

### Corrigé exercice 63 :

1.

a. La parabole est « tournée vers le bas ». Donc,  $a$  est négatif.

b. Le point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées a pour ordonnées 6.

Donc :  $c = 6$ .

Les points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses ont pour abscisse  $-3$  et  $1$ .

Donc :  $x_1 = -3$  et  $x_2 = 1$ .

Le sommet de la parabole a pour coordonnées  $S(-1; 8)$ .

Donc :  $\alpha = -1$  et  $\beta = 8$ .

2. D'après les informations précédentes, on peut écrire que :

$$f(x) = a[x - (-1)]^2 + 8, \text{ soit } f(x) = a(x + 1)^2 + 8.$$

Or, on sait que :  $f(0) = c = 6$ .

D'où :  $a(0 + 1)^2 + 8 = 6$

$$a \times 1^2 + 8 = 6$$

$$a \times 1 + 8 = 6$$

$$a + 8 = 6$$

$$a = 6 - 8$$

$$a = -2$$

Ainsi :  $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$ .

### Corrigé exercice 64 :

1. La fonction carré n'étant pas monotone sur  $[-2; 7]$ , on dresse le tableau de variations :

$x$	$-2$	$0$	$7$
$f$	4	0	49

D'après le tableau de variations précédent, on conclut que :  $0 \leq x^2 \leq 49$ .

2. On considère  $x$  un réel tel que  $4 \leq x < 7$ .

La fonction carré est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

Donc :  $4^2 \leq x^2 < 7^2$

$$16 \leq x^2 < 49$$

3. La fonction carré n'étant pas monotone sur  $[-3; +\infty[$ , on dresse le tableau de variations :

$x$	$-3$	$0$	$+\infty$
$f$	9	0	

D'après le tableau de variations précédent, on conclut que :  $0 \leq x^2$ .

4. On considère  $x$  un réel tel que  $x < -2$ .

La fonction carré est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

Donc :  $x^2 > (-2)^2$

$$x^2 > 4$$

5. La fonction carré n'étant pas monotone sur  $[-6; 3]$ , on dresse le tableau de variations :

$x$	-6	0	3
$f$	36	0	9

D'après le tableau de variations précédent, on conclut que :  $0 \leq x^2 \leq 36$ .

6. On considère  $x$  un réel tel que  $-11 < x \leq -2$ .

La fonction carré est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

Donc :  $(-11)^2 > x^2 \geq (-2)^2$

$$121 > x^2 \geq 4$$

Enfin :  $4 \leq x^2 < 121$ .

### Corrigé exercice 65 :

1. On considère  $x$  un réel tel que  $-4 < x \leq 3$ .

On ajoute 5 :  $-4 + 5 < x + 5 \leq 3 + 5$

$$1 < x + 5 \leq 8$$

La fonction carré est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

Donc :  $1^2 < (x + 5)^2 \leq 8^2$

$$1 < (x + 5)^2 \leq 64$$

On soustrait 1 :

$$1 - 1 < (x + 5)^2 - 1 \leq 64 - 1$$

$$0 < (x + 5)^2 - 1 \leq 63$$

2. On considère  $x$  un réel tel que  $-4 < x \leq 3$ .

On soustrait 4 :  $-4 - 4 < x - 4 \leq 3 - 4$

$$-8 < x - 4 \leq -1$$

La fonction carré est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

Donc :  $(-8)^2 > (x - 4)^2 \geq (-1)^2$

$$64 > (x - 4)^2 \geq 1$$

On multiplie par le nombre négatif  $(-3)$  :

$$-3 \times 64 < -3(x - 4)^2 \leq -3 \times 1$$

$$-192 < -3(x - 4)^2 \leq -3$$

On ajoute 6 :

$$-192 + 6 < -3(x - 4)^2 + 6 \leq -3 + 6$$

$$-186 < -3(x - 4)^2 + 6 \leq 3$$

Corrigé exercice 66 :

1. On résout :  $(x - 3)^2 \leq 36$

Donc : 
$$\begin{aligned} -\sqrt{36} &\leq x - 3 \leq \sqrt{36} \\ -6 &\leq x - 3 \leq 6 \\ -6 + 3 &\leq x \leq 6 + 3 \\ -3 &\leq x \leq 9 \end{aligned}$$

Donc :  $S = [-3; 9]$ .

2. On résout :  $3(x + 1)^2 - 8 \leq 4$

D'où : 
$$\begin{aligned} 3(x + 1)^2 &\leq 8 + 4 \\ 3(x + 1)^2 &\leq 12 \\ (x + 1)^2 &\leq \frac{12}{3} \\ (x + 1)^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

Donc : 
$$\begin{aligned} -\sqrt{4} &\leq x + 1 \leq \sqrt{4} \\ -2 &\leq x + 1 \leq 2 \\ -2 - 1 &\leq x \leq 2 - 1 \\ -3 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Donc :  $S = [-3; 1]$ .

3. On résout :  $2(x + 1)^2 - 4 \geq 10$

D'où : 
$$\begin{aligned} 2(x + 1)^2 &\geq 10 + 4 \\ 2(x + 1)^2 &\geq 14 \\ (x + 1)^2 &\geq \frac{14}{2} \\ (x + 1)^2 &\geq 7 \end{aligned}$$

Donc : 
$$\begin{aligned} x + 1 &\leq -\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x + 1 \geq \sqrt{7} \\ x &\leq -\sqrt{7} - 1 \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{7} - 1 \end{aligned}$$

Donc :  $S = ]-\infty; -\sqrt{7} - 1] \cup [\sqrt{7} - 1; +\infty[$ .

4. On résout :  $-5(x - 2)^2 \geq 10$

D'où : 
$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &\leq -\frac{10}{5} \\ (x - 2)^2 &\leq -2 \end{aligned}$$

Un carré est positif sur  $\mathbb{R}$ .

Cette inéquation n'admet pas de solution.

Donc :  $S = \emptyset$ .

Corrigé exercice 67 :

$f$  est d'abord croissante puis décroissante. On en déduit que :  $a < 0$ .

L'expression développée de  $f$  est :  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 0 a pour ordonnée  $-2$ . On peut donc en déduire que  $c = -2$ , soit

$$f(x) = ax^2 + bx - 2.$$

Les antécédents de  $-2$  par  $f$  sont  $0$  et  $5$ , soit  $f(0) = f(5) = -2$ .

On peut donc écrire :  $f(5) = -2$

$$a \times 5^2 + b \times 5 - 2 = -2$$

$$a \times 25 + 5b = 0$$

$$25a + 5b = 0$$

$$5b = -25a$$

$$b = -\frac{25a}{5}$$

$$b = -5a$$

Toutes les fonctions  $f$  avec  $a < 0$  et telles que  $b = -5a$  répondent aux conditions de l'exercice.

Par exemple, on prend  $a = -1$  et  $a = -2$ .

$f$  peut donc avoir comme expression :

- $f(x) = -x^2 + 5x - 2$  car  $b = -5 \times (-1) = 5$

- $f(x) = -2x^2 + 10x - 2$  car  $b = -5 \times (-2) = 10$

Corrigé exercice 68 :

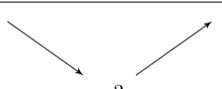
1. On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $a < b \leq 0$

Alors :  $a^2 > b^2$  car la fonction carré est décroissante sur  $] -\infty; 0]$

$$5a^2 > 5b^2 \text{ d'où } 5a^2 - 3 > 5b^2 - 3 \text{ donc } f(a) > f(b).$$

Donc, la fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

2. Voici le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			

Corrigé exercice 69 :

1. On démontre que  $f$  est croissante sur  $] -\infty; 0]$

On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $a < b \leq 0$

Alors :  $a^2 > b^2$  car la fonction carré est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$

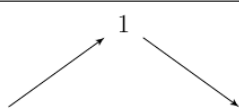
$$-4a^2 < -4b^2$$

$$-4a^2 + 1 < -4b^2 + 1$$

$$f(a) < f(b)$$

Donc, la fonction  $f$  est croissante sur  $] -\infty; 0]$ .

2. Voici son tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			

Corrigé exercice 70 :

1. On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $a < b \leq -2$

Alors :  $a + 2 < b + 2 \leq 0$

$(a + 2)^2 > (b + 2)^2$  car la fonction carré est décroissante sur  $] -\infty; 0]$

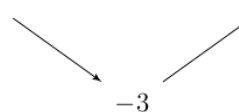
$$4(a + 2)^2 > 4(b + 2)^2$$

$$4(a + 2)^2 - 3 > 4(b + 2)^2 - 3$$

$$f(a) > f(b)$$

Donc, la fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; -2]$ .

2. Voici le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f$			

Corrigé exercice 71 :

1.

- a. On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $a < b \leq -7$

Alors :  $a + 7 < b + 7 \leq 0$

$(a + 7)^2 > (b + 7)^2$  car la fonction carré est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$

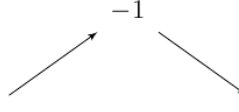
$$-2(a + 7)^2 < -2(b + 7)^2$$

$$-2(a + 7)^2 - 1 < -2(b + 7)^2 - 1$$

$$f(a) < f(b)$$

Donc, la fonction  $f$  est croissante sur  $] -\infty; -7]$ .

- b. Voici le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-7$	$+\infty$
$f$			

2. La fonction  $f$  est donnée par sa forme canonique. On remarque que :  $\alpha = -7$  et  $\beta = -1$ .

Une équation de l'axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$  est donc  $x = -7$ . Le sommet  $S$  de  $\mathcal{C}_f$  a donc pour coordonnées  $S(-7; -1)$ .

Corrigé exercice 72 :

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$(x + 3)^2 \geq 0 \text{ donc } -(x + 3)^2 \leq 0 \text{ d'où } -(x + 3)^2 + 5 \leq 5 \text{ donc } f(x) \leq 5.$$

De plus :  $f(-3) = 5$ .

Donc, la fonction  $f$  admet 5 pour maximum sur  $\mathbb{R}$ . Il est atteint pour  $x = -3$ .

Corrigé exercice 73 :

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$(x - 2)^2 \geq 0$$

$$6(x - 2)^2 \geq 0$$

$$6(x - 2)^2 - 7 \geq -7$$

$$f(x) \geq -7$$

De plus :  $f(2) = -7$ .

Donc, la fonction  $f$  admet  $-7$  pour minimum sur  $\mathbb{R}$ . Il est atteint pour  $x = 2$ .

Corrigé exercice 74 :

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$(x + 4)^2 \geq 0 \text{ donc } -3(x + 4)^2 \leq 0 \text{ d'où } -3(x + 4)^2 - 2 \leq -2 \text{ soit } g(x) \leq -2$$

De plus :  $g(-4) = -2$ .

Donc, la fonction  $g$  admet  $-2$  pour maximum sur  $\mathbb{R}$ . Il est atteint pour  $x = -4$ .

Corrigé exercice 75 :

1. On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $a < b \leq 1$

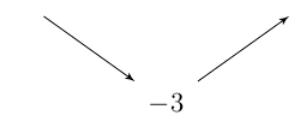
Alors :  $a - 1 < b - 1 \leq 0$

donc  $(a - 1)^2 > (b - 1)^2$  car la fonction carré est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

d'où  $5(a - 1)^2 > 5(b - 1)^2$  soit  $5(a - 1)^2 - 3 > 5(b - 1)^2 - 3$  donc  $f(a) > f(b)$

Donc, la fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; 1]$ .

2. Voici le tableau de variations de  $f$ :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f$			

3. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$(x - 1)^2 \geq 0 \text{ soit } 5(x - 1)^2 \geq 0 \text{ soit } 5(x - 1)^2 - 3 \geq -3.$$

De plus :  $f(1) = -3$  donc, la fonction  $f$  admet  $-3$  pour minimum sur  $\mathbb{R}$ . Il est atteint pour  $x = 1$ .

Corrigé exercice 76 :

1. **Affirmation fausse** :  $f(-10) > 0$

2. **Affirmation vraie** :  $f(-9) \geq f(1)$ .

En effet :  $f(1) < 0 < f(-9)$ , soit  $f(1) < f(-9)$ . Donc :  $f(1) \leq f(-9)$

3. **Affirmation fausse** :  $0 > f(0)$ , donc  $f(0) \neq 2$ . Par contre :  $f(2) = 0$ .

4. **Affirmation fausse** :  $a > 0$  puisque  $f$  est d'abord positive puis négative.

5. **Affirmation vraie** : L'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = 0$  est  $S = \{-8; 2\}$ , puisque  $f(-8) = f(2) = 0$ .

6. **Affirmation fausse** : L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) < 0$  est  $S = ] -8; 2[$ .

Corrigé exercice 77 :

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Pour tout réel } x, \text{ on a : } f(x) &= 2(x-3)^2 - 8 \\
 &= 2(x^2 - 6x + 9) - 8 \\
 &= 2x^2 - 12x + 18 - 8 \\
 &= 2x^2 - 12x + 10
 \end{aligned}$$

La forme développée de  $f$  est donc  $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ .

Autre possibilité :  $f(x) = 2(x-5)(x-1) = 2(x^2 - x - 5x + 5) = 2(x^2 - 6x + 5)$   
 $= 2x^2 - 12x + 10$

2.

- a. En utilisant la forme canonique de  $f$ ,  $f(x) = 2(x-3)^2 - 8$ , on conclut que la droite d'équation  $x = 3$  est l'axe de symétrie  $\mathcal{P}$ .  
 Son sommet a pour coordonnées  $S(3; -8)$ .
- b. En utilisant la forme factorisée de  $f$ ,  $f(x) = 2(x-5)(x-1)$ , on connaît les solutions de  $f(x) = 0$ , soit  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 5$ .  
 De plus :  $a > 0$ .  $f$  est donc d'abord positive, puis négative et de nouveau positive.  
 On peut dresser le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+