3. Sea $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$
donde

$$X_1 = U_1$$
$$X_2 = U_2$$
$$X_3 = U_1 + U_2$$
$$X_4 = U_1 - U_2$$

y $U_1, U_2 \overset{iid}{\sim} U(0,1)$

donde las medias y varianzas de U_1, U_2 son

$$\mathbb{E}[U_i] = 1/2 \qquad Var(U_i) = 1/12$$
$$Cov(U_1, U_2) = 0$$

las varianzas de las X_i son

$$Var(X_1) = Var(U_1) = 1/12$$

$$Var(X_2) = Var(U_2) = 1/12$$

$$Var(X_3) = Var(U_1 + U_2)$$

$$= Var(U_1) + Var(U_2) = 1/6$$

$$Var(X_4) = Var(U_1 - U_2)$$

$$= Var(U_1) + Var(U_2 = 1/6$$

Las covarianzas cruzadas son

$$Cov(X_1, X_2) = 0$$

$$Cov(X_1, X_3) = Cov(U_1, U_1 + U_2) = 1/12$$

$$Cov(X_1, X_4) = Cov(U_1, U_1 - U_2) = 1/12$$

$$Cov(X_2, X_3) = Cov(U_2, U_1 + U_2) = 1/12$$

$$Cov(X_2, X_4) = Cov(U_2, U_1 - U_2) = -1/12$$

$$Cov(X_3, X_4) = Cov(U_1 + U_2, U_1 - U_2) = 0$$

La correlación es

$$\rho_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\operatorname{var}(X_i)\operatorname{var}(X_j)}}$$

Sea $a = \frac{1/12}{\sqrt{1/12 \cdot 1/6}} = \frac{1/12}{1/(6\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donde la matriz de correlación α es

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ 0 & 1 & a & -a \\ a & a & 1 & 0 \\ a & -a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

haciendo PCA se observan los valores propios de α se encuentran dos valores propios iguales a 2 y dos iguales a 0 Los componentes correspondientes a valores propios estrictamente positivos son los que aportan varianza $\therefore$ hay dos componentes principales de interes.

$\therefore$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con 2 componentes principales.