Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1) $|-5| = 5$
2) $|3-1| = |2| = 2$
3) $2 - 3\pi < 0$.
   Donc : $|2-3\pi| = -(2-3\pi) = -2+3\pi = 3\pi - 2$
4) $\left|2-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6-2}{3}\right| = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

Corrigé exercice 2 :

Il est possible de résoudre ces équations et inéquations à l'aide de la représentation graphique de la fonction valeur absolue ou en utilisant la droite réelle graduée.

1) $S = \{-6;6\}$
2) $S = \emptyset$
3) $S = \{0\}$
4) $S =]-2;2[$
5) $S =]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$
6) $S = \emptyset$

Corrigé exercice 3 :

1) On utilise les identités remarquables ou la double distributivité.
   a) Pour tout réel x :
   $4(x-3)^2+5 = 4(x^2-6x+9)+5$
   $= 4x^2-24x+36+5$
   $= 4x^2-24x+41$

   b) Pour tout réel x :
   $2-\left(x+\sqrt{5}\right)^2 = 2-\left(x^2+2x\sqrt{5}+5\right)$
   $= 2-x^2-2x\sqrt{5}-5$
   $= -x^2-2x\sqrt{5}-3$
   c) Pour tout réel x :
   $7(x+5)\left(x-\frac{3}{4}\right) = 7\left(x^2-\frac{3}{4}x+5x-\frac{15}{4}\right)$
   $= 7\left(x^2-\frac{3}{4}x+\frac{20}{4}x-\frac{15}{4}\right)$
   $= 7\left(x^2+\frac{17}{4}x-\frac{15}{4}\right)$
   $= 7x^2+\frac{119}{4}x-\frac{105}{4}$
2) On utilise les identités remarquables ou un facteur commun.

a) Pour tout réel x, $x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$
b) Pour tout réel x, $4x^2-12x+9=(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2=(2x-3)^2$
c) Pour tout réel x, $x-5x^2=x(1-5x)$

Corrigé exercice 4 :

1) $-8\leqslant x<-3$
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
Donc : $(-8)^2\geqslant x^2>(-3)^2$
soit $64\geqslant x^2>9$
donc $9<x^2\leqslant 64$
2) $2<x\leqslant 7$
La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc : $2^2<x^2\leqslant 7^2$
soit $4<x^2\leqslant 49$
3) $-4\leqslant x<2$
La fonction carré n'étant pas monotone sur l'intervalle $[-4;2]$, on dresse son tableau de variations sur $[-4;2]$:

x	-4	0	2
x^2	16 ↘	0	↗ 4

Donc : $0\leqslant x^2\leqslant 16$.

Corrigé exercice 5 :

1) $x^2=25$
$\Leftrightarrow x=-\sqrt{25}$ ou $x=\sqrt{25}$
$\Leftrightarrow x=-5$ ou $x=5$
Donc : $S=\{-5;5\}$.

2) $3x^2+7=4$
$\Leftrightarrow 3x^2=-3$
$\Leftrightarrow x^2=-1$
Donc : $S=\emptyset$.
3) $x^2>5$
$\Leftrightarrow x<-\sqrt{5}$ ou $x>\sqrt{5}$
Donc : $S=\left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5};+\infty\right[$.
4) $6-5x^2\geqslant 1$
$\Leftrightarrow -5x^2\geqslant -5$
$\Leftrightarrow x^2\leqslant 1$
$\Leftrightarrow -\sqrt{1}\leqslant x\leqslant\sqrt{1}$
$\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$

Donc : $S = [-1; 1]$.

Corrigé exercice 6 :

Dans la suite, on considère que les fonctions affines sont de la forme $x \mapsto mx + p$ avec m et p réels.

1) Cette expression est l'expression d'une fonction affine.

   On résout donc : $5x - 8 = 0$ si et seulement si $x = \frac{8}{5}$.
   Le coefficient directeur $m = 5$ est positif.
   On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$5x - 8$		$-$	0	$+$	

2) Cette expression est l'expression d'une fonction affine.
   On résout donc : $6 - 3x = 0$ si et seulement si $x = 2$.
   Le coefficient directeur $m = -3$ est négatif.
   On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$6 - 3x$		$+$	0	$-$	

3) Cette expression est le produit de deux fonctions affines.
   On résout donc :

   $2x - 3 = 0$ si et seulement si $x = \frac{3}{2}$ (avec $m = 2 > 0$)

   $7 - 5x = 0$ si et seulement si $x = \frac{7}{5}$ (avec $m = -5 < 0$)
   On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$7 - 5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-3)(7-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) Pour tout réel x, x^2 est positif ou nul, et nul en $x = 0$.

Donc, $-\frac{1}{2}x^2$ est négatif ou nul pour tout réel x, et nul en $x = 0$.
On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2$		$-$	0	$-$	

5) Pour étudier le signe d'une telle expression, on résout :
$12 - 3|x| = 0$ si et seulement si $-3|x| = -12$
si et seulement si $|x| = 4$
si et seulement si $x = -4$ ou $x = 4$
$12 - 3|x| < 0$ si et seulement si $-3|x| < -12$
si et seulement si $|x| > 4$
si et seulement si $x < -4$ ou $x > 4$
On obtient donc :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$12 - 3\|x\|$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Corrigé exercice 7 :

Dans la suite, on considère que les fonctions affines sont de la forme $x \mapsto mx + p$ avec m et p réels.

1) a) On étudie le signe de l'expression $5 - x$.
Cette expression est l'expression d'une fonction affine.
On résout donc : $5 - x = 0$ si et seulement si $x = 5$.
Le coefficient directeur $m = -1$ est négatif.
On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5 - x$		$+$	0	$-$	

Donc :
Si $x < 5$, alors $|5 - x| = 5 - x$
Si $x \geqslant 5$, alors $|5 - x| = -(5 - x) = x - 5$
En résumé : $|5 - x| = \begin{cases} 5 - x & \text{si} \quad x < 5 \\ x - 5 & \text{si} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$.

b) On étudie le signe de l'expression $2x - 6$.
Cette expression est l'expression d'une fonction affine.

On résout donc : $2x-6=0$ si et seulement si $x=3$.
Le coefficient directeur $m=2$ est positif.
On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

Donc :

Si $x<3$, alors $|2x-6|=-(2x-6)=6-2x$
Si $x \geqslant 3$, alors $|2x-6|=2x-6$

En résumé : $|2x-6|=\begin{cases} 6-2x & \text{si} \quad x<3 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$.

2) 1° cas : On considère x tel que $x \leqslant 3$.
Alors : $$\begin{aligned}|5-x|+|2x-6| &= 5-x+6-2x \\ &= 11-3x\end{aligned}$$

2° cas : On considère x tel que $3 \leqslant x \leqslant 5$.
Alors : $$\begin{aligned}|5-x|+|2x-6| &= 5-x+2x-6 \\ &= x-1\end{aligned}$$

3° cas : On considère x tel que $x \geqslant 5$.
Alors : $$\begin{aligned}|5-x|+|2x-6| &= x-5+2x-6 \\ &= 3x-11\end{aligned}$$

3) a) $|2x-6|=0$ si et seulement si $2x-6=0$
si et seulement si $2x=6$
si et seulement si $x=3$

Donc : $S=\{3\}$.

b) $|2x-6|<2$ si et seulement si $-2<2x-6<2$
si et seulement si $4<2x<8$
si et seulement si $2<x<4$

Donc : $S=]2;4[$.

Corrigé exercice 8 :

1) Le volume d'un cylindre est $V=\pi r^2 h$ où r est le rayon du cylindre et h sa hauteur.
D'après l'énoncé, on sait que $h=15$ cm et $r=\frac{10}{2}=5$ cm.
Donc : $V=\pi\times 5^2\times 15=375\pi \approx 1178$
Le volume est donc d'environ $1178\,\mathrm{cm}^3$, soit environ $1,178$ L.

2) Le volume d'un cylindre est $V=\pi r^2 h$ où r est le rayon du cylindre et h sa hauteur.
D'après l'énoncé, on sait que $h=15$ cm. Le volume est de 500 mL, soit 500 cm^3.
On obtient donc : $\pi r^2\times 15=500$