 2x + C$
 61. $\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sen 3x + C$
 63. $-\frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{15}\ln|x+2| + \frac{1}{10}\ln|x-3| + C$
 65. $4 - \pi$ 67. $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$ 69. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
 71. $\sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln(\sqrt{x^2+2x+2} + x+1) + C$ 73. $\frac{1}{2(a^2+1)}$

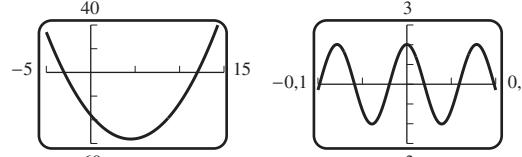
► Capítulo 7 Estabelecendo conexões (página 559)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

3. (a) $\Gamma(1) = 1$ (c) $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(4) = 6$
 5. (b) 1,37078 segundos

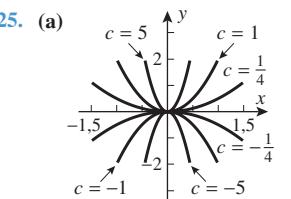
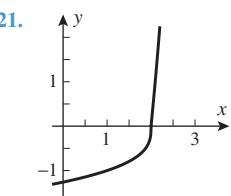
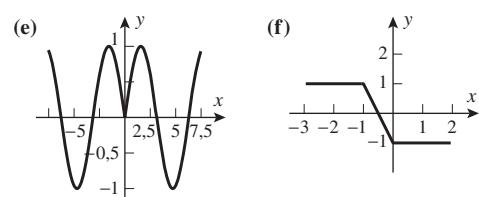
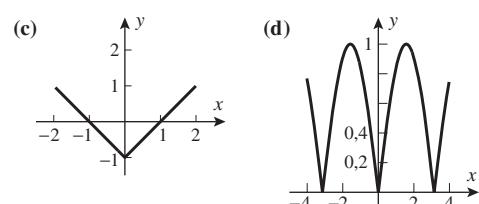
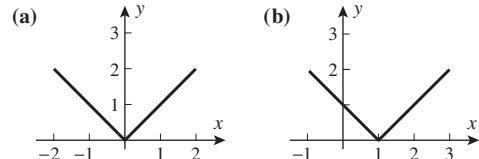
► Exercícios Apêndice A (página A11)

1. (e) 3. (b), (c) 5. $[-3, 3] \times [0, 5]$
 7. $[-5, 14] \times [-60, 40]$ 9. $[-0,1, 0,1] \times [-3, 3]$

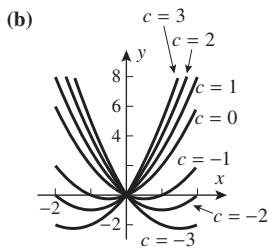


11. $[-400, 1050] \times [-1500000, 10000]$ 13. $[-2, 2] \times [-20, 20]$

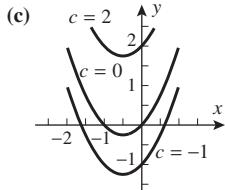
17. (a) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ (b) $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$ (e) não



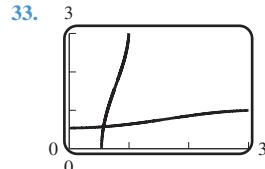
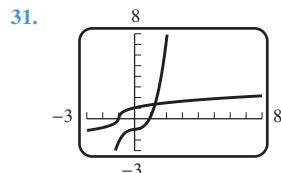
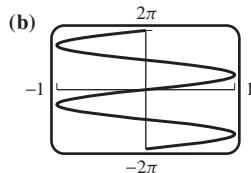
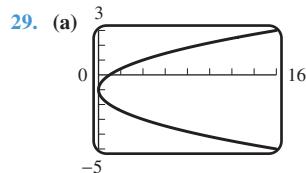
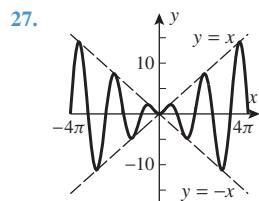
O gráfico é estendido na direção vertical e refletido pelo eixo x se $c < 0$.



O gráfico é transladado de tal modo que seu vértice está na parábola $y = -x^2$.



O gráfico é transladado verticalmente.



35. (a) $x = 4 \cos t, y = 3 \sin t$ (b) $x = -1 + 4 \cos t, y = 2 + 3 \sin t$

► Exercícios Apêndice B (página B11)

1. (a) $\frac{5}{12}\pi$ (b) $\frac{13}{6}\pi$ (c) $\frac{1}{9}\pi$ (d) $\frac{23}{30}\pi$
3. (a) 12° (b) $(270/\pi)^\circ$ (c) 288° (d) 540°

5.

	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	$\sqrt{21}/5$	$2/5$	$\sqrt{21}/2$	$5/\sqrt{21}$	$5/2$	$2/\sqrt{21}$
(b)	$3/4$	$\sqrt{7}/4$	$3/\sqrt{7}$	$4/3$	$4/\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/3$
(c)	$3/\sqrt{10}$	$1/\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}/3$	$\sqrt{10}$	$1/3$

7. $\operatorname{sen} \theta = 3/\sqrt{10}, \cos \theta = 1/\sqrt{10}$ 9. $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{21}/2, \operatorname{cossec} \theta = 5/\sqrt{21}$
11. 1,8

13.

	θ	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	225°	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
(b)	-210°	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(c)	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2	$-1/\sqrt{3}$
(d)	$-3\pi/2$	1	0	—	1	—	0

15.

	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	$4/5$	$3/5$	$4/3$	$5/4$	$5/3$	$3/4$
(b)	$-4/5$	$3/5$	$-4/3$	$-5/4$	$5/3$	$-3/4$
(c)	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(d)	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	-2	$2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(e)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
(f)	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1

17. (a) 1,2679 (b) 3,5753

19.

	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	$a/3$	$\sqrt{9-a^2}/3$	$a/\sqrt{9-a^2}$	$3/a$	$3/\sqrt{9-a^2}$	$\sqrt{9-a^2}/a$
(b)	$a/\sqrt{a^2+25}$	$5/\sqrt{a^2+25}$	$a/5$	$\sqrt{a^2+25}/a$	$\sqrt{a^2+25}/5$	$5/a$
(c)	$\sqrt{a^2-1}/a$	$1/a$	$\sqrt{a^2-1}$	$a/\sqrt{a^2-1}$	a	$1/\sqrt{a^2-1}$

21. (a) $3\pi/4 \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

- (b) $\pi/3 \pm 2n\pi$ e $5\pi/3 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

23. (a) $\pi/6 \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

- (b) $4\pi/3 \pm 2n\pi$ e $5\pi/3 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

25. (a) $3\pi/4 \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

- (b) $\pi/6 \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

27. (a) $\pi/3 \pm 2n\pi$ e $2\pi/3 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

- (b) $\pi/6 \pm 2n\pi$ e $11\pi/6 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

29. $\operatorname{sen} \theta = 2/5, \cos \theta = -\sqrt{21}/5, \operatorname{tg} \theta = -2/\sqrt{21}, \operatorname{cossec} \theta = 5/2, \sec \theta = -5/\sqrt{21}, \operatorname{cotg} \theta = -\sqrt{2}$

31. (a) $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ (b) $\theta = \pi/2 \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

- (c) $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ (d) $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

- (e) $\theta = \pi/2 \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ (f) $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

33. (a) $2\pi/3$ cm (b) $10\pi/3$ cm 35. $\frac{2}{3}$

37. (a) $\frac{2\pi-\theta}{2\pi} R$ (b) $\frac{\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}{2\pi} R$ 39. $\frac{21}{4}\sqrt{3}$ 41. 9,2 pés

43. $h = d(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$ 45. (a) $4\sqrt{5}/9$ (b) $-\frac{1}{9}$

47. $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^3 \theta, \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta$

61. (a) $\cos \theta$ (b) $-\operatorname{sen} \theta$ (c) $-\cos \theta$ (d) $\operatorname{sen} \theta$

69. (a) 153° (b) 45° (c) 117° (d) 89° 71. (a) 60° (b) 117°

► Exercícios Apêndice C (página C6)

1. (a) $q(x) = x^2 + 4x + 2, r(x) = -11x + 6$

- (b) $q(x) = 2x^2 + 4, r(x) = 9$

- (c) $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2, r(x) = 2x + 1$

3. (a) $q(x) = 3x^2 + 6x + 8, r(x) = 15$

- (b) $q(x) = x^3 - 5x^2 + 20x - 100, r(x) = 504$

- (c) $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, r(x) = 0$

- 5.
- | x | 0 | 1 | -3 | 7 |
|------|----|----|-----|-------|
| p(x) | -4 | -3 | 101 | 5.001 |

7. (a) $q(x) = x^2 + 6x + 13, r = 20$ (b) $q(x) = x^2 + 3x - 2, r = -4$

9. (a) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

- (b) $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}$ (c) $\pm 1, \pm 17$

11. $(x+1)(x-1)(x-2)$ 13. $(x+3)^3(x+1)$

15. $(x+3)(x+2)(x+1)^2(x-3)$ 17. -3 19. $-2, -\frac{2}{3}, -1 \pm \sqrt{3}$

21. $-2, 2, 3$ 23. 2, 5 25. 7 cm

ÍNDICE

A

- Abel, Niels Henrik, 297
aceleração, 290
 centrípeta, 903
 componente tangencial escalar/vetorial da, 886
 componentes normal e tangencial da, 885-888
 constante, 378-380
 devida à gravidade, 127, 380
 em movimento curvilíneo, 882
 em movimento retilíneo, 290
 instantânea, 290
 sinal da, 291
 uniforme, 378-380
 vetor de, 883
adição
 de funções, 15, 16
 fórmulas do seno e cosseno, B8
afélio, 760, 900
Agnesi, Maria, 841, 847
ajuste de curvas, 987
alcance horizontal, 894
Alexeev, Vasili, 450
Álgebra Linear, 519, 795
altura
 de cilindro reto, 422
 de cunha cilíndrica, 1048
amplitude
 de corrente alternada, 395
 do movimento harmônico simples, 180
 do seno e cosseno, 33
análise diofantina, 303
análise marginal, 283
Análise Numérica, 540, 672
Anderson, Paul, 450
ângulo central de cunha cilíndrica, 1048
ângulo negativo, B1
ângulo(s), B1-B3
 de inclinação, B11
 em posição canônica, B4
 em sistemas de coordenadas retangulares, B4-B6
entre planos, 816
entre vetores, 786-787
obtendo de funções trigonométricas, B10
 polar, 706
 positivo, B1
ângulos de direção, 787-788
antena parabólica, 743
antiderivação, 320, 323
 ver também integrais indefinidas
antiderivada, 322, 323
 de função vetorial, 854
antidiferenciação, 320, 323
 ver também integrais indefinidas
anuidade, 301
aplicação, transformação, 1059
apogeu, 759, 900
 de satélite terrestre artificial, 210, 900
aproximação pela reta tangente, 536
aproximação pelo ponto médio, 533, 540, 543
 erro na, 535
 estimativa do erro, 540-542
aproximação trapezoidal, 534, 540, 543
 erro na, 535
 estimativa do erro com, 540-542
aproximação(ões)
 área sob uma curva, 319
 de raízes usando o método de Newton, 297-300
 de raízes usando o Teorema do Valor Intermediário, 116-117
 de raízes usando zoom, 117
 linear local, 212, 649, 944, 946
 pela extremidade esquerda ou direita, 533
 pela regra de Simpson, 537, 538, 540
 por polinômios de Maclaurin e Taylor, 649, 651, 652, 655, 656
 por somas de Riemann, 354
 quadrática local, 648
Arco da Passagem (Gateway Arch), 475, 484
área
 aproximação pela extremidade direita, 347
 aproximação pela extremidade esquerda, 347
 aproximação pelo ponto médio, 347
calculada como integral dupla, 1014
calculada pelo método dos retângulos, 317, 321
calculando valor exato de, 346
com integral dupla polar, 1022
como função de duas variáveis, 906
como integral de linha, 1095, 1099, 1124-1125
de superfície de revolução, 444, 446
definição de, 343, 344
em coordenadas polares, 724, 725
entre duas curvas, 414, 416-418
líquida com sinal, 347, 350, 355, 377
pelo método de antiderivadas, 320, 321
pelo Teorema de Green, 1124-1125
sob uma curva, 317
total, 366, 378
área de superfície
 como integral de superfície, 1131
 de superfície de revolução, 444-446
 de superfície paramétrica, 1028, 1034, 1035
 de superfícies da forma $z = f(x, y)$, 1026-1028
 e integral imprópria, 553
argumento, 3
Arquimedes, 316, 318
 espiral de, 714, 718
 palimpsesto de, 318
assíntota horizontal, 32, 89
 de curva polar, 719
assíntota(s), 99, 254
 curvilínea, 258
 inclinada, 258
 oblíqua, 258
 uma curva como, 99
assíntotas de uma hipérbole, 732
 encontrando as, 738
assíntotas verticais, 32, 76
 em curvas polares, 719
Astronomia, movimento planetário, 759, 896, 897, 899, 900
Astronomia Nova, 759
aumentar a velocidade, 290
Axioma da Completude, 611

B

Badel, Hannskarl, 484
 Bell, Alexander Graham, 59
 Bernoulli
 Daniel, 700
 equação de, 595
 Jakob I, 698-700
 Jakob, 767
 Johann (John) I, 698-700
 Johann (John), 3, 221, 767
 Nikolaus, 700
 Bessel
 derivada de função de, 679
 equação de ordem um, 689
 equação de ordem zero, 689
 Friedrich Wilhelm, 666
 função de, 666
 Beverton-Holt, modelo de, 613-614
 bifólio, 728
 bola
 aberta, 920
 fechada, 920
 Bolzano, Bernhard, 149
 Bopp, Thomas, 762
 Bowditch Nathaniel, 705
 curva de, 705
 braço de alavanca, 460
 Brahe, Tycho, 759
 bruxa de Agnesi, 847

C

cabos suspensos, 475, 765
 calota esférica, 430
 camada cilíndrica, 432-435
 caminho de integração, 1111
 caminho de subida mais íngreme, 969
 caminho poligonal, 439
 campo de direções, 329, 580
 campo de fluido, 1138
 campo de forças central, 896
 campo de velocidades, 1084
 campo eletrostático, 1086-1087, 1138
 campo gradiente, 1187
 campo gravitacional, 1084
 campo vetorial conservativo, 1087-1088, 1112-1113
 independência do caminho e, 1113-1114
 teste de, 1115-1118
 campo vetorial irrotacional, 1164
 campo(s) vetorial(is), 1084-1085
 circulação de, 1168
 de fluido, 1138
 de inverso quadrado, 1086-1087
 divergência e rotacional de, 1088-1090
 gradiente, 1087
 integração ao longo de uma curva, 1103-1104
 linha de fluxo de, 1093
 representação gráfica de, 1085
 campos de quadrado inverso, 1086-1087
 lei de Gauss para, 1155
 caos e o método de Newton, 300

capacidade de tolerância, 100, 563
 cardioide(s), 711
 área, 724
 famílias de, 713
 interseção com círculo, 725
 CAS, ver sistema algébrico computacional
 Cassini, Giovanni Domenico, 719
 ovais de, 719
 catenária, 475
 Cauchy, Augustin, 649, 651
 Cavalieri, Bonaventura, 431
 princípio de, 431
 centro
 de curvatura, 877
 de elipse, 731
 de força, 896
 de hipérbole, 732
 centro de gravidade, 458, 1072
 de lâmina, 458-462, 1072, 1074
 de sólido, 1075, 1076
 centroide(s), 464
 como propriedade geométrica, 462
 de lâmina, 1074
 de sólido, 1075, 1076
 de uma região, 462-464, 1074
 CGS (centímetro-grama-segundo), 450
 ciclo, 395
 cicloide prolata, 703
 cicloide(s), 698
 papel na história da Matemática, 700
 pomo da discórdia, 699
 prolata, 703
 cilindro, 421, 422
 circuito elétrico em série *RL*, 593
 circulação, 1163
 círculo(s), 730
 de curvatura, 877
 famílias de, 712, 713
 involuta de um, 704
 osculador, 130, 877
 segmento de, 301
 círculo(s) máximo(s), 840
 distância entre dois, 840
 clotoide, 766
 coeficiente binomial, 677
 coeficiente dominante, C1
 coeficiente(s), C1
 de atrito, 154, 180
 de expansão linear, 219
 de expansão volumétrica, 219
 de polinômio, 31
 dominante, C1
 cofunção, 181
 combinação linear, 784
Comentários sobre os Movimentos de Marte, 759
 cometa de Hale Bopp, 762
 cometa Halley, 760
 componente escalar, 789
 componente normal escalar da aceleração, 886
 componente normal vetorial da aceleração, 865
 componente tangencial escalar da aceleração, 886
 componente tangencial vetorial da aceleração, 886
 componentes
 de $r(t)$, 843
 de vetores, 775
 comportamento no infinito, 89
 e limites, 91, 94
 composição contínua, 129, 577
 composição de funções, 17
 continuidade da, 114, 115
 derivada da, 174
 substituição u na, 332, 334-336
 comprimento
 de vetor, 778
 comprimento de arco, 438, 4440, 441, B2, B3
 como integral de linha, 1095
 de curvas paramétricas, 443, 697
 de curvas polares, 721, 722
 do ponto de vista vetorial, 859
 e integrais impróprias, 553
 encontrando por métodos numéricos, 441
 concavidade, 235, 254
 côncavo
 para baixo, 235
 para cima, 235
 conoide de Nicomedes, 764
 condição inicial, 328, 562
 cone, 824, 830, 836
 cone circular, 824-825
 cone elíptico, 823-825
 identificando um, 829
 cônica transladada, 740-742
 conjunto
 aberto, 920
 ilimitado, 978
 conjunto fechado, 920
 encontrando extremos absolutos em, 982-985
 conjunto limitado, 978
 encontrando extremos absolutos em um, 982
 constante de crescimento, 571
 interpretação da, 572
 constante de decaimento, 571
 interpretação, 572
 constante de gravitação universal, 896
 constante de integração, 323
 constante de permissividade, 1087
 constante de proporcionalidade, 29, 36
 inversa, 29, 36
 constante(s)
 de reflexão de gráficos, 22
 de translação de gráficos, 20
 derivada da função, 155
 em fórmulas de integração, 4891
 equações lineares de segunda ordem homogêneas
 fator, num limite, 82
 fator, numa derivada, 157
 continuidade, 110-117
 aplicações, 111
 da função exponencial, 122, 400
 da função inversa, 121
 da função logaritmo, 122, 398, 403

- de composições, 114-115
 de funções a duas variáveis, 922-923, 924
 de funções a três variáveis, 925
 de funções trigonométricas, 121
 de funções vetoriais, 849
 de polinômios e funções racionais, 122
 e diferenciabilidade, 148, 943
 no Teorema do Valor Intermediário, 115-117
 num intervalo, 112
 pela esquerda/direita, 112
 prova das propriedades básicas de, D2-D3
 convergência, 600, 610, 611, 614-616
 absoluta, *ver* convergência absoluta
 condicional, 643
 conjunto de, 662
 de integrais impróprias, 549-551
 de sequências monótonas, 610, 611
 de sequências, 600
 de séries infinitas, 616
 e comportamento no infinito de sequências, 610
 propriedades algébricas da, de séries, 624, 625
 raio e intervalo de, 662, 664
 convergência absoluta, 641, 642
 teste da razão para a, 643, 644
 coordenada angular, 706
 coordenada polar r , 706, 708
 coordenada polar θ , 706
 coordenada radial, 706
 coordenada x , 768
 coordenada y , 768
 coordenada z , 768
 coordenadas cartesianas, 767
 coordenadas cilíndricas, 832
 conversão, 833
 elemento de volume, 1048
 equações de superfícies em, 835-836
 coordenadas esféricas, 832, 836
 conversão em, 833
 equação de uma superfície em, 835-836
 coordenadas polares, 705, 706
 área em, 719, 724, 725
 esboço de seções cônicas em, 756, 758, 759
 gráfico em, 707
 relação com coordenadas retangulares, 706
 teste de simetria em, 710-712
 coordenadas retangulares, 767-832
 conversão de coordenadas cilíndricas e esféricas em, 833
 relação com coordenadas polares, 706
 Copérnico, 759
 corneta de Gabriel, 555, 1030
 Cornu, Marie Alfred, 766
 espiral de, 766, 904
 corrente alternada, 395
 corte com o eixo x , 254
 de funções, 4
 corte com o eixo y , 254
 cossecante, B3
 continuidade da, 121
 derivada da, 170
- hiperbólica, 474
 cosseno, B3
 continuidade do, 121
 derivada do, 169, 173
 família do, 32, 34
 fórmulas, B8, B10
 funções racionais de, 527
 hiperbólico, 474
 identidades trigonométricas, B6-B8
 integração de potências do, 500, 501, 505
 integração de produtos com senos, 501, 503
 cosenos diretores, 787-788
 cota inferior
 de conjunto, 612
 de sequência monótona, 611
 maior (ínfimo), 612
 cota superior
 de conjunto, 612
 de sequência monótona, 611
 menor (supremo), 612
 cotangente, B3
 continuidade da, 121
 derivada da, 170
 hiperbólica, 474
 Crelle, Leopold, 297
 cresce sem cota, 75
 crescimento exponencial, 60, 571-573
 crescimento logarítmico, 60
 crescimento populacional, 563-564
 capacidade de tolerância, 100, 563
 equação diferencial de primeira ordem do, 563
 modelo logístico do, 564
 restrito, 563-564
 sem restrição, 563
 taxa de, 182
 cúbica bipartite, A12
 cúbica torcida, 843
 cunha, área em coordenadas polares, 723
 cunha cilíndrica, 1048, 1049
 cunha esférica, 1051
 curva borboleta, 717
 curva de nível, 909-911
 gradiente normal à, 965-966
 curva de posição *versus* tempo, 135, 288
 análise de, 291
 curva equipotencial, 917
 curva isotérmica, 917
 curva(s)
 como assíntotas, 99
 comprimento de uma, 438-440, 697, 859, 860
 de nível, 909-911
 integral, 327, 562
 limite ao longo de, 917
 lisa por partes, 1107
 lisa, 438
 ortogonais, 191
 paramétrica, 694
 polar, 707
 posição *versus* tempo, 288
 velocidade *versus* tempo, 377
 curva(s) paramétrica(s), 694, 841
 comprimento de arco de, 443, 698
 definida por partes, 702
 fechada, 1113
 geração com recursos gráficos, A9
 integral de linha ao longo de, 1096-1097
 limite ao longo de, 918-919
 mudança de escala em, A10
 mudança de parâmetros de, 861
 orientação de, 694, 841
 reta tangente a, 695-697
 simples, 1115
 translação de, A10
 tridimensional, 841-842
 curva(s) polar(es)
 área delimitada por, 719, 724, 725
 comprimento de arco de, 721
 geração com recurso gráfico, 715
 interseções de, 726
 reta tangente a, 719-721
 reta tangente na origem, 721
 seções cônicas, 755, 756
 curvas u constantes, 1028, 1032, 1060
 curvas v constantes, 1028, 1032, 1060
 curvatura, 873, 875, 877
 interpretação bidimensional, 877
 cúspide, 259
 custo de produção, 281
 custo fixo, 281
 custo marginal, 283
-
- ## D
- da Pisa, Leonardo (Fibonacci), 607
 datação por carbono, 574
 de Riemann, *ver* soma de Riemann
 decaimento exponencial, 571-573
 decaimento radioativo, 230, 573
 decibéis, 59
 decimal finita, 622
 decresce sem cota, 75
 densidade
 de circulação, 1164
 de fluxo, 1154
 de lâmina, 458, 1071, 1130
 de massa, 469
 de peso, 469
 depressão do bulbo molhado, 914
 derivação, 150
 com CAS, 178
 como propriedade inversa da integração, 371
 de série de potências, 678, 679
 e taxas relacionadas, 204-208
 implícita, 187-190, 952, 955
 logarítmica, 194-195, 199
 regras de, 167
 técnicas de, 155, 156, 158-160, 163-167, 174
 derivação parcial implícita, 931, 932
 regra da cadeia, 955-956
 derivada direcional, 960-963
 derivada parcial de primeira ordem, 933
 derivada parcial de segunda ordem, 933-934
 derivada pela esquerda, 150

derivada segunda, 159
 teste da, 247
 derivada terceira, 160
 derivada(s)
 da composição, 174
 da função constante, 155
 da função posição, 146
 das funções exponenciais, 198
 das funções logarítmicas, 193
 das funções trigonométricas inversas, 200
 das funções trigonométricas, 169-172
 de funções vetoriais, 849, 850
 de produto escalar e vetorial, 852
 de um produto, 163, 164
 de um quociente, 165
 de um recíproco, 167
 de uma função linear, 145
 definição, 143, 150, 151
 enésima, 160
 equação da reta tangente, 144
 lateral, 150
 notação de, 143, 150, 151
 pela direita, 150
 pela esquerda, 150
 quociente de diferenças, 143
 regra da potência, 156, 195
 regra do múltiplo constante, 157
 velocidade como, 146
 derivada(s) parcial(is)
 como taxa de variação e inclinação, 929-930, 932
 de funções a duas variáveis, 927, 930-932
 de funções a mais de duas variáveis, 932
 de funções vetoriais, 1031, 1032
 de ordens superiores, 933-934
 e continuidade, 932
 estimativa de, a partir de dados tabulados, 930-931
 funções definidas por, 928
 implícita, 931-932
 mistas, 933
 notação de, 928, 932
 regra da cadeia com, 952-953
 símbolo de, 928
 derivadas parciais mistas de segunda ordem, 933
 igualdade de, 934
 Descartes, René, 187, 275, 468, 698
 descontinuidade(s), 29, 110-111
 de salto, 110
 e integrabilidade, 358
 em um ponto, 110
 infinita, 110
 limites em, 119, 923
 removível, 111, 119
 significado físico, 111
 desigualdade triangular, 5
 vetorial, 784
 deslocamento, 135
 em movimento curvilíneo, 884
 encontrando por integração, 372, 376
 na curva velocidade *versus* tempo, 378
 determinante 2 2, 795
 determinante 3 3, 795

determinantes, 795
 diagrama de árvore, 950
 diferenciabilidade, 146, 148, 150, 151
 de funções de duas ou três variáveis, 940-942
 de funções definidas implicitamente, 190
 de funções vetoriais, 849, 850
 e continuidade de derivadas parciais de primeira ordem, 943
 e continuidade, 148, 943
 falta de, 147
 interpretação geométrica da, 147
 diferenciais, 213-214, 944, 945
 fórmulas de, 216-217
 propagação do erro, 215-216
 diferencial total, 944, 973
 diferenciável
 em (a, b) , 146
 em toda parte, 146, 943
 em um intervalo, 150
 em um ponto, 146
 em uma região, 943
 diminuir a velocidade, 290
 dina-centímetro (erg), 450
 dinas, 450
 Diofante, 275
 diretriz, 731, 754
 disco
 aberto, 919
 fechado, 919
 discriminante, 752
 distância no espaço tridimensional, 768
 distância percorrida
 em movimento curvilíneo, 884
 em movimento retilíneo, 377
 encontrando por integração, 376
 na curva velocidade *versus* tempo, 378
 distorção na proporção da aparência, A6
 divergência, 1088-1090, 1149
 absoluta, 641
 como densidade de fluxo, 1154
 de integral imprópria, 549-551
 de sequências, 600
 de séries infinitas, 616
 divisão
 de funções, 15, 16
 doença, equação diferencial que modela
 disseminação de, 564
 domínio, 7
 conexo, 1114
 considerações físicas sobre o, em aplicações, 9, 10
 de funções a duas ou mais variáveis, 907
 de funções inversas, 40, 44
 de funções vetoriais, 843
 efeito de operações algébricas sobre o, 8
 multiplamente conexo, 1115
 natural, *ver* domínio natural
 restrito para tornar função invertível, 44
 restrito, 44
 simplesmente conexo, 1115
 domínio natural, 7
 de função a duas ou mais variáveis, 907
 de função vetorial, 843

dx, 213
dy, 213
dy/dx, 150, 213

E

e, 193, 400, 402
 eclíptica, 896
 Economia, problemas de otimização, 281, 282
 eixo conjugado, 732
 eixo focal, 732
 eixo maior, 731
 eixo menor, 731
 eixo semiconjugado, 737
 eixo semifocal, 737
 eixo *x*, 767
 eixo *y*, 767
 eixo *z*, 767
 eixo(s)
 de revolução, 425
 de uma elipse, 732
 de uma hipérbole, 732
 de uma parábola, 732
 polar, 705
 rotação de, 749, 750
 elemento de volume esférico, 1051
 elipse(s), 730, 731
 área de, 746, 1125
 equações padrão, 734, 735
 equações polares da, 756
 esboço de, 736, 737
 esboço em coordenadas polares de, 756-758
 excentricidade como medida de achatamento, 755
 propriedade foco-diretriz, 755
 propriedades de reflexão, 743
 translação de uma, 740
 elipsoide, 823, 824
 identificando um, 829
 energia, 449
 cinética, 449, 455
 conservação de, 1119
 potencial, 1119
 relação com trabalho, 454-455
 energia cinética, 449, 455
 energia cinética newtoniana, 691
 energia cinética relativística, 691
 energia potencial, 1119
 enésima(o)
 derivada, 160
 polinômio de Maclaurin, 650, 656, 659
 polinômio de Taylor, 653, 655, 659
 resto, 655, 668
 resto, estimativa do, 669, 670
 soma parcial, 616
 equação da onda, 935
 equação da onda unidimensional, 935
 equação das lentes finas, 211
 equação de, 313
 equação de continuidade para fluidos incompressíveis, 1154
 equação diferencial homogênea, 595
 equação diferencial linear, 586

- equação do calor, 939
 equação padrão
 da elipse, 735
 da esfera, 769
 da hipérbole, 737, 738
 da parábola, 732, 733
 equação simétrica, 812
 equação(ões) diferencial(is), 561-562
 autônomas, 585
 campo de direções de, 329, 580
 de Bernoulli, 595
 e integração, 328
 e taxas de variação, 561
 homogênea, 595
 ordem de, 561
 problemas de valor inicial, 328
 separáveis, 568-571
 solução de, 561
 equação(ões) paramétrica(s), 692-693
 de interseções de superfícies, 842
 de retas, 806-809
 de uma reta tangente, 851
 em recursos gráficos, 715, 842
 expressando funções comuns em, 694
 movimento de projétil, 889
 orientação imposta por, 694, 842
 equações de Cauchy-Riemann, 939
 forma polar das, 959
 equações de rotação, 749, 750
 equações diferenciais de primeira ordem, 561, 562, 570, 586-591
 e campos de direções, 580
 funções de duas variáveis e, 579-580
 lineares, 586
 modelagem com, 571-574, 589-591
 problemas de mistura, 589-590
 separáveis, 569-570
 equações diferenciais parciais, 935
 equações quadráticas
 eliminação do termo misto, 750-751
 em x e y , 741, 748
 equilíbrio, 460
 equilíbrio estático, 784
 erg, 450
 erro
 de amostragem, A7
 de medição, 215
 em aproximação linear local, 213
 intrínseco, 540
 propagado, 215
 relativo, 216
 erro absoluto, 116, 583
 do método de Euler, 583
 erro de arredondamento, 540
 em aproximação por série de potências, 672
 erro de truncamento, 540, 557
 em aproximação por série de potências, 672
 erro percentual, 216
 no método de Euler, 583
 escala logarítmica, 59
 escala pH, 59, 62
 escala Richter, 59, 63
 esfera, 769, 836
 esferoide oblato, 831
 espaço bidimensional, 767
 espaço de dimensão n , 907
 espaço tridimensional, 767
 espaço unidimensional, 767
 espelho parabólico, 743
 espiral, 714
 equiangular, 729
 família de, 714
 espiral de Arquimedes, 714, 718
 espiral de Lituus, 714
 espiral equiangular, 729
 espiral hiperbólica, 714, 719
 espiral logarítmica, 714, 729
 espiral parabólica, 714, 718
 Estação Espacial Internacional, 452
 estado estacionário, 1140
 Euler, Leonhard, 3, 622, 990
 método de, 581-583
 evoluta, 880
 excentricidade, 754
 como medida de achatamento, 755
 exp, 54
 extremo absoluto, 266, 977
 extremo absoluto condicionado, 991-993
 extremo relativo condicionado, 991-993
 extremo(s), 244, 267, 268, 977
 extremos absolutos
 de funções com um extremo relativo, 270, 271
 em intervalos abertos, 270
 encontrar em conjuntos limitados e fechados, 982-985
 encontrar em intervalos ilimitados, 269, 270
 encontrar em intervalos limitados e fechados, 268
 no Teorema do Valor Extremo, 267
 extremos relativos, 244, 254, 977
 e pontos críticos, 245
 encontrando, 979-981
 teste da derivada primeira para, 246
 teste da derivada segunda para, 247
 teste das parciais de segunda ordem, 980-981
 extrusão, 770
-
- F**
- família(s)
 de cardióides, 713, 714
 de círculos, 712, 713
 de curvas, 27
 de espirais, 714
 de limaçons, 713, 714
 de rosáceas, 713
 famílias de funções
 cosseno, 32, 34
 exponenciais, 53
 seno, 32, 34
 fator de escala, A2
 fator de integração, 587
 fator de polinômio, C4
 fator de *zoom*, A5
 fator linear, 516, 517
 regra do, 516
 fator quadrático, 518-520
 fator quadrático irredutível, C1
 fatoração linear completa, C2
 fatorial ($n!$), 603, 650
 Fermat, Pierre de, 274, 698
 princípio de, 287
 Último Teorema de, 275
 fluido compressível, 1140
 fluido(s), 467
 dinâmica de, 467
 estática de, 467
 força do, sobre superfície vertical, 470-471
 homogêneo, 469
 pressão de, 469
 fluidos incompressíveis, 1140
 equações de continuidade, 1154
 fluxão, 1102
 fluxo, 1140, 1142
 de \mathbf{F} através de σ , 1142
 densidade, 1154
 integrais de, 1142
 para fora, 1151-1153
 usando o Teorema da Divergência para obter o, 1151-1153
 fluxo de saída, 1151-1153
 fluxo fluido, 1084
 em estado estacionário, 1140
 foco(s), 731, 754
 de elipse, 731
 de hipérbole, 731
 de parábola, 731
 fólio de Descartes, 186, 189, 128
 fonte, 1154
 força central, 896
 força centrípeta, 903
 força de retardamento, 590
 força(s)
 constante, 449-451
 de fluido, 471
 linha de ação da, 805
 pressão, 468-469
 resultante de duas forças concorrentes, 780-781
 trabalho realizado por campo de forças, 1105
 variável, 451-453
 forças concorrentes, 781
 forma aberta de somatório, 343
 forma fechada de somatório, 343
 forma geral da equação do plano, 814
 forma indeterminada, 85, 219, 222-225
 do tipo $\infty \infty$, 225
 do tipo ∞/∞ , 222
 do tipo $0 \cdot \infty$, 224
 do tipo $0/0$, 219
 dos tipos $0^0, \infty^0, 1^\infty$, 225
 forma polar
 da equação de Laplace, 958
 das equações de Cauchy-Riemann, 959
 forma ponto-normal
 de um plano, 813
 de uma reta, 820

- forma vetorial de uma reta por dois pontos, 845
 fórmula da distância, 768
 fórmula de Machin, 677
 fórmula de Taylor com resto, 655, 656
 fórmulas de ângulo duplo, B9
 fórmulas de Frenet-Serret, 881
 fórmulas de integração, 324, 489, 490
 de funções trigonométricas inversas 337, 490
 de funções vetoriais, 854
 fórmulas de recursão, 604
 fórmulas de redução, 497
 em tabelas de integrais, com ajustes, 525, 526
 para integrais de potências e produtos de
 funções trigonométricas, 500, 501
 fórmulas de soma em produto, B10
 fórmulas do ângulo metade, B10
 fórmulas do cosseno, de Wallis, 508
 fórmulas do seno, de Wallis, 508
 fração(ões) parcial(is), 514, 515
 de funções racionais impróprias, 520, 521
 decomposição em, 515
 fator linear em, 516, 517
 fator quadrático em, 518-520
 fractais e o método de Newton, 300
 Frenet, Jean Frédéric, 871
 tetraedro de, 871
 frequência
 de corrente alternada, 395
 de movimento harmônico simples
 de seno e cosseno, 33
 Fresnel, Augustin, 404
 função seno e cosseno de, 404
 fronteira, 920
 ponto de, 920
 fronteira externa de região polar simples, 1019
 função aceleração, 290
 função arco cosseno, 45
 função arco secante, 45
 função arco seno, 45
 função arco tangente, 45
 função constante, 27, 80, 155, 233
 função densidade, 1071
 função densidade de massa, 1071
 função derivada, 143-145
 definição, 143
 domínio, 143
 notação “linha” da, 143
 que produz inclinação, 144
 função erro [erf(x)], 404, 530
 função exponencial de base b , 401
 função exponencial natural, 54
 definição formal da, 400
 função gama, 559
 função integrável, 354
 em $[a, b]$, 354
 função linear, 31
 função logaritmo natural, 56
 aproximação com série de Maclaurin, 673
 derivada da, 397
 integral da, 493
 propriedades da, 398
 função maior inteiro, 27
 função posição, 135, 288, 882
 derivada da, 146
 função potência, 28
 com expoentes fracionários e irracionais, 52,
 401
 com expoentes não inteiros, 30
 função potência irracional, 52, 401
 derivada da, 195
 função valor absoluto, 5
 continuidade da, 114
 derivada da, 147
 propriedades da, 5
 função velocidade instantânea, 146
 função(ões), 1, 6
 a duas variáveis, 579-580, 907
 a n variáveis reais, 907
 a três variáveis, 907
 aproximação com série de potências, 670-
 675
 composição de, 17, 18
 constante, 27
 crescente sem cota, 60
 crescente, 42
 crescentes e decrescentes, 232-234
 custo, 181
 de fora, 18
 decrescente, 42
 definida explícita ou implicitamente, 185-186
 definida por integral, 403, 404
 definida por partes, 6
 definida por série de potências, 656, 666
 derivada, ver função derivada
 derivadas parciais de, 928
 derivável, 146
 descrita por tabela, 908
 diferenciável, 146
 domínio de, 7
 domínio natural, 7
 elementar, 403
 expressa como composição, 18, 19
 gráfico de uma, 4
 homogênea de grau n , 999
 imagem, 7
 ímpar, 23, 28, 29
 injetora, 41, 197-198
 inversa(s), ver função(ões) inversa(s)
 invertível, 41
 limitada, 359
 lisa, 438, 858
 logarítmica(s), ver função(ões)
 logarítmica(s)
 lucro, 281
 maneiras de descrever, 2
 máximos e mínimos relativos de, 244
 operações aritméticas com, 15
 par, 23, 28, 29
 potência, ver função potência
 potencial, 1087
 produto de, 15, 16
 propriedades de, 4-10
 racionais, ver função(ões) racionais
 real de variável real, 3
 receita, 281
 recursos gráficos e, A1
 restrição de, 44
 saída de, 2, 3
 soma de, 15
 teste da reta vertical para, 4
 trigonométricas, ver função(ões)
 trigonométrica(s)
 vetoriais, ver função(ões) vetorial(is)
 função(ões) inversa(s), 38, 39, 55
 continuidade da, 121
 domínio e imagem da, 50
 encontrando uma, 40
 equações do cancelamento, 39
 equações paramétricas da, 695
 existência da, 41
 gráfico da, 43
 notação para, 39
 recursos gráficos e, A9
 teste da reta horizontal, 42
 função(ões) logarítmica(s), 55, 57
 comportamento no infinito, 95
 continuidade de, 122
 de base b , 55
 derivada de, 192-193
 integral de, 493
 propriedades da função exponencial
 comparadas com as da, 57
 propriedades da, 57
 resolução de equações envolvendo, 57, 58
 função(ões) racional(is), 31, 32
 continuidade de, 113
 de seno e cosseno, 527
 esboço do gráfico de, 255, 261
 integração por somas parciais, 514, 516-521
 limites quando $x \rightarrow a$, 82, 84
 limites quando $x \rightarrow \pm\infty$, 92
 próprias, 515
 propriedades de interesse, 254
 função(ões) trigonométrica(s)
 aproximação com série de Taylor, 670-672
 continuidade de, 121
 de triângulos retângulos, B3
 derivada de, 170
 encontrando ângulos com, B10
 fórmulas de integração de, 489
 hiperbólicas, 474-478, 480-482
 inversas de, 44, 46, 47, 337
 limites de, 121
 função(ões) vetorial(is), 843
 antiderivada de, 854
 cálculo de, 848-852, 854
 continuidade de, 849
 diferenciabilidade de, 850
 domínio de, 843
 domínio natural de, 843
 fórmulas de integração de, 854
 gráfico de, 844, 845
 integral de, 853
 limites de, 848
 reta tangente ao gráfico de, 851, 852
 funções a duas variáveis
 continuidade de, 922-923, 924
 curva de nível de, 909-911

derivadas parciais de, 927, 939-932
 gradiente de, 963
 gráfico de, 908-909
 gráficos com recursos computacionais, 912, 914
 integral dupla de, 1000-1003, 1005, 1006, 1009-1011
 mapa de contornos, 909-911
 máximos e mínimos de, 977, 979-982, 984-985
 funções a três variáveis
 continuidade de, 924
 derivadas parciais de, 932
 gradiente de, 963
 integração múltipla de, 1000, 1039-1041
 superfície de nível de, 911-912
 funções algébricas, 32
 fórmulas de integração de, 489
 funções arco, 44
 funções componentes, 843
 funções contínuas
 propriedades de, 113
 valor médio de, 385-387
 funções elementares, 403
 funções exponenciais, 53
 análise de crescimento usando a regra de L'Hôpital, 223
 aproximando com série de potências, 672
 comportamento no infinito, 95
 continuidade de, 122
 de base b , 53
 derivadas de, 198-199, 230
 e decaimento radioativo, 230
 fórmulas de integração, 489
 gráfico, 53
 natural, 54
 resolvendo equações envolvendo, 57, 58
 funções hiperbólicas, 474
 aplicações de, 475
 e a hipérbole unitária, 476-477
 fórmulas das derivadas de, 477
 fórmulas de integração de, 477-478, 489
 gráficos de, 475
 inversas, 478-480
 funções hiperbólicas inversas, 478-480
 derivadas e integrais, 481-482
 forma logarítmica das, 480
 funções implícitas, 185-186
 funções trigonométricas do triângulo retângulo, B3-B4
 funções trigonométricas inversas, 38, 44, 200
 cálculo das 46
 derivadas, 200
 identidades, 47
 funções vetoriais de duas variáveis, 1031
 derivadas parciais de, 1031, 1032

G

g , aceleração devida à gravidade, 127
Galileo, espaçonave, 698
 Galileu, 698
 Galois, Evariste, C5

gases, 467
 Gauss, Carl Friedrich, 354, 1084, 1150
 curva de, 1150
 leis de, 1155-1156
 teorema de, 1149-1151
 Geometria Analítica, 275
 Geometria Projetiva, 468
 grades de retas, A2
 gradiente(s), 963-965
 para encontrar retas tangentes a cortes de superfícies, 974
 gráfico(s)
 cortes com o eixo x , 4
 de curvas paramétricas no espaço tridimensional, 842
 de funções a duas variáveis, 908-909
 de funções exponenciais, 54
 de funções hiperbólicas, 475
 de funções inversas, 43
 de funções logarítmicas, 56
 de funções potência, 29
 de funções racionais, 255, 261
 de funções vetoriais a duas variáveis, 1031
 de funções vetoriais, 844, 845
 de funções, 4
 de seções cónicas em coordenadas polares, 756-758
 de superfícies quádricas, 824-826
 de uma sequência, 599
 e raízes, 4
 em coordenadas polares, 707, 709
 expansão e compressão de um, 22
 no espaço tridimensional, 769
 propriedades de interesse em, 254
 reflexão de um, 21
 simetria de um, 23
 tangentes verticais e cúspides em, 259
 translações de, 20
 zeros, 4
 gráficos usando Cálculo junto a recursos gráficos, 262
 grande pirâmide de Gaza, 230
 grau de polinômio, 31, C1
 Green, George, 1123
 teorema de, 1122-1123
 Gregory, James, 673
 Gregory of St. Vincent, 397
 guarda-chuva de Whitney, 1033

H

Hale, Alan, 762
 hélice circular, 842
 helicoide, 1038
 hipérbole(s), 730, 731
 equações padrão, 737, 738
 equações polares da, 756
 equilátera, 29, 740
 esboço de, 739, 740
 esboço em coordenadas polares de, 756, 757, 759
 propriedades de reflexão da, 743

translação de uma, 740
 unitária, 477
 hiperboloide, 836
 hiperboloide de duas folhas, 823, 825
 identificação de, 829
 hiperboloide de uma folha, 823, 824
 identificação de, 829
 hipocicloide de quatro cúspides, 26, 190
 Hooke, Robert, 452
 lei de, 452
 Humason, Milton L., Apêndice Web-J8

identidades hiperbólicas, 476
 identidades trigonométricas, B6-B8
 imagem, 7
 considerações físicas em aplicações, 9, 10
 de função inversa, 40
 imagem de S por T , 1059
 imagem de x por f , 3
 inclinação
 de uma reta, B11
 de uma superfície, 930, 960
 derivada parcial como, 929-930, 932
 função que produz, 144
 incremento, 150, 941
 no método de Euler, 582
 independência de caminho de integral de trabalho, 1111-1113
 independência do caminho, 1113
 índice
 de sequência, 598
 de somatório, 341
 índice de sensação térmica (WCT), 6, 15, 908, 929-930
 ínfimo, 612
 infinitade de descontinuidades, 110
 integrando com, 551
 integrabilidade e descontinuidades, 358
 integração, 323
 como propriedade inversa da derivação, 371
 constante de, 323
 de séries de potências, 679, 680
 de taxas de variação, 371
 e campos de direções, 329
 e equações diferenciais, 328
 iterada (ou repetida), 1003, 1009, 1010
 limites de, 354
 notação para, 323, 324
 numérica, ver integração numérica
 parcial, 1003
 substituição hiperbólica em, 514
 substituição u na, 332, 333, 335, 336
 trocando a ordem de, 1013
 integração de funções racionais impróprias, 520, 521
 integração numérica, 533-543
 aproximação pela reta tangente, 536
 aproximação pelo ponto médio, 534
 aproximação por somas de Riemann, 533
 aproximação trapezoidal, 534
 erro absoluto, 535, 538

erro, 535, 538, 540
 pela regra de Simpson, 537-540
 integração por partes, 491-493
 de integrais definidas, 496
 fórmulas de redução, 497
 LIATE, 493, 494
 repetida, 493
 tabulada, 495
 integração repetida, 1003
 por partes, 493
 integrais de trabalho, 1111
 caminho de integração de, 1111-1112
 Teorema Fundamental das, 1112-1113
 integral de linha, 1094, 1096, 1097, 1105, 1107
 ao longo de caminhos fechados, 1113
 ao longo de curvas fechadas simples, 1124
 ao longo de curvas lisas por partes, 1107
 área como, 1095, 1099, 1124
 cálculo de, 1096-1097, 1099-1100, 1102-1103, 1113
 de ao longo de C , 1103-1104
 em relação a x , y e z , 1100, 1102
 em relação ao comprimento de arco, 1094-1095
 independência de caminho, 1113
 interpretação geométrica de, 1104
 massa de um arame, 1094-1095, 1098
 no espaço tridimensional, 1098
 orientação de C na, 1097, 1101
 Teorema de Green, 1122
 Teorema Fundamental de, 1112
 trabalho como uma, 1105, 1107
 integral de superfície, 1130
 área de superfície como, 1131
 cálculo de 1131-1132, 1134-1135
 massa de lâmina curva, 1130-1131, 1135
 integral definida
 calculando com substituição, 390-392
 definição, 354
 e o Teorema Fundamental do Cálculo, 363, 365, 366, 369, 370
 integração por partes, 496
 propriedades da, 356-358
 integral dupla polar, 1019, 1020
 cálculo de, 1020-1022
 cálculo de área com, 1022
 integral imprópria, 547, 549-551, 553
 comprimento de arco e área de superfície usando, 553
 de integrando com uma infinidade de descontinuidades, 551
 sobre intervalo infinito, 548-550
 integral indefinida, 323, 324
 e o Teorema Fundamental do Cálculo, 365, 366
 propriedades da, 325-327
 integral(is)
 curvas, 327, 562
 de funções vetoriais, 853, 855
 de Riemann, 354
 de superfície, 1130
 definida parcial, em relação a x e y , 1003
 definidas, ver integral definida

dupla, ver integral(is) dupla(s)
 elíptica completa de primeira espécie, 560, 685
 funções definidas por, 403, 404
 imprópria, ver integral imprópria
 indefinida, ver integral indefinida
 iterada, 1003, 1009, 1010, 1013
 notação para, 323
 relação entre definida e indefinida, 365, 366
 símbolo () de, 323, 324
 simples, 1006
 tabelas de, 489, 490, 523-528
 Teorema do Valor Médio para, 368, 369, 386
 tripla, ver integral(is) tripla(s)
 integral(is) dupla(s), 1002
 cálculo de área por, 1014
 cálculo de, 1002-1005
 convertendo de coordenadas retangulares para polares, 1023
 em coordenadas polares, ver integral dupla polar
 em coordenadas retangulares, 1020
 limites de integração, 1011-1013, 1021
 mudança de variáveis em, 1063, 1065
 propriedades da, 1006
 sobre regiões não retangulares, 1009-1011
 trocando ordem de integração em, 1013
 integral(is) trigonométrica(s), 500, 501, 503-506
 integral(is) tripla(s), 1039
 cálculo de volume com, 1042-1044
 cálculo de, 1040-1042
 convertendo de coordenadas retangulares para cilíndricas, 1050
 convertendo de coordenadas retangulares para esféricas, 1055
 em coordenadas cilíndricas, 1048, 1049
 em coordenadas esféricas, 1051, 1052
 limites de integração, 1042, 1044, 1050
 mudança de variáveis em, 1065-1067
 ordem de integração em, 1040, 1044, 1050
 integrando, 323
 intensidade de terremoto, 59, 63
 intensidade sonora, 59
 interior, 920
 interpolação linear, 908
 intervalo de convergência, 662
 de séries de potências em x x_0 , 663-664
 encontrando, 662, 663
 intervalo fechado
 continuidade em, 112
 extremos absolutos em, 267
 intervalo infinito
 extremos absolutos em, 269, 270
 integrais sobre, 548-550
 intervalo x para janela de inspeção, A2
 intervalo y para janela de inspeção, A2
 isóbara, 916

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 1059
 jacobiano, 1058
 em duas variáveis, 1061, 1062
 em três variáveis, 1066

janela de inspeção, 912, A2
 compressão de gráfico, A5
 escolha de, A3, A5
 fazendo zoom, A5
 Johannes, 759
 joule, 450
 juros compostos
 anualmente, 301, 577
 bimestralmente, 577
 continuamente, 129, 577
 n vezes ao ano, 129
 trimestralmente, 577

K

Kramer, Gerhard (Mercator), 506

L

L'Hôpital
 Guillaume François Antoine de, 221, 698, 699
 regra de, 220-226
 lacuna falsa com recurso gráfico, A8
 lado final de um ângulo, B1
 lado inicial de um ângulo, B1
 Lagrange
 identidade de, 804
 Joseph Louis, 906, 990
 multiplicador de, ver multiplicador de Lagrange
 lâmina, 458
 centro de gravidade de uma, 458-462, 1074
 centroide de uma, 462-464, 1074, 1076
 curva, 1130
 densidade de uma, 458, 1071, 1130
 homogênea ou não homogênea, 458, 1071
 massa de, 458, 1071, 1072, 1130-1131, 1135
 momento(s) de uma, 460-462, 1074
 primeiro momento de uma, 461, 1074
 Laplace
 equação de, 939, 1091
 forma polar da equação de, 958
 Pierre-Simon de, 274, 1000, 1091
 transformada de, 556

largura de cilindro reto, 422
 largura de cunha cilíndrica, 1048
 latitude, 1030
 Lei

da Gravitação Universal de Newton, 2, 37, 162, 896, 1084, 1086
 do Resfriamento de Newton, 154, 387, 565
 lei da órbitas, 759, 895, 899
 lei das áreas, 759, 895, 899
 lei de Boyle, 30, 36
 lei de Coulomb, 36, 1087
 lei de Gauss
 para campos de quadrado inverso, 1155
 para campos elétricos, 1156
 Lei de Ohm, 109
 lei de Torricelli, 578
 lei dos cosenos, 50, B8-B10
 para um tetraedro, 840

lei dos gases ideais, 927, 988
 lei dos períodos, 759, 895, 899, 900
 lei dos senos, B13
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, xix, 67, 221, 319, 698, 699
 notação de derivada de, 213
 notação de integral de, 213, 323
 leis de Kepler, 313, 759, 895
 primeira lei, 759, 895, 899
 segunda lei, 759, 895, 899
 terceira lei, 759, 895, 899, 900
 leis físicas, modelagem com série de Taylor, 685
 lemiscata, 190, 712
 LIATE, estratégia para integração por partes, 493
 Libby, W. F., 573
 libras, 450
 limaçons, 713, 714
 limite de integração inferior, 354
 limite de integração superior, 354
 limite inferior de somatório, 341
 limite infinito, 74, 105
 ponto de vista informal, 75
 limite superior de somatório, 341
 limite(s), 67-76, 78, 80-86, 89-96, 98-105, 848, 919-921, 925
 abordagem intuitiva, 67, 73, 74
 ao longo de curvas, 917-918
 área definida como, 343, 344
 armadilhas de amostragem, 71
 assíntotas horizontais, 89
 bilaterais, 72-73, 100-101
 cálculo de, 80, 85, 91, 94
 comportamento no infinito, 91, 94
 de função definida por partes, 86
 de funções a duas variáveis, 920-921
 de funções a três variáveis, 924
 de funções racionais quando $x \rightarrow a$, 82, 84
 de funções racionais quando $x \rightarrow \pm\infty$, 92
 de funções simples, 80, 81, 91
 de funções trigonométricas, 121
 de funções vetoriais, 848
 de integração, 354
 de polinômios quando $x \rightarrow a$, 82, 84
 de polinômios quando $x \rightarrow \pm\infty$, 91, 92
 de radicais, 85
 de sequências, 599, 600, 602
 de somas de Riemann, 345, 1002, 1040
 de somatório, 346
 de x^n quando $x \rightarrow \pm\infty$, 91
 definição épsilon-delta, 101
 discussão rigorosa de, 100-102, 105
 do produto, 81
 do quociente, 81
 em descontinuidades, 119, 923
 envolvendo radicais, 85
 expansão decimal e, 69
 forma indeterminada do tipo 0/0, 85
 formas indeterminadas de, 219-223, 225
 infinito, 74, 105
 lateral, 72, 101
 não existe, 72-74, 95, 124

no infinito, 89-90
 ponto de vista informal, 71
 prova dos teoremas básicos, D1-D2
 quando $x \rightarrow \pm\infty$, 103, 105
 raiz enésima, 81
 soma de, 81
 Teorema do Confronto, 122
 linearidade local, 212, 944, 946
 e diferenciais, 213-214, 215-216
 linha de ação, 805
 linha de fluxo, 1093
 líquidos, 467
 Lissajous
 curva de, 703
 Jules Antoine, 703
 logaritmo(s), 55
 aproximação com séries de potências, 673
 fórmula de mudança de base, 59
 propriedades do, 57
 logaritmos gerais, 402, 403
 logística
 crescimento, 239, 240, 243, 564
 curva, 239, 577
 equação diferencial, 564
 longitude, 1030
 Lua, excentricidade da órbita, 902
 lucro marginal, 283

M

Maclaurin, Colin, 649
 polinômio de, 649-651
 série de, 660-663
 magnitude, 5
 de um vetor, 778
 malhas de curvas, 821
 manipulação algébrica de integrando, 488
 Mantle, Mickey, 765
 mapa de contornos, 909-911
 usando recursos computacionais, 911
 mapa topográfico, 909
Maple, A1, A2
 Marte, 763
 massa de lâmina curva, 1130-1131
 massa de lâmina plana, 458, 1071, 1072
 massa de um arame, 1094-1095
 como integral de linha, 1098
Mathematica, A1, A2
 máximo absoluto, 266, 977
 máximo relativo, 244, 977
 média aritmética, 385, 757
 média geométrica, 757, 758
 medida em graus, B1
 medida em radianos, B1
 meia-vida, 572-573
 Mercator (Gerhard Kramer), 506
 método
 das arruelas, 426
 das camadas cilíndricas, 432-435
 do fator integrante, 587-589
 dos discos, 425
 dos mínimos quadrados, 987
 método de Euler, 581-583

método de integração, 488, 490
 Método de Newton, 298, 299
 dificuldades com o, 299
 método dos retângulos para a área, 318
 milibar, 916
 Miller, Norman, 286
 mínimo absoluto, 266, 977
 mínimo relativo, 244, 977
 minuto (de ângulo), B1
 Möbius
 August, 1138
 faixa de, 1138
 modelagem com equações diferenciais, 561, 563-566, 571-574, 589-591
 crescimento populacional, 563-564
 crescimento/decrecimento exponencial, 571-573
 disseminação de doença, 564-565
 equações diferenciais, 561
 farmacologia, 564
 lei do resfriamento de Newton, 565
 meia-vida, 572-573
 oscilação de molas, 565-566
 tempo de duplicação, 572, 573
 modelo de crescimento irrestrito, 564
 modelo de pequenas oscilações, 686
 modelo de primeira ordem do período do pêndulo, 686
 modelo de produção, 999
 modelo de produção de Cobb-Douglas, 999
 modelo de queda livre, 380
 com resistência, 590-591
 modelo de segunda ordem do período do pêndulo, 686
 modelo harmônico simples, 180
 mola, 565
 constante de, 452
 rigidez de, 452
 momento
 de inércia, 1079
 de lâmina, 460-462, 1074
 em relação a um ponto, 459
 em relação a uma reta, 460
 momento escalar, 802-803
 momento vetorial, 802
 movimento
 curvilíneo, 882, 883, 885-890
 em queda livre, 380-382, 590, 591
 harmônico simples, 180, 567
 retilíneo, ver movimento retilíneo
 rotacional tridimensional, 802
 uniformemente acelerado, 378
 movimento balístico
 equações paramétricas de, 889, 891
 modelo vetorial, 888-889
 movimento circular uniforme, 903
 movimento retilíneo, 134-136, 288-292, 376-381
 aceleração, 290
 distância percorrida, 377
 em queda livre, 381, 382
 função posição de, 135
 posição *versus* tempo em, 135

uniformemente acelerado, 378-380
 velocidade escalar instantânea, 289
 velocidade escalar, 289
 velocidade instantânea, 136, 146
 velocidade média, 135
 velocidade, 146, 289
 m_{tg} , 132
 mudança de parâmetro, 861, 862
 mudança de variáveis
 em integrais duplas, 1063-1065
 em integrais simples, 1058
 em integrais triplas, 1065-1067
 multiplicação de funções, 15, 16
 multiplicador de Lagrange, 990-993
 com três variáveis e uma restrição, 993-995
 multiplicidade, 249, C2
 interpretação geométrica da, 249
 múltiplo escalar, 774

N

negativo de um vetor, 775
 Newton
 discípulo Maclaurin, 649
 Isaac, xviii, 3, 67, 319, 698, 699, 759, 1084
 notação de derivada de, 213
 solução do problema da braquistócrona de
 próprio punho, 700
 Newton-metro, 450
 newtons, 450
 norma de partição, 353
 norma de vetor, 778
 normalização de um vetor, 779
 notação sigma, *ver* somatório, notação
 números reais, 611

O

octante, 768
 operador del ∇ , 1090
 operador laplaciano ∇^2 , 1090
 órbita elíptica, 760, 895, 899
 órbita geossincrônica, 900
 órbita planetária, 313, 705, 759, 895-900
 ordem de derivada, 160
 ordem de equação diferencial, 561-562
 Oresme, Nicole, 622
 orientação, 1139
 de superfície fechada lisa por partes, 1148
 de superfície não paramétrica, 1144-1145
 de superfície paramétrica lisa, 1140
 de uma curva, 694, 841
 no espaço tridimensional, 841
 positiva/negativa, 1125, 1140
 relativa, 1158
 orientação negativa de superfície
 não paramétrica, 1144
 paramétrica, 1140
 orientação para dentro, 1148
 orientação para fora, 1148
 orientação positiva
 de região multiplamente conexa, 1125
 de superfície não paramétrica, 1144-1145

de superfície paramétrica, 1140
 origem, 705, 767
 simetria em torno da origem, 710
 ortogonal(is)
 componentes, 788-789
 curvas, 191
 projecção, 790-791
 superfícies, 976
 trajetórias, 191
 vetores, 787
 oscilação de cordas, 935
 oscilação de molas, 565-566

P

Pappus
 de Alexandria, 465
 teorema de, 464-465
 parábola(s), 730
 definição de, 731
 equação padrão da, 732, 733
 equação polar de uma, 756
 esboço de, 733, 734
 esboço em coordenadas polares, 756
 método de Kepler para construção de, 766
 propriedade foco-diretriz, 755
 propriedades de reflexão de, 742, 743
 semicúbica, 697
 translação de uma, 740
 parabolóide, 823, 824, 826, 836
 parabolóide circular, 824-825
 parabolóide elíptico, 823, 824, 826
 identificando um, 829
 paraboloides hiperbólicos, 823, 824, 826
 identificação de, 829
 parametrização lisa, 858
 parametrização pelo comprimento de arco, 860
 encontrando uma, 862-864
 propriedades de, 864, 865
 parâmetro(s), 27, 692
 comprimento de arco como, 860
 mudança de, 861, 862
 partição
 de um intervalo, 353
 regular, 353
 Pascal
 Blaise, 468
 princípio de, 473
 pascal (Pa), 468
 pé-libra, 450
 pêndulo, modelagem com série de Taylor, 685
 pêndulo simples, 559
 periélio, 760, 900
 perigeu, 759, 900
 de satélite terrestre artificial, 210
 periodicidade, 254
 período, 219
 de corrente alternada, 395
 de modelo de primeira ordem do pêndulo, 686
 de movimento harmônico simples, 180
 de seno e cosseno, 33
 do pêndulo simples, 560
 do pêndulo, 219

peso, 452
 pi (π)
 aproximação, 317, 318, 673, 674
 Piazzi, Giuseppe, 1150
 pico de voltagem, 395
 pixel, A7
 plano normal, 871
 plano osculador, 871
 plano xy , 768
 plano xz , 768
 plano yz , 768
 plano(s)
 ângulo entre dois, 816
 determinado por um ponto e um vetor
 normal, 813-814
 paralelo a um plano coordenado, 813
 perpendiculares, 787
 problema da distância entre, 816-817
 retificador, 871
 tangente, *ver* plano(s) tangente(s)
 transformações de, 1059, 1060
 plano(s) tangente(s), 972
 a superfícies de nível, 971-972
 a superfícies paramétricas, 1032-1034
 a superfícies $z = F(x, y)$, 972-973
 e diferencial total, 973
 gráfico da aproximação linear local, 973
 plotagem em tubo, 842
 Plutão, 762
 poço, 1154
 polinômio constante, C1
 polinômio cúbico, 31, C1
 polinômio de Maclaurin, 649-651
 notação de somatório, 652, 654, 655
 polinômio de Taylor, 653
 notação de somatório com, 652, 654, 655
 polinômio linear, 31, C1
 polinômio(s), C1-C2
 coeficientes de, C1
 continuidade de, 113
 de grau n , C1
 de Maclaurin, *ver* polinômio de Maclaurin
 de Taylor, *ver* polinômio de Taylor
 em x , 31
 esboçando o gráfico de, 249-251
 grau de, C1
 implicação geométrica da multiplicidade de
 uma raiz de um, 249
 limite quando $x \rightarrow a$, 82, 84
 limite quando $x \rightarrow \pm\infty$, 91
 método para encontrar raízes, C5-C6
 propriedades de, 250, 254
 quadrático, 31, C1
 quártico, 31, C1
 quíntico, 31, C1
 raízes de, 297
 revisão de, 31
 Teorema da Fatoração de, C4
 Teorema do Resto, C3
 polo, 705
 polônio, 210, 576
 ponta de Folsom, 576
 ponto crítico, 245, 979

- ponto de bico, 147
 ponto de inflexão, 236, 238, 254
 aplicações, 238, 239
 ponto de minimax, 826
 ponto de referência em parametrização por comprimento de arco, 860
 ponto de sela, 826, 979
 ponto de tangência vertical, 147
 ponto de vista, 912
 ponto estacionário, 245
 ponto final de vetor, 774
 ponto inicial de vetor, 774
 ponto interior, 920
 ponto singular, 696
 pontos de mudança, 6
 população mundial, 572
 tempo de duplicação da, 573
 posição de partícula por integração, 376
 posição padrão
 da elipse, 735
 da hipérbole, 737
 da parábola, 732, 733
 de ângulo, B4
 potências inteiras, 52
 pressão, 468-469
 primeiro momento de lâmina, 1074
 octante, 768
 princípio da substituição, 98
 princípio de conservação da energia, 1119, 1168
 princípio de Fermat, 287
 princípio dos extremos condicionados
 duas variáveis e uma restrição, 991-993
 três variáveis e uma restrição, 993-994
 princípio dos mínimos quadrados, 287
 problema da área, 317
 problema da braquistócrona, 699
 problema da tautócrona, 699
 problema de valor inicial, 328
 de equações diferenciais de primeira ordem, 562
 método de Euler para, 581-583
 problema de valor inicial de primeira ordem, 562
 problema do volume, 1001
 em coordenadas polares, 1019
 problemas de extremos
 de duas variáveis e uma restrição, 989, 991-993
 de três variáveis e uma restrição, 989, 993-995
 de uma variável, 267
 em aplicações, 274-278, 280-282
 problemas de mistura, equações diferenciais de primeira ordem dos, 589-590
 problemas de otimização, 232
 aplicados à Economia, 281, 282
 categorias de, 274
 envolvendo intervalos fechados finitos, 274-279
 envolvendo intervalos não fechados ou infinitos, 279-281
 mal condicionados, 280
 máximos e mínimos absolutos, 268-270
 máximos e mínimos de funções a duas variáveis, 977-983, 985
 máximos e mínimos em aplicações, 274-281, 283
 multiplicadores de Lagrange em, 990-995
 procedimento de cinco passos para resolver, 276
 problemas mal formulados, 230
 produtividade marginal do capital, 999
 produtividade marginal do trabalho, 999
 produto escalar, 785
 derivada do, 852
 independência de coordenadas, 801
 propriedades algébricas do, 785
 símbolo do, 787
 produto misto, 800
 propriedades algébricas, 801
 propriedades geométricas, 800-801
 produto vetorial, 796
 derivada do, 852
 independência de coordenadas, 801
 propriedades algébricas do, 797-798
 propriedades geométricas, 798-799
 projeção de Mercator, 506
 propagação do erro, 215
 proporcionalidade inversa, 29
 propriedade foco-diretriz de cônica, 754
 propriedade válida a partir de um certo termo, 610
 pseudo-esfera, 1038
-
- Q**
- quadratriz de Hippas, 228
 quadratura do círculo e do crescente, 728
 quâdrica especial de Lamé, 190
 questões de escala e unidade em gráficos, 10
 quociente de diferenças, 143
-
- R**
- radianos, B1
 radônio-222, 576
 raio(s), 712, B2
 de convergência, 662, 664
 de curvatura, 877
 vetor, 844, 1031
 raiz média quadrada, 395
 raiz quadrada e valor absoluto, 5, 6
 raiz(es), C2
 aproximação com o método de Newton, 297, 299
 aproximação com o Teorema do Valor Intermediário, 116-117
 aproximação com *zoom*, 117
 de funções, 4
 multiplicidade de, 249
 simples, 249, C2
 Ramanujan
 fórmula de, 677
 Srinivasa, 677
 ramos de hipérbole, 731
 razão de série geométrica, 617
 receita marginal, 283
 recursos gráficos computacionais
 aproximação de raízes com *zoom*, 117
 curvas polares com, 715
 distorção na proporção da aparência, A6
 e a verdadeira forma do gráfico, A9
 e funções de duas variáveis, 912, 914
 e funções não elementares, 407
 e gráficos de funções inversas, A9
 erros de amostragem, A7
 erros de omissão de, A8
 funções racionais com, 261
 lacuna falsa e segmento de reta falso com, A8
 obtenção de curvas paramétricas com, 842, A9
 para esboçar mapa de contornos, 911
 resolução, A7
 reflexão, 21
 de superfície no espaço, 828
 região, 464
 região do tipo I/II, 1009
 região polar simples, 1018
 regra da cadeia, 174
 de derivadas parciais, 952-953
 de derivadas, 949-952, 954
 de duas variáveis, D10-D11
 de funções a *n* variáveis, 953
 e derivação implícita, 955
 e derivação parcial implícita, 955-956
 fórmula generalizada da derivada, 176
 notação de Leibniz, 213
 prova da, D3
 versão alternativa, 175
 regra da mão direita, 799
 regra da mecânica, 301
 regra da potência, 156, 195
 regra de Simpson, 537-540
 erro na, 538
 estimativa do erro, 541, 542
 regra do fator quadrático, 518
 regra do produto, 164, 491, 493
 regra do quociente, 165
 regra do terço, 540
 regra dos 70, 576
 regressão reta de, 987
 relação trabalho-energia, 449, 454-455
 relatividade, teoria da, 79, 98
 representação por série de potências, 665
 resíduo, 987
 resistência do ar, 590
 resolução em recursos gráficos, A7
 restrição de uma função, 44
 resultante, 781
 reta de melhor ajuste de mínimos quadrados, 987
 reta normal a superfície de nível, 972
 reta tangente vertical, 259, 696
 reta(s)
 ângulo de inclinação de uma, B11
 como cônicas degeneradas, 730
 determinadas por ponto e vetor, 805-807
 equações vetoriais de, 808-809

- famílias de, 712
 forma ponto-normal de uma, 820
 reta(s) tangente(s), 131, 133, 134
 a curva polar na origem, 721
 a curvas paramétricas, 695-697
 a curvas polares, 719-721
 a gráficos de funções vetoriais, 851
 a interseção de superfícies, 974
 como limite de retas secantes, 131
 definição da, 132
 equação da, 132, 144
 equações paramétricas da, 851
 inclinação de, 132
 vertical, 259, 696
 retangulares, *ver* coordenadas retangulares
 retângulo de inspeção, A2
 retângulo polar, 1019
 retas reversas, 808
 revolução
 sólido de, 424
 superfície de, 444, 835
 Riemann
 aproximação por soma de, 533
 Bernhard, 354
 função zeta de, 668
 integral de, 354
 soma de, *ver* soma de Riemann
 Rolle
 Michel, 302
 Teorema de, 302
 rosácea, 713
 rosácea de quatro pétalas, 709, 713
 rotacional, 1088-1090
 campo, 1165
 visto como circulação, 1163
 Ryan, Nolan, 381
-
- S**
- Saarinan, Eero, 484
 satélite de observação terrestre, 173
 secante, B3
 continuidade da, 121
 derivada da, 170
 hiperbólica, 474
 integração de potências da, 503, 504
 integração de produtos com tangente, 504, 505
 seção cônica, 730-732
 aplicações, 743
 caracterização foco-diretriz, 754
 degenerada, 730
 equações polares de, 755, 756
 equações quadráticas, 748-752
 esboçando em coordenadas polares, 756-758
 propriedades de reflexão, 742, 743
 translação de uma, 740-742
 seção transversal, 417, 421
 segmento de reta, 808
 forma vetorial de, 845
 segmento de reta falso com recurso gráfico, A8
 Segunda Lei do Movimento de Newton, 454
 segundo (de ângulo), B1
 sela de macaco, 821
 semieixo
 maior, 734
 menor, 734
 semieixo, A10
 seno, B3
 continuidade do, 121
 derivada do, 169, 173
 família do, 32, 34
 fórmulas, B8, B10
 funções racionais de, 527
 hiperbólico, 474
 identidades trigonométricas, B6-B8
 integração de potências do, 500, 501, 505
 integração de produtos com cossenos, 501, 503
 sentido do parâmetro crescente, 694
 no espaço tridimensional, 841
 sentido negativo, 1140, 1158
 na parametrização por comprimento de arco, 860
 sentido positivo, 1140, 1158
 parametrização por comprimento de arco, 860
 separação de variáveis, 568-569
 sequência de Fibonacci, 607
 sequência infinita, 596
 sequência monótona, 607
 convergência de, 610, 611
 propriedades que valem a partir de um certo termo, 610
 teste de monotonicidade de, 608, 610
 sequência(s), 596, 597, 599, 600, 604
 convergência de, 600
 cota inferior de, 611
 cota superior de, 611
 crescente/decrescente, 607
 de somas parciais, 616
 definida recursivamente, 604
 estritamente crescente/decrescente, 607
 estritamente crescente/decrescente, 607
 estritamente monótona, 607
 gráfico de, 599
 limite de, 599, 600, 602
 monótona, 607, 609-612
 propriedades de, que valem a partir de um certo termo, 610
 Teorema do Confronto para, 602, 603
 termo geral de, 597
 tipos de, 607
 série de Maclaurin, 660-663, 669, 670, 672-675, 681, 683-685
 aproximação de funções trigonométricas, 670, 672
 aproximação de logaritmo com, 673
 da função binomial, 674, 675
 da função exponencial, 672
 de várias funções, 675
 derivação da, 678
 integração de, 680
 maneira prática de encontrar, 683, 684
 série de potências, 661, 664
 aproximação da função exponencial com, 672
 aproximação de função trigonométrica, 670-672
 aproximação de π , 673, 674
 aproximação logarítmica, 673
 convergência de, 662, 664
 derivação de, 678, 679
 e série de Taylor, 781
 função definida por, 665, 666, 675
 integração de, 679, 680
 intervalo de convergência de, 662, 663
 série(s) de Taylor, 660, 661, 670
 convergência de, 668, 669
 encontrando com multiplicação e divisão, 684
 maneiras práticas de encontrar, 682, 684
 modelando leis físicas com, 685
 representação em série de potências com, 681, 682
 série(s) infinita(s), 596, 614-617, 619, 620
 alternada, *ver* séries alternadas
 binomial, 674, 675
 convergência absoluta de, 641, 642
 convergência condicional de, 643
 convergência e divergência de, 616
 de Maclaurin, 660-663, 669-675, 681, 683, 684, 686
 de potências, 661-666
 de Taylor, 659-663, 669, 670, 681, 683-685
 enésima soma parcial, 616
 erro de arredondamento com, 672
 erro de truncamento com, 672
 geométrica, 617-619
 harmônica alternada, 639
 harmônica, 620
 hiper-harmônica, 627
 p , 627
 propriedades algébricas de, 624-626
 soma de, *ver* soma de série infinita
 termo geral de, 623
 termos de uma, 614
 teste da comparação no limite para, 633, 634, 645, D7-D8
 teste da comparação para, 631-633, 645
 teste da integral para, 626, 628
 teste da raiz para, 635
 teste da razão para, 634, 635
 teste de divergência para, 624, 645
 testes de convergência para, 623-628, 631-635, 638, 640-643, 645
 séries alternadas, 638-641
 teste para, 638, 645, 671
 setor, B3
 simetria, 23, 254
 área em coordenadas polares, 724-725
 em relação à origem, 23
 em relação ao eixo x ou y , 34
 Simpson, Thomas, 539
 sinais de escala, A2
 sistema algébrico computacional (CAS), 530, A1
 derivação usando, 178
 integração usando, 338, 488, 528, 529
 $Maple$, A1, A2

- Mathematica*, A1, A2
 raízes de polinômios, C5
 sistemas lineares, 519
 sistema de coordenadas cartesiano, 767
 sistema de coordenadas retangulares, 767, 768
 ângulos em, B4-B6
 com a regra da mão direita, 767
 com a regra da mão esquerda, 767
 sistema de depreciação linear, 35
Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS 84), 831
 sistema hiperbólico de navegação, 743
 Sistema Internacional de Unidades (SI), 450
 Snell
 lei de, 287, 288
 Willebrord van Roijen, 288
Sobre o Método de Avaliação de Máximos e Mínimos, 274
 Sol, órbita de planeta em torno do, 759
 sólido de revolução, 424
 sólido finito, 1039
 sólido simples
 em xy , 1041
 em xz , 1044, 1045
 em yz , 1044, 1045
 solução de equação diferencial, 561-562
 solução geral, 562
 soma
 de vetores, 774
 em forma aberta/fechada, 343
 parcial, 616
 telescópica, 352, D6-D7
 soma de Riemann, 354, 413, 533
 para integral dupla, 1002
 para integral tripla, 1040
 polar, 1020
 soma de série infinita, 614-617
 e convergência, 616
 somatório
 em polinômios de Taylor e Maclaurin, 652, 654, 655
 fórmulas de, 342, D6-D7
 índice de, 341
 mudança de limites de, 341
 notação de (), 340, 341
 propriedades de, 342
 Sprintz, Joe, 384
 Stokes
 George Gabriel, 1169
 teorema de, *ver teorema de Stokes*
 integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$, 512
 substituição u , 332-337, 390-392, 488
 roteiro para a, 334
 substituição(ões)
 em integral definida, 390-392
 em tabelas de integrais, 524, 526-528
 hiperbólica, 514
 trigonométrica, 508-512
 u , *ver substituição u*
 subtração de funções, 15, 16
 sudário de Turin, 574
 supercondutor, 109
 superfície constante, 832-833
 superfície de nível, 911-912
 plano tangente a, 971-972
 vetor ou reta normal a uma, 972
 superfície de revolução, 444, 835-836
 representação paramétrica de, 1046
 superfície fechada, 1148
 superfície não orientável, 1139
 superfície orientada, 1138-1139, 1144-1145
 superfície quâdrica, 822
 esboço de, 824-826
 identificação de, 829
 reflexão no espaço de, 828
 translação de, 827
 superfície vertical, força do fluido sobre, 470-471
 superfície(s)
 área de, *ver área de superfície*
 de revolução, *ver superfície de revolução*
 integral de, *ver integral de superfície*
 orientação relativa de, 1158
 orientada, 1138-1139
 traço de, 821, 822
 superfície(s) paramétrica(a), 1028
 área de, 1028, 1034, 1035
 de revolução, 1030
 orientação de, 1140
 plano tangente a uma, 1032-1034
 superfícies cilíndricas, 770-771
 supremo, 612
-
- T**
- Tabela de Integrais das Capas, 523-528
 tamanho de passo no método de Euler, 582
 tangente, B3
 continuidade da, 121
 derivada da, 170
 fórmulas do ângulo duplo, B9
 hiperbólica, 474
 identidades trigonométricas, B6-B10
 integração de potências do, 503-505
 integração de produtos com secantes, 504, 505
 taxa de crescimento populacional, 182
 taxa de crescimento relativo, 572
 taxa de decaimento relativo, 572
 taxa de variação instantânea, 67, 138
 velocidade escalar instantânea em movimento curvilíneo, 882
 taxa de variação média, 138
 taxa(s) de variação, 137-139
 aplicações, 140
 derivadas parciais como, 929-930, 932
 e taxas relacionadas, 204-208
 em equações diferenciais, 561
 instantânea, 138
 integração de, 371
 média, 138
 taxas relacionadas, 204-208
 estratégia para resolver, 205
 Taylor
 Brook, 653
 polinômio de, *ver polinômio de Taylor*
 série de, *ver série(s) de Taylor*
 tempo de duplicação, 572-573
 Teorema da Diferença Constante, 306, 307
 Teorema da Divergência, 1149-1151
 para campos de quadrado inverso, 1155
 para encontrar o fluxo, 1151-1153
 Teorema da Estimativa do Resto, 655, 656, 669, 671
 prova do, D8-D10
 Teorema da Fatoração, C4
 teorema de existência, 267
 Teorema de Gauss (da divergência), 1149-1151
 Teorema de Green, 1122-1123
 e o Teorema de Stokes, 1162
 em regiões multiplamente conexas, 1125-1126
 obtenção de área com, 1124-1125
 obtenção de trabalho com o, 1124
 Teorema de Pappus, 464-465
 Teorema de Pitágoras para tetraedro, 840
 Teorema de Stokes, 1159-1160
 cálculo de trabalho com o, 1160-1162
 circulação de fluido, 1163
 e o Teorema de Green, 1162
 Teorema do Confronto, 123
 para sequências, 603
 Teorema do Resto, C2-C3
 Teorema do Valor Extremo, 267, 274, 978
 Teorema do Valor Intermediário, 115
 Teorema do Valor Médio, 304-306
 consequências do, 306
 interpretação de velocidade do, 305
 prova do, 304
 Teorema do Valor Médio para Integrais, 368, 386
 Teorema Fundamental das Integrais de Trabalho, 1112-1113
 Teorema Fundamental do Cálculo, 362-364, 369, 370
 e integração de taxas de variação, 371
 e relação entre integrais definidas e indefinidas, 365, 366
 variável muda no, 397, 368
 versão vetorial do, 854
 teoria da relatividade, 79, 98
 termo
 de sequência infinita, 596
 de série infinita, 615
 termo constante de polinômio, C1
 termo geral, 597, 623
 termo misto, 750, 751
 Terra
 coordenadas esféricas na, 836
 projeção de Mercator, 506
 teste da derivada primeira, 246, 247
 teste da razão, 634, 635, 645
 para a convergência absoluta, 643, 645
 prova do, D7-D8
 teste da reta horizontal, 42
 teste da reta vertical, 4
 teste das parciais de segunda ordem para extremos relativos, 980-981

teste de comparação no limite, 633, 634, 645
 prova do, D6-D7
 teste(s)
 da comparação no limite, 633, 634, 645,
 D6-D7
 da comparação, 631-633, 645
 da divergência, 623, 645
 da integral, 626, 628, 645
 da raiz, 635, 645
 da série alternada, 638-641, 645
 de campo de vetores conservativo, 1087,
 1115-1118
 de simetria, 23, 708, 710-712
 testes de convergência
 da integral, 626, 628
 da raiz, 635
 da razão, *ver* teste da razão
 de comparação no limite, 633, 634
 de comparação, 631, 632
 de séries p , 627
 resumo, 645
 séries alternadas, 638-641
 toro, 1038
 nó de, 842
 torque, 802
 vetor de, 802
 torsão, 881
 trabalho, 449, 451-455
 calculando com o Teorema de Green, 1124
 calculando com o Teorema de Stokes, 1160-
 1162
 como integral de linha, 1105-1107
 formulação vetorial do, 791
 realizado por campo de forças, 1105
 realizado por força constante, 449-450
 realizado por força variável, 451
 traço de uma superfície, 821-822
 tractriz, 484
Traité de Mécanique Celeste, 1091
 trajetória, 692, 882
 transformação, 488, 1065
 do plano, 1059, 1060
 transformação injetora, 1059
 transformação inversa, 1059
 transformada, 556
 transição lisa, 880
 translação, 20
 de curva paramétrica, A10
 de superfície quádrica, 827-828
 triedro TNB, 871
 trissecriz, 190

U

Último Teorema de Fermat, 275
 unidades em gráficos, 10

V

valor de f em x , 3
 valor médio, 385, 396, 1008, 1017
 e velocidade média, 387
 valores mínimos absolutos, 977
Vanguard I, espaçonave, 763, 902
 variável de escala, A2
 variável(is)
 dependente e independente, 3
 muda, 367, 368
 mudança de, em integrais duplas, 1063
 mudança de, em integrais simples, 1058
 mudança de, em integrais triplas, 1065, 1067
 separação de, 569
 velocidade, 134, 289, 882
 em movimento curvilíneo, 882
 em movimento retilíneo, 146, 377
 encontrando por integração, 376
 escalar, *ver* velocidade escalar
 função, 146, 289
 na curva velocidade *versus* tempo, 377
 terminal, 65, 591
 velocidade de escape, 899
 velocidade escalar, 134, 289
 em movimento curvilíneo, 882
 instantânea, 289, 882
 terminal, 591
 velocidade instantânea, 136
 como um limite de velocidades médias,
 136
 definição, 136
 em movimento curvilíneo, 882
 em movimento retilíneo, 136, 146
 interpretação geométrica, 136
 velocidade média, 135, 385, 387
 interpretação geométrica da, 136
 vértice
 de ângulo, B1
 de elipse, 731
 de hipérbole, 732
 de parábola, 731
 vetor binormal, 871
 resumo das fórmulas, 878
 vetor de intensidade elétrica, 970
 vetor normal unitário para dentro, 870
 vetor tangente unitário, 868, 878
 de curvas parametrizadas pelo comprimento
 de arco, 870
 vetor(es), 773-774
 ângulo diretor de, 787-788
 ângulo entre, 786-787
 aritmética de, 776-777
 com ponto inicial fora da origem, 776-777
 componente de, 789
 componentes de, 775
 de força, 774
 decomposição em componentes ortogonais,
 788-789
 deslocamento, 773, 791
 determinado por comprimento e ângulo,
 779-780
 determinado por comprimento e um vetor de
 mesma direção, 780
 em sistemas de coordenadas, 775
 iguais, 774
 magnitude de, 778
 na equação de uma reta, 809
 norma de, 778
 normal, 787, 972
 normal unitário principal, 869, 878, 1033
 normalização de, 779
 ortogonal, 787
 ponto de vista geométrico de, 774-775
 posição, 844
 produto misto de, 805
 projeção ortogonal de, 790-791
 tangente, 851
 unitário, 778-779
 unitário radial, 905
 unitário transversal, 905
 velocidade, 774
 zero, 774
 vetores iguais, 774
 vetores paralelos, 775
 v_{inst} , 136
 volume
 com funções a três variáveis, 906
 de sólido de revolução, 424-426
 líquido com sinal, 1002
 por camadas cilíndricas, 432-435
 por discos e arruelas, 424-426
 por fatiamento, 421-423
 por integral tripla, 1042, 1044
 sob uma superfície, 1002

W

Weierstrass, Karl, 101, 102, 527
 Wiles, Andrew, 275
 Wren, Sir Christopher, 699

Z

zero, C2
 de função, 4
 zero absoluto, 988
 zona esférica, 448
zoom, A5
 em aproximação de raízes, 117