Corrigé exercice 1 :

1) $|-5| = 5$
2) $|3-1| = |2| = 2$
3) $2 - 3\pi < 0.$
   Donc : $|2-3\pi| = -(2-3\pi) = -2 + 3\pi = 3\pi - 2$
4) $\left|2 - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6-2}{3}\right| = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

Corrigé exercice 2 :

Il est possible de résoudre ces équations et inéquations à l'aide de la représentation graphique de la fonction valeur absolue ou en utilisant la droite réelle graduée.

1) $S = \{-6; 6\}$
2) $S = \emptyset$
3) $S = \{0\}$
4) $S =]-2; 2[$
5) $S =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$
6) $S = \emptyset$

Corrigé exercice 3 :

1) On utilise les identités remarquables ou la double distributivité.
   a) Pour tout réel x :
   $4(x-3)^2 + 5 = 4(x^2 - 6x + 9) + 5$
   $= 4x^2 - 24x + 36 + 5$
   $= 4x^2 - 24x + 41$

   b) Pour tout réel x :
   $2 - \left(x + \sqrt{5}\right)^2 = 2 - \left(x^2 + 2x\sqrt{5} + 5\right)$
   $= 2 - x^2 - 2x\sqrt{5} - 5$
   $= -x^2 - 2x\sqrt{5} - 3$

   c) Pour tout réel x :
   $7(x+5)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 7\left(x^2 - \frac{3}{4}x + 5x - \frac{15}{4}\right)$
   $= 7\left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{20}{4}x - \frac{15}{4}\right)$
   $= 7\left(x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{15}{4}\right)$
   $= 7x^2 + \frac{119}{4}x - \frac{105}{4}$
2) On utilise les identités remarquables ou un facteur commun.
   a) Pour tout réel x, $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$
   b) Pour tout réel x, $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x-3)^2$
   c) Pour tout réel x, $x - 5x^2 = x(1-5x)$

Corrigé exercice 4 :

1) $-8 \leqslant x < -3$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
Donc : $(-8)^2 \geqslant x^2 > (-3)^2$
soit $64 \geqslant x^2 > 9$
donc $9 < x^2 \leqslant 64$

2) $2 < x \leqslant 7$
La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Donc : $2^2 < x^2 \leqslant 7^2$
soit $4 < x^2 \leqslant 49$

3) $-4 \leqslant x < 2$
La fonction carré n'étant pas monotone sur l'intervalle $[-4; 2]$, on dresse son tableau de variations sur $[-4; 2]$:

x	-4		0		2
x^2	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Donc : $0 \leqslant x^2 \leqslant 16$.

Corrigé exercice 5 :

1) $x^2 = 25$
$\Leftrightarrow x = -\sqrt{25}$ ou $x = \sqrt{25}$
$\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 5$
Donc : $S = \{-5; 5\}$.

2) $3x^2 + 7 = 4$
$\Leftrightarrow 3x^2 = -3$
$\Leftrightarrow x^2 = -1$
Donc : $S = \emptyset$.

3) $x^2 > 5$
$\Leftrightarrow x < -\sqrt{5}$ ou $x > \sqrt{5}$
Donc : $S = \left]-\infty; -\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}; +\infty\right[$.

4) $6 - 5x^2 \geqslant 1$
$\Leftrightarrow -5x^2 \geqslant -5$
$\Leftrightarrow x^2 \leqslant 1$
$\Leftrightarrow -\sqrt{1} \leqslant x \leqslant \sqrt{1}$
$\Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$
Donc : $S = [-1; 1]$.

Corrigé exercice 6 :

Dans la suite, on considère que les fonctions affines sont de la forme $x \mapsto mx + p$ avec m et p réels.

1) Cette expression est l’expression d’une fonction affine.

On résout donc : $5x-8=0$ si et seulement si $x=\frac{8}{5}$.
Le coefficient directeur $m=5$ est positif.
On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$5x-8$		$-$	0	$+$	

2) Cette expression est l'expression d'une fonction affine.
On résout donc : $6-3x=0$ si et seulement si $x=2$.
Le coefficient directeur $m=-3$ est négatif.
On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$6-3x$		$+$	0	$-$	

3) Cette expression est le produit de deux fonctions affines.
On résout donc :

$2x-3=0$ si et seulement si $x=\frac{3}{2}$ (avec $m=2>0$)

$7-5x=0$ si et seulement si $x=\frac{7}{5}$ (avec $m=-5<0$)
On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$7-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-3)(7-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) Pour tout réel x, x^2 est positif ou nul, et nul en $x=0$.
Donc, $-\frac{1}{2}x^2$ est négatif ou nul pour tout réel x, et nul en $x=0$.
On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2$		$-$	0	$-$	

5) Pour étudier le signe d'une telle expression, on résout :

$12-3|x|=0$ si et seulement si $-3|x|=-12$

si et seulement si $|x|=4$

si et seulement si $x=-4$ ou $x=4$

$12-3|x|<0$ si et seulement si $-3|x|<-12$

si et seulement si $|x|>4$

si et seulement si $x<-4$ ou $x>4$

On obtient donc :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$12-3\|x\|$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Corrigé exercice 7 :

Dans la suite, on considère que les fonctions affines sont de la forme $x \mapsto mx+p$ avec m et p réels.

1) a) On étudie le signe de l'expression $5-x$.

Cette expression est l'expression d'une fonction affine.

On résout donc : $5-x=0$ si et seulement si $x=5$.

Le coefficient directeur $m=-1$ est négatif.

On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	0	$-$	

Donc :

Si $x<5$, alors $|5-x|=5-x$

Si $x \geqslant 5$, alors $|5-x|=-(5-x)=x-5$

En résumé : $|5-x|=\begin{cases} 5-x & \text{si} \quad x<5 \\ x-5 & \text{si} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$.

b) On étudie le signe de l'expression $2x-6$.

Cette expression est l'expression d'une fonction affine.

On résout donc : $2x-6=0$ si et seulement si $x=3$.

Le coefficient directeur $m=2$ est positif.

On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

Donc :

Si $x < 3$, alors $|2x-6| = -(2x-6) = 6-2x$
Si $x \geqslant 3$, alors $|2x-6| = 2x-6$

En résumé : $|2x-6| = \begin{cases} 6-2x & \text{si} \quad x<3 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$.

2) 1° cas : On considère x tel que $x \leqslant 3$.
Alors : $|5-x| + |2x-6| = 5-x+6-2x$
$= 11-3x$

2° cas : On considère x tel que $3 \leqslant x \leqslant 5$.
Alors : $|5-x| + |2x-6| = 5-x+2x-6$
$= x-1$

3° cas : On considère x tel que $x \geqslant 5$.
Alors : $|5-x| + |2x-6| = x-5+2x-6$
$= 3x-11$

3) a) $|2x-6| = 0$ si et seulement si $2x-6=0$
si et seulement si $2x=6$
si et seulement si $x=3$

Donc : $S = \{3\}$.

b) $|2x-6| < 2$ si et seulement si $-2 < 2x-6 < 2$
si et seulement si $4 < 2x < 8$
si et seulement si $2 < x < 4$

Donc : $S =]2;4[$.

Corrigé exercice 8 :

1) Le volume d'un cylindre est $V = \pi r^2 h$ où r est le rayon du cylindre et h sa hauteur.
D'après l'énoncé, on sait que $h = 15$ cm et $r = \frac{10}{2} = 5$ cm.
Donc : $V = \pi \times 5^2 \times 15 = 375\pi \approx 1178$
Le volume est donc d'environ $1178\,\mathrm{cm}^3$, soit environ $1,178$ L.

2) Le volume d'un cylindre est $V = \pi r^2 h$ où r est le rayon du cylindre et h sa hauteur.
D'après l'énoncé, on sait que $h = 15$ cm. Le volume est de 500 mL, soit 500 cm^3.
On obtient donc : $\pi r^2 \times 15 = 500$
$r^2 = \frac{500}{15\pi}$
$r = \sqrt{\frac{500}{15\pi}}$ puisque $r \geqslant 0$
De plus, le diamètre est $d = 2r$.
D'où : $d = 2\sqrt{\frac{500}{15\pi}} \approx 6,5$
Le diamètre de cette boite de conserve est d'environ $6,5$ cm.