## Corrigé exercice 63 :

1.
   a. La parabole est « tournée vers le bas ». Donc, $a$ est négatif.
   b. Le point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées a pour ordonnées $6$.
   Donc : $c = 6$.
   Les points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses ont pour abscisse $-3$ et $1$.
   Donc : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(-1; 8)$.
   Donc : $\alpha = -1$ et $\beta = 8$.
2. D'après les informations précédentes, on peut écrire que :
   $f(x) = a\left[x - (-1)\right]^2 + 8$, soit $f(x) = a(x+1)^2 + 8$.

   Or, on sait que : $f(0) = c = 6$.
   D'où : $a(0+1)^2 + 8 = 6$
   $a \times 1^2 + 8 = 6$
   $a \times 1 + 8 = 6$
   $a + 8 = 6$
   $a = 6 - 8$
   $a = -2$
   Ainsi : $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

## Corrigé exercice 64 :

1. La fonction carré n'étant pas monotone sur $[-2; 7]$, on dresse le tableau de variations :

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $49$ |

   D'après le tableau de variations précédent, on conclut que : $0 \leqslant x^2 \leqslant 49$.

2. On considère $x$ un réel tel que $4 \leqslant x < 7$.
   La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   Donc : $4^2 \leqslant x^2 < 7^2$
   $16 \leqslant x^2 < 49$

3. La fonction carré n'étant pas monotone sur $[-3; +\infty[$, on dresse le tableau de variations :

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $9$ | ↘ | $0$ | ↗ | |

   D'après le tableau de variations précédent, on conclut que : $0 \leqslant x^2$.

4. On considère $x$ un réel tel que $x < -2$.
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
Donc : $x^2 > (-2)^2$
$x^2 > 4$

5. La fonction carré n'étant pas monotone sur $[-6; 3]$, on dresse le tableau de variations :

| $x$ | $-6$ | $0$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $36$ ↘ | $0$ | ↗ $9$ |

D'après le tableau de variations précédent, on conclut que : $0 \leqslant x^2 \leqslant 36$.

6. On considère $x$ un réel tel que $-11 < x \leqslant -2$.
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
Donc : $(-11)^2 > x^2 \geqslant (-2)^2$
$121 > x^2 \geqslant 4$
Enfin : $4 \leqslant x^2 < 121$.

## Corrigé exercice 65 :

1. On considère $x$ un réel tel que $-4 < x \leqslant 3$.
On ajoute 5 : $-4 + 5 < x + 5 \leqslant 3 + 5$
$1 < x + 5 \leqslant 8$
La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Donc : $1^2 < (x+5)^2 \leqslant 8^2$
$1 < (x+5)^2 \leqslant 64$
On soustrait $1$ :
$1 - 1 < (x+5)^2 - 1 \leqslant 64 - 1$
$0 < (x+5)^2 - 1 \leqslant 63$

2. On considère $x$ un réel tel que $-4 < x \leqslant 3$.
On soustrait 4 : $-4 - 4 < x - 4 \leqslant 3 - 4$
$-8 < x - 4 \leqslant -1$
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
Donc : $(-8)^2 > (x-4)^2 \geqslant (-1)^2$
$64 > (x-4)^2 \geqslant 1$
On multiplie par le nombre négatif $(-3)$ :
$-3 \times 64 < -3(x-4)^2 \leqslant -3 \times 1$
$-192 < -3(x-4)^2 \leqslant -3$
On ajoute $6$ :
$-192 + 6 < -3(x-4)^2 + 6 \leqslant -3 + 6$
$-186 < -3(x-4)^2 + 6 \leqslant 3$

## Corrigé exercice 66 :

1. On résout : $(x-3)^2 \leqslant 36$

   Donc : $-\sqrt{36} \leqslant x-3 \leqslant \sqrt{36}$

   $-6 \leqslant x-3 \leqslant 6$

   $-6+3 \leqslant x \leqslant 6+3$

   $-3 \leqslant x \leqslant 9$

   Donc : $S = [-3;9]$.

2. On résout : $3(x+1)^2 - 8 \leqslant 4$

   D'où : $3(x+1)^2 \leqslant 8+4$

   $3(x+1)^2 \leqslant 12$

   $(x+1)^2 \leqslant \dfrac{12}{3}$

   $(x+1)^2 \leqslant 4$

   Donc : $-\sqrt{4} \leqslant x+1 \leqslant \sqrt{4}$

   $-2 \leqslant x+1 \leqslant 2$

   $-2-1 \leqslant x \leqslant 2-1$

   $-3 \leqslant x \leqslant 1$

   Donc : $S = [-3;1]$.

3. On résout : $2(x+1)^2 - 4 \geqslant 10$

   D'où : $2(x+1)^2 \geqslant 10+4$

   $2(x+1)^2 \geqslant 14$

   $(x+1)^2 \geqslant \dfrac{14}{2}$

   $(x+1)^2 \geqslant 7$

   Donc : $x+1 \leqslant -\sqrt{7}$ ou $x+1 \geqslant \sqrt{7}$

   $x \leqslant -\sqrt{7}-1$ ou $x \geqslant \sqrt{7}-1$

   Donc : $S = \left]-\infty; -\sqrt{7}-1\right] \cup \left[\sqrt{7}-1; +\infty\right[$.

4. On résout : $-5(x-2)^2 \geqslant 10$

   D'où : $(x-2)^2 \leqslant -\dfrac{10}{5}$

   $(x-2)^2 \leqslant -2$

   Un carré est positif sur $\mathbb{R}$.

   Cette inéquation n'admet pas de solution.

   Donc : $S = \emptyset$.

## Corrigé exercice 67 :

$f$ est d'abord croissante puis décroissante. On en déduit que : $a < 0$.

L'expression développée de $f$ est : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $0$ a pour ordonnée $-2$. On peut donc en déduire que $c = -2$, soit

$f(x) = ax^2 + bx - 2$.

Les antécédents de $-2$ par $f$ sont $0$ et $5$, soit $f(0) = f(5) = -2$.

On peut donc écrire : $f(5) = -2$
$a \times 5^2 + b \times 5 - 2 = -2$
$a \times 25 + 5b = 0$
$25a + 5b = 0$
$5b = -25a$
$b = -\dfrac{25a}{5}$
$b = -5a$

Toutes les fonctions $f$ avec $a < 0$ et telles que $b = -5a$ répondent aux conditions de l'exercice.

Par exemple, on prend $a = -1$ et $a = -2$.
$f$ peut donc avoir comme expression :

- $f(x) = -x^2 + 5x - 2$ car $b = -5 \times (-1) = 5$
- $f(x) = -2x^2 + 10x - 2$ car $b = -5 \times (-2) = 10$

## Corrigé exercice 68 :

1. On considère deux réels $a$ et $b$ tels que : $a < b \leqslant 0$
   Alors : $a^2 > b^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$
   $5a^2 > 5b^2$ d'où $5a^2 - 3 > 5b^2 - 3$ donc $f(a) > f(b)$.
   Donc, la fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

2. Voici le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |

## Corrigé exercice 69 :

1. On démontre que $f$ est croissante sur $]-\infty; 0]$.
   On considère deux réels $a$ et $b$ tels que : $a < b \leqslant 0$
   Alors : $a^2 > b^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$
   $-4a^2 < -4b^2$
   $-4a^2 + 1 < -4b^2 + 1$
   $f(a) < f(b)$
   Donc, la fonction $f$ est croissante sur $]-\infty; 0]$.

2. Voici son tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↗ | $1$ | ↘ |

## Corrigé exercice 70 :

1. On considère deux réels $a$ et $b$ tels que : $a < b \leqslant -2$
   Alors : $a + 2 < b + 2 \leqslant 0$
   $(a+2)^2 > (b+2)^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$
   $4(a+2)^2 > 4(b+2)^2$
   $4(a+2)^2 - 3 > 4(b+2)^2 - 3$
   $f(a) > f(b)$
   Donc, la fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty; -2]$.
2. Voici le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↘ | $-3$ | ↗ |

## Corrigé exercice 71 :

1.
   a. On considère deux réels $a$ et $b$ tels que : $a < b \leqslant -7$
   Alors : $a + 7 < b + 7 \leqslant 0$
   $(a+7)^2 > (b+7)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$
   $-2(a+7)^2 < -2(b+7)^2$
   $-2(a+7)^2 - 1 < -2(b+7)^2 - 1$
   $f(a) < f(b)$
   Donc, la fonction $f$ est croissante sur $]-\infty; -7]$.
   b. Voici le tableau de variations de $f$:

| $x$ | $-\infty$ | $-7$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↗ | $-1$ | ↘ |

2. La fonction $f$ est donnée par sa forme canonique. On remarque que : $\alpha = -7$ et $\beta = -1$.
   Une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ est donc $x = -7$. Le sommet $S$ de $\mathcal{C}_f$ a donc pour coordonnées $S(-7; -1)$.

## Corrigé exercice 72 :

Pour tout réel $x$, on a :
$(x+3)^2 \geqslant 0$ donc $-(x+3)^2 \leqslant 0$ d'où $-(x+3)^2 + 5 \leqslant 5$ donc $f(x) \leqslant 5$.

De plus : $f(-3) = 5$.
Donc, la fonction $f$ admet $5$ pour maximum sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = -3$ .

## Corrigé exercice 73 :

Pour tout réel $x$, on a :

$$(x-2)^2 \geqslant 0$$
$$6(x-2)^2 \geqslant 0$$
$$6(x-2)^2 - 7 \geqslant -7$$
$$f(x) \geqslant -7$$

De plus : $f(2) = -7$.
Donc, la fonction $f$ admet $-7$ pour minimum sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = 2$ .

## Corrigé exercice 74 :

Pour tout réel $x$, on a :
$(x+4)^2 \geqslant 0$ donc $-3(x+4)^2 \leqslant 0$ d'où $-3(x+4)^2 - 2 \leqslant -2$ soit $g(x) \leqslant -2$
De plus : $g(-4) = -2$.
Donc, la fonction $g$ admet $-2$ pour maximum sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = -2$ .

## Corrigé exercice 75 :

1. On considère deux réels $a$ et $b$ tels que : $a < b \leqslant 1$
   Alors : $a - 1 < b - 1 \leqslant 0$
   donc $(a-1)^2 > (b-1)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
   d'où $5(a-1)^2 > 5(b-1)^2$ soit $5(a-1)^2 - 3 > 5(b-1)^2 - 3$ donc $f(a) > f(b)$
   Donc, la fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty; 1]$.

2. Voici le tableau de variations de $f$:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |

3. Pour tout réel $x$, on a :
   $(x-1)^2 \geqslant 0$ soit $5(x-1)^2 \geqslant 0$ soit $5(x-1)^2 - 3 \geqslant -3$.
   De plus : $f(1) = -3$ donc, la fonction $f$ admet $-3$ pour minimum sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = 1$.

## Corrigé exercice 76 :

1. **Affirmation fausse** : $f(-10) > 0$
2. **Affirmation vraie** : $f(-9) \geqslant f(1)$.
   En effet : $f(1) < 0 < f(-9)$, soit $f(1) < f(-9)$. Donc : $f(1) \leqslant f(-9)$
3. **Affirmation fausse** : $0 > f(0)$, donc $f(0) \neq 2$. Par contre : $f(2) = 0$.
4. **Affirmation fausse** : $a > 0$ puisque $f$ est d'abord positive puis négative.
5. **Affirmation vraie** : L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $S = \{-8; 2\}$, puisque $f(-8) = f(2) = 0$.
6. **Affirmation fausse** : L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $S = ]-8; 2[$.

Corrigé exercice 77 :

1. Pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-3)^2 - 8 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) - 8 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 - 8 \\ &= 2x^2 - 12x + 10 \end{aligned}$$

La forme développée de $f$ est donc $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

<u>Autre possibilité</u> : $f(x) = 2(x-5)(x-1) = 2(x^2 - x - 5x + 5) = 2(x^2 - 6x + 5)$
$= 2x^2 - 12x + 10$

2.
   a. En utilisant la forme canonique de $f$, $f(x) = 2(x-3)^2 - 8$, on conclut que la droite d'équation $x = 3$ est l'axe de symétrie $\mathcal{P}$.
   Son sommet a pour coordonnées $S(3; -8)$.
   b. En utilisant la forme factorisée de $f$, $f(x) = 2(x-5)(x-1)$, on connaît les solutions de $f(x) = 0$, soit $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$.
   De plus : $a > 0$. $f$ est donc d'abord positive, puis négative et de nouveau positive.
   On peut dresser le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |