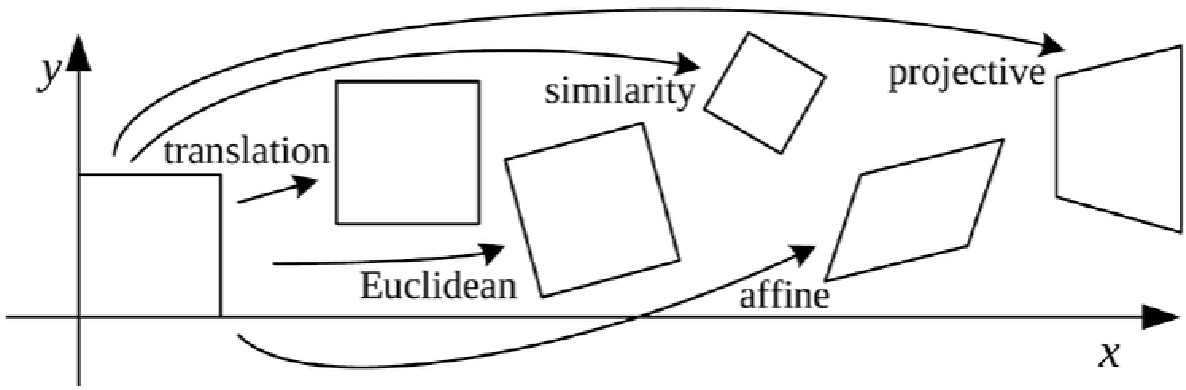
2D Transformations

在计算机视觉中，齐次向量和非齐次向量之间的转换可以通过将齐次向量的前n个元素除以第n+1个元素来实现，其中n是向量的维数。这个过程被称为“去齐次化”（dehomogenization）。



x DoF x个自由度

- Translation(平移):2D Translation of the Input,2 DoF 对增广向量进行操作。

$$x' = x + t$$
$$\bar{x}' = \begin{bmatrix} I & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \bar{x}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里的自由度是2，显然 存在t_x, t_y两个自由度，这个也挺显然的，对于x，y两个维度进行平移

- Euclidean(欧氏距离):2D Translation + 2D Rotation，3 DoF

旋转是一个自由度(这里可以认为是旋转的角度θ 本质上是绕z轴旋转，因此如果再升一维度，其旋转自由度应该有三个 x，y，z)，还有平移的两个自由度，总共三个自由度。

$$x' = Rx + t$$
$$\bar{x}' = \left[\begin{array}{cc} R & t \\ 0^T & 1 \end{array} \right] \bar{x}$$

旋转矩阵满足$RR^T = I \quad and \quad det(R) = 1$

- Similarity:(2D Translation + Scaled 2D Rotation,4 DoF)

$$x' = sRx + t$$
$$\bar{x}' = \left[\begin{array}{cc} R & t \\ 0^T & 1 \end{array} \right] \bar{x}$$

相比于Euclidean 多了一个缩放的系数 s

- Affine(2D Liear Transformation, 6DoF)

$$x' = Ax + t$$
$$\bar{x}' = \left[\begin{array}{cc} A & t \\ 0^T & 1 \end{array} \right] \bar{x}$$

仿射变换， A中有四个自由度，一个A矩阵，实际上是对其进行变换，之前的直观感受 就是左乘一个矩阵，就是对这个向量进行平移和旋转，但是其实如果这个矩阵一般话，那么他就是对其进行仿射变换。A一般性$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，这个仿射变换保留性质，平行线在仿射变换后仍然平行。

- Perspective (Homography, 8 DoF)

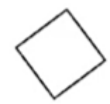
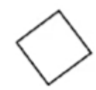
透视变换，将不保留上述平行线变换后仍然平行的性质，存在8个自由度。具体如下：

$$\tilde{x}' = \tilde{H}\tilde{x} \quad (\bar{x} = \frac{1}{\tilde{w}}\tilde{x})$$
$$\tilde{H} = \left[\begin{array}{c} h_{1,1}, h_{1,2}, h_{1,3} \\ h_{2,1}, h_{2,2}, h_{2,3} \\ h_{3,1}, h_{3,2}, 1 \end{array} \right]$$

tilde表示在原始图像坐标系下的坐标，而prime表示在变换后的图像坐标系下的坐标

$$\tilde{l}'^T \tilde{x}' = \tilde{l}'^T \tilde{H}\tilde{x} = (\tilde{H}^T \tilde{l}')^T \tilde{x} = \tilde{l}^T \tilde{x} = 0$$
$$Hence \quad \tilde{l}' = \tilde{H}^{-T} \tilde{l}$$

对比一下 3D的

Transformation	Matrix	# DoF	Preserves	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	3	orientation	
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	6	lengths	
similarity	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	7	angles	
affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	12	parallelism	
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix}_{4\times 4}$	15	straight lines	

参考资料

4810 - Homogeneous Vectors and Transformations (virginia.edu)

特征值和特征向量 - 知乎 (zhihu.com)