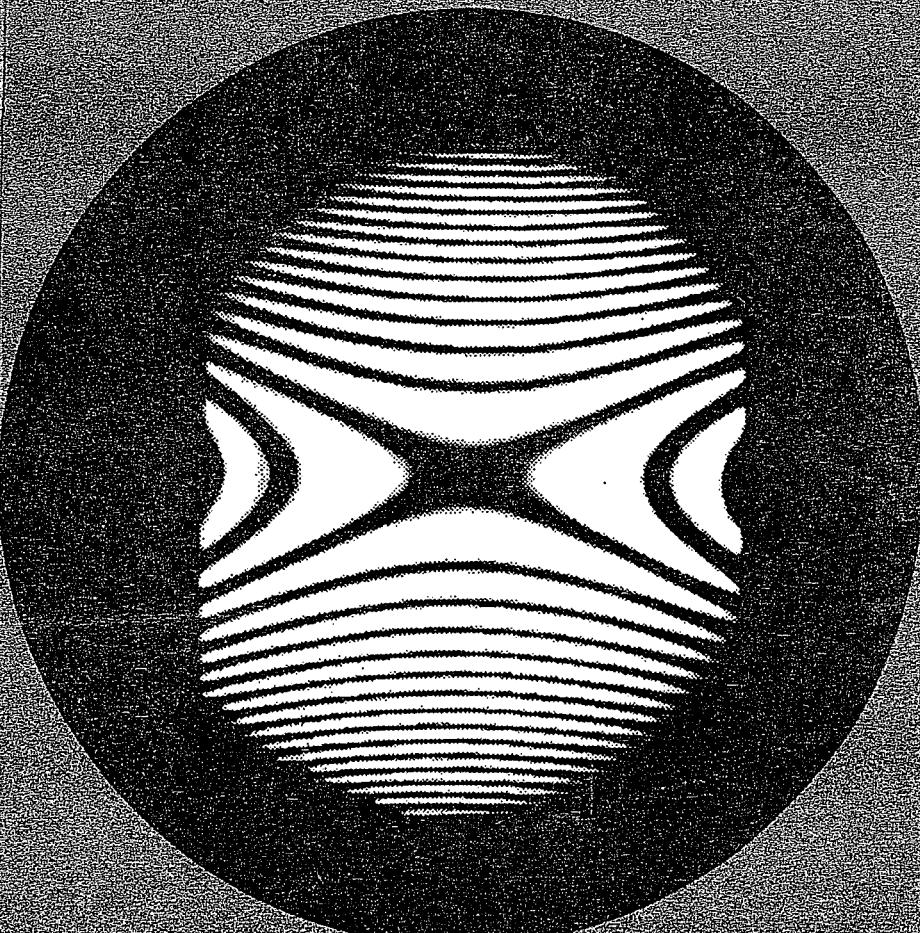


TIMOSHENKO
Y GOODIER

TEORIA DE LA ELASTICIDAD



TEORIA DE LA ELASTICIDAD

E.U.R.M.

TIMOSHENKO-GOODIER

EDICIONES U.R.M.O.



S. TIMOSHENKO y
J. N. GOODIER

Profesores de Ingeniería Mecánica
de la Universidad de Stanford

2.^a EDICION EN ESPAÑOL: 1975

RIGOBERTO
GÓMEZ
ARITA



Traducido por
ALBERTO FUENTES PEREZ
Licenciado en Ciencias Físicas
Colaborador del Instituto
Eduardo Torroja
de la Construcción y el Cemento
Jefe de la Sección de Física del
Laboratorio de Ensayos
de la Compañía General de
Asfaltos y Portland Asland

MUNDO
URMO, S. A. DE EDICIONES

J. DE AJURIAGUERRA 10 - BILBAO - 9

Única traducción autorizada al castellano de la obra en lengua inglesa *Theory of Elasticity* Copyright, 1934, by the United Engineering Trustees, Inc. Copyright, 1951, by the McGraw-Hill Book Company, Inc. Nueva York.

©Urmo, S. A. de Ediciones
J. de Ajuriaguerra, 10 - Bilbao-9
Hecho el depósito que marca la ley
1968
Impreso en España por:
Fotocomposición:
Artes Gráficas Grijelmo, S. A.
Impresión:
Publidisa
Printed in Spain
Depósito legal: SE-1018-2009
I.S.B.N. 978-84-314-0231-0

Prólogo a la segunda edición

El notable desarrollo y clasificación de la teoría de la elasticidad y de sus aplicaciones, ocurrido desde que la primera edición fue escrita, es reflejado en las numerosas adiciones y enmiendas introducidas en la edición presente. La estructura de la obra sigue siendo la misma en su mayor parte.

Las cuestiones referentes al método fotoelástico, problemas bidimensionales en coordenadas curvilíneas y tensiones de origen térmico han sido ampliadas y redactadas de nuevo, constituyendo ahora capítulos independientes que presentan muchos métodos y soluciones que no se encontraban en la edición anterior. Se ha añadido un apéndice en el que se expone el método de las diferencias finitas y sus aplicaciones, incluyendo el método de relajación. Asimismo, en los otros capítulos, se han introducido nuevas preguntas que tratan sobre la teoría de la «roseta», tensiones gravitatorias, principio de Saint-Venant, componentes de la rotación, teorema de reciprocidad, carácter aproximado de las soluciones de los estados tensionales planos, centro de torsión y centro de flexión, concentración de las tensiones de torsión en las zonas de transición, estudio aproximado de secciones delgadas sometidas a torsión y flexión y cilindro de sección circular sometido en una banda de su superficie a la acción de una presión.

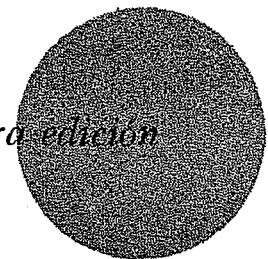
Pensando en los alumnos se han incluido al final de cada capítulo, desde el primero hasta el dedicado a la torsión, algunos problemas.

Agradecemos vivamente las numerosas sugerencias y consejos de los lectores del libro.

S. TIMOSHENKO
J. N. GOODIER

PALO ALTO, CALIFORNIA
Febrero, 1951

Prólogo a la primera edición



Durante los últimos años, la teoría de la elasticidad ha sido aplicada a la resolución de numerosos problemas de ingeniería. Existen muchos casos, en efecto, en los que, los métodos elementales de la resistencia de materiales resultan inadecuados para obtener la distribución tensional, que se produce en las estructuras, debiendo hacerse uso de los métodos de la teoría de la elasticidad. Este es el caso, por ejemplo, de las tensiones locales que se producen en la proximidad de los puntos de aplicación de las cargas o de los soportes de las vigas, de la distribución tensional en cuerpos cuyas dimensiones son todas del mismo orden de magnitud, de las tensiones en rodillos y en bolas de cojinetes. De igual forma, la teoría elemental no permite estudiar el estado tensional existente en aquellas zonas de vigas o ejes en las que la sección cambia bruscamente. Como se sabe, los ángulos entrantes originan fuertes concentraciones de tensiones, las cuales pueden causar fisuras, especialmente si la estructura sufre esfuerzos oscilantes. La mayoría de los casos de fractura que se dan en las piezas de máquinas tienen ese origen.

En los últimos años, se ha avanzado considerablemente en la resolución de esos problemas, de importancia práctica tan notable. En ciertos casos, en los que es difícil obtener la solución exacta, se ha hecho uso de métodos aproximados. En otros, han sido empleados procedimientos experimentales. Uno de ellos es el método fotoelástico, aplicable a problemas bidimensionales. El equipo para ensayos fotoelásticos puede encontrarse hoy en universidades y en muchos laboratorios de investigación industrial. Los resultados de los ensayos fotoelásticos han sido especialmente útiles para el estudio de la concentración de tensiones en puntos de zonas de variación rápida de la sección transversal y en ángulos entrantes. Sin lugar a dudas, estos resultados han influenciado notablemente el diseño

de las piezas de maquinaria, ayudando a eliminar las zonas débiles en las que las fisuras pueden iniciarse.

Otro ejemplo de la aplicación fecunda de los métodos experimentales, es el empleo de la película de jabón para la determinación de las tensiones de torsión y flexión en piezas prismáticas. El difícil problema de la integración de una ecuación diferencial sometida a unas ciertas condiciones de contorno se reduce, en este caso, a la medida de las pendientes y deflexiones de una película de jabón convenientemente estirada y cargada. Los experimentos demuestran que de esta forma se obtiene, no sólo una imagen de la distribución tensinal, sino también la necesaria información cuantitativa sobre la misma, con una exactitud suficiente para las aplicaciones prácticas.

La analogía eléctrica proporciona, también, un medio para estudiar las tensiones producidas por la torsión en las zonas de transición de ejes de diámetro variable. La analogía entre el problema de la torsión de placas y el de la elasticidad bidimensional, ha sido aplicado también con éxito en la resolución de importantes problemas de ingeniería.

Al preparar este libro se ha intentado facilitar a los ingenieros, de manera sencilla, el conocimiento fundamental necesario de la teoría de la elasticidad. Se ha querido también presentar la solución de ciertos problemas especiales que pueden ser de importancia práctica, así como describir los métodos aproximados y experimentales de resolución de los problemas de elasticidad.

Pensando en las aplicaciones prácticas de la teoría de la elasticidad, hemos omitido algunos temas de gran interés teórico y aquellas que en el momento actual no presentan ninguna aplicación práctica inmediata, para dar lugar al estudio de problemas concretos. Sólo considerando tales casos con todo detalle y comparando los resultados dados por los métodos exactos con las soluciones aproximadas dadas en los textos elementales de resistencia de materiales, puede el proyectista adquirir un conocimiento profundo de la distribución de tensiones en las estructuras, enseñándosele las ventajas de los métodos rigurosos del análisis tensional.

Al estudiar problemas especiales, se ha aplicado, en la mayoría de los casos, el método de la determinación directa de las tensiones y se han empleado las ecuaciones de compatibilidad expresadas en función de las componentes de la tensión. Este método es más familiar a los ingenieros, los cuales se interesan, por lo general, por la magnitud de las tensiones. Una adecuada introducción de funciones de tensión suele simplificar este método, haciéndolo más sencillo que aquel en el que las ecuaciones de equilibrio son expresadas en función de los corrimientos.

En numerosos casos, se ha hecho uso del método de la energía elástica. De esta forma, la integración de ecuaciones diferenciales, queda sustituida por la búsqueda de las condiciones de mínimo de una cierta integral. Este problema de cálculo variacional se reduce, usando el método de Ritz,

a la sencilla obtención del mínimo de una función. De esta forma, se encuentran soluciones aproximadas útiles en muchos casos de importancia práctica.

Con el fin de simplificar, el libro comienza con los problemas bidimensionales, pasando luego, cuando el lector se ha familiarizado con los métodos de resolución de los problemas de la teoría de la elasticidad, a los tridimensionales. Aquellas partes del libro que siendo importantes, se pueden omitir en una primera lectura, van impresas en letra pequeña. El lector puede estudiar tales problemas después de haber acabado con las partes más esenciales de la obra.

Las deducciones matemáticas son presentadas en forma elemental no requiriendo, por lo general, mayores conocimientos que los dados en las escuelas de ingeniería. Si los problemas son más complicados, se dan todas las explicaciones necesarias y los cálculos intermedios con el fin de que el lector pueda seguir sin dificultad los desarrollos matemáticos. Sólo en unos pocos casos son presentados los resultados finales sin detallar la deducción de los mismos. En ese caso, se incluye la referencia de los trabajos en los que tales deducciones pueden ser encontradas.

Las numerosas notas que contiene este libro dan la referencia de los trabajos y libros sobre teoría de la elasticidad que pueden ser de importancia práctica. Tales referencias pueden ser de interés para los ingenieros que deseen estudiar algún problema especial con mayor detalle. Ellas nos dan también una visión del desarrollo moderno de la teoría de la elasticidad, pudiendo ser de interés para aquellos graduados que se especializan en este campo.

En la preparación de este libro se ha utilizado una obra sobre el mismo tema (*Theory of Elasticity*, vol. 1, San Petersburgo, Rusia, 1914), constituido por una serie de conferencias dadas en diversas escuelas de ingeniería rusas.

El autor ha sido ayudado en su trabajo por el Dr. L. H. Donnell y el Dr. J. N. Goodier, quienes revisaron el manuscrito y le sugirieron diversas correcciones. El autor agradece asimismo a los profesores G. H. Mac Cullough, E. E. Weibel, M. Sadowsky y D. H. Young, la colaboración prestada en la preparación final del libro y en la lectura de algunas partes del manuscrito. Queda también reconocido al señor L. S. Veenstra por la realización de los dibujos y a la señora E. D. Webster por su trabajo de mecanografía.

S. TIMOSHENKO

UNIVERSIDAD DE MICHIGAN
Diciembre, 1933

Índice

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN	7
PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN	9
NOTACIONES	19

**CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN**

1. Elasticidad	21
2. Tensiones.	22
3. Notaciones correspondientes a las fuerzas y a las tensiones	23
4. Componentes de la tensión	24
5. Componentes de la deformación	25
6. Ley de Hooke	27
Problemas.	31

**CAPÍTULO 2
TENSIONES PLANAS Y DEFORMACIONES PLANAS**

7. Tensiones planas.	32
8. Deformación plana	32
9. Tensiones en un punto	34
10. Deformación en un punto	39
11. Medida de las deformaciones superficiales	41
12. Construcción del círculo de Mohr a partir de las medidas realizadas con una roseta.	43
13. Ecuaciones diferenciales de equilibrio	43
14. Condiciones de contorno	45
15. Ecuaciones de compatibilidad	45
16. Función de tensión.	48
Problemas.	50

INDICE

CAPÍTULO 3		
PROBLEMAS BIDIMENSIONALES EN COORDENADAS RECTANGULARES		
17.	Soluciones polinómicas	52
18.	Principio de Saint-Venant	56
19.	Determinación de los desplazamientos	57
20.	Flexión de una pieza en voladizo con carga en su extremidad libre	58
21.	Flexión de una viga uniformemente cargada	63
22.	Otros casos de flexión de vigas bajo cargas continuas	68
23.	Solución del problema de la elasticidad plana por medio de una serie de Fourier	70
24.	Otras aplicaciones de las series de Fourier. Caso en que la carga a considerar es el peso	77
	Problemas.	78

CAPÍTULO 4

PROBLEMAS BIDIMENSIONALES
EN COORDENADAS POLARES

25.	Ecuaciones generales en coordenadas polares	80
26.	Distribución de tensiones simétricas respecto a un eje	83
27.	Flexión simple de piezas curvas	86
28.	Componentes de la deformación en coordenadas polares	91
29.	Distribución simétrica de tensiones: desplazamientos	92
30.	Discos giratorios	95
31.	Ménsula curva cargada en su extremo libre	99
32.	Influencia de un orificio circular sobre la distribución de tensiones existente en una placa	104
33.	Fuerza concentrada en un punto de un borde rectilíneo	111
34.	Caso general de carga normal al borde recto de una placa	118
35.	Cuña con carga en la punta	123
36.	Carga concentrada sobre una viga	125
37.	Tensiones en un disco circular	134
38.	Placa indefinida con carga concentrada en un punto	139
39.	Solución general del problema bidimensional en coordenadas polares	144
40.	Aplicaciones de la solución general en coordenadas polares	149
41.	Cuña cargada sobre sus caras	151
	Problemas.	153

CAPÍTULO 5

EL METODO FOTOELASTICO

42.	Medida fotoelástica de tensiones	159
43.	Polaríscopio circular	164
44.	Ejemplos de determinación fotoelástica de las tensiones	167
45.	Determinación de las tensiones principales	170
46.	Fotoelasticidad tridimensional	171

INDICE

CAPÍTULO 6
METODOS ELASTO-ENERGETICOS

47.	Energía potencial elástica	174
48.	Principio de los trabajos virtuales	179
49.	Teorema de Castigliano	191
50.	Principio del mínimo trabajo	195
51.	Aplicaciones del principio de mínimo trabajo. Placas rectangulares	196
52.	Anchura eficaz de alas de las vigas en T	201
53.	Arrastre por tensión cortante. Problemas.	207
		207

CAPÍTULO 7

PROBLEMAS BIDIMENSIONALES
EN COORDENADAS CURVILINÉAS

54.	Funciones de variable compleja	210
55.	Funciones analíticas y ecuación de Laplace	212
	Problemas.	214
56.	Expresión de la función de tensión mediante funciones armónicas y complejas	214
57.	Desplazamientos correspondientes a una determinada función de tensión	217
58.	Tensiones y desplazamientos expresados en función de los potenciales complejos	219
59.	Resultante de las tensiones que actúan sobre una curva. Condiciones de contorno	221
60.	Coordenadas curvilíneas	223
61.	Componentes de la tensión en coordenadas curvilíneas	227
	Problemas.	229
62.	Soluciones en coordenadas elípticas. Placa sometida a un esfuerzo de tracción uniforme	230
63.	Influencia de un orificio elíptico en una placa sometida a tracción simple	234
64.	Contornos hiperbólicos. Entalladuras	237
65.	Coordenadas bipolares	239
66.	Soluciones en coordenadas bipolares	241
	Otras coordenadas curvilíneas	245

CAPÍTULO 8

TENSIONES Y DEFORMACIONES EN TRES DIMENSIONES

67.	Definición de la tensión en un punto	247
68.	Tensiones principales	248
69.	Elipsoide de las tensiones y superficie directriz	250
70.	Determinación de las tensiones principales	251
71.	Determinación de la tensión tangencial máxima	252
72.	Deformación homogénea	254
73.	Deformación en un punto	255
74.	Ejes principales de deformación	258
75.	Rotación	260
	Problemas.	262

**CAPÍTULO 9
TEOREMAS GENERALES**

76.	Ecuaciones diferenciales de equilibrio	263
77.	Condiciones de compatibilidad.	265
78.	Determinación de los desplazamientos.	268
79.	Las ecuaciones de equilibrio como funciones de los desplazamientos.	269
80.	Solución general para los desplazamientos	270
81.	Principio de superposición.	271
82.	Unidad de la solución.	272
83.	Teorema de reciprocidad	274
84.	Carácter aproximado de las soluciones de los estados tensionales planos.	277
	Problemas.	279

CAPÍTULO 10

**PROBLEMAS ELEMENTALES
DE ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL**

85.	Tensión uniforme	281
86.	Barra prismática extendida por acción de su propio peso.	282
87.	Torsión de ejes cilíndricos de sección circular constante	285
88.	Flexión simple de barras prismáticas	287
89.	Flexión simple de placas planas	291

CAPÍTULO 11**TORSION**

90.	Torsión de barras prismáticas	294
91.	Barras de sección transversal elíptica	300
92.	Otras soluciones elementales.	302
93.	Analogía con la membrana.	306
94.	Torsión de barras de sección rectangular estrecha.	310
95.	Torsión de barras de sección rectangular	312
96.	Resultados complementarios	316
97.	Resolución de problemas de torsión por el método elasto-energético.	318
98.	Torsión de perfiles laminados	324
99.	Empleo de películas de jabón para resolver problemas de torsión	327
100.	Analogías hidrodinámicas	329
101.	Torsión de árboles huecos.	332
102.	Torsión de tubos de pared delgada	336
103.	Torsión de una barra en la que se impide el alabeo de una de las secciones transversales.	340
104.	Torsión de árboles circulares de diámetro variable	342
	Problemas.	351

**CAPÍTULO 12
FLEXION DE PIEZAS PRISMATICAS**

105.	Flexión de una pieza en voladizo	355
106.	Función de tensión.	357
107.	Sección transversal circular	359
108.	Sección transversal elíptica	360
109.	Sección transversal rectangular.	362
110.	Resultados complementarios	368
111.	Secciones transversales no simétricas	370
112.	Centro de flexión o centro de cortadura	372
113.	Resolución de los problemas de flexión por el método de la película de jabón	376
114.	Desplazamientos	380
115.	Otros estudios sobre la flexión	380

CAPÍTULO 13

**DISTRIBUCION TENSINAL SIMETRICA RESPECTO AL EJE
EN UN SOLIDO DE REVOLUCION**

116.	Ecuaciones generales	382
117.	Soluciones polinómicas	386
118.	Flexión de una placa circular	388
119.	Caso de disco giratorio considerado como problema tridimensional	391
120.	Sólido de extensión indefinida cargado en uno de sus puntos	394
121.	Recipiente esférico sometido a una presión uniforme interior o exterior	396
122.	Tensiones locales alrededor de una cavidad esférica	399
123.	Fuerza sobre el contorno de un cuerpo semiindefinido.	402
124.	Sólido semiindefinido sometido a la acción de una carga distribuida sobre una zona de su plano limitante	406
125.	Presión entre dos cuerpos esféricos en contacto.	413
126.	Caso general de presión entre dos cuerpos en contacto.	419
127.	Choque de esferas	424
128.	Deformación de un cilindro circular cargado simétricamente	426
129.	Cilindro circular sometido a la acción de una presión sobre una banda de su superficie	430
130.	Torsión de un sector de anillo de sección circular.	433
131.	Flexión simple de un sector de anillo de sección circular.	438

CAPÍTULO 14**TENSIONES DE ORIGEN TERMICO**

132.	Casos sencillos de tensiones de origen térmico	441
133.	Algunos problemas planos de tensiones de origen térmico	446
134.	Disco circular delgado. Repartición de temperaturas simétrica respecto al centro	448
135.	Cilindro largo de sección circular.	450
136.	Tensiones de origen térmico en una esfera.	459
137.	Ecuaciones generales	463
138.	Tensiones iniciales.	467

INDICE

139. Problemas bidimensionales con flujo estacionario de calor	470
140. Solución de las ecuaciones generales	475

CAPÍTULO 15

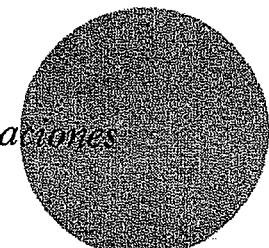
PROPAGACION DE ONDAS EN MEDIOS ELASTICOS

141. Movimiento generado por fuerzas	480
142. Ondas longitudinales en barras prismáticas	480
143. Choque longitudinal de dos barras	486
144. Ondas de dilatación y ondas de distorsión en medios elásticos isótropos	495
145. Ondas planas	496
146. Propagación de ondas sobre la superficie de un cuerpo elástico	499

APÉNDICE

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES
EN DIFERENCIAS FINITAS EN ELASTICIDAD

1. Deducción de las ecuaciones en diferencias finitas	503
2. Métodos de aproximación sucesiva	507
3. Métodos de relajación	510
4. Redes triangulares y hexagonales	515
5. Relajación en grupo y en bloque	520
6. Torsión de barras de sección múltiplemente conexa	521
7. Puntos próximos al contorno	523
8. Ecuación biarmónica	525
9. Torsión de árboles circulares de diámetro variable	534
ÍNDICE DE AUTORES	539
ÍNDICE ALFABÉTICO	543



Notas

- x, y, z Coordenadas rectangulares.
 r, θ Coordenadas polares.
 ξ, η Coordenadas curvilíneas ortogonales; a veces coordenadas rectangulares.
 R, Ψ, θ Coordenadas esféricas.
 N Normal exterior a la superficie de un cuerpo.
 l, m, n Cosenos directores de la normal exterior.
 A Área de una sección transversal.
 I_x, I_y Momento de inercia de una sección transversal respecto a los ejes x e y , respectivamente.
 I_p Momento polar de inercia de una sección transversal.
 g Aceleración de la gravedad.
 ρ Densidad.
 q Intensidad de una carga distribuida en forma uniforme.
 p Presión.
 X, Y, Z Componentes de una fuerza másica por unidad de volumen.
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ Componentes de una fuerza superficial actuando sobre la superficie de un cuerpo por unidad de superficie.
 M Momento flector.
 M_r Momento torsor.
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Componentes normales de tensiones, paralelas a los ejes x, y y z , respectivamente.
 σ_n Componente normal de tensiones paralelas a n .
 σ_r, σ_θ Tensiones normales, radial y tangencial, respectivamente, en coordenadas polares.
 σ_ξ, σ_η Componentes normales de la tensión en coordenadas curvilineas.
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ Componentes normales en coordenadas cilíndricas.
 $\Theta = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$.

TEORIA DE LA ELASTICIDAD

τ	Tensión tangencial.
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Componentes de la tensión tangencial en coordenadas rectangulares.
$\tau_{\theta\theta}$	Tensión tangencial en coordenadas polares.
$\tau_{\xi\xi}, \tau_{\eta\eta}$	Tensión tangencial en coordenadas curvilineas.
$\tau_{r,r}, \tau_{\theta,\theta}, \tau_{z,z}$	Componentes de la tensión tangencial en coordenadas cilíndricas.
S	Tensión total en un plano.
u, v, w	Componentes de los desplazamientos.
ϵ	Elongación unitaria.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Proyecciones de la elongación unitaria sobre los ejes x, y, z .
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	Elongaciones unitarias radial y tangencial en coordenadas polares.
$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$	Dilatación cúbica.
γ	Deformación tangencial.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Componentes de la deformación tangencial en coordenadas rectangulares.
$\gamma_{r,r}, \gamma_{\theta,\theta}, \gamma_{z,z}$	Componentes de la deformación tangencial en coordenadas cilíndricas.
E	Módulo de elasticidad.
G	Módulo de rigidez.
ν	Coeficiente de Poisson.
$\mu = G, \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	Constantes de Lamé.
ϕ	Función de tensión.
$\psi(z), \chi(z)$	Potenciales complejos; funciones de la variable compleja $z = x + iy$.
\bar{z}	Variable compleja conjugada $x - iy$.
C	Rigidez torsional.
θ	Ángulo específico de torsión.
$F = 2G\theta$	Expresión usada en problemas de torsión.
V	Energía de deformación.
V_u	Energía de deformación por unidad de volumen.
t	Tiempo.
T	Intervalo de tiempo. Temperatura.
α	Coeficiente de dilatación térmica.

Introducción

1. Elasticidad. Todos los materiales estructurales presentan en cierto grado la propiedad de *elasticidad*, es decir, si las fuerzas exteriores que deforman la estructura no rebasan un cierto límite, la deformación desaparece cuando se suprimen tales fuerzas. En este libro, se supondrá que los cuerpos que sufren la acción de las fuerzas exteriores son *perfectamente elásticos*, es decir, recuperan su forma inicial después de suprimir las fuerzas.

La estructura molecular de los cuerpos elásticos no será considerada. Se supondrá que la materia del cuerpo elástico es *homogénea* distribuyéndose con continuidad en su volumen, de forma que cualquier elemento extraído de él, posee sus mismas propiedades físicas. Para simplificar los razonamientos se supondrá también que el cuerpo es *isótropo*, es decir, las propiedades elásticas son las mismas en todas las direcciones.

Los materiales estructurales no cumplen, en general, las condiciones señaladas anteriormente. Un material tan importante como el acero, por ejemplo, consiste en cristales diferentes, distintamente orientados como puede verse al observarlo al microscopio. El material dista mucho de ser homogéneo, pero la experiencia muestra que las soluciones de la teoría elástica, admitiendo las condiciones de homogeneidad e isotropía, pueden ser aplicadas a las estructuras de acero con gran exactitud. La explicación es que los cristales son muy pequeños: generalmente hay millones en un centímetro cúbico. Mientras que las propiedades elásticas de un cristal pueden variar mucho con la dirección, los cristales están generalmente orientados al azar y las propiedades elásticas de las piezas grandes corresponden a los promedios de las propiedades cristalinas. Siempre que las dimensiones geométricas de un cuerpo sean grandes comparadas con las dimensiones de los cristales, la suposición de homogeneidad puede ser

usada con gran exactitud y si los cristales están orientados al azar, el material puede ser tratado también como isotrópico.

Cuando a causa de ciertos procesos tecnológicos, tales como el laminado, predomina una cierta orientación de los cristales del metal, las propiedades elásticas dependen de la dirección y debe considerarse la *condición de anisotropía*. Tal condición se da, por ejemplo, en el cobre laminado en frío.

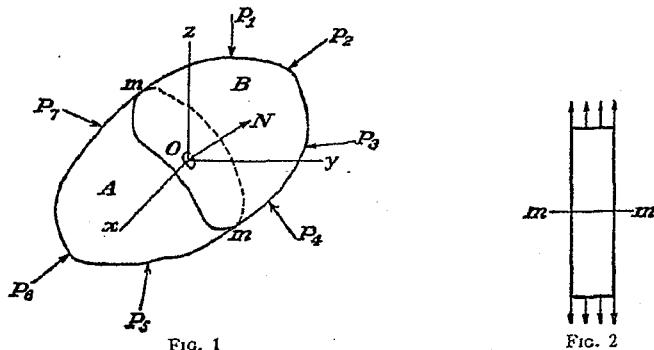


FIG. 1

FIG. 2

2. Tensiones. Supongamos que el cuerpo representado en la figura 1, se encuentra en equilibrio. Bajo la acción de las fuerzas exteriores P_1, \dots, P_7 , se producirán fuerzas interiores que actuarán entre las distintas partes del cuerpo. Para determinar la magnitud de esas fuerzas en cualquier punto O , supongamos al cuerpo dividido en dos partes A y B , mediante la sección plana mm que contiene a dicho punto. Si consideramos una de esas regiones, por ejemplo, la A , se puede establecer que está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores P_1, \dots, P_7 y las fuerzas interiores, repartidas en la sección mm , que representan la acción del material de la región B sobre el material de la región A . Se supondrá que estas fuerzas se distribuyen con continuidad en la sección mm , de la misma forma que la presión hidrostática o la presión del viento se distribuyen de forma continua en la superficie sobre la cual actúan. La magnitud de tales fuerzas se define generalmente por su *intensidad*, o sea, por la fuerza que actúa sobre el área unidad. Cuando se trata de fuerzas interiores, la intensidad se llama *tensión*.

En el caso sencillo de una barra prismática, sometida a tracción bajo la acción de fuerzas distribuidas uniformemente sobre sus extremos (fig. 2), las fuerzas interiores se distribuyen también uniformemente sobre cualquier sección plana mm . En consecuencia, la intensidad de esta distribución, la tensión, puede obtenerse dividiendo la fuerza P por el área A de la sección recta.

En el caso que acabamos de considerar, la tensión era uniforme en toda la sección recta. En el caso general de la figura 1, la tensión no se distribuye uniformemente en mm . Para obtener la magnitud de la tensión que actúa sobre el pequeño elemento de área δA , que comprende al punto O , suponemos que las fuerzas que actúan a través de este área elemental, debidas a la acción del material de la parte B sobre el material de la parte A , se reducen a una resultante P . Si el área δA disminuye con continuidad, el valor límite del cociente $\delta P/\delta A$ nos da la magnitud de la tensión, que actúa sobre la sección mm en el punto O . La dirección que tiene δP en el límite, es la dirección de la tensión. En general, la tensión está inclinada respecto al elemento de superficie δA sobre el cual actúa descomponiéndose entonces en sus dos componentes: una *tensión normal*, perpendicular al elemento δA y una *tensión tangencial o cortante*, que actúa en el plano de δA .

3. Notaciones correspondientes a las fuerzas y a las tensiones.

Las fuerzas exteriores que pueden actuar sobre un cuerpo, son de dos clases. Las fuerzas distribuidas sobre la superficie del cuerpo, tales como la presión mutua ejercida entre dos cuerpos o la presión hidrostática, se llaman *fuerzas superficiales*. Las fuerzas distribuidas sobre el volumen del cuerpo, tales como las fuerzas gravitatorias, las fuerzas magnéticas, o en el caso de que exista movimiento, las fuerzas de inercia, se llaman *fuerzas másicas*. La fuerza por unidad de superficie será descompuesta, en general, en sus tres componentes paralelas a los ejes coordenados y usaremos para tales componentes la notación $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Descompondremos asimismo la fuerza másica por unidad de volumen en sus tres componentes que designaremos mediante las letras X, Y, Z .

Usaremos la letra σ para designar la tensión normal y la τ para la tensión tangencial. Para indicar la dirección del plano sobre el cual actúa la tensión, añadiremos subíndices a la letra que expresa la tensión. Si consideramos un pequeño elemento cúbico en el punto O (fig. 1), con sus aristas paralelas a los ejes coordinados, la notación para los componentes de las tensiones que actúan sobre las caras del cubo es la indicada en la figura 3, en la que se señalan, asimismo, los sentidos positivos asignados a aquéllas. Para las caras perpendiculares al eje y , por ejemplo, las componentes normales de las tensiones que actúan sobre ellas son señaladas por σ_y . El subíndice y indica que la tensión actúa sobre un plano normal al eje y . Se considera positiva a la tensión normal cuando se trata de una tracción y negativa si se trata de una compresión.

La tensión tangencial se descompone en sus dos componentes paralelas a los ejes coordinados. En este caso, se usan dos subíndices: el primero indica la dirección normal al plano en cuestión y el segundo, la dirección de la componente de la tensión en sí misma. Si consideramos, por ejemplo, las caras perpendiculares al eje y , la componente en la direc-

ción x , es señalada por τ_{yx} y la de dirección z por τ_{yz} . Como sentido positivo de las componentes de la tensión tangencial que actúa sobre cualquier cara, se toma el sentido positivo de los ejes coordenados, si una tracción aplicada a esa misma cara apuntara en el sentido positivo del eje correspondiente. Si la tracción apuntara en sentido contrario al del eje correspondiente, el sentido positivo de las componentes de la tensión tangencial

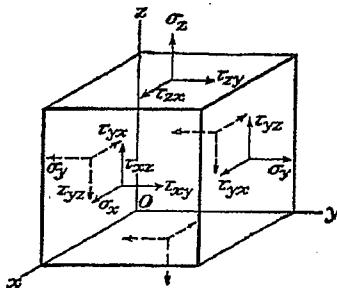


FIG. 3

sería el opuesto al de los ejes coordinados. Basándonos en esta regla, los sentidos positivos de todas las componentes de la tensión, que actúan sobre la cara de la derecha del elemento cúbico de la figura 3, coinciden con los sentidos de los semiejes positivos. Por el contrario, en la cara izquierda del elemento, los sentidos positivos están invertidos.

4. Componentes de la tensión. De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, resulta que para cada par de caras paralelas de un elemento cúbico, como el representado en la figura 3, se necesita un símbolo para representar la componente normal de la tensión y dos más para las componentes de la tensión tangencial. Se requieren, por lo tanto, tres símbolos para describir las tensiones normales que actúan sobre las caras de un cubo elemental, a saber, σ_x , σ_y , σ_z y seis τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy} , para los esfuerzos tangenciales¹.

De la consideración del equilibrio del elemento, se deduce que el número de símbolos para las tensiones tangenciales puede ser reducido a tres. Si consideramos el momento respecto al eje x de las fuerzas que actúan sobre el bloque elemental, sólo tenemos que tener en cuenta las tensiones representadas en la figura 4. Las fuerzas místicas, tales como el peso del elemento, pueden ser despreciadas puesto que al reducir las dimensiones del elemento disminuyen con el cubo de las dimensiones lineales, mientras que las tensiones superficiales lo hacen con el cuadrado

¹ En realidad sería más correcto decir esfuerzo tangencial específico ya que la palabra esfuerzo no implica que se trate de un área unidad.

de las mismas. Resulta, pues, que para elementos muy pequeños, las fuerzas místicas son infinitésimos de mayor orden que las fuerzas superficiales. De igual forma, los momentos debidos a la distribución no uniforme de las fuerzas normales son infinitésimos de orden superior que los debidos a las fuerzas tangenciales, pudiendo también ser despreciados en el límite. Representando entonces las dimensiones del elemento de la

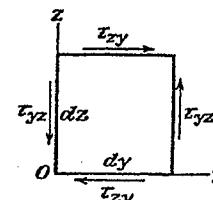


FIG. 4

figura 4 por dx , dy , dz y puesto que la fuerza sobre cada cara es el producto del área por el valor de la tensión en el punto central de la misma, la ecuación de equilibrio para los momentos respecto al eje x queda así:

$$\tau_{xy} dx dy dz = \tau_{zy} dx dy dz$$

Las otras dos ecuaciones se obtienen de forma semejante, llegándose al resultado siguiente:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1)$$

Por tanto, para cada dos caras perpendiculares entre sí, las componentes de la tensión de cortadura superficial perpendicular a la línea de intersección de esas caras, son iguales.

El sistema de tensiones que actúa sobre los planos coordinados que pasan por un punto, está en consecuencia definido por las seis cantidades σ_x , σ_y , σ_z , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, las cuales reciben el nombre de componentes de la tensión en el punto considerado.

Como se verá más adelante (§ 67), estas seis componentes permiten determinar el esfuerzo actuante sobre cualquier plano que pase por el punto considerado.

5. Componentes de la deformación. Al estudiar la deformación de un cuerpo elástico, se supondrá que hay vínculos suficientes que impiden su movimiento como cuerpo rígido, de forma que no es posible el desplazamiento de las partículas del cuerpo sin una deformación del mismo.

En este libro sólo se estudiarán deformaciones pequeñas, tales como se dan en las estructuras reales. El pequeño desplazamiento de las partículas

de un cuerpo deformado, es descompuesto generalmente en sus componentes u, v, w paralelas a los ejes x, y, z , respectivamente. Se supondrá que estas componentes son muy pequeñas y que varían con continuidad en todo el volumen del cuerpo. Consideremos un pequeño elemento $dx dy dz$ de un cuerpo elástico (fig. 5). Si el cuerpo se deforma y u, v, w ,

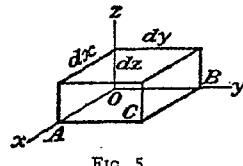


FIG. 5

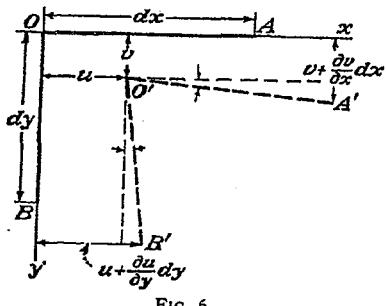


FIG. 6

son las componentes del desplazamiento del punto O , el desplazamiento en la dirección x de un punto próximo A , situado en el eje de las x , será

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

debido al incremento $(\partial u / \partial x)dx$ de la función u , que corresponde al cambio de la coordenada x . El aumento de la longitud del elemento OA debido a la deformación, es por lo tanto $(\partial u / \partial x)dx$. En consecuencia, el *alargamiento específico* en el punto O , según la dirección x es $\partial u / \partial x$. De igual forma, puede demostrarse que el alargamiento específico en las direcciones y y z viene dado por las derivadas $\partial v / \partial y$ y $\partial w / \partial z$. El alargamiento específico será designado, en lo sucesivo, mediante las expresiones *deformación longitudinal* o simplemente *deformación*.

Consideremos ahora la variación del ángulo formado por los elementos OA y OB (fig. 6). Si u y v son los desplazamientos del punto O en las direcciones x y y , los del punto A en la dirección y , y del B en la dirección x vienen dados respectivamente por:

$$v + (\partial v / \partial x)dx \text{ y } u + (\partial u / \partial y)dy$$

A causa de estos desplazamientos, la nueva dirección $O'A'$ del elemento OA forma con la dirección inicial un pequeño ángulo, indicado en la figura, igual a $\partial v / \partial x$. De igual forma, la dirección $O'B'$ forma con OB el ángulo $\partial u / \partial y$. Se sigue de ello que el ángulo AOB , inicialmente recto, formado por los elementos OA y OB , ha variado en la cantidad $\partial v / \partial x + \partial u / \partial y$. Esta es la *deformación tangencial* (también es llamada *deforma-*

ción angular) o *deslizamiento* del ángulo comprendido entre los planos xz e yz . De igual forma, se obtiene la deformación tangencial de los ángulos formados por los planos xy y xz y los yx e yz .

Representaremos mediante la letra ϵ la deformación longitudinal y mediante la γ , la deformación tangencial. Para indicar la dirección de las deformaciones, utilizaremos los mismos subíndices que para las componentes de las tensiones. De donde resulta que:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

Como veremos más adelante, conocidas las deformaciones longitudinales en tres direcciones perpendiculares y las tres deformaciones tangenciales correspondientes a esas direcciones, se puede determinar la deformación correspondiente a una dirección cualquiera y el deslizamiento del ángulo formado por dos direcciones cualesquiera (§ 73). Las seis componentes $\epsilon_{...}, \gamma_{...}$ reciben el nombre de *componentes de la deformación*.

6. Ley de Hooke. La relación entre las componentes de la tensión y de la deformación, ha sido establecida experimentalmente y se conoce bajo el nombre de *ley de Hooke*.

Imaginemos un paralelepípedo rectangular infinitésimo, con sus aristas paralelas a los ejes coordenados, sometido a la acción de una tensión normal σ_x distribuida uniformemente sobre dos caras opuestas. La experiencia demuestra que en el caso de un material isotrópico, las tensiones normales no producen distorsión angular del elemento. La magnitud de la deformación longitudinal viene dada por la ecuación:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (a)$$

en la que E es el *módulo de elasticidad longitudinal*. Los materiales usados en ingeniería tienen módulos muy altos en relación con las tensiones admisibles y la deformación (a) es muy pequeña. En el caso del acero de construcción es, generalmente, inferior a 0,001.

La dilatación del elemento en la dirección x viene acompañada de las contracciones laterales.

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (b)$$

en las cuales ν es una constante llamada *coeficiente de Poisson*. Para muchos materiales el coeficiente de Poisson puede igualarse a 0,25. Para el acero de construcción es generalmente 0,3.

Las ecuaciones (a) y (b) pueden usarse también en el caso de compresión simple. Dentro del intervalo elástico, el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson son iguales en compresión y tracción.

Si el elemento anterior es sometido a la acción de las tensiones normales σ_x , σ_y , σ_z , distribuidas uniformemente sobre sus caras, las componentes de la deformación resultante pueden obtenerse usando las ecuaciones (a) y (b). La experiencia demuestra que para obtener estas componentes, tenemos que superponer las deformaciones producidas por cada una de las tres tensiones. La aplicación de este método de superposición nos lleva a:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (3)$$

En lo sucesivo, usaremos a menudo el método de superposición para calcular las deformaciones y tensiones totales producidas por varias fuerzas. Este método es legítimo siempre que las deformaciones sean pequeñas y que los pequeños desplazamientos correspondientes no afecten sustancialmente la acción de las fuerzas exteriores. En tales casos, despreciaremos los pequeños cambios de las dimensiones de los cuerpos deformados y los pequeños desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores, basando nuestros cálculos en las dimensiones y forma iniciales del cuerpo. Los desplazamientos resultantes se obtendrán por superposición, en forma de funciones lineales de las fuerzas exteriores, como hiciémos al deducir la ecuación (3).

Hay, sin embargo, casos excepcionales en los que deformaciones pequeñas no pueden ser despreciadas, debiendo ser tenidas en cuenta. Un ejemplo de ello es el caso en el que actúan sobre una barra delgada fuerzas axiales y laterales. Las fuerzas axiales, actuando solas, producen una tracción o una compresión simple, pero pueden ejercer una influencia esencial sobre la flexión de la barra si actúan acompañadas de fuerzas laterales. Al calcular la deformación de la barra bajo tales condiciones, el efecto de la flecha de flexión sobre el momento de las fuerzas exteriores debe ser considerado, aun cuando dicha flecha sea muy pequeña¹. En este caso la flecha no es función lineal de las fuerzas y no puede ser obtenida por simple superposición.

En las ecuaciones (3), la relación entre alargamientos y tensiones está completamente definida mediante las constantes E y ν . Estas mismas

¹ Varios ejemplos pueden verse en S. Timoshenko, *Strength of Materials*, vol. II, páginas 25-49.

constantes pueden ser usadas también para definir la relación entre deformaciones y tensiones tangenciales.

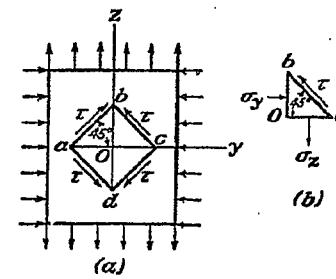


FIG. 7

Consideremos el caso particular de deformación del paralelepípedo rectangular, sobre el cual $\sigma_y = -\sigma_z$ y $\sigma_x = 0$. Aislando un elemento *abcd* mediante planos paralelos al eje *x* que forman 45° con los ejes *y* y *z* (fig. 7), se puede ver, sumando las fuerzas paralelas y perpendiculares a *bc*, que la tensión normal sobre las caras de este elemento es nula y que la tensión tangencial sobre las mismas es:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \sigma_z \quad (c)$$

Tal estado tensional recibe el nombre de *esfuerzo cortante simple*. El alargamiento del elemento vertical *Ob*, es igual al acortamiento de los elementos horizontales *Oa* y *Oc*, de donde despreciando un infinitésimo de segundo orden se deduce que las longitudes *ab* y *bc* no cambian durante la deformación. El ángulo formado por *ab* y *bc* cambia, sin embargo, y la magnitud de la deformación tangencial γ puede deducirse del estudio del triángulo *Obc*. Después de deformado se cumple:

$$\frac{Oc}{Ob} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 + \epsilon_z}{1 + \epsilon_x}$$

Sustituyendo los valores de ϵ_x y ϵ_z dados por (3) tenemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{(1 + \nu) \sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{(1 + \nu) \sigma_x}{E}\end{aligned}$$

y advirtiendo que para valores pequeños de γ

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

encontramos que

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)\sigma_s}{E} = \frac{2(1+\nu)r}{E} \quad (4)$$

De esta forma, la relación entre la deformación tangencial y la tensión tangencial está definida conociendo E y ν . A menudo, se usa la notación:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

Entonces la ecuación (4) queda

$$\gamma = \frac{r}{G}$$

La constante G definida por (5) recibe el nombre de *módulo de elasticidad tangencial* o *módulo de rigidez*.

Si sobre las caras de un elemento actúan tensiones tangenciales, como en el caso de la figura 3, la deformación del ángulo formado por dos ejes coordenados cualesquiera, depende únicamente de las componentes de las tensiones tangenciales paralelas a tales ejes, y su valor es:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (6)$$

Las deformaciones longitudinales (3) y los deslizamientos (6) son independientes unos de otros. En consecuencia, el caso general de deformación producida por tres tensiones normales y tres tangenciales, se resuelve mediante la superposición de las tres deformaciones dadas por la ecuación (3) y de los deslizamientos obtenidos mediante las ecuaciones (6).

Las ecuaciones (3) y (6) nos dan las componentes de la deformación en función de las componentes de la tensión. A veces, sin embargo, es necesario tener las componentes de la tensión expresadas como función de las componentes de la deformación. Esto se consigue de la manera siguiente. Sumando las ecuaciones (3) y usando la notación

$$\begin{aligned} e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ \Theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned} \quad (7)$$

llegamos a la siguiente relación entre la dilatación cúbica e y la suma de las tensiones normales

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \Theta \quad (8)$$

En el caso de una presión hidrostática p tenemos

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

y la ecuación (8) nos da

$$e = -\frac{3(1-2\nu)p}{E}$$

expresión que representa la relación entre la dilatación cúbica e y la presión hidrostática p .

La cantidad $E/3(1-2\nu)$ se denomina *módulo de elasticidad de volumen*.

Empleando las notaciones (7) y despejando σ_x , σ_y , σ_z , en las ecuaciones (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z \end{aligned} \quad (9)$$

o bien, usando la notación

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (10)$$

y la ecuación (5) llegamos a

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\epsilon_z \end{aligned} \quad (11)$$

Problemas

1. Demostrar que las ecuaciones (1) siguen siendo válidas si el elemento de la figura 4 está en movimiento y tiene una aceleración angular, como si fuera un cuerpo rígido.

2. Supongamos un material elástico conteniendo un gran número de pequeñas partículas inmanadas, distribuidas regularmente, de forma que un campo magnético ejerza sobre cualquier elemento dx, dy, dz un momento $\mu dx, dy, dz$, respecto a un eje paralelo al eje x . ¿Qué forma tomará la ecuación (1)?

3. Dar algunas razones que justifiquen el que la fórmula (2) sea válida solamente para pequeñas deformaciones.

4. Una lámina elástica se encuentra entre dos placas perfectamente rígidas a las que está pegada. La lámina es comprimida entre las dos placas siendo σ_z la tensión de compresión. Suponiendo que la adherencia a las placas impide toda deformación lateral ϵ_x , ϵ_y encontrar el módulo de Young aparente (σ_z/ϵ_z) en función de E y ν . Demostrar que si el material de la lámina es casi incompresible bajo los efectos de una presión hidrostática el valor del módulo de Young aparente es muy superior a E .

5. Deducir la ecuación (8) a partir de las (11), (10) y (5).

2 Tensiones planas y deformaciones planas

7. Tensiones planas. Si una placa delgada es cargada mediante fuerzas aplicadas en su contorno, paralelas al plano de la placa y distribuidas uniformemente en su espesor (fig. 8), las componentes de la tensión σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} son nulas sobre ambas caras de la placa y puede suponerse, en principio, que también lo son en el interior de la misma. El estado tensional queda entonces especificado por σ_x , σ_y y τ_{xy} y es denominado

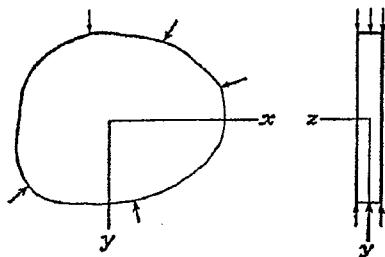
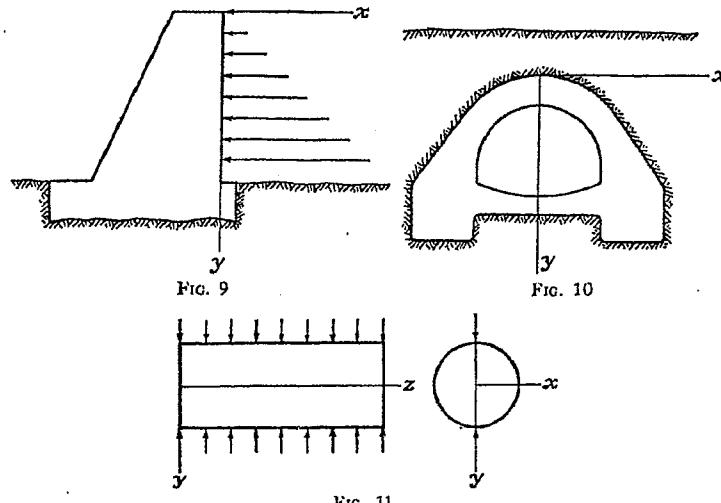


FIG. 8

estado tensional plano. Puede asimismo suponerse que estas tres componentes son independientes de Z , o sea, no varían a través del espesor de la placa, siendo en consecuencia función de x e y solamente.

8. Deformación plana. Una simplificación semejante se da en el otro caso extremo, en el que la dimensión del cuerpo en la dirección del eje z es muy grande. Si un cuerpo largo cilíndrico o prismático es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal que no varían en esa dirección, puede suponerse que todas las secciones rectas están en iguales condiciones. En principio, podemos imaginar que las secciones extremas se encuentran confinadas entre planos rígidos fijos,

de forma que cualquier desplazamiento en la dirección axial sea imposible (el efecto de retirar tales planos será estudiado más adelante). Dado que no hay desplazamiento axial en los extremos y que por simetría ocurre otro tanto con la sección central, se puede suponer que lo mismo le sucede a cualquier otra sección recta, encontrándose entonces con un estado de deformación plana.



Existen muchos problemas importantes que son de este tipo: muro de contención sometido a una presión lateral (fig. 9), túnel o alcantarilla (fig. 10), tubo cilíndrico sometido a una presión interna, rodillo cilíndrico comprimido por fuerzas contenidas en el plano diametral como en el caso de un cojinete de rodillos (fig. 11).

En todos los casos, por supuesto, las condiciones de carga no deben variar con la longitud. Dado que las condiciones son las mismas en todas las secciones rectas, bastará con considerar una rebanada contenida entre dos secciones separadas una longitud unidad. Las componentes u y v del desplazamiento dependen de x e y pero no de z ; y puesto que el desplazamiento longitudinal w es cero las ecuaciones (2) quedan así:

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (a)$$

La tensión normal longitudinal σ_z puede ser expresada en función de x e y mediante la ley de Hooke [ecuaciones (3)]. Puesto que $\sigma_z = 0$ tendremos que:

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (b)$$

Estas tensiones normales actúan sobre todas las secciones rectas, incluyendo las extremas, donde representan las fuerzas requeridas para mantener el estado de deformación plana y son ejercidas por los planos rígidos extremos.

Las ecuaciones (a) y (b) muestran que τ_{xz} y τ_{yz} son nulos y mediante la ecuación (b) σ_z puede ser expresado en función de x e y . De esta forma, el problema de deformación plana, al igual que el estado tensional plano, se reduce a la determinación de σ_x , σ_y y τ_{xy} , funciones solamente de x e y .

9. Tensiones en un punto. Conocidas las componentes de la tensión σ_x , σ_y , τ_{xy} en cualquier punto de una placa, que se encuentra en un estado de tensión o deformación plana, la tensión que actúa sobre cualquier plano perpendicular a la placa, que pase por ese punto, puede

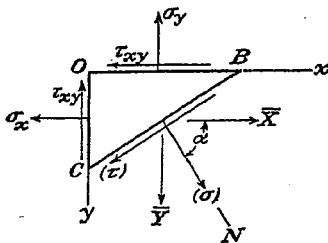


FIG. 12

calcularse a partir de las ecuaciones de la estática. Sea O el punto en cuestión y supongamos que conocemos las componentes de la tensión σ_x , σ_y , τ_{xy} (fig. 12). Para encontrar la tensión que actúa sobre cualquier plano que contenga al eje z y que esté inclinado respecto a los ejes x e y , tomemos un plano BC paralelo a él y próximo a O de forma que el prisma OBC formado por este plano y los planos coordenados sea muy pequeño. Puesto que las tensiones varían con continuidad en el volumen del cuerpo, la tensión que actúa sobre el plano BC tiende a la tensión actuante sobre el plano paralelo que pasa por O , cuando el elemento se hace cada vez más pequeño.

Al discutir las condiciones de equilibrio de un pequeño prisma trian-

gular, las fuerzas másicas pueden ser despreciadas por ser infinitésimas de orden superior (pág. 25). De forma semejante, si el elemento es muy pequeño, puede despreciarse la variación de las tensiones sobre las caras y suponer que se distribuyen uniformemente sobre ellas. Las fuerzas que actúan sobre el prisma triangular pueden por lo tanto determinarse, multiplicando las componentes de la tensión por el área de las caras. Sea N la dirección de la normal al plano BC y señalemos los cosenos de los ángulos formados por la normal N y los ejes x e y por:

$$\cos Nx = l, \quad \cos Ny = m$$

Entonces, si A señala el área de la cara BC del elemento, las áreas de las otras caras serán Al y Am .

Si indicamos por \bar{X} e \bar{Y} las componentes de la tensión que actúan sobre la cara BC , las ecuaciones de equilibrio del elemento prismático quedan así:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{aligned} \quad (12)$$

De este modo, las componentes de la tensión que actúan sobre cualquier plano definido por los cosenos l y m pueden calcularse fácilmente a partir de las ecuaciones (12) supuesto que las componentes σ_x , σ_y , τ_{xy} de la tensión en O sean conocidas.

Sea α el ángulo formado por la normal N y el eje x , de forma que $l = \cos \alpha$ y $m = \sin \alpha$. Los componentes normal y tangencial de la tensión que actúa sobre el plano BC pueden deducirse de las ecuaciones (12), resultando:

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ &\quad + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &\quad + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Podemos deducir de (13) que el ángulo α puede ser elegido de forma que la tensión tangencial τ se anule. Esto ocurre cuando:

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

de donde:

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha \quad (14)$$

A partir de esta ecuación se pueden encontrar dos direcciones perpendiculares entre sí, para las cuales la tensión tangencial se anula. Estas direcciones se llaman *direcciones principales* y las tensiones normales correspondientes *tensiones principales*.

Si las direcciones principales son tomadas como ejes x e y , τ_{xy} es cero y las ecuaciones (13) se simplifican quedando así:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ \tau &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sigma_y - \sigma_x)\end{aligned}\quad (13')$$

La variación de las componentes σ y τ cuando cambia el ángulo α puede representarse gráficamente mediante un diagrama en el que σ y τ son tomadas como coordenadas¹. A cada plano corresponde un punto en el diagrama cuyas coordenadas son los valores de σ y τ correspondientes. En la figura 13 tenemos un diagrama de ese género, en el cual los puntos A y B de abscisas σ_x y σ_y , respectivamente, corresponden a los planos perpendiculares a las direcciones principales. Puede demostrarse que las componentes de la tensión correspondientes a un plano cualquiera BC que forme un ángulo α (fig. 12), están representadas por las coordenadas de un punto situado en una circunferencia de diámetro AB . Para hallar ese punto basta con medir a partir de A , en el sentido de crecimiento de los ángulos α de la figura 12, un arco que subtienda un ángulo igual a 2α . Si D es el punto obtenido, resultará de la figura:

$$\begin{aligned}OF &= OC + CF = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ DF &= CD \sin 2\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha\end{aligned}$$

Comparando estas expresiones con las ecuaciones (13') se ve que las coordenadas del punto D dan los valores numéricos de las componentes de la tensión que actúa en el plano BC , cuya inclinación es α . Para obtener la coincidencia de signo de la componente tangencial, llevaremos los τ positivos hacia arriba y consideraremos los esfuerzos tangenciales como positivos cuando el sentido de rotación del par que originan es el del movimiento de las agujas del reloj, como ocurre para las caras bc y ad del elemento $abcd$ (fig. 13b). Las tensiones tangenciales que obran en las caras ab y dc del mismo elemento son de sentido contrario y, por lo tanto, se consideran como negativas².

Al girar el plano BC alrededor de un eje perpendicular al plano xy (fig. 12) en el sentido de las agujas del reloj, el ángulo α varía de 0 a $\pi/2$ y el punto D , en la figura 13, se mueve de A a B de forma que la semicircunferencia inferior nos da la variación de la tensión para los valores de α comprendidos entre esos límites. La semicircunferencia superior da las tensiones para

$$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$$

¹ Este método gráfico es debido a O. Muhr, *Zivilingenieur*, 1882, pág. 113. Véase también su *Technische Mechanik*, 2^a edición, 1914.

² Esta regla se utiliza solamente en la construcción del diagrama de Mohr. Fuera de ahí es válida la regla dada en la pág. 23.

Prolongado el radio CD hasta el punto D_1 (fig. 13), es decir tomando el ángulo $\pi + 2\alpha$ en lugar de 2α se obtienen las tensiones correspondientes al plano perpendicular a BC (fig. 12). Se ve así que las tensiones tangenciales que actúan sobre dos planos perpendiculares entre sí, son iguales en valor absoluto, cosa que ya habíamos demostrado. En lo que

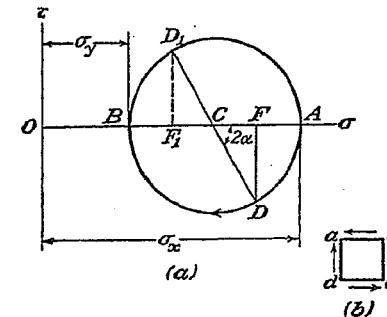


FIG. 13

se refiere a las tensiones normales, vemos en la figura que $OF_1 + OF = 2OC$, es decir, la suma de las tensiones normales correspondientes a planos perpendiculares entre sí permanece constante al variar α .

La tensión tangencial máxima viene dada en el diagrama (fig. 13) por la máxima ordenada de la circunferencia, o lo que es lo mismo por su radio. Tenemos entonces

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (15)$$

Dicha tensión actúa sobre el plano bisector del ángulo formado por las tensiones principales el cual corresponde a $\alpha = \pi/4$.

El diagrama puede utilizarse también en el caso en que una o las dos tensiones principales son negativas (compresión). Basta solamente con cambiar el signo de la abscisa para las tensiones negativas. La figura 14a representa el caso en que ambas tensiones principales son negativas y la figura 14b el de esfuerzo cortante puro.

De las figuras 13 y 14 se deduce que el estado tensional existente en un punto puede ser considerado como el resultado de la yuxtaposición de otros dos: uno plano equitensional¹ de magnitud la abscisa del centro del círculo, y otro de esfuerzo cortante cuya magnitud es el radio del círculo. Cuando se superponen varias distribuciones de tensión los estados equitensionales (de tracción o compresión) pueden ser sumados algebraicamente. Los esfuerzos cortantes deben añadirse teniendo en cuenta las direcciones de los planos sobre los cuales actúan. Se demuestra que al

¹ N. del T. Llámamos estado plano equitensional a aquel en el que $\sigma_x = \sigma_y$ y $\tau_{xy} = 0$.

superponer dos sistemas de esfuerzo cortante puro, cuyos planos de máxima tensión tangencial forman un ángulo β , el sistema resultante constituye también un caso de esfuerzo cortante puro. En la figura 15, por ejemplo, se determina la tensión que actúa sobre un plano, definido por el ángulo α , y que está originada por dos esfuerzos cortantes simples de magnitudes τ_1 y τ_2 que actúan: uno en los planos xz e yz (fig. 15a) y el otro en los planos que forman con estos últimos el ángulo β

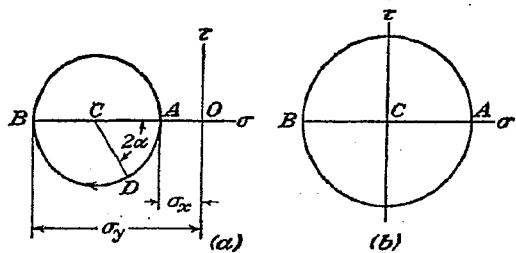


FIG. 14

(fig. 15b). En la figura 15a las coordenadas del punto D representan las tensiones tangencial y normal producidas sobre el plano CB por el primer sistema, mientras las coordenadas de D_1 (fig. 15b) dan las tensiones sobre el mismo plano para el segundo sistema. Sumando OD y OD_1 geométricamente obtenemos OG , tensión resultante sobre ese plano, cuyas componentes tangencial y normal vienen dadas

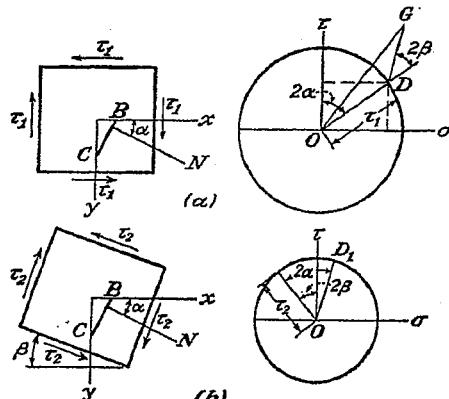


FIG. 15

por las coordenadas de G . Adviértase que la magnitud de OG no depende de α . Por tanto, la superposición de los estados de esfuerzo cortante simple origina un círculo de Mohr correspondiente a un esfuerzo cortante de radio OG , estando dada la inclinación de los planos de máxima tensión tangencial por un ángulo igual a la mitad del GOD .

Un diagrama como el de la figura 13 puede usarse también para determinar las tensiones principales, si se conocen las componentes de la tensión σ_x , σ_y , τ_{xy} correspondientes a dos planos perpendiculares entre sí (fig. 12). En tal caso se comienza dibujando los puntos D y D_1 que representan las tensiones que actúan sobre los dos planos coordinados

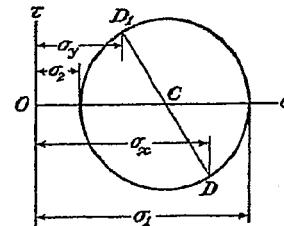


FIG. 16

(fig. 16). De esta forma se obtiene el diámetro DD_1 del círculo. Construido el círculo, las tensiones principales σ_1 y σ_2 vienen dadas por su intersección con el eje de abscisas. De la figura se deduce:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= OC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (16)$$

En cuanto a la tensión tangencial máxima viene dada por el radio del círculo, es decir:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (17)$$

De esta forma todas las características del estado tensional en un punto pueden obtenerse conociendo tan sólo las tres componentes σ_x , σ_y , τ_{xy} .

10. Deformación en un punto. Cuando se conocen las componentes ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} de la deformación en un punto, puede determinarse la deformación longitudinal y tangencial de orientación cualquiera, en ese mismo punto.

Al producirse una deformación, el elemento lineal PQ (fig. 17a) que une los puntos (x, y) y $(x + dx, y + dy)$ sufre una traslación, una extensión (o contracción) y un giro convirtiéndose en el elemento $P'Q'$. Las componentes del desplazamiento de P son u y v y las del de Q :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Si el elemento $P'Q'$ (fig. 17a) es trasladado de forma que P' coincida con P , llevándolo a la posición PQ'' de la figura 17b, los segmentos QR y RQ'' representarán las componentes del desplazamiento de Q con relación a P . En consecuencia:

$$QR = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad RQ'' = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (a)$$

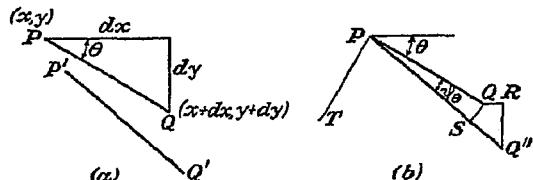


FIG. 17

Las componentes QS y SQ'' de este desplazamiento relativo, la primera normal y la segunda paralela a PQ'' respectivamente, pueden deducirse de las anteriores obteniéndose las expresiones:

$$QS = -QR \sin \theta + RQ'' \cos \theta, \quad SQ'' = QR \cos \theta + RQ'' \sin \theta \quad (b)$$

en las que el pequeño ángulo QPS ha sido despreciado frente a θ . Puesto que el segmento QS puede identificarse con un arco de circunferencia de centro en P , SQ'' nos da el alargamiento de PQ . La deformación longitudinal de $P'Q'$ señalada por ϵ_θ , es, en consecuencia, SQ''/PQ y su expresión deducida de (b) y (a) queda:

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (c)$$

o lo que es lo mismo:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta \quad (c)$$

expresión de la deformación longitudinal en la dirección θ .

El ángulo ψ_θ girado por PQ es igual a QS/PQ y la expresión del mismo deducida de (b) y (a) es:

$$\psi_\theta = -\sin \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\psi_\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \quad (d)$$

El elemento PT normal a PQ forma con el eje x el ángulo $\theta + (\pi/2)$ y el giro $\psi_\theta + \frac{\pi}{2}$ por él sufrido se deduce de (d) sustituyendo θ por $\theta + \pi/2$. Dado que $\cos [\theta + (\pi/2)] = -\sin \theta$ y $\sin [\theta + (\pi/2)] = \cos \theta$ llegamos a:

$$\psi_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \theta \quad (e)$$

La deformación tangencial γ_θ para las direcciones PQ , PT es $\gamma_\theta = \psi_\theta + \frac{\pi}{2}$ diferencia cuya expresión es:

$$\gamma_\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) 2 \sin \theta \cos \theta \quad (f)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_\theta = \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta \quad (f)$$

De la comparación con las fórmulas (13) se deduce que las expresiones (c) y (f) pueden obtenerse a partir de ellas sin más que cambiar σ por ϵ_θ , τ por $\gamma_\theta/2$, σ_x por ϵ_x , σ_y por ϵ_y , τ_{xy} por $\gamma_{xy}/2$ y a por θ . En consecuencia toda conclusión referente a σ y τ deducida de (13) admite otra semejante aplicable a ϵ_θ y $\gamma_\theta/2$ deducida de (c) y (f). De ahí que podamos enunciar los siguientes resultados. Existen dos valores de θ , que difieren en 90° para los que $\gamma_\theta = 0$. Tales valores vienen dados por:

$$\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \tan 2\theta$$

Las deformaciones ϵ_θ correspondientes son las *deformaciones principales*. Se puede dibujar un círculo de Mohr análogo al de la figura 13 ó 16, cuyas ordenadas y abscisas representen a $\gamma_\theta/2$ y ϵ_θ respectivamente. Los valores máximo y mínimo de ϵ_θ son las deformaciones principales ϵ_1 y ϵ_2 . El valor máximo de $\gamma_\theta/2$ está representado por el radio del círculo, viéndose dada la deformación angular máxima $\gamma_{\theta_{\max}}$ por la expresión:

$$\gamma_{\theta_{\max}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

11. Medida de las deformaciones superficiales. Las deformaciones longitudinales se miden muy a menudo mediante extensómetros a resistencia eléctrica¹. Tales extensómetros consisten en resistencias eléctricas embebidas en un soporte aislante que es pegado a la superficie. Cuando la superficie se deforma la resistencia eléctrica varía y la deformación puede, en consecuencia, ser medida eléctricamente.

El uso de tales extensómetros es sencillo cuando se conocen las direcciones principales. Si se coloca un extensómetro siguiendo cada dirección

¹ Una información detallada es dada en el *Handbook of Experimental Stress Analysis*, capítulos 5 y 9.

principal se obtiene directamente la medida de ϵ_1 y ϵ_2 . Las tensiones principales σ_1 , σ_2 pueden entonces deducirse empleando la ley de Hooke, ecuación (3), en la que se hace $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ y $\sigma_z = 0$, condición esta última que nace de suponer que no actúa ninguna fuerza sobre la superficie a la que se han pegado los extensómetros. Entonces:

$$(1 - \nu^2)\sigma_1 = E(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), \quad (1 - \nu^2)\sigma_2 = E(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)$$

Cuando no se conocen, *a priori*, las direcciones principales es necesario realizar tres medidas. El estado de deformación, en efecto, está completamente determinado si se pueden medir ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} . Sin embargo,

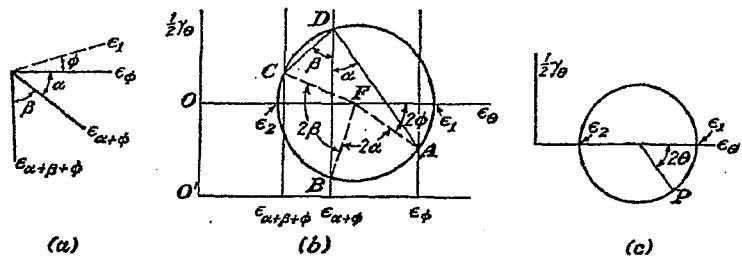


FIG. 18

puesto que los extensómetros miden deformaciones longitudinales y no tangenciales es necesario realizar la medida de la deformación longitudinal en el punto según tres direcciones. El conjunto de tres extensómetros que realiza esta medida recibe el nombre de «roseta». Conocidas esas tres deformaciones se puede dibujar el círculo de Mohr, mediante la sencilla construcción¹ dada en el § 12 y determinar las direcciones principales. Sean los tres extensómetros de la roseta los representados mediante las líneas continuas de la figura 18a en la que la línea a trazos corresponde a la dirección de la deformación principal ϵ_1 , que forma el ángulo ϕ con el primer extensómetro.

Si como direcciones x e y de las ecuaciones (c) y (f) del § 10 se hubieran tomado las direcciones principales, ϵ_x sería ϵ_1 , ϵ_y ϵ_2 y γ_{xy} cero. Las ecuaciones serían entonces:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta, \quad \frac{1}{2}\gamma_\theta = -(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin \theta \cos \theta$$

en las que θ es el ángulo medido a partir de la dirección de ϵ_1 . Las mismas ecuaciones pueden escribirse:

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta, \quad \frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin 2\theta$$

¹ Glenn Murphy, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 12, pág. A-209, 1945; N. J. Hoff, *ibid.*

donde se ve que los valores de ϵ_θ y $\frac{1}{2}\gamma_\theta$ están representados por el punto P de la circunferencia de la figura 18c. Si θ toma el valor ϕ , P se convierte en el punto A de la figura 18b formando FA con el eje ϵ el ángulo 2ϕ . La abscisa de este punto que es ϵ_ϕ ha sido medida. Si θ toma el valor $\phi + \alpha$, P se desplaza a B mediante el incremento angular $AFB = 2\alpha$ y la abscisa conocida es $\epsilon_{\alpha+\phi}$. Si, finalmente, θ toma el valor $\phi + \alpha + \beta$, P se mueve hasta C aumentando el ángulo en $BFC = 2\beta$ y siendo la abscisa, también medida, $\epsilon_{\alpha+\beta+\phi}$. Partiendo de esto vamos a estudiar ahora cómo dibujar el círculo cuando se conocen esas tres abscisas y los dos ángulos α y β .

12. Construcción del círculo de Mohr a partir de las medidas realizadas con una roseta. Tomemos un eje ϵ horizontal con un origen cualquiera O' (fig. 18b) a partir del cual se llevan las deformaciones medidas ϵ_ϕ , $\epsilon_{\alpha+\phi}$ y $\epsilon_{\alpha+\beta+\phi}$. Por los puntos así determinados tracemos rectas normales al eje ϵ . Elegido un punto cualquiera D en la normal por $\epsilon_{\alpha+\beta+\phi}$, se trazan las rectas DA y DC que forman con esa normal los ángulos α y β que cortan a las otras en los puntos A y C . La circunferencia buscada es la que pasa por los puntos B , A , C y su centro F está determinado por la intersección de las mediatrixes de los segmentos CD y DA . Dado que el ángulo AFB es 2α por ser doble del ADB y que por lo mismo el BFC es 2β , ocurre que los tres puntos A , B y C representan las deformaciones en la dirección de los extensómetros. Los puntos A , B y C , en efecto, guardan dentro del círculo el intervalo angular requerido y tienen las abscisas correctas. Si trazamos ahora el eje ϵ_θ , que se confunde con OF , las distancias de O a las intersecciones de la circunferencia con este eje nos dan ϵ_1 y ϵ_2 . El ángulo 2ϕ es el formado por el eje con FA , medido a partir del eje en el sentido de las agujas del reloj, y su conocimiento nos informa sobre cuáles son las direcciones principales.

13. Ecuaciones diferenciales de equilibrio. Consideremos ahora el equilibrio de un pequeño bloque rectangular de espesor unidad cuyas otras dimensiones son h y k (fig. 19). Las tensiones que actúan sobre las caras 1, 2, 3, 4 y sus direcciones positivas son indicadas en la figura. Puesto que las tensiones que actúan en el material varían de un punto a otro el valor de σ_z , por ejemplo, no es exactamente el mismo en la cara 1 que en la cara 3. Los símbolos σ_x , σ_y , τ_{xy} se refieren al punto (x, y) , punto central del rectángulo de la figura 19. Los valores en los puntos centrales de las caras son indicados por $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_x)_3$ etc. y dado que las caras son muy pequeñas, las fuerzas correspondientes se obtienen multiplicando estos valores por el área de la cara sobre la cual actúan¹.

¹ Una consideración más exacta introduciría infinitésimos de orden superior que desaparecen en el proceso final en el que se tiende al límite.

Las fuerzas másicas que actúan sobre el bloque, que fueron despreciadas por ser un infinitésimo de orden superior al considerar el equilibrio del prisma triangular de la figura 12, deben ser ahora tenidas en cuenta puesto que son del mismo orden de magnitud que los términos debidos

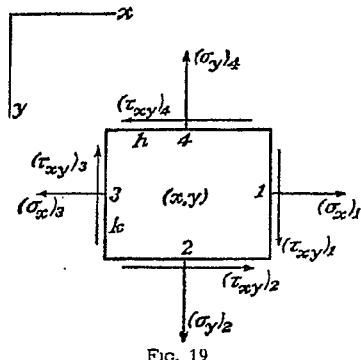


FIG. 19

a la variación de los componentes de la tensión, términos éstos que son considerados ahora. Si X e Y indican los componentes de la fuerza másica por unidad de volumen la ecuación de equilibrio para las fuerzas que actúan en la dirección x queda así:

$$(\sigma_z)_1 k - (\sigma_z)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + X h k = 0$$

que dividiendo por $h k$ da

$$\frac{(\sigma_z)_1 - (\sigma_z)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0$$

Si ahora hacemos tender el volumen del bloque a cero, es decir $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ el límite de $[(\sigma_z)_1 - (\sigma_z)_3]/h$ es $\partial \sigma_z / \partial x$ y de forma semejante el de $[(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4]/k$ es $\partial \tau_{xy} / \partial y$. Si el mismo proceso es seguido con fuerzas que actúan en la dirección y , las ecuaciones de equilibrio quedan así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

En las aplicaciones prácticas la única fuerza másica existente es el peso. En consecuencia, tomando el eje y vertical y hacia abajo y llamando ρ a la densidad, las ecuaciones (18) se convierten en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de equilibrio, correspondientes a problemas elásticos bidimensionales.

14. Condiciones de contorno. Las ecuaciones (18) o (19) deben ser satisfechas en todos los puntos del cuerpo considerado. Ahora bien, las componentes de la tensión varían de punto a punto de la placa y al llegar a sus bordes deberán equilibrar las fuerzas exteriores aplicadas en los mismos, de modo tal que dichas fuerzas pueden ser consideradas como una continuación de la distribución interna de los esfuerzos. Las

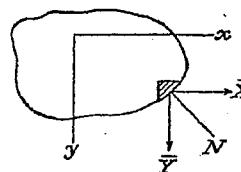


FIG. 20

condiciones de equilibrio en el borde de la placa pueden deducirse de las ecuaciones (12). Suponiendo al prisma triangular elemental OBC de la figura 12, dispuesto de manera que la cara BC coincida con un elemento superficial del contorno de la placa, como se ve en la figura 20, y llamando X e Y a las componentes de las fuerzas superficiales, por unidad de superficie en ese punto del contorno, dichas ecuaciones serán para este caso:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l \sigma_z + m \tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m \sigma_y + l \tau_{xy} \end{aligned} \quad (20)$$

en las cuales l y m son los cosenos directores de la normal N al contorno.

En el caso particular de una placa rectangular, se toman, por lo general, los ejes coordenados paralelos a sus lados y las condiciones de contorno expresadas en (20) pueden simplificarse. Tomando, por ejemplo, un borde de la placa paralelo al eje x , tendremos para esta parte del contorno que la normal N es paralela al eje y , de modo que $l = 0$ y $m = \pm 1$ con lo que las ecuaciones (20) se reducen a:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}, \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y$$

Se deberá tomar el signo positivo cuando la normal N tenga el sentido del semieje positivo de las y y el signo negativo para el sentido contrario de N . De aquí resulta, que las componentes de las tensiones que se desarrollan en el contorno de la placa son iguales a las componentes de las fuerzas superficiales, referidas a la unidad de área periférica.

15. Ecuaciones de compatibilidad. El problema de la teoría de la elasticidad consiste, en general, en determinar el estado tensional que

se origina en un cuerpo sometido a la acción de determinadas fuerzas. En el caso de problemas bidimensionales, es necesario para ello resolver las ecuaciones diferenciales de equilibrio (18) y la solución debe ser tal, que satisfaga las condiciones de contorno (20). Dichas ecuaciones deducidas de las ecuaciones de la estática, aplicables a cuerpos absolutamente rígidos, contienen las tres componentes σ_x , σ_y , τ_{xy} , no bastando para la determinación de las mismas. El problema es estáticamente indeterminado y para su solución es necesario considerar la deformación elástica del cuerpo.

La expresión matemática de la condición de compatibilidad entre la distribución de tensiones y la existencia de las funciones continuas u , v , w , que definen la deformación se obtiene a partir de las ecuaciones (2). En los problemas bidimensionales deberán considerarse solamente tres componentes de la deformación, a saber:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (a)$$

Estas tres componentes de la deformación son expresables en función de u y v y, por lo tanto, sus valores no pueden ser arbitrarios sino que han de estar ligados entre sí. La relación existente entre ellos se deduce fácilmente de (a). Derivando dos veces respecto a y la primera ecuación de (a), dos veces respecto a x la segunda y respecto a x e y la tercera, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

Esta ecuación diferencial se llama *condición de compatibilidad* y debe ser satisfecha por las componentes de la deformación, para asegurar la existencia de las funciones u y v vinculadas a aquéllas por las ecuaciones (a).

Aplicando la ley de Hooke [ecuaciones (3)] la condición (21) puede expresarse en función de los componentes de la tensión.

En el caso de un estado tensional plano las ecuaciones (3) se reducen a:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (23)$$

y sustituyendo en (21) se tiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (b)$$

Mediante las ecuaciones de equilibrio podemos dar a esta ecuación una forma diferente. En primer término, consideremos el caso en que el peso

del cuerpo es la única fuerza másica, al cual corresponden las ecuaciones de equilibrio (19). Diferenciando la primera de éstas respecto a x y la segunda respecto a y y luego sumándolas se tiene:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Por sustitución de estos valores en la ecuación (b) se llega a la ecuación de compatibilidad en función de las componentes de la tensión:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (24)$$

Si se procede análogamente con las ecuaciones generales de equilibrio (18), se tendrá:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_z + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (25)$$

En el caso de una deformación plana (§ 8) se tiene:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

y de acuerdo con la ley de Hooke [ecuaciones (3)] resultará:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] \quad (26)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (27)$$

Sustituyendo en la ecuación (21) y teniendo en cuenta, como antes, las ecuaciones de equilibrio (19) concluimos que la ecuación de compatibilidad (24), es válida también en el caso de la deformación plana. Para el caso general de fuerzas másicas las ecuaciones (21) y (18) nos permiten escribir la ecuación de compatibilidad bajo la forma siguiente:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (28)$$

Las ecuaciones de equilibrio (18) o (19) conjuntamente con las condiciones de contorno (20) y una de las ecuaciones de compatibilidad que quedan consignadas, constituyen un sistema de ecuaciones que, por lo general, permite la determinación completa de la distribución de las tensiones en un problema bidimensional¹. Más adelante se tratan los casos

¹ En problemas tensionales planos existen condiciones de compatibilidad distintas de las (21) que no son cumplidas por nuestras suposiciones. Sin embargo, en el § 84 demostraremos que pese a ello, los métodos presentados en este capítulo dan una aproximación aceptable para placas delgadas.

particulares en los que es necesario agregar otras consideraciones (§ 39). Es interesante destacar que cuando las fuerzas másticas son constantes, en las ecuaciones que determinan la distribución de las tensiones no aparecen las constantes elásticas del material, lo que quiere decir que la distribución de las tensiones es igual para todos los materiales isotrópicos, con tal que las ecuaciones sean suficientes para la completa determinación de las tensiones. Esta conclusión es de mucha importancia práctica, pues como veremos más tarde (§ 42), por procedimientos basados en el uso de luz polarizada se pueden hallar las tensiones que se producen en materiales transparentes como el vidrio y la baquelita y los resultados así obtenidos podrán ser, en muchos casos, inmediatamente aplicados a cualesquier otros materiales, tales como, por ejemplo, el acero.

Señalaremos asimismo, que cuando las fuerzas másticas son constantes, la ecuación de compatibilidad (24) es de aplicación tanto a los casos de tensión plana como a los de deformación plana. En consecuencia, la distribución de las tensiones será igual en ambos casos, siempre que se trate de contornos idénticos y de un mismo sistema de fuerzas exteriores¹.

16. Función de tensión. Hemos demostrado que para resolver los problemas bidimensionales, basta con hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que satisfagan la ecuación de compatibilidad y las condiciones de contorno. Si aplicamos esto en primer lugar al caso en que la única fuerza mísica es el peso del cuerpo, las ecuaciones que habrá que resolver son [véase las ecuaciones (19) y (24)]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + pg = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

a las cuales se deberá añadir las condiciones de contorno (20).

El método corriente para resolver estas ecuaciones se basa en la introducción de una nueva función llamada *función de tensión*². Fácilmente se comprueba que las ecuaciones (a) quedan satisfechas por una función $\phi(x, y)$ relacionada con las componentes de la tensión por medio de las expresiones siguientes:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - pg y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - pg x, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (29)$$

¹ Esta afirmación puede necesitar ser modificada cuando la placa o el cilindro tienen agujeros pues entonces, para llegar a la solución correcta, debemos considerar los desplazamientos además de las tensiones. Véase el § 39.

² Esta función que a veces es llamada *función de tensión de Airy* fue introducida en la solución de los problemas bidimensionales por G. B. Airy, *Brit. Assoc. Advancement Sci. Rept.*, 1862.

De esa manera podremos obtener diversas soluciones para las ecuaciones de equilibrio (a), entre las cuales, aquella que satisface también a la ecuación de compatibilidad (b) será la verdadera. Reemplazando en la ecuación (b) las expresiones (29) de las componentes del esfuerzo concluiremos que la función de tensión es la solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (30)$$

Resolver un problema de elasticidad en dos dimensiones, en el cual sea el peso la única fuerza mísica; consiste pues, tan sólo, en buscar una solución de la ecuación (30) que satisface a la condición de contorno (20) correspondiente al caso particular planteado. En los capítulos siguientes se aplica para resolver una serie de problemas de interés práctico.

Consideremos ahora el caso más general de varias fuerzas mísicas y admitamos que ellas deriven de un potencial. Entonces, las componentes X e Y de las ecuaciones (18) estarán dadas por las ecuaciones:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (c)$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

en las cuales V es la función potencial. Las ecuaciones (18) se transforman en:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

Estas, son de la misma forma que las ecuaciones (a) y quedarán satisfechas tomando:

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (31)$$

donde ϕ es la función de tensión. Reemplazando estas últimas en la ecuación de compatibilidad (25), que corresponde a un estado elástico plano, se llega a:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (32)$$

Para el caso de una deformación plana se puede obtener una ecuación análoga, utilizando un procedimiento similar.

Cuando la fuerza mísica actuante se reduce al peso, el potencial V es $-pgy$. En este caso el miembro derecho de la ecuación (32) se reduce a cero. Si tomamos $\phi = 0$ como solución de (32) o (30) se deduce, de (31) o (29), que la distribución de tensiones:

$$\sigma_x = -pgy, \quad \sigma_y = -pgx, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (d)$$

es una posible solución. Este estado es el de una presión hidrostática bidimensional pgy que se anula para $y = 0$, y que supuesto que se apliquen las fuerzas de contorno

correspondientes puede darse en una placa o cilindro de forma cualquiera. De la consideración de un elemento de contorno cualquiera, tal como el que representaría la figura 12, y aplicando las ecuaciones (13) se deduce que la fuerza actuante sobre el contorno consiste en una presión normal σ_{xy} y una tensión tangencial nula. Si sobre la placa o el cilindro actúan otras fuerzas tenemos que añadir una tensión normal σ_{xy} a las nuevas fuerzas. El conjunto de las dos estará en equilibrio y la determinación de sus efectos es un problema de fuerzas de contorno sin intervención de las fuerzas másicas¹.

Problemas

1. Demostrar que las ecuaciones (12) siguen siendo válidas cuando el elemento de la figura 12 se mueve con una aceleración cualquiera.

2. Hallar gráficamente las deformaciones principales y sus direcciones siendo las medidas dadas por una roseta.

$$\epsilon_x = 2 \times 10^{-3}, \quad \epsilon_{x+y} = 1,35 \times 10^{-3}, \quad \epsilon_{x-y} = 0,95 \times 10^{-3} \text{ cm/cm}$$

y $\alpha = \beta = 45^\circ$.

3. Demostrar que entre los elementos lineales que pasan por el punto x, y aquellos en que se da la máxima y mínima rotación son los paralelos y perpendiculares a la dirección determinada por θ siendo θ el ángulo que cumple.

$$\operatorname{tg} 2\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

4. Las tensiones existentes en un disco (de espesor unidad) en rotación, pueden hallarse considerando el disco parado y sometido a un campo de fuerzas másicas igual a la fuerza centrífuga. Demostrar que tales fuerzas admiten el potencial $V = -1/2 \rho \omega^2 (x^2 + y^2)$ donde ρ es la densidad y ω la velocidad angular de rotación (alrededor del origen).

5. Las fuerzas gravitatorias que actúan sobre un disco cuyo eje es horizontal vienen dadas por las ecuaciones (d) del § 16. Realizar un diagrama de las fuerzas de contorno que soportan su peso. Represéntese mediante otro diagrama las fuerzas de contorno del problema auxiliar, que debe ser resuelto cuando el peso del disco es soportado completamente por una superficie horizontal sobre la cual se apoya.

6. Las fuerzas gravitatorias que actúan sobre un cilindro cuyo eje es horizontal, vienen dadas por las ecuaciones (d) del § 16. Los extremos del mismo se encuentran confinados entre dos planos rígidos fijos que obligan al estado de deformación plana. Realícese un diagrama de las fuerzas que actúan sobre su superficie incluyendo los extremos.

7. Introduciendo las relaciones tensión-deformación y las ecuaciones (a) del § 15 en las ecuaciones de equilibrio (18), demuéstrese que en ausencia de fuerzas másicas y para estados tensionales planos los desplazamientos deben satisfacer la expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

así como la ecuación compañera.

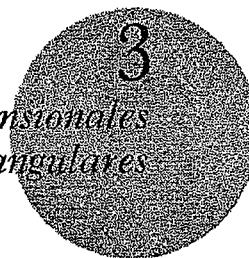
¹ Este problema y el caso general de un potencial V que anula el miembro derecho de (32) ha sido tratado por M. Biot, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, 1935, pág. A-41.

8. La placa de la figura que se prolonga en un «diente», se encuentra en un estado de tensión plana. Sobre los bordes del diente (las dos líneas rectas) no actúa ninguna



fuerza. Demuéstrese que no existe tensión alguna en el vértice del diente. (Nota: Este resultado no es cierto en el caso de que se trate de un diente entrante.)

Problemas bidimensionales en coordenadas rectangulares



17. Soluciones polinómicas. Como se ha visto, la solución de problemas bidimensionales en los que las fuerzas másicas son nulas o constantes, se reduce a la integración de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

cuenta tenida, de las condiciones de contorno (20) que correspondan al caso particular en estudio.

Cuando se tratan placas rectangulares largas y estrechas las soluciones en forma polinómica de la ecuación (a) presentan un notable interés. Utilizando polinomios de diversos grados, en efecto, y ajustando convenientemente los coeficientes, se puede resolver un buen número de problemas de importancia práctica¹.

Para empezar, consideremos un polinomio de segundo grado,

$$\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 x y + \frac{c_2}{2} y^2 \quad (b)$$

que, evidentemente, satisfará la ecuación (a). De la ecuación (29), haciendo $\sigma_{xy} = 0$, se deduce

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} = -b_2$$

Las tres componentes de la tensión son pues constantes en cualquier punto del cuerpo y la función de tensión (b) representa, en consecuencia, una combinación de tensiones uniformes, de tracción o compresión², en dos

¹ Mesnager, A., *Compt. rend.*, vol. 132, pág. 1475, 1901. Véase también A. Timpe, *Z. Math. Physik*, vol. 52, pág. 348, 1905.

² Que sea una u otra depende de los signos de a_2 y b_2 . Las direcciones de las tensiones representadas en la figura 21 corresponden a valores positivos de a_2 , b_2 y c_2 .

direcciones perpendiculares entre sí y una tensión tangencial uniforme. Según se explicó en el § 15, las fuerzas ejercidas sobre el contorno deben ser iguales a las tensiones existentes en los puntos del mismo. Tales fuerzas son dibujadas en la figura 21, que corresponde a una placa rectangular cuyos lados son paralelos a los ejes coordinados.

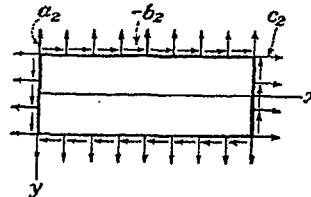


FIG. 21

Consideremos ahora una función de tensión consistente en un polinomio de tercer grado

$$\phi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \quad (c)$$

Este polinomio satisface también la ecuación (a). Usando las ecuaciones (29) y poniendo $\sigma_{xy} = 0$ llegamos a las expresiones

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y \end{aligned}$$

Una placa rectangular, como la que puede verse en la figura 22, se encuentra sometida a una flexión simple si todos los coeficientes del polinomio excepto d_3 son nulos. En cambio, si sólo a_3 es distinto de cero obtenemos un estado de flexión simple creado por esfuerzos normales que actúan sobre los costados de la placa de ecuación $y = \pm c$. Si b_3 o c_3

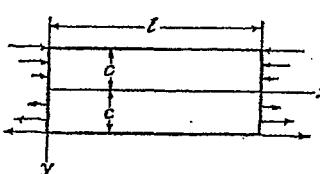


FIG. 22

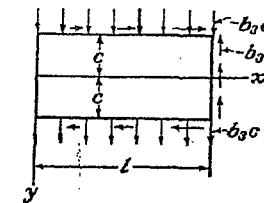


FIG. 23

son distintas de cero, además de las tensiones normales tendríamos tensiones tangenciales actuando sobre los bordes laterales de la placa. La figura 23, por ejemplo, representa el caso en que todos los coeficientes de (c) salvo b_3 son cero. Los sentidos con que se han dibujado las tensiones corresponden a valores positivos de b_3 . A lo largo de los bordes $y = \pm c$ tenemos una distribución uniforme de tensiones de tracción y compresión, respectivamente, y de tensiones tangenciales proporcionales a x . En el borde $x = l$ tenemos simplemente una tensión tangencial constante e igual a $-b_3 l$ y en la cara $x = 0$ no existe tensión alguna. Se obtiene una distribución de tensiones análoga si se toma c_3 distinto de cero.

Al tomar como función de tensión polinomios de segundo o tercer grado se tiene completa libertad en la elección del valor de los coeficientes pues la ecuación (a) es satisfecha cualesquiera que sea su valor. En el caso de polinomios de mayor grado, sin embargo, la ecuación (a) sólo es satisfecha si los coeficientes cumplen, entre ellos, determinadas relaciones. Tomando, por ejemplo, como función de tensión un polinomio de cuarto grado

$$\phi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \quad (d)$$

y llevándolo a la ecuación (a) se encuentra que esta ecuación se cumple solamente si

$$e_4 = -(2c_4 + a_4)$$

Las componentes de la tensión en este caso son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2 \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2\end{aligned}$$

Los coeficientes a_4, \dots, d_4 , que figuran en estas expresiones, son arbitrarios y eligiendo sus valores convenientemente podemos obtener distintas condiciones de carga sobre la placa rectangular. Tomando, por ejemplo, todos los coeficientes menos d_4 iguales a cero resulta

$$\sigma_x = d_4 x y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \quad (e)$$

Si tomamos d_4 positivo la distribución de fuerzas que actúa sobre la placa rectangular y que produce las tensiones expresadas por (e) es la mostrada en la figura 24. Sobre los bordes longitudinales $y = \pm c$ existe una distribución uniforme de tensiones tangenciales y sobre los extremos de la placa la distribución de esas tensiones sigue una ley parabólica.

El conjunto de tensiones tangenciales actuantes sobre el contorno de la placa produce el par

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} \cdot 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} \cdot 2c \cdot l = \frac{2}{3} d_4 c^3 l$$

Este par compensa el producido por las fuerzas normales que actúan sobre la cara $x = l$.

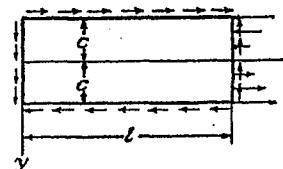


FIG. 24

Supongamos ahora que se toma como función de tensión un polinomio de quinto grado

$$\phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5 \quad (f)$$

Sustituyendo en (a) se obtiene que esta ecuación es satisfecha si

$$\begin{aligned}e_5 &= -(2c_5 + 3a_5) \\ f_5 &= -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)\end{aligned}$$

Las componentes de la tensión correspondiente son, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3} y^3 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3\end{aligned}$$

Los coeficientes a_5, \dots, d_5 , son, de nuevo, arbitrarios y eligiéndolos convenientemente se obtienen las soluciones correspondientes a distintas condiciones de carga de la placa.

Tomando, por ejemplo, todos los coeficientes excepto d_5 iguales a cero se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{3} d_5 y^3 \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2\end{aligned} \quad (g)$$

¹ Se considera una placa de espesor unidad.

Las fuerzas normales se distribuyen uniformemente sobre los bordes longitudinales de la placa (fig. 25a), mientras que sobre la cara $x = l$ constan de dos partes, una que depende linealmente de y , y otra que es función parabólica de tercer grado de la misma coordenada y . Las fuerzas tangenciales son proporcionales a x sobre las caras longitudinales y siguen una ley parabólica a lo largo del borde $x = l$. La distribución de todas estas tensiones es mostrada en la figura 25b.

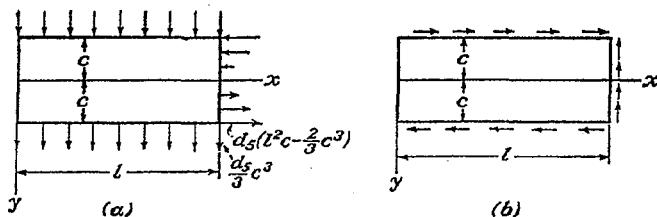


FIG. 25

Puesto que la ecuación (a) es lineal, la suma de varias soluciones de ella es también solución. Podemos, por lo tanto, superponer las soluciones elementales que hemos estudiado y llegar a nuevas soluciones de interés práctico. Más adelante este principio de superposición será usado varias veces.

18. Principio de Saint-Venant¹. En el párrafo anterior se estudiaron distintos casos referentes a placas rectangulares, llegándose a la solución exacta de las mismas, mediante sencillas expresiones de la función de tensión Φ . Estas soluciones satisfacen todas las ecuaciones de la elasticidad, pero su exactitud está condicionada a que las fuerzas superficiales se distribuyan de una determinada forma. En el caso de flexión simple de la figura 22, por ejemplo, el momento flector debe ser producido por tracciones y compresiones que, actuando sobre los extremos, sean proporcionales a la distancia al eje neutro. De otra parte la sujeción, si existe, de la extremidad de la pieza, no deberá influir en la deformación de la superficie plana que la limita. Si tales condiciones no se cumplen, esto es, si el momento flector se aplica de una manera diferente, o si la sustentación impone a la sección terminal otros esfuerzos, la solución dada en el § 17 deja de ser exacta.

La utilidad práctica de dicha solución, sin embargo, no está limitada a caso tan especial sino que puede aplicarse con suficiente exactitud a casos de flexión en los que las condiciones en los extremos no son riguro-

¹ Este principio fue establecido por Saint-Venant en su famosa memoria sobre la torsión: *Mém. savants étrangers*, vol. 14, 1855. Su relación con el principio de conservación de la energía será discutida más adelante (§ 47).

samente satisfechas. Tal extensión en la aplicación de la solución se basa en el llamado *principio de Saint-Venant*. Este principio establece que si las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son remplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y estáticamente equivalente al anterior, la alteración que la nueva distribución de cargas induce en el antiguo estado tensional, aunque localmente importante, resulta despreciable a distancias grandes respecto a las dimensiones de la superficie sobre la cual han cambiado las fuerzas. Por ejemplo, en el caso de flexión simple de una barra (fig. 22) cuyas dimensiones transversales son pequeñas comparadas con su longitud, la manera en que se aplique el momento flector exterior influye en la distribución tensional que se produce en la vecindad de los extremos, pero no en aquella correspondiente a secciones distantes, para las cuales coincide prácticamente con la dada por la solución a que se refiere la figura 22.

Lo mismo ocurre con los esfuerzos axiales. La distribución de tensiones depende de la forma en que se aplique la carga, solamente en las zonas próximas a los extremos. En las secciones alejadas la distribución de tensiones es prácticamente uniforme. Algunos ejemplos ilustrando la validez de este aserto y mostrando la rapidez con que la distribución se hace uniforme serán presentados más adelante (§ 23).

19. Determinación de los desplazamientos. Una vez deducidas las componentes de la tensión a partir de las ecuaciones anteriores, las componentes de los desplazamientos se obtienen mediante la ley de Hooke, ecuaciones (3) y (6). Los desplazamientos, u y v , se obtienen entonces a partir de las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (a)$$

Más adelante encontraremos numerosos ejemplos de aplicación de estas ecuaciones, cuya integración en cada caso particular no presenta dificultades. Se ve en seguida que las componentes de la deformación no cambian si añadimos a u y v las funciones lineales

$$u_1 = a + bx, \quad v_1 = c - bx \quad (b)$$

en las que a , b y c son constantes. Esto significa que las tensiones y deformaciones no determinan completamente los desplazamientos y que a los causados por las deformaciones internas pueden añadirse otros, análogos a los que experimenta un cuerpo rígido. Las constantes a y c definen una traslación y la b un pequeño ángulo de giro del cuerpo rígido alrededor del eje x .

En el § 15 se demostró que para fuerzas másticas constantes la distribución de tensiones es la misma para estados tensionales planos que para

estados de deformación plana. Los desplazamientos, sin embargo, son distintos, dado que para el primer caso las componentes de la deformación que figuran en las ecuaciones (a) vienen dadas por

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

mientras que para el segundo caso de deformación plana las componentes de la deformación son

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que estas ecuaciones pueden obtenerse de las anteriores, para estado tensional plano, sin más que sustituir E , en estas últimas, por $E/(1 - \nu^2)$ y ν por $\nu/(1 - \nu)$. Estas sustituciones no alteran G que es $E/2(1 + \nu)$. Al estudiar algunos problemas especiales se indicará el procedimiento de integración de las ecuaciones (a).

20. Flexión de una pieza en voladizo¹ con carga en su extremidad libre. Sea una pieza en voladizo, de sección rectangular delgada, que supondremos de anchura unidad, flectada por la acción de una fuerza aplicada en su extremo libre (fig. 26). Sobre los bordes superior e inferior

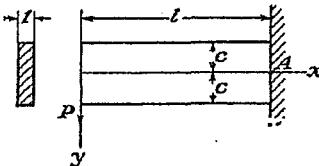


FIG. 26

no actúa ninguna carga, mientras que sobre el extremo correspondiente a $x = 0$ se distribuyen fuerzas tangenciales de resultante P . Tales condiciones pueden ser satisfechas mediante una combinación apropiada de un estado de esfuerzo cortante simple y de las tensiones dadas por las ecuaciones (e) del § 17, representadas en la figura 24. Sumando la tensión tangencial $\tau_{xy} = -b_2$ y las tensiones (e) se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_4 xy, \quad \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2\end{aligned}\tag{a}$$

¹ N. del T. También recibe el nombre de ménnsula.

Para que la fuerza actuante sobre los bordes $y = \pm c$ sea nula es necesario que

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0$$

de donde

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}$$

Para que se cumpla la condición de que en el extremo cargado la suma de las fuerzas tangenciales sea igual a P se ha de cumplir que¹

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} \cdot dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P$$

de donde

$$b_2 = \frac{3P}{4c}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de d y b_2 en (a) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)\end{aligned}$$

y advirtiendo que $2/3 c^3$ es el momento de inercia I de la sección transversal de la pieza tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{P_{xy}}{I}, \quad \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{I} \frac{1}{2} (c^2 - y^2)\end{aligned}\tag{b}$$

La coincidencia de esta solución con la deducida de forma elemental en los tratados de resistencia de materiales es completa. Debe advertirse, sin embargo, que ella es exacta tan sólo cuando las fuerzas tangenciales sobre las extremidades se distribuyen siguiendo la ley parabólica de las tensiones tangenciales τ_{xy} y las fuerzas normales en el empotramiento son proporcionales a y . Si las fuerzas sobre los extremos se distribuyen de otra manera, la distribución de tensiones (b) no es una solución correcta en los extremos de la pieza, aunque sí lo es, en virtud del principio de Saint-Venant, en las secciones transversales alejadas de los mismos.

¹ El signo menos, precediendo a la integral, proviene de la regla de signos dada para las tensiones tangenciales. La tensión τ_{xy} en el extremo $x = 0$ es positiva si se dirige hacia arriba.

Consideremos ahora los desplazamientos correspondientes a las tensiones (b). Aplicando la ley de Hooke se deduce que:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Px}{EI}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EI} \quad (c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2) \quad (d)$$

Las componentes u y v de los desplazamientos se obtienen integrando las ecuaciones (c) y (d). Integrando (c) tenemos la expresión:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y), \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_1(x)$$

donde $f(y)$ y $f_1(x)$ son funciones de y y de x desconocidas. Sustituyendo estos valores de u y v en la ecuación (d) se llega a:

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)$$

En esta ecuación algunos términos dependen solamente de x , otros solamente de y , y uno es independiente de ambos. Indicando estos grupos por $F(x)$, $G(y)$ y K tenemos:

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx}, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} - \frac{Py^2}{2IG}$$

$$K = -\frac{Pc^2}{2IG}$$

y la ecuación puede escribirse

$$F(x) + G(y) = K$$

Tal ecuación implica que $F(x)$ es una constante d y $G(y)$ otra e . De no ser así $F(x)$ y $G(y)$ variarán con x e y y variando la x o la y solamente, la igualdad anterior dejaría de cumplirse. En consecuencia

$$e + d = -\frac{Pe^2}{2IG} \quad (e)$$

y

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d, \quad \frac{df(y)}{dy} = -\frac{Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e$$

Las funciones $f(y)$ y $f_1(x)$ son entonces

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g$$

$$f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h$$

que sustituidas en las expresiones halladas para u y v conducen a:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g \quad (g)$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h$$

Las constantes d , e , g , y h pueden ser determinadas ahora mediante la ecuación (e) y mediante las tres condiciones de vínculo, necesarias para impedir que la viga pueda moverse como un cuerpo rígido en el plano xy . Supongamos que el punto A , baricentro de la sección transversal extrema esté fijo. Entonces u y v son nulos para $x = l$, $y = 0$ y de las ecuaciones (g) se deduce

$$g = 0, \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl$$

La curva de deflexión se obtiene sustituyendo $y = 0$ en la segunda de las ecuaciones (g). De esta manera:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l - x) \quad (h)$$

La determinación de la constante de esta última ecuación exige el empleo de la tercera condición de vínculo, la cual elimina la posibilidad de una rotación de la viga en el plano xy alrededor del punto fijo A . Esta sujeción puede realizarse de varias formas. Consideremos dos casos: 1) Que un elemento del eje de la viga esté fijado en el extremo A . Entonces la condición de vínculo se escribe:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=l, y=0} = 0 \quad (k)$$

2) Que se fije un elemento vertical de la sección transversal en el punto A . La misma condición queda entonces

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=l, y=0} = 0 \quad (l)$$

En el primer caso, la ecuación (h) permite escribir

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

y la ecuación (e) nos da

$$e = \frac{Pl^3}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

Sustituyendo todas las constantes en (g) tenemos

$$\begin{aligned} u &= -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}\right)y \\ v &= \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned} \quad (m)$$

La ecuación de la curva de deflexión es

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^2}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad (n)$$

que da para la flecha del extremo cargado ($x = 0$) el valor $Pl^3/3EI$, que coincide con el valor que se deduce en los textos elementales de resistencia de materiales.

Con el fin de mostrar la distorsión de las secciones transversales producida por las tensiones tangenciales consideremos el desplazamiento u del extremo empotrado ($x = l$). Las ecuaciones (m) nos dan para dicho punto:

$$\begin{aligned} (u)_{x=l} &= -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} - \frac{Pc^2y}{2IG} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} &= -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} - \frac{Pc^2}{2IG} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} &= -\frac{Pc^2}{2IG} = -\frac{3P}{4cG} \end{aligned} \quad (o)$$

y la forma que la sección transversal adquiere como consecuencia de esa deformación es la indicada en la figura 27a. Debido a la tensión tangencial $\tau_{xy} = -3P/4c$ actuante en el punto A, el elemento de sección transversal centrado en A, gira en el plano xy alrededor del punto A el ángulo $3P/4cG$ en el sentido de las agujas del reloj.

Si en lugar de fijar un elemento horizontal del eje se considera realizada la fijación de un elemento vertical de la sección transversal (fig. 27b), se tendrá, de acuerdo con las ecuaciones (e) y la primera de las (g)

$$e = \frac{Pl^2}{2EI}$$

Sustituyendo en (e) se deduce

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

y remplazando en la segunda de las ecuaciones (g) llegamos a

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l - x) \quad (r)$$

De la comparación de esta ecuación con la (n), se deduce que debido al giro de la extremidad A del eje de la pieza en voladizo (fig. 27b), su flecha aumenta en la cantidad

$$\frac{Pc^2}{2IG}(l - x) = \frac{3P}{4cG}(l - x)$$

cantidad que representa, pues, el llamado *efecto de las fuerzas cortantes* en la flexión de la viga (flecha adicional).

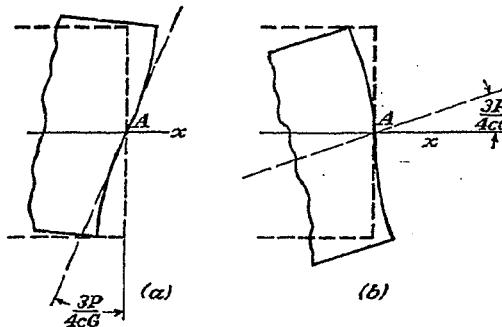


FIG. 27

En la práctica las condiciones en el empotramiento difieren de las mostradas en la figura 27. La sección fija no es libre en general para deformarse y la distribución de fuerzas en este extremo es diferente de la dada en (b). Esta solución es, sin embargo, satisfactoria para piezas en voladizo relativamente largas, en puntos distantes de los extremos.

21. Flexión de una viga uniformemente cargada. Consideremos una viga de sección rectangular estrecha y de anchura unidad, apoyada en sus extremos, sometida a flexión bajo una carga uniformemente repartida de intensidad q , como indica la figura 28. Las condiciones en los bordes superior e inferior son

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=\pm c} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=-c} = -q \quad (a)$$

y en los extremos $x = \pm l$

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql, \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = 0 \quad (b)$$

Las dos últimas ecuaciones (b) establecen que sobre los extremos de la viga no actúa ninguna fuerza longitudinal ni ningún par flector. Las condiciones (a) y (b) pueden ser satisfechas combinando ciertas soluciones polinómicas de las obtenidas en el § 17. Empecemos con la solución

(g) ilustrada por la figura 25. Con el fin de suprimir los esfuerzos de tracción que actúan sobre el borde $y = c$ y los esfuerzos tangenciales existentes a lo largo de las caras $y = \pm c$ superponemos una compresión simple $\sigma_y = a_2$, de la solución (b), (§ 17) y las tensiones $\sigma_y = b_3 y$ y $\tau_{xy} = -b_3 x$ (fig. 23). De esta forma se llega a las expresiones:

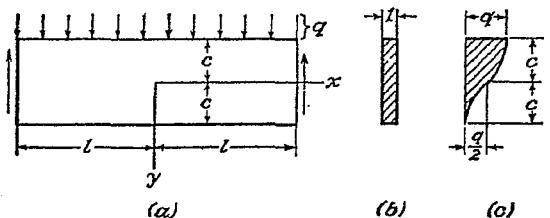


FIG. 28

sión simple $\sigma_y = a_2$, de la solución (b), (§ 17) y las tensiones $\sigma_y = b_3 y$ y $\tau_{xy} = -b_3 x$ (fig. 23). De esta forma se llega a las expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}d_5y^3 + b_3y + a_2 \\ \tau_{xy} &= -d_5xy^2 - b_3x\end{aligned}\quad (c)$$

Teniendo en cuenta las condiciones (a) resulta:

$$\begin{aligned}-d_5c^2 - b_3 &= 0 \\ \frac{1}{2}d_5c^3 + b_3c + a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}d_5c^3 - b_3c + a_2 &= -q\end{aligned}$$

de donde

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3}{4}c, \quad d_5 = -\frac{3}{4}c^3$$

Sustituyendo en las ecuaciones (c) y advirtiendo que $2c^3/3$ es el momento de inercia I de la sección transversal rectangular de anchura unidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3}{4}c^2\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) = -\frac{q}{2I}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) \\ \sigma_y &= -\frac{3q}{4c^3}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right) = -\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4c^3}(c^2 - y^2)x = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x\end{aligned}\quad (d)$$

Puede comprobarse fácilmente que estas componentes de la tensión satisfacen no sólo las condiciones (a), existentes en los bordes longitudinales, sino también las dos primeras condiciones (b), que se dan en los

extremos. Con el fin de que los pares que actúan sobre éstos se anulen, superponemos a la solución (d) una flexión simple $\sigma_x = d_5 \cdot y$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, como indica la figura 22, y determinamos d_5 imponiendo la condición de que para $x = \pm l$

$$\int_{-l}^l \sigma_x y \, dy = \int_{-l}^l \left[-\frac{3}{4}c^2\left(l^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + d_5y \right] y \, dy = 0$$

de donde

$$d_5 = \frac{3}{4}c\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)$$

y finalmente

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3}{4}c^2\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + \frac{3}{4}c\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)y \\ &= \frac{q}{2I}(l^2 - x^2)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)\end{aligned}\quad (33)$$

El primer término de esta expresión representa las tensiones que se deducen de la aplicación de la teoría elemental de la flexión, correspondiendo el segundo a una corrección. Esta corrección independiente de x es pequeña comparada con la máxima tensión normal de flexión, siempre que la luz de la viga sea considerable en relación con su altura, de manera que, en vigas de ese tipo, la teoría elemental de la flexión proporciona un valor suficientemente exacto para las tensiones σ_x . Es de advertir que la expresión (33) es una solución exacta sólo si las fuerzas normales que actúan sobre los extremos $x = \pm l$ se distribuyen según la ley

$$\bar{x} = \frac{3}{4}c^2\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)$$

es decir, si las fuerzas normales en los extremos son iguales a los valores de σ_x para $x = \pm l$ deducidos de (33). Estas fuerzas tienen como resultado un par y una fuerza nula y, por lo tanto, según se deduce del principio de Saint-Venant, podemos despreciar su influencia sobre las tensiones en puntos alejados de los extremos, para distancias, por ejemplo, del orden de la altura de la viga. Para tales puntos y cuando las fuerzas \bar{x} son nulas, la solución (33) puede considerarse como suficientemente exacta.

La discrepancia entre la solución exacta dada por (33) y la aproximada expresada por el primer término de (33), proviene de que en el cálculo de esta última, se supone que las fibras longitudinales de la viga se encuentran sometidas a una tracción simple. La solución (d), sin embargo, muestra que entre las distintas fibras se ejercen unas tensiones de compresión σ_y . Estas tensiones son las responsables del segundo término

de corrección de la solución (33). La distribución de esas tensiones de compresión σ_y a lo largo de la altura de la viga es mostrada en la figura 28c. En cuanto a las tensiones tangenciales τ_{xy} , la tercera de las ecuaciones (d) da su distribución en una sección transversal de la viga, la cual coincide con la que se obtiene aplicando la teoría elemental.

Cuando la carga que se aplica a la viga es su propio peso en lugar de la fuerza distribuida q , la solución debe modificarse haciendo $q = 2gyc$ en (33) y en las dos últimas ecuaciones de (d), y añadiendo las tensiones

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \rho g(c - y), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (e)$$

Esta distribución de tensiones puede deducirse aplicando las ecuaciones (29) a:

$$\phi = \frac{1}{2}\rho g(cx^2 + y^3/3)$$

representando, por tanto, un posible estado tensional producido por el peso y las fuerzas de contorno. Sobre el borde superior $y = -c$ tenemos $\sigma_y = 2gyc$ y en el inferior $y = c$, $\sigma_y = 0$. De esta forma cuando las tensiones (e) son añadidas a la solución anterior, en la que se ha hecho $q = 2gyc$, la tensión sobre ambos bordes horizontales es cero, y la carga aplicada a la viga consiste simplemente en su peso.

Los desplazamientos u y v pueden ser calculados mediante el método indicado en el § 20. Suponiendo que el desplazamiento horizontal del baricentro de la sección transversal media (definido por $x = 0, y = 0$) sea nulo y que el vertical sea igual a la flecha δ se deduce de (d) y (33).

$$\begin{aligned} u &= \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3 \right) \right] \\ v &= -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y + \nu \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5}c^2y^2 \right] \right\} \\ &\quad - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5}c^2x^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\nu \right) c^2x^2 \right] + \delta \end{aligned}$$

A la vista de la expresión de u puede deducirse que la línea neutra de la viga no pasa por su eje ya que a causa de la tensión compresiva

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\frac{q}{2}$$

el eje directriz está sujeto a una tracción a la que corresponde la deformación $\nu q/2E$, teniéndose por lo tanto

$$(u)_{y=0} = \frac{\nu q x}{2E}$$

De la expresión de v se deduce la ecuación de la curva de deflexión

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5}c^2x^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\nu \right) c^2x^2 \right] \quad (f)$$

y suponiendo nula la flecha del punto central de los extremos ($x = \pm l$) se deduce

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (34)$$

El factor que precede a los corchetes, es el valor que se obtiene para la flecha aplicando la teoría elemental, bajo el supuesto de que las secciones transversales de la viga permanezcan planas durante la flexión. El segundo término, dentro del corchete, representa la corrección que corresponde al llamado efecto de la fuerza transversal.

Derivando dos veces con respecto a x la ecuación (f) de la curva de deflexión, encontramos para la curvatura la siguiente expresión

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (35)$$

que nos permite establecer que la curvatura no es exactamente proporcional al momento flector¹ $q(l^2 - x^2)/2$. El término adicional encerrado por los corchetes tiene el significado de una corrección que debe aplicarse a la fórmula elemental corriente. Un estudio más amplio de la curvatura de las vigas lleva a la conclusión² de que la corrección indicada por el término que incluye la expresión (35), puede emplearse en todos aquellos casos de carga de intensidad variable en forma continua. En el § 36 se estudiará el efecto de la fuerza transversal sobre la deformación de una viga sometida a flexión bajo una carga concentrada.

Un cálculo elemental del efecto de la fuerza transversal sobre la curvatura de la curva de deflexión de las vigas ha sido hecho por Rankine³ en Inglaterra y Grashof⁴ en Alemania. Considerando como deformación transversal máxima en el eje neutro de una viga rectangular de ancho unitario, bajo la acción de una fuerza transversal Q , el valor $3/2 \left(\frac{Q}{2cG} \right)$, el correspondiente incremento de la curvatura está dado por su derivada respecto a x , o sea, $3/2 \left(\frac{q}{2cG} \right)$. De acuerdo con el cálculo elemental, se llega a la siguiente expresión para la curvatura corregida:

$$\frac{q}{EI} \cdot \frac{l^2 - x^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{q}{2cG} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2(1 + \nu) \right]$$

Se observa que el valor de la corrección, así obtenida, es exagerado en comparación con el de la expresión (35)⁵.

El término correctivo de la ecuación de la curvatura (35) no puede atribuirse

¹ Esta observación es debida a K. Pearson, *Quart. Jour. Math.*, vol. 24, pág. 63, 1889.
² Véase el trabajo de T. V. Karman, *Abhandl. aerodynam. Inst. Tech. Hochschule, Aachen*, vol. 7, pág. 3, 1927.

³ Rankine, *Applied Mechanics*, 14.^a edición, pág. 344, 1895.

⁴ Grashof, *Elastizität und Festigkeit*, 2.^a edición, 1878.

⁵ Una mayor aproximación se consigue mediante consideraciones energéticas. Véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 2.^a edición, vol. 1, pág. 299.

tan sólo al esfuerzo cortante, pues deriva del hecho de que las tensiones de compresión σ_x no están uniformemente distribuidas en la altura de la viga. El ensanchamiento lateral que estas tensiones producen en la dirección x , disminuye de arriba a abajo, de manera que se origina una curvatura inversa (de convexidad hacia arriba). Si a esta curvatura se une el efecto de la fuerza transversal, quedará explicado el término correctivo de dicha ecuación.

22. Otros casos de flexión de vigas bajo cargas continuas. Aumentando el grado de los polinomios que representan las soluciones de los problemas bidimensionales (§ 17), podemos resolver diversos casos de flexión de vigas sometidas a cargas que varían de un punto a otro con continuidad¹. Tomando, por ejemplo, una solución en forma de poli-

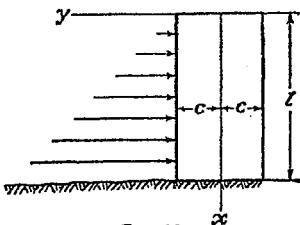


FIG. 29

nómico de sexto grado y combinándola con las soluciones dadas en el § 17, podemos determinar las tensiones que origina una presión hidrostática en una estructura vertical empotrada, como la representada en la figura 29, y demostrar que el siguiente sistema de tensiones satisface todas las condiciones de equilibrio en las caras longitudinales

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{qx^3y}{4c^3} + \frac{q}{4c^3} \left(-2xy^3 + \frac{6}{5} c^2xy \right) \\ \sigma_y &= -\frac{qx}{2} + qx \left(\frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{3qxy^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2(c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (a)$$

En estas expresiones q es el peso específico del fluido, de manera que la intensidad de la carga a la profundidad x es qx y la fuerza transversal y el momento flector a la misma profundidad $qx^2/2$ y $qx^3/6$. Como puede advertirse fácilmente, los primeros términos de las expresiones de σ_x y τ_{xy} son los que para estas tensiones dan las fórmulas elementales.

En la parte superior de la estructura ($x = 0$) la tensión normal es nula y la tangencial viene dada por:

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2(c^2 - y^2)$$

¹ Véanse los trabajos de Timpe, *loc. cit.*; W. R. Osgood, *J. Research Natl. Bur. Standards* vol. 28, pág. 159, 1942.

Estas tensiones, aunque distintas de cero, son muy pequeñas y además su resultante es nula, por lo que a efectos prácticos podemos considerar que el extremo superior de la estructura se encuentra libre de fuerzas exteriores.

El efecto del peso de la estructura sobre la distribución de tensiones es tenido en cuenta sin más que añadir a la expresión de σ_x en las ecuaciones (a) el término $-q_1x$, donde q_1 es el peso específico del material de la estructura. La solución así obtenida ha intentado aplicarse al cálculo de las tensiones existentes en las presas de mampostería de sección rectangular². Debe advertirse, sin embargo, que tal solución no satisface las condiciones existentes en la sección de asiento del muro. La solución (a) es exacta si las fuerzas actuantes sobre esa sección se reparten como las tensiones σ_x y τ_{xy} dadas por (a). En los casos reales la base de la presa está trabada a la fundación y las condiciones existentes son distintas a las que la solución que estudiamos exige. De acuerdo con el principio de Saint-Venant podríamos deducir que el efecto de dicho vínculo sería despreciable a distancias grandes de la base pero dado que las dimensiones transversales de una presa de mampostería no son despreciables frente a su altura, la influencia que consideramos no puede ser despreciada³.

Tomando como función de tensión un polinomio de séptimo grado puede obtenerse la distribución de tensiones en una viga sometida a una distribución de cargas que obedezca a una ley parabólica.

En el caso general de una distribución de carga dada por una ley de variación continua de intensidad q (fig. 30), la distribución de tensiones en cualquier sección transversal alejada de los extremos de la viga (a una distancia mayor que la altura de la viga), puede ser calculada en forma aproximada mediante las siguientes ecuaciones⁴

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left(\frac{y^3}{2a^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2J} (c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (36)$$

en las que M es el momento flector, Q la fuerza transversal, calculada en la forma corriente, y q la intensidad de la carga en la sección transversal considerada. Estas

¹ M. Levy, *Compt. rend.*, vol. 126, pág. 1235, 1898.

² El problema de las tensiones que se producen en las presas de mampostería tiene gran interés práctico y ha sido tratado por diversos autores. Véase K. Pearson, *On some Disregarded Points in the Stability of Masonry Dams*, en *Drapers' Co. Research Memo.*, 1904; K. Pearson y C. Pollard, *An Experimental Study of the Stresses in Masonry Dams*, en *Drapers' Co. Research Memo.*, 1907. Véanse también los trabajos de L. F. Richardson, *Trans. Roy. Soc. (Londres)*, vol. 210, serie A, pág. 307, 1910; y S. D. Carotheis, *Proc. Roy. Soc., Edimburgo*, vol. 33, pág. 292, 1913. I. Muller, *Publications du laboratoire de photo-élasticité*, Zurich, 1930. Fillunger, *Oester. Wochschr. öffentl. Bauwesen*, 1913, Heft. 45. K. Wolf, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, vol. 123, 1914.

³ F. Seewald, *Abhandl. aerodynam. Inst. Tech. Hochschule, Aachen*, vol. 7, pág. 11, 1927.

ecuaciones concuerdan con las obtenidas anteriormente para una viga sometida a una carga uniforme (§ 21).

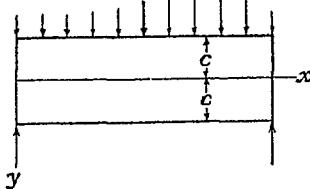


FIG. 30

Si la carga de intensidad q , que actúa de arriba hacia abajo, está distribuida a lo largo del borde inferior ($y = -c$) de la viga, la expresión de las tensiones se obtiene a partir de (36) añadiendo una tensión de tracción $\sigma_y = q$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I} + q \left(\frac{y^3}{2c^2} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2I} (c^2 - y^2)\end{aligned}\quad (36')$$

23. Solución del problema de la elasticidad plana por medio de una serie de Fourier. Como se ha visto, el problema de la determinación de las tensiones que se originan en una viga de sección rectangular estrecha, bajo la acción de una carga distribuida en forma continua a lo largo de la misma, puede ser resuelto bajo la forma de un polinomio. Si la carga es discontinua deberá emplearse, para llegar a la solución, una función de tensión que tenga la forma de una serie trigonométrica¹. La conocida ecuación

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

puede ser satisfecha adoptando para la función ϕ la forma

$$\phi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y) \quad (b)$$

en la cual m es un número entero y $f(y)$ una función de y únicamente. Remplazando este valor en la ecuación (a) y empleando la notación $m\pi/l = a$, se llega a la siguiente ecuación para la determinación de $f(y)$:

$$a^4 f''(y) - 2a^2 f'''(y) + f''''(y) = 0 \quad (c)$$

La integral general de esta ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes es

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} ay + C_2 \operatorname{sh} ay + C_3 y \operatorname{ch} ay + C_4 y \operatorname{sh} ay$$

¹ La solución del problema de las vigas mediante series trigonométricas fue introducida por M. C. Ribiére en su tesis «Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles», Burdeos, 1889. Véase también el trabajo del mismo autor publicado en *Compt. rend.*, vol. 126, págs. 402-404 y 1190-1192. Posteriormente, L. N. G. Filon, *Phil. Trans.*, serie A, vol. 201, pág. 63, 1903, ha realizado nuevos progresos en la aplicación del método. Diversos casos particulares han sido estudiados por F. Bleich, *Bauingenieur*, vol. 4, pág. 255, 1923.

La función de tensión resulta entonces

$$\sigma_x = \operatorname{sen} ax(C_1 \operatorname{ch} ay + C_2 \operatorname{sh} ay + C_3 y \operatorname{ch} ay + C_4 y \operatorname{sh} ay) \quad (d)$$

y las componentes de la tensión están dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \operatorname{sen} ax [C_1 a^2 \operatorname{ch} ay + C_2 a^2 \operatorname{sh} ay + C_3 a (2 \operatorname{sh} ay + ay \operatorname{ch} ay) \\ &\quad + C_4 a (2 \operatorname{ch} ay + ay \operatorname{sh} ay)]\end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -a^2 \operatorname{sen} ax (C_1 \operatorname{ch} ay + C_2 \operatorname{sh} ay + C_3 y \operatorname{ch} ay + C_4 y \operatorname{sh} ay) \quad (e)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -a \cos ax [C_1 a \operatorname{sh} ay + C_2 a \operatorname{ch} ay + C_3 (a \operatorname{sh} ay + ay \operatorname{ch} ay) \\ &\quad + C_4 (a \operatorname{ch} ay + ay \operatorname{sh} ay)]\end{aligned}$$

Considerando el caso particular de una viga simple de sección rectangular sujeta a la acción de fuerzas verticales, distribuidas en forma continua a lo largo de sus bordes superior e inferior y cuyas intensidades sean $A \operatorname{sen} ax$ y $B \operatorname{sen} ax$, respectivamente. La figura 31 corresponde al caso particular en el cual $a = 4\pi/l$ e indica

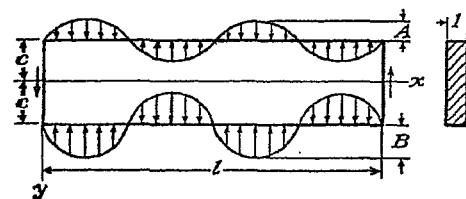


FIG. 31

similarmente los valores positivos de A y de B . La distribución de las tensiones en este caso puede obtenerse mediante las ecuaciones (e). En cuanto a las constantes de integración, C_1, \dots, C_4 , pueden determinarse teniendo en cuenta las condiciones supuestas en los bordes superior e inferior de la viga ($y = \pm c$). Estas condiciones son:

Para $y = +c$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -B \operatorname{sen} ax \quad (f)$$

Para $y = -c$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -A \operatorname{sen} ax$$

Por sustitución de estos valores en la tercera de las ecuaciones del grupo (e) se llega a

$$C_1 a \operatorname{sh} ac + C_2 a \operatorname{ch} ac + C_3 (\operatorname{ch} ac + ac \operatorname{sh} ac) + C_4 (\operatorname{sh} ac + ac \operatorname{ch} ac) = 0$$

$$C_1 a \operatorname{sh} ac + C_2 a \operatorname{ch} ac + C_3 (\operatorname{ch} ac + ac \operatorname{sh} ac) - C_4 (\operatorname{sh} ac + ac \operatorname{ch} ac) = 0$$

y de ahí

$$C_3 = -C_2 \frac{a \operatorname{ch} ac}{\operatorname{ch} ac + ac \operatorname{sh} ac} \quad (g)$$

$$C_4 = -C_1 \frac{a \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} ac + ac \operatorname{ch} ac}$$

Si en la segunda ecuación del grupo (e) se tiene en cuenta las condiciones correspondientes a las caras $y = \pm c$, encontramos:

$$\begin{aligned} u^2(C_1 \operatorname{ch} ac + C_2 \operatorname{sh} ac + C_3 c \operatorname{ch} ac + C_4 c \operatorname{sh} ac) &= B \\ u^2(C_1 \operatorname{ch} ac - C_2 \operatorname{sh} ac - C_3 c \operatorname{ch} ac + C_4 c \operatorname{sh} ac) &= A \end{aligned}$$

Por suma y resta de estas ecuaciones y teniendo en cuenta las ecuaciones (g) se llega a

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A+B}{u^2}, \quad \frac{\operatorname{sh} ac + ac \operatorname{ch} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \\ C_2 &= -\frac{A-B}{u^2}, \quad \frac{\operatorname{ch} ac + ac \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \\ C_3 &= \frac{A-B}{u^2}, \quad \frac{ac \operatorname{ch} ac}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \\ C_4 &= -\frac{A+B}{u^2}, \quad \frac{ac \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \end{aligned} \quad (h)$$

y finalmente, sustituyendo en las ecuaciones (e) se obtiene para las componentes de la tensión, las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (A+B) \frac{(ac \operatorname{ch} ac - sh ac) \operatorname{ch} ay - ay \operatorname{sh} ay \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \cdot \operatorname{sen} ux \\ &\quad - (A-B) \frac{(ac \operatorname{sh} ac - ch ac) \operatorname{sh} ay - ay \operatorname{ch} ay \operatorname{ch} ac}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \cdot \operatorname{sen} ux \\ \sigma_y &= -(A+B) \frac{(ac \operatorname{ch} ac + sh ac) \operatorname{ch} ay - ay \operatorname{sh} ay \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \cdot \operatorname{sen} ux \\ &\quad + (A-B) \frac{(ac \operatorname{sh} ac + ch ac) \operatorname{sh} ay - ay \operatorname{ch} ay \operatorname{ch} ac}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \cdot \operatorname{sen} ux \\ \tau_{xy} &= -(A+B) \frac{ac \operatorname{ch} ay \operatorname{sh} ay - ay \operatorname{ch} ay \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \cdot \cos ux \\ &\quad + (A-B) \frac{ac \operatorname{sh} ac \operatorname{ch} ay - ay \operatorname{sh} ay \operatorname{ch} ac}{\operatorname{sh} 2ac - 2ac} \cdot \cos ux \end{aligned} \quad (k)$$

Las tensiones que dan las expresiones (k) satisfacen a las condiciones consignadas en la figura 31 en lo que respecta a las caras $y = \pm c$. En las extremidades de la viga, $x = 0$ y $x = l$, las tensiones σ_x son nulas y sólo existe la tensión tangencial τ_{xy} . Esta tensión está representada por dos términos, como se ve en las ecuaciones (k): el primer término es proporcional a $A + B$ y representa las tensiones que para las mitades superior e inferior de la cara externa, son de igual valor, pero de signos contrarios. La resultante de estas tensiones en la cara extrema es cero. El segundo término proporcional a $A - B$, tiene resultantes en las extremidades de la viga, que equilibran a las cargas aplicadas a las caras longitudinales ($y = \pm c$).

Si estas cargas fueran iguales para ambas caras, el coeficiente A sería igual a B y las reacciones en los extremos desaparecerían. Para tratar con más detalle este caso particular, supongamos que la longitud de la viga sea grande en comparación con la altura. De acuerdo con la segunda de las ecuaciones (k), las tensiones normales σ_y que actúan en el plano medio, $y = 0$, de la viga, están dadas por

$$\sigma_y = -2A \frac{ac \operatorname{ch} ac + sh ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \operatorname{sen} ux \quad (l)$$

Para vigas muy largas ac igual a $m\pi c/l$, es pequeño, siempre que el número m de ondas no sea grande. En este caso, si se sustituye en (l) resulta:

$$\operatorname{sh} ac = ac + \frac{(ac)^3}{6} + \frac{(ac)^5}{120} + \dots; \quad \operatorname{ch} ac = 1 + \frac{(ac)^2}{2} + \frac{(ac)^4}{24} + \dots$$

y despreciando los infinitésimos de orden superior a $(ac)^4$ se llega a

$$\sigma_y = -A \operatorname{sen} ux \left(1 - \frac{(ac)^4}{24} \right)$$

De aquí resulta que para valores pequeños de ac , la distribución de las tensiones en el plano medio es prácticamente la misma que la que corresponde a ambos cantos horizontales ($y = \pm c$) de la viga y, por tanto, que las presiones se transmiten a través de una viga o placa sin modificación apreciable, siempre que ellas no varíen rápidamente a lo largo de las caras.

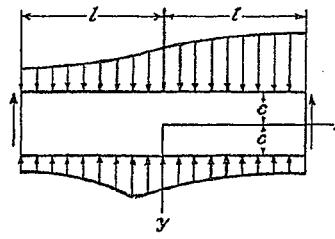


FIG. 32

En este caso las tensiones transversales τ_{xy} son muy pequeñas y se suman, en las mitades superior e inferior de los bordes verticales, a las pequeñas resultantes que se requieren para equilibrar la escasa diferencia entre las presiones que se ejercen sobre los bordes horizontales ($y = \pm c$) y el plano medio ($y = 0$).

En el caso más general, la distribución de las cargas verticales a lo largo de los bordes superior e inferior de una viga (fig. 32) se puede representar por las series siguientes¹:

Para el borde superior

$$q_u = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{l} \quad (m)$$

Para el borde inferior

$$q_l = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m \cos \frac{m\pi x}{l}$$

Los términos constantes A_0, B_0 representan una carga uniformemente distribuida sobre la viga, caso que se ha visto en el § 21. Las tensiones originadas por los términos que contienen $\operatorname{sen}(m\pi x/l)$ se obtienen mediante la suma de las soluciones (k). Las tensiones que originan los términos que contienen $\cos(m\pi x/l)$ se determinan fácilmente intercambiando en las ecuaciones (k) $\operatorname{sen} ux$ por $\cos ux$ y viceversa y cambiando el signo de τ_{xy} .

¹ Para estudiar las series de Fourier véase Osgood, *Advanced Calculus*, 1928; o Byerly, *Fourier Series and Spherical Harmonics*, 1902; o Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 1941.

El caso representado por la figura 33 nos permitirá desarrollar un ejemplo ilustrativo de este método general de cálculo de las tensiones que se producen en las placas rectangulares. Para este caso en que la carga es simétrica, los términos que contienen $\sin(m\pi x/l)$ desaparecen de las expresiones (m) y los coeficientes A_0 y A'_m se obtienen como de ordinario

$$A_0 = B_0 = \frac{qa}{l}, \quad A'_m = B'_m = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2q \sin \frac{m\pi a}{l}}{m\pi} \quad (n)$$

Los términos A_0 y B_0 representan una compresión uniforme igual a qa/l de dirección y . Las tensiones que corresponden a los términos trigonométricos se obtienen intercambiando en las soluciones (k) $\sin mx$ por $\cos mx$ y mediante el cambio del signo de τ_{xy} .

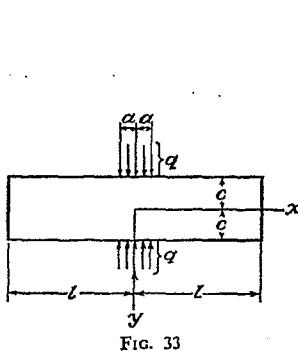


FIG. 33

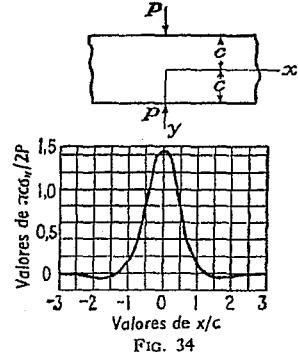


FIG. 34

La tensión normal σ_y , única que actúa en el plano medio $y = 0$, se puede obtener utilizando la segunda de las ecuaciones (k):

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l}}{m} \cdot \frac{\frac{m\pi c}{l} \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{l} + \operatorname{sh} \frac{m\pi c}{l}}{\operatorname{sh} \frac{2m\pi c}{l} + 2 \frac{m\pi c}{l}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l}$$

Esta tensión ha sido calculada por Filon¹ para el caso de una faja infinitamente larga, en la cual el valor de a es muy pequeño o lo que es lo mismo, para una fuerza concentrada $P = 2qa$. La figura 34 resume gráficamente los resultados de estos cálculos y demuestra que σ_y disminuye muy rápidamente con x para reducirse a cero en correspondencia del valor $x/c = 1.35$ y ser entonces remplazado por una tracción. El mismo autor ha estudiado el caso que muestra la figura 35, que es aquel en que las fuerzas P no tienen la misma recta de acción. En ese caso la distribución de los esfuerzos tangenciales en la sección transversal mn es de interés práctico; está representada en la figura 36, la cual nos dice que para valores pequeños de la relación b/c esta distribución se aparta de la ley parabólica deducida de la teoría elemental;

¹ L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. London*, serie A, vol. 201, pág. 67, 1903. El mismo problema fue estudiado por A. Timpe, *Z. Math. Physik*, vol. 55, pág. 149, 1907; G. Mesmer, *Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen...*, Dissertation, Gottinga, 1929; F. Seewald, *Ahli aerodynam. Inst. Tech. Hochschule, Aachen*, vol. 7, pág. 11, 1927; y H. Bay, *Ingenieur-Archiv*, vol. 3, pág. 435, 1932. M. Pigenaud obtuvo una solución aproximada del problema en *Compt. rend.*, vol. 161, pág. 673, 1915. J. N. Goodier, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 54, n.º 18, pág. 173, 1932, estudió el problema para el caso de placa rectangular de longitud finita.

también revela que en las caras superior e inferior de la viga las tensiones son considerables en tanto que en su parte media prácticamente no actúan tensiones tangenciales.

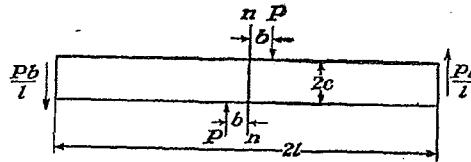


FIG. 35

En el problema que se ilustra en la figura 34 se ve que por razones de simetría la línea $y = 0$ no sufrirá ningún desplazamiento vertical ni actuará sobre ella ninguna tensión tangencial. La mitad superior de la viga representa, pues, el caso de una lámina elástica apoyada sobre una base rígida perfectamente lisa¹.

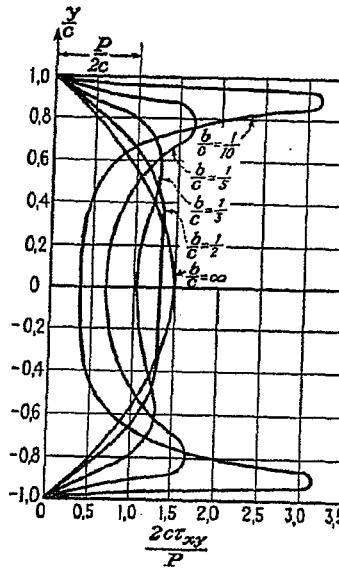


FIG. 36

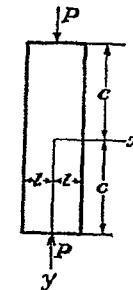


FIG. 37

Veamos otro caso extremo, como el de una placa cuya altura $2c$ sea considerablemente mayor que la longitud $2l$ (fig. 37). Este caso nos servirá para demostrar la rapidez con que la distribución de las tensiones en las secciones transversales se approxima a una ley de repartición uniforme, al aumentar la distancia al punto de aplicación de las fuerzas P . Con tal objeto emplearemos la segunda de las ecuacio-

¹ El caso de una base no lisa ha sido estudiado por K. Marguerre, *Ing. Archiv*, vol. 2, pág. 108, 1931, y el de una lámina inextensible pero flexible embebida en un material elástico, de interés en mecánica de suelos, por M. A. Biot, *Physics*, vol. 6, pág. 367, 1935.

nes (k) con $\cos \alpha x$ en lugar de $\sin \alpha x$ y las expresiones (n) para los coeficientes A_m' y B_m' iguales. Resulta entonces la expresión

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ua}{m} \cdot \frac{(\operatorname{ch} uc + \operatorname{sh} uc) \operatorname{ch} uy - uy \operatorname{sh} uy \operatorname{sh} uc}{\operatorname{sh} 2uc + 2ac} \cdot \cos ux \quad (p)$$

en la cual $qa = P/2$. Para el caso supuesto, en que l resulta pequeño comparado con c , uc es grande y puede despreciarse en el denominador frente a $\operatorname{sh} uc$. También podemos escribir

$$\operatorname{sh} uc = \operatorname{ch} uc = \frac{1}{2}e^u$$

Para secciones transversales distantes de la parte central de la placa podemos también poner $\operatorname{sh} uy = \operatorname{ch} uy = 1/2 l''$ y sustituyendo estos valores en la ecuación (p) se llega a

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{2m} [(\operatorname{ch} c + 1)e^{c(u-x)} - \alpha y e^{\alpha(u-x)}] \cos \alpha x \\ &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l}}{2m} \left[\frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(u-x)} \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned}$$

Si $c - y$ no fuese muy pequeño, por ejemplo $c - y > l/2$, esta serie es de rápida convergencia y para calcular σ_y , solamente se necesita considerar unos pocos términos. Si tomamos entonces

$$\operatorname{sen} \frac{m\pi a}{l} = \frac{m\pi a}{l}$$

y ponemos $2au = P$ llegarímos a

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(u-x)} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

Para $y = c - l$, por ejemplo, se obtiene

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \left(\frac{\pi+1}{e^{\pi}} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi+1}{e^{2\pi}} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{3\pi+1}{e^{3\pi}} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

Con los tres primeros términos de la serie basta para lograr una buena aproximación, y calculando así, se obtiene la distribución de tensiones representada en la figura 38b, que contiene asimismo las distribuciones que corresponden a $c - y = l/2$ y $c - y = 2l$. La distribución de esfuerzos que corresponde a una distancia de la extremidad igual al ancho de la faja es prácticamente uniforme, lo que confirmaría la conclusión comúnmente establecida por la aplicación del principio de Saint-Venant.

En el caso de una faja alargada tal como la indicada en la figura 37 las tensiones σ_x se transmitirán sin apenas cambiar a través de la anchura $2l$, supuesto que la velocidad de variación a lo largo del borde no sea grande. A causa de esto, sin embargo, la solución obtenida requiere alguna corrección especialmente en la proximidad de los extremos $y = \pm c$. Mediante un método diferente¹ se ha resuelto el

¹ Véase el trabajo de F. Bleich, *loc. cit.*

² J. N. Goodier, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 54, pág. 173, 1932.

problema de la figura 37 para el caso en que $c = 2l$, encontrándose que en la sección media existe una compresión prácticamente uniforme lo que concuerda con la

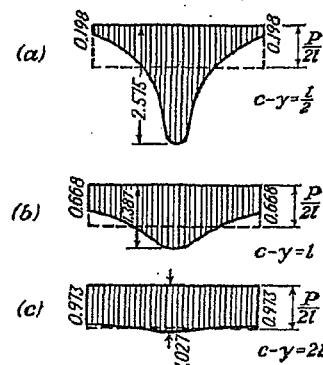


FIG. 38

figura 38c. Las tensiones existentes en los puntos próximos al de aplicación de las cargas P serán estudiados en el § 33.

24. Otras aplicaciones de las series de Fourier. Caso en que la carga a considerar es el peso. Los problemas considerados en el § 23 se referían a «elementos» individuales de longitud l o $2l$. Dado, sin embargo, que las series de Fourier constituyen funciones periódicas, puede considerarse que las soluciones

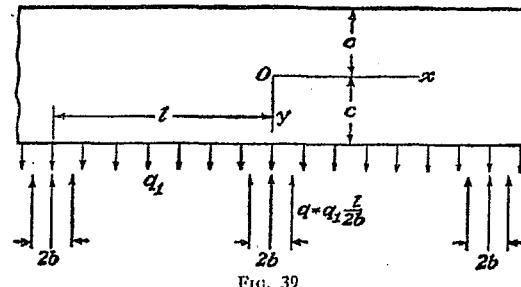


FIG. 39

obtenidas representan estados tensionales periódicos, existentes en largas cintas paralelas a la dirección x . Tal situación se dará, por ejemplo, en las vigas continuas consistentes en la sucesión de varias vigas «individuales» de iguales luces todas ellas sometidas a cargas iguales en cada tramo. Si, como ocurre en ciertas construcciones en hormigón armado, la viga es esencialmente un muro soportado en puntos separados (regularmente) una distancia comparable a su altura (fig. 39), la teoría elemental de las vigas no es adecuada, obteniéndose, sin embargo, resultados útiles mediante el método que estudiamos¹. El caso de una carga q_1 uniformemente distribuida

¹ Problemas de este tipo son estudiados en el libro *Die Statik im Eisenbetonbau* de K. Beyer, 2.ª edición, pág. 723, 1934; véase también H. Craemer, *Ingenier-Archiv*, vol. 7, pág. 325, 1936.

sobre el borde inferior, soportada por reacciones que se distribuyen uniformemente en segmentos de longitud $2b$ separados una distancia l puede ser representado por la ecuación (m) del § 23. El estado tensional que esas cargas producen sumado con el correspondiente a una presión q_1 aplicada sobre los bordes inferior y superior es el producido cuando la carga q_1 es aplicada en el borde superior.

Si la carga a considerar es el propio peso de la viga el problema de fuerzas máximas resultante puede convertirse fácilmente en otro de cargas en los bordes. A la sencilla distribución tensional

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\rho g(y + c), \quad \tau_{xy} = 0$$

que satisface las ecuaciones (19) y (24) de equilibrio y de compatibilidad corresponde, en efecto, una presión de valor $2\rho gc$ uniformemente distribuida sobre el borde inferior en la figura 39. La condición de que en ese borde, con excepción de en los soportes (de anchura $2b$), σ_y sea cero queda satisfecha sumando la distribución tensional anterior a la representada por la figura 39 con $q_1 = 2\rho gc$, estando causada entonces la tensión por q y q_1 simplemente.

Problemas

1. Hallar qué problema tensional plano es resuelto por la función de tensión

$$\phi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{2} y^2$$

2. Hallar a qué problema corresponde la función

$$\phi = -\frac{F}{d^3} xy^2(3d - 2y)$$

la cual se aplica a la región de valores positivos de x comprendida entre las rectas $y = 0$, $y = d$ y $x = 0$.

3. Demostrar que

$$\phi = \frac{q}{8c^3} \left[x^2 \left(y^3 - 3c^2y + 2c^3 \right) - \frac{1}{5} y^3 \left(y^2 - 2c^2 \right) \right]$$

es una función de tensión y encuéntrese cuál es el problema al que corresponde cuando es aplicada a la región de valores positivos de x comprendida entre las rectas $y = \pm c$ y $x = 0$.

4. Tomemos la función

$$\phi = s \left(\frac{1}{4} xy - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{ly^2}{4c} + \frac{ly^3}{4c^2} \right)$$

como solución correspondiente al caso de una pieza en voladizo ($y = \pm c$, $0 < x < l$) sometida a tensiones tangenciales uniformes en el borde inferior (sobre el borde superior y el extremo $x = l$ no actúa ninguna fuerza). ¿En qué aspectos es imperfecta esta solución? Comparar la expresión de las tensiones obtenidas con la deducida de las fórmulas elementales de tracción y flexión.

5. Deducir la expresión de las componentes u y v de los desplazamientos que se dan en la viga de la figura 28, cuando la carga a la cual es sometida es su propio peso en lugar de la fuerza de intensidad q , aplicada sobre el borde superior. Obténgase también una expresión para el cambio de espesor de la pieza (originalmente igual a la unidad).

6. Supongamos que la ménsula de la figura 26 sea de sección rectangular ancha, en lugar de estrecha, que P sea la fuerza por unidad de espesor y que la pieza se mantenga en un estado de deformación plano mediante la aplicación de las fuerzas necesarias sobre sus caras verticales.

Justifíquese el que las tensiones σ_x , σ_y , τ_{xy} sean las mismas que las obtenidas en el § 20. Dedúzcase la expresión de σ_z y realícese un diagrama de su distribución a lo largo de las caras de la pieza. Obtener las expresiones de las componentes u y v de los desplazamientos cuando en el extremo $x = l$ se mantiene fijo un elemento horizontal del eje.

7. Demostrar que si V es una función armónica, lo que quiere decir que satisface la ecuación de Laplace, las funciones xV , yV , $(x^2 + y^2)V$ satisfacen la ecuación (a) del § 17, pudiendo ser usadas, por tanto, como funciones de tensión. La ecuación de Laplace es la

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

8. Demuéstrese que

$$(Ae^{ax} + Be^{-ax} + Cye^{ay} + Dye^{-ay}) \sin ax$$

es una función de tensión.

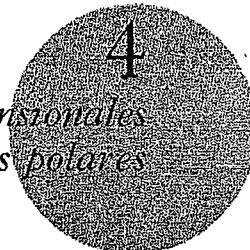
Deducir la expresión en serie de las tensiones causadas en una placa semi-indefinida ($y > 0$), por una presión normal aplicada sobre el borde $y = 0$ cuyo valor viene dado por

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

Demostrar que la tensión σ_z en un punto del borde es una compresión igual a la presión aplicada en ese punto. Supóngase que las tensiones tienden a anularse al aumentar y .

9. Demuéstrese que las tensiones (a) del § 23 y las del problema 8 satisfacen la ecuación (b) del § 16.

Problemas bidimensionales en coordenadas polares



25. Ecuaciones generales en coordenadas polares. Al estudiar la distribución de tensiones en anillos y discos circulares, piezas curvas de sección rectangular estrecha y directriz circular, etc., es conveniente hacer uso de las coordenadas polares. La posición de un punto cualquiera del plano medio de la pieza que estudiamos vendrá dada por la distancia del mismo al origen O (fig. 40) y por el ángulo θ formado por r y un determinado eje Ox del plano.

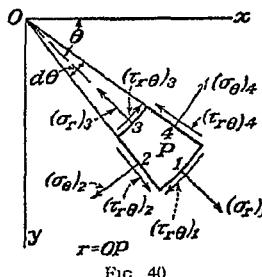


FIG. 40

Consideremos ahora el equilibrio del pequeño elemento 1234, delimitado por las secciones radiales 04 y 02 y por las superficies cilíndricas 3 y 1 normales todas ellas a la pieza plana que consideramos. Las componentes normales de la tensión de dirección radial y tangencial son designadas por σ_r y σ_θ respectivamente y la componente tangencial por $\tau_{r\theta}$, refiriéndose todos estos símbolos a la tensión en el punto central P del elemento, definido por r y θ . Debido a la variación de las tensiones, los valores de la misma en los puntos centrales de las caras 1, 2, 3 y 4 no son

σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ y son designados por $(\sigma_r)_1$, etc., en la figura 40. La fuerza radial que actúa sobre la cara 1, de radio r_1 , viene dada por $\sigma_{r1}r_1d\theta$, que puede escribirse $(\sigma_r)_1 d\theta$, y de forma semejante la que actúa sobre la cara 3, de radio r_3 , es $-(\sigma_r)_3 d\theta$. La fuerza normal que actúa sobre la cara 2 tiene una componente según el radio OP que viene dada por $-(\sigma_\theta)_2 (r_1 - r_3) \sin(d\theta/2)$, expresión que puede escribirse $-(\sigma_\theta)_2 dr (d\theta/2)$ y por lo mismo la componente correspondiente a la fuerza normal que actúa sobre la cara 4 es $-(\sigma_\theta)_4 (d\theta/2)$. Finalmente, las fuerzas tangenciales que actúan sobre las caras 2 y 4 nos dan $[(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr$.

Sumando todas las fuerzas de dirección radial, las anteriormente indicadas y la fuerza mísica R que actúa sobre la unidad de volumen, de la que supondremos que actúa en la dirección radial, obtenemos la ecuación de equilibrio:

$$(\sigma_r)_1 d\theta - (\sigma_r)_3 d\theta - (\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2} + [(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr + Rr d\theta dr = 0$$

que dividiendo por $dr d\theta$ queda:

$$\frac{(\sigma_r)_1 - (\sigma_r)_3}{dr} - \frac{1}{2}[(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_4] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4}{d\theta} + Rr = 0$$

Si de forma análoga hallamos la condición de equilibrio para las fuerzas de dirección tangencial y hacemos tender a cero las dimensiones del elemento 1234, las dos ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Estas ecuaciones son las que corresponden a las (18) para el caso de coordenadas polares y si las fuerzas mísicas R son nulas son satisfechas por las expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

en las que ϕ función de r y θ es la función de tensión. Que ello es así puede comprobarse por sustitución directa o bien deducirse como haremos a continuación.

Para que la función represente una distribución de tensiones posible ha de satisfacer la condición de compatibilidad, que en coordenadas cartesianas queda así:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

Para expresar esa condición en coordenadas polares recordemos las siguientes relaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

de las cuales se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

Utilizando estas últimas expresiones y considerando a ϕ función de r y θ encontramos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta$$

La derivada segunda con respecto a x se obtiene con sólo repetir la operación anterior y así resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r^2} \quad (b) \end{aligned}$$

Análogamente se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{r} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{r^2} \quad (c) \end{aligned}$$

y sumando las ecuaciones (b) y (c) tendremos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (d)$$

Con esta ecuación y la identidad

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

se obtiene la ecuación de compatibilidad (a) expresada en coordenadas polares:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (39)$$

Esta ecuación diferencial entre derivadas parciales nos permitirá resolver problemas de elasticidad plana en coordenadas polares para diversas condiciones de contorno. En este capítulo se desarrollarán algunos ejemplos de problemas de este tipo.

La primera y segunda de las expresiones (38) se siguen de las ecuaciones (b) y (c). Si elegimos, en efecto, un punto cualquiera y hacemos pasar por el eje x , $\theta = 0$ y σ_x, σ_y coinciden con σ_r, σ_θ de forma que sustituyendo en (c) el valor cero para θ llegamos a:

$$\sigma_r = \sigma_x = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

expresión ésta que, naturalmente, seguirá representando σ , aunque cambiemos la orientación del eje x . De forma análoga poniendo $\theta = 0$ en (b) tenemos:

$$\sigma_\theta = \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

y obteniendo asimismo la expresión de $-\partial^2 \phi / \partial x \partial y$ tendremos la tercera expresión de (38).

26. Distribución de tensiones simétricas respecto a un eje. Si la distribución de tensiones es simétrica respecto a un eje perpendicular al plano xy que pasa por O (fig. 40), las componentes de la tensión no dependen de θ y son función solamente de r . Se deduce también que por razones de simetría la tensión $\tau_{r\theta}$ es nula y, en consecuencia, las ecuaciones de equilibrio (37) se reducen a la primera, quedando:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (40)$$

Si la fuerza másica R es cero podemos usar la función de tensión ϕ la cual dependerá sólo de r , por lo que la ecuación de compatibilidad (39) quedará así:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \phi}{dr} \right) &= \frac{d^4 \phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d \phi}{dr} = 0 \quad (41) \end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria, que puede reducirse a una ecuación diferencial de coeficientes constantes introduciendo una nueva variable t , tal que $r = e^t$. De esta manera, puede obtenerse fácilmente la solución general de la ecuación (41), que tendrá cuatro constantes de integración, las que deberán determinarse mediante las condiciones de contorno. Por sustitución, puede comprobarse que la solución general es:

$$\phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad (42)$$

a partir de la cual pueden hallarse las soluciones de todos los problemas de distribución de tensiones simétricas y fuerzas másicas nulas.

Las componentes correspondientes de la tensión se deducen de (38) y son:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Si no existe ningún agujero en el origen de coordenadas las constantes A y B se anulan, pues de no ser así las componentes de la tensión dadas por (43) serían infinitas para $r = 0$. Resulta, pues, que una placa sin fuerzas másicas que no presente un agujero en el origen sólo admite una distribución de tensiones simétricas, aquella para la cual $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{constante}$; lo que significa que la placa se encuentra en un estado equitensional de tracción o compresión uniforme en todas las direcciones de su plano.

Si existe un orificio en el origen, las expresiones (43) permiten obtener soluciones distintas de una tracción o una compresión uniforme. Haciendo, por ejemplo B igual a cero¹, las ecuaciones (43) quedan

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C \end{aligned} \quad (44)$$

Esta solución se adapta al caso de la distribución de tensiones que se produce en un cilindro hueco sometido a una presión uniforme interior y exteriormente² (fig. 41). Si a y b son los radios interior y exterior del cilindro y p_i y p_o las presiones uniformes interior y exterior las condiciones de contorno serán:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o \quad (a)$$

¹ La prueba de que B debe anularse exige la consideración de los desplazamientos. Véase párrafo 29.

² La solución de este problema se debe a Lamé, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, París, 1852.

y sustituyendo en la primera de las ecuaciones (44) se obtienen las siguientes ecuaciones para determinar A y C :

$$\begin{aligned} \frac{A}{a^2} + 2C &= -p_i \\ \frac{A}{b^2} + 2C &= -p_o \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \\ 2C &= \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (44) se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de la tensión:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (45)$$

De (45) se deduce que la suma $\sigma_r + \sigma_\theta$ es una constante. En consecuencia las tensiones σ_r y σ_θ producen un alargamiento o un acortamiento uni-

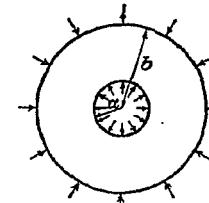


Fig. 41

forme en la dirección del eje del cilindro y las secciones normales a ese eje se conservan planas. A causa de ello la deformación producida por las tensiones (45) en un elemento de cilindro contenido entre dos secciones transversales próximas, no interfiere con la deformación de los elementos vecinos, lo que justifica considerar al elemento en un estado de tensión plano, tal como hemos hecho en el estudio anterior.

En el caso particular en que $p_o = 0$ las ecuaciones (45) se transforman en:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Estas ecuaciones muestran que σ_r es siempre una tensión de compresión y σ_θ una tracción. La última de ellas es máxima en la superficie interior del cilindro, donde:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{p_i(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad (47)$$

La tensión $(\sigma_\theta)_{\max}$ es siempre mayor en valor absoluto que la presión interior, a la cual tiende cuando b aumenta de forma que nunca puede ser inferior a p_i , por mucho material que se añada exteriormente. Diversas aplicaciones de las ecuaciones (46) y (47) al diseño de máquinas son estudiadas en los textos elementales de resistencia de materiales¹.

El problema correspondiente a un cilindro con un agujero excéntrico, que será considerado en el § 66, fue resuelto por G. B. Jeffery². Si el radio del orificio es a , el del cilindro b y la distancia entre sus centros es e , la tensión máxima que se origina cuando el cilindro es sometido a una presión interior p_i , es la tensión tangencial³ correspondiente al punto de la superficie interior en que es mínimo el espesor (si $e < \frac{1}{2}a$) y su valor es:

$$\sigma = p_i \left[\frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right]$$

Si $e = 0$, este valor coincide con el dado por la ecuación (47).

27. Flexión simple de piezas curvas. Consideremos el caso de una pieza curva de sección rectangular estrecha⁴, de directriz circular,

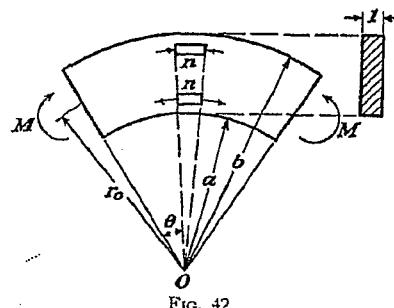


FIG. 42

¹ Véase, por ejemplo, S. Timoshenko, *Strength of Materials*, vol. 2, pág. 236, 1941.

² Trans. Roy. Soc. London, serie A, vol. 221, pág. 265, 1921. Véase también Brit. Assoc. Advancement Sci. Repts., 1921.

³ N. del T. En este capítulo llamaremos a veces tensión tangencial a la tensión normal de dirección tangencial σ_θ . Creemos, sin embargo, que el sentido del texto evita toda confusión.

⁴ De la discusión general de los problemas bidimensionales (§ 15) se deduce que la solución que obtengamos, será válida también para el otro caso extremo en que la dimensión perpendicular al plano de curvatura sea muy grande, como por ejemplo en un túnel abovedado (fig. 10), si la carga, a lo largo del mismo, es constante.

sometida a flexión en el plano de curvatura mediante los pares M aplicados en sus extremos (fig. 42). El momento flector, en este caso, es constante a lo largo de la pieza y es natural esperar que la distribución de tensiones sea la misma en todas las secciones transversales de dirección radial y , en consecuencia, que la solución del problema pueda obtenerse aplicando la fórmula (42). Llamando a y b a los radios de los contornos interior y exterior y considerando el espesor de la sección rectangular igual a uno, las condiciones de contorno son

$$(1) \quad \sigma_r = 0 \text{ para } r = a \text{ y } r = b$$

$$(2) \quad \int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M \quad (a)$$

$$(3) \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ en el contorno}$$

La condición (1) significa que sobre los contornos convexo y cóncavo de la pieza no actúa ninguna fuerza normal; la ecuación (2) indica que las tensiones normales que actúan sobre los extremos dan lugar solamente al par M , y la condición (3) que sobre los contornos no actúa ninguna fuerza tangencial. Utilizando la primera de las ecuaciones (43) conjuntamente con las condiciones (a) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \log a) + 2C &= 0 \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \log b) + 2C &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

La condición (2) del grupo de fórmulas (a) nos conduce a:

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_a^b = 0$$

y sustituyendo ϕ por su expresión (42) tenemos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{A}{b} + B(b + 2b \log b) + 2Cb \right] \\ - \left[\frac{A}{a} + B(a + 2a \log a) + 2Ca \right] &= 0 \quad (c) \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con (b), es fácil ver que la (c) es satisfecha y las fuerzas aplicadas en los extremos pueden reducirse a un par de fuerzas, con tal que las condiciones contenidas en (b) queden cumplidas. Para que el par flector sea igual a M es necesario que se cumpla la condición

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = -M \quad (d)$$

Ahora bien:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} r \right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} r \right]_a^b - \left| \phi \right|_a^b$$

y como de la ecuación (b) resulta

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial r} r \right|_a^b = 0$$

se deduce de (d)

$$\left| \phi \right|_a^b = M$$

o bien, sustituyendo el valor de ϕ dado por la expresión (42)

$$A \log \frac{b}{a} + B(b^2 \log b - a^2 \log a) + C(b^2 - a^2) = M \quad (e)$$

Esta ecuación junto con las (b), determina completamente las constantes A , B y C , las cuales vienen dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log \frac{b}{a}, \quad B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2) \\ C &= \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log b - a^2 \log a)] \end{aligned} \quad (f)$$

donde para simplificar hemos puesto:

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \quad (g)$$

Sustituyendo los valores que para las constantes A , B y C dan las fórmulas (f) en (43) resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \quad (48) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Estas fórmulas dan la distribución de tensiones que satisface todas las condiciones de contorno¹ (a) para la flexión simple y representan la solución exacta del problema, si la distribución de fuerzas normales que

¹ Esta solución fue dada por H. Golovin, *Trans. Inst. Tech.*, San Petersburgo, 1881. El trabajo, publicado en ruso, no fue conocido en otros países y el mismo problema fue resuelto más tarde por M. C. Ribière (*Compt. rend.*, vol. 108, 1889 y vol. 132, 1901) y por L. Prandtl. Véase A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, vol. 5, pág. 72, 1907; y también A. Timpe, *Z. Math. Physik*, vol. 52, pág. 348, 1905.

actúan sobre los extremos es la dada por la segunda de las ecuaciones (48). Si las fuerzas que producen el par M se distribuyen sobre los extremos en forma diferente, las tensiones en dichos extremos no serán las dadas por (48); pero de acuerdo con el principio de Saint-Venant las diferencias serán muy pequeñas y podrán ser despreciadas para distancias de los extremos que sean mayores que, o del orden de, la altura de la pieza.

Resulta de interés práctico comparar la solución (48) con la que suelen dar los textos de resistencia de materiales. Si la altura de la pieza $b - a$, es pequeña frente al radio de la directriz de la misma $(b + a)/2$, se adopta generalmente la distribución de tensiones que corresponden a piezas de eje recto. Si la altura de la pieza no es pequeña se supone en la práctica que sus secciones transversales se conservan planas durante la flexión, de donde resulta que la distribución de las tensiones normales σ_θ sigue una ley hiperbólica¹. En todos los casos pueden representarse los valores máximo y mínimo de la tensión σ_θ por una expresión de la forma

$$\sigma_\theta = m \frac{M}{a^2} \quad (h)$$

La tabla siguiente da los valores del factor m calculado por los dos métodos elementales mencionados y por la fórmula exacta (48)²:

COEFICIENTE m DE LA ECUACIÓN (h)

b/a	Ley lineal de distribución de tensiones	Ley hiperbólica de distribución de tensiones	Solución exacta
1,3	$\pm 66,67$	$+ 72,98$	$+ 73,05$
2	$\pm 6,000$	$- 61,27$	$- 61,35$
3	$\pm 1,500$	$+ 7,725$	$+ 7,755$
		$- 4,863$	$- 4,917$
		$+ 2,285$	$+ 2,292$
		$- 1,095$	$- 1,130$

A la vista de esta tabla puede deducirse que la solución elemental basada en la hipótesis de la conservación de las secciones planas conduce a resultados muy exactos.

Como veremos más adelante en el caso de flexión simple las secciones transversales se conservan planas y la discrepancia entre las soluciones

¹ Esta teoría aproximada fue desarrollada por H. Résal, *Ann. mines*, pág. 617, 1862, y K. Winkler, *Zivilingenieur*, vol. 4, pág. 232, 1858; véase también su libro *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, capítulo 15, Praga, 1867. El desarrollo ulterior de la teoría fue realizado por F. Grashof, *Elastizität und Festigkeit*, pág. 251, 1878, y K. Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2, parte 1, pág. 422, 1893.

² Los resultados han sido tomados de la tesis doctoral de V. Bilevitz, Universidad de Michigan, 1931.

elementales y exactas provienen del hecho de que en la primera no se tiene en cuenta la componente σ_r de la tensión, suponiéndose que las fibras longitudinales de la pieza están sujetas a tracción o compresión simples.

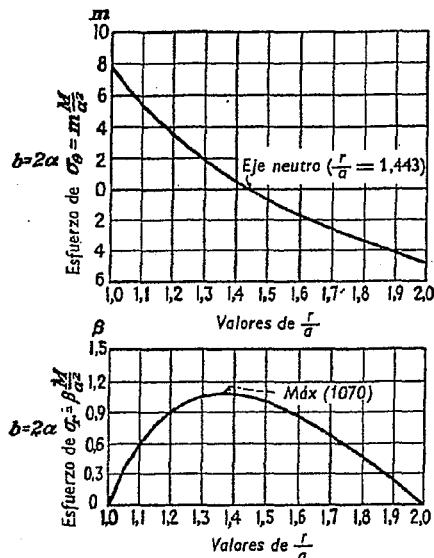


FIG. 43

La primera de las ecuaciones (48) nos dice que la tensión es siempre positiva cuando la flexión tiene el sentido que indica la figura 42. La misma conclusión surge inmediatamente teniendo en cuenta el sentido de las tensiones σ_θ que actúan en los elementos $n - n$, indicados en la figura 42. Las resultantes de los correspondientes esfuerzos tangenciales son de dirección radial y tienden a separar las fibras longitudinales y a provocar tensiones de tracción en esa dirección; éstas aumentan al aproximarse a la superficie neutra y alcanzan su máximo en la proximidad de la misma. Este máximo es siempre mucho menor que $(\sigma_\theta)_{\max}$. Por ejemplo, para $b/a = 1,3$, $(\sigma_r)_{\max} = 0,060 (\sigma_\theta)_{\max}$; para $b/a = 2$, $(\sigma_r)_{\max} = 0,138 (\sigma_\theta)_{\max}$; para $b/a = 3$, $(\sigma_r)_{\max} = 0,193 (\sigma_\theta)_{\max}$. La figura 43 en la cual se representa gráficamente la distribución de σ_θ y σ_r para $b/a = 2$, nos hace ver la desviación, que con respecto a la línea neutra y hacia el centro de curvatura, experimenta el punto en que aparece la máxima tensión σ_r .

* 28. Componentes de la deformación en coordenadas polares. Para estudiar los desplazamientos en coordenadas polares designaremos por u y v las componentes del mismo en las direcciones radial y tangencial respectivamente. Si u es el desplazamiento radial de la cara ad del elemento $abcd$ (fig. 44), el desplazamiento radial de la cara bc será $u + (\partial u / \partial r) dr$.

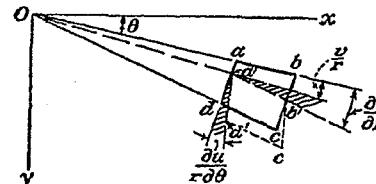


FIG. 44

En consecuencia, la deformación unitaria del elemento $abcd$ en la dirección radial será:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{Importante}) \quad (49)$$

En lo que se refiere a la deformación del elemento $abcd$ en la dirección tangencial, debe observarse que depende no sólo del desplazamiento tangencial v , sino también del radial u . Suponiendo, por ejemplo, que los puntos a y d del elemento $abcd$ (fig. 44) sufren solamente un desplazamiento radial la nueva longitud del arco ad es $(r + u)d\theta$ y la deformación tangencial resultará, entonces:

$$\frac{(r + u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}$$

La diferencia de los desplazamientos tangenciales de los lados ab y cd del elemento $abcd$ será $(\partial v / \partial \theta)d\theta$ y, por lo tanto la deformación tangencial causada por el desplazamiento v es $\partial v / r d\theta$. La deformación tangencial total es pues¹:

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad (\text{Importante}) \quad (50)$$

Considerando ahora la deformación tangencial angular o deslizamiento, sea $a'b'c'd'$ la posición que ocupa el elemento $abcd$ después de producirse la deformación (fig. 44). El ángulo que forman ad y $a'd'$, causado por el desplazamiento radial u , es igual a $\partial u / r d\theta$ y de igual forma el ángulo comprendido entre $a'b'$ y ab es $\partial v / r d\theta$. Es de advertir que sólo parte de este ángulo, la sombreada en la figura contribuye a la deformación angular, ya que la

¹ En el § 10 el símbolo ϵ_θ fue usado con otro significado.

otra parte, igual a v/r , representa el deslizamiento angular causado por la rotación del elemento $abcd$, considerado como un cuerpo rígido, alrededor del eje que pasa por O . Por lo tanto, la variación total que experimenta el ángulo dab , o sea, la deformación angular o tangencial, será:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (\text{Igualdad}) \quad (51)$$

Sustituyendo ahora las expresiones (49), (50) y (51) de las componentes de la deformación en las ecuaciones de Hooke¹:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (\text{Igualdad}) \quad (52) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \end{aligned}$$

obtenemos suficientes ecuaciones para determinar u y v .

* 29. Distribución simétrica de tensiones: desplazamientos. Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (52) las componentes de la tensión dadas por las ecuaciones (43) encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B \log r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C \right]$$

e integrando se llega a:

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + f(\theta) \quad (a)$$

donde $f(\theta)$ es función de θ solamente. De la segunda de las ecuaciones (52) y mediante la fórmula (50) obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

de cuya integración resulta:

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r) \quad (b)$$

¹ Suponemos que tenemos un estado plano de tensiones, es decir, que σ_z es nula (véase párrafo 7).

en donde $f_1(r)$ es función de r solamente. Sustituyendo (a) y (b) en la ecuación (51) y teniendo presente que puesto que $\gamma_{r\theta}$ es nula ha de serlo $\tau_{r\theta}$ obtenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0. \quad (c) \quad (\text{Ver caso de falso hueco})$$

de donde se deduce:

$$f_1(r) = Fr, \quad f(\theta) = H \sin \theta + K \cos \theta \quad (d)$$

donde F , H y K son constantes a determinar mediante las condiciones de vínculo que limitan la movilidad de la pieza curva o anillo. Sustituyendo las expresiones (d) en las ecuaciones (a) y (b) llegamos a las siguientes expresiones para los desplazamientos:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r \right. \\ &\quad \left. + 2C(1-\nu)r \right] + H \sin \theta + K \cos \theta \quad (53) \end{aligned}$$

$$v = \frac{4Br\theta}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta$$

en las que los valores de A , B y C varían para cada caso particular. Consideremos, por ejemplo, el caso de la flexión simple. Si suponemos rigidamente fijados el baricentro de la sección transversal adoptada como origen para la medida de los ángulos (fig. 42) y un elemento del radio correspondiente, las condiciones de vínculo serán: (condiciones de restricción)

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \text{ para } \theta = 0 \text{ y } r = r_0 = \frac{a+b}{2}$$

Si llevamos estos valores a las expresiones (53) obtenemos las siguientes ecuaciones para el cálculo de las constantes de integración F , H y K :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu)Br_0 \log r_0 - B(1+\nu)r_0 \right. \\ \left. + 2C(1-\nu)r_0 \right] + K = 0 \\ Fr_0 + H = 0 \\ F = 0 \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $F = H = 0$ y para los desplazamientos v obtenemos:

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad (54)$$

¹ La ecuación (c) queda satisfecha sólo cuando la $\int f(\theta) d\theta$ es tomada de (d) sin la presencia de ninguna constante aditiva.

Esto significa que los desplazamientos de cualquier sección transversal consisten en una traslación $-K \sin \theta$, igual para todos sus puntos, y además un giro de su plano igual a $4B\theta/E$, efectuado alrededor del centro de curvatura O (fig. 42). *Sacado de la figura 42*

Como vemos las secciones transversales se conservan planas en el caso de la flexión simple, tal como se supone corrientemente en la teoría elemental de la flexión de piezas curvas.

Al discutir la distribución simétrica de tensiones en un anillo completo (§ 26) hicimos cero la constante B de la solución general (43), con lo que llegamos a una solución del problema de Lamé. Ahora, a la vista de las expresiones (53), vemos que implicaba la anulación de B . B contribuye al desplazamiento v mediante el término $4Br\theta/E$. Este término no es uniforme puesto que admite más de un valor para un mismo punto al aumentar θ en 2π . Tal expresión multiforme es físicamente absurda para un anillo completo, por lo que debemos tomar $B = 0$ en la solución general (43).

El anillo completo o corona circular es un ejemplo de un cuerpo múltiplemente conexo, es decir, un cuerpo que puede ser cortado transversalmente sin que quede dividido en dos. Al determinar las tensiones en tales cuerpos se llega generalmente a la conclusión de que las condiciones de contorno referentes a las tensiones en el mismo, no bastan para determinar por completo la distribución tensinal, siendo necesario hacer uso de las ecuaciones adicionales que exigen que el valor de los desplazamientos sea único (véase § 39).

El significado físico de las soluciones multiformes puede ser explicado considerando las tensiones iniciales posibles en un cuerpo pluralmente

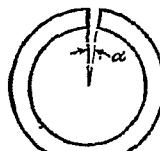


FIG. 45

conexo. Si mediante dos cortes que sigan secciones radiales adyacentes retiramos un sector del anillo (fig. 45) y unimos luego los bordes por soldadura u otro medio, se obtiene un anillo con tensiones iniciales, lo que quiere decir que sin la presencia de fuerzas exteriores existen esfuerzos en el anillo. Si α es el ángulo en el centro, muy pequeño, que forman las secciones radiales de corte; para reunir los extremos planos del anillo será necesario realizar un desplazamiento tangencial:

$$v = \alpha r \quad (e)$$

El mismo desplazamiento obtenido para el valor $\theta = 2\pi$ en la ecuación (54) será:

$$v = 2\pi \frac{4Br}{E} \quad (f)$$

Las dos expresiones anteriores, (e) y (f), nos permiten obtener

$$B = \frac{\alpha E}{8\pi} \quad (g)$$

La constante B que figura en el término multiforme de la fórmula (54) tiene ahora un valor definido, que dependerá de los medios que se hayan empleado para provocar en el anillo las tensiones iniciales. Sustituyendo (g) en las ecuaciones (f) del § 27, obtendremos la expresión que corresponde al momento flector, que es necesario introducir para volver a unir los extremos del anillo de la figura 45, a saber:

$$M = -\frac{\alpha E}{8\pi} \frac{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2}{2(b^2 - a^2)} \quad (h)$$

Conociendo el momento flector, las tensiones iniciales en el anillo se pueden calcular utilizando la ecuación (48), que corresponde a la flexión simple.

30. Discos giratorios. La distribución de tensiones en discos circulares animados de un movimiento de rotación es de gran importancia práctica¹. Si el espesor del disco es pequeño frente a su radio, la variación de tensiones en el espesor del mismo podrá ser despreciada² y el problema, entonces, puede ser resuelto fácilmente³. Si el espesor del disco es constante puede entonces aplicarse la ecuación (40) sin más que considerar como fuerza mísica la fuerza de inercia⁴.

$$R = \rho\omega^2r \quad (a)$$

donde ρ es la densidad del material del disco y ω la velocidad angular de su rotación.

La ecuación (40) puede escribirse en la forma:

$$\frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2r^2 = 0 \quad (b)$$

¹ Una discusión completa del problema, así como la bibliografía que sobre él existe, es dada por A. Stodola, *Dampf-und Gas-Turbinen*, 6.^a edición, págs. 312 y 889, 1924.

² Para un disco uniforme que tenga la forma de un elipsóide de revolución achatado, de espesor igual a un octavo del diámetro, C. Chree ha demostrado que la diferencia entre la tensión máxima y la mínima en el eje de rotación es tan sólo el 5 % de la tensión máxima (*Proc. Roy. Soc. London*, vol. 58, pág. 39, 1895).

³ En el § 119 se desarrolla más detalladamente el problema.

⁴ El peso del disco es despreciado.

Esta ecuación quedará satisfecha si deducimos los componentes de la tensión de una función F , función de tensión, del siguiente modo:

$$r\sigma_r = F, \quad \sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2 \quad (c)$$

Para el caso en que existe simetría, las componentes de la deformación de acuerdo con las ecuaciones (49) y (50) son

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (d)$$

Eliminando u entre estas ecuaciones se llega a:

$$\epsilon_\theta - \epsilon_r + r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} = 0 \quad (d)$$

Sustituyendo las componentes de la deformación por sus expresiones en función de las componentes de la tensión (52) y usando las ecuaciones (c), se demuestra que la función de tensión F deberá satisfacer la siguiente ecuación

$$r^2 \frac{d^2F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - F + (3 + \nu) \rho\omega^2 r^3 = 0 \quad (e)$$

cuya solución general, como puede comprobarse por sustitución, es:

$$F = Cr + C_1 \frac{1}{r} - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^3 \quad (f)$$

y mediante las ecuaciones (c) se llega a

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (g)$$

Las constantes de integración C y C_1 se determinan mediante las condiciones de contorno.

Si se trata de un disco macizo (lleno) debemos poner $C_1 = 0$, pues de no ser así las tensiones (g) se harían infinito en el centro. En lo que se refiere a la constante C se determina teniendo en cuenta las condiciones en la periferia del disco $r = b$. Si en ésta no existe ninguna fuerza, tendremos:

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2 = 0$$

de donde:

$$C = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2$$

y de las fórmulas (g) se deducirán las siguientes componentes de la tensión:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2 - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (55)$$

El valor máximo de las tensiones, que se da en el centro del disco, es:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2 \quad (56)$$

Cuando el disco tiene un agujero circular de radio a en el centro, las constantes de integración de las ecuaciones (g) se deducen de las condiciones existentes en los bordes interior y exterior. Si sobre tales contornos no actúa fuerza alguna tenemos

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \quad (h)$$

de donde resulta

$$C = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 (b^2 + a^2); \quad C_1 = -\frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 a^2 b^2$$

Sustituyendo estos valores en (g) tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \end{aligned} \quad (57)$$

La tensión radial máxima se obtiene para $r = \sqrt{ab}$ donde:

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3 + \nu}{8} \cdot \rho\omega^2 (b - a)^2 \quad (58)$$

La máxima tensión según la tangente corresponde al borde interior del disco y vale:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3 + \nu}{4} \rho\omega^2 \left(b^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} a^2 \right) \quad (59)$$

que como puede verse es mayor que $(\sigma_r)_{\max}$.

Cuando el radio a del orificio disminuye tendiendo a cero la tensión máxima de dirección tangencial tiende a un valor doble del que corresponde a un disco lleno (56), lo que significa que las tensiones máximas se duplican al practicar un pequeño orificio circular en el centro de un disco giratorio (véase el § 32).

Suponiendo que las tensiones no varían a través del espesor del disco el método que acabamos de desarrollar puede extenderse a *discos de*

espesor variable. Si h es el espesor del disco, variable con r , la ecuación de equilibrio de un elemento como el representado en la figura 40 es:

$$\frac{d}{dr}(h\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2r^2 = 0 \quad (k)$$

ecuación que queda satisfecha poniendo

$$h\sigma_r = F, \quad h\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + h\rho\omega^2r^2$$

donde F es nuevamente una función de tensión.

Sustituyendo estas expresiones de las componentes de la tensión en la ecuación de compatibilidad (d), llegamos a la siguiente ecuación para la función de tensión F :

$$r^2 \frac{d^2F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - F + (3 + \nu)\rho\omega^2hr^3 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} - \nu F \right) = 0 \quad (l)$$

De esta forma el problema de encontrar la distribución de tensiones en un disco de espesor variable queda reducido a la solución de la ecuación (l). En el caso particular en que el espesor varía según la ley:

$$h = Cr^n \quad (m)$$

en la que C es una constante y n un número cualquiera, la ecuación (l) puede ser fácilmente integrada¹. La solución general tiene la forma:

$$F = mr^{n+3} + Ar^\alpha + Br^\beta$$

en la que

$$m = -\frac{(3 + \nu)\rho\omega^2C}{(\nu n + 3n + 8)}$$

α y β son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - nx + \nu n - 1 = 0$$

y A y B dos constantes de integración que se determinan a partir de las condiciones de contorno.

Los casos reales de discos giratorios de diversas formas pueden ser resueltos, con suficiente aproximación, dividiéndolos en partes y tratando de ajustar a cada una de ellas una curva del tipo (m)². El caso del disco

¹ Este caso fue estudiado por Stodola, loc. cit. Véase también H. Holzer, Z. ges. Turbinenwesen, 1951.

² Véase M. Grubler, V.D.I., vol. 50, pág. 535, 1906.

cónico, estudiado por muchos autores¹, suele ser calculado dividiendo el disco en partes que se consideran como de espesor constante².

* 31. Ménsula curva cargada en su extremo libre³. Comenzaremos con el caso sencillo de la figura 46. Una pieza de sección rectangular estrecha y directriz circular está empotrada en su extremo inferior, siendo sometida en el extremo superior a la acción de una fuerza radial P . El momento flector que actúa sobre cualquier sección transversal mn es proporcional a $\sin \theta$ y de acuerdo con la teoría elemental de la flexión de piezas curvas la tensión normal σ_θ es proporcional al momento flector.

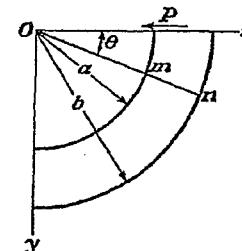


FIG. 46

Suponiendo que esto se cumple, suposición que se verá justificada por los resultados, deducimos de la segunda de las ecuaciones (38) que la función de tensión ϕ que satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (a)$$

deberá ser proporcional a $\sin \theta$. Tomando

$$\phi = f(r) \sin \theta \quad (b)$$

sustituyendo en la ecuación (a) encontramos que $f(r)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0 \quad (c)$$

¹ Véase A. Fischer, Z. oesterr. Ing. Arch. Vereins., vol. 74, pág. 46, 1922. H. M. Martin, Engineering, vol. 115, pág. 1, 1923; B. Hodgkinson, Engineering, vol. 116, pág. 274, 1923; K. E. Bisschopp, J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.), vol. 11, pág. A-1, 1944.

² Este método fue desarrollado por M. Donath en su libro *Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe*, Berlin, 1912, y descrito en inglés por H. Hearle en Engineering, vol. 106, pág. 131, 1918. Posteriormente ha sido desarrollado por R. Grammel, *Dinglers Polytech. J.*, vol. 338, pág. 217, 1923. M. Grubler, en V.D.I., vol. 41, pág. 860 y vol. 44, pág. 1157, 1900, estudia el caso en el que el material no sigue la ley de Hooke. Véase también H. Schlechtweg, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 11, pág. 17, 1931, e *Ingeneur-Archiv*, vol. 2, pág. 212, 1931.

³ H. Golovin, loc. cit.

Esta ecuación puede convertirse en una ecuación diferencial lineal, de coeficientes constantes (véase § 26), cuya solución general es:

$$f(r) = Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \log r \quad (d)$$

en la que A, B, C y D son constantes de integración que vienen determinadas por las condiciones de contorno. Sustituyendo la solución (d) en la expresión (b) de la función de tensión y usando las fórmulas generales (38) encontramos la siguiente expresión para las componentes de la tensión:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \operatorname{sen} \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \operatorname{sen} \theta \quad (60) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

Puesto que no actúa ninguna fuerza sobre los bordes interior y exterior de la pieza se ha de cumplir que:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ para } r = a \text{ y } r = b$$

o, de las ecuaciones (60)

$$\begin{aligned} 2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} &= 0 \\ 2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} &= 0 \quad (e) \end{aligned}$$

Con arreglo a la última condición, la suma de las fuerzas tangenciales que se distribuyen sobre el extremo superior de la ménsula debe ser igual a P . Considerando el ancho de la sección transversal igual a uno, o bien a P como carga por unidad de espesor de la pieza, obtendremos para $\theta = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b \tau_{r\theta} dr &= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) dr = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_b^a \\ &= \left[Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D \log r \right]_b^a = P \end{aligned}$$

o bien

$$-A(b^2 - a^2) + B \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 b^2} - D \log \frac{b}{a} = P \quad (f)$$

De las ecuaciones (e) y (f) resulta

$$A = \frac{P}{2N}, \quad B = -\frac{Pa^2 b^2}{2N}, \quad D = -\frac{P}{N} (a^2 + b^2) \quad (g)$$

en donde

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a}$$

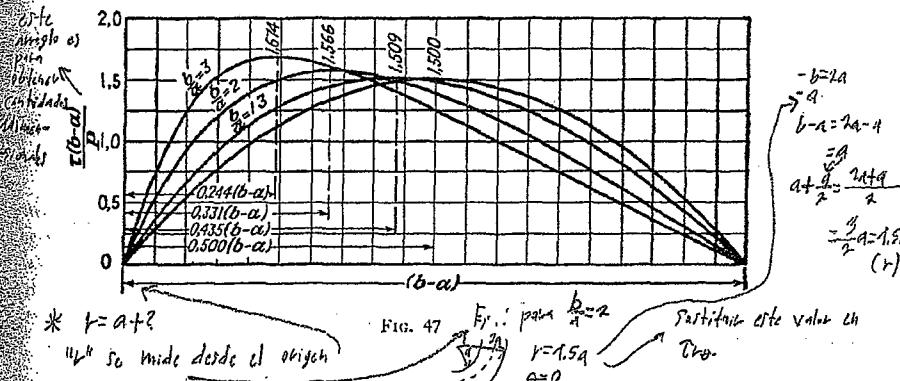
Sustituyendo los valores (g) de las constantes de integración en las ecuaciones (60), obtenemos las expresiones de las componentes de la tensión. Para el extremo superior, $\theta = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{N} \left[r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right] \quad (h) \end{aligned}$$

Para el extremo inferior $\theta = \pi/2$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= 0 \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{N} \left[3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right] \quad (k) \end{aligned}$$

Las expresiones (60) constituyen una solución exacta del problema, sólo cuando las fuerzas en los extremos de la pieza curva se distribuyen en la



forma dada por las ecuaciones (h) y (k). Para otra distribución de las mismas el estado tensional en las zonas próximas a los extremos será distinto al dado por la solución (60), pero a distancias mayores la solución será válida según el principio de Saint-Venant. Los cálculos demuestran que la teoría simplificada, basada en el supuesto de la conservación de las secciones planas durante la flexión, da aquí también resultados satisfactorios.

La figura 47 muestra la distribución de las tensiones tangenciales a lo largo de la sección transversal $\theta = 0$ (para los casos $b = 3a, 2a,$

y $1,3a$). En esta gráfica las abscisas representan las distancias al borde interior ($r = a$), medidas según un radio; y las ordenadas los coeficientes que es necesario aplicar a la tensión tangencial media $P/(b - a)$ para obtener la tensión cortante correspondiente al punto considerado. El valor 1,5 de ese factor nos da la tensión tangencial máxima, calculada de acuerdo con una distribución parabólica para vigas rectilíneas de sección rectangular. Según evidencia la figura, la distribución de las tensiones tangenciales se aproxima a la ley parabólica cuando la altura de la sección transversal es pequeña. Puede aceptarse, por lo tanto, que para las proporciones usuales de arcos y bóvedas la distribución parabólica de las tensiones tangenciales, al igual que para las piezas rectilíneas de sección rectangular, es suficientemente exacta.

Consideremos ahora los desplazamientos producidos por la fuerza P (fig. 46). Usando las ecuaciones (49) y (52) y sustituyendo en ellas las expresiones (60) de las componentes de la tensión tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{E} \left[2Ar(1-3\nu) - \frac{2B}{r^3}(1+\nu) + \frac{D}{r}(1-\nu) \right] \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= r\epsilon_\theta - u \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \quad (l)$$

Integrando la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$u = \frac{\operatorname{sen} \theta}{E} \left[Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu) \log r \right] + f(\theta) \quad (m)$$

donde $f(\theta)$ es función de θ solamente. Sustituyendo (m) en la segunda de las ecuaciones (l) junto con la expresión de ϵ_θ e integrando, tenemos:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\cos \theta}{E} \left[Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D \log r(1-\nu) \right. \\ &\quad \left. + D(1-\nu) \right] - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (n) \end{aligned}$$

en la que $F(r)$ es función de r solamente. Sustituyendo ahora (m) y (n) en la tercera de las ecuaciones (l) llegamos a la ecuación

$$\int f(\theta) d\theta + f'(\theta) + rF'(r) - F(r) = -\frac{4D \cos \theta}{E}$$

Esta ecuación es satisfecha si ponemos

$$F(r) = Hr, \quad f(\theta) = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + K \operatorname{sen} \theta + L \operatorname{cos} \theta \quad (p)$$

donde H , K y L son constantes arbitrarias a determinar a partir de las condiciones de vínculo. De (m) y (n) deducimos las componentes de los desplazamientos que resultan:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + \frac{\operatorname{sen} \theta}{E} \left[D(1-\nu) \log r + A(1-3\nu)r^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right] + K \operatorname{sen} \theta + L \operatorname{cos} \theta \\ v &= \frac{2D}{E} \theta \operatorname{sen} \theta - \frac{\cos \theta}{E} \left[A(5+\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right. \\ &\quad \left. - D(1-\nu) \log r \right] + \frac{D(1+\nu)}{E} \operatorname{cos} \theta + K \operatorname{cos} \theta - L \operatorname{sen} \theta + Hr \end{aligned} \quad (q)$$

La deflexión radial del borde libre de la pieza se obtiene poniendo $\theta = 0$ en la expresión de u , lo que nos da:

$$(u)_{\theta=0} = L \quad (r)$$

La constante L se obtiene de la condición existente en el empotramiento (fig. 46). Para $\theta = \pi/2$ tenemos, $v = 0$, $\partial v / \partial r = 0$, y en consecuencia de la segunda de las ecuaciones (q) resulta:

$$H = 0, \quad L = \frac{D\pi}{E} \quad (s)$$

Usando (g) deducimos, por lo tanto, que la deflexión del extremo superior es

$$(u)_{\theta=0} = \frac{D\pi}{E} = -\frac{P\pi(a^2+b^2)}{E \left[(a^2-b^2)+(a^2+b^2) \log \frac{b}{a} \right]} \quad (61)$$

Más adelante se dan algunas aplicaciones de esta fórmula. Cuando b tiende al valor de a y la altura de la pieza, $h = b - a$, se hace pequeña frente a a podemos hacer uso de la expresión $1 + \frac{h}{a} = 1 + \frac{b-a}{a} = \frac{a+h}{a} = \frac{a}{a} + \frac{h}{a}$

$$\log \frac{b}{a} = \log \left(1 + \frac{h}{a} \right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} - \dots$$

Sustituyéndola en (61) y despreciando los términos de grado superior al tercero obtendremos:

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{3\pi a^3 P}{E h^3} \quad \text{vs. } \frac{P h^2}{2 E I}$$

que coincide con la fórmula elemental que se da para el caso que tratamos¹.

¹ Véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, vol. 2, art. 13, 1941.

Dando a la función de tensión la forma

$$\phi = f(r) \cos \theta$$

y procediendo de forma análoga, obtenemos la solución para el caso en que sobre el extremo superior de la pieza (fig. 46) actúen un par y una fuerza vertical. Restando de esta solución las tensiones producidas por el par (véase § 27), nos quedarán las tensiones debidas a la fuerza vertical aplicada al extremo libre de la pieza. Si la fuerza que actúa sobre ese extremo es oblicua su efecto se hallará sumando los efectos correspondientes a la fuerza horizontal y vertical en que aquélla se descompona.

En el estudio anterior supusimos siempre que se cumplían las ecuaciones (e) y que los bordes circulares de la pieza estaban libres de cualquier carga. Si se toman para las expresiones (e) valores distintos de cero obtenemos el caso en que fuerzas normales y tangenciales proporcionales a $\sin \theta$ y $\cos \theta$ actúan sobre los contornos circulares. Combinando tales soluciones con las obtenidas anteriormente para el caso de flexión simple y de flexión por una fuerza aplicada en el extremo, nos podemos aproximar a las condiciones de carga que se dan en una bóveda cubierta de arena o tierra¹.

* 32. Influencia de un orificio circular sobre la distribución de tensiones existentes en una placa. La figura 48 representa una placa sometida a una tracción uniforme de valor S en la dirección x .

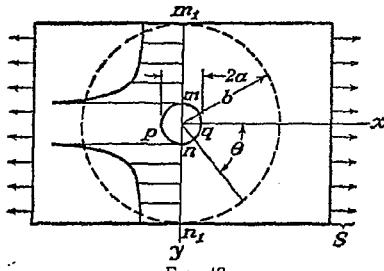


FIG. 48

Si en el centro de la placa se hace un pequeño orificio circular la distribución de tensiones en su proximidad habrá cambiado, pero de acuerdo con el principio de Saint-Venant podemos pensar que la alteración del estado tensional es despreciable a distancias grandes frente al radio del agujero.

¹ Varios ejemplos de este tipo han sido estudiados por Golovin, loc. cit., y Ribière loc. cit. y Compt. rend., vol. 132, pág. 315, 1901.

Consideraremos la porción de placa contenida en un círculo, concéntrico con el orificio, de radio b , grande en comparación con a . Las tensiones en los puntos de radio b son las mismas que existirían en la placa si no hubiera agujero y vienen dadas por lo tanto, por

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S(1 + \cos 2\theta) \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= -\frac{1}{2} S \sin 2\theta \end{aligned}$$

**distribución: ver las ecuaciones de relación entre (a) coordenadas polares y rectangulares (x, y) y (r, θ)*

Estas fuerzas, al actuar en la periferia del anillo de radios interior y exterior a y b , provocan una distribución de tensiones en su interior que podemos considerar compuesta de dos partes. La primera es debida a la componente constante $\frac{1}{2} S$ de las fuerzas normales y las tensiones por ellas producidas pueden calcularse mediante las ecuaciones (45) (§ 26). La otra parte corresponde a las fuerzas normales $\frac{1}{2} S \cos 2\theta$ y las fuerzas tangenciales $-\frac{1}{2} S \sin 2\theta$, las cuales producen una tensión que puede deducirse de una función de tensión del tipo:

$$\phi = f(r) \cos 2\theta \quad (b)$$

Sustituida esta expresión en la ecuación de compatibilidad

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

encontramos la siguiente ecuación diferencial ordinaria que determina $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

La solución general de la misma es

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D$$

Por lo tanto, la función de tensión es:

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (c)$$

y las correspondientes componentes de la tensión, de acuerdo con (38), serán:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (d)$$

Las constantes de integración se determinarán ahora a partir de la condición (α), referente al contorno exterior, así como también a partir de la que establece que sobre el borde del orificio no actúa fuerza alguna. Esas condiciones nos dan los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} &= -\frac{1}{2}S \quad \xrightarrow{\text{*}} \sigma_{r=b} = \sigma_{\theta=b} \\ 2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} &= 0 \quad \downarrow \text{expansión} \quad \downarrow \frac{1}{2}S \cos 2\theta \\ 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} &= -\frac{1}{2}S \quad (d) \quad \text{(a)} \\ 2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} &= 0 \quad \text{Aquí,} \quad \frac{1}{2}S \text{ se divide} \\ &\quad \text{por aparte} \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones y poniendo $a/b = 0$, es decir, suponiendo una placa o laja indefinida obtenemos:

$$A = -\frac{S}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^4}{4}S, \quad D = \frac{a^2}{2}S$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en las ecuaciones (d) y sumando las tensiones producidas por la tensión uniforme $\frac{1}{2}S$ que actúa sobre el contorno exterior, las cuales son calculadas mediante (45) encontramos¹:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2}\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned} \quad (62)$$

Si r es muy grande σ_r y $\tau_{r\theta}$ tienden a los valores dados en las ecuaciones (a). En el borde del orificio $r = a$ tenemos:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta$$

Puede verse que los valores máximos de σ_θ se dan para $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, es decir, en los extremos m y n del diámetro normal a la dirección de la tensión (fig. 48). En esos puntos $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$. Esta es la tensión máxima de tracción y su valor es tres veces el de la tensión uniforme S aplicada en los extremos de la placa.

En los puntos p y q , en los que $\theta = \pi$ y $\theta = 0$

$$\sigma_\theta = -S$$

¹ Esta solución, obtenida por el profesor G. Kirsch (véase V.D.I., vol. 42, 1898), ha sido confirmada muchas veces mediante medidas de deformaciones y ensayos fotoclásticos (véase el capítulo 5 y los libros citados en el § 42).

de forma que existe en ellos una tensión de compresión en la dirección tangencial.

Para la sección transversal de la placa que pasa por el centro del agujero circular y es normal al eje de las x , $\theta = \pi/2$, y entonces las ecuaciones (62) nos dan:

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2}\left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)$$

El efecto del orificio es evidentemente de carácter muy localizado teniendo la tensión σ_θ rápidamente a S cuando r aumenta. La distribución de esta tensión es mostrada en la figura mediante el área rayada. El carácter localizado de las tensiones que se originan alrededor del orificio justifica la aplicación de la solución (e), deducida para una laja indefinida, a una placa de anchura finita. Si la anchura de la placa es superior a cuatro veces el diámetro del agujero, el error cometido al usar la solución (62) para calcular $(\sigma_\theta)_{\max}$ no excede del 6%¹.

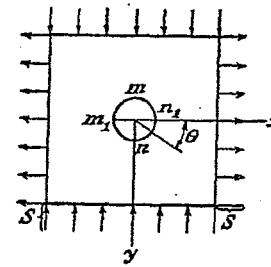


FIG. 49

Una vez obtenida la solución (d) para tracción o compresión en una dirección, pueden resolverse fácilmente por superposición los casos de tracción o compresión en dos direcciones perpendiculares. Considerando, por ejemplo, el caso de dos tensiones de tracción iguales a S y actuando en dos direcciones perpendiculares encontramos que el contorno del orificio se encuentra sometido a la tensión de tracción $\sigma_\theta = 2S$ (véase § 30). Si en la dirección x actúa una tensión de tracción S y en la dirección y una tensión de compresión, también igual a S (fig. 49) tenemos una solicitación de esfuerzo cortante. Las tensiones según la dirección de la tangente, deducidas de (62) son entonces:

$$\sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta - [S - 2S \cos(2\theta - \pi)]$$

Para $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$, es decir, en los puntos n y m , tenemos que $\sigma_\theta = 4S$. Para $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, puntos n_1 y m_1 , $\sigma_\theta = -4S$. En conse-

¹ Véase S. Timoshenko, Bull. Polytech. Inst., Kiev, 1907. Se debe tomar S igual a la fuerza dividida por el área total de la chapa.

cuencia, para una placa grande cargada a esfuerzo cortante las tensiones máximas en la dirección de las tangentes, existentes en el borde del orificio, son cuatro veces mayores que la aplicada.

La considerable concentración de tensiones existente en el contorno de un agujero es de gran importancia práctica. El caso de las aberturas practicadas en los puentes de los barcos puede citarse como ejemplo, pues su presencia da origen a altas concentraciones de las tensiones de tracción o compresión que experimenta el puente cuando el casco trabaja a flexión; las olas, al chocar repetidamente, originan ciclos de tensiones que pueden determinar, en los lugares fuertemente solicitados, fisuras de fatiga¹.

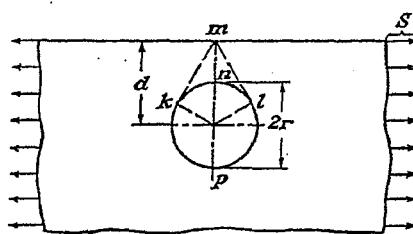


FIG. 50

A menudo es necesario reducir la concentración de tensiones en los agujeros, tales como los existentes, por ejemplo, en el fuselaje y las alas de los aviones. Esto puede hacerse añadiendo un reborde² o un anillo de refuerzo³. El problema analítico correspondiente ha sido resuelto mediante una extensión del método que acabamos de aplicar, al estudio de la influencia de un orificio y los resultados han sido comparados con las medidas realizadas con bandas extensométricas⁴.

El caso en el que existe un orificio circular próximo al borde recto de una placa semiindefinida sometida a una tensión paralela al contorno (fig. 50), fue estudiado por G. B. Jeffery⁵. R. D. Mindlin⁶, ha tratado ulteriormente el problema aportando ciertas correcciones y realizando un estudio fotoelástico del mismo. La tensión existente en *n*, punto éste el más próximo al borde recto, es igual a muchas veces su valor en las

¹ Véase el trabajo de T. L. Wilson, *The S. S. Leviathan*, Damage, Repairs and Strength Analysis, presentando al Congreso de la American Society of Naval Architects and Marine Engineers en noviembre de 1930.

² Véase S. Timoshenko, *J. Franklin Inst.*, vol. 197, pág. 505, 1904; véase también la obra del mismo autor, *Strength of Materials*, segunda edición, vol. 2, pág. 317.

³ S. Levy, A. E. McPherson y F. C. Smith, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 15, pág. 160, 1948. En este trabajo pueden encontrarse las referencias de los trabajos anteriores sobre el tema.

⁴ *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 221, pág. 265, 1921.

⁵ *Proc. Soc. Expl. Stress Analysis*, vol. 5, pág. 56, 1948.

zonas no alteradas por la presencia del orificio, siempre que *mn* sea pequeño frente a *np*.

G. B. Jeffery ha estudiado también el caso en que una presión normal uniforme *p*, actúa sobre el contorno del agujero. Este problema, de interés práctico, es el de las tensiones que se producen en la vecindad de un agujero para remache al introducir bajo presión el roblón, en estado plástico por la acción del calor. Si el agujero está lejos del borde rectilíneo, la tensión en su contorno, con arreglo a las ecuaciones (46) (§ 27), resulta:

$$\sigma_\theta = p_i, \quad \sigma_r = -p_i$$

Si el orificio está próximo al borde rectilíneo, las tensiones tangenciales dejan de ser constantes en su contorno, dándose el valor máximo de la misma

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p_i \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2} \quad (63)$$

en los puntos *k* y *l*.

Comparemos este valor, con la tensión de tracción existente en el punto *m*; la cual viene dada por la fórmula:

$$\sigma_\theta = \frac{4p_i r^2}{d^2 - r^2} \quad (64)$$

Para $d = r\sqrt{3}$ las dos expresiones dan el mismo valor. Si *d* es mayor que $r\sqrt{3}$ la máxima tensión se produce en el contorno circular y si es menor en el punto *m*.

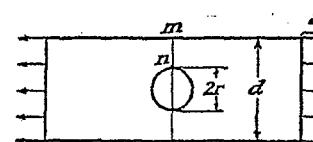


FIG. 51

El caso de una placa o laja de anchura finita con un orificio circular en su eje de simetría ha sido estudiado por R. C. J. Howland⁷. Este autor encontró, por ejemplo, que para $2r = \frac{1}{2}d$ $\sigma_\theta = 4,3S$ en el punto *n* y $\sigma_\theta = 0,75S$ en el *m*.

El método desarrollado en lo que antecede, para el análisis de las tensiones que se producen en torno de un pequeño orificio circular, puede ser aplicado al caso de una placa sujetada a flexión simple⁸.

⁷ R. C. J. Howland, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 229, pág. 49.

⁸ Z. Tuzi, *Phil. Mag.*, febrero, 1930, pág. 210; véase también *Sci. Papers Inst. Phys. Chem. Research (Tokyo)*, vol. 9, pág. 65, 1928. El problema correspondiente con un orificio elíptico fue resuelto posteriormente por K. Wolf, *Z. tech. Physik*, 1922, pág. 160. El caso de una placa

Asimismo han sido estudiados también los casos de una fila de orificios circulares en una placa indefinida^{1,2,3}, semiindefinida³ o de anchura finita^{3,4} y de una laja con un anillo de orificios⁵ (en todos los casos la solicitación aplicada ha sido una tracción). El caso de una placa cuadrada en la que existe un orificio y a la que se aplican tracciones iguales en las dos direcciones⁶, o que es sometida a esfuerzo cortante⁷, ha sido estudiado mediante un método deducido por Hengst.

Asimismo, se han resuelto los casos, en los que las fuerzas son aplicadas en el contorno del orificio, existente en una placa indefinida⁸ o de anchura finita⁹, o en los contornos de una fila de agujeros, paralela y próxima al borde de una laja semiindefinida¹⁰ (fila de agujeros de remache).

Si una placa indefinida, con un orificio elíptico, es sometida a una tracción S paralela a uno de los ejes principales de la elipse, la tensión existente en los extremos del otro eje principal (perpendicular a la dirección de la tracción) viene dada por:

$$\sigma = S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (65)$$

en donde $2a$ es el eje de la elipse perpendicular a la tensión y $2b$ el otro eje. Este y otros problemas concernientes a orificios elípticos, hiperbólicos y a dos agujeros circulares son estudiados en el capítulo 7, en el cual se dan las referencias correspondientes.

Un agujero muy angosto perpendicular a la dirección de la tracción produce una gran concentración de tensión¹¹, lo que explica que las fisuras perpendiculares a las fuerzas aplicadas tiendan a extenderse. Tal extensión puede ser detenida taladrando los extremos de la fisura lo que elimina la pronunciada curvatura, responsable de la elevada concentración de tensiones.

Cuando un agujero está ocupado por un material rígido o de constantes

de anchura finita con un orificio circular fue estudiado por R. C. J. Howland y A. C. Stevenson, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 232, pág. 155, 1933. Una prueba de la convergencia de la serie solución es dada por R. C. Knight, *Quart. J. Math. Oxford series*, vol. 5, pág. 255, 1934.

¹ M. Sadowsky, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 8, pág. 107, 1928.

² R. C. J. Howland, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 148, pág. 471, 1935,

³ K. J. Schulz, *Proc. Nederl. Akad. van Wetenschappen*, vol. 45, págs. 233, 341, 457, 524, 1942; vol. 48, págs. 282 y 292, 1945.

⁴ C. B. Ling, P. S. Wang, y K. S. Jing, *Tech. Rept.*, núm. 9, *Bur. Aeronaut. Research*, Chengtu, China, enero, 1944.

⁵ C. B. Ling y P. S. Wang, *Tech. Rept.*, núm. 6, *ibid.*, junio 1943.

⁶ H. Hengst, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 18, pág. 44, 1938.

⁷ C. K. Wang, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 13, pág. A-77, 1946.

⁸ W. G. Bickley, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 227, pág. 383, 1928.

⁹ R. C. Knight, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 19, pág. 517, 1935.

¹⁰ C. B. Ling y M. C. Hsu, *Tech. Rept.*, núm. 16, *Bur. Aeronaut. Research*, Chengtu, China, febrero, 1945.

¹¹ El caso de una ranura angosta fue tratado por M. Sadowsky, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 10, pág. 77, 1930.

elásticas distintas a la del material de la placa (estado plano de tensiones) o cuerpo (estado plano de deformación), nos encontramos con el problema de una inclusión rígida o elástica, el cual ha sido tratado para inclusiones circulares¹ y elípticas². Los resultados obtenidos para una inclusión circular han sido confirmados por los ensayos fotoelásticos³.

Las tensiones que dan las ecuaciones (62) para el problema representado en la figura 48, son las mismas para un estado tensional plano que para un estado de deformación plano. En este último caso, sin embargo, debe actuar una tensión axial:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

sobre los extremos de la pieza, paralelos al plano xy , con el fin de anular ϵ_z . La supresión de tales esfuerzos, extremos libres, produce otras tensiones de carácter no bidimensional. Si el diámetro del orificio es pequeño comparado con el espesor de la pieza la alteración estará confinada a las zonas próximas a los extremos de la misma. Si, por el contrario, el diámetro y el espesor son del mismo orden de magnitud, el problema debe ser considerado como tridimensional. Estudios de este tipo⁴ han demostrado que σ_θ sigue siendo la mayor componente de la tensión y que su valor es muy parecido al dado por la teoría bidimensional.

* 33. Fuerza concentrada en un punto de un borde rectilíneo. Consideremos ahora el caso de una fuerza vertical concentrada P , que actúa sobre el borde recto y horizontal AB de una placa semiindefinida (fig. 52a). La distribución de la carga a través del espesor de la placa es uniforme, tal como se muestra en la figura 52b, y el espesor es uno, de forma que P es la carga por unidad de espesor.

La distribución de tensiones que se origina recibe el nombre de *distribución radial simple*⁵. Cualquier elemento C distante r del punto de aplicación de la carga se encuentra sometido a una tensión de compresión en la dirección radial, de valor

$$\sigma_r = - \frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (66)$$

¹ K. Sezawa y G. Nishimura, *Rept. Aeronaut. Research Inst. Tokyo Imp. Univ.*, vol. 6, núm. 25, 1931; J. N. Goodier, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 55, pág. 39, 1933.

² L. H. Donnell, *Theodore von Kármán Anniversary Volume*, pág. 293, Pasadena, 1941.

³ W. E. Thibodeau y L. A. Wood, *J. Research Natl. Bur. Standards*, vol. 20, pág. 393, 1938.

⁴ A. E. Green, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 193, pág. 229, 1948; E. Sternberg y M. Sadowsky, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 16, pág. 27, 1949.

⁵ La solución de este problema fue obtenida encarándolo como un caso de solicitud tridimensional, por Flamant, *Compt. rend.*, vol. 114, pág. 1465, 1892, París. La extensión de la solución al caso de una fuerza inclinada se debe a Boussinesq, *Compt. rend.*, vol. 114, página 1510, 1892. Véase también el trabajo de J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 32, pág. 35, 1900. La investigación experimental de la distribución de tensiones que sugirió la teoría precedente fue realizada por Carus Wilson, *Phil. Mag.*, vol. 32, pág. 481, 1891.

En cuanto a la tensión de dirección tangencial σ_0 y a la tensión tangencial cortante propiamente dicha τ_{00} , son en este caso nulas.

Se ve fácilmente que estos valores de las componentes de la tensión satisfacen las ecuaciones de equilibrio (37) (§ 25); también quedan satisfechas las condiciones de contorno porque σ_r y τ_{rr} son nulas a lo largo del borde rectilíneo de la placa, que está libre de fuerzas exteriores. En el punto de aplicación de la carga ($r = 0$), σ_r alcanza un valor infinito. La resultante de las fuerzas que actúan sobre una superficie cilíndrica de radio r

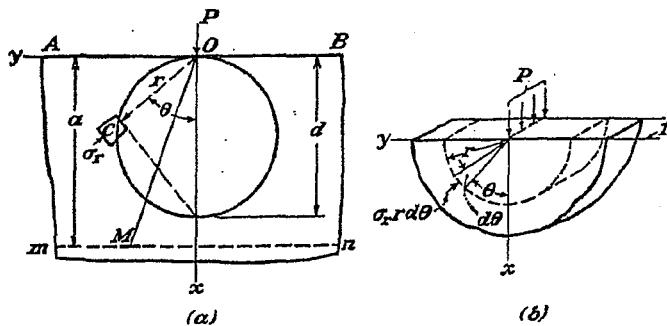


FIG. 52

debe equilibrar a la fuerza P (fig. 52b) y se obtiene por integración de las componentes verticales elementales, $\sigma_r d\Omega \cos \theta$, que obran sobre cada elemento, $r d\Omega$ de la superficie. Procediendo de esta manera encontramos

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = - \frac{4P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

Para probar que la expresión (66) es la solución exacta del problema, deberemos hacer intervenir también la ecuación de compatibilidad (39). Dicha solución se deduce de la función de tensión

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r\theta \sin \theta \quad (a)$$

como puede verificarse, utilizando las ecuaciones (38)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0\end{aligned}\quad (66')$$

que, como se ve, nos dan la solución (66). Sustituyendo la función (α) en la ecuación (39), podemos ver fácilmente que esta ecuación es satisfecha, por lo que (α) representa la verdadera función de tensión y las ecuaciones (66') dan la distribución de tensiones correcta.

Si consideramos una circunferencia de cualquier diámetro d centrada en el eje x y tangente al eje y en O (fig. 52a) ocurre que para cualquier punto C de la misma $d \cos \theta = r$. En consecuencia, como se deduce de las ecuaciones (66), resulta

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$$

lo que nos dice, que la tensión vale lo mismo en todos los puntos de la circunferencia salvo en el O , punto de aplicación de la carga.

En un punto cualquiera, M , de un plano horizontal mn distante a del borde de la placa, las componentes normal y tangencial de la tensión se calculan partiendo del valor de la compresión simple radial. Tendremos así (fig. 52a)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (67) \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta\end{aligned}$$

En la figura 53 se representa gráficamente la distribución de las tensiones σ_x y τ_{xy} a lo largo del plano horizontal mn .

En el punto de aplicación de la carga, teóricamente, la tensión es infinitamente grande, ya que se trata de una fuerza de valor finito que actúa

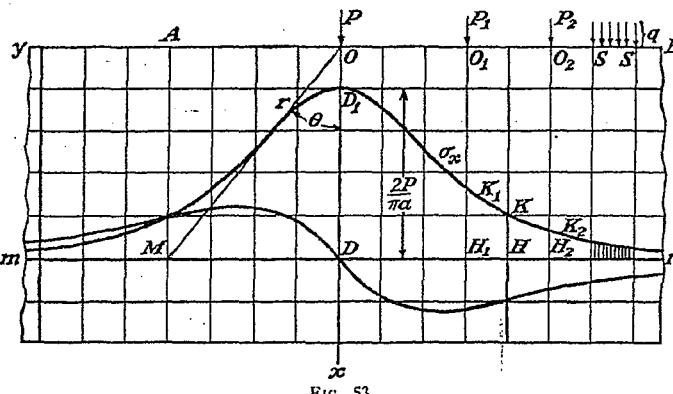


FIG. 5.

en un área infinitamente pequeña. En la práctica se produce un fenómeno de flujo plástico de cierta magnitud en el entorno del punto de aplicación, de manera que la carga viene a repartirse en un área de extensión finita. Si imaginamos que la porción de material que experimenta la deformación plástica es separada de la placa mediante una pequeña perforación cilíndrica (fig. 52b), las ecuaciones de la elasticidad podrán aplicarse a la porción restante de la placa.

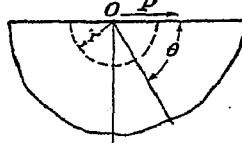


FIG. 54

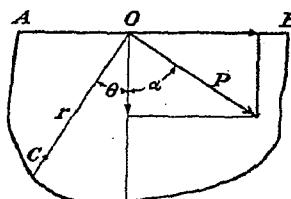


FIG. 55

Una solución análoga puede ser obtenida si la carga aplicada en el borde rectilíneo de la placa semiinfinita es una fuerza horizontal P (fig. 54). Las componentes de la tensión vienen dadas de nuevo por las ecuaciones (66') siendo sólo necesario medir el ángulo θ a partir de la dirección de la fuerza tal como se muestra en la figura. Calculando la resultante de las fuerzas que actúan sobre una superficie cilíndrica tal como la mostrada en la figura 54 mediante la línea a trazos tendremos:

$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \, d\theta = -P$$

Esta resultante equilibra la fuerza exterior P y puesto que las componentes de la tensión $\sigma_{r\theta}$ y σ_θ se anulan sobre el borde, la solución (66') satisface las condiciones de contorno.

Cuando se trata de fuerzas cilíndricas oblicuas, el problema se resuelve por superposición, aplicando las soluciones que corresponden a las fuerzas vertical y horizontal. Descomponiendo la fuerza P en sus componentes vertical $P \cos \alpha$ y horizontal $P \sin \alpha$ (fig. 55) obtendremos la tensión radial en cualquier punto C , a partir de las ecuaciones (66').

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{\pi r} \left[P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] \\ &= -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta) \quad (68) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (66') pueden ser usadas, por lo tanto, cualquiera que sea la dirección de la fuerza, supuesto que el ángulo θ sea medido a partir de esa dirección.

La función de tensión (ϕ) puede emplearse, igualmente, en el caso en que sobre el borde rectilíneo de una placa semiinfinita actúa un par de fuerzas (fig. 56a). Se ve fácilmente que para el caso en que la tracción P se aplica en el punto O_1 , que dista a del origen, la función de tensión se obtiene de la ecuación (a) considerando momentáneamente a ϕ como función de x e y en vez de serlo de r y θ , escribiendo $y + a$ en lugar de y , y sustituyendo P por $-P$. La combinación de esta función de tensión con la función original ϕ nos da la función que corresponde al caso de dos fuerzas iguales y de signos contrarios, aplicadas en O y O_1 , bajo la forma

$$-\phi(x, y + a) + \phi(x, y)$$

Si α tiende a cero, la función tiende al valor

$$\phi_1 = -a \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (b)$$

Sustituyendo (a) en la ecuación (b) y teniendo en cuenta (§ 25) que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta$$

se obtiene

$$\phi_1 = \frac{Pa}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{M}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (69)$$

en la cual M es el momento del par aplicado.

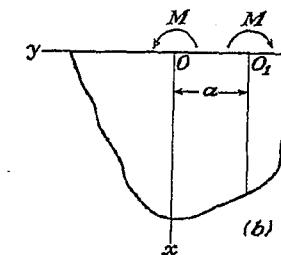
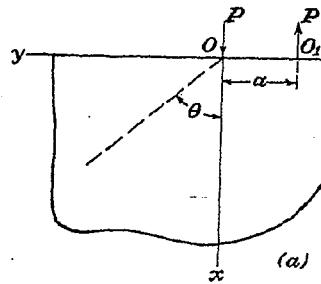


FIG. 56

Si se trata de dos pares de fuerzas de igual magnitud y dirigidos en sentidos contrarios que actúan en los puntos O y O_1 , muy próximos (fig. 56b), la función de tensión ϕ_2 puede obtenerse por un razonamiento análogo, mediante derivación de la función ϕ_1 . Tendremos de esa manera, si el valor común del momento es M ,

$$\phi_2 = \phi_1 - \left(\phi_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} a \right) = -a \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{2Ma}{\pi r} \cos^2 \theta \quad (70)$$

Si los sentidos de rotación de los pares se intercambian, bastará modificar el signo de la función (70).

Una serie de funciones de tensión obtenidas por diferenciación sucesiva, ha sido empleada para la determinación de la concentración de tensiones, creada por la presencia de una entalladura semicircular en una placa semiinfinita sometida a

una tracción paralela al borde de la misma¹. La tensión máxima es ligeramente mayor que el triple de la tensión existente en las zonas alejadas de la entalladura. El caso de una placa de anchura finita con una entalladura semicircular en cada borde ha sido también estudiado². El factor de concentración de tensión (relación de la tensión máxima a la media, existentes en la sección más pequeña) es menor de tres, tiendiendo a la unidad cuando las entalladuras aumentan.

Una vez conocida la distribución de tensiones podemos obtener los deslizamientos en la forma usual, aplicando las ecuaciones (49) a (51). Para el caso de una fuerza normal al contorno (fig. 52) tenemos

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi E} \frac{r}{r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P \cos \theta}{\pi E} \frac{r}{r} \\ \gamma_{r\theta} &= r \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0\end{aligned}\quad (c)$$

Integrando la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r + f(\theta) \quad (d)$$

donde $f(\theta)$ es función de θ solamente. Sustituyendo en la segunda de las ecuaciones (c) e integrando resulta

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (e)$$

en la que $F(r)$ es función de r solamente. Sustituyendo (d) y (e) en la tercera de las ecuaciones (c) se llega a

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta, \quad F(r) = Cr \quad (f)$$

donde A , B y C son constantes de integración que se determinan a partir de las condiciones de vínculo. Las expresiones de los desplazamientos, deducidas de (d) y (e), son:

$$\begin{aligned}u &= -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta \\ v &= \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta \\ &\quad + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr\end{aligned}\quad (g)$$

¹ F. G. Maunsell, *Phil. Mag.*, vol. 21, pág. 765, 1936.

² C. B. Ling, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 14, pág. A-275, 1947; H. Portnyshy, H. D. Snively, y C. R. Wylie, *ibid.*, vol. 6, pág. A-63, 1939.

Supongamos que, como condición de vínculo de la placa de la figura 52, se verifica que los puntos situados en el eje x no admiten desplazamiento lateral, esto es, que para $\theta = 0$, $v = 0$, con lo cual la segunda de las ecuaciones (g) nos da $A = 0$ y $C = 0$; mediante estos valores de las constantes de integración, el desplazamiento vertical de los puntos del eje x resulta, entonces,

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \log r + B \quad (h)$$

Para determinar la constante B , vamos a suponer que un punto del eje x que diste d del origen, no pueda moverse verticalmente. En la ecuación (h) se tendrá $r = d$, luego:

$$B = \frac{2P}{\pi E} \log d$$

Conocidos los valores de todas las constantes de integración, pueden determinarse los desplazamientos de cualquier punto de la placa semiinfinita mediante las ecuaciones (g).

Consideremos, por ejemplo, los desplazamientos de los puntos del borde de la placa. Las componentes horizontales de los mismos se obtienen poniendo $\theta = \pm \pi/2$ en la primera de las ecuaciones (g). Tenemos entonces

$$(u)_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}, \quad (u)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad (71)$$

Esto nos dice que todos los puntos del borde rectilíneo experimentan iguales desplazamientos, dirigidos hacia el origen, lo cual puede ser considerado físicamente factible, ya que, como se recordará, hemos supuesto haber suprimido la parte de material limitada por una superficie cilíndrica de radio pequeño, en torno al punto de aplicación de P (fig. 52b), a la cual no son aplicables las ecuaciones de la elasticidad. En realidad, esa porción de material experimenta una deformación plástica que permite los desplazamientos (71) a lo largo del canto recto. En cuanto a los desplazamientos verticales que corresponden al borde, se calculan aplicando la segunda de las ecuaciones (g). El desplazamiento hacia abajo a una distancia r del origen se obtiene recordando que r es positivo si el movimiento se efectúa en el sentido del crecimiento de los ángulos θ y que la deformación es simétrica respecto al eje de las x . De esta manera obtendremos

$$(v)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -(v)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \quad (72)$$

Esta ecuación aplicada al origen da un desplazamiento infinitamente grande. Para obviar esta dificultad podemos suponer que la porción de material que rodea el punto de aplicación de la carga es retirada, cortando según

una superficie cilíndrica de pequeño radio. Para otros puntos del borde la ecuación (72) da desplazamientos finitos.

34. Caso general de carga normal al borde recto de una placa. Si suponemos que las curvas σ_x y τ_{xy} de la figura 53 (§ 33) representan los valores de las tensiones originadas por una fuerza unitaria, por ejemplo 1 kg, dichas curvas serán las *líneas de influencia* de las tensiones σ_x y τ_{xy} , lo que quiere decir que la tensión σ_x originada por la fuerza de intensidad P en un punto H del plano mn , se obtiene multiplicando por P la ordenada \overline{HK} .

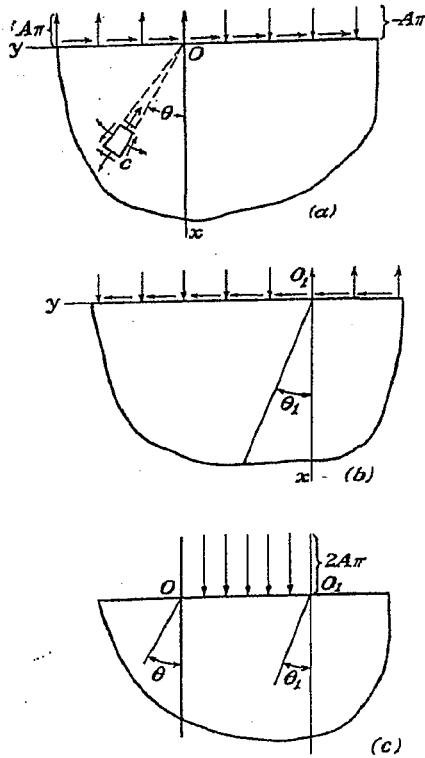


FIG. 57

Si sobre el borde horizontal, AB , de la placa semiinfinita que consideramos actúan varias fuerzas verticales P, P_1, P_2, \dots las tensiones originadas en el plano mn se obtienen sumando los valores que corresponden a cada una de ellas, las cuales resultan de trasladar las curvas de σ_x y τ_{xy}

construidas para la fuerza P , de manera que su origen sea el punto de aplicación respectivo O_1, O_2, \dots . De lo dicho se desprende que la tensión σ_x producida, por ejemplo, por la fuerza P_1 en el punto D del plano mn se obtiene multiplicando P_1 por la ordenada $\overline{H_1K_1}$. De igual forma la tensión σ_x producida por P_2 en D es $\overline{H_2K_2}xP_2$ y así sucesivamente para las otras fuerzas. La tensión total normal producida en D por las fuerzas P, P_1, P_2, \dots es:

$$\sigma_x = \overline{DD_1} \cdot P + \overline{H_1K_1} \cdot P_1 + \overline{H_2K_2} \cdot P_2 + \dots$$

En consecuencia, la curva σ_x de la figura 53 es la *línea de influencia* de la tensión normal σ_x en el punto D y la curva τ_{xy} será la *línea de influencia* de la tensión tangencial en el punto D sobre el plano mn .

Teniendo estas curvas, se pueden obtener fácilmente las componentes de la tensión en D para cualquier carga vertical aplicada al borde AB .

Si en lugar de tratarse de fuerzas concentradas nos encontramos con una fuerza, de intensidad q , distribuida sobre el segmento ss del borde (fig. 53), la tensión normal σ_x en D se obtiene multiplicando por q el área de la parte de diagrama correspondiente, rayada en este caso en la figura, y que llamaremos *superficie de influencia*.

El problema de una carga distribuida uniformemente puede resolverse de otra manera mediante una función de tensión de la forma

$$\phi = Ar^2\theta \quad (a)$$

en la que A es una constante. Las componentes de la tensión correspondiente son:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 2A\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2A \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -A \end{aligned} \quad (b)$$

Para la placa semiindefinida esto se traduce en la distribución de cargas mostrada en la figura 57a. Sobre el borde de la misma actúa una fuerza tangencial cortante, uniformemente distribuida, de intensidad $-A$ y otra normal, también uniformemente distribuida, de intensidad $A\pi$ cuya signo cambia bruscamente en el origen O . Para asignar a las fuerzas su sentido correcto, nos guiarímos por los signos de las componentes de la tensión que actúan en un elemento C .

Trasladando el origen a O_1 y cambiando el signo de la función de tensión ϕ se tendrá la distribución de cargas de la figura 57b. Mediante superposición de los dos casos de distribución de cargas (fig. 57a y 57b) se obtienen el de una carga uniforme sobre un segmento del borde de la

placa, tal como se muestra en la figura 57c. Para que la intensidad de esa carga sea q hacemos

$$2A\pi = q, \quad A = \frac{1}{2\pi}q$$

La tensión en cualquier punto de la placa viene entonces dada por la función de tensión¹

$$\phi = A(r^2\theta - r_1^2\theta_1) = \frac{q}{2\pi}(r^2\theta - r_1^2\theta_1) \quad (c)$$

A la vista de las ecuaciones (b), se deduce que el primer término de la función (c) representa, para cualquier punto M de la placa (fig. 58a), un estado equitensional

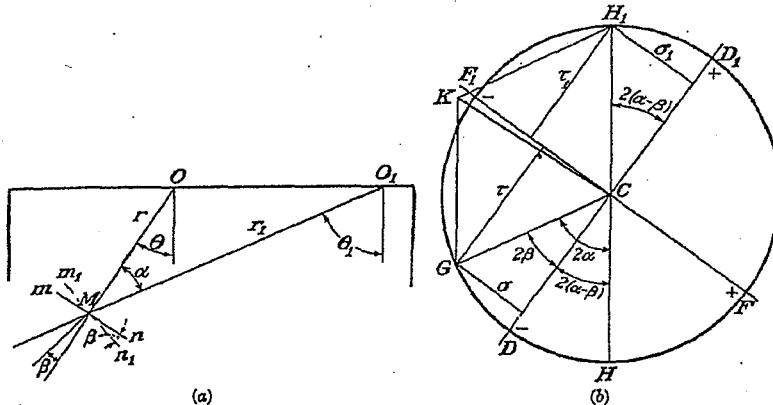


FIG. 58

(de tracción) de valor $2A\theta$ junto con un esfuerzo cortante simple igual a A . De igual forma el segundo término de la función de tensión representa un estado equitensional (de compresión) de valor $-2A\theta_1$, y un esfuerzo cortante simple igual a A .

Los estados equitensionales de tracción y compresión pueden sumarse directamente resultando otro estado equitensional de valor

$$p = 2A\theta - 2A\theta_1 = 2A(\theta - \theta_1) = -2A\alpha \quad (d)$$

siendo α el ángulo formado por los radios r y r_1 .

Compondremos los dos esfuerzos cortantes simples, de direcciones r y r_1 , haciendo uso del círculo de Mohr (fig. 58b), cuyo radio será igual a la tensión tangencial A . Tomando los diámetros DD_1 y FF_1 , paralelo y perpendicular a r respectivamente, como ejes de τ y σ obtendremos la representación del esfuerzo cortante simple que corresponde a la dirección r . Los radios CF y CF_1 representan las tensiones principales A y $-A$ (que forman ángulos $\pi/4$ con r en el punto M) que corresponden

¹ Esta solución se debe a J. H. Michell, Proc. London Math. Soc., vol. 34, pág. 134, 1902.

a este esfuerzo cortante, y el radio CD representa la tensión tangencial, $-A$, en el plano m_1n_1 perpendicular a r . Para cualquier plano m_1n_1 , que forma con m_1n_1 un ángulo β (fig. 58a) las componentes de la tensión están dadas por las coordenadas σ y τ del punto G de la circunferencia de Mohr, siendo GCD igual a 2β .

Para obtener las componentes de la tensión originada por el esfuerzo cortante simple de dirección r_1 se puede emplear la misma circunferencia (§ 9). Considerando de nuevo el plano m_1n_1 y observando que la normal al mismo forma un ángulo $\alpha - \beta$ con la dirección r_1 (fig. 58a), resultará que las componentes de la tensión están dadas por las coordenadas del punto H de la circunferencia. Para tener en cuenta el signo del esfuerzo cortante correspondiente a la dirección r_1 , deben cambiarse los signos de las componentes de la tensión y de esa manera se obtiene el punto H_1 de la circunferencia. La tensión total que actúa sobre el plano m_1n_1 viene dada por el vector CK , de componentes, la tensión normal $-(\sigma + \sigma_1)$ y la tensión tangencial $\tau_1 - \tau$. El vector CK no varía, cualquiera que sea el valor del ángulo β ya que la magnitud de sus componentes CH_1 y CG , así como el ángulo que forman, $\pi - 2\alpha$ son independientes de β . Vemos, pues, que combinando dos solicitudes de esfuerzo cortante obtenemos otro esfuerzo cortante simple (véase § 9).

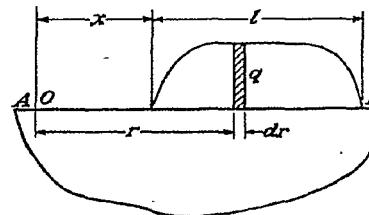
Los ángulos β para los que $\tau_1 - \tau = 0$, corresponden a una de las direcciones de las tensiones principales en M . A la vista de la figura deducimos que τ y τ_1 son iguales en valor absoluto cuando $2\beta = 2(\alpha - \beta)$, es decir, $\beta = \alpha/2$. La dirección de la tensión principal bisecta pues el ángulo formado por r y r_1 y las magnitudes de las tensiones principales son:

$$\pm 2\sigma = \pm 2A \operatorname{sen} 2\beta = \pm 2A \operatorname{sen} \alpha \quad (e)$$

Combinando estos valores con la equitensión (d) obtenemos que las tensiones principales en el punto M son:

$$-2A(\alpha + \operatorname{sen} \alpha), \quad -2A(\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \quad (f)$$

Dada una circunferencia que pase por O y O_1 , el ángulo α se mantiene constante para cualquier punto de la misma, ocurriendo lo mismo, por tanto, con las tensiones principales (f) en esos puntos. En el borde, y para los puntos comprendidos entre O y O_1 (fig. 58a) el ángulo α es igual a τ de donde las dos tensiones principales (f) son iguales a $-2A\tau - q$. En el resto del borde $\alpha = 0$ y las dos tensiones principales se anulan.



En consecuencia, si una distribución arbitraria de carga (fig. 59) es descompuesta en un gran número de cargas de intensidades variables actuando sobre pequeños elementos del borde, la tensión horizontal σ_x existente en un elemento (tal como el indicado en la fig. 59) está motivada solamente por la carga actuante sobre ese elemento, siendo

$$\sigma_x = \sigma_u = -q \quad (g)$$

Otros casos de cargas distribuidas sobre el borde recto de una placa semiinfinita han sido estudiados por S. D. Carothers¹ y M. Sadowsky². En el § 41 se estudia otra manera de resolver este problema.

La flecha del borde recto de la placa puede ser hallada mediante las ecuaciones (72) obtenidas para el caso de una fuerza concentrada. Si q es la intensidad de la distribución vertical de carga (fig. 59) la deflexión de O , producida por el elemento de carga $q dr$, distante r de O y rayado en la figura, será de acuerdo con la ecuación (72)

$$\frac{2q}{\pi E} \log \frac{d}{r} dr - \frac{(1+\nu)q}{\pi E} dr$$

y la deflexión total de O

$$v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_x^{l+x} q \log \frac{d}{r} dr - \frac{1+\nu}{\pi E} \int_x^{l+x} q dr \quad (h)$$

Si la distribución de carga es uniforme, q es constante y entonces

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[(l+x) \log \frac{d}{l+x} - x \log \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql \quad (i)$$

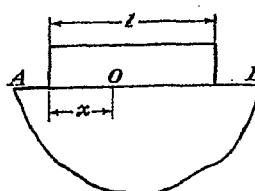


FIG. 60

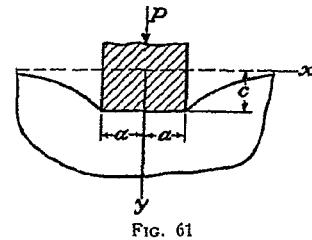


FIG. 61

De igual forma, para un punto situado dentro de la zona cargada (fig. 60) se tendrá

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[(l-x) \log \frac{d}{l-x} + x \log \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql \quad (j)$$

La ecuación (h) puede emplearse también para determinar la intensidad q de la distribución de carga que produce una determinada deflexión del borde recto. Admitiendo, por ejemplo, que el desplazamiento de los puntos del borde es constante en la longitud cargada (fig. 61), se puede demostrar que la distribución de la presión a lo largo de la misma viene dada por la ecuación³

$$q = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

¹ Proc. Roy. Soc. (London), serie A, vol. 97, pág. 110, 1920.

² Z. angew. Math. Mech., vol. 8, pág. 107, 1928.

³ Sadowsky, loc. cit.

35. Cuña con carga en la punta. La sencilla distribución radial de tensiones discutida en el § 33 puede ser usada también en el estudio de las tensiones que crea en una cuña, la aplicación de una carga en el vértice de la misma. Consideremos el caso simétrico, mostrado en la figura 62, en el que suponemos que la cuña tiene un espesor unidad.

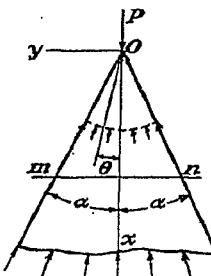


FIG. 62

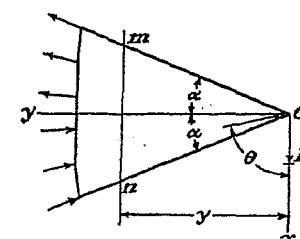


FIG. 63

Las condiciones existentes en las caras $\theta = \pm \alpha$, quedan satisfechas tomando como componentes de la tensión los valores dados por las expresiones

$$\sigma_r = -\frac{kP \cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (a)$$

en las que la constante k se determinará de manera que quede satisfecha la condición de equilibrio para el punto O . Haciendo igual a $-P$ la resultante de las presiones que actúan sobre la superficie cilíndrica (indicada a trazos en la figura), obtenemos

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P$$

de donde

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

Las ecuaciones (a) quedan entonces así¹:

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \quad (73)$$

Tomando $\alpha = \pi/2$ llegamos a la solución (66) ya estudiada, que corresponde a una placa semiinfinita.

¹ Esta solución fue dada por Michell, loc. cit. Véase también A. Mesnager, Ann. ponts et chansées, 1901.

Como puede verse, la distribución de las tensiones normales sobre una sección transversal mn no es uniforme y la relación de su valor en los puntos m o n al valor máximo, que se da en el centro de esa sección, resulta igual a $\cos^4 \alpha$.

Si la fuerza es perpendicular al eje de la cuña (fig. 63) puede usarse de nuevo la solución (a) si el ángulo θ es medido a partir de la dirección de la fuerza. El factor k se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = -P$$

de la cual se deduce

$$k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha}$$

estando dada, por lo tanto, la tensión en dirección radial por

$$\sigma_r = - \frac{P \cos \theta}{r(\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)} \quad (74)$$

Las tensiones existentes en una sección transversal mn cualquiera vienen expresadas por

$$\begin{aligned} \sigma_y &= - \frac{Pyx \operatorname{sen}^4 \theta}{y^3(\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)} \\ \tau_{xy} &= - \frac{Px^2 \operatorname{sen}^4 \theta}{y^3(\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)} \end{aligned} \quad (b)$$

pudiendo ponerse cuando a es pequeño:

$$2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}$$

Representando entonces, por I el momento de inercia de la sección transversal mn , podemos escribir las ecuaciones (b) en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= - \frac{Pyx}{I} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta \\ \tau_{xy} &= - \frac{Px^2}{I} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta \end{aligned} \quad (c)$$

Para valores pequeños de a el factor $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \times \operatorname{sen}^4 \theta$ puede tomarse muy aproximadamente igual a uno y entonces la expresión de σ_y coincide con la que da la teoría elemental de la flexión. La máxima tensión tangencial se da en los puntos m y n y su valor es doble del deducido por la teoría elemental para el baricentro de la sección rectangular de una viga.

Obtenidas las soluciones para los problemas representados en las

figuras 62 y 63, podemos tratar el caso en que la fuerza P tenga una dirección cualquiera en el plano xy , descomponiendo la fuerza en sus dos componentes y aplicando el principio de superposición¹. Debe advertirse que las soluciones (73) y (74) son exactas, únicamente en el caso en que en el extremo fijo, la cuña es sostenida por las fuerzas radiales cuyo valor es el dado por esas ecuaciones. De no ser así tales soluciones son válidas solamente en puntos distantes del apoyo.

El problema de una cuña sometida a un par M , contenido en su plano y aplicado en el vértice de la misma se resuelve mediante la función de tensión²

$$\phi = M \frac{\operatorname{sen} 2\theta - 2\alpha \operatorname{cos} 2\alpha}{2(\operatorname{sen} 2\alpha - 2\alpha \operatorname{cos} 2\alpha)} \quad (d)$$

donde el ángulo θ es el señalado en la figura 62 y el par aplicado, M , tiene un sentido contrario al de las agujas del reloj. Las tensiones resultantes son:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{M}{2(\operatorname{sen} 2\alpha - 2\alpha \operatorname{cos} 2\alpha)} \cdot \frac{4}{r^2} \operatorname{sen} 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M}{2(\operatorname{sen} 2\alpha - 2\alpha \operatorname{cos} 2\alpha)} \cdot \frac{2}{r^2} (\operatorname{cos} 2\theta - \operatorname{cos} 2\alpha) \end{aligned} \quad (e)$$

36. Carga concentrada sobre una viga. El problema de la distribución de tensiones en una viga sometida a la acción de una carga concentrada es de gran interés práctico. En el § 22 se demostró que la distribución tensional que una carga uniformemente distribuida origina

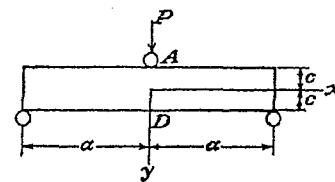


FIG. 64

en las vigas de sección rectangular estrecha, puede calcularse con exactitud satisfactoria utilizando la teoría elemental de la flexión. En la proximidad del punto de aplicación de una fuerza concentrada ocurre, sin embargo, una perturbación local de la distribución de tensiones, que hace

¹ Varios ejemplos relativos a la distribución de tensiones en las cuñas han sido analizados por Akira Miura en *Spannungsscharen in rechteckigen und keilförmigen Trägern*, Berlin, 1928. El caso en el que las fuerzas no se aplican en la punta de la cuña ha sido estudiado por J. H. A. Brahtz, *Physics*, vol. 4, pág. 56, 1933 y por W. M. Shepherd, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 148, pág. 284, 1935.

² C. E. Inglis, *Trans. Inst. Nav. Arch. (London)*, 1922, vol. 64.

necesario un estudio más detenido. Tal estudio ha sido realizado por primera vez por Carus Wilson¹, quien ensayó por métodos fotoelásticos (véase § 42) una viga rectangular de vidrio, libremente apoyada en sus dos extremos y cargada en el centro (fig. 64). Mediante los ensayos realizados encontró que en el punto *A* de aplicación de la carga, la distribución de tensiones se aproxima a la producida en una placa semiindefinida por

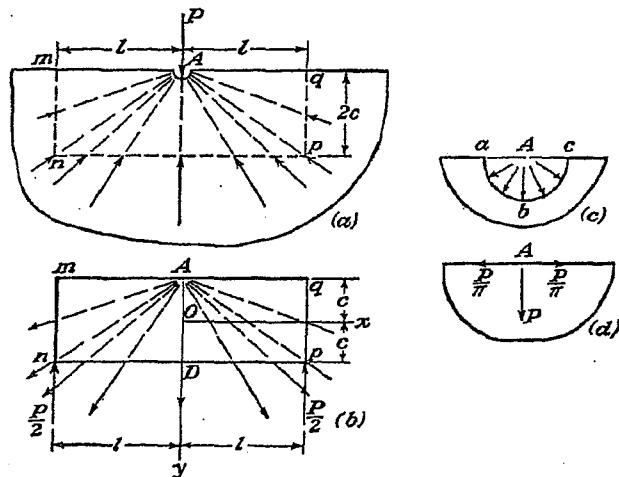


FIG. 65

una fuerza concentrada. A lo largo de la sección *AD* la tensión normal σ_x no sigue una ley lineal y en el punto *D* la tensión de tracción es inferior a la que resultaría de aplicar la teoría elemental de la flexión. Estos resultados han sido explicados por G. G. Stokes² recurriendo a ciertas suposiciones empíricas. Según dicho autor, el sistema representado en la figura 64 puede obtenerse por superposición de los dos sistemas mostrados en la figura 65. Las tensiones radiales de compresión que actúan sobre las secciones *mn*, *np* y *pq* de la laja semiindefinida (fig. 65a) son compensadas por tracciones radiales, de igual valor, que actúan en los costados de la viga rectangular apoyada en *n* y *p* (fig. 65b). Para realizar el caso tratado por Stokes, se deben superponer las tensiones existentes en esa viga, a las que corresponden a la placa semiinfinita.

Aplicando la fórmula elemental de la flexión al cálculo de las tensiones se tendrá: el momento flector en la sección transversal media *AD*

¹ Loc. cit.² Wilson, loc. cit.; véase también G. G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, vol. 5, pág. 238.

de la viga, es igual a la diferencia entre el momento de la reacción $P/2$ y el momento de todas las fuerzas de tracción, de dirección radial, correspondientes a una de las mitades de la viga. Este momento se calcula fácilmente, pues esta distribución radial es estáticamente equivalente a la de las presiones que actúan sobre el cuadrante *ab* que rodea al punto *A* (fig. 65c) o bien, teniendo en cuenta la ecuación (66), al conjunto de una fuerza horizontal P/π y una fuerza vertical $P/2$ aplicadas en *A* (fig. 65d). Por lo tanto el momento flector, es decir, el momento respecto a *O*, es

$$\frac{P}{2}l - \frac{P}{\pi}c$$

y las tensiones de flexión correspondientes¹

$$\sigma_x' = \frac{P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y$$

A estas tensiones debe añadirse el estado equitensional de valor $P/2\pi c$ producido por la fuerza P/π . Las tensiones normales que actúan sobre la sección *AD*, obtenidas de esta forma elemental son, en consecuencia:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c}$$

fórmula que coincide con la propuesta por Stokes.

Se obtiene una mayor aproximación si hacemos uso de las ecuaciones (36') y observamos que sobre el borde inferior de la viga (fig. 65b) existe una distribución continua de carga. En el punto *D* la intensidad de esta carga es P/c como se deduce de las ecuaciones (66). Sustituyendo este valor en (36') y teniendo en cuenta el encontrado anteriormente para σ_x , obtenemos en segunda aproximación

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

Para obtener las tensiones totales a lo largo de la sección *AD*, debe agregarse a estas últimas expresiones las tensiones

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi(c+y)} \quad (b)$$

como para el caso de una placa semiindefinida.

La comparación de las expresiones anteriores con una solución más

¹ Consideraremos a P , como hicimos antes, como la fuerza por unidad de espesor de la placa.

exacta (véase la tabla de la pág. 131) muestra que las ecuaciones (a) y (b), dan las tensiones con una gran aproximación, salvo en el punto D , donde la corrección que aportan al valor dado por la teoría elemental es:

$$\frac{3P}{2\pi c} + \frac{P}{2\pi c} + \frac{1}{5} \frac{P}{\pi c} = -0,254 \frac{P}{c}$$

mientras que la teoría exacta da tan sólo $-0,133 (P/c)$.

El primer intento para obtener una solución del problema más exacta, es debido a J. Boussinesq¹, que hizo uso de la solución de Flamant para placas semiindefinidas (véase el § 33), mediante correcciones sucesivas. Comienza por anular las tensiones sobre el contorno np (fig. 65a), superponiendo un sistema de tensiones iguales y de signo contrario; luego considera que la viga es una placa semiindefinida que se extiende por encima de la línea np y emplea de nuevo la solución de Flamant. Como esta corrección introduce tensiones suplementarias sobre el borde superior de la viga es necesaria la utilización de una nueva solución de Flamant para compensarlas. Este proceso se aplica sucesivamente, pero dado que converge muy lentamente, no conduce a resultados satisfactorios.

L. N. G. Filon² ha dado una solución al problema por medio de series trigonométricas. Los resultados que obtuvo para diversos casos de fuerzas concentradas (véase el § 23) cuadran bastante bien con los obtenidos en las investigaciones más recientes.

H. Lamb³ realizó ulteriormente progresos en la búsqueda de la solución correcta. Considerando una viga de longitud indefinida, sobre la que actúan hacia abajo y hacia arriba, alternadamente, fuerzas iguales equidistantes, Lamb pudo simplificar la solución del problema bidimensional y obtuvo para diversos casos la curva de deflexión. Demostró, asimismo, la gran exactitud de la teoría elemental de la flexión de Bernoulli-Euler cuando la altura de la viga es pequeña frente a su longitud, y también que la corrección de esfuerzo cortante dada por Rankine y Grashof (véase el § 21) es algo exagerada y debe ser reducida a los $3/4$ de su valor⁴.

Un estudio más detallado de la distribución tensional y de la curvatura en el entorno del punto de aplicación de la carga concentrada, ha sido realizado por T. V. Kármán⁵ y F. Seewald⁶. El primero considera una viga infinitamente larga y hace uso de la solución correspondiente al caso de una placa semiindefinida, sobre la cual actúan dos pares iguales y opuestos en puntos próximos del borde (fig. 56b). Las tensiones así introducidas en el borde inferior de la viga pueden ser eliminadas usando una solución, cuya forma es la de una serie trigonométrica (§ 23), que en

¹ Compt. rend., vol. 114, pág. 1510, 1892.

² L. N. G. Filon, Trans. Roy. Soc. (London), serie A, vol. 201, pág. 63, 1903.

³ H. Lamb, Atti IV congr. intern. matem., vol. 3, pág. 12. Roma, 1909.

⁴ Filon llegó a la misma conclusión en su trabajo (*loc. cit.*).

⁵ Abhandl. aerodynam. Inst. Tech. Hochschule, Aachen, vol. 7, 1927.

el caso de una viga de longitud indefinida vendrá representada por una integral de Fourier. De esta forma Kármán llega a la función de tensión

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha \operatorname{ch} \alpha c + \operatorname{sh} \alpha c) \operatorname{ch} \alpha y - \operatorname{sh} \alpha c \operatorname{sh} \alpha y \cdot \alpha y}{\operatorname{sh} 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x d\alpha \\ & - \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha \operatorname{sh} \alpha c + \operatorname{ch} \alpha c) \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha c \operatorname{ch} \alpha y \cdot \alpha y}{\operatorname{sh} 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x d\alpha \quad (c) \end{aligned}$$

Esta función da la distribución de tensiones en una viga en el caso en que el diagrama del momento flector sea un rectángulo muy estrecho, tal como el mostrado en la figura 66. Para el caso más general de cargas verticales que obran sobre el borde superior de la viga⁷, el momento flector correspondiente puede dividirse en rectángulos elementales, como el de la figura 66, y la función de tensión correspondiente se obtiene integrando la expresión (c) a lo largo de la viga.

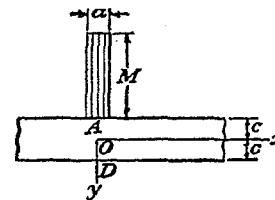


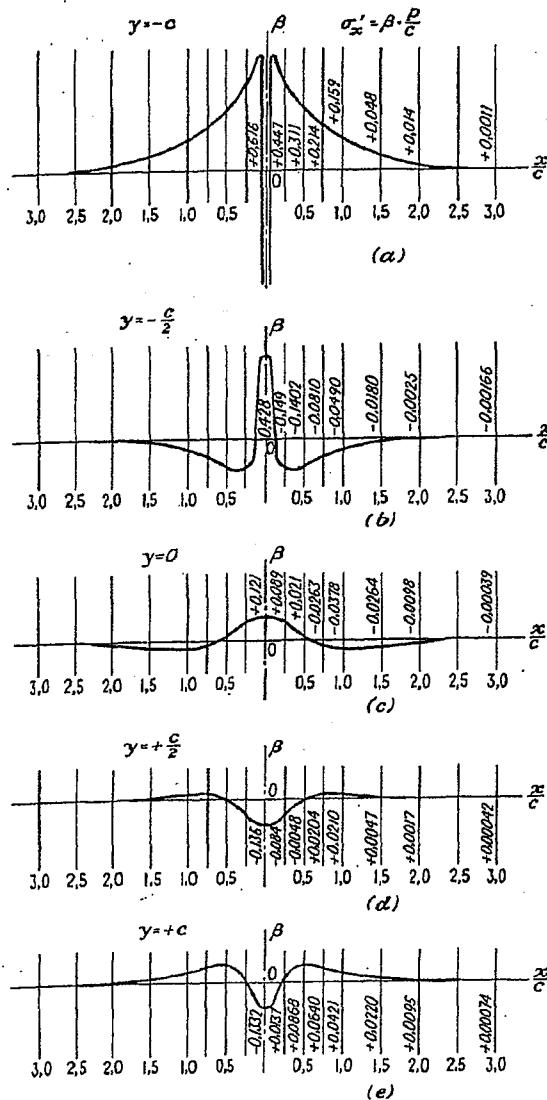
FIG. 66

Seewald ha aplicado este método al caso de una viga sometida a una fuerza concentrada P (fig. 64), y ha demostrado que la tensión σ_x puede ser descompuesta en dos partes: una calculable mediante la fórmula elemental de las vigas y otra que representa el efecto local en el entorno del punto de aplicación de la carga; esta última, llamada σ_x' , puede ser representada en la forma $\beta(P/c)$, donde β es un factor numérico cuyo valor depende de la posición del punto para el cual se calcula la tensión local. Los valores de este factor vienen dados en la figura 67. Las otras dos componentes de la tensión σ_y y τ_{xy} pueden ser representadas también en la forma $\beta(P/c)$. Los valores correspondientes de β son dados en las figuras 68 y 69. A la vista de estas figuras se deduce que las tensiones locales disminuyen muy rápidamente cuando aumenta la distancia al punto de aplicación de la carga y que a una distancia igual a la altura de la viga, su valor es prácticamente despreciable. En la página 131 se inserta una tabla de valores de las tensiones locales en cinco puntos de la sección transversal AD , que contiene a la vertical de la carga (fig. 64), valores que se pueden comparar con los de las tensiones locales⁸, calculadas para los mismos puntos mediante las ecuaciones (a) y (b). Como puede verse, la exactitud que con estas ecuaciones puede obtenerse para las tensiones, es satisfactoria.

Conocidas las tensiones pueden calcularse fácilmente la curvatura y la deflexión de la viga. Estos cálculos muestran que tanto la curvatura como la deflexión vienen

⁷ El caso de una carga aplicada a la mitad de la altura de la viga, fue estudiado por R. C. J. Howland, Proc. Roy. Soc. (London), vol. 124, pág. 89, 1929 (véase las págs. 115 y sigs.) y el de dos fuerzas actuando en el interior de la viga por K. Girkmann, Ingenieur-Archiv, vol. 13, pág. 273, 1943. El caso de vigas en I sobre las que actúan fuerzas longitudinales concentradas, ha sido considerado por Girkmann en Oesterri. Ingenieur-Archiv., vol. 1, pág. 420, 1946.

⁸ Nos referimos con esa expresión a las tensiones que deben ser añadidas a las obtenidas mediante la fórmula elemental.

TABLA DE LOS FACTORES β PARA EL CENTRO DE LA VIGA

$y =$	$-c$	$-c/2$	0	$c/2$	c
Solución exacta					
$\sigma_x' =$...	-0,428	-0,121	-0,136	-0,133
$\sigma_y =$	∞	-1,23	-0,456	-0,145	0
Solución aproximada					
$\sigma_x' =$	0,573	0,426	0,159	-0,108	-0,254
$\sigma_y =$	∞	-1,22	-0,477	-0,155	0

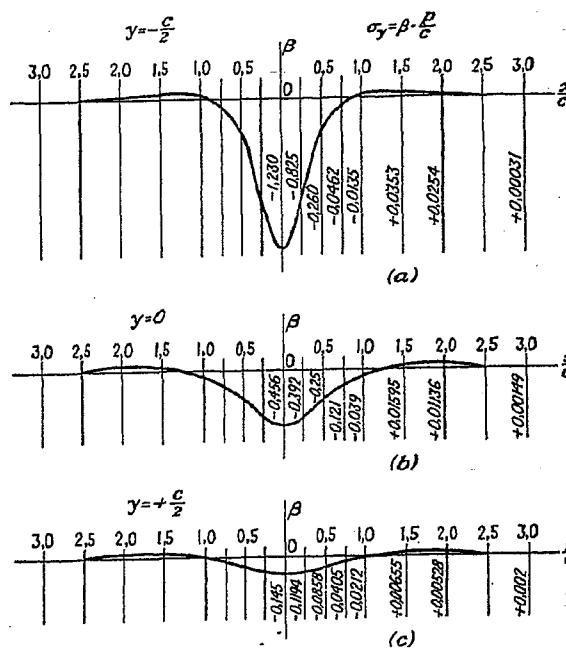


FIG. 68

dadas por expresiones que pueden ser descompuestas en dos partes: una, la dada por la teoría elemental y otra que representa el efecto local de la carga concentrada P . Esta curvatura adicional de la línea central de la viga puede representarse por la fórmula

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{P}{Ea^3} \quad (d)$$

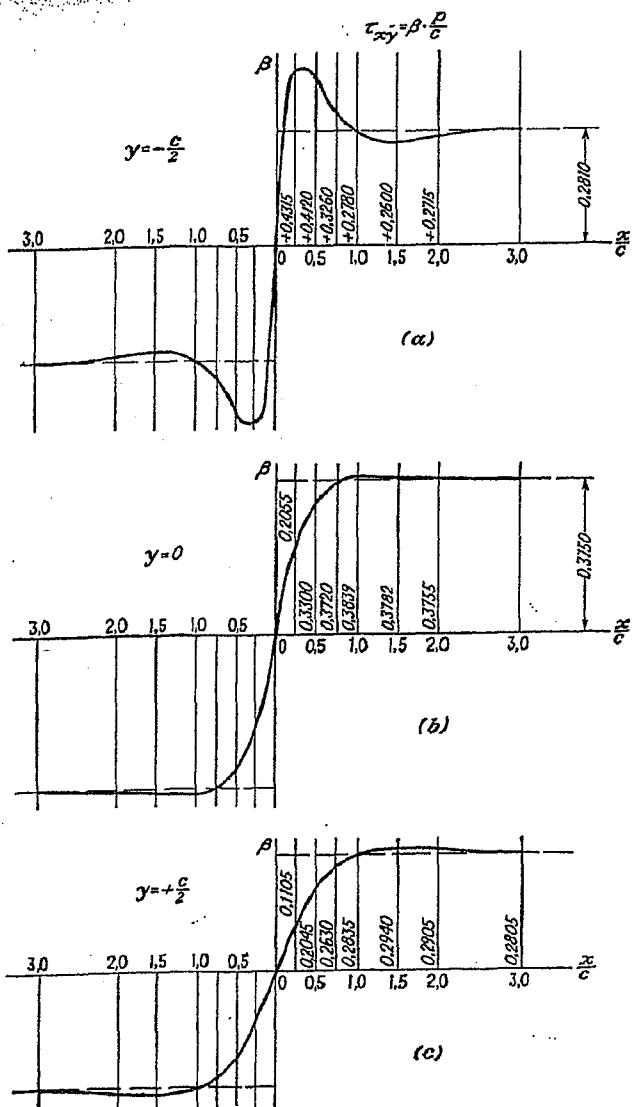


FIG. 69

en la que a es un factor numérico que varía a lo largo de la viga. Algunos valores de ese factor son dados en la figura 70. Como puede verse para secciones transversales cuya distancia a la central sea mayor que la mitad de la altura de la viga, la curvatura adicional es despreciable.

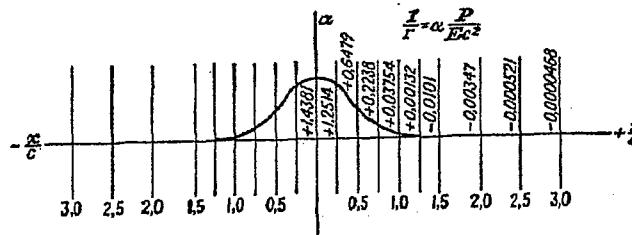


FIG. 70

En virtud del efecto localizado sobre la curvatura, a que nos hemos referido, se puede considerar que las dos ramas de la curva de deflexión AB y AC (fig. 71) forman un ángulo igual a

$$\gamma = \frac{P}{c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad (e)$$

La flecha correspondiente al punto medio es:

$$\delta_1 = \frac{\gamma l}{4} = \frac{Pl}{4c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad (f)$$

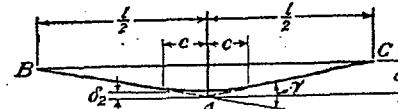


FIG. 71

De esta flecha debe restarse δ_2 , pequeño término correctivo cuyo objeto es hacer desaparecer el cambio brusco de pendiente en el punto A . Su valor calculado por Seewald es:

$$\delta_2 = 0,21 \frac{P}{E} \quad (g)$$

Designando ahora por δ_0 la flecha que daría la teoría elemental, el valor total de la misma será:

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl}{4c} \left(\frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) - 0,21 \frac{P}{E} \quad (75)$$

que tomando $\nu = 0,3$ queda

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \left[1 + 2,85 \left(\frac{2c}{l} \right)^2 - 0,84 \left(\frac{2c}{l} \right)^3 \right] \quad (75')$$

La teoría elemental de Rankine-Graho (§ 21) da en este caso

$$\delta = \frac{P l^2}{48 E I} \left[1 + 3,90 \left(\frac{2l}{d} \right)^2 \right] \quad (g)$$

que parece ser un valor demasiado grande para la corrección debida al esfuerzo cortante. Ninguna de las fórmulas anteriores toma en cuenta la deformación local que se produce en los apoyos.

37. Tensiones en un disco circular. Comencemos considerando el caso sencillo de un disco sometido a la acción de dos fuerzas iguales y opuestas P que actúan en los extremos de un diámetro AB del mismo

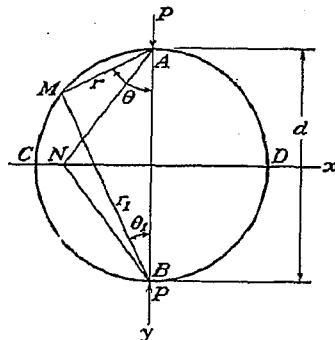


FIG. 72

(fig. 72). Suponiendo que cada una de las fuerzas produce una distribución radial simple de tensiones [ecuación (66)], podremos calcular qué fuerzas habrá que aplicar a la periferia del disco para mantener dicha distribución. En cualquier punto M del contorno tendremos compresiones en la dirección de r y r_1 de valor igual a $\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$ y $\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1}$ respectivamente¹. Dado que r y r_1 son perpendiculares entre sí y que siendo d el diámetro del disco,

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d} \quad (a)$$

se deduce, que las dos tensiones principales en M son dos compresiones iguales de valor $2P/\pi d$. En consecuencia, esta misma tensión de compresión actúa sobre cualquier plano, perpendicular al plano del disco, que pase por M y una fuerza normal de compresión, de valor $2P/\pi d$, deberá ser aplicada sobre la periferia del disco con objeto de mantener el par de distribuciones radiales simples de tensiones que se ha supuesto existen.

¹ Se supone que P es la fuerza por unidad de espesor del disco.

Si sobre la periferia del disco no actúan fuerzas exteriores la tensión en cualquier punto se obtiene, pues, agregando a las dos distribuciones radiales simples de tensiones, antes mencionadas, una tracción en el plano del disco, de magnitud $2P/\pi d$.

Consideremos ahora la tensión existente en la sección diametral horizontal del disco que pasa por N . Por simetría se deduce que no actuará ninguna tensión tangencial sobre la misma; en cuanto a la tensión normal que resulta de las dos compresiones radiales iguales valdrá:

$$-2 \cdot \frac{2P \cos \theta}{\pi r} \cdot \cos^2 \theta$$

en la que r es la distancia AN y θ el ángulo formado por AN y el diámetro vertical. Superponiendo a este valor la tracción uniforme $2P/\pi d$, tenemos, para la tensión normal total existente en el plano horizontal que pasa por N , el valor

$$\sigma_y = -\frac{4P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d}$$

que usando la igualdad

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}}$$

queda así:

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad (b)$$

La máxima tensión de compresión en el diámetro CD se da en el centro del disco donde

$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}$$

mientras que en los extremos del diámetro σ_y se anula.

Consideremos ahora el caso de dos fuerzas iguales y opuestas, actuando en los extremos de una cuerda, AB (fig. 73) en la dirección de la misma. Suponiendo de nuevo dos distribuciones radiales de tensiones, que parten de A y B , la tensión en un plano tangente a la circunferencia en el punto M , se obtiene por superposición de dos compresiones radiales, $\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$ y $\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1}$, de direcciones r y r_1 respectivamente. La normal MN a la tangente en M es el diámetro del disco; de manera que MAN y MBN son triángulos rectángulos y los ángulos que forma la normal MO con x y r_1 son $\pi/2 - \theta_1$ y $\pi/2 - \theta$, respectivamente. Las

normal MN a la tangente en M es el diámetro del disco; de manera que MAN y MBN son triángulos rectángulos y los ángulos que forma la normal MO con x y r_1 son $\pi/2 - \theta_1$ y $\pi/2 - \theta$, respectivamente. Las

tensiones normal y tangencial que corresponden a un elemento del contorno en el punto M , serán, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) - \frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta \sin^2 \theta_1}{r} + \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta}{r_1} \right) \quad (c) \\ \tau &= -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta}{r} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta \cos \theta \right)\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden ser simplificadas si observamos que en los triángulos MAN y MBN se verifica:

$$r = d \sin \theta_1, \quad r_1 = d \sin \theta$$

Sustituyendo en las ecuaciones (c) tenemos:

$$\sigma = -\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1), \quad \tau = 0 \quad (d)$$

De la figura 73 se deduce que el valor de $\sin(\theta + \theta_1)$ permanece constante en toda la periferia, por lo que para que las distribuciones radiales de tensiones supuestas se den en el disco, es necesario aplicar sobre el contorno del mismo una fuerza de compresión uniforme de valor $2P/\pi d \cdot \sin(\theta + \theta_1)$.

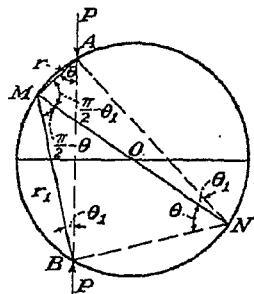


FIG. 73

En el caso en que tal fuerza de compresión no exista la tensión en el disco, será la que resulta de añadir a las dos distribuciones radiales simples arriba indicadas una tracción uniforme de intensidad $2P/\pi d \cdot \sin(\theta + \theta_1)$.

Podemos abordar ahora el problema más general, de la distribución de tensiones que se obtiene en un disco sujeto a la acción de un sistema cualquiera de fuerzas

en equilibrio, aplicadas a su periferia¹. Consideraremos una de estas fuerzas aplicada en A según la dirección de la cuerda AB (fig. 74). Suponiendo de nuevo que la distribución de tensiones es radial tendremos en el punto M una compresión simple radial de valor $(2P/\pi) \cos \theta_1/r_1$ dirigida según AM . Tomando el punto O como origen de las coordenadas polares y midiendo θ en la forma que se indica en la figura, las componentes normal y tangencial de la tensión que actúa sobre el elemento tangencial que comprende el punto M , pueden ser calculadas fácilmente si se observa que el ángulo que forma la normal MO a dicho elemento con la dirección r_1 de la compresión vale $\pi/2 - \theta_2$. Tendremos, pues:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \sin^2 \theta_2 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \sin \theta_2 \cos \theta_2\end{aligned} \quad (e)$$

En el triángulo AMN , $r_1 = d \sin \theta_1$, luego las ecuaciones (e) pueden escribirse:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned} \quad (f)$$

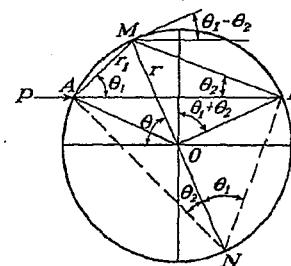


FIG. 74

Esta tensión que actúa sobre el elemento, tangente a la periferia en el punto M , puede obtenerse por superposición de las tres tensiones siguientes:

1) Una tensión normal que se distribuye uniformemente a lo largo del contorno

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (g)$$

2) Una tensión tangencial que se distribuye uniformemente sobre el contorno

$$-\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (h)$$

¹ Los problemas examinados en este párrafo fueron resueltos por H. Hertz, *Z. Math. Physik*, vol. 28, 1883, o *Gesammelte Werke*, vol. 1, pág. 283; y por J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 32, pág. 44, 1900 y vol. 34, pág. 134, 1901. El problema correspondiente a la figura 72 en el que el disco ha sido remplazado por un rectángulo ha sido estudiado por J. N. Goodier, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 54, pág. 173, 1932, incluyéndose el efecto de que la carga sea aplicada sobre pequeños segmentos del contorno.

3) Una tensión cuyas componentes normal y tangencial son

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad y \quad -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (k)$$

Observando que el ángulo formado por la fuerza P y la tangente en M es $\theta_1 - \theta_2$ puede deducirse que la tensión (k) vale $P/\pi d$ y actúa en sentido opuesto al de dicha fuerza P .

Suponiendo ahora que son varias fuerzas las que actúan sobre el disco y que cada una de ellas produce una distribución radial simple de tensiones, las fuerzas que deberán ser aplicadas sobre el contorno del disco para mantener tal distribución serán:

1) Una fuerza normal, distribuida uniformemente sobre el contorno, de valor

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (l)$$

2) Fuerzas tangenciales de intensidad

$$-\sum \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (m)$$

3) Una fuerza, cuya intensidad y dirección se obtienen sumando vectorialmente las expresiones (k) , suma que debe extenderse a todas las fuerzas que obran sobre la periferia.

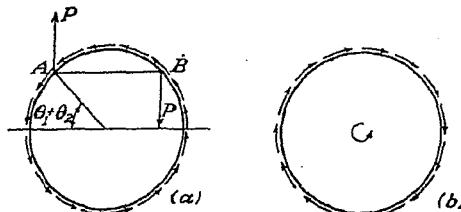


FIG. 75

De la figura 74 resulta que el momento total de todas las fuerzas exteriores con relación al punto O , es

$$\sum \frac{P \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} d$$

y como este momento debe ser cero por tratarse de un sistema en equilibrio, se deduce que las fuerzas tangenciales (m) deben ser nulas. La suma de las tensiones (k) es una fuerza proporcional a la suma geométrica de las fuerzas exteriores y también será nula para un sistema en equilibrio. Se desprende, pues, que para mantener las distribuciones de tensión radiales simples sólo será necesario aplicar periféricamente la compresión uniforme (l) . Si sobre el contorno no existe compresión uniforme se obtendrá la tensión en un punto del disco, superponiendo a las distribuciones radiales simples la tracción uniforme:

$$\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Usando este método general se pueden resolver fácilmente otros casos de distribución de tensiones en los discos¹. Podemos escoger, por ejemplo, el caso en que

¹ Varios casos de interés han sido estudiados por J. H. Michell, *loc. cit.*

actue un par sobre el disco (fig. 75), compensado por otro par aplicado en el centro. Admitiendo dos distribuciones radiales iguales en los puntos A y B , veremos que en este caso la fuerza (l) y la suma de las tensiones (k) es cero, por lo que para mantener las distribuciones radiales de tensiones sólo es necesario aplicar las fuerzas tangenciales (m) . La intensidad de tales fuerzas será:

$$-\frac{2P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{2M_t}{\pi d^2} \quad (n)$$

donde M_t es el momento del par de fuerzas aplicado. Para que la periferia del disco quede libre de esfuerzos tangenciales y pueda efectuarse la traslación, al centro del disco, del par de fuerzas equilibrante de las fuerzas P , que constituyen el par que actúa sobre la circunferencia de la pieza, es necesario añadir a las distribuciones radiales simples, las tensiones que se indican en la figura 75b, las cuales corresponden al caso de tensiones originadas por una tensión cortante circunferencial, fácilmente calculable; tal resulta de observar que las tensiones tangenciales deben originar un par M_t en cada uno de los círculos concéntricos, así que siendo r el radio, se tendrá:

$$\tau_{rg} 2\pi r^2 = M_t, \quad \tau_{rg} = \frac{M_t}{2\pi r^2} \quad (p)$$

Estas tensiones podrían ser deducidas también mediante las ecuaciones (38) partiendo de la función de tensión

$$\phi = \frac{M_t \theta}{2\pi} \quad (q)$$

de la que se deduce

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{rg} = \frac{M_t}{2\pi r^2}$$

38. Placa indefinida con carga concentrada en un punto. Si una fuerza P actúa en el plano medio de una placa indefinida (fig. 76a), la distribución de tensiones resultante puede obtenerse fácilmente por superposición de sistemas que ya hemos estudiado. No puede resolverse el problema, sin embargo, superponiendo simplemente las soluciones que corresponden a las placas semiinfinitas que se muestran en las figuras 76b y 76c. En efecto, si bien los desplazamientos verticales son iguales en ambos casos, los que se producen horizontalmente convergen hacia O en el caso de la figura 76c y divergen en el de la 76b. La magnitud de estos desplazamientos, en ambos casos, deducidos de la ecuación (71), es:

$$\frac{1 - \nu}{4E} \cdot P \quad (a)$$

La diferencia entre los desplazamientos horizontales puede ser eliminada combinando los casos 76b y 76c con los 76d y 76e en los que actúan fuerzas tangenciales sobre el borde rectilíneo. Los desplazamientos correspondientes a estos casos, pueden obtenerse a partir de los resultados obtenidos en el problema de la flexión de una pieza curva, que se muestra en la

figura 76. Haciendo tender el radio interior y el exterior de esta pieza a cero e infinito respectivamente, obtenemos el caso de una placa semi-

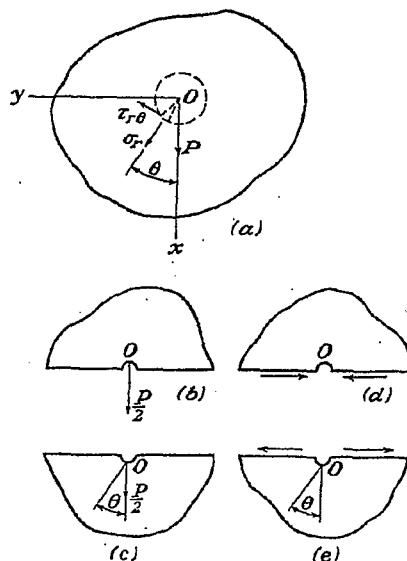


FIG. 76

indefinida. La ecuación (61) nos da el valor del deslizamiento que tiene lugar a lo largo del borde rectilíneo de esta placa, en la dirección de la fuerza cortante que actúa sobre el mismo:

$$\frac{D\pi}{E} \quad (b)$$

siendo D una constante de integración que debe ser ajustada con objeto de que el desplazamiento resultante de (a) y (b) se anule. En consecuencia:

$$\frac{D\pi}{E} = \frac{1-\nu}{4E} P, \quad D = \frac{1-\nu}{4\pi} P \quad (c)$$

y realizado este ajuste, se obtiene como resultado de la superposición de los casos 76b, 76c, 76d y 76e, el de una placa indefinida cargada en un punto (fig. 76a). Las tensiones correspondientes se obtienen ahora, fácilmente, sumando las tensiones que se presentan en una placa semiinfinita sobre cuyo borde actúa una fuerza normal $P/2$ y las existentes en una barra curva, en cuyas expresiones figura la constante de integración D .

Teniendo en cuenta los distintos ejes polares tomados en las figuras 46 y 76 y usando las ecuaciones (60), las tensiones en la barra curva, midiendo θ como se indica en la figura 76, valdrán

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{D \sin \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned}$$

Si se combinan estos valores con los que da la fórmula (66) para las tensiones que origina la carga $P/2$, se obtiene la siguiente distribución de tensiones para la placa de extensión ilimitada

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} - \frac{P \cos \theta}{\pi r} = -\frac{(3+\nu)}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned} \quad (76)$$

Si suponemos ahora que en el punto O de la placa aislamos un pequeño cilindro de radio r y proyectamos sobre los ejes x e y las fuerzas que actúan sobre el contorno de dicho cilindro, tendremos:

$$\begin{aligned}X &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = P \\ Y &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0\end{aligned}$$

expresiones éstas, que igualan las fuerzas que actúan sobre el contorno del elemento cilíndrico a la carga P aplicada en O . Usando ahora las ecuaciones (13) podremos deducir de (76) la expresión de las componentes de la tensión en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P \cos \theta}{4\pi} [-(3+\nu) + 2(1+\nu) \sin^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{P \cos \theta}{4\pi} [1 - \nu - 2(1+\nu) \sin^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P \sin \theta}{4\pi} [1 - \nu + 2(1+\nu) \cos^2 \theta]\end{aligned} \quad (77)$$

Las fórmulas (77) resuelven el caso de una fuerza concentrada y permiten obtener, por superposición, las soluciones correspondientes a

otros tipos de carga. Consideremos, por ejemplo; el caso mostrado en la figura 77, en el que dos fuerzas iguales y opuestas son aplicadas a una placa indefinida en los puntos O y O_1 , cuya distancia d , es muy pequeña.

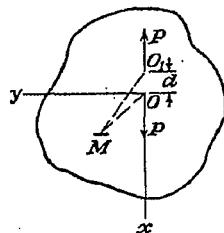


FIG. 77

La tensión en cualquier punto M se calcula sumando las producidas por las fuerzas que actúan en O y O_1 . Considerando, por ejemplo, en M un elemento plano perpendicular al eje x y designando por σ_x la tensión normal producida en el elemento por la fuerza de O , la tensión normal total σ_x' producida por las dos fuerzas representadas en la

$$\sigma_x' = \sigma_x - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d \right) = -d \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -d \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

Vemos pues, que para el caso de la figura 77 las componentes de la tensión se obtienen por diferenciación de las ecuaciones (77). Procediendo así tendremos

$$\sigma_x = \frac{dP}{4\pi r^2} [-(3+\nu) \cos^2 \theta + (1-\nu) \sin^2 \theta + 8(1+\nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta]$$

$$\sigma_y = \frac{dP}{4\pi r^2} [(1-\nu) \cos^2 \theta + (1+3\nu) \sin^2 \theta - 8(1+\nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \quad (78)$$

$$\tau_{xy} = \frac{dP}{4\pi r^2} [-(6+2\nu) + 8(1+\nu) \sin^2 \theta] \sin \theta \cos \theta$$

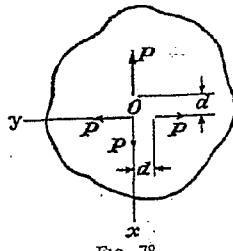


FIG. 78

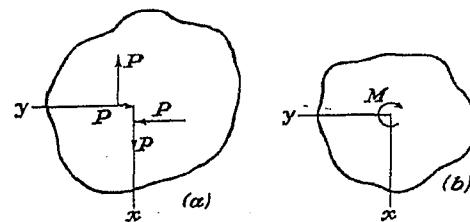


FIG. 79

Como puede verse las componentes de la tensión disminuyen muy rápidamente cuando r aumenta y para valores de r grandes, frente a d , su valor se hace prácticamente despreciable, resultado este previsible, con arreglo al principio de Saint-Venant, por tratarse de dos fuerzas iguales y opuestas actuando en puntos muy próximos.

Superponiendo dos distribuciones tensionales de las dadas por las ecuaciones (78), podemos resolver el problema mostrado en la figura 78. En este caso las componentes de la tensión¹ son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \sigma_y &= 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \tau_{xy} &= -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

La misma distribución tensional expresada en coordenadas polares queda así:

$$\sigma_r = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (79)$$

La solución (46), correspondiente al caso de un cilindro de pared gruesa sometido a la acción de una presión interior, coincide con las expresiones (79) cuando el diámetro exterior del cilindro se hace infinitamente grande.

De igual manera podemos resolver el caso mostrado en la figura 79a. Las componentes de la tensión¹ son

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} \quad (80)$$

Estas tensiones son las producidas por un par M aplicado en el origen (fig. 79b).

Si en lugar de una placa indefinida se trata de una tira infinitamente larga sometida a la acción de una fuerza P longitudinal (fig. 80), podemos comenzar tomando la solución (77) como si la placa fuera indefinida en todas las direcciones. Las ten-

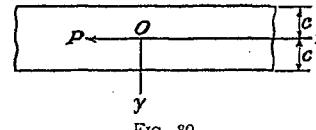


FIG. 80

siones que entonces aparecen a lo largo de los bordes de la tira, pueden ser anuladas añadiendo un sistema correctivo igual y contrario, que produce unas tensiones que pueden ser determinadas usando el método general descrito en el § 23. Los cálculos realizados por R. C. J. Howland² muestran que las tensiones locales producidas

¹ A. E. H. Love, *Theory of Elasticity*, pág. 214, Cambridge.

² Loc. cit. Véase también el trabajo de E. Melan, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 5, pág. 314, 1925.

por la fuerza concentrada P , disminuyen rápidamente al aumentar la distancia al punto de aplicación de la carga, de forma que a distancias superiores a la anchura de la tira la distribución de tensiones en una sección transversal de la misma es prácticamente uniforme. En la tabla siguiente damos algunos valores de σ_x y σ_y calculados suponiendo que la barra es sujetada en el extremo $x = -\infty$ y que el coeficiente de Poisson vale $1/4$.

	$\frac{x}{c} =$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{30}$	0
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	-0,118	-0,992	∞
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	+0,159	+0,511	0,532	0,521	0,500
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	0,110	0,364
	$\frac{x}{c} =$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	1,992	1,118	1,002
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	0,479	0,468	0,489	0,841	0,973
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	0,364	-0,110	-0,049

Las tensiones que en una placa semiindefinida origina una fuerza aplicada a una cierta distancia del borde han sido estudiadas por E. Melan¹.

39. Solución general del problema bidimensional en coordenadas polares. Una vez estudiados diversos ejemplos del problema bidimensional, estamos preparados para obtener la solución general del mismo. La expresión general de la función de tensión ϕ , que satisface la ecuación de compatibilidad (39) es²

$$\begin{aligned}\phi = & a_0 \log r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \log r + d_0 r^3 + a_0' \theta \\ & + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + a_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta \quad (81)\end{aligned}$$

¹ Z. angew. Math. Mech., vol. 12, pág. 343, 1932.

² Esta solución fue dada por J. H. Michell, Proc. London Math. Soc., vol. 31, pág. 100, 1890. Véase también A. Timpe, Z. Math. Physik, vol. 52, pág. 384, 1905, quien dio una solución análoga aplicable al caso de un anillo elíptico, Math. Z., vol. 17, pág. 189, 1923.

Los tres primeros términos del segundo miembro representan la solución correspondiente a una distribución de tensiones, simétrica respecto al origen de coordenadas (véase el § 26). El cuarto término da la distribución correspondiente al caso mostrado en la figura 57. El quinto la correspondiente al caso de la figura 75b. El primer término de la segunda línea es la distribución radial simple para una carga de dirección $\theta = 0$. Los restantes términos de la segunda línea representan la solución para una porción de un anillo circular flectado por una fuerza radial (fig. 46). La combinación de todos los términos de la segunda línea da la solución para el caso de una fuerza que actúa sobre una placa indefinida (§ 38). Soluciones análogas se obtienen también a partir de la tercera línea de la expresión (81), sin otra diferencia que el cambio en $\pi/2$ de la dirección de la fuerza. Los restantes términos de la expresión (81) representan las soluciones para fuerzas normales y tangenciales proporcionales a $\sin n\theta$ y $\cos n\theta$, que obran en los bordes exterior e interior de un anillo circular. Un ejemplo de este tipo referente a la distribución de tensiones alrededor de un pequeño orificio circular ha sido estudiado en el § 32.

En el caso de un sector de anillo circular, las constantes de integración de (81) pueden ser calculadas fácilmente a partir de las condiciones de contorno. Si se trata de un anillo completo la determinación de tales constantes exige a veces un estudio adicional de los desplazamientos. Consideraremos el caso general de un anillo completo y supondremos que las fuerzas normales y tangenciales en los contornos $r = a$ y $r = b$ vienen dadas por las siguientes series trigonométricas

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=a} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \\ (\sigma_r)_{r=b} &= A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin n\theta \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\theta \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= C'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \sin n\theta \quad (a)\end{aligned}$$

en las cuales, las constantes A_0, A_n, B_n, \dots se calculan de la manera usual a partir de la distribución de carga en los bordes (§ 23). Calculando las componentes de la tensión a partir de la expresión (81), mediante las ecuaciones (38), y comparando los valores de estas componentes para $r = a$ y $r = b$ con los valores dados por las ecuaciones (a), obtenemos un número de ecuaciones suficiente para determinar las constantes de integración en todos los casos en que $n \geq 2$. Para $n = 0$, es decir, para todos los términos de la primera línea de la expresión (81) y para $n = 1$, es decir, para los términos de la segunda y tercera línea es necesario un examen más detenido.

Si se toma como función de tensión la que constituyen los términos de la primera línea de la expresión (81), la constante a_0' quedará determinada por la magnitud de las fuerzas tangenciales uniformemente distribuidas en la periferia (§ 37). La repartición de tensiones que nos da el término que contiene el coeficiente d_0 es multiforme (§ 34) y, en el caso de un anillo completo, debemos suponer $d_0 = 0$. Para la determinación de las restantes constantes a_0, b_0 y c_0 disponemos tan sólo de dos ecuaciones:

$$(\sigma_r)_{r=a} = A_0 \quad y \quad (\sigma_r)_{r=b} = A'_0$$

pero podremos obtener la tercera, considerando los desplazamientos, los cuales deben ser una función uniforme de θ . Nuestro anterior estudio nos ha demostrado que esta condición queda cumplida si ponemos $c_0 = 0$ (véase el § 26) y entonces se determinan las otras dos constantes, a_0 y b_0 , de acuerdo con las dos condiciones de contorno arriba consignadas.

Consideremos ahora más detalladamente los términos para los cuales $n = 1$. Para la determinación de las ocho constantes a_1, b_1, \dots, d_1' que figuran en las líneas segunda y tercera de la expresión (81), calcularemos las componentes σ_r y $\tau_{r\theta}$ de la tensión, utilizando esta parte de la función ϕ . Echando mano de las condiciones (a) e igualando los coeficientes correspondientes de $\sin n\theta$ y $\cos n\theta$ para los bordes interior y exterior, llegamos a las ocho ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1')a^{-1} + 2b_1a - 2a_1'a^{-3} &= A_1 \\ (a_1 + b_1')b^{-1} + 2b_1b - 2a_1'b^{-3} &= A_1' \\ (c_1 + d_1')a^{-1} + 2d_1a - 2c_1'a^{-3} &= B_1 \\ (c_1 + d_1')b^{-1} + 2d_1b - 2c_1'b^{-3} &= B_1' \\ 2d_1a - 2c_1'a^{-3} + d_1'a^{-1} &= -C_1 \\ 2d_1b - 2c_1'b^{-3} + d_1'b^{-1} &= -C_1' \\ 2b_1a - 2a_1'a^{-3} + b_1'a^{-1} &= D_1 \\ 2b_1b - 2a_1'b^{-3} + b_1'b^{-1} &= D_1' \end{aligned} \quad (b)$$

Comparando las ecuaciones (b) y (c), se ve que son compatibles solamente si se verifica:

$$\begin{aligned} a_1a^{-1} &= A_1 - D_1 \\ a_1b^{-1} &= A_1' - D_1' \\ c_1a^{-1} &= B_1 + C_1 \\ c_1b^{-1} &= B_1' + C_1' \end{aligned} \quad (d)$$

de las que se desprende

$$a(A_1 - D_1) = b(A_1' - D_1'), \quad a(B_1 + C_1) = b(B_1' + C_1') \quad (e)$$

Las ecuaciones (e) quedan siempre satisfechas si las fuerzas que actúan sobre el anillo están en equilibrio, como se demuestra, escribiendo por ejemplo, que la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre la dirección del eje x es nula; procediendo así encontramos:

$$\int_0^{2\pi} \{[b(\sigma_r)_{r=b} - a(\sigma_r)_{r=a}] \cos \theta - [b(\tau_{r\theta})_{r=b} - a(\tau_{r\theta})_{r=a}] \operatorname{sen} \theta\} d\theta = 0$$

y si sustituimos los valores de σ_r y $\tau_{r\theta}$ que da la expresión (a), llegaremos a la primera de las ecuaciones (e). Análogamente, obtendremos la segunda de las ecuaciones (e) si proyectamos las fuerzas sobre el eje y .

Cuando a_1 y c_1 son determinados a partir de las ecuaciones (d), los dos sistemas de ecuaciones (b) y (c) se hacen idénticos, encontrándose con sólo cuatro ecuaciones para determinar las seis constantes restantes. Las dos ecuaciones adicionales que necesitamos se obtienen considerando los desplazamientos. Los términos de la segunda línea de la expresión (81) representan la función de tensión para una combinación de distribución radial simple y de tensiones en una pieza curva flectada (fig. 46). Sumando¹, entonces, las expresiones generales de los desplazamientos de estos dos casos, a saber, las ecuaciones (g) del § 33 y las (q) del § 31, y sustituyendo

¹ Debe advertirse que debe sustituirse θ por $\theta + (\pi/2)$ si el ángulo es medido a partir de un eje vertical (fig. 52) en lugar de a partir de un eje horizontal (fig. 46).

$a_1/2$ por $-P/\pi$ en las ecuaciones (g) y b_1' por D en las (q), hallamos para los desplazamientos u y v , respectivamente, los siguientes términos multiformes:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \operatorname{sen} \theta \\ \frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} \theta \cos \theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

En el caso de un anillo completo estos términos deben anularse y entonces:

$$\frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} + \frac{2b_1'}{E} = 0$$

o bien

$$b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4} \quad (f)$$

Procediendo en forma análoga con la tercera línea de la expresión (81) obtenemos

$$d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad (g)$$

Las ecuaciones (f) y (g) junto con las (b) y (c) nos bastarán, entonces, para determinar todas las constantes de la función de tensión, representada por la segunda y tercera líneas de la expresión (81).

Llegamos a la conclusión de que en el caso de un anillo completo las condiciones de contorno (a) son insuficientes para determinar la repartición de tensiones y resulta entonces necesario considerar los desplazamientos. Estos deberán responder en el caso de una corona circular completa a la condición de ser de valor único y para satisfacerla se deberá tener:

$$c_0 = 0, \quad b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4}, \quad d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad (82)$$

Se desprende de tales resultados, que las constantes b_1' y d_1' son funciones del coeficiente de Poisson, lo que quiere decir que en un anillo completo la distribución de las tensiones depende de las propiedades elásticas del material. Unicamente en el caso en que a_1 y c_1 desaparezcan, es decir, conforme a las ecuaciones (82), que $b_1' = d_1' = 0$, dicha distribución resultará independiente de las características elásticas. Según resulta de las ecuaciones (d) este caso particular ocurrirá si:

$$A_1 = D_1 \quad y \quad B_1 = -C_1$$

Tal condición se cumplirá cuando se anule la resultante de las fuerzas aplicadas a cada uno de los contornos del anillo. Tomemos, por ejemplo, la componente x de la resultante de las fuerzas aplicadas al borde $r = a$. De (a) se deduce que esta componente es:

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \operatorname{sen} \theta) a d\theta = a\pi(A_1 - D_1)$$

y si desaparece se desprende que $A_1 = D_1$. De igual forma, proyectando las fuerzas en la dirección y , obtenemos $B_1 = -C_1$, cuando la componente de dirección y es nula. Se concluye, pues, que si la resultante de las fuerzas aplicadas a cada contorno es nula, la distribución de tensiones en un anillo completo no depende de las propiedades elásticas del material y ello sin necesidad de que el momento de dichas fuerzas sea nulo.

Las conclusiones obtenidas para un anillo circular siguen siendo válidas para el caso más general del problema bidimensional de un cuerpo multipleno en ϵ conexo.

De las investigaciones generales realizadas por J. H. Michell¹, se sigue que para cuerpos múltiplemente conexos (fig. 81), se obtienen ecuaciones análogas a las (82), que expresan la unicidad de los valores de los desplazamientos para cada uno de los circuitos independientes, tales como las marcadas en la figura por A y B. La distribución tensional en tales cuerpos depende generalmente de las constantes elásticas del material, salvo que la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los contornos se anule². Cuantitativamente, sin embargo, el efecto del valor del módulo sobre la tensión máxima es generalmente muy pequeño, pudiendo ser despreciado en la práctica³. Esta conclusión es de interés práctico, pues, como veremos más adelante, existen ciertos materiales transparentes, tales como el vidrio o la baquelita, en los que pueden determinarse las tensiones mediante métodos ópticos que utilizan luz polarizada (§ 42). En consecuencia, debido a la conclusión anteriormente obtenida, los resultados que se obtienen al experimentar con esos materiales transparentes, pueden ser aplicadas de manera inmediata a cualquier otro material, tal como el acero, a igualdad de condiciones geométricas y estáticas.

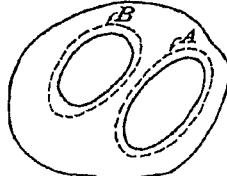


FIG. 81

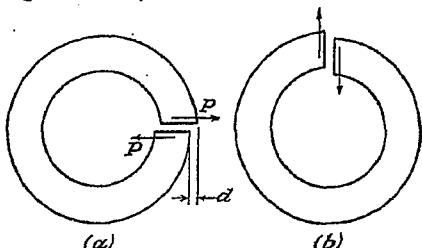


FIG. 82

Como se ha dicho anteriormente (§ 29), el significado físico de las soluciones múltiples queda explicado por la consideración de las tensiones iniciales en un cuerpo múltiplemente conexo. Supongamos, por ejemplo, que la ecuación (f) no se satisface: el correspondiente desplazamiento, indicado en la figura 82a puede producirse mediante un corte en el anillo y la aplicación de las fuerzas P . Si las extremidades del anillo se reúnen luego por soldadura u otro medio, se habrá obtenido un anillo con tensiones iniciales, cuya magnitud depende del desplazamiento inicial d ⁴. Análogo efecto se obtiene cortando el anillo a lo largo de un radio vertical y provocando una traslación inicial de uno de los extremos con respecto al otro, en dirección vertical (fig. 82b). Las tensiones iniciales que se producen en los casos ilustrados por las figuras 82a y 82b corresponden a los términos multiformes de la solución general cuando las ecuaciones (f) y (g) no quedan satisfechas.

La solución completa de estos problemas puede ser obtenida aplicando los resultados del § 31. Los desplazamientos dados por las ecuaciones (g) del § 31 puede verse que presentan el tipo de discontinuidad requerido cuando se aplican a un anillo (véase el problema 4).

¹ Loc. cit.² Debe recordarse que se ha considerado nulas a las fuerzas máximas.³ Un estudio de este tema ha sido realizado por L. N. G. Filon, Brit. Assoc. Advancement Sci. Rept., 1921. Véase E. G. Coker y L. N. G. Filon, Photoelasticity, 6.07 y 6.16.⁴ Un estudio de tales tensiones ha sido realizado por A. Timpe, Z. Math. Physik, vol. 52, págs. 348, 1905. V. Volterra desarrolla una teoría general, Ann. école norm., París, serie 3, vol. 24, págs. 401-517, 1907. Véase también A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4.^a edición, pág. 221, 1927; J. N. Goodier, Proc. Fifth Intern. Congr. Applied Mechanics, 1938, página 129.

40. Aplicaciones de la solución general en coordenadas polares. Como primera aplicación de la solución del problema bidimensional en coordenadas polares, consideremos un anillo circular comprimido por dos fuerzas iguales y opuestas dirigidas según un diámetro¹ (fig. 83a). Comencemos considerando la solución correspondiente a un disco macizo. La realización en él de un orificio circular de radio a crea fuerzas normales y tangenciales distribuidas en la circunferencia del orificio, que pueden ser anuladas superponiendo un sistema de fuerzas iguales y opuesto. Este sistema de fuerzas puede ser expresado mediante los primeros términos de una serie de Fourier y las tensiones en el anillo se determinan entonces aplicando la solución general que estudiamos en el § 39. Estas tensiones, junto con las calculadas para un disco macizo, constituyen las tensiones totales existentes en el anillo. La relación $\sigma_n : 2P/\pi b$ correspondiente a diversos puntos de las secciones transversales mn y m_1n_1 , calculada de esta manera para el caso en que $b = 2a$ es tabulada a continuación².

$r =$	b	$0,9b$	$0,8b$	$0,7b$	$0,6b$	$0,5b$
Teoría exacta						
mn	2,610 -3,788	1,477 -2,185	-0,113 -0,594	-2,012 1,240	-4,610 4,002	-8,942 10,147
Distribución hiperbólica de tensiones						
mn	2,885 -7,036	1,602 -5,010	0,001 -2,482	-2,060 0,772	-4,806 5,108	-8,653 11,18
Distribución lineal de tensiones						
mn	3,90 -8,67	1,71 -5,20	-0,48 -1,73	-2,67 -1,73	-4,86 5,20	-7,04 8,67

En la misma tabla se dan los valores de la tensión, calculada con arreglo a las dos teorías elementales, basadas en las siguientes hipótesis: 1) las secciones rectas se mantienen planas, en cuyo caso las tensiones normales siguen una ley hiperbólica; 2) las tensiones se distribuyen de acuerdo con una ley lineal. La tabla muestra que para la sección recta mn , distante de los puntos de aplicación de la carga P , la distribución hiperbólica de tensiones da resultados casi exactos; el error correspondiente a la tensión máxima es sólo del 3 %. Para la sección recta m_1n_1 los errores de la solución aproximada son mucho mayores. Es interesante advertir que la resultante de las tensiones normales que actúan sobre la sección m_1n_1 es P/π , resultado éste que era de esperar si recordamos la acción de cuña de la carga concentrada ilustrada en la figura 65d. En las figuras 83b y 83c se muestra la distribución de las tensiones normales en las secciones mn y m_1n_1 calculadas por los tres métodos antedichos. El método que se ha aplicado en lo que antecede al caso de dos fuerzas

¹ Véase S. Timoshenko, Bull. Polytech. Inst. Kiev, 1910, y Phil. Mag., vol. 44, pág. 1014, 1922. Véase también K. Wieghardt, Sitzber. Akad. Wiss., Viena, vol. 124, Dpto. II, pág. 1119, 1915.² Se considera una placa de espesor unidad.

iguales y opuestas, puede emplearse para el caso general de un anillo circular sobre sobre el que actúan fuerzas concentradas¹.

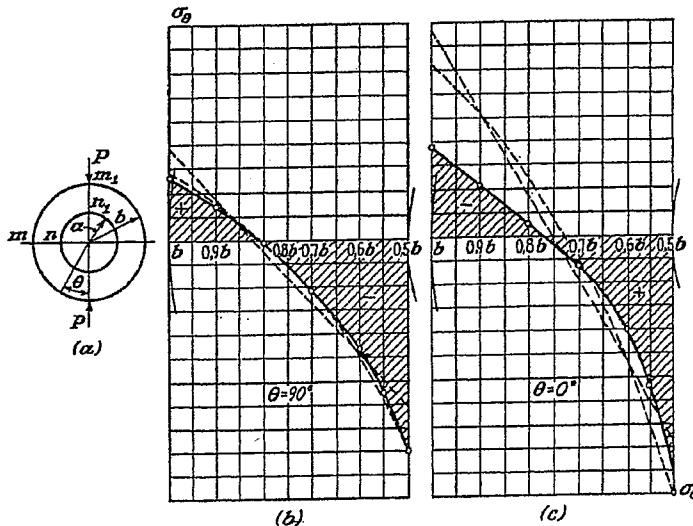


FIG. 83

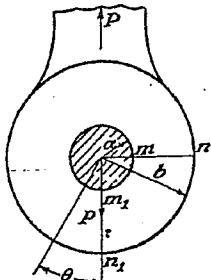


FIG. 84

Como segundo ejemplo consideremos el extremo de una bieleta de ojo² (fig. 84). La distribución de presiones en el borde del orificio depende de la holgura existente entre el pasador y el agujero. Se supone que sobre los contornos interior y exterior sólo actúan presiones normales cuyo valor es³

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi a} \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (\sigma_r)_{r=b} &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi b} \text{ para } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

es decir, las presiones están repartidas en la mitad inferior del borde interno y la mitad superior del borde externo. Una vez desarrollada esta distribución en series trigonométricas pueden calcularse las tensiones haciendo uso de la solución general (81). La figura 85 representa los valores de $\sigma_\theta : P/2a$, correspondientes a las secciones (81).

¹ L. N. G. Filon, The Stresses in a circular ring, *Selected Engineering Papers*, núm. 12, Londres, 1924, publicado por la «Institution of Civil Engineers».

² H. Reissner, Jahrb. wiss. Gesellschaft. Luftfahrt, pág. 126, 1928; H. Reissner y F. Strauch, Ingenieur-Archiv., vol. 4, pág. 481, 1933.

³ P es la fuerza por unidad de espesor de la placa.

ciones m_1 y m_2 para $b/a = 4$ y $b/a = 2^1$. Debe advertirse que como en este caso las fuerzas que actúan sobre cada uno de los contornos tiene resultante nula, la distribución de tensiones depende de las constantes elásticas del material. En los cálculos anteriores se ha tomado el coeficiente de Poisson igual a 0,3.

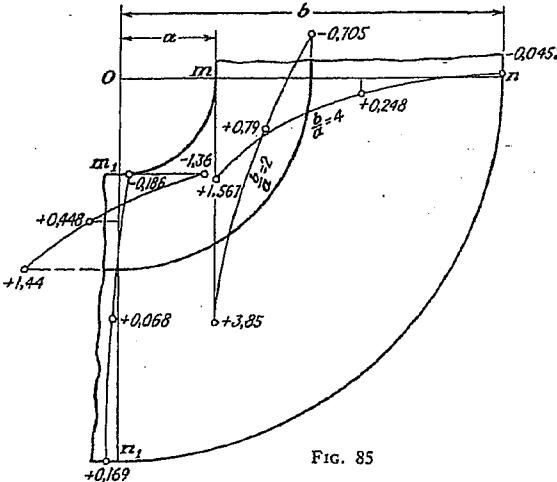


FIG. 85

41. Cuña cargada sobre sus caras. La solución general (81) puede aplicarse también en el caso en que una distribución polinómica de carga actúa sobre las caras de una cuña⁴. Calculando a partir de (81) las componentes de la tensión en la forma usual y tomando solamente los términos r^n con $n \geq 0$ obtenemos las siguientes expresiones para las componentes de la tensión:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= 2b_0 + 2d_0 \cos 2\theta + 2c_1 \sin 2\theta \\ &\quad + 6r(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + c_2 \cos 3\theta + c_3 \sin 3\theta) \\ &\quad + 12r^2(b_2 \cos 2\theta + d_2 \sin 2\theta + c_4 \cos 4\theta + c_5 \sin 4\theta) \\ &\quad \dots \\ &(n+2)(n+1)r^n[b_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta + c_{n+1} \cos(n+2)\theta \\ &\quad + c_{n+2} \sin(n+2)\theta] \\ &\quad \dots \\ \tau_{\theta\theta} &= -d_0 + 2a_1 \sin 2\theta - 2c_2 \cos 2\theta \\ &\quad + \tau(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_2 \sin 3\theta - 6c_2 \cos 3\theta) \\ &\quad + r^2(6b_2 \sin 2\theta - 6d_2 \cos 2\theta + 12a_3 \sin 4\theta - 12c_3 \cos 4\theta) \\ &\quad \dots \\ &+ r^n[n(n+1)b_n \sin n\theta - n(n+1)d_n \cos n\theta + (n+1)(n+2) \\ &\quad a_{n+1} \sin(n+2)\theta - (n+1)(n+2)c_{n+2} \cos(n+2)\theta] \\ &\quad \dots \end{aligned} \tag{83}$$

¹ En lo que se refiere al estudio experimental de las tensiones en bielas de ojo mediante el método fotoelástico, véase E. G. Coker y L. N. G. Filon, *Photoelasticity*, 6,18 y K. Take-mura y Y. Hosokawa, *Rept.*, 12, 1926, Aeronaut. Research Inst. Tokyo Imp. Univ. La distribución de tensiones en bielas de ojo de acero fue estudiada por J. Mathar, *Forschungsarbeiten*, núm. 306, 1928.

² Véase S. Timoshenko, *Teoría de la Elasticidad*, edición rusa, pág. 119, San Petersburgo, 1914.

Cada una de las potencias de r está ligada, como se ve, con cuatro parámetros arbitrarios, de manera que si las tensiones aplicadas en las superficies límites $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ vienen dadas en forma de polinomios de r , quedan determinadas las tensiones de la cuña comprendida entre dichos límites.

Si las condiciones de contorno son, por ejemplo¹:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} &= N_0 + N_1 r + N_2 r^2 + \dots \\ \sigma_{\theta}|_{\theta=\beta} &= N'_0 + N'_1 r + N'_2 r^2 + \dots \\ (\tau_r)|_{\theta=\alpha} &= S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + \dots \\ (\tau_r)|_{\theta=\beta} &= S'_0 + S'_1 r + S'_2 r^2 + \dots\end{aligned}\quad (a)$$

la igualación de los coeficientes de las distintas potencias de r nos da

$$\begin{aligned}2(b_0 + d_0 \alpha + a_2 \cos 2\alpha + c_2 \sin 2\alpha) &= N_0 \\ 6(b_1 \cos \alpha + d_1 \sin \alpha + a_3 \cos 3\alpha + c_3 \sin 3\alpha) &= N_1\end{aligned}\quad (b)$$

y, en general:

$$(n+2)(n+1)[b_n \cos n\alpha + d_n \sin n\alpha + a_{n+2} \cos(n+2)\alpha + c_{n+2} \sin(n+2)\alpha] = N_n$$

con otros tres grupos de ecuaciones para σ_θ en $\theta = \beta$ y $\tau_{r\theta}$ en $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Estas ecuaciones son suficientes para determinar las constantes que entran en la solución (83).

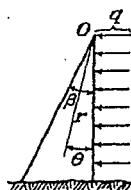


FIG. 86

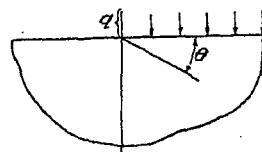


FIG. 87

Consideremos, por ejemplo, el caso presentado en la figura 86. Una presión uniforme q actúa sobre la cara $\theta = 0$, mientras la cara $\theta = \beta$ está libre de fuerzas. Usando solamente las primeras líneas de las expresiones (83) de σ_θ y $\tau_{r\theta}$ las ecuaciones que permiten determinar las constantes b_0 , d_0 , a_2 y c_2 son:

$$\begin{aligned}2b_0 + 2d_0 \beta + 2a_2 \cos 2\beta + 2c_2 \sin 2\beta &= -q \\ 2b_0 + 2d_0 \beta + 2a_2 \cos 2\beta + 2c_2 \sin 2\beta &= 0 \\ -d_0 - 2c_2 &= 0 \\ -d_0 + 2a_2 \sin 2\beta - 2c_2 \cos 2\beta &= 0\end{aligned}$$

de las cuales (escribiendo $k = \operatorname{tg} \beta - \beta$) se deduce

$$c_2 = \frac{q}{4k}, \quad a_2 = -\frac{q \operatorname{tg} \beta}{4k}, \quad d_0 = -\frac{q}{2k}, \quad 2b_0 = -q + \frac{q \operatorname{tg} \beta}{2k}$$

¹ Los términos N_0' , N_1' , S_0 y S_0' no son independientes. Sólo tres de ellos lo son, pues representan la tensión en la punta de la cuña $r = 0$.

Llevando estos valores a las ecuaciones (83) obtenemos¹

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{q}{k} \left(-k + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta - \theta - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{q}{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_r &= \frac{q}{k} \left(-k + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \cos 2\theta \right)\end{aligned}\quad (c)$$

De manera análoga se pueden obtener las componentes de la tensión para cualquier otro término de la distribución polinómica de carga (a).

El método que acabamos de desarrollar para el cálculo de las tensiones en una curva es aplicable a una placa semiindefinida sin más que igualar el ángulo β a π . Las tensiones, por ejemplo, para el caso de la figura 87 se obtienen poniendo $\beta = \pi$ en las ecuaciones (c). Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= -\frac{q}{\pi} \left(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{q}{2\pi} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_r &= -\frac{q}{\pi} \left(\pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)\end{aligned}\quad (d)$$

Problemas

1. Probar la validez de la ecuación (d) del § 25 haciendo uso de la función

$$\phi = x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = r^4 \cos 2\theta$$

2. Estudiar el significado de la función de tensión $C\theta$ en la que C es una constante. Apíquese a un anillo $a < r < b$ y a una placa indefinida.

Un anillo, fijado en $r = a$, es sometido a fuerzas tangenciales en $r = b$ cuya resultante es un par M . Obtener la expresión del desplazamiento circunferencial v en $r = b$, a partir de las ecuaciones (49), (50) y (51).

3. Demostrar que si en el problema de la figura 45 el radio interior a es pequeño comparado con el exterior b , el valor de σ_θ viene dado por

$$\frac{\alpha E}{4\pi} \left(1 - 2 \log \frac{b}{a} \right)$$

siendo, por tanto, negativo y grande en valor absoluto, cuando α es positivo (el corte ha sido cerrado).

¿Cuál es el valor máximo del corte (definido por a), que se puede volver a cerrar sin sobrepasar el límite elástico, siendo $b/a = 10$, $E = 20,7 \times 10^9$ newton/cm² y el límite elástico $27,5 \times 10^9$ newton/cm²?

4. Utilizando los resultados del § 31, escribir las fórmulas que dan las tensiones

¹ A esta solución llegó por otro método M. Levy, *Compt. rend.*, vol. 126, pág. 1235, 1898. Véase también P. Fillunger, *Z. Math. Physik*, vol. 60, 1912. Véase también la aplicación de funciones de tensión de este tipo a ciertas vigas por E. Reissner, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 7, pág. 353, 1940. Los casos correspondientes a cuñas sometidas a otros tipos de carga son estudiados por C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, vol. 1, pág. 125, 1948.

nes, resultantes del cierre del corte paralelo δ de la figura 88a y del deslizamiento δ de la figura 88b en función de δ .

5. Determinar por superposición de los resultados obtenidos con las ecuaciones (62), las tensiones existentes en una placa indefinida en la que existe un orificio, cuando los puntos del infinito de la misma se encuentran en un estado equitensional de valor S . Los resultados obtenidos deberán coincidir con los que dan las ecuaciones (45) cuando $b/a \rightarrow \infty$, $p_1 = 0$ y $p_0 = -S$.

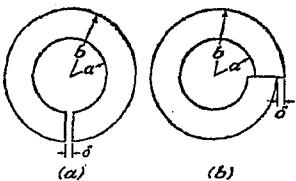


FIG. 88

6. Obtener las expresiones de los desplazamientos correspondientes a las tensiones (62) y comprobar que son uniformes.

7. Expresar en coordenadas cartesianas la función de tensión (a) del § 33 y deducir los valores de σ_x , σ_y , τ_{xy} , que equivalen a la distribución definida por las ecuaciones (66'). Demostrar que esos valores tienden a cero cuando la distancia al punto de aplicación de la fuerza aumenta en una dirección cualquiera.

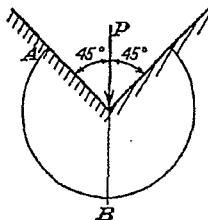


FIG. 89

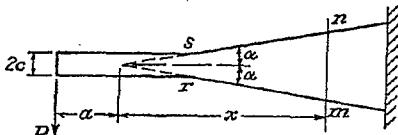


FIG. 90

8. Demostrar que para el caso particular en que $\alpha = \pi/2$, la función de tensión (d) del § 35 satisface la ecuación (69) y estudiar si la distribución (e) de tensiones, del mismo párrafo, tiende a la dada por la teoría elemental de la flexión cuando α es pequeño.

9. Demostrar, calculando las fuerzas resultantes, que la distribución tensional (e) del § 35 corresponde a la aplicación de un par M en el vértice de la cuña.

10. Una fuerza P por unidad de espesor, es aplicada por el canto de un cuchillo sobre el fondo de una entalladura de 90° , tal como se indica en la figura 89. Calcular las tensiones y la fuerza horizontal transmitida a través del arco AB .

11. Obtener la expresión de las tensiones σ_z existentes en la sección mn que se representa en la figura 90. La teoría de las cuñas expuesta en el capítulo presente y la de las ménsulas presentada en el capítulo 3 dan distribuciones de tensión distintas para la unión rs . Comentar este hecho.

12. Determinar cuál es el valor de C en la función de tensión.

$$\phi = C[r^2(\alpha - \theta) + r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \alpha]$$

que satisface las condiciones de contorno existentes en los bordes superior e inferior de la placa triangular de la figura 91. Evaluar las componentes σ_v , τ_{xy} de la tensión en la sección vertical mn . Trazar las curvas para el caso de $\alpha = 20^\circ$ y también, a fin de comparar, la correspondiente a la teoría elemental de la flexión de vigas.

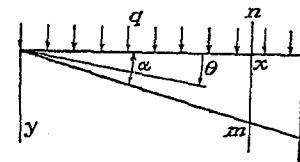


FIG. 91

13. Encontrar qué valor ha de tomar la constante C en la función de tensión

$$\phi = Cr^2(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$$

para que se satisfagan las condiciones

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= 0, & \tau_{r\theta} &= s \operatorname{sen} \theta = \alpha \\ \sigma_\theta &= 0, & \tau_{r\theta} &= -s \operatorname{sen} \theta = -\alpha\end{aligned}$$

correspondientes a la aplicación de fuerzas tangenciales uniformes (de dirección la que se aleja del vértice) sobre cada uno de los bordes de una cuña. Comprobar que sobre el vértice de la cuña no actúa ninguna fuerza concentrada ni ningún par.

14. Obtener una función de tensión del tipo

$$a_3r^3 \cos 3\theta + b_1r^3 \cos \theta$$

que satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= 0, & \tau_{r\theta} &= sr \operatorname{sen} \theta = \alpha \\ \sigma_\theta &= 0, & \tau_{r\theta} &= -sr \operatorname{sen} \theta = -\alpha\end{aligned}$$

en las que s es una constante. Representar la distribución de tensiones para valores positivos de s .

15. Obtener una función de tensión del tipo

$$a_4r^4 \cos 4\theta + b_2r^4 \cos 2\theta$$

que satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= 0, & \tau_{r\theta} &= sr^2 \operatorname{sen} \theta = \alpha \\ \sigma_\theta &= 0, & \tau_{r\theta} &= -sr^2 \operatorname{sen} \theta = -\alpha\end{aligned}$$

en las que s es una constante. Representar la distribución de tensiones.

16. Demostrar que la distribución de tensiones

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right), & \tau_{zy} &= -\frac{p}{\pi} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \\ \sigma_y &= -\frac{p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)\end{aligned}$$

se deduce de la función de tensión [véase la ecuación (a) del § 34]

$$\phi = -\frac{p}{2\pi a} \left((x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - xy \right)$$

y demostrar que es la solución del problema de la placa semiindefinida representada en la figura 92, con los ejes indicados. La carga se extiende indefinidamente hacia la izquierda.

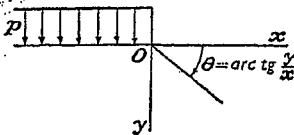


FIG. 92

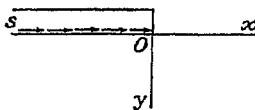


FIG. 93

Estudiar el valor de τ_{xy} : a) cuando nos aproximamos a O a lo largo del eje Ox ; b) cuando nos aproximamos a O a lo largo del eje Oy (la discordancia es causada por la discontinuidad de la carga en O).

17. Demostrar que la función de tensión

$$\phi = \frac{s}{\pi} \left[\frac{1}{2} y^2 \log(x^2 + y^2) + xy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \right]$$

resuelve el problema de la placa semiindefinida representada en la figura 93, en la que la fuerza tangencial uniforme se extiende indefinidamente hacia la izquierda. Demostrar que σ_x se hace infinito cuando nos aproximamos a O en una dirección cualquiera. (Esto es debido a la discontinuidad de la carga en O . Se obtiene un valor finito cuando la carga decrece de forma continua, valor que depende de la curva de variación de la carga en la proximidad de O .)

18. Por superposición, utilizando los resultados del problema número 16, escribir las expresiones de σ_z , σ_y , τ_{xy} para el caso en que actúa una presión constante p sobre el segmento $-a < x < a$, del borde rectilíneo de una placa semiindefinida. Demostrar que la tensión tangencial es

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{\pi} \frac{4axy^2}{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}$$

y examinar cómo varía esta tensión al acercarnos al punto $x=0$, $y=0$ a lo largo: a) del borde; b) de la recta $x=a$.

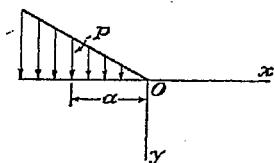


FIG. 94

19. Representar, usando los resultados del problema número 17, la variación de σ_x a lo largo del borde $y=0$, en el caso en que una fuerza tangencial uniforme s se aplica sobre el segmento $-a < x < a$ de ese borde.

20. Demostrar que la función de tensión

$$\phi = -\frac{p}{2\pi a} \left[\left(\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{3} y^3 \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} x^2 y \right]$$

resuelve el problema de la placa semiindefinida de la figura 94, en el que la compresión (que crece linealmente) se extiende indefinidamente hacia la izquierda.

21. Demostrar que si en el problema anterior remplazamos la compresión p por una fuerza tangencial s la función de tensión se convierte en

$$\phi = \frac{s}{2\pi a} \left[xy^2 \log(x^2 + y^2) + (x^2 y - y^3) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 3xy^3 \right]$$

22. Demostrar que las reparticiones de carga representadas en la figura 95, pueden obtenerse por superposición de reparticiones del tipo indicado en la figura 94.

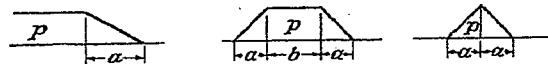


FIG. 95

23. Demostrar que la repartición parabólica representada en la figura 96 viene dada por la función de tensión:

$$-\frac{p}{\pi} \left\{ -\frac{xy^3}{3a^2} \log \frac{r_2^2}{r_1^2} - \left[\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \left(1 - \frac{x^2}{6a^2} + \frac{y^2}{2a^2} \right) \right] \alpha + \frac{2}{3} ax\beta + \frac{1}{2} ay \left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right\}$$

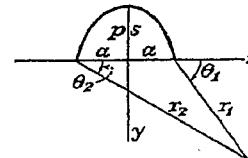


FIG. 96

para el caso de una compresión y por

$$\frac{s}{\pi} \left\{ \frac{y^2}{6a^2} (3a^2 - 3x^2 + y^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{2}{3} ay\beta + \frac{xy}{3a^2} (x^2 - 3y^2 - 3a^2)\alpha + \frac{4xy^2}{3a} \right\}$$

para el de fuerzas tangenciales siendo

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 \\ \alpha = \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}, \quad \beta = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

24. Demostrar que en el problema de la figura 72 existe una tensión de tracción $\sigma_x = 2P/\pi d$ a lo largo del diámetro vertical, salvo en los puntos A y B . Explicar el equilibrio de la porción semicircular ADB , considerando pequeños semicírculos alrededor de los puntos A y B , de igual manera que en las figuras 65c y 65d.

25. Comprobar que la función de tensión

$$\phi = -\frac{P}{\pi} \left\{ \nu r \cos \theta - \frac{1}{4} (1-\nu) r \log r \cos \theta - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta + \frac{d}{4} \log r - \frac{d^2}{32} (3-\nu) \frac{1}{r} \cos \theta \right\}$$

satisfice las condiciones de contorno, para el caso en que una fuerza P es aplicada en el interior de un orificio existente en una placa indefinida, en la que las tensiones son nulas en el infinito. Demostrar que la tensión normal de dirección tangencial en todos los puntos del orificio, salvo en el A (fig. 97), viene dada por

$$\frac{P}{\pi d} [2 + (3-\nu) \cos \theta]$$

Demostrar que los desplazamientos son uniformes.

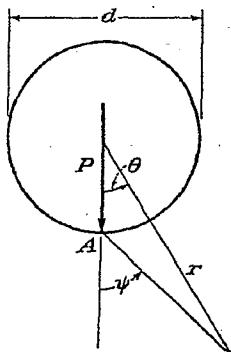


FIG. 97

26. Deducir del problema precedente, integrando, la tensión existente en la periferia del orificio, cuando en su interior actúa una presión p . Contrastar los resultados con las ecuaciones (46).

27. Encontrar la forma general de $f(r)$ en la función de tensión $\theta f(r)$ y escribir las expresiones de las componentes σ_1 , σ_2 , τ_{12} . ¿Puede aplicarse una función tal a un anillo cerrado?

El método fotoelástico

42. **Medida fotoelástica de tensiones.** En las placas estudiadas en los capítulos anteriores el contorno tenía siempre una forma geométrica sencilla, lo que permitió obtener la solución analítica del problema. Si el contorno tiene una forma más compleja llegar a tal solución resulta, sin embargo, muy difícil por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos (que se estudian en el apéndice) o a métodos experimentales, tales como la medida de las deformaciones superficiales mediante extensómetros o el *método fotoelástico*. El fundamento de esta técnica experimental se encuentra en el descubrimiento de David Brewster¹, de que cuando una pieza de vidrio cargada es observada mediante *luz polarizada* transmitida a su través, aparece un dibujo brillantemente coloreado causado por las tensiones que hay en la pieza. Brewster sugirió que este fenómeno podría ser utilizado para medir las tensiones que se presentan en estructuras tales como puentes de albañilería, estudiando mediante luz polarizada el comportamiento de modelos de vidrio, sometidos a diversas condiciones de carga. Maxwell², comparó los esquemas fotoelásticos con las soluciones analíticas y mucho más tarde la sugerencia de Brewster, largo tiempo olvidada, fue adoptada por Wilson³ quien aplicó dicho método al estudio de las tensiones originadas en una viga por una carga concentrada y por Mesnager⁴ en su estudio de los puentes de arco. Más tarde E. G. Coker⁵ desarrolló e hizo gran uso del método, utilizando nitro-

¹ D. Brewster, *Trans. Roy. Soc. (London)*, 1816, pág. 156.

² J. Clerk Maxwell, *Sci. Papers*, vol. 1, pág. 30.

³ C. Wilson, *Phil. Mag.*, vol. 32, pág. 481, 1891.

⁴ A. Mesnager, *Ann. ponts et chaussées*, 4.^o trimestre, pág. 129, 1901; y 9.^a serie, vol. 16, pág. 135, 1913.

⁵ Las numerosas publicaciones del profesor Coker se encuentran reunidas en sus trabajos: *Gen. Elec. Rev.*, vol. 23, pág. 870, 1920 y *J. Franklin Inst.*, vol. 199, pág. 289, 1925. Véase también el libro de E. G. Coker y L. N. Filon, *Photo-elasticity*, Cambridge University Press, 1931.

celulosa como material para los modelos. Posteriormente se ha hecho uso también de la baquelita y más recientemente de la fosterita¹.

En lo que sigue (donde vamos a hablar solamente del equipo fotoelástico más sencillo²), consideraremos la luz ordinaria como un conjunto de oscilaciones que se producen en todas las direcciones normales a la

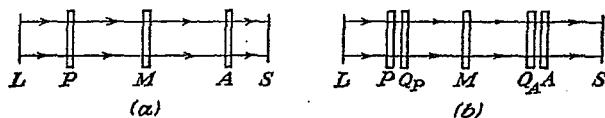


FIG. 98

recta que define geométricamente el rayo luminoso. Por reflexión del mismo sobre una placa de vidrio, una de cuyas caras está pintada de negro, o por transmisión a través de un *polarizador* (un *prisma de Nicol* o una *lámina de Polaroid*) se obtiene un haz de luz *polarizada*, en mayor o menor grado, en el cual predomina la vibración transversal correspondiente a una dirección determinada. El plano que contiene esta dirección y la del rayo se llama *plano de polarización*. Este tipo de luz, que en lo que sigue elegiremos ademáns monocromática, es la que se utiliza en la investigación fotoelástica de las tensiones.

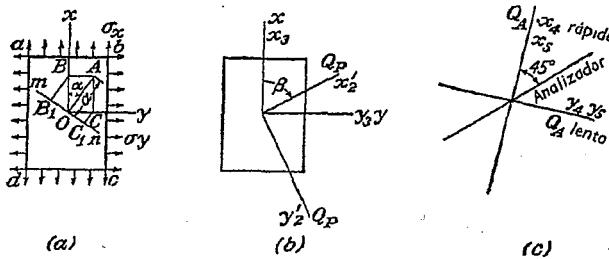


FIG. 99

La figura 98a representa el diagrama de un *polaríscopio plano*. El haz de luz originado en *L* pasa a través del polarizador *P*, a continuación a través del modelo transparente *M*, que modifica la luz de acuerdo con el estado tensional en que se encuentra, después a través del analizador *A* (otro polarizador) llegando finalmente a la pantalla *S* sobre la cual se forman las franjas de interferencia (figs. 100 a 104).

¹ M. M. Leven, *Proc. Soc. Expl. Stress Analysis*, vol. 6, núm. 1, pág. 19, 1948.

² Un tratamiento más completo puede encontrarse en los libros: *Handbook of Experimental Stress Analysis*, 1950; M. M. Frocht, *Photoelasticity*, 2 vols., 1941 y 1948; y en el libro citado en la nota 5.

Sea *abcd* (fig. 99a) un pequeño elemento de la cara izquierda del modelo *M*, en el cual las direcciones de las tensiones principales σ_x y σ_y se toman vertical y horizontal por conveniencia. Un rayo, normal al plano de papel, y polarizado en el plano *OA* (fig. 99) llega desde *P*. La vibración es armónica y puede representarse por la elongación *s* de dirección *OA*

$$s = a \cos pt \quad (a)$$

en la que *p* es 2π veces la frecuencia, que depende del color de la luz, y *t* el tiempo.

La oscilación (a) contenida en el plano *OA* puede descomponerse en sus componentes según *Ox* y *Oy* que serán:

$$x = a \cos \alpha \cos pt, \quad y = a \sin \alpha \cos pt \quad (b)$$

El efecto de las tensiones principales σ_x y σ_y , que actúan en el punto *O* de la placa, es alterar las velocidades con que las componentes (b) se propagan a través de la misma. Llamando v_x y v_y , a las velocidades de propagación de la luz en los planos *Ox* y *Oy*, respectivamente y *h* al espesor de la placa, los tiempos necesarios para que las componentes de la vibración la atraviesen serán:

$$t_1 = \frac{h}{v_x}, \quad t_2 = \frac{h}{v_y} \quad (c)$$

Por lo tanto las oscilaciones (b) después de haber atravesado la placa vendrán expresadas por las ecuaciones:

$$x_1 = a \cos \alpha \cos p(l - t_1), \quad y_1 = a \sin \alpha \cos p(t - t_2) \quad (d)$$

lo que indica que al abandonar la placa existe una diferencia de fase entre las dos componentes que viene dada por $\Delta = p(t_2 - t_1)$. Experimentalmente se ha encontrado que para un determinado material, a una temperatura dada, y con luz de una cierta longitud de onda la diferencia de fase es proporcional a la diferencia entre las tensiones principales y al espesor de la placa. Tal proporcionalidad es expresada por la siguiente ecuación:

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} \cdot C(\sigma_x - \sigma_y) \quad (e)$$

en la que λ es la longitud de onda (en el vacío) y *C* la constante fotoelástica, que se determina experimentalmente y que depende de la longitud de onda de la luz así como del material y de la temperatura a la que éste se encuentra.

El analizador *A* transmite solamente las vibraciones o las componentes de las mismas que se encuentran en su plano de polarización. Si este plano es normal al del polarizador¹ y quitamos el modelo, el analizador *A*

¹ Se dice entonces que polarizador y analizador están «cruzados».

no dejará pasar ninguna luz a la pantalla. Consideremos ahora lo que pasa cuando el modelo está presente. Las componentes (*d*) a su llegada al analizador vendrán expresadas por las ecuaciones

$$x_2 = a \cos \alpha \cos \psi, \quad y_2 = a \sin \alpha \cos (\psi - \Delta) \quad (f)$$

ya que la diferencia de fase Δ se conserva en el camino de *M* a *A*. Aquí ψ es igual a pt más una constante.

Las componentes de las vibraciones (*f*) que son transmitidas por el analizador (cuyo plano de polarización es representado por *mn* en la fig. 99a) serán la proyección de las mismas sobre la dirección *Om*, cuyo valor es:

$$x_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cos \psi, \quad -y_2 \cos \alpha = -\frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cos (\psi - \Delta)$$

y la vibración resultante según *mn* será

$$\frac{1}{2} a \sin 2\alpha [\cos \psi - \cos (\psi - \Delta)] = -a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \sin \left(\psi - \frac{\Delta}{2} \right)$$

El factor $\sin (\psi - \Delta/2)$ de la misma representa una función armónica del tiempo cuya amplitud es:

$$a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \quad (g)$$

Se sigue de esta expresión, que la luz llegará a la pantalla a menos que $\sin 2\alpha = 0$ ó $\sin \Delta/2 = 0$. Centrándonos en el primer caso, el hecho de que $\sin 2\alpha = 0$ indica que las direcciones de las tensiones principales son paralelas (perpendiculares) a las direcciones de polarización de *P* y *A*. Los rayos que pasen por tales puntos de *M* se extinguirán y los puntos correspondientes de la pantalla *S* aparecerán en negro. Estos puntos se encuentran generalmente en una o más curvas indicadas por líneas oscuras en *S*. Tales curvas se llaman «isoclinas». Trazando en numerosos puntos de ellas pequeños segmentos paralelos a los ejes de *P* y *A* tendremos registradas las direcciones de las tensiones principales en esos puntos. Dando distintas orientaciones a *P* y *A* (que se mantienen cruzados) obtendremos nuevas isoclinas y los segmentos indicadores de las direcciones principales cubrirán el campo tensional (igual que hacen las limaduras de hierro en el campo de un imán), siendo entonces posible trazar curvas tangentes en cada punto a los ejes principales de las tensiones. Tales curvas reciben el nombre de «isostáticas».

El otro caso en que se produce oscuridad en un punto es cuando en él $\sin \Delta/2 = 0$. Entonces $\Delta = 2n\pi$ siendo $n = 0, 1, 2, \dots$ Cuando $\Delta = 0$ las tensiones principales son iguales y los puntos donde eso ocurre se llaman puntos isótropos. Cuando $n = 1$ tenemos una franja de primer orden, para $n = 2$ una franja de segundo orden, etc., recibiendo todas estas líneas el nombre de isocromáticas por presentarse, cuando se utiliza

luz blanca, como bandas coloreadas. De la ecuación (*e*) se deduce que el valor de $\sigma_x - \sigma_y$ es doble para una isocromática de segundo orden que para una de primero, triple para una de tercer orden, etc. En consecuencia, para evaluar la diferencia entre las tensiones principales, es necesario conocer tanto el orden de la isocromática como la diferencia correspondiente a la isocromática de primer orden llamada *valor de franja*.

El valor de franja para un cierto material puede determinarse ensayando a tracción una lámina rectangular del mismo. Puesto que el estado tensional que se obtiene es uniforme toda la pieza se presentará igualmente iluminada. Para una carga nula, la imagen que se obtiene en la pantalla será oscura, iluminándose al aumentar la carga hasta que vuelve a oscurecerse cuando la diferencia de tensiones (igual aquí a la tracción aplicada) se approxima al valor de franja. Un aumento ulterior de la carga

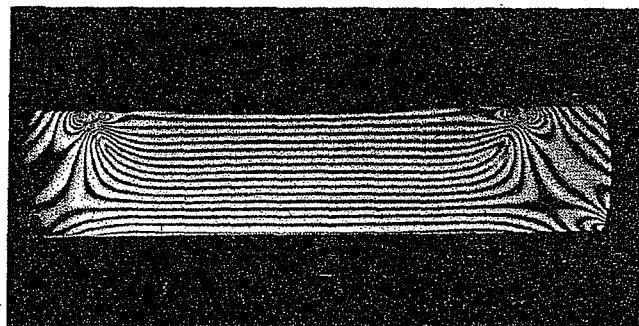


FIG. 100

vuelve a iluminar la imagen hasta que para una tensión igual al doble del valor de franja vuelve a oscurecerse, repitiéndose sucesivamente este proceso de iluminación y oscurecimiento si seguimos aumentando la carga.

Estos mismos ciclos se darán en un punto cualquiera de un campo tensional no uniforme al aumentar la carga, supuesto que la diferencia de tensiones en el punto llegue a ser un múltiplo del valor de franja. A estos ciclos de un punto individual corresponde, visto el campo tensional en su totalidad, el movimiento gradual de las franjas (incluyendo la entrada de otras nuevas) al aumentar la carga. En consecuencia, el orden de las isocromáticas puede determinarse observando su movimiento y contándolas.

Una placa estrecha, por ejemplo, sometida a flexión simple dará el conjunto de isocromáticas que se reproduce en la figura 100, indicando las franjas paralelas que en todas las secciones verticales, alejadas de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de tensiones es la misma. Si observamos la imagen de la pantalla mientras aumentamos gradual-

Mientras la carga observaremos que aparecen nuevas isocromáticas en los bordes longitudinales de la pieza que se mueven hacia el eje neutro, de manera que se van espesando cada vez más. En el eje neutro se presenta, naturalmente, la isocromática de orden cero ($n = 0$).

43. Polariscopio circular. Hemos visto que, para un determinado ángulo, el polariscopio plano muestra junto con las isocromáticas las isoclínas correspondientes a ese ángulo. En la figura 100, por lo tanto, debieran aparecer en negro todos aquellos puntos en los que las direcciones de las tensiones principales coinciden con las orientaciones de polarizador y analizador. La figura 100 fue obtenida en realidad con un *polariscopio circular*, el cual es una modificación del *polariscopio plano* diseñada con el fin de eliminar las isoclínas¹. Su esquema es el mostrado en la figura 98b, y corresponde al de la figura 98a, sin más que añadir las dos *lámimas cuarto de onda* Q_P y Q_A . Una lámina cuarto de onda es una placa cristalina, con dos ejes de polarización, que afecta a la luz de igual forma que un modelo en estado tensional uniforme, introduciendo una diferencia de fase Δ , dada por (f), pero cuyo espesor es tal que $\lambda = \pi/2$. Usando las ecuaciones (f) con ese valor de Δ y eligiendo para a , ángulo formado por el plano de polarización de P y uno de los ejes de Q_P , el valor de 45° , obtenemos las siguientes expresiones para las componentes de la luz que sale de Q_P .

$$x_2' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \psi, \quad y_2' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \psi \quad (h)$$

Aquí x_2' corresponde al eje «rápido» de la lámina cuarto de onda. La elongación expresada por estas ecuaciones (en las que ψ es de la forma $pt + +$ constante para un punto cualquiera del rayo luminoso) corresponde a un movimiento circular, por lo que una luz tal se dice que está *circularmente polarizada*.

Llamando β al ángulo formado por x_2' y la dirección de x_2 en el modelo (fig. 99b), Δ a la diferencia de fase producida por el elemento sometido a tensión y habida cuenta de que las componentes (h) corresponden a los ejes de polarización de Q_P , tendremos las expresiones siguientes para las componentes de la luz, producidas por x_2' , que salen del modelo.

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \beta \cos \psi, \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos (\psi - \Delta) \quad (i)$$

¹ Si se gira el polarizador y el analizador, manteniéndolos cruzados, las isocromáticas se mantendrán estacionarias mientras que las isoclínas se moverán. Si tal rotación se realiza rápidamente, las isoclínas dejarán de verse. Este mismo efecto es el conseguido por el polariscopio circular por métodos puramente ópticos.

y para las componentes debidas a y_2'

$$x_3 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \sin \psi, \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \beta \sin (\psi - \Delta) \quad (j)$$

Sumando las componentes de las ecuaciones (i) y (j) tenemos para la luz que sale del modelo

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \psi, \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin (\psi - \Delta) \quad (k)$$

donde $\psi' = \psi + \beta$.

Antes de examinar la influencia de Q_A y A conviene representar las ecuaciones (k) como superposición de dos movimientos circulares. Llamando ψ'' a $\psi' - (\Delta/2)$ y b a $a/\sqrt{2}$ las ecuaciones (k) toman la forma

$$x_3 = b \cos \left(\psi'' + \frac{\Delta}{2} \right) = b \left(\cos \frac{\Delta}{2} \cos \psi'' - \sin \frac{\Delta}{2} \sin \psi'' \right) \quad (l)$$

$$y_3 = b \sin \left(\psi'' - \frac{\Delta}{2} \right) = b \left(\cos \frac{\Delta}{2} \sin \psi'' - \sin \frac{\Delta}{2} \cos \psi'' \right) \quad (m)$$

que representa, en la figura 99b (en la que el rayo normal al papel entra en él), la superposición de un movimiento circular de radio $b \cos (\Delta/2)$ y sentido el de las agujas del reloj y otro de radio $b \sin (\Delta/2)$ y sentido contrario al de las agujas del reloj.

Podemos ahora demostrar que si el eje de polarización de A forma 45° con los de Q_A uno de estos movimientos circulares es transmitido hasta la pantalla S , mientras que el otro es interceptado consiguiéndose así el resultado que buscamos de eliminación de las isoclínas. Las componentes x_3 e y_3 de las ecuaciones (l) y (m) tienen las direcciones de las tensiones principales del modelo. Un cambio de los ejes del movimiento circular no hace más que alterar el ángulo de fase ψ'' en una constante. En consecuencia el movimiento circular puede ser expresado empleando los ejes de Q_A mediante las componentes

$$x_4 = c \cos \psi, \quad y_4 = c \sin \psi \quad (n)$$

en las que ψ tiene de nuevo la forma $pt + +$ cte. Identificando x con el eje «rápido» de Q_A tendremos que a la salida de esta lámina cuarto de onda

$$x_5 = c \cos \psi, \quad y_5 = c \sin \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) = -c \cos \psi \quad (o)$$

donde ψ ha cambiado de nuevo en una constante. Si colocamos ahora el analizador de forma que su eje forme con Ox_4 y Oy_4 un ángulo de 45° (fig. 99c) la resultante de las componentes (o) a lo largo de él será

$$c \cos 45^\circ \cos \psi - c \cos 45^\circ \cos \psi$$

lo cual es *cero*, con lo que el movimiento circular de sentido, el de las agujas del reloj, es interceptado.

Considerando de la misma manera la parte de las ecuaciones (*l*) y (*m*) correspondientes al movimiento de sentido contrario al de las agujas del reloj, es decir,

$$x_4' = -c \operatorname{sen} \psi, \quad y_4' = -c \cos \psi \quad (n')$$

tendremos que la elongación transmitida por el eje del analizador es:

$$-c \cos 45^\circ \operatorname{sen} \psi - c \cos 45^\circ \operatorname{sen} \psi$$

siendo su amplitud

$$\sqrt{2} c \quad 0 \quad \sqrt{2} b \operatorname{sen} \frac{\Delta}{2} \quad 0 \quad a \operatorname{sen} \frac{\Delta}{2} \quad (p)$$

si recordamos que *b* es $a/\sqrt{2}$ y que *a* es la amplitud a la salida del polarizador. Comparando este resultado con el (*g*) del polariscopio plano observamos que el factor $\operatorname{sen} 2\alpha$ está ausente, con lo que sobre la pantalla aparecerán las isocromáticas pero no las isoclinas. En este estudio no se ha tenido en cuenta la absorción de luz por el aparato.

Si *l* es cero también lo es la amplitud (*p*), lo que quiere decir que si no hay modelo o si éste no está cargado, la pantalla aparecerá en negro. Tenemos entonces instalado el instrumento para la observación en campo

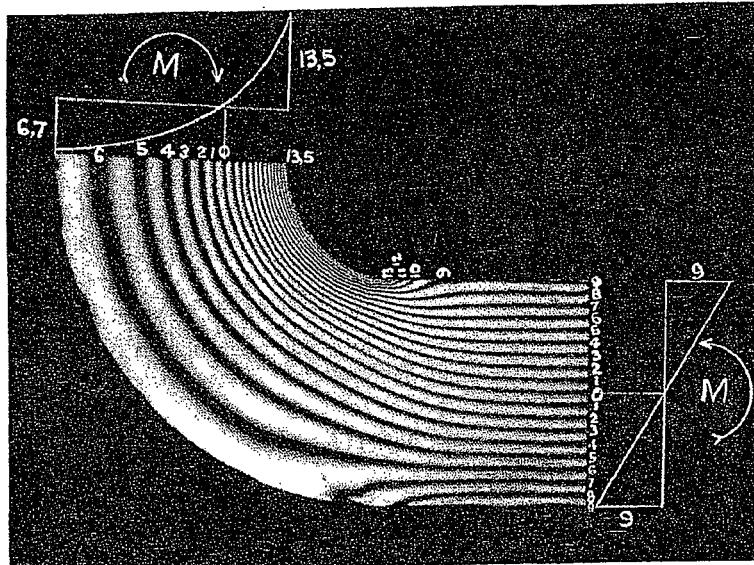


FIG. 101

oscuro. Si giramos el analizador 90° respecto a Q_A lo tendremos, por el contrario, instalado para la observación en campo iluminado, en la que aparecen como franjas iluminadas las que antes se presentaban en negro. Este mismo efecto se consigue en el polariscopio plano colocando paralelamente, en lugar de normalmente, los ejes de polarizador y analizador.

44. Ejemplos de determinación fotoelástica de las tensiones. La aplicación del método fotoelástico ha permitido obtener resultados de suma importancia en el estudio de las concentraciones de tensiones que

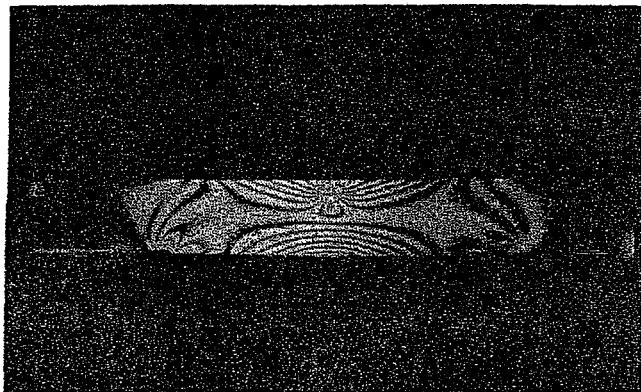


FIG. 102

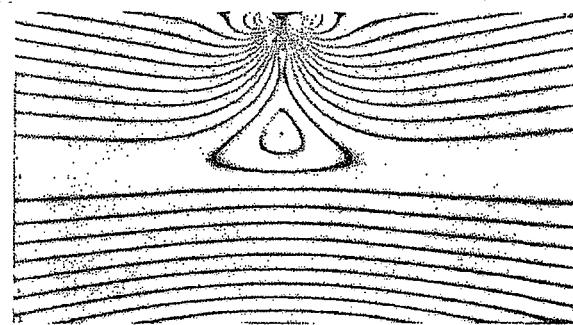


FIG. 103

aparecen en el contorno de los orificios y ángulos entrantes. En tales casos la tensión máxima se produce en el borde, y como una de las tensiones principales se anula en el contorno libre, aquélla puede obtenerse directamente por el método óptico.

La figura 101 muestra la distribución de isocromáticas para una barra curva¹, flectada por los pares M , cuyo diámetro exterior es tres veces el interior. El orden de las isocromáticas marcado en el extremo derecho de la pieza, presenta un máximo de valor 9 en la parte superior e inferior de la barra y el regular espacio de las mismas, en esta zona, corresponde

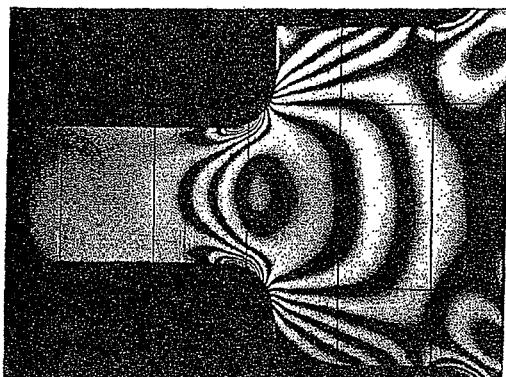


FIG. 104

a la distribución lineal de las tensiones flectoras. El orden de las isocromáticas, marcado en el extremo superior, muestra la distribución tensional en la parte curva de la barra (el modelo completo se continúa por encima de este extremo superior, que es su eje de simetría), indicando la existencia de una tensión de compresión en el borde interior igual a 13,5 en valor relativo y de una tracción en el borde exterior igual a 6,7. Estos valores concuerdan muy bien, proporcionalmente, con los resultados teóricos «exactos» dados en la última línea de la tabla del § 27.

Las figuras 102 y 103 se refieren al caso de una viga flectada bajo la acción de una carga concentrada que se aplica en su punto medio². La mayor densidad de franjas oscuras indica tensiones elevadas en la proximidad del punto de aplicación de la carga. El número de franjas que atraviesan las secciones transversales decrece desde el centro hacia los extremos de la pieza, a consecuencia de la correspondiente disminución del momento flector.

La figura 104 representa la distribución de tensiones en una placa de dos anchuras diferentes, sometida a una tracción axial e indica que la máxima tensión aparece en la terminación de la transición entre las partes de distinta sección. La relación de la tensión máxima a la tensión media en

¹ E. E. Weibel, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 56, pág. 637, 1934.

² M. M. Frocht, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 53, 1931.

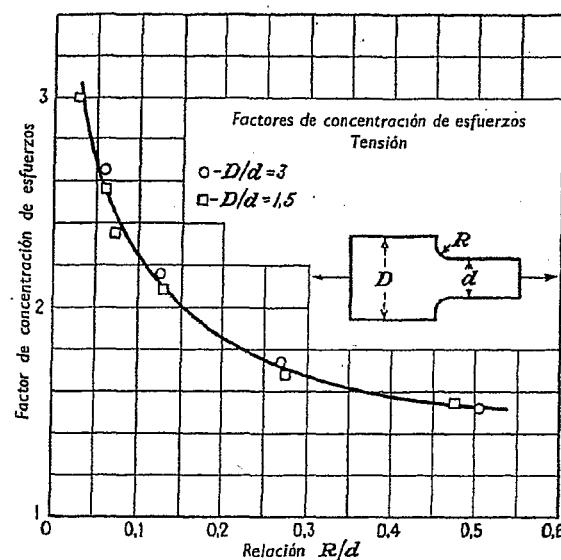


FIG. 105

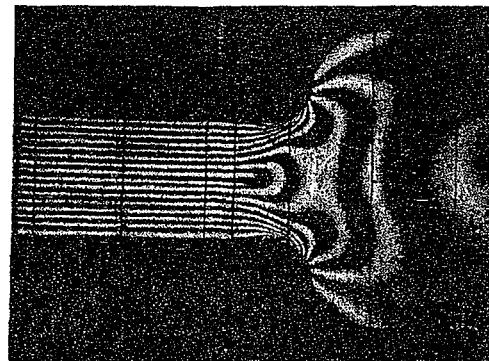


FIG. 106

la sección más estrecha de la placa, es llamada *factor de concentración de tensiones*. Su valor depende de la relación del radio R , de la curva de transición al ancho, d , de la placa en su parte más angosta. La figura 105 contiene diversos valores del factor de concentración obtenidos experimentalmente¹ y muestra que la tensión máxima aumenta rápidamente al disminuir la relación R/d , de forma que cuando $R/d = 0,1$, la tensión máxima supera al doble de la tensión media. La figura 106 representa la misma placa sometida a la acción de un par de fuerzas aplicado en su extremo y en el plano medio de la placa, y en la figura 107 se consignan los valores del factor de concentración para este caso.

45. Determinación de las tensiones principales. El polariscopio corriente, que hemos estudiado, determina solamente la dirección de las tensiones principales y su diferencia. Cuando se desean conocer las

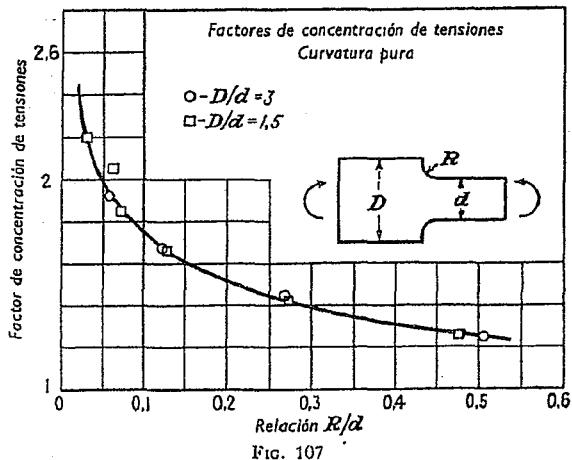


FIG. 107

tensiones principales, en el interior del modelo o en zonas del contorno sobre las que actúa una carga desconocida, es preciso acudir bien al cálculo, bien a la realización de otras medidas. Para la ejecución de uno u otro se han propuesto y utilizado muchos métodos, de algunos de los cuales se va a hacer una breve descripción².

La suma de las tensiones principales puede determinarse midiendo los cambios de espesor de la placa³ como se deduce de la relación:

$$\Delta h = \frac{h\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (a)$$

¹ Véase el trabajo citado de Weibel.

² Para mayor información véanse las referencias de la nota.

³ Este método fue sugerido por Mesnager, *loc. cit.*

En consecuencia, en todo punto donde deseemos determinar las tensiones podremos evaluar $\sigma_x + \sigma_y$ realizando la medida de Δh , para cuya ejecución se han desarrollado diversos tipos de extensómetros¹. Asimismo, podemos realizar tal medida fotografiando las franjas de interferencia que se obtienen al aplicar el modelo sobre un espejo plano. Tales franjas son causadas por la lámina de aire de espesor variable, que sigue las variaciones de espesor del modelo, contenida entre modelo y espejo.

De otra parte, la suma de las tensiones principales cumple una ecuación diferencial [ecuación (b) del § 16] que es también satisfecha por la deflexión de una membrana, una película de jabón por ejemplo, uniformemente estirada, de forma que si hacemos corresponder los valores de contorno, la deflexión representa $\sigma_x + \sigma_y$ según una cierta escala². En muchos casos los valores en el contorno de $\sigma_x + \sigma_y$ pueden ser determinados mediante los diagramas fotoelásticos. Estos métodos permiten determinar $\sigma_x - \sigma_y$ solamente, pero en un borde libre una de las tensiones σ_y , por ejemplo, se anula por lo que $\sigma_x - \sigma_y$ y $\sigma_x + \sigma_y$ valen lo mismo. Asimismo, si en un punto del contorno es aplicada una carga normal conocida, esta carga constituye una de las tensiones principales por lo que la medida fotoelástica de la diferencia de las mismas basta para determinar su suma. La misma ecuación diferencial es satisfecha por la distribución de potencial eléctrico en el flujo de corriente a través de una placa, lo que puede ser el fundamento de un método eléctrico de determinación de las tensiones³. Asimismo las tensiones principales pueden ser también determinadas mediante métodos puramente fotoelásticos haciendo uso de instrumentos más elaborados que los descritos en los §§ 42 y 43. Como alternativa a estos procedimientos experimentales se han desarrollado métodos numéricos que son estudiados en el apéndice.

46. Fotoelasticidad tridimensional. Los modelos usados en los ensayos fotoelásticos ordinarios son cargados a la temperatura ambiente y son elásticos, de forma que los esquemas ópticos desaparecen al retirar la carga. De otra parte, puesto que la luz ha de atravesar todo el espesor del modelo, la interpretación de los esquemas fotoelásticos es posible solamente cuando el modelo se encuentra en un estado tensional plano (las tensiones, entonces, son casi constantes a través del espesor). Si éste no es el caso, como en una distribución de tensiones tridimensionales, el efecto óptico es la integral del estado tensional a lo largo del camino recorrido por el rayo⁴.

Estas dificultades han sido resueltas mediante un método basado en

¹ Véase M. M. Frocht, *Photoelasticity*, vol. 2.

² J. P. Den Hartog, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 11, pág. 156, 1931.

³ Véase R. D. Mindlin, *J. Applied Phys.*, vol. 10, pág. 282, 1931.

⁴ Véase el trabajo de D. C. Drucker en el *Handbook of Experimental Stress Analysis*, donde tiene un estudio completo sobre la fotoelasticidad tridimensional.

las observaciones de Brewster y Clerk Maxwell¹ de que los materiales gelatinosos, tales como el colapes (*isinglass*), secados bajo carga, conservan los esquemas fotoelásticos al ser descargados. Asimismo se ha encontrado que resinas tales como la baquelita y la fosterita, cargadas estando calientes, poseen la misma propiedad al ser descargadas. La explicación² se encuentra en que la estructura de estos materiales consta de un esqueleto elástico

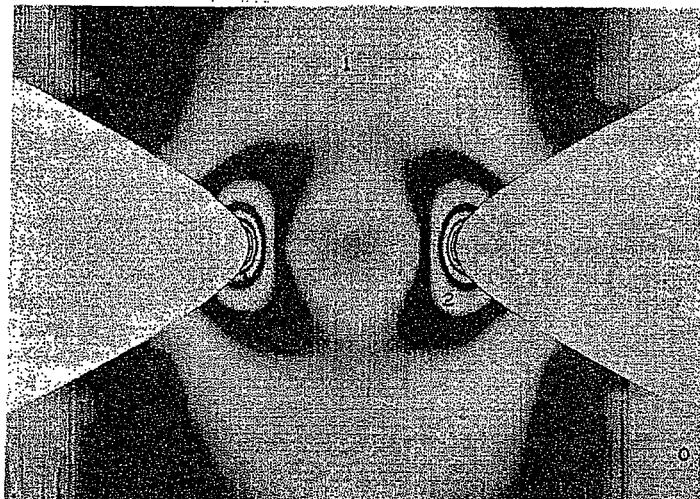


FIG. 108

fuerte (una malla molecular) rellenada por una masa de moléculas poco ligadas que se fluidiza al calentar. Cuando el modelo caliente es cargado, el esqueleto elástico es el que sostiene la carga. Al enfriar el modelo la masa «semilíquida» se «congelea» haciendo que el esqueleto conserve la deformación al descargar el modelo. El efecto óptico se conserva, en consecuencia, y no es alterado al cortar la pieza en trozos. Un modelo tridimensional puede ser cortado en rebanadas, cada una de las cuales puede ser estudiada con el polaríscopio. El estado tensional en tales rebanadas no es plano, pero se sabe que las componentes de la tensión τ_{zz} , τ_{yy} y σ_z no afectan al rayo de dirección z , normal a la lámina. La figura 108 muestra la repartición de franjas obtenida en la rebanada central de un eje redondo (de fosterita) en el que existe una muesca hiperbólica³. La tensión máxima deducida de este diagrama fotoelástico, difiere del valor teórico en un

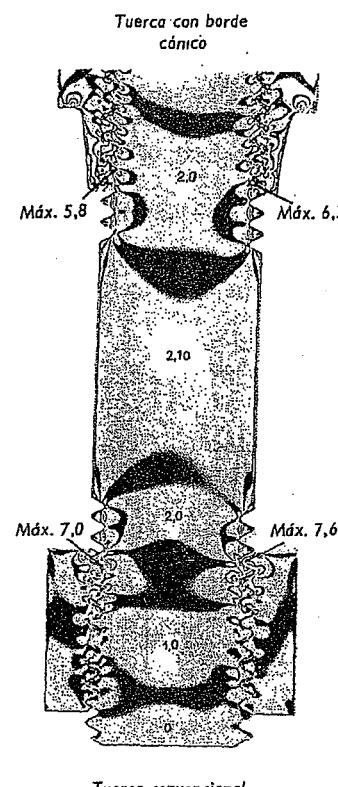


FIG. 109

2 ó 3 %. La figura 109 representa las franjas obtenidas sobre un modelo (de baquelita) de una unión por pasador y tuerca⁴. La tuerca inferior es del tipo convencional. La superior de borde cónico muestra una menor concentración de tensiones que la convencional.

¹ M. Hetényi, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 10, pág. A-93, 1943. Resultados correspondientes a otros tipos de tuercas pueden encontrarse en este trabajo.

² J. Clerk Maxwell, *Sci. Papers*, vol. 1, pág. 30.

³ M. Hetényi, *J. Applied Phys.*, vol. 10, pág. 295, 1939.

⁴ Leven, *loc. cit.*

Métodos elasto-energeticos



47. Energía potencial elástica. Cuando una barra uniforme es sometida a una tracción, las fuerzas que actúan sobre sus extremos realizan una cierta cantidad de trabajo al estirarla. Si sobre el elemento de la figura 110, actúa solamente la tensión normal σ_x la fuerza y extensión

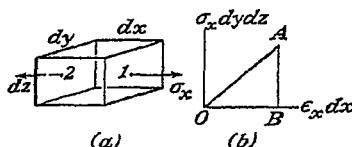


FIG. 110

correspondientes serán $\sigma_x dy dz$ y $\epsilon_x dx$. La relación existente entre estas dos cantidades es la representada por una recta tal como la OA de la figura 110b, y el trabajo hecho durante la deformación viene dado por el área $\frac{1}{2}(\sigma_x dy dz)(\epsilon_x dx)$ del triángulo OAB. Llamando dV a este trabajo tendremos:

$$dV = \frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (a)$$

siendo evidente que este mismo trabajo es realizado sobre todos los elementos de la barra suponiendo que el volumen de todos ellos sea el mismo. Sentado esto, surge la pregunta siguiente: ¿en qué tipo de energía se convierte este trabajo?

En el caso de un gas, la compresión adiabática del mismo eleva su temperatura. Si es una barra de acero lo que comprimimos adiabáticamente, la temperatura se eleva también aunque en pequeña cantidad. El calor correspondiente, sin embargo, representa solamente una pequeñís-

sima fracción del trabajo realizado por las fuerzas de compresión¹; fracción ésta tan pequeña, que a efectos prácticos puede ser despreciada. En consecuencia, podemos aceptar que el trabajo, realizado no se emplea en la generación de calor, siendo todo él almacenado en el elemento en forma de la llamada *energía de deformación* o *energía potencial elástica*. Se supone que el elemento sigue siendo elástico y que no es generada energía cinética.

Las mismas consideraciones se aplican cuando sobre el elemento actúan las seis componentes de la tensión σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} (fig. 3). La conservación de la energía requiere que el trabajo realizado no dependa del orden en que se apliquen las fuerzas, sino sólo de su magnitud final. De no ser así, al cargar siguiendo un cierto orden y descargar siguiendo otro orden, al que corresponde un trabajo mayor, obtendríamos una energía libre neta después de hacer recorrer al elemento un ciclo completo.

El cálculo del trabajo realizado, es más sencillo si las fuerzas o tensiones aumentan todas simultáneamente con igual velocidad. Entonces, la relación entre cada fuerza y el desplazamiento correspondiente sigue siendo lineal como en la figura 110b, de forma que el trabajo realizado por todas esas fuerzas será:

$$dV = V_0 dx dy dz \quad (b)$$

donde

$$V_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (c)$$

es la energía de deformación correspondiente a la unidad de volumen.

En la discusión precedente se consideró que las tensiones eran las mismas en las caras opuestas del elemento y que no existían fuerzas místicas. Estudiemos ahora el trabajo hecho sobre el elemento, cuando las tensiones varían a través del cuerpo y las fuerzas místicas no son nulas. Considerando la fuerza $\sigma_x d_y d_z$ que actúa sobre la cara 1 del elemento de la figura 110a, el trabajo que realiza al desplazarse el desplazamiento u será $\frac{1}{2}(\sigma_x u)_1 d_y d_z$, donde el subíndice 1 indica que las funciones σ_x y u deben ser evaluadas en el punto 1. De igual forma, la fuerza $\sigma_x d_y d_z$ que actúa sobre la cara 2 realizará el trabajo $-\frac{1}{2}(\sigma_x u)_2 d_y d_z$, siendo el trabajo total para las dos caras

$$\frac{1}{2}[(\sigma_x u)_1 - (\sigma_x u)_2] dy dz$$

que en el límite es:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u) dx dy dz \quad (d)$$

Calculando ahora el trabajo realizado por las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz} sobre las caras 1 y 2 y sumándolo a (d), tendremos la siguiente expresión para el trabajo hecho sobre esas dos caras por las tres componentes de la tensión:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) dx dy dz$$

¹ De no ser así habría una diferencia sustancial entre los módulos elásticos adiabáticos e isotermos cuando en la realidad tal diferencia es muy pequeña. Véase G. F. C. Searle, *Experimental Elasticity*, capítulo 1.

donde v y w son las componentes del desplazamiento en las direcciones y y z . El trabajo realizado sobre los otros dos pares de caras puede hallarse de igual manera, encontrándose para el trabajo total hecho por las tensiones sobre las caras la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v + \tau_{yz} w + \tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z w + \tau_{xz} u + \tau_{yz} v) \right] dx dy dz \quad (e)$$

El trabajo realizado por las fuerzas mísicas será:

$$\frac{1}{2} (Xu + Yv + Zw) dx dy dz \quad (f)$$

y el trabajo total será la suma de (e) y (f) que diferenciando (e) queda así:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \\ & \quad \left. + v \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + Y \right) + w \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + Z \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

Observando que las cantidades que multiplican a las componentes de la tensión son $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ [ecuaciones (2)] y dado que los paréntesis que afectan a u, v y w son nulos, como veremos en las ecuaciones (127) del § 76, resulta que el valor total del trabajo realizado sobre el elemento viene dado por (b) y (c). Estas fórmulas siguen, pues, siendo válidas aun cuando el estado tensional no sea uniforme y no se consideren nulas las fuerzas mísicas.

Mediante la ley de Hooke, ecuaciones (3) y (6), podemos expresar V_o , que viene dado por la ecuación (c), en función de las tensiones solamente. Entonces

$$\begin{aligned} V_o = & \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \\ & + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (84) \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos usar las ecuaciones (11) y expresar V_o en función de las deformaciones. Resulta:

$$V_o = \frac{1}{2} \lambda e^2 + G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \quad (85)$$

siendo

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

De la expresión (85), se deduce fácilmente que V_o es siempre positivo.

Como puede mostrarse fácilmente usando la ecuación (85), la derivada de V_o respecto a cualquier componente de la deformación, es igual

a la componente correspondiente de la tensión. Tomando por lo tanto la derivada respecto a ϵ_x y, usando la ecuación (11) se obtiene

$$\frac{\partial V_o}{\partial \epsilon_x} = \lambda e + 2G\epsilon_x = \sigma_x \quad (g)$$

En el caso de un estado tensional plano $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ y de (84) resulta:

$$V_o = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \quad (86)$$

La energía potencial elástica total V de un cuerpo deformado, se obtiene integrando la energía de deformación por unidad de volumen V_o :

$$V = \iiint V_o dx dy dz \quad (87)$$

Representa el trabajo total realizado durante el proceso de carga contra las fuerzas interiores. Si imaginamos que el cuerpo consta de un gran número de partículas unidas entre sí por resortes, V representaría el trabajo realizado para estirar y contraer tales resortes. Usando las ecuaciones (84) u (85) podemos expresarlo en función de las componentes de la tensión o de la deformación, como veremos en las aplicaciones que se desarrollan a continuación.

La cantidad de energía potencial elástica almacenada por unidad de volumen, es usada a veces como base para determinar la tensión límite a la cual se produce la rotura¹. Con el objeto de armonizar tal criterio con el hecho de que los materiales isotropos son capaces de soportar grandes presiones hidrostáticas sin ceder, se ha propuesto considerar dividida en dos partes la energía de deformación: una, la correspondiente al cambio de volumen, y la otra, que sería debida a la deformación, y que es la única que se toma en cuenta para determinar la resistencia².

Como lo expresa la ecuación (8), la modificación de volumen es proporcional a la suma de las tres componentes normales de la tensión, de manera que si esta suma es cero, la deformación es tal que el volumen no cambia. Cada una de dichas componentes puede ser, a su vez, dividida en dos sumandos

$$\sigma_x = \sigma_x' + p, \quad \sigma_y = \sigma_y' + p, \quad \sigma_z = \sigma_z' + p$$

en las cuales

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \Theta \quad (h)$$

es decir, que

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$$

de manera que, según se ha expresado, la solicitud $\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$ producirá únicamente una distorsión y la variación de volumen dependerá solamente³ de la tracción.

¹ En el libro de S. Timoshenko, *Strength of Materials*, vol. 2, se estudian las diversas teorías de la resistencia.

² M. T. Huber, *Casopismo technizne*, Lwów, 1904. Véase también R. V. Mises, *Göttingen Nachrichten, Math.-phys. Klasse*, 1913, pág. 582, y F. Schleicher, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 5, pág. 199, 1925.

³ Las componentes tangenciales de la tensión $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ producen deformaciones tangenciales pero no alteran el volumen.

uniforme p . De la ecuación (8), resulta que la parte de la energía total que corresponde al cambio de volumen es:

$$\frac{ep}{2} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (i)$$

Restando esta expresión de la (84) y usando la identidad

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = -\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

podemos expresar la parte de energía total debida a la distorsión bajo la forma:

$$\gamma_0 - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (88)$$

En el caso de una tracción simple de dirección x , tan sólo σ_x es distinta de cero y la energía de deformación que corresponde a la distorsión resulta entonces, de acuerdo con la fórmula (88) $\frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_x^2$. En el caso de una solicitud de esfuerzo cortante aplicada, por ejemplo, a los planos xx e yz , τ_{xy} es la única tensión diferente de cero y la energía correspondiente a la distorsión es $\frac{1}{2G} \cdot \tau_{xy}^2$. Admitiendo como cierto que para cualquier sistema de tensiones la rotura ocurre cuando la energía de deformación correspondiente a la distorsión alcanza un cierto límite (característico de cada material), la relación entre el valor crítico para el caso de una tensión de tracción sola y para el de una tensión tangencial también sola se obtiene mediante la ecuación

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2$$

de donde resulta

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_x = 0,557 \sigma_x \quad (j)$$

Para el caso del acero los experimentos muestran¹ que la relación entre los límites de fluidez registrados para tracción y esfuerzo cortante, concuerda muy bien con la dada por (j).

De la consideración de la energía potencial elástica, se deduce que el principio de Saint-Venant es una consecuencia de la conservación de la energía². De acuerdo con tal principio, dos distribuciones de carga diferentes con igual resultante, que actúen sobre una pequeña parte de un sólido elástico, producen el mismo estado tensional, salvo en los puntos próximos a los de aplicación de la carga. Si una de estas distribuciones es cambiada de signo y combinada con la otra las tensiones resultantes serán, pues, nulas salvo en los puntos citados. Las cargas combinadas se equilibrarán y el principio en cuestión es, de hecho, equivalente a la afirmación de que una distribución de fuerzas de resultante nula, que actúe sobre una pequeña parte de un sólido elástico, produce solamente tensiones locales.

¹ Véase los trabajos de W. Lode, *Z. Physik*, vol. 36, pág. 913, 1926, y *Forschungsarbeiten*, núm. 303, Berlín, 1928.

² J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 24, pág. 235, 1937, *J. Applied Phys.*, vol. 13, pág. 167, 1942.

Una distribución tal realiza un trabajo durante su aplicación puesto que se produce una deformación de la región cargada. Fijemos en posición y orientación un elemento de superficie de esta región; si a indica el orden de magnitud (por ejemplo, el valor medio) de la fuerza por unidad de área y a es una dimensión lineal representativa (por ejemplo, el diámetro) de la zona cargada, las componentes de la deformación son del orden de (p/E) y los desplazamientos de la parte cargada del orden de pa/E . El trabajo realizado es, entonces, del orden de $pa^2 \cdot pa/E = p^2 a^3/E$. Puesto que de otra parte, componentes de la tensión de orden p implican una energía potencial cuyo valor por unidad de volumen es del orden de p^2/E , se deduce que el trabajo realizado se extiende solamente a un volumen del orden de a^3 , lo que concuerda con el enunciado del principio de Saint-Venant.

En lo dicho se ha supuesto que el cuerpo era de forma rígida que obedecía a la ley de Hooke. Esta última restricción puede ser salvada haciendo que E represente a la pendiente de la curva tensión-deformación del material. Si, por el contrario, el cuerpo no es de forma rígida, como ocurre, por ejemplo, con una viga muy delgada o con una fina membrana cilíndrica, la aplicación de una distribución equilibrada de fuerzas puede dejarse sentir a distancias superiores a varias veces el espesor o el diámetro.

La discusión anterior puede ser repetida sin cambios para el caso de una carga de resultante no nula, siempre que exista un elemento de superficie fijo dentro de o próximo a la parte cargada. Por tanto, si un material deformable está pegado a uno rígido, la presión aplicada a una pequeña parte del primero, próxima al empalme, producirá solamente tensiones locales¹.

48. Principio de los trabajos virtuales. El principio de los trabajos virtuales se emplea, con ventaja, en la solución de diversos problemas de elasticidad. Para el caso de una partícula, dicho principio establece que si un punto material, sometido a un conjunto de fuerzas, se encuentra en equilibrio, el trabajo total de esas fuerzas es nulo en toda *traslación virtual*. Se considera como traslación virtual de una partícula que puede moverse libremente en cualquier dirección, todo desplazamiento infinitesimal de la misma. Si δu , δv , δw son las componentes de una traslación virtual en las direcciones x , y , z , respectivamente, y ΣX , ΣY , ΣZ , las sumas de las proyecciones de las fuerzas en las mismas direcciones, el principio de los trabajos virtuales permite escribir las siguientes ecuaciones:

$$\delta u \Sigma X = 0, \quad \delta v \Sigma Y = 0, \quad \delta w \Sigma Z = 0$$

ecuaciones que quedan satisfechas para cualquier traslación virtual si se verifica:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

Llegamos, así, a las conocidas ecuaciones del equilibrio del punto-masa.

Al aplicar el principio de los trabajos virtuales, las fuerzas que actúan se consideran como constantes durante una traslación virtual y si alguna de las fuerzas, que obran en un punto dado, fuese una reacción elástica, por ejemplo, la reacción de una barra en el caso de la articulación de una

¹ Goodier, *J. Applied Phys.*, loc. cit.

viga de celosía, admitiremos que los desplazamientos virtuales son tan pequeños, como para que la variación de su intensidad o dirección pueda ser despreciada.

Un cuerpo elástico, en reposo bajo la acción de fuerzas de superficie y máticas, constituye un conjunto de partículas, cada una de las cuales está sometida a un sistema de fuerzas en equilibrio. En toda traslación virtual, el trabajo total de las fuerzas, que actúan sobre una partícula, es nulo, y por lo tanto, también lo será el trabajo de la totalidad de las fuerzas del sistema. En el caso de un cuerpo elástico, se entenderá por *traslación virtual*, todo pequeño desplazamiento compatible con la condición de continuidad de la materia que lo constituye y con los vínculos que pudiesen ser establecidos para los puntos de su superficie. Si, por ejemplo, se establece como condición la inmovilidad de una parte de la superficie del cuerpo, dígase la extremidad empotrada de una viga, o bien un desplazamiento muy pequeño, la traslación virtual para esa parte debe ser igual a cero.

Vamos a examinar, como ejemplo de aplicación, el caso de una placa sometida a un estado plano de tensión. Denotaremos con u y v a las componentes de los desplazamientos efectivos debidos a las cargas y con δu y δv a las componentes de una traslación virtual que se efectúa a partir de la posición de equilibrio de la pieza bajo carga, las cuales son cantidades infinitamente pequeñas arbitrarias que satisfacen a las condiciones de continuidad propias de una deformación elástica, es decir, funciones continuas de x e y .

Cualquiera que sea el sistema de traslaciones que se lleve a efecto, el trabajo realizado para vencer las acciones mutuas entre las partículas es igual a la energía de deformación almacenada por el cuerpo, esto es, la energía potencial elástica que corresponde a aquellas traslaciones. Por lo tanto, si en lugar de u y v tomamos δu y δv , el trabajo realizado para vencer los vínculos internos será igual a la energía de deformación consiguiente a $u + \delta u$, $v + \delta v$, menos la energía de la deformación que corresponde a u y a v . La influencia de los desplazamientos virtuales δu , δv en las componentes de la deformación, se expresa por:

$$\delta\epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta\epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta\gamma_{xy} = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}$$

y la respectiva modificación de la energía potencial de deformación por unidad de volumen se desprende de la ecuación (85)

$$\delta V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \epsilon_x} \delta\epsilon_x + \frac{\partial V_0}{\partial \epsilon_y} \delta\epsilon_y + \frac{\partial V_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta\gamma_{xy} = \sigma_x \delta\epsilon_x + \sigma_y \delta\epsilon_y + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} \quad (a)$$

La variación de energía potencial de deformación correspondiente a todo el cuerpo se obtendrá mediante $\iint \delta V_0 dx dy$, en la cual la integración se debe extender al área total de la placa de espesor unidad.

Como ha quedado establecido, la variación de la energía potencial de deformación es la medida del trabajo efectuado para vencer las acciones mutuas que se ejercen entre las partículas. Para obtener este trabajo se debe cambiar el signo de aquélla, así que la expresión del trabajo efectuado durante la traslación virtual por las fuerzas que estamos considerando será:

$$-\iint \delta V_0 dx dy \quad (b)$$

Al efectuar el cálculo del trabajo de las fuerzas exteriores durante una traslación virtual, debe tomarse en cuenta las fuerzas aplicadas en el contorno de la placa, así como las fuerzas máticas. Designemos por \bar{X} e \bar{Y} a las componentes de las fuerzas que obran en el contorno de la pieza, referidas a la unidad de área; para el trabajo de estas fuerzas, durante el desplazamiento virtual, cuyas componentes son δu y δv , puede, sin más, escribirse la expresión:

$$\int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds \quad (c)$$

en la cual, la integración se extiende a todo el contorno, s , de la placa.

De una manera análoga, se tendrá como trabajo de las fuerzas máticas

$$\iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy \quad (d)$$

en donde X e Y son las componentes de la fuerza ponderal específica, y, como en el caso anterior, la integración se extiende a toda el área de la placa.

La condición que expresa la nulidad del trabajo total, desarrollado durante la traslación virtual, resulta de las expresiones (b), (c) y (d) y es la siguiente:

$$\int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds + \iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy - \iint \delta V_0 dx dy = 0 \quad (89)$$

Como se ha dicho al aplicar el principio de los trabajos virtuales, las fuerzas dadas y los componentes de las tensiones reales que corresponden a la posición de equilibrio, se consideran como constantes durante la traslación virtual, así que el signo δ puede colocarse fuera de las integrales en la ecuación (89). Procediendo de tal forma y cambiando todos los signos, se tendrá la nueva expresión:

$$\delta [\iint V_0 dx dy - \iint (X u + Y v) dx dy - \int (\bar{X} u + \bar{Y} v) ds] = 0 \quad (89')$$

en la cual, el primer término entre corchetes es la energía potencial de deformación. La suma de los términos segundo y tercero representa la energía potencial que corresponde a las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, si para el estado en que no existe tensión alguna ($u = v = 0$) dicha energía potencial se toma igual a cero. Finalmente la expresión completa, dentro de corchetes, representa la *energía potencial total del sistema*.

Por tanto, si se comparan diversos valores de los desplazamientos u y v , puede establecerse que las traslaciones que realmente tienen lugar en un sistema elástico, sujeto a la acción de fuerzas exteriores dadas, son aquellas que anulan la variación

de la energía potencial total del sistema, para cualquier desplazamiento virtual que ocurra a partir de la posición de equilibrio, esto es, que la energía potencial total del sistema en la posición de equilibrio es un máximo o un mínimo. Para ver si se trata de un máximo o de un mínimo, es necesario tener en cuenta los infinitésimos de orden superior que habían sido despreciados en el desarrollo anterior¹. Si de esa manera puede demostrarse que para toda traslación virtual la variación de la energía potencial total del sistema es positiva, se tratará de un caso de mínimo, y si ella fuera siempre negativa, se estaría en el caso de un máximo. Toda traslación virtual del sistema que lo aparte del equilibrio estable exige un trabajo positivo, de manera que, en este caso, la energía potencial total del sistema en equilibrio es un *mínimo*.

En el caso de un estado elástico tridimensional, se puede llegar fácilmente a una ecuación análoga a la (89).

El principio de los trabajos virtuales es particularmente útil para determinar la deformación que en un cuerpo elástico origina un sistema de fuerzas determinado. Unos cuantos ejemplos, cuya solución es ya muy conocida, ilustran la aplicación del método de que se trata.

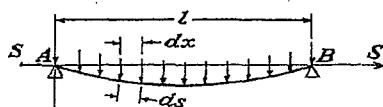


FIG. 111

Consideremos, en primer lugar, la deflexión de un hilo elástico y perfectamente flexible (fig. 111) estirado por la acción de las fuerzas S entre dos puntos fijos, A y B , y sujeto a una carga vertical distribuida, de intensidad q . Suponemos que la tensión inicial del hilo es suficientemente grande como para que el incremento de esfuerzo tractor, debido a la extensión adicional durante la flexión, pueda despreciarse. Por lo tanto, el aumento que experimenta la energía potencial de deformación a causa de la flexión, se obtiene multiplicando la intensidad inicial de la fuerza S de tracción por el alargamiento que experimenta el hilo. Considerando las coordenadas conforme indica la figura 111, se tiene:

$$ds - dx = dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

El alargamiento del hilo está dado por

$$\int_0^l (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

¹ Las despreciamos al suponer que en todo desplazamiento virtual permanecían constantes las fuerzas y las tensiones.

y el incremento correlativo de la energía potencial de deformación será, según queda dicho:

$$\frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (e)$$

Si añadimos a la expresión (e) la energía debida a la tensión inicial, se obtendrá la energía potencial total. En este caso el principio de los trabajos virtuales conduce a la ecuación siguiente, que corresponde a la (89):

$$\int_0^l q \delta y dx - \frac{S}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 0 \quad (f)$$

Calculando la subintegral que figura en el segundo término se tendrá:

$$\int_0^l \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 2 \int_0^l \frac{dy}{dx} \delta \frac{dy}{dx} dx = 2 \int_0^l \frac{dy}{dx} d \frac{\delta y}{dx} dx$$

y la integración por partes, nos da, teniendo en cuenta que en las extremidades del hilo $\delta y = 0$:

$$2 \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d \delta y}{dx} dx = 2 \left(\left. \frac{dy}{dx} \delta y \right|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx \right) = -2 \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx$$

Sustituyendo en la ecuación (f), se obtendrá:

$$S \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx + \int_0^l q \delta y dx = 0$$

o bien

$$\int_0^l \left(S \frac{d^2 y}{dx^2} + q \right) \delta y dx = 0$$

Esta ecuación únicamente quedará satisfecha para cualquier traslación virtual δy , si se verifica

$$S \frac{d^2 y}{dx^2} + q = 0 \quad (g)$$

Se llega, así, a la conocida ecuación diferencial de un hilo cargado verticalmente.

El principio de los trabajos virtuales puede aplicarse no solamente para establecer la ecuación diferencial de la línea de deflexión como en el ejemplo anterior, sino también para el cálculo directo de las flechas¹. Tomemos por ejemplo, una barra prismática libremente apoyada en sus extremos y cargada con una fuerza P (fig. 112). En el caso más general, la expresión

¹ Véase S. Timoshenko, *Bull. Inst. Polit.*, Kiew, 1909, y también su libro *Strength of Materials*, 2.^a edición, vol. 2, pág. 44, 1941.

de la curva de deflexión de una barra en las condiciones indicadas puede representarse en forma de serie trigonométrica, como sigue

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (h)$$

expresión, que llevada a la conocida fórmula que da la energía potencial de deformación de una barra prismática flectada¹, nos conduce a

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \quad (k)$$

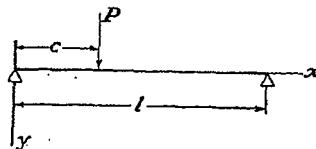


FIG. 112

Para obtener un desplazamiento virtual respecto a la línea elástica real, damos a un coeficiente a_n , de la serie (h), un incremento infinitesimal δa_n . Entonces

$$\delta y = \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (l)$$

La correspondiente variación de la energía potencial de deformación, resultará entonces, con arreglo a la ecuación (k):

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n \quad (m)$$

y el trabajo de la fuerza exterior P durante el desplazamiento virtual (l) será,

$$P \delta a_n \sin \frac{n\pi c}{l} \quad (n)$$

De acuerdo con las expresiones (m) y (n), la ecuación del trabajo virtual resulta entonces:

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n - P \delta a_n \sin \frac{n\pi c}{l} = 0$$

y de ahí:

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c}{l}}{EI\pi^4 n^4}$$

¹ Véase: S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 2.^a edición, vol. 1, pág. 297, 1940.

Sustituyendo en la serie (h) el valor hallado, llegamos a la ecuación de la curva de deflexión

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4} \quad (o)$$

Esta serie converge rápidamente, así que para obtener una aproximación satisfactoria basta calcular unos pocos términos. Si, por ejemplo, la carga P actúa en la mitad de la luz ($c = l/2$), la flecha que ella origina será:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right)$$

Con el primer término de la serie, se tiene para la flecha:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48.7EI}$$

El valor exacto para el coeficiente del denominador es 48, lo que nos dice que el error cometido al considerar solamente el primer término de la serie resulta del 1,5 % aproximadamente.

En el estudio precedente, consideraremos desplazamientos en una sola dirección que representaremos por la serie (h). Un método semejante puede aplicarse a casos más complicados. Consideremos una placa rectangular de bordes fijos (fig. 113), sobre la que actúan fuerzas másicas paralelas a su propio plano. La expresión general de los desplazamientos u y v puede tomar la forma de las series

$$u = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (p)$$

$$v = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

en las que cada término se anula en el borde, quedando así satisfechas las condiciones de contorno. Para calcular los coeficientes A_{mn} y B_{mn} procedemos como en el ejemplo de la viga y tomamos los desplazamientos virtuales en la forma:

$$\delta u = \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\delta v = \delta B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

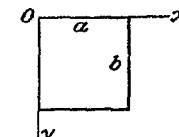


FIG. 113

quedando entonces la ecuación (89) de los desplazamientos virtuales así:

$$\begin{aligned} \delta A_{mn} \iint X \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \delta A_{mn} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \iint V_o dx dy \\ \delta B_{mn} \iint Y \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \delta B_{mn} \frac{\partial}{\partial B_{mn}} \iint V_o dx dy \end{aligned} \quad (q)$$

Para el cálculo de la energía potencial elástica en el caso tensional plano, hacemos uso de la fórmula

$$V = \iint V_o dx dy = \iint \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{E}{4(1+\nu)} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy \quad (r)$$

Sustituyendo en ella¹

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_m \sum_n \frac{m\pi}{a} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_m \sum_n \frac{n\pi}{b} B_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_m \sum_n \frac{n\pi}{b} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad + \sum_m \sum_n \frac{m\pi}{a} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

y realizando las integraciones, resulta:

$$V = \frac{\pi^2 Eab}{4} \left[\sum_m \sum_n A_{mn}^2 \left(\frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{n^2}{b^2} \right) + \sum_m \sum_n B_{mn}^2 \left(\frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{m^2}{a^2} \right) \right]$$

Sustituyendo esta expresión de la energía de deformación en las ecuaciones (q) obtenemos:

$$\begin{aligned} A_{mn} \frac{Eab\pi^2}{4} \left(\frac{m^2}{a^2(1-\nu^2)} + \frac{n^2}{2b^2(1+\nu)} \right) &= \int_0^a \int_0^b X \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ B_{mn} \frac{Eab\pi^2}{4} \left(\frac{m^2}{2a^2(1+\nu)} + \frac{n^2}{b^2(1-\nu^2)} \right) &= \int_0^a \int_0^b Y \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

¹ Derivar una serie de Fourier término a término no es siempre correcto. Las condiciones suficientes para que lo sea, que son cumplidas por el problema presente, pueden verse en *Modern Analysis*, de E. T. Whittaker y G. N. Watson, pág. 169.

Vemos que para cualquier tipo de fuerzas másicas se pueden calcular fácilmente los coeficientes de las expresiones (ϕ) obteniéndose la solución completa del problema.

Puede usarse también, el método de los desplazamientos virtuales para la obtención de soluciones aproximadas de problemas bidimensionales, en los que se conocen los desplazamientos en el contorno. Supongamos que los desplazamientos u y v pueden ser expresados con suficiente exactitud mediante las series

$$\begin{aligned} u &= \phi_o(x,y) + \sum_m a_m \phi_m(x,y) \\ v &= \psi_o(x,y) + \sum_m b_m \psi_m(x,y) \end{aligned} \quad (s)$$

que satisfacen las condiciones de contorno antedichas. Para ello podemos elegir, por ejemplo, funciones ϕ_o y ψ_o que en los bordes den el valor requerido de los desplazamientos y funciones ϕ y ψ (el resto de ellas) que se anulen en el contorno. Para el cálculo de los coeficientes $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$, usamos el principio de los trabajos virtuales (89). Tomando los desplazamientos virtuales en la forma

$$\delta u_m = \delta a_m \phi_m(x,y), \quad \delta v_m = \delta b_m \psi_m(x,y) \quad (t)$$

podemos escribir tantas ecuaciones de equilibrio, semejantes a las ecuaciones (q) del ejemplo anterior, como coeficientes existen en la serie (s). Estas ecuaciones serán lineales respecto a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ y resueltas nos darán los valores de los coeficientes de las series (s), series que representan la solución aproximada del problema¹.

Al usar el principio de los trabajos virtuales (89), se supone que la energía de deformación por unidad de volumen V_o viene expresada en función de las componentes de la deformación [ecuación (r)], las cuales se obtienen a partir de las expresiones (s). El cálculo de la variación de la energía potencial elástica puede simplificarse si observamos que

$$\begin{aligned} \delta V &= \iint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy \\ &= \iint \left[\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \delta v + \tau_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta v \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Integrando por partes y observando que δu y δv se anulan en el contorno resulta

$$\delta V = - \iint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta v \right] dx dy$$

¹ Este método de resolución de problemas de elasticidad fue propuesto por W. Ritz, quien lo aplicó con éxito en el estudio de la flexión de placas rectangulares. Véase *J. reine u angew. Math.*, vol. 135, págs. 1-61. Véase también *Gesammelte Werke*, pág. 192, París, 1911.

Tomando para los desplazamientos virtuales las expresiones (i) obtenemos las ecuaciones necesarias para calcular los coeficientes $a_1 \dots a_m$, $b_1 \dots b_m$ de la forma siguiente:

$$\delta a_m \int \int X \phi_m(x,y) dx dy = -\delta a_m \int \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \phi_m(x,y) dx dy$$

$$\delta b_m \int \int Y \psi_m(x,y) dx dy = -\delta b_m \int \int \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \psi_m(x,y) dx dy$$

o bien

$$\int \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) \phi_m(x,y) dx dy = 0$$

$$\int \int \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) \psi_m(x,y) dx dy = 0 \quad (90)^1$$

Como ejemplo de aplicación de estas ecuaciones, consideremos de nuevo, el caso de una placa rectangular (fig. 113) de la que suponemos que tres de sus bordes están fijos y que los desplazamientos del otro ($y = b$) vienen dados por las ecuaciones

$$u = 0, \quad v = Cb \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

Las condiciones de contorno quedarán satisfechas tomando:

$$u = \sum \sum A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

$$v = Cy \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \sum \sum B_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (u)$$

Las componentes correspondientes de la tensión serán:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\sum \sum A_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right.$$

$$\left. + \nu \sum \sum B_{mn} \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \nu C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\sum \sum B_{mn} \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right.$$

$$\left. + C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \nu \sum \sum A_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right)$$

¹ Las ecuaciones de este tipo de los desplazamientos virtuales son llamadas a veces ecuaciones de Galerkin. Sin embargo, ambos tipos de ecuaciones, las (g) y las (90), fueron ya indicadas por Ritz en el trabajo citado anteriormente. Véase *Gesammelte Werke*, pág. 228.

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\sum \sum A_{mn} \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right.$$

$$\left. + \sum \sum B_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} + Cy \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \right)$$

Sustituyéndolas en las ecuaciones (90) y suponiendo

$$\delta u = \delta A_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad \delta v = \delta B_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

obtenemos después de integrar:

$$-\frac{E\pi^2 ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2(1-\nu^2)} + \frac{n^2}{2b^2(1+\nu)} \right) A_{mn}$$

$$+ \int_0^a \int_0^b X \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

$$-\frac{E\pi^2 ab}{4} \left(\frac{n^2}{b^2(1-\nu^2)} + \frac{m^2}{2a^2(1+\nu)} \right) B_{mn}$$

$$- \frac{C\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^b y \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$+ \int \int Y \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

Si las fuerzas másicas son cero, todos los coeficientes A_{mn} se anulan también y los coeficientes B_{mn} son distintos de cero solamente cuando $m = 1$. Entonces:

$$\frac{E\pi^2 ab}{4} \left(\frac{n^2}{b^2(1-\nu^2)} + \frac{1}{2a^2(1+\nu)} \right) B_{1n}$$

$$= -\frac{C\pi^2}{2a} \int_0^b y \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{C\pi b^2 \cos n\pi}{2a} \frac{n}{n}$$

Determinando B_{1n} , a partir de esta ecuación y sustituyéndolo en las fórmulas (u) obtenemos los desplazamientos producidos por los que supusimos se daban en el contorno.

En su teoría de la rotura de los materiales frágiles A. A. Griffith aplicó los conceptos generales relativos a la energía total de un sistema¹. Como se sabe, los materiales tienen una resistencia muy inferior a la que cabría esperar de la magnitud de las fuerzas moleculares. Para un determinado vidrio, por ejemplo, Griffith encontró teóricamente que la resistencia a la

¹ A. A. Griffith, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 221, pág. 163, 1921. Véase también el trabajo del mismo autor en *Proc. Intern. Congr. Appl. Mech.*, Delft, 1924. La bibliografía de este tema puede encontrarse en *Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, vol. 4, parte 2, 1931, artículo de Adolf Smekal.

tracción que cabría esperar sería del orden de $1,125 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, mientras que los ensayos realizados con barras de ese material dieron solamente $0,018 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Como el autor citado demostró, la discrepancia entre teoría y experimentos puede ser explicada si suponemos que en materiales tales como el vidrio, existen fisuras y defectos microscópicos que producen elevadas concentraciones de tensiones y provocan consiguientemente el desarrollo de la grieta. Griffith, con el fin de facilitar los cálculos, supuso que esas microfisuras tenían la forma de una elipse muy estrecha cuyo eje mayor era normal a la tracción.

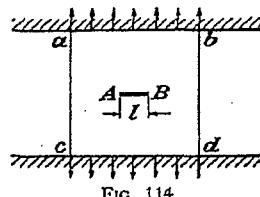


FIG. 114

Consideremos una placa *abcd* fija en sus lados *ab* y *cd* y sometida a una tensión de tracción uniformemente distribuida de valor *S* y aplicada en esos mismos bordes (fig. 114). Si hacemos un orificio elíptico microscópico *AB*, de longitud *l*, y se mantienen *ab* y *cd* fijos, la energía inicial de deformación debida a la tensión *S* se reducirá. Esta reducción¹, que podemos calcular haciendo uso de la solución para un orificio elíptico², es para una placa de espesor unidad a

$$V = \frac{\pi l^2 S^2}{4E} \quad (v)$$

fórmula que nos indica además que al extenderse la fisura (*l* se hace mayor) aumenta la reducción de la energía elástica almacenada en la placa. Al mismo tiempo, sin embargo, la extensión de la grieta supone un aumento de energía superficial, ya que las superficies de los sólidos, al igual que la de los líquidos, poseen una tensión superficial. Griffith encontró, por ejemplo, que para la clase de vidrio que usó en sus experimentos, la energía superficial, *T*, referida a la unidad de superficie, era del orden de $2,2 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^2$.

Si pensamos ahora, que la extensión de la fisura requiere un consumo de energía superficial inferior a la reducción correspondiente de la energía de deformación, el desarrollo de la grieta no exige ningún aumento de la energía total y se producirá espontáneamente. La condición para ese des-

¹ N. del T. Consideraremos la reducción de energía correspondiente a un aumento unidad de la longitud de la fisura.

² Véase el § 63.

arrollo espontáneo se dará cuando las dos cantidades de energía se igualen, que empleando (*v*) queda:

$$\frac{dV}{dl} dl = \frac{\pi l S_{cr}^2}{2E} dl = 2 dl T$$

de donde

$$S_{cr} = \sqrt{\frac{4ET}{\pi l}} \quad (w)$$

Los resultados de los ensayos realizados con probetas en las que, por medio de una punta de diamante, se realizaban fisuras de longitud conocida, concuerdan muy bien con los valores obtenidos aplicando la fórmula (*w*). También se ha demostrado experimentalmente que si se adoptan precauciones tendentes a evitar fisuras microscópicas, pueden obtenerse resistencias mucho mayores que las corrientes.

Algunas varillas de vidrio ensayadas por Griffith dieron resistencias a tracción del orden de $0,63 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, lo que supera a la mitad de la cifra teórica antes citada.

49. Teorema de Castigliano. En el párrafo anterior se ha comparado la configuración de un cuerpo elástico en estado de equilibrio bajo determinadas fuerzas másicas y condiciones de contorno, con las conformaciones contiguas a aquéllas, que el mismo adquiere al ser apartado de la posición de equilibrio mediante las traslaciones virtuales δu , δv . Quedó allí establecido que las verdaderas traslaciones que corresponden a la posición de equilibrio estable son aquellas que hacen mínima la energía potencial total del sistema.

Consideremos ahora, en lugar de los desplazamientos, las tensiones que corresponden a la posición de equilibrio, y tomemos también como ejemplo, el caso de un estado elástico plano. Como sabemos, las ecuaciones diferenciales de equilibrio (18), junto con las condiciones de borde (20), no bastan para determinar las componentes de la tensión, σ_x , σ_y , τ_{xy} . También hemos visto que adoptando diversas expresiones para la función de tensión, ϕ , que figura en las ecuaciones (29), podemos encontrar una variedad de distribuciones de esfuerzos que satisfagan a las ecuaciones de equilibrio y a las condiciones de borde. Se plantea entonces la cuestión: ¿cómo distinguir entre todas las distribuciones de tensiones estáticamente posibles, la verdadera?

Sean σ_x , σ_y , τ_{xy} , las verdaderas componentes de la tensión correspondientes a la posición de equilibrio y $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\tau_{xy}$, incrementos infinitamente pequeños de las mismas, de manera que las nuevas componentes de la tensión, es decir, $\sigma_x + \delta\sigma_x$, $\sigma_y + \delta\sigma_y$, $\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$, satisfagan las mismas ecuaciones de equilibrio (18). Restando entonces las ecuaciones de uno de los sistemas de las del otro, hallaremos que la variación de las

componentes del esfuerzo habrán de satisfacer a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (a)$$

A esta variación de las componentes de la fatiga corresponderá cierta variación en las fuerzas de superficie. Sean $\delta\bar{X}$ y $\delta\bar{Y}$ las variaciones infinitamente pequeñas de dichas fuerzas; las condiciones de contorno (20) nos darán entonces:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m &= \delta\bar{X} \\ \delta\sigma_y m + \delta\tau_{xy} l &= \delta\bar{Y}\end{aligned}\quad (b)$$

Para establecer en cuanto varía la energía potencial del cuerpo, a causa de las antedichas modificaciones de las componentes de la tensión, expresemos la energía de deformación por unidad de volumen en función de las componentes de la tensión (36), y la variación de la energía a que nos referimos será, entonces,

$$\delta V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial V_0}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_{xy}} \delta\tau_{xy}\quad (c)$$

en la cual

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_0}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \epsilon_x \\ \frac{\partial V_0}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \epsilon_y \\ \frac{\partial V_0}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \gamma_{xy}\end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$\delta V_0 = \epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy},$$

y la variación total que afecta a la energía de deformación a causa de las modificaciones de las componentes del esfuerzo es, entonces:

$$\delta V = \iint \delta V_0 dx dy = \iint (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}) dx dy\quad (d)$$

Calculemos esta variación de la energía haciendo intervenir para ello las condiciones de contorno (b). El primer término de la expresión (d) da, al integrar por partes:

$$\begin{aligned}\iint \epsilon_x \delta\sigma_x dx dy &= \int dy \int \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x dx = \int dy |u \delta\sigma_x| \\ &\quad - \iint u \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} dx dy\end{aligned}\quad (e)$$

en la cual la expresión $|u \delta\sigma_x|$ representa la diferencia de los valores que tiene la función $u \delta\sigma_x$ en dos puntos opuestos del contorno tales como A y B en la figura 115. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}dy |u \delta\sigma_x| &= dy(u \delta\sigma_x)_A - dy(u \delta\sigma_x)_B = ds(u \delta\sigma_x \cos Nx)_A \\ &\quad + ds(u \delta\sigma_x \cos Nx)_B\end{aligned}\quad (f)$$

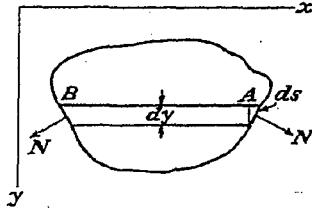


FIG. 115

dónde $\cos Nx = l$ es el coseno del ángulo que forma la normal exterior N con el eje de las x, y ds , un elemento de contorno. De la ecuación (f) resulta, integrando, y teniendo en cuenta la observación anterior:

$$\int dy |u \delta\sigma_x| = \int u \delta\sigma_x l ds$$

con lo que la ecuación (e) se transforma en:

$$\iint \epsilon_x \delta\sigma_x dx dy = \int u \delta\sigma_x l ds - \iint u \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} dx dy\quad (g)$$

La primera de las integrales se extiende a lo largo del contorno de la placa y la segunda, al área de la misma.

Análogas transformaciones del segundo y tercer término de la expresión (d) nos permiten escribir:

$$\begin{aligned}\iint \epsilon_y \delta\sigma_y dx dy &= \int dx \int \frac{\partial v}{\partial y} \delta\sigma_y dy = \int dx |v \delta\sigma_y| \\ &\quad - \iint v \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} dx dy = \int v \delta\sigma_y m ds - \iint v \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} dx dy \\ \iint \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} dx dy &= \int dy \int \frac{\partial v}{\partial x} \delta\tau_{xy} dx + \int dx \int \frac{\partial u}{\partial y} \delta\tau_{xy} dy \\ &= \int dy |v \delta\tau_{xy}| - \iint v \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} dx dy + \int dx |u \delta\tau_{xy}| \\ &\quad - \iint u \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} dx dy = \int v \delta\tau_{xy} l ds + \int u \delta\tau_{xy} m ds \\ &\quad - \iint v \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} dx dy - \iint u \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} dx dy\end{aligned}\quad (h)$$

Por sustitución de (g) y (h) en la ecuación (d) obtenemos la expresión:

$$\delta V = \int [u(\delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m) + v(\delta\sigma_y m + \delta\tau_{xy} l)] ds - \iint \left[u \left(\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] dx dy$$

en la cual la primera integración se efectúa a lo largo del contorno y la segunda se extiende a toda el área de la placa. Utilizando las ecuaciones (a) y (b), obtendremos, finalmente, la siguiente expresión para el incremento de la energía potencial debido a la variación de las componentes de la tensión:

$$\delta V = \int (u \delta\tilde{X} + v \delta\tilde{Y}) ds \quad (91)$$

El segundo miembro de esta ecuación representa el trabajo producido por la variación de las fuerzas exteriores a lo largo de los recorridos efectivos. Las verdaderas tensiones son las que satisfacen esta ecuación. Una ecuación análoga puede obtenerse para el caso tridimensional añadiendo un tercer término $w\delta\tilde{Z}$ al paréntesis de la ecuación (91) y extendiendo la integración a la superficie contorno en lugar de a la curva de contorno.

Si en lugar de una distribución continua de fuerzas superficiales, tuvieramos cargas concentradas, la integral de la ecuación (91) debería ser remplazada por una sumatoria. Si $P_1, P_2 \dots$ son cargas concentradas independientes y $d_1, d_2 \dots$, los desplazamientos reales de los puntos de aplicación de dichas cargas, en la dirección de sus rectas de acción, la ecuación mencionada se transforma en

$$\delta V = d_1 \delta P_1 + d_2 \delta P_2 + \dots \quad (92)$$

En lo que antecede hemos estudiado el caso de las variaciones más generales de las componentes de la tensión que satisfagan a las ecuaciones de equilibrio (a). Examinemos ahora un caso especial: aquel en que los incrementos de las componentes de la tensión sean de tal naturaleza, que ellos pueden ser realmente producidos en un cuerpo elástico por medio de adecuadas variaciones de las fuerzas exteriores. Supondremos que las componentes de la tensión se expresan en función de las cargas exteriores $P_1, P_2 \dots$ y consideraremos aquellas modificaciones de las componentes de la tensión consecuentes de las que experimentan dichas fuerzas, a saber, $\delta P_1, \delta P_2 \dots$. Limitándonos a los casos en que las componentes del esfuerzo son funciones lineales de las fuerzas exteriores $P_1, P_2 \dots$ y sustituyendo estas funciones en la ecuación (84), obtenemos la expresión de la energía de deformación como una función homogénea cuadrática de dichas fuerzas¹.

¹ Excluimos los casos como el de la flexión de barras delgadas por la acción de fuerzas laterales que obran simultáneamente con una tracción o compresión axiles, por ejemplo. En

Deberá tenerse en cuenta que las reacciones de los apoyos, que pueden ser determinadas con arreglo a las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido, están expresadas en función de las cargas dadas $P_1, P_2 \dots$ y no aparecerán en la expresión de la energía potencial elástica. Si existen vínculos superfluos, las respectivas reacciones deberán ser consideradas como fuerzas estáticamente independientes, conjuntamente con las fuerzas P_1, P_2, \dots

Partiendo de una expresión de la energía potencial de deformación en función de las fuerzas exteriores, se tendrá como incremento de la misma, consiguiente al que experimenta cada una de las fuerzas:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial V}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots$$

ecuación que con la (92) nos da

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P_1} - d_1 \right) \delta P_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_2} - d_2 \right) \delta P_2 + \dots = 0 \quad (i)$$

Ahora bien, como se ha dicho antes, las fuerzas, $P_1, P_2 \dots$ son estáticamente independientes, de manera que sus modificaciones, $\delta P_1, \delta P_2 \dots$ son completamente arbitrarias; así, pues, podemos igualar a cero todas menos una y entonces la ecuación (i) exigirá que se verifique:

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = d_1, \quad \frac{\partial V}{\partial P_2} = d_2 \dots \quad (93)$$

Queda así comprobado que si la energía potencial de deformación de un sistema elástico, V , está expresada en función de fuerzas exteriores estéticamente independientes, $P_1, P_2, P_3 \dots$ el desplazamiento real del punto de aplicación de una fuerza en su propia dirección es igual a la derivada parcial de dicha función con respecto a la misma fuerza. Tal es el célebre teorema de Castigliano.

50. Principio del mínimo trabajo. En el § 49 hemos llegado a la ecuación (91), partiendo de cualesquiera variaciones de las componentes de la tensión, susceptibles de satisfacer las ecuaciones de equilibrio. Admitámos ahora variaciones tales que las fuerzas superficiales no se modifiquen; entonces, habrá que remplazar las ecuaciones de contorno, (b), de dicho párrafo, por estas otras:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m &= 0 \\ \delta\sigma_y m + \delta\tau_{xy} l &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación (91) se transforma en:

$$\delta V = 0 \quad (94)$$

un caso como ése, las tensiones originadas por la solicitación axial dependen de la flexión lateral y no son funciones lineales de las fuerzas exteriores.

Lo que se traduce expresando, que cuando las componentes de la tensión originada en un cuerpo cargado en su contorno varían sin que se alteren las ecuaciones de equilibrio ni las condiciones de borde, las verdaderas componentes de la tensión son aquellas que hacen nula la variación de la energía potencial elástica. Se puede demostrar que tales valores correctos de las componentes de la tensión hacen mínima la energía potencial elástica, por lo que la ecuación (94) es la expresión del llamado *principio del mínimo trabajo*.

Dicha ecuación es también válida si a lo largo de una parte del contorno, rígidamente enlazada por medio de sustentaciones fijas, las fuerzas exteriores superficiales varían a consecuencia de modificaciones en las componentes de la tensión. En efecto, bajo tales hipótesis, esa porción del contorno no admite desplazamientos, lo que se traduce en la anulación del segundo miembro de la ecuación (91), de manera que se obtiene, nuevamente, la ecuación (94).

El principio de mínimo trabajo se usa muy a menudo para resolver en forma elemental sistemas estáticamente indeterminados¹. Si X, Y, Z, \dots son fuerzas o pares de fuerzas que obran sobre elementos o vínculos superfluos de un sistema elástico, se pueden calcular las incógnitas hiperestáticas partiendo de la condición de que la energía potencial del sistema expresada en función de X, Y, Z, \dots sea mínima, es decir, mediante las ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0, \dots \quad (95)$$

En los párrafos siguientes aplicaremos el principio de mínimo trabajo a la resolución de diversos problemas de elasticidad bidimensional.

51. Aplicaciones del principio de mínimo trabajo. Placas rectangulares. Vamos a tratar, por ejemplo, el caso de una placa rectangular. Se ha visto en el § 23 que mediante la aplicación de las series trigonométricas es posible satisfacer las condiciones relativas a dos lados de una placa rectangular. Las soluciones así obtenidas pueden ser de interés práctico si se aplican a una placa de poca altura en relación con su longitud; pero si ambas dimensiones son del mismo orden de magnitud, deberán ser consideradas las condiciones en los cuatro costados. Para resolver problemas de esta clase se puede algunas veces aplicar ventajosamente el principio de mínima energía.

Supongamos que sobre las extremidades de la placa rectangular se ejerce una tracción de manera que las fuerzas allí aplicadas obedezcan a una repartición parabólica (fig. 116)². En este caso, las condiciones de límite son:

¹ Véase, por ejemplo, *Strength of Materials* del autor, 2.^a ed., vol. 1, 1940 o Timoshenko y Young, *Theory of Structures*.

² Véase el trabajo del autor, *Phil. Mag.*, vol. 47, pág. 1095, 1924.

Para $x = \pm a$,

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Para $y = \pm b$,

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0 \quad (a)$$

La energía de deformación correspondiente a una placa cuyo espesor se toma igual a uno es, con arreglo a la ecuación (86)

$$V = \frac{1}{2E} \int \int [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2] dx dy \quad (b)$$

Debe destacarse que en el caso de un recinto simplemente conexo como el que aquí se considera, la distribución de tensiones no depende de las

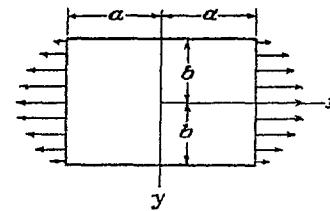


FIG. 116

características elásticas o constantes del material (véase pág. 48), de manera que haciendo igual a cero el coeficiente de Poisson, ν , los cálculos se simplificarán notablemente. Introduciendo, pues, la función de tensión ϕ y sustituyendo en (b) los valores

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \nu = 0$$

encontramos

$$V = \frac{1}{2E} \int \int \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (c)$$

La expresión exacta de la función de tensión será aquella que satisfaga las condiciones (a) y haga que la energía de deformación (c) sea mínima.

Si para la determinación del mínimo de (c) aplicamos el cálculo de variaciones, llegaremos a la ecuación (30) para la función de tensión ϕ ; pero aquí emplearemos otro procedimiento, que nos permitirá obtener una solución, aproximada. Como función de tensión, adoptaremos una serie,

$$\phi = \phi_0 + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3 + \dots \quad (d)$$

que satisfaga a las condiciones de contorno (a) y en la cual $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ son constantes que habrá que determinar posteriormente. Llevando esta serie a la expresión (c) obtendremos V como una función de segundo grado en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$. El valor de las constantes podrá calcularse entonces con arreglo a las siguientes condiciones de mínimo, que serán ecuaciones lineales en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = 0, \dots \quad (e)$$

Por lo general, una adecuada elección de las funciones $\phi_1, \phi_2 \dots$ permitirá obtener una solución satisfactoriamente aproximada, empleando tan sólo unos pocos términos de la serie (d). En nuestro caso, las condiciones de límite (a) quedan satisfechas haciendo:

$$\phi_0 = \frac{1}{2} Sy^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right)$$

ya que, operando, obtenemos:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Las restantes funciones ϕ_1, ϕ_2, \dots deben ser elegidas de manera que las correspondientes tensiones desaparezcan en el contorno. Nos aseguraremos de ello afectando a todas esas funciones, del factor $(x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2)^2$ cuyas derivadas segundas con respecto a x y a y se anulan para los lados $y = \pm b$ y $x = \pm a$, respectivamente; mientras que $\partial^2/\partial x \partial y$ desaparece en correspondencia de los cuatro bordes de la placa. Se podrá tomar, pues, como expresión de la función de tensión la siguiente:

$$\phi = \frac{1}{2} Sy^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots) \quad (f)$$

La serie contiene solamente las potencias pares de x e y porque la distribución de tensiones es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados. Si nos limitamos al primer término, α_1 , de la serie (f), tendremos

$$\phi = \frac{1}{2} Sy^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + \alpha_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

De la primera de las ecuaciones (e) llegamos, entonces, a:

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

Para una placa cuadrada ($a = b$), resultará:

$$\alpha_1 = 0,04253 \frac{S}{a^6}$$

y las componentes de la tensión valdrán:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= S \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1702S \left(1 - \frac{3y^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^3 \\ \sigma_y &= -0,1702S \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2 \\ \tau_{xy} &= -0,6805S \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

En la figura 117, la curva II representa la distribución de σ_x en la sección transversal $x = 0^1$.

Calculemos ahora con tres términos de la serie (f) para lograr una aproximación mayor. Las ecuaciones (e) que sirven para el cálculo de las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ serán entonces:

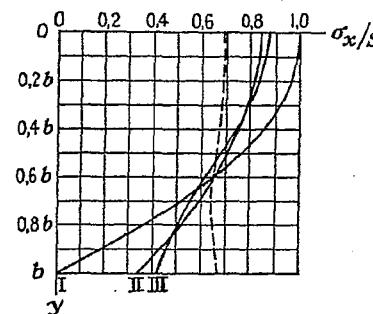


FIG. 117

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64}{49} \frac{b^4}{a^4} \right) \\ + \alpha_3 a^2 \left(\frac{64}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2} \\ \alpha_1 \left(\frac{64}{11} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{192}{143} + \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{192}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) \\ + \alpha_3 a^2 \left(\frac{64}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2} \quad (g) \end{aligned}$$

¹ La curva I representa la distribución parabólica de tensiones en los extremos de la placa.

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{64 b^4}{11 a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64 b^4}{77 a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left(\frac{192 b^2}{7 a^2} + \frac{256 b^4}{77 a^4} + \frac{192 b^6}{143 a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

Estas ecuaciones nos dan para una placa cuadrada, o sea, para $a = b$:

$$\alpha_1 = 0,04040 \frac{S}{a^6}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,01174 \frac{S}{a^8}$$

La repartición de la componente σ_z del esfuerzo en la sección transversal $x = 0$ está dada por la ley

$$(\sigma_z)_{z=0} = S \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1616 S \left(1 - 3 \frac{y^2}{a^2} \right) + 0,0235 \left(1 - 12 \frac{y^2}{a^2} + 15 \frac{y^4}{a^4} \right)$$

y viene representada gráficamente en la figura 117 por la curva III¹.

La repartición de esfuerzos en la sección transversal $x = 0$ se va haciendo más uniforme a medida que aumenta la longitud de la placa. Para $a = 2b$, por ejemplo, se deduce de las ecuaciones (g) los siguientes valores:

$$\alpha_1 = 0,07983 \frac{S}{a^6 b^2}, \quad \alpha_2 = 0,1250 \frac{S}{a^6 b^2}, \quad \alpha_3 = 0,01826 \frac{S}{a^6 b^2}$$

Para la mencionada sección transversal, se consigna a continuación algunos valores de σ_z :

$\frac{y}{b} = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\sigma_z = 0,690 S$	$0,684 S$	$0,669 S$	$0,653 S$	$0,649 S$	$0,675 S$

En la figura 117 se indica con linea de trazos esta repartición de esfuerzos que, como vemos, se aparta muy poco de la tensión media, $\frac{3}{8} S$.

Para tratar otras reparticiones simétricas de esfuerzos en los bordes $x = \pm a$ sólo tendremos que adoptar otra función ϕ_0 en la expresión (f) y únicamente se deberá modificar los segundos miembros de las ecuaciones (g).

Como ejemplo de distribución asimétrica con relación al eje x , consideremos el caso de una pieza flectada (fig. 118)², en la cual la repartición de esfuerzos en las secciones extremas siguen la ley $(\sigma_z)x = \pm a = Ay^3$

¹ El profesor C. E. Inglis obtuvo resultados análogos, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 103, 1923 y también G. Pickett, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 11, pág. 176, 1944.

² Estos cálculos han sido tomados de la tesis doctoral de J. N. Goodier, Universidad de Michigan, 1931. Véase también *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, vol. 54, pág. 173, 1931.

y se representa por la curva b (fig. 118b). Evidentemente, el sistema de tensiones será impar respecto al eje x y par con respecto al eje y . Se satisfacen estas condiciones dando a la función de tensión la forma

$$\phi = \frac{1}{20} A y^5 + (x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2 \\ (\alpha_1 y + \alpha_2 yx^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 x^2 y^3 + \dots) \quad (h)$$

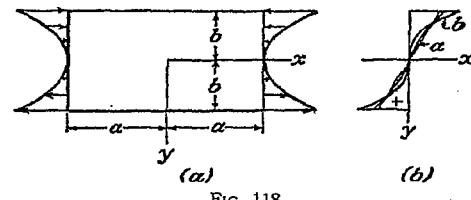


FIG. 118

Como antes, el primer término satisface, para ϕ , las condiciones de límite. Si aplicamos la ecuación (h) con cuatro coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, en las ecuaciones (e), encontramos para una placa cuadrada ($a = b$):

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2A a^3 \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 - (1 - \xi^2)^2 [0,08392(5\eta^3 - 3\eta) + 0,004108(21\eta^5 - 20\eta^3 + 3\eta)] - \xi^2(1 - \xi^2)^2 [0,07308(5\eta^3 - 3\eta) + 0,04179(21\eta^5 - 20\eta^3 + 3\eta)] \right\} \quad (k)$$

expresión en la cual $\xi = x/a$ y $\eta = y/b$. La distribución de tensiones en la sección transversal media, para la cual $x = 0$, está representada por la curva a de la figura 118b, y como se ve, es sensiblemente lineal.

52. Anchura eficaz de alas de las vigas en T. Vamos a desarrollar otro ejemplo de aplicación del principio de mínima energía a problemas de elasticidad bidimensional, relativos a piezas de sección rectangular: el de las vigas de alas muy anchas (vigas en T) (fig. 119), muy usadas en estructuras de hormigón armado y en cascos de buques. Conforme a la teoría elemental, en la flexión de una viga los esfuerzos normales en las diversas capas de fibras varían proporcionalmente a sus distancias a la línea neutra, esto es, las tensiones conservan su valor en todo el ancho del ala. Si éste es muy grande, las partes distantes del alma o nervio participan en menor grado en su resistencia al momento flector y la viga es menos resistente que lo que la teoría elemental indica. Para el cálculo de las tensiones en vigas de ese tipo, se suele remplazar la anchura real de ala por otra menor, de manera que al aplicar la teoría elemental de la flexión a la nueva sección resultante, se obtenga el valor correcto de la máxima tensión. El ancho del ala así reducido, llamado *anchura eficaz*, se determina teóricamente como se indica a continuación¹.

¹ Este tema ha sido desarrollado por Th. v. Kármán; véase *Festschrift August Köppels*, pág. 114, 1923, y también G. Schnadel, *Werft und Reederei*, vol. 9, pág. 92, 1928; E. Reissner, *Der Stahlbau*, 1934, pág. 206; E. Chwalla, *Der Stahlbau*, 1936; L. Beschkin, *Publ. Intern. Assoc. Bridge and Structural Engineering*, vol. 5, pág. 65, 1938.

Para simplificar en lo posible el problema, supondremos que se trata de una viga continua sobre un número infinito de apoyos equidistantes y que todos los tramos están sujetos a cargas distribuidas simétricamente con respecto a la vertical de su punto medio. Se adopta como origen de coordenadas uno de los apoyos del tramo representado en la figura 119, y el eje de la viga como eje x . Por razones de simetría, solamente será necesario considerar la mitad de la losa de uno de los tramos; por ejemplo, la que corresponde al semieje positivo de las y . El ancho del

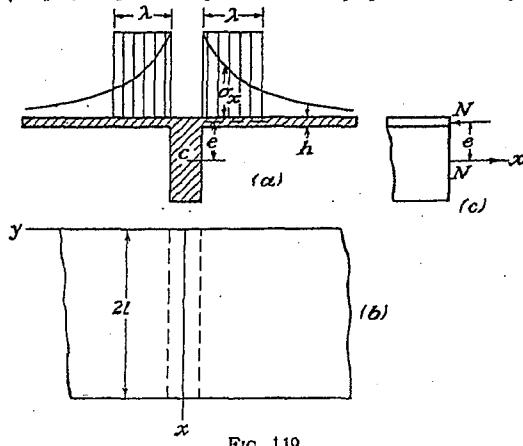


FIG. 119

ala o losa se supone infinitamente grande y su espesor, h , muy pequeño en comparación con la altura del nervio. La flexión del ala como placa delgada puede despreciarse, y se admite asimismo que durante la flexión de la viga, las fuerzas se transmiten a la losa en su plano medio, de manera que la determinación de la distribución de esfuerzos en esta última es un problema de elasticidad bidimensional. La correspondiente función de tensión, que ha de satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

puede adoptar la forma de la siguiente serie, a causa de la simetría supuesta en este caso:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (b)$$

en la cual $f_n(y)$ simboliza funciones de y únicamente. REMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN (a) OBTENEMOS PARA $f_n(y)$, LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$f_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\frac{n\pi y}{l}} + C_n e^{\frac{n\pi y}{l}} + D_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{\frac{n\pi y}{l}} \dots \quad (c)$$

LA CONDICIÓN DE QUE LAS TENSIONES DESAPAREZCAN CUANDO y tome UN VALOR INFINITO QUEDARÁ SATISFECHA HACIENDO $C_n = D_n = 0$, CON LO QUE LA EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN DE TENSIÓN RESULTA

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\frac{n\pi y}{l}} \right] \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (d)$$

LA VERDADERA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES ES AQUELLA QUE HACE MÍNIMA LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN CORRESPONDIENTE AL CONJUNTO DEL ALA Y DEL ALMA Y ESA CONDICIÓN PERMITE DETERMINAR LOS COEFICIENTES A_n Y B_n . REMPLAZANDO

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

EN LA SIGUIENTE EXPRESIÓN DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

$$V_1 = 2 \cdot \frac{h}{2E} \int_0^{\infty} \int_0^{2l} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\nu) \tau_{xy}^2] dx dy$$

Y EMPLEANDO (d) COMO EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN DE TENSIÓN, SE OBTIENE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEL ALA:¹

$$V_1 = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \pi^3}{l^2} \left(\frac{B_n^2}{E} + \frac{A_n B_n}{2G} + \frac{A_n^2}{2G} \right) \quad (e)$$

PARA HALLAR EL VALOR DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN QUE CORRESPONDE ÚNICAMENTE AL ALMA, LLAMEMOS A AL ÁREA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL, I A SU MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO AL EJE HORIZONTAL QUE PASA POR EL BARICENTRO C , Y e A LA DISTANCIA DE ÉSTE AL PLANO MEDIO DEL ALA (FIG. 119). TENIENDO EN CUENTA LA SIMETRÍA QUE EN ESTE CASO EXISTE, EL MOMENTO FLECTOR TOTAL TRANSMITIDO A UNA SECCIÓN TRANSVERSAL CUALQUIERA POR EL CONJUNTO DEL ALMA Y EL ALA, PUEDE SER REPRESENTADO POR LA SERIE

$$M = M_0 + M_1 \cos \frac{\pi x}{l} + M_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (f)$$

EN LA CUAL HAY UNA INDETERMINACIÓN ESTÁTICA REPRESENTADA POR M_0 , CANTIDAD QUE DEPENDE DE LA MAGNITUD DEL MOMENTO FLECTOR EN LOS APÓYOS; LOS OTROS COEFICIENTES M_1 , M_2 , ..., DEBEN SER CALCULADOS CON ARREGLO A LAS CONDICIONES DE CARGA. EL MOMENTO FLECTOR M SE PUEDE DESCOMONER EN UN MOMENTO M' , QUE ABSORBERÁ EL ALA, Y OTRO M'' , DEBIDO A LAS FUERZAS LONGITUDINALES N APLICADAS AL ALMA Y AL ALA (FIG. 119c) Y QUE VALE Ne . LAS TENSIONES NORMALES QUE SE PRESENTAN EN TODA SECCIÓN TRANSVERSAL DE LA VIGA COMPLETA FORMAN COMO SE SABE, UN PAR DE FUERZAS M , DE MANERA QUE

$$N + 2h \int_0^{\infty} \sigma_z dy = 0 \quad (g)$$

$$M' - 2he \int_0^{\infty} \sigma_z dy = M \quad (h)$$

DONDE $-2he \int_0^{\infty} \sigma_z dy = M''$ ES LA PARTE DEL MOMENTO FLECTOR QUE ABSORBE EL ALA.

LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEL ALMA ES

$$V_2 = \int_0^{2l} \frac{N^2}{2AE} dx + \int_0^{2l} \frac{M'^2}{2EI} dx \quad (i)$$

DE LA PRIMERA DE LAS ECUACIONES (g) RESULTA:

$$N = -2h \int_0^{\infty} \sigma_z dy = -2h \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = 2h \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\infty}^0$$

¹ En el trabajo de Th. v. Kármán, loc. cit. se encuentra el cálculo de los integrales que intervienen en la expresión de la energía de deformación.

Por otra parte, la expresión (d) de la función de tensión nos da

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Por tanto,

$$N = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$M' = M + 2he \int_0^h \sigma_x dy = M + Ne = M + 2he \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

o bien, empleando la notación

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n$$

podremos escribir

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$M' = M + e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (k)$$

Remplazando en (h) y teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_0^{2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \text{ (cuando } m \neq n)$$

llegamos a la expresión

$$V_2 = \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 l}{EI} + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2$$

Sumando esta última con V_1 , es decir, la energía de deformación del ala [fórmula (e)] e introduciendo en esta última las notaciones

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n, \quad 2h \frac{n\pi}{l} B_n = Y_n$$

encontramos para la energía total de deformación, la siguiente expresión:

$$V = \frac{\pi}{2hE} \sum_{n=1}^{\infty} n[Y_n^2 + (1+\nu)X_nY_n + (1+\nu)X_n^2] + \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$$

$$+ \frac{M_0^2 l}{EI} + \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 \quad (l)$$

Las cantidades M_0 , X_n y Y_n deben determinarse con arreglo a la condición de mínimo para la energía de deformación (l). Puede verse que M_0 aparece tan sólo en el término $M_0^2 l/EI$ y, de acuerdo con la mencionada condición, resulta $M_0 = 0$.

La condición

$$\frac{\partial V}{\partial Y_n} = 0$$

conduce a

$$2Y_n + (1+\nu)X_n = 0$$

$$Y_n = -\frac{1+\nu}{2} X_n$$

Remplazando en la ecuación (l) este valor, así como $M_0 = 0$, obtenemos para la energía de deformación, la siguiente expresión:

$$V = \frac{\pi}{2hE} \cdot \frac{3+2\nu-\nu^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot X_n^2 + \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$$

$$+ \frac{l}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 \quad (m)$$

La condición para que X_n haga mínimo el valor de V , esto es:

$$\frac{\partial V}{\partial X_n} = 0$$

nos conduce a

$$X_n = -\frac{M_n}{e} \frac{1}{1 + \frac{l}{Ae^2} + \frac{n\pi l}{hle^2} \cdot \frac{3+2\nu-\nu^2}{4}} \quad (n)$$

Consideremos el caso particular en que el diagrama de momentos es una línea senoidal, por ejemplo, $M = M_1 \cos(\pi x/l)$. En la ecuación (n) se tendría entonces

$$X_1 = -\frac{M_1}{e} \frac{1}{1 + \frac{l}{Ae^2} + \frac{\pi l}{hle^2} \cdot \frac{3+2\nu-\nu^2}{4}}$$

De la ecuación (k) deducimos la expresión del momento debido a la fuerza N en el ala, esto es, $-eN$:

$$M'' = -eN = -eX_1 \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{M}{1 + \frac{l}{Ae^2} + \frac{\pi l}{hle^2} \cdot \frac{3+2\nu-\nu^2}{4}} \quad (p)$$

La fórmula (d) nos permite ahora establecer la distribución de esfuerzos σ_x a lo ancho del ala, igualando a cero todos los coeficientes A_n y B_n , con excepción de A_1 y B_1 , haciendo (de acuerdo con las notaciones que hemos adoptado):

$$A_1 = \frac{lX_1}{2\pi h}, \quad B_1 = -\frac{1+\nu}{2} A_1 = -\frac{(1+\nu)lX_1}{4\pi h}$$

Las curvas de la figura 119a representan esta distribución: la tensión σ_x disminuye a medida que aumenta la distancia al nervio.

Determinemos ahora el ancho de ala, $2l$, de una viga en T (fig. 119a), de manera que el momento M'' que se ha calculado [ecuación (p)] resulte de una repartición uniforme de tensiones en la sección transversal del ala que se señala con rayado vertical en la figura, y que será el ancho eficaz del ala.

Si M' y M'' significan, como antes, las partes del momento flector que absorben el nervio y la placa, respectivamente, y denotamos con σ , la tensión en el baricentro C

del nervio y con σ_e , la tensión en el plano medio del ala, la teoría elemental de la flexión nos da

$$\sigma_e = \sigma_0 + \frac{M's}{I} \quad (q)$$

y las ecuaciones de la estática,

$$\begin{aligned} 2\lambda h\sigma_e + \sigma_e A &= 0 \\ 2\lambda h\sigma_e e &= M'' \end{aligned} \quad (r)$$

Las expresiones para esas dos partes del momento flector serán, de acuerdo con las ecuaciones (q) y (r):

$$\begin{aligned} M' &= \frac{I}{e} (\sigma_e - \sigma_0) = \frac{I}{e} \left(1 + \frac{2\lambda h}{A}\right) \sigma_0 \\ M'' &= 2\lambda h e \sigma_e \end{aligned}$$

La relación de M'' al momento flector es:

$$\frac{M''}{M' + M''} = \frac{\frac{2\lambda h e \sigma_e}{2\lambda h e \sigma_0 + \frac{I}{e} \left(1 + \frac{2\lambda h}{A}\right) \sigma_0}}{1 + \frac{I}{A e^2} + \frac{I}{2\lambda h e^2}} = \frac{1}{1 + \frac{I}{A e^2} + \frac{I}{2\lambda h e^2}} \quad (s)$$

Para que esta relación sea igual a la razón M''/M , deducida de la solución exacta (p), debemos hacer:

$$\frac{I}{2\lambda h e^2} = \frac{\pi I}{h e^2 l} \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}$$

de la cual resulta la siguiente expresión para la *anchura eficaz* 21

$$2\lambda = \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}$$

Tomando para el coeficiente de Poisson el valor $\nu = 0,3$, por ejemplo, tendremos

$$2\lambda = 0,181 \quad (21)$$

es decir, que para el diagrama de momentos flectores que hemos supuesto el ancho eficaz del ala representa aproximadamente un 18 % de la luz.

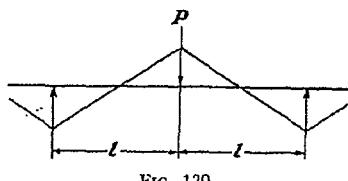


FIG. 120

En el caso de una viga continua cargada con fuerzas iguales y concentradas en la mitad de cada tramo, el diagrama de momentos flectores será el que representa la figura 120. Si se expresa este diagrama de momentos por medio de una serie de Fourier y se aplica el método general que se ha desarrollado, encontraremos como ancho eficaz en los apoyos:

$$2\lambda = 0,85 \cdot \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}$$

es decir, que resulta algo menor que en el caso de un diagrama cosenoide de momentos flectores, como el que antes se supuso.

53. Arrastre por tensión cortante. Un problema de naturaleza análoga al que acabamos de estudiar en el § 52 se presenta en ciertos elementos de la construcción aeronáutica. Consideremos una viga cajón (fig. 121) formada por las láminas delgadas ABCD y EFGH soldadas o remachadas a las dos vigas en U, ABFE y DCGH. Si el conjunto se encuentra empotrado en su extremo izquierdo y es cargado como una ménsula mediante las dos fuerzas P , aplicadas en los extremos de las vigas

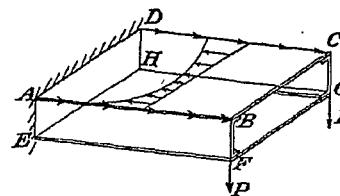


FIG. 121

en U, la teoría elemental de la flexión predice la existencia de una tracción uniforme en cualquier sección, paralela a BC, de la lámina ABCD. En realidad, sin embargo, la tensión de tracción existente en la lámina proviene de la tensión tangencial aplicada a sus bordes por las vigas en U (como indica la fig. 121) y la distribución de la tracción a través de su anchura no es uniforme (como puede verse en la misma figura) siendo mayor en los bordes que en el centro. Este no cumplimiento de la uniformidad prevista por la teoría elemental lo llamamos «arrastre por tensión cortante» (*shear lag*) ya que proviene de la deformación de las láminas por tensión cortante. Este problema ha sido estudiado mediante el método de la energía de deformación, entre otros, partiendo de ciertas hipótesis simplificadoras¹.

Problemas

1. Encontrar una expresión, en función de σ_x , σ_y , τ_{xy} , de la energía de deformación V por unidad de espesor, de un cilindro o un prisma en estado plano de deformación ($\epsilon_z = 0$).

2. Escribir la integral que da la energía de deformación V , en coordenadas polares, en función de las componentes polares de la tensión, para el caso tensional plano [véase la ecuación (b) del § 51].

La distribución de tensiones dada por las ecuaciones (80), resuelve el problema, representado en la figura 122, en la cual, mediante tensiones tangenciales uniformes, un par M es aplicado sobre la superficie interior del anillo y otro igual y opuesto sobre la exterior. Calcular la energía de deformación en el anillo y deducir, igualándola al trabajo realizado durante el proceso de carga, la rotación de la circunferencia exterior cuando se mantiene fijo el borde interior del anillo (véase el problema 2 del cap. 4).

¹ E. Reissner, *Quart. Applied Math.*, vol. 4, pág. 268, 1946; J. Hadji-Aryaris, *Brit. Aeronaut. Research Council, Reports and Memoranda*, núm. 2038, 1944; J. Hadji-Aryaris y H. L. Cox, *ibid.*, núm. 1969, 1944. En estos trabajos se encontrarán las referencias de los estudios que precedieron a los aquí citados.

3. Calcular la energía de deformación por unidad de longitud en un cilindro $a < r < b$ sometido a una presión interior p_i [véase la ecuación (46)] y deducir el desplazamiento radial de la superficie interior.

Obtener el mismo resultado utilizando la ecuación (50) (tomando $v = 0$) y las relaciones tensión-deformación para estados tensionales planos.

4. Interpretar la ecuación

$$\iint V_0 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iiint (Xu + Yv) \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) \, ds$$

y justificar los factores $\frac{1}{2}$ del segundo miembro.

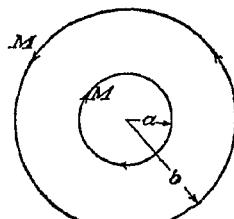


FIG. 122

5. Demostrar, a partir de las ecuaciones (84), que si tenemos los estados tensional y de deformación plana ($\epsilon_z = 0$) para los que $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ toman los mismos valores, la energía de deformación (por unidad de espesor) es mayor para el estado tensional plano.

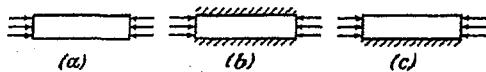


FIG. 123

6. La figura 123, (a) representa una banda sometida a una compresión que pone en tensión toda la pieza. En (b) la banda deformable está pegada en su parte inferior y superior a dos placas rígidas. ¿Se producirán tensiones en toda la pieza o solamente en los extremos? En (c) el borde superior es libre como en (a), pero el inferior está fijo como en (b). ¿La tensión que se crea será o no local?

7. Partiendo del principio de que la energía potencial de un sistema en equilibrio es un mínimo respecto a la energía correspondiente a los estados vecinos, demostrar sin cálculos que la energía de deformación de la placa de la figura 114, bien disminuye, bien permanece constante, al efectuar un fino corte AB .

8. Reemplazando las fuerzas \bar{X} e \bar{Y} en el contorno, por las componentes radial y tangencial \bar{R} y \bar{T} y empleando para los desplazamientos las componentes polares u y v del capítulo 4, poner el teorema de Castigliano, expresado por la ecuación (91), en forma utilizable en coordenadas polares.

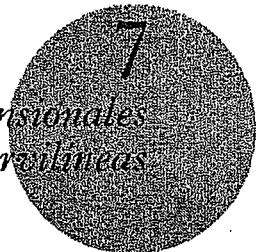
9. La ecuación (91) es válida cuando $\delta\bar{V}, \delta\bar{X}, \delta\bar{Y}$ son el resultado de cualquier pequeño cambio, de las componentes de la tensión, que satisface las condiciones de equilibrio (a) del § 39, tanto si ese cambio viola o no las condiciones de

compatibilidad (§ 15). En este segundo caso los cambios de la tensión son los que realmente se dan al variar las fuerzas de contorno en $\delta\bar{X}, \delta\bar{Y}$. ¿Es correcto el enunciado precedente?

Suponiendo que lo sea demostrar que el desplazamiento radial del problema 3 viene dado por

$$(u)_{r=a} = \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{\partial V}{\partial p_i}$$

Problemas bidimensionales en coordenadas curvilineas



54. Funciones de variable compleja. Hemos visto que las coordenadas cartesianas y polares eran adecuadas para la resolución de los problemas hasta aquí tratados. Para otros contornos, sin embargo —elipses, hipérbolas, circunferencias no concéntricas y otras curvas—, es preferible generalmente emplear otras coordenadas, para cuyo estudio así como para la construcción de las funciones de tensión conviene utilizar variable compleja.

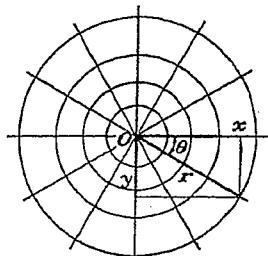


FIG. 124

Dos números reales x e y forman el número complejo $x + iy$ en el que i representa la $\sqrt{-1}$. Dado que i no pertenece al conjunto de los números reales debe definirse qué se entiende por igualdad, adición, sustracción, multiplicación y división de estos números¹. Por definición $x + iy = x' + iy'$ cuando $x = x'$ e $y = y'$, e i^2 es igual a -1 . Para el resto de las operaciones se dan las mismas definiciones que si se tratase de números reales. Así, por ejemplo,

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \text{ puesto que } i^2 = -1.$$

Pasando a coordenadas polares, como se indica en la figura 124, tenemos

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (a)$$

¹ Estas definiciones representan operaciones sobre el par de números reales usándose i simplemente por conveniencia. Véase, por ejemplo, E. T. Whittaker y G. N. Watson, *Modern Analysis*, 3.^a edición, pág. 6-8.

Puesto que

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \dots$$

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \text{ etc.,}$$

tendremos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots + i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

de donde, de la ecuación (a) se deduce

$$z = x + iy = r e^{i\theta} \quad (b)$$

Empleando las definiciones analíticas en lugar de las geométricas podemos formar las funciones algebraicas, trigonométricas, exponencial, logarítmica, etc., de la variable z como si se tratase de una variable real. De esta forma, por ejemplo, pueden definirse $\sin z$, $\cos z$ y e^z , mediante su desarrollo en serie. Una función cualquiera, de las que estudiamos, podrá descomponerse en sus partes real e imaginaria, es decir, ser expresada en la forma $a(x, y) + i\beta(x, y)$ donde $a(x, y)$, la parte real, y $\beta(x, y)$, la parte imaginaria¹, son funciones reales ordinarias de x e y (no contienen i). Si la función de z , $f(z)$ es, por ejemplo, $1/z$, tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2}$$

De forma semejante, teniendo en cuenta que $\operatorname{ch} iy = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$, $\operatorname{sh} iy = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy})$, y $e^{iy} = \cos y \pm i \sin y$ resulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} iy \\ &= \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y \\ \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy \\ &= \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y \end{aligned}$$

Como ejemplo ilustrativo del método general para convertir un denominador complejo en uno real consideraremos la función $\operatorname{ctgh} z$. Tendremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgh} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{ch}(x + iy)}{\operatorname{sh}(x + iy)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(x - iy)}{\operatorname{sh}(x - iy)} \\ &= \frac{(\operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y)(\operatorname{sh} x \cos y - i \operatorname{ch} x \sin y)}{(\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y)(\operatorname{sh} x \cos y - i \operatorname{ch} x \sin y)} \end{aligned}$$

El denominador es la cantidad real $(\operatorname{sh} x \cos y)^2 + (\operatorname{ch} x \sin y)^2$ y operando el numerador y simplificando obtenemos:

$$\operatorname{ctgh} z = \frac{\operatorname{sh} 2x - i \operatorname{sen} 2y}{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{cos} 2y} \quad (c)$$

Otro procedimiento posible es el indicado en la ecuación (p) del § 62.

La derivada de $f(z)$ respecto a z es por definición:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (d)$$

¹ Se observará que es real, pese a su nombre.

donde $dz = dx + idy$ y $dz \rightarrow 0$ significa, por supuesto, que $dx \rightarrow 0$ y $dy \rightarrow 0$. Pensando en x e y como coordenadas cartesianas de un punto del plano, dx y dy representarían un desplazamiento a un punto vecino y podría esperarse, a primera vista, que el valor de (d) dependiera de la dirección de ese desplazamiento. No obstante, el límite de (d) es expresable directamente en función de x y dz como si se tratase de números reales, y los resultados correspondientes tales como

$$\frac{d}{dz}(z^2) = 2z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

deben ser independientes de la elección de dz y de dx y dy . Podemos decir, por tanto, que todas las funciones de z , formadas de la manera corriente, tendrán derivadas que sólo dependerán de z , obteniéndose un único valor para todas las direcciones (de dz) en el punto z . Tales funciones se llaman analíticas.

La cantidad $x - iy$ puede ser considerada como función de z , en el sentido, de que dada z lo están x e y y en consecuencia $x - iy$. Sin embargo, $x - iy$ no puede obtenerse a partir de z en la forma en que obtenemos, por ejemplo, z^n , e^z , etc. Su derivada respecto a z , que es el límite de $(dx - i dy)/(dz)$ cuando dx , $dy \rightarrow 0$, depende de la dirección del desplazamiento dx , dy . Si tomamos este desplazamiento en la dirección x , de forma que $dy = 0$, obtenemos 1 como valor del límite. Si tomamos el desplazamiento en la dirección y , $dx = 0$ y el límite es -1 . En consecuencia, $x - iy$ no es una función analítica de $x + iy$. En la construcción de las funciones de tensión usaremos funciones analíticas junto con la expresión $x - iy$. Cualquier función en la que intervenga i recibe el nombre de «función compleja».

Una función analítica $f(z)$ tendrá una integral indefinida, que se define como la función cuya derivada respecto a z sea $f(z)$, y que representaremos por $\int f(z) dz$. Si, por ejemplo, $f(z) = 1/z$ tendremos:

$$\int \frac{1}{z} dz = \log z + C$$

donde la constante aditiva C es ahora un número complejo $A + iB$, que contiene dos constantes reales arbitrarias A y B .

55. Funciones analíticas y ecuación de Laplace. Una función analítica $f(z)$ puede ser considerada como una función de x e y y sus derivadas parciales serán:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{d}{dz} f(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad (a)$$

puesto que $\partial z / \partial x = 1$, y la otra:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = i f'(z) \quad (b)$$

puesto que $\partial z / \partial y = i$.

Poniendo $f(z)$ en la forma $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$, o para abreviar $\alpha + i\beta$, tendremos también:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (c)$$

y comparando las ecuaciones (c) con las (a) y (b) obtenemos

$$i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (d)$$

Recordando que α y β son reales, que $i^2 = -1$ y que la igualdad de números complejos implica la de sus partes real e imaginaria, resultan las ecuaciones

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (e)$$

las cuales reciben el nombre de *ecuaciones de Cauchy-Riemann*. Derivando la primera respecto a x , la segunda respecto a y y sumando, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

Una ecuación de este tipo, se llama *ecuación de Laplace* y las soluciones de la misma reciben el nombre de *funciones armónicas*. Eliminando α de forma semejante de las ecuaciones (e), tendremos asimismo:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0 \quad (g)$$

Vemos, pues, que si dos funciones α y β , de x e y , son las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z)$, ambas satisfacen la ecuación de Laplace, ecuación ésta que se encuentra en muchos problemas de la Física incluidos los de la Elásticidad [véase, por ejemplo, la ecuación (b) del § 16].

Las funciones α y β se dice que son funciones armónicas conjugadas y es evidente que dada cualquier función armónica α , las ecuaciones (e) determinan, salvo una constante, la función β conjugada con la α .

Como ejemplos de deducción de funciones armónicas a partir de funciones analíticas de z consideremos las funciones e^{nx} , z^n y $\log z$ en las que n es un número real. Para la primera de ellas tenemos:

$$e^{inz} = e^{inx} e^{-ny} = e^{-ny} \cos nx + ie^{-ny} \sin nx$$

de donde vemos que $e^{-ny} \cos nx$ y $e^{-ny} \sin nx$ son funciones armónicas. Cambiando n por $-n$ encontramos que $e^{ny} \cos nx$ y $e^{ny} \sin nx$ son también armónicas, de donde se sigue que también lo son:

$$\text{sh } ny \text{ sen } nx, \quad \text{ch } ny \text{ sen } nx, \quad \text{sh } ny \text{ cos } nx, \quad \text{ch } ny \text{ cos } nx \quad (h)$$

puesto que se obtienen sumando y restando las funciones precedentes y añadiendo el factor $1/2$. Partiendo de z^n tenemos:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta$$

encontrando las siguientes funciones armónicas:

$$r^n \cos n\theta, \quad r^n \sin n\theta, \quad r^{-n} \cos n\theta, \quad r^{-n} \sin n\theta \quad (i)$$

y de

$$\log z = \log re^{i\theta} = \log r + i\theta$$

obtenemos

$$\log r, \quad \theta \quad (j)$$

Como puede comprobarse fácilmente las funciones (i) y (j) satisfacen la ecuación de Laplace en coordenadas polares [véase la ecuación (d) del § 25], la cual es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (k)$$

Problemas

1. Determinense las funciones *reales* de x e y que son las partes *real* e *imaginaria* de las funciones complejas x^2 , x^3 , $\tanh x$:

$$[x^3 - y^3, 2xy; x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3; \sh 2x(\ch 2x + \cos 2y)^{-1}, \sen 2y(\ch 2x + \cos 2y)^{-1}]$$

2. Determinense las funciones *reales* de r y θ que son las partes *real* e *imaginaria* de las funciones complejas x^{-2} , $x \log z$:

$$[r^{-2} \cos 2\theta, r^2 \sen \theta; r \log r \cos \theta - r\theta \sen \theta, r \log r \sen \theta + r\theta \cos \theta]$$

3. Si ζ es una variable compleja y $z = c \operatorname{ch} \zeta$, obténgase

$$\frac{d}{dz} \sh n\zeta$$

Escribiendo $\zeta = \xi + i\eta$ determinense las partes real e imaginaria de esta derivada cuando c y n son reales.

4. Si $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ y $z = ia \operatorname{ctgh} \frac{\zeta}{2}$ (a es real) demuéstrese que

$$x = \frac{a \sen \eta}{\ch \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sh \xi}{\ch \xi - \cos \eta}$$

56. Expresión de la función de tensión mediante funciones armónicas y complejas. Dada una función cualquiera de x e y , ψ , derivando obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x\psi) = x \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (a)$$

y si ψ es armónica, el paréntesis del miembro derecho se anulará. En este caso $\partial \psi / \partial x$ es también una función armónica puesto que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

Una nueva aplicación de la laplaciana (a) nos da

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x\psi) = 0 \quad (b)$$

que es lo mismo que

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) (x\psi) = 0$$

de donde comparando con la ecuación (a) del § 17, deducimos que la función $x\psi$, si ψ es armónica, puede ser usada como función de tensión.

Esto mismo es cierto también para $y\psi$, para la función ψ , y como puede comprobarse fácilmente, derivando, para $(x^2 + y^2)\psi$, que es $r^2\psi$.

Tomando, por ejemplo, las dos funciones armónicas

$$\sh ny \sen nx, \quad \ch ny \sen nx$$

de (h) (§ 55) y multiplicándolas por y , llegamos, por superposición, a la función de tensión (d) del § 23. Asimismo, tomando las funciones (i) y (j) del § 55 y multiplicándolas por x , y o r^2 podemos obtener todos los términos de la función de tensión en coordenadas polares dada por la ecuación (81) en el § 39.

No obstante, la pregunta de si cualquier función de tensión puede ser expresada de esta forma sigue planteada y a ella vamos a responder en seguida al conseguir expresar la función general de tensión mediante dos funciones analíticas arbitrarias.

Escribiendo el operador laplaciano

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

mediante el símbolo ∇^2 podemos formular la ecuación (a) del § 17 así: $\nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0$ ó $\nabla^4 \phi = 0$. Llamando P a $\nabla^2 \phi$, que representa a $\sigma_x + \sigma_y$, vemos que P es una función armónica, teniendo por lo tanto, una función armónica conjugada Q . En consecuencia $P + iQ$ es una función analítica de z que podemos escribir

$$f(z) = P + iQ \quad (c)$$

y su integral respecto a z , que expresamos por $4\psi(z)$ será también una función analítica. Llamando, entonces, p y q a las partes real e imaginaria de $\psi(z)$ tenemos:

$$\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz \quad (d)$$

de forma que $\psi'(z) = 1/4 f(z)$. Asimismo

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(z) = \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + iQ)$$

e igualando las partes reales del primer miembro y del último, obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4} P \quad (e)$$

y puesto que p y q son funciones conjugadas, satisfacen las ecuaciones (e) del § 55, de forma que

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P \quad (f)$$

Recordando que $P = \nabla^2 \phi$ y partiendo de las ecuaciones (e) y (f), podemos ver que $\phi - xp - yq$ es una función armónica ya que

$$\nabla^2(\phi - xp - yq) = \nabla^2\phi - 2\frac{\partial p}{\partial x} - 2\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (g)$$

Tenemos, por lo tanto, que para cualquier función de tensión ϕ

$$\phi - xp - yq = p_1$$

donde p_1 es una función armónica y en consecuencia

$$\phi = xp + yp + p_1$$

lo que demuestra que cualquier función de tensión puede ser expresada mediante dos funciones armónicas conjugadas p y q y una función armónica p_1 convenientemente elegidas.

La utilidad de la ecuación (96) será comprobada más adelante, pero como vamos a ver ahora el uso de las dos funciones p y q no es necesario. En lugar de la ecuación (g) podemos escribir:

$$\nabla^2(\phi - 2xp) = \nabla^2\phi - 4\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

lo que demuestra que $\phi - 2xp$ es una función armónica, que llamamos p_2 , con lo que cualquier función de tensión es expresable en la forma

$$\phi = 2xp + p_2 \quad (h)$$

donde p y p_2 son dos funciones armónicas convenientemente elegidas. De forma semejante, considerando $\phi - 2yq$, puede demostrarse que cualquier función de tensión es también expresable en la forma

$$\phi = -2yq + p_3$$

donde q y p_3 son dos funciones armónicas convenientes.

Volviendo a la fórmula (96), introduzcamos la función q_1 que es la armónica conjugada de p_1 y escribamos

$$x(z) = p_1 + iq_1$$

Entonces es fácil comprobar que la parte real de

$$(x - iy)(p + iq) + p_1 + iq_1$$

se identifica con el miembro derecho de la ecuación (96). En consecuencia, cualquier función de tensión es expresable en la forma¹

$$\phi = \operatorname{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] \quad (97)$$

¹ E. Goursat, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 26, pág. 206, 1898. N. I. Muschelišvili, *Math. Ann.*, vol. 107, págs. 282-312, 1932.

donde Re significa «parte real de», \bar{z} representa $x - iy$, y $\psi(z)$ y $\chi(z)$ son funciones analíticas elegidas convenientemente. Recíprocamente toda función (97), sean cuales fueren $\psi(z)$ y $\chi(z)$, es una función de tensión que satisface a la ecuación (a) del § 17. Esto será aplicado más adelante a la solución de varios problemas de interés práctico.

Escribiendo la «función compleja de tensión» contenida entre corchetes en (97) de la forma

$$\bar{z}z \frac{\psi(z)}{z} + \chi(z)$$

y observando que $\bar{z}z = r^2$ y que $\psi(z)/z$ es también función de z encontramos que cualquier función de tensión puede expresarse en la forma

$$r^2p_4 + p_5$$

siendo p_4 y p_5 funciones armónicas.

57. Desplazamientos correspondientes a una determinada función de tensión. En el § 39 vimos que la determinación de las tensiones en una región múltiplemente conexa requiere la evaluación de los desplazamientos, con el fin de asegurarnos de que no son discontinuos, o lo que es lo mismo, de que las tensiones no son causadas parcialmente por dislocaciones. Con tal fin, así como para aquellos casos en que los desplazamientos interesan por sí mismos, se necesita un método que permita obtener las funciones de los desplazamientos u y v a partir de la función de tensión.

Las relaciones tensión-deformación para problemas planos, ecuaciones (22) y (23), pueden escribirse de la siguiente forma:

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y, \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad (a)$$

$$G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{xy} \quad (b)$$

Llevando la función de tensión a la primera de las ecuaciones anteriores y recordando que $P = \nabla^2 \phi$, tenemos:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(P - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ &= -(1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + P \end{aligned} \quad (c)$$

y de forma semejante

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = -(1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + P \quad (d)$$

Dividiendo por $1 + \nu$ y sustituyendo P por $4\partial p/\partial x$ en (c) y por $4\partial q/\partial y$ en (d) [ecuaciones (f) y (g) del § 56] obtenemos

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{4}{1+\nu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 2G \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{4}{1+\nu} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (e)$$

que integrando nos da

$$2Gu = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu} p + f(y), \quad 2Gv = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu} q + f_1(x) \quad (f)$$

donde $f(y)$ y $f_1(x)$ son funciones arbitrarias.

Sustituyendo estas expresiones en el primer miembro de la ecuación (b) obtenemos

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1+\nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{df}{dy} + \frac{1}{2} \frac{df_1}{dx} = \tau_{xy} \quad (g)$$

donde el primer término de la izquierda es τ_{xy} y el paréntesis se anula por ser p y q funciones armónicas conjugadas, que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (§ 56). En consecuencia

$$\frac{df}{dy} + \frac{df_1}{dx} = 0$$

de donde

$$\frac{df}{dy} = A, \quad \frac{df_1}{dx} = -A$$

siendo A una constante. Se sigue de ello, que los términos $f(y)$ y $f_1(x)$ de la ecuación (f) representan la traslación de un cuerpo rígido, por lo que suprimiéndolos, las ecuaciones (f) resultan¹

$$2Gu = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu} p, \quad 2Gv = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu} q \quad (h)$$

entendiéndose que se pueden añadir los desplazamientos correspondientes a la traslación de un cuerpo rígido.

Estas ecuaciones nos permiten obtener u y v cuando ϕ es conocida. Para ello determinamos primero $P = \nabla^2 \phi$, hallamos luego su función conjugada Q mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

formamos la función $f(z) = P + iQ$ y obtenemos p y q integrando $f(z)$ como en la ecuación (d) del § 56. Los términos de las ecuaciones (h) son entonces conocidos.

¹ A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, §§ 144 y 146, 1926.

Más adelante veremos la utilidad de estas ecuaciones en algunas aplicaciones en las que el método de determinación de desplazamientos usado en los capítulos 3 y 4 no es eficaz.

58. Tensiones y desplazamientos expresados en función de los potenciales complejos. Hasta aquí, las componentes de la tensión y de los desplazamientos han sido obtenidos a partir de la función de tensión, pero dado que la ecuación (97) expresa ϕ en función de $y(z)$ y $x(z)$ es posible también obtener las tensiones y desplazamientos a partir de estos dos «potenciales complejos».

Cualquier función compleja $f(z)$ puede ponerse en la forma $a + i\beta$, donde a y β son reales. A tal función se la puede hacer corresponder la conjugada¹, que es el valor que toma $f(z)$ cuando en ella sustituimos i por $-i$. La notación que utilizamos para designar a la conjugada es la siguiente:

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta \quad (a)$$

Si por ejemplo, $f(z) = e^{inz}$ tendremos

$$\bar{f}(\bar{z}) = e^{-in\bar{z}} = e^{-in(\bar{x}-i\bar{y})} = e^{-inx} \cdot e^{-iny} \quad (b)$$

que podemos comparar con

$$f(\bar{z}) = e^{inz}$$

con el fin de ilustrar el significado de la barra que existe sobre la f en la ecuación (a).

Evidentemente

$$f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = 2\alpha = 2 \operatorname{Re} f(z)$$

por lo que si añadimos a la función contenida en los corchetes de la ecuación (97) su conjugada, la suma será el doble de la parte real de esa función. La ecuación (97) puede, por lo tanto, ser remplazada por la

$$2\phi = \bar{z}\psi(z) + \chi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad (98)$$

en la que derivando resulta

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{z}\psi'(z) + \psi(z) + \chi'(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})$$

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = i[\bar{z}\psi'(z) - \psi(z) + \chi'(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]$$

Estas dos ecuaciones pueden combinarse en una, multiplicando la segunda por i y sumándolas.

¹ El significado que aquí tiene esta palabra es distinto del que toma en la expresión: «función armónica conjugada».

Entonces:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \psi(z) + z\psi'(\bar{z}) + \chi'(\bar{z}) \quad (c)$$

Combinando de igual forma las ecuaciones (h) del § 57 se obtiene

$$2G(u + iv) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{4}{1 + \nu} (p + iq) \quad .$$

que usando la ecuación (c) y la (d) del § 56 queda

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \psi(z) - z\psi'(\bar{z}) - \chi'(\bar{z}) \quad (99)$$

ecuación, que conocidos los potenciales complejos $\psi(z)$ y $\chi(z)$, nos permite determinar u y v para los estados tensionales planos. Para los estados de deformación plana, de acuerdo con el § 19, debemos sustituir $\nu/(1 - \nu)$ por ν en las ecuaciones (99).

Las componentes de la tensión σ_x , σ_y , τ_{xy} , pueden obtenerse directamente derivando dos veces la ecuación (98), pero en vista de su aplicación en coordenadas curvilineas es preferible proceder de otra manera. Derivando respecto a x la ecuación (c) se tiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \psi'(z) + z\psi''(\bar{z}) + \psi'(\bar{z}) + \chi''(\bar{z}) \quad (d)$$

y derivando respecto a y y multiplicando por i obtenemos:

$$i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\psi'(z) + z\psi''(z) - \psi'(\bar{z}) + \chi''(\bar{z}) \quad (e)$$

Sumando y restando ahora las ecuaciones (d) y (e) se obtienen las siguientes expresiones, más sencillas¹

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\psi'(z) + 2\psi'(\bar{z}) = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) \quad (100)$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2[z\psi''(z) + \chi''(z)] \quad (101)$$

una de las cuales, la (101) puede tomar, cambiando i por $-i$, esta otra forma

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad (102)$$

Dados pues los potenciales complejos $\psi(z)$ y $\chi(z)$ podemos determinar las componentes de la tensión mediante las ecuaciones (100) y (102). Separando las partes real e imaginaria de (102) ó (101) obtenemos separadamente $\sigma_x - \sigma_y$ y $2\tau_{xy}$ y los desplazamientos correspondientes mediante la ecuación (99).

¹ Estos resultados y la ecuación (99) fueron obtenidos por G. Kolosoff en su tesis doctoral. Véase su trabajo en *Z. Math. Physik*, vol. 62, 1914.

Como una sencilla ilustración de este método consideremos la distribución tensional polinómica estudiada en el § 17. Evidentemente la ecuación (98) nos dará una función de tensión, que es un polinomio de quinto grado, si tomamos

$$\psi(z) = (a_5 + ib_5)z^5, \quad x(z) = (c_5 + id_5)z^5$$

donde a_5 , b_5 , c_5 y d_5 son coeficientes reales arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= 4(a_5 + ib_5)z^4, & x'(z) &= 5(c_5 + id_5)z^4 \\ \psi''(z) &= 24(a_5 + ib_5)z^3, & x''(z) &= 20(c_5 + id_5)z^3 \end{aligned}$$

y de las ecuaciones (100) y (102) obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}(a_5 + ib_5)z^4 \\ &= 16 \operatorname{Re}(a_5 + ib_5)[z^4 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)] \\ &= 16a_5(x^3 - 3xy^2) - 16b_5(3x^2y - y^3) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[12(a_5 + ib_5)z^2 + 20(c_5 + id_5)z^3] \\ &= 24(a_5 + ib_5)(x - iy)(x + iy)^2 + 20(c_5 + id_5)(x + iy)^3 \\ &= [24a_5x(x^2 + y^2) - 24b_5y(x^2 + y^2) + 20c_5(x^3 - 3xy^2) \\ &\quad - 20d_5(3x^2y - y^3)] + i[24a_5y(x^2 + y^2) + 24b_5x(x^2 + y^2) \\ &\quad + 20c_5(3x^2y - y^3) + 20d_5(x^3 - 3xy^2)] \end{aligned}$$

correspondiendo las expresiones entre corchetes a $\sigma_y - \sigma_x$ y $2\tau_{xy}$ respectivamente. Los desplazamientos correspondientes se obtienen fácilmente mediante la ecuación (99), resultando

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} (a_5 + ib_5)z^4 - 4(a_5 - ib_5)z^2 - 5(c_5 - id_5)\bar{z}^4$$

59. Resultante de las tensiones que actúan sobre una curva.

Condiciones de contorno. La figura 125 muestra el arco *AB* de una curva trazada sobre la placa. La fuerza ejercida por el material situado a la izquierda del arco *AB* sobre el material situado a la derecha, en el

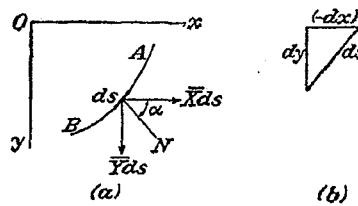


FIG. 125

arco ds , puede representarse por las componentes $\bar{X}ds$ e $\bar{Y}ds$, cuyo valor, como se deduce de las ecuaciones (12) del § 9, viene dado por las expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \bar{Y} &= \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \end{aligned} \quad (a)$$

en las que α es el ángulo formado por la normal *N* y el eje *x*. Al elemento de arco ds corresponden los elementos dx y dy , que se indican en la fi-

gura 125b, y dado que al ir de A a B x disminuye y dx será negativo. Entonces

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad (b)$$

y llevando estos resultados, junto con los

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

a las ecuaciones (a), obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ \bar{Y} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (c)$$

Las componentes de la fuerza resultante que actúa sobre el arco AB son, por lo tanto

$$\begin{aligned} F_x &= \int_A^B \bar{X} ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ds = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B \\ F_y &= \int_A^B \bar{Y} ds = - \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) ds = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_A^B \end{aligned} \quad (d)$$

representando el corchete, la diferencia entre los valores que la cantidad que encierra, toma en los puntos B y A .

La fuerza que actúa sobre AB tiene un momento respecto a O (de sentido el del giro de las agujas del reloj) cuyo valor es:

$$M = \int_A^B x \bar{Y} ds - \int_A^B y \bar{X} ds = - \int_A^B \left[x \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + y \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] ds$$

que integrando por partes queda¹

$$M = \left[\phi \right]_A^B - \left[x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B \quad (e)$$

Si AB representa una porción del contorno sobre la que no actúa ninguna carga \bar{X} e \bar{Y} serán nulos y según las ecuaciones (c) $\partial \phi / \partial x$ y $\partial \phi / \partial y$ se mantendrán constantes a lo largo de AB . Si sobre AB actúa una determinada distribución de carga las ecuaciones (c) fijarán los valores de $\partial \phi / \partial x$ y $\partial \phi / \partial y$ a lo largo del contorno, lo que equivale a dar las derivadas normal

¹ Las ecuaciones (d) y (e) sirven para establecer una analogía entre los problemas tensionales planos y el movimiento bidimensional lento de fluidos viscosos. Véase J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 17, págs. 554 y 800, 1934.

$\partial \phi / \partial n$ y paralela $\partial \phi / \partial s$ a AB . Estas derivadas son conocidas si se da ϕ y $\partial \phi / \partial n$ a lo largo de AB .

Sea ahora un arco que se cierra sobre sí mismo, de forma que A coincide con B , pero en el que este punto sigue siendo considerado como aquél al cual se llega después de recorrer el arco, partiendo de A . Las ecuaciones (d) y (e) nos dan entonces la fuerza y el momento resultante de las tensiones que actúan sobre la porción de placa contenida en el circuito cerrado AB . Si tales resultantes no son cero, $\partial \phi / \partial x$ y $\partial \phi / \partial y$, no toman sus valores iniciales (A) después de recorrer el circuito (B), siendo, por lo tanto, funciones discontinuas como, por ejemplo, la coordenada polar θ . Este caso se dará solamente cuando cargas iguales y opuestas a F_x y F_y y M , son aplicadas en puntos interiores de la porción de placa limitada por la curva AB .

Expresando las dos ecuaciones (d) en función de los potenciales complejos $\psi(z)$ y $\chi(z)$ de la ecuación (98) tendremos

$$F_x + iF_y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_A^B = -i \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B$$

y usando las ecuaciones (c) del § 58, resulta

$$F_x + iF_y = -i[\psi(z) + z\psi'(z) + \chi'(z)]_A^B \quad (103)$$

Las ecuaciones (e) nos quedan así:

$$M = \operatorname{Re} [-z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \chi(z) - z\chi'(\bar{z})]_A^B \quad (104)$$

Las ecuaciones (103) y (104) aplicadas a un circuito cerrado que rodee al origen, muestran que si las funciones $\psi(z)$ y $\chi(z)$ son del tipo z^n (donde n es un entero positivo o negativo) F_x , F_y y M serán nulos, ya que las funciones entonces contenidas en los corchetes vuelven a tomar su valor inicial cuando el circuito es completado. Estas funciones, por lo tanto, no pueden representar las tensiones producidas por cargas aplicadas en el origen. La función $\log z = \log r + i\theta$ por el contrario, no vuelve a tomar el mismo valor al recorrer un circuito que rodee al origen, puesto que θ aumenta en 2π . En consecuencia, si $\psi(z) = C \log z$ o $\chi(z) = Dz \log z$ (donde C y D son constantes complejas) la ecuación (103) dará un valor no nulo para $F_x + iF_y$. Asimismo la función $\chi(z) = D \log z$ dará un valor no nulo de M si D es imaginario y nulo si D es real.

60. Coordenadas curvilíneas. Puede considerarse que las coordenadas polares r y θ (fig. 124), especifican la posición de un punto mediante la intersección de una circunferencia (de radio r) y de una recta

¹ Estas ecuaciones fundamentan la analogía con la deflexión transversal de las placas elásticas. Véase R. D. Mindlin, *Quart. Applied Math.*, vol. 4, pág. 279, 1946.

radial (de dirección θ). El paso de las coordenadas cartesianas a las polares se realiza mediante las ecuaciones

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \arctg \frac{y}{x} = \theta \quad (a)$$

La primera, cuando el parámetro r toma diversos valores, representa la familia de circunferencias y la segunda, al variar el valor de θ , la familia de rectas radiales.

Las ecuaciones (a) son un caso particular de las

$$F_1(x, y) = \xi, \quad F_2(x, y) = \eta \quad (b)$$

Dando unos valores determinados a ξ y η (uno a cada parámetro) estas ecuaciones representarán dos curvas, las cuales se cortarán si hemos elegido convenientemente las funciones $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$. Para nuevos valores de ξ y η obtendremos nuevas curvas y nuevos puntos de intersección de forma que cada punto del plano xy podrá ser caracterizado por un cierto valor de ξ y η [los valores que hagan que las dos curvas dadas por (b) pasen por él] y ξ y η pueden ser consideradas como las «coordenadas» del punto. Puesto que dados los valores de ξ y η el punto que definen es el de intersección de dos curvas, estas coordenadas son llamadas *coordenadas curvilíneas*¹.

En el capítulo 4 vimos la utilidad de las coordenadas polares en el tratamiento de problemas de contornos circulares concéntricos. En tales contornos las tensiones y los desplazamientos son función solamente de θ puesto que en ellos r es constante. Si los contornos consisten en otras curvas, elipses por ejemplo, es conveniente usar las coordenadas curvilíneas en las que una de las coordenadas se mantenga constante en cada contorno.

Despejando x e y de las ecuaciones (b) obtendremos las expresiones

$$x = f_1(\xi, \eta), \quad y = f_2(\xi, \eta) \quad (c)$$

las cuales son, por lo general, más útiles que las (b). Consideremos, por ejemplo, las dos ecuaciones

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \operatorname{sen} \eta \quad (d)$$

en las que c es una constante. Eliminando η se obtiene:

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1$$

y si ξ es constante ésta es la ecuación de una ellipse de semiejes $c \operatorname{ch} \xi$ y $c \operatorname{sh} \xi$, cuyos focos se encuentran en $x = \pm c$. Para distintos valores de

¹ La teoría general de las coordenadas curvilíneas fue desarrollada por Lamé en su libro *Leçons sur les coordonnées curvillignes*, París, 1859.

se obtienen distintas elipses, todas con los mismos focos que forman, por tanto, una familia de *elipses homofocales* (fig. 126). En una cualquiera de estas elipses ξ es constante y η varía, de igual forma que sobre una circunferencia, en coordenadas polares, r es constante y θ varía. De hecho, en el caso presente η es el ángulo de excentricidad¹ de los puntos de la ellipse.

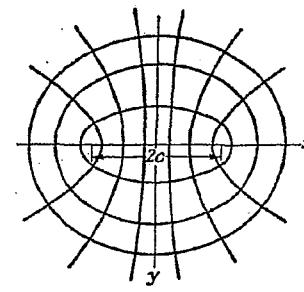


FIG. 126

Si haciendo uso de la ecuación $\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi = 1$, eliminamos ahora ξ de las ecuaciones (d) tendremos

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sen}^2 \eta} = 1 \quad (e)$$

ecuación que para un valor constante de η representa una hipérbola, cuyos focos son los mismos de las elipses. La ecuación (e) representa, por lo tanto, una familia de hipérbolas homofocales, sobre cualquiera de las cuales η es constante y ξ varía. Estas coordenadas reciben el nombre de *elípticas*.

Las dos ecuaciones (d) son equivalentes a $x + iy = c \operatorname{cosh}(\xi + i\eta)$ o

$$z = c \operatorname{ch} \xi \quad (f)$$

donde $\xi = \xi + i\eta$. Estamos evidentemente frente a un caso particular de la relación

$$z = f(\xi) \quad (g)$$

lo que además de definir z como función de ξ permite despejar ξ y expresarla como función de z . ξ y η son entonces las partes real e imaginaria y por lo tanto satisfacen las ecuaciones (e), de Cauchy-Riemann, y las (f) y (g), de Laplace, del § 55.

¹ Si a y b son las coordenadas polares de un punto de la circunferencia que circunscribe una ellipse de semiejes a y b , la perpendicular por ese punto al eje x corta a la ellipse en el punto $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$; θ es llamado el ángulo de excentricidad de ese punto de la ellipse.

Todas las ecuaciones que vamos a usar en este capítulo serán deducidas de ecuaciones del tipo (g) y en consecuencia tendrán algunas propiedades especiales. Si el punto x, y tiene las coordenadas curvilíneas ξ, η , las del punto vecino $x + dx, y + dy$ serán $\xi + d\xi, \eta + d\eta$ y dado que existen dos relaciones del tipo (c) podremos escribir

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (h)$$

Si solamente varía ξ los incrementos dx, dy corresponden a un elemento de arco ds que pertenece a una curva $\eta = \text{cte.}$, y entonces:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \quad (i)$$

de donde

$$(ds_\xi)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] (d\xi)^2 \quad (j)$$

Dado que $z = f(\xi)$, tendremos que

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{d}{d\xi} f(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = f'(\xi) \quad (k)$$

donde

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

Puesto que además toda cantidad compleja puede escribirse en la forma $J \cos \alpha + iJ \sin \alpha = Je^{i\alpha}$ (J y α reales), podremos poner

$$f'(\xi) = Je^{i\alpha} \quad (l)$$

deduciéndose entonces de la ecuación (k)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = J \cos \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = J \sin \alpha \quad (m)$$

y de la (j)

$$ds_\xi = J d\xi$$

Partiendo de las ecuaciones (i) y (m) podemos calcular la pendiente de ds_ξ , la cual es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y / \partial \xi}{\partial x / \partial \xi} = \tan \alpha \quad (n)$$

de donde deducimos que α , dado por la ecuación (l), es el ángulo formado por la tangente a la curva $\eta = \text{cte.}$, en la dirección de las ξ crecientes,

y el eje x (fig. 127). Si de forma semejante varía solamente η , los incrementos dx, dy , dados por las ecuaciones (h), corresponden a un elemento de arco ds_η perteneciente a una curva $\xi = \text{cte.}$, y en lugar de las ecuaciones (i) tendremos:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Procediendo como hemos hecho más arriba obtenemos que

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -J \sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = J \cos \alpha$$

y también que $ds_\eta = J d\eta$. Asimismo ocurre que

$$dy/dx = -\operatorname{ctg} \alpha$$

resultado que comparado con la ecuación (n) nos dice que las curvas $\xi = \text{cte.}$ y $\eta = \text{cte.}$ se cortan ortogonalmente (fig. 127).

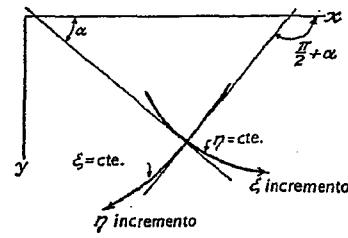


FIG. 127.

Considerando, por ejemplo, las coordenadas elípticas definidas por la ecuación (f) tendremos:

$$f'(\xi) = c \operatorname{sh} \xi = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta + i c \operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \eta = Je^{i\alpha}$$

Comparando las partes real e imaginaria de la última igualdad se obtiene

$$J \cos \alpha = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta, \quad J \sin \alpha = c \operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \eta$$

y, por tanto,

$$J^2 = c^2 (\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta) = \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{cos} 2\eta) \quad (o)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctgh} \xi \operatorname{tg} \eta \quad (p)$$

61. Componentes de la tensión en coordenadas curvilíneas.

Las ecuaciones (99), (100) y (102) dan las componentes cartesianas de los desplazamientos y las tensiones en función de los potenciales complejos $\psi(z)$ y $\chi(z)$. Si usamos coordenadas curvilíneas podremos expresar los potenciales complejos en función de ξ , haciendo uso para ello de la ecua-

ción, del tipo de la (g) del § 60, que define las coordenadas curvilíneas. Hecho esto, el expresar σ_x , σ_y , τ_{xy} en función de ξ y η no presentará ninguna dificultad.

En general, sin embargo, es conveniente especificar la tensión mediante las siguientes componentes:

- σ_ξ , componente normal a la curva $\xi = \text{cte.}$
- σ_η , componente normal a la curva $\eta = \text{cte.}$
- $\tau_{\xi\eta}$, componente tangencial a ambas curvas

las cuales son representadas en la figura 128. Comparando esta figura y la 127 con la 12 vemos que σ_ξ y $\tau_{\xi\eta}$ corresponden a σ y τ en la figura 12. Podemos por lo tanto usar las ecuaciones (13), resultando:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2u + \tau_{xy} \sin 2u \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2u + \tau_{xy} \cos 2u\end{aligned}$$

De forma semejante sustituyendo u por $\pi/2 + \alpha$ se obtiene la ecuación:

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2u - \tau_{xy} \sin 2u$$

que junto con las anteriores nos permite obtener las siguientes¹:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y \quad (105)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2ia}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \quad (106)$$

El factor e^{2ia} , que se presenta cuando usamos coordenadas curvilíneas, viene definido por $z = f(\xi)$ y puede obtenerse a partir de la ecuación (l) del § 60. Esta ecuación junto con su conjugada, que se obtiene cambiando i por $-i$, nos da

$$f'(\xi) = Je^{ia}, \quad \bar{f}'(\bar{\xi}) = J\bar{e}^{-ia}$$

de donde

$$e^{2ia} = \frac{f'(\xi)}{\bar{f}'(\bar{\xi})} \quad (107)$$

En coordenadas elípticas, por ejemplo, $f'(\xi) = c \operatorname{sh} \xi$

$$e^{2ia} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{sh} \bar{\xi}} \quad (q)$$

Determinado así el valor de e^{2ia} , las ecuaciones (105) y (106) expresan σ_ξ , σ_η y $\tau_{\xi\eta}$ en función de σ_x , σ_y y τ_{xy} .

Los desplazamientos en coordenadas curvilíneas son especificados mediante las componentes u_ξ de sentido el de las ξ crecientes (fig. 127),

¹ Las ecuaciones (105), (106) y (108) fueron obtenidas por Kolosoff, loc. cit.

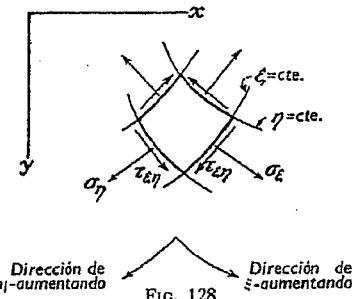
y u_η , de sentido el de las η crecientes. Si u y v son las componentes cartesianas de los desplazamientos tendremos:

$$u_\xi = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad u_\eta = v \cos \alpha - u \sin \alpha$$

y por lo tanto

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-ia}(u + iv) \quad (108)$$

Haciendo uso de la ecuación (99), con $z = f(\xi)$, y de la (107) podemos expresar u_ξ y u_η en función de ξ y η , una vez que hayamos elegido los potenciales complejos $\psi(z)$ y $\chi(z)$.



Dirección de η -aumentando Dirección de ξ -aumentando
FIG. 128

Combinando las ecuaciones (99), (100) y (102) con las (105), (106) y (108) obtendremos las siguientes expresiones de las componentes de las tensiones y los desplazamientos (en la última de ellas se ha sustituido i por $-i$):

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) \quad (109)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2e^{2ia}[\bar{z}\psi'(z) + \chi''(z)] \quad (110)$$

$$2G(u_\xi - iu_\eta) = e^{2ia} \left[\frac{3 - \nu}{1 + \nu} \bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{z}\psi'(z) - \chi'(z) \right] \quad (111)$$

las cuales serán usadas más adelante en la solución de diversos problemas en los que existen contornos curvilíneos.

Problemas

1. Demostrar que en coordenadas polares, dadas por $z = e^\alpha$, la ecuación (107) se convierte en $e^{2ia} = e^{2i\eta}$ y $\alpha = \eta = \theta$.

2. Obtener la solución en coordenadas polares de los siguientes problemas, mediante los potenciales complejos que se indican, y calcular las componentes de las tensiones y los desplazamientos. Las letras mayúsculas indican constantes que pueden ser complejas:

- a) Anillo ($a < r < b$) sobre cuyos contornos actúan dos pares iguales y opuestos M causados por esfuerzos tangenciales (fig. 122). $\psi(z) = 0$, $\chi(z) = A \log z$.
 b) Anillo sometido a una presión interna p_i y otra externa p_o (véase el § 26). $\psi(z) = Az$, $\chi(z) = B \log z$.
 c) Flexión simple de una barra curva y «deslocación rotacional» de un anillo (véanse los §§ 27 y 29). $\psi(z) = Az \log z + Bz$, $\chi(z) = C \log z$.
 d) El problema resuelto en el § 31. $\psi(z) = Ax^2 + B \log z$, $\chi(z) = Cz \log z + D/z$.
 e) Placa con orificio circular sometida a tensión (§ 32). $\psi(z) = Az + B/z$, $\chi(z) = C \log z + Dz^2 + F/z^2$.
 f) Distribución radial de tensiones del § 33. $\psi(z) = A \log z$, $\chi(z) = Bz \log z$.
 g) Placa indefinida cargada por una fuerza concentrada en un punto (§ 38). $\psi(z) = A \log z$, $\chi(z) = Bz \log z$.

62. Soluciones en coordenadas elípticas. Placa sometida a un esfuerzo de tracción uniforme. Las coordenadas elípticas ξ y η que hemos representado en la figura 126 y considerado ya en el § 60 están definidas por las ecuaciones:

$$z = c \operatorname{ch} \zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (a)$$

de las cuales se deduce:

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$$

y

$$\frac{dz}{d\xi} = c \operatorname{sh} \zeta, \quad e^{2ia} = \frac{\operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh} \xi} \quad (b)$$

Supuesta dada una elipse, de semiejes a y b , correspondiente al valor $\xi = \xi_0$ tendremos:

$$c \operatorname{ch} \xi_0 = a, \quad c \operatorname{sh} \xi_0 = b \quad (c)$$

de donde se deduce, que dado un miembro de la familia de elipses toda la familia tanto de elipses como de hipérbolas (véase el § 60) está definida. Si ξ es pequeño, la elipse es muy estrecha convirtiéndose para $\xi = 0$ en el segmento de longitud $2c$ que une los focos. Si, por el contrario, damos a ξ valores positivos cada vez mayores, la elipse aumenta tiendiendo a una circunferencia de radio infinito en el límite $\xi = \infty$. Cuando un punto da una vuelta completa a una elipse cualquiera, el valor correspondiente de η toma todos los valores que van de 0 a 2π , recordando en este aspecto esta variable al ángulo θ de las coordenadas polares. Debido a esto, la continuidad de las componentes de las tensiones y los desplazamientos, exige que sean funciones periódicas de η , con período 2π , de forma que su valor sea igual para $\eta = 0$ y $\eta = 2\pi$.

Consideremos ahora el caso de una placa indefinida sometida a una tracción uniforme S , sólo alterada por la presencia de un agujero elíptico

de semiejes a y b , sobre cuyo contorno no actúa ninguna fuerza exterior¹. Estas condiciones significan que:

$$\sigma_x = \sigma_y = S \quad \text{en el infinito } (\xi \rightarrow \infty) \quad (d)$$

$$\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0 \quad \text{sobre el contorno elíptico del orificio, donde } \xi \text{ toma el valor } \xi_0 \quad (e)$$

De las ecuaciones (100) y (102) se deduce que la condición (d) es satisfecha si

$$2 \operatorname{Re} \psi'(z) = S, \quad \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z) = 0 \text{ a infinito} \quad (f)$$

Puesto que las tensiones y los desplazamientos han de ser, por razones de continuidad, funciones periódicas de η , con período 2π , tomamos expresiones de $\psi(z)$ y $\chi(z)$ que den una función de tensión de la misma periodicidad. Tales expresiones son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} n\xi &= \operatorname{sh} n\xi \cos n\eta + i \operatorname{ch} n\xi \operatorname{sen} n\eta \\ \operatorname{ch} n\xi &= \operatorname{ch} n\xi \cos n\eta + i \operatorname{sh} n\xi \operatorname{sen} n\eta \end{aligned}$$

en las que n es un entero. La función $\chi(z) = Bc^2 \zeta$, en la que B es una constante, es también adecuada para este problema.

Tomando $\psi(z) = Ac \operatorname{sh} \zeta$ ($A = \text{cte.}$) y despejando de la primera de las ecuaciones (b) $d\xi/dz$, recíproca de $dz/d\xi$, obtenemos

$$\psi'(z) = Ac \operatorname{ch} \zeta \cdot \frac{d\xi}{dz} = A \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh} \zeta} = A \operatorname{ctgh} \zeta \quad (g)$$

A una distancia infinita del origen, ξ es infinita y $\operatorname{ctgh} \zeta$ vale uno, de forma que la primera de las condiciones (f) exige que $2A = S$. De (g) se deduce además que

$$\psi''(z) = -\frac{A}{c} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \zeta} \quad (h)$$

y

$$\bar{z}\psi''(z) = -A \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^3 \zeta} \quad (i)$$

Para $\chi(z) = Bc^2 \zeta$ ($B = \text{cte.}$) tenemos

$$\chi'(z) = \frac{Bc}{\operatorname{sh} \zeta}, \quad \chi''(z) = -B \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^3 \zeta} \quad (j)$$

¹ Las primeras soluciones de la placa con orificio elíptico fueron dadas por Kolosoff, loc. cit., y C. E. Inglis, *Trans. Inst. Naval Arch. Londres*, 1913; *Engineering*, vol. 95, pág. 415, 1913. Véase también T. Pöschl, *Math. Z.*, vol. 11, pág. 95, 1921. El método aquí empleado es el de Kolosoff. El mismo método fue aplicado a varios problemas bidimensionales por A. C. Stevenson, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 184, págs. 129 y 218, 1945. Más adelante, en este mismo capítulo, se darán otras referencias.

ecuaciones de las que junto con la (i), se deduce que tanto $\chi''(z)$ como $\bar{z}\psi''(z)$ se anulan en el infinito, siendo por lo tanto satisfecha la segunda de las condiciones (f).

La condición (e) se cumple eligiendo convenientemente la constante B . Restando la ecuación (110) de la (109) obtenemos

$$\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} = \psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) - e^{2ia} [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad (k)$$

que sustituyendo los valores que acabamos de obtener y el de e^{2ia} , dado en la segunda de las ecuaciones (b), queda:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} &= A \left(\frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh} \xi} + \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh} \bar{\xi}} \right) + \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{sh} \bar{\xi}} \left(A \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh}^3 \bar{\xi}} + B \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^3 \xi} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \xi \operatorname{sh} \bar{\xi}} \{ A [\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} (\xi + \bar{\xi}) + \operatorname{ch} \bar{\xi}] + B \operatorname{ch} \xi \} \end{aligned} \quad (l)$$

En el contorno del agujero elíptico $\xi = \xi_0$, $\xi + \bar{\xi} = 2\xi_0$, y $\bar{\xi} = 2\xi_0 - \xi$, reduciéndose (l) a

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \xi \operatorname{sh} \bar{\xi}} (A \operatorname{ch} 2\xi_0 + B) \operatorname{ch} \xi$$

de donde se deduce que la condición (e) es satisfecha si

$$B = -A \operatorname{ch} 2\xi_0 = -\frac{1}{2}S \operatorname{ch} 2\xi_0 \quad (m)$$

Obtenemos pues

$$\psi(z) = \frac{1}{2}Sc \operatorname{sh} \xi, \quad \chi(z) = -\frac{1}{2}Sc^2 \operatorname{ch} 2\xi_0 \cdot \xi \quad (n)$$

Los potenciales complejos obtenidos (n) son tales que las condiciones de contorno son satisfechas, pero no podemos asegurar que representen la solución de nuestro problema, hasta que no sepamos que los desplazamientos de ellos obtenidos no presentan discontinuidades. Las componentes cartesianas de los desplazamientos, obtenidas mediante la ecuación (99) vienen dadas por la ecuación

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} Ac \operatorname{sh} \xi - Ac \operatorname{ch} \xi \operatorname{ctgh} \bar{\xi} \frac{Bc}{\operatorname{sh} \bar{\xi}} \quad (o)$$

donde $A = S/2$, B tiene el valor dado por la ecuación (m) y las funciones hiperbólicas que en ella aparecen tienen partes reales e imaginarias periódicas en η . De esta forma dando la vuelta completa a una elipse en la que $\xi = \text{cte.}$, u y v volverán a tomar los valores iniciales. Los potenciales complejos (n) representan, pues, la solución del problema.

La componente σ_η de la tensión en el contorno del orificio puede calcularse a partir de la ecuación (109) dado que en esos puntos σ_ξ es cero.

Sustituyendo en (109) el valor de $\psi'(z)$ dado por la ecuación (g) en la que se pone $A = S/2$ tenemos:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) = 2S \operatorname{Re} \operatorname{ctgh} \xi$$

Dado que

$$\operatorname{ctgh} \xi = \frac{e^{\xi+i\eta} + e^{-\xi-i\eta}}{e^{\xi+i\eta} - e^{-\xi-i\eta}} = \frac{(e^{\xi+i\eta} + e^{-\xi-i\eta})}{(e^{\xi+i\eta} - e^{-\xi-i\eta})} \cdot \frac{(e^{\xi-i\eta} - e^{-\xi+i\eta})}{(e^{\xi-i\eta} - e^{-\xi+i\eta})} \quad (p)$$

se obtiene operando los paréntesis

$$\operatorname{ctgh} \xi = \frac{\operatorname{sh} 2\xi - i \operatorname{sen} 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{cos} 2\eta}$$

En consecuencia:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \frac{2S \operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{cos} 2\eta}$$

y en el contorno del orificio

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = \pm \frac{2S \operatorname{sh} 2\xi_0}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{cos} 2\eta}$$

Los valores máximos que se dan en los extremos del eje mayor, donde $\eta = 0$ y π y $\operatorname{cos} 2\eta = 1$, son

$$(\sigma_\eta)_{\max} = \frac{2S \operatorname{sh} 2\xi_0}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - 1}$$

como se deduce fácilmente de las ecuaciones (c)

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \operatorname{sh} 2\xi_0 = \frac{2ab}{c^2}, \quad \operatorname{ch} 2\xi_0 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

quedando entonces $(\sigma_\eta)_{\max}$ así:

$$(\sigma_\eta)_{\max} = 2S \frac{a}{b}$$

lo que indica que el valor máximo de la tensión será mayor cuanto más estrecha sea la elipse.

El valor mínimo de $(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0}$ se da en los extremos del eje menor donde $\operatorname{cos} 2\eta = -1$. Allí:

$$(\sigma_\eta)_{\min} = \frac{2S \operatorname{sh} 2\xi_0}{\operatorname{ch} 2\xi_0 + 1} = 2S \frac{b}{a}$$

Cuando $a = b$, la elipse se convierte en un círculo y $(\sigma_\eta)_{\max}$ y $(\sigma_\eta)_{\min}$ se hacen iguales a $2S$, lo que concuerda con los valores obtenidos para el caso en que el orificio es circular (véase el § 32).

Los desplazamientos que por supuesto son continuos y vienen dados por funciones uniformes y continuas, se obtienen a partir de la ecuación (n) y de la (111) ó (99).

El caso en que en el interior del orificio existe una presión uniforme S^t y las tensiones en el infinito son nulas se resuelve fácilmente combinando la solución anterior con el estado tensional uniforme $\sigma_\xi = \sigma_\eta = -S$ deducible del potencial complejo $\psi(z) = -Sz/2$.

63. Influencia de un orificio elíptico en una placa sometida a tracción simple. Consideremos ahora el caso de una placa indefinida, que tiene un orificio elíptico, sometida a una tracción simple S cuya dirección forma el ángulo β con el eje x , el cual se elige coincidente con el eje mayor de la elipse (fig. 129). Mediante el método de los poten-

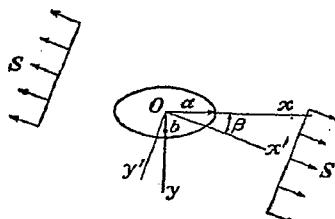


FIG. 129

ciales complejos, no es más difícil obtener la solución de este problema general que la de los casos particulares, en los que el eje mayor de la elipse es paralelo o normal a S^t permitiéndonos determinar, de otra parte, la influencia de un agujero elíptico sobre todo estado tensional plano uniforme, que venga especificado por el valor de las tensiones principales en el infinito y por la orientación de las mismas respecto a los ejes de la elipse.

Sean Ox' y Oy' los ejes cartesianos que se obtienen al hacer coincidir Ox con la dirección S , girándolo el ángulo β . Las ecuaciones (105) y (106) quedan entonces así:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} = e^{2i\beta}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$

Dado que en el infinito $\sigma_{x'} = S$, y $\sigma_{y'} - \tau_{x'y'} = 0$, tendremos que:

$$\sigma_x + \sigma_y = S, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -Se^{-2i\beta} \text{ en el infinito}$$

¹ El caso de presión no uniforme ha sido considerado por I. N. Sneddon y H. A. Elliott, Quart. Applied Math., vol. 4, pág. 262, 1946.

² Véanse las referencias citadas en la nota.

deduciéndose de las ecuaciones (100) y (102) que:

$$4 \operatorname{Re} \psi'(z) = S, \quad 2[\bar{\zeta}\psi''(z) + \chi''(z)] = -Se^{-2i\beta} \text{ en el infinito} \quad (a)$$

mientras que en el contorno del orificio, $\xi = \xi_o$, tenemos que $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$.

Todas estas condiciones de contorno son satisfechas tomando funciones $\psi(z)$, $\chi(z)$ del tipo¹

$$4\psi(z) = Ac \operatorname{ch} \xi + Bc \operatorname{sh} \xi$$

$$4\chi(z) = Cc^2\xi + Dc^2 \operatorname{ch} 2\xi + Ec^2 \operatorname{sh} 2\xi$$

donde A, B, C, D y E son constantes a determinar. Dado que $z = c \operatorname{ch} \xi$, el término $Ac \operatorname{ch} \xi$ se reduce a Az y su contribución a la función de tensión [ecuación (97)] será la expresión $\operatorname{Re} Azz = \operatorname{Re} Ar^2$. De esta expresión se deduce que A ha de ser real pues de no ser así el valor de la misma sería cero. Si insertarmos las expresiones anteriores de $\psi(z)$ y $\chi(z)$ en la ecuación (104), aplicada a una curva cerrada AB que rodee al orificio, obtenemos que todos los términos excepto el que contiene a C se anulan por ser funciones hiperbólicas, periódicas en η , con período 2π . El término que contiene a C es $\operatorname{Re}[Cc^2(\xi + i\eta)]_A^B$ y puesto que debe anularse deducimos que C debe ser también real.

Las constantes B, D y E son complejas y pueden escribirse

$$B = B_1 + iB_2, \quad D = D_1 + iD_2, \quad E = E_1 + iE_2 \quad (b)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores de $\psi(z)$ y $\chi(z)$ en las condiciones (a) obtenemos

$$A + B_1 = S, \quad 2(D + E) = -Se^{-2i\beta} \quad (c)$$

Restando ahora la ecuación (110) de la (109) con el fin de obtener $\sigma_\xi - ir_{\xi\eta}$, resulta:

$$\begin{aligned} 4(\sigma_\xi - ir_{\xi\eta}) &= \cosh \bar{\zeta}[(2A + B \operatorname{ctgh} \bar{\zeta}) \operatorname{sh} \bar{\zeta}] \\ &\quad + (\bar{B} + B \cosh^2 \bar{\zeta}) \operatorname{ch} \bar{\zeta} + (C + 2E) \cosh \bar{\zeta} \operatorname{ctgh} \bar{\zeta} \\ &\quad - 4D \operatorname{sh} \bar{\zeta} - 4E \operatorname{ch} \bar{\zeta} \end{aligned}$$

En el contorno del orificio $\xi = \xi_o$ y $\zeta = 2\xi_o - \bar{\zeta}$. Llevando este valor a $\operatorname{sh} \bar{\zeta}$ y $\operatorname{ch} \bar{\zeta}$ en la expresión anterior y desarrollando las funciones $\operatorname{sh}(2\xi_o - \bar{\zeta})$ y $\operatorname{ch}(2\xi_o - \bar{\zeta})$, vemos que la expresión contenida en el corchete se reduce a

$$\begin{aligned} &(2A \operatorname{sh} 2u - 2iB_2 \operatorname{ch} 2u - 4E) \operatorname{ch} \bar{\zeta} \\ &\quad - (2A \operatorname{ch} 2u - 2iB_2 \operatorname{sh} 2u + 4D) \operatorname{sh} \bar{\zeta} \\ &\quad + (C + 2E + B \operatorname{ch} 2u) \operatorname{ctgh} \bar{\zeta} \operatorname{cosh} \bar{\zeta} \end{aligned}$$

¹ Stevenson, loc. cit.

desarrollo que se anula, ocurriendo lo mismo por lo tanto a $\sigma_\xi = i\tau_{\xi\eta}$ en el agujero, si los coeficientes de $\operatorname{ch} \zeta$, $\operatorname{sh} \zeta$, $\operatorname{ctgh} \zeta$ y $\operatorname{cosh} \zeta$ son cero. Tenemos entonces tres relaciones, que junto con las ecuaciones (c) deben ser satisfechas por las constantes A , B , C , D y E . Puesto que A y C son reales existen en realidad nueve ecuaciones que han de ser cumplidas por A y C y por las partes reales e imaginarias de B , D y E : B_1 , B_2 , D_1 , D_2 , E_1 y E_2 . El sistema formado por esas ecuaciones, es compatible, y sus soluciones son

$$\begin{aligned} A &= Se^{2\xi} \cos 2\beta & D &= -\frac{1}{2}Se^{2\xi} \operatorname{ch} 2(\xi_0 + i\beta) \\ B &= S(1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta}) & E &= \frac{1}{2}Se^{2\xi_0} \operatorname{sh} 2(\xi_0 + i\beta) \\ C &= -S(\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\beta) \end{aligned}$$

En consecuencia, los potenciales complejos vienen dados por

$$\begin{aligned} 4\psi(x) &= Sc[e^{2\xi} \cos 2\beta \operatorname{ch} \zeta + (1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta}) \operatorname{sh} \zeta] \\ 4\chi(x) &= -Sc^2[(\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{ch} 2\beta)\zeta + \frac{1}{2}e^{2\xi_0} - \operatorname{ch} 2(\zeta - \xi_0 - i\beta)] \end{aligned}$$

de los cuales se obtienen desplazamientos aplicando la ecuación (111). Como puede verse fácilmente vienen dados por una función uniforme.

Dado que σ_ξ es cero en el orificio podremos obtener σ_ξ en esos mismos puntos aplicando la ecuación (109). Entonces:

$$(\sigma_\xi)_{\xi=\xi_0} = S \frac{\operatorname{sh} 2\xi_0 + \cos 2\beta - e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta)}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

Cuando la tracción S es perpendicular al eje mayor de la elipse ($\beta = \pi/2$)

$$(\sigma_\xi)_{\xi=\xi_0} = Se^{2\xi_0} \left[\frac{\operatorname{sh} 2\xi_0(1 + e^{-2\xi_0})}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1 \right]$$

y el valor máximo, que se presenta en los extremos del eje mayor ($\cos 2\eta = 1$) es:

$$S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

valor que aumenta sin límite al estrecharse el orificio. Cuando $a = b$ obtenemos el mismo resultado que encontramos en el § 32 para un agujero circular. El valor mínimo de la tensión en el contorno del orificio se da en los extremos del eje menor y su valor, $-S$, coincide con el obtenido para el agujero circular.

Si la tracción S es paralela al eje mayor ($\beta = 0$), el máximo valor de σ_η en el borde del agujero, que se presenta en los extremos del eje menor, es $S(1 + 2b/a)$, valor que tiende a S al estrecharse el orificio. En los extremos del eje mayor la tensión es $-S$ cualquiera que sea la relación b/a .

La influencia de un orificio elíptico en un estado de esfuerzo cortante simple aplicado paralelamente a los ejes x e y se estudia fácilmente superponiendo los casos de tracción S con $\beta = \pi/4$ y tracción $-S$ con $\beta = 3\pi/4$. Entonces

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = -2S \frac{e^{2\xi_0} \operatorname{sen} 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

que se anula en los extremos de los ejes mayor y menor y que toma su valor máximo

$$\pm S \frac{(a+b)^2}{ab}$$

en los puntos determinados por: $\operatorname{tg} \eta - \operatorname{tgh} \xi_0 = b/a$. Si la elipse es muy estrecha estos valores son muy grandes y, los puntos donde se presentan están muy próximos a los extremos del eje mayor.

Asimismo se han obtenido las soluciones para los casos de orificio elíptico, en una placa sometida en su plano a flexión simple^{1,2} y a una distribución parabólica de esfuerzos tangenciales tal como la que se da en una viga rectangular³, agujero elíptico sometido en los extremos a fuerzas concentradas iguales y opuestas⁴ e inclusiones elípticas rígidas o elásticas en una placa sometida a tracción⁵, habiéndose considerado formas más generales de la función de tensión ϕ en coordenadas elípticas⁶. Los potenciales complejos que corresponden a las mismas se construyen a partir de las funciones que acabamos de usar o citar, junto con las análogas a las empleadas en los problemas del § 61 cuando se incluyen pares, fuerzas concentradas y dislocaciones.

64. Contornos hiperbólicos. Entalladuras. Como vimos en los §§ 60 y 62, en coordenadas elípticas las curvas $\eta = \text{cte.}$ son hipérbolas y los intervalos de variación de η y ξ son de 0 a 2π y de 0 a ∞ , respectivamente.

Sea η_0 el valor constante de η a lo largo del arco de hipérbola BA de la figura 130. Dado que x e y son positivos en ese arco, el valor η_0 estará comprendido entre 0 y $\pi/2$. En los arcos BC , ED y EF , η valdrá $2\pi - \eta_0$, $\pi - \eta_0$ y $\pi + \eta_0$ respectivamente.

Consideraremos la placa $ABCDEF$, contenida entre los contornos hiper-

¹ K. Wolf, *Z. tech. Physik*, 1922, pág. 160.

² H. Neuber, *Ingenieur-Archiv*, vol. 5, pág. 242, 1934. En el libro de Neuber *Kerbspannungstheorie*, Berlín, 1937, se da esta solución y otras varias referentes a ejes y hipérbolas.

³ P. S. Symonds, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 13, pág. A-183, 1946.

⁴ A. E. Green, *ibid.*, vol. 14, pág. A-246, 1947, da una solución en forma finita.

⁵ N. J. Muschel'svili, *Zeit. angew. Math. Mech.*, vol. 13, pág. 264, 1933; L. H. Donnell, *Theodore von Kármán Anniversary Volume*, pág. 293, Pasadena, 1941.

⁶ E. G. Coker y L. N. G. Filon, *Photoelasticity*, págs. 123-535, Cambridge University Press, 1931; A. Timpe, *Math. Z.*, vol. 17, pág. 189, 1923.

bólicos, que está sometida a una tracción de dirección Oy^1 . La tensión en el infinito debe anularse para que sea finita en la sección EOB . Potenciales complejos que satisfacen esta condición, la de contorno (que están libres de fuerzas) y las condiciones de simetría respecto Ox y Oy son las

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}Ai\xi, \quad \chi(z) = -\frac{1}{2}Ai\xi - Bci\sinh\xi \quad (a)$$

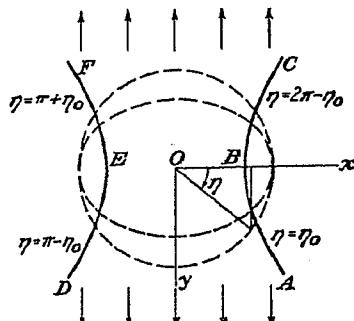


FIG. 130.

en las que A y B son constantes reales y $z = c \operatorname{ch} \xi$. Tenemos entonces

$$\psi(z) = -\frac{iA}{2c \operatorname{sh} \xi}, \quad \chi'(z) = -\frac{1}{2}Ai\xi - \left(\frac{1}{2}A + B\right)i \operatorname{ctgh} \xi \quad (b)$$

De la ecuación (103) del § 59 se deduce que sobre el contorno hiperbólico $\eta = \eta_0$ no actuará ninguna fuerza, si la función

$$\psi(z) + z\psi'(z) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad (c)$$

es constante en él, o lo que es equivalente si lo es su conjugada, que como se deduce de (a) y (b) es

$$A\eta - \frac{1}{2}Ai \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh} \xi} - \left(\frac{1}{2}A + B\right)i \operatorname{ctgh} \xi. \quad (d)$$

En la hipérbola $\eta = \eta_0$ tenemos que $\bar{\xi} = \xi - 2i\eta_0$ y la expresión anterior se convierte en

$$A\eta_0 - \frac{1}{2}A \operatorname{sen} 2\eta_0 - \left(\frac{1}{2}A \cos 2\eta_0 + \frac{1}{2}A + B\right)i \operatorname{ctgh} \xi$$

¹ Este problema (también el caso en que las cargas son tangenciales) ha sido resuelto por A. A. Griffith, *Tech. Rept. Aeronaut. Research Comm.* Gran Bretaña, 1927-1928, vol. II, pág. 668; y H. Neuber, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 13, pág. 439, 1933; o *Kerbspammlungslehre*, pág. 35, Berlin, 1938.

que será una constante si la cantidad contenida en el paréntesis se anula, para lo cual,

$$B = -A \cos^2 \eta_0. \quad (e)$$

Para obtener la resultante de la fuerza transmitida podemos aplicar la ecuación (103) del § 59 a la sección EOB de la figura 130, la cual coincide con la parte inferior de la elipse que se obtiene para $\xi = 0$, que está comprendida entre las hipérbolas $\eta = \eta_0$ y $\eta = \pi - \eta_0$. En este elipse $\xi = i\eta$, $\bar{\xi} = -i\eta$ y de las ecuaciones (103), (c) y (d) resulta

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= i[A\eta - (A + B)\operatorname{ctgh} \eta] \frac{1}{\eta - \eta_0} \\ &= i[A(\pi - 2\eta_0 + 2\operatorname{ctgh} \eta_0) + 2B\operatorname{ctgh} \eta_0] \end{aligned}$$

Puesto que dimos a A y B valores reales F_x es cero y usando la ecuación (e)

$$F_y = -A(\pi - 2\eta_0 + \operatorname{sen} 2\eta_0)$$

de donde podemos determinar A cuando conocemos la fuerza total F_y . Las componentes de las tensiones y los desplazamientos se deducen fácilmente aplicando las ecuaciones (109), (110) y (111). La primera da

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = -\frac{4A}{c} \frac{\operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{cos} 2\eta}$$

y el valor de σ_ξ en el contorno hiperbólico se obtiene haciendo $\eta = \eta_0$ en esta expresión. Su valor máximo $-2A/c \operatorname{sen} \eta_0$ se da en los puntos correspondientes a $\xi = 0$ y ha sido expresado por Neuber¹ en función del radio de curvatura de la hipérbola en su «cuello». Este mismo autor ha resuelto también, por otro método, los casos en que la placa es sometida a flexión y a esfuerzos tangenciales.

65. Coordenadas bipolares. Los problemas relativos a contornos circulares no concéntricos, incluyendo el caso de un agujero circular en una placa semiindefinida, requieren generalmente el uso de las *coordenadas bipolares* ξ, η , que vienen definidas por:

$$z = ia \operatorname{ctgh} \frac{1}{2}\xi \quad \xi = \xi + i\eta \quad (a)$$

Sustituyendo $\operatorname{ctgh} \frac{1}{2}\xi$ por $(e^{i\xi} + e^{-i\xi})/(e^{i\xi} - e^{-i\xi})$ y despejando $e^{i\xi}$ se obtiene

$$\xi = \log \frac{z + ia}{z - ia} \quad (b)$$

¹ Loc. cit. Para la comparación de los resultados dados por Neuber con los obtenidos en los ensayos fotoelásticos y de fatiga de placas con entalladuras y árboles con ranuras véase R. E. Peterson y A. M. Wahl, *J. Applied Mechanics*, vol. 3, pág. 15, 1936. S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 2.^a ed., vol. 2, pág. 340 y M. M. Frocht, *Photo-elasticity*, vol. 2.

La cantidad $z + ia$ está representada en el plano xy por el segmento que une el punto $-ia$ con el z , ya que este segmento tiene por coordenadas las partes real e imaginaria de esa cantidad, la cual podrá ser representada entonces por $r_1 e^{i\theta_1}$, donde r_1 es la longitud del segmento y θ_1 el ángulo que forma con el eje x (fig. 131). De forma semejante $z - ia$ es el segmento que une los puntos ia y z y puede ser representado por $r_2 e^{i\theta_2}$. (fig. 131). La ecuación (b) se convierte entonces en

$$\xi + i\eta = \log \left(\frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2} \right) = \log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

de forma que

$$\xi = \log \frac{r_1}{r_2}, \quad \eta = \theta_1 - \theta_2 \quad (c)$$

Como puede verse en la figura 131 el ángulo formado por las rectas que unen los «polos» $-ia$ e ia con z es igual a $\theta_1 - \theta_2$ cuando el punto z está

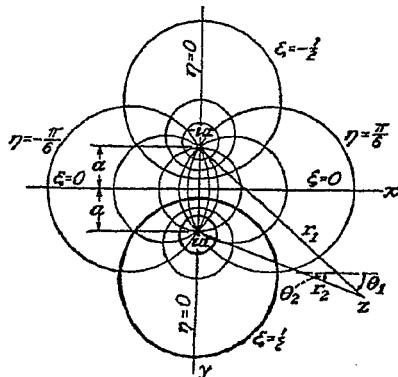


FIG. 131

a la derecha del eje y e igual a $-(\theta_1 - \theta_2)$ cuando está a la izquierda. Se sigue de ello que las curvas $\eta = \text{cte.}$ son arcos de circunferencia que pasan por los polos. Varios de ellos están representados en la figura 131. A la vista de las ecuaciones (c) está claro que las curvas $\xi = \text{cte.}$ son los lugares cuyos puntos son tales que $r_1/r_2 = \text{cte.}$ Estos lugares son circunferencias que rodean al polo ia si $r_1/r_2 > 1$, es decir, si ξ es positivo y al polo $-ia$ si ξ es negativo. Varias circunferencias de éstas aparecen en la figura 131. Forman una familia de circunferencias coaxiales teniendo a los dos polos por puntos límites.

La coordenada η pasa del valor π al $-\pi$ al cruzar el segmento de eje y que une los polos y el intervalo de valores que toma en la representación

de todos los puntos del plano es el de $-\pi$ a π . Las tensiones y desplazamientos serán entonces continuas en los puntos de ese segmento, si vienen representados por funciones periódicas en η de período 2π .

Separando las partes real e imaginaria en la ecuación (a) se obtiene¹

$$x = \frac{a \operatorname{sen} \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \quad (d)$$

Derivando la ecuación (a) tenemos:

$$J e^{i\alpha} = \frac{dz}{d\xi} = -\frac{1}{2} i a \operatorname{cosh}^2 \frac{1}{2} \xi \quad (e)$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{dz/d\xi}{d\bar{z}/d\bar{\xi}} = -\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \xi \operatorname{cosh} \frac{1}{2} \xi \quad (f)$$

66. Soluciones en coordenadas bipolares. Consideremos ahora el problema de un disco circular, en el que existe un orificio excéntrico, sometido a una presión p_o exteriormente y a una presión p_i en el interior del agujero². Las componentes de la tensión obtenidas, serán válidas también, para el caso de un tubo cuyas secciones exterior e interior sean circunferencias excéntricas.

Sean el contorno exterior e interior las circunferencias de la familia $\xi = \text{cte.}$ correspondientes a $\xi = \xi_o$ y $\xi = \xi_i$ respectivamente (dos circunferencias tales han sido representadas con trazo grueso en la fig. 131). De la expresión de y en las ecuaciones (d) del § 65 se sigue que los radios de estos círculos son $a \operatorname{cosh} \xi_o$ y $a \operatorname{cosh} \xi_i$ y que sus centros distan $a \operatorname{ctgh} \xi_o$ y $a \operatorname{ctgh} \xi_i$ del origen, de forma que conocidos los radios y la distancia entre los centros se pueden determinar a , ξ_o y ξ_i .

Al recorrer en sentido contrario al de las agujas del reloj cualquier circunferencia $\xi = \text{cte.}$, empezando por el punto que esté en el eje y de la figura 131, la coordenada η varía con continuidad desde $-\pi$ a π . En consecuencia, las funciones que den las tensiones y los desplazamientos deben tomar los mismos valores para $\eta = \pi$ y $\eta = -\pi$, cosa que se conseguirá si son funciones periódicas en η , con período 2π . Son por lo tanto apropiados, los potenciales complejos $\psi(z)$, $\chi(z)$ del tipo

$$\operatorname{ch} n\xi, \quad \operatorname{sli} n\xi \quad (g)$$

en los que n es entero, ya que cumplen los requisitos citados. Otro tanto ocurrirá con sus derivadas respecto a z , por cumplir $d\xi/dz$ [ecuación (e), § 65] esa propiedad.

¹ Véase la deducción de la ecuación (c) en el § 54.

² La solución original, expresada mediante una función de tensión real, fue obtenida por G. B. Jeffery, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 221, pág. 265, 1921.

Si aplicamos las ecuaciones (103) y (104), en las que hemos introducido las funciones (a), a cualquier circunferencia $\xi = \text{cte.}$ del disco, obtenemos que a causa de la periodicidad de las funciones, la fuerza y par correspondientes son cero, resultado éste, que por razones de equilibrio, ha de ser cumplido también por la solución completa.

Para la obtención de la misma haremos uso de la función $\chi(z) = aD\xi$, en la que D es una constante. Empleando de nuevo las ecuaciones (103) y (104), vemos que la constante D ha de ser real, pues de no ser así el momento que da la ecuación (104) no sería nulo. Aplicando la ecuación (99) se comprueba que los deslizamientos que se obtienen, tanto de esta función como de las (a), usadas indistintamente en lugar de $\psi(z)$ o $\chi(z)$, no presentan discontinuidades.

El estado equitensional uniforme, de tracción o compresión, que formará parte de la solución, se obtiene a partir del potencial complejo $\psi(z) = Az$ con A real. La función de tensión real correspondiente es, como se deduce de la ecuación (97),

$$\phi = \operatorname{Re}(\bar{z}Az) = A\bar{z}z = A(x^2 + y^2)$$

que expresada, mediante las ecuaciones (d) del § 65 en coordenadas bipolares, resulta

$$Aa^2 \frac{\operatorname{ch} \xi + \cos \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \quad (b)$$

Considerando funciones del tipo (a), con $n = 1$, se deduce que puesto que la distribución tensional del problema presente es simétrica respecto al eje y , esas funciones deberán ser elegidas de forma tal, que la función de tensión correspondiente posea también esa simetría. En consecuencia, podemos tomar

$$\psi(z) = iB \operatorname{ch} \xi, \quad \chi(z) = B' \operatorname{sh} \xi \quad (c)$$

con B y B' reales, y

$$\psi(z) = iC \operatorname{sh} \xi, \quad \chi(z) = C' \operatorname{ch} \xi \quad (d)$$

con C y C' reales

Aplicando la ecuación (97), se obtiene la función de tensión real correspondiente a (c), la cual será:

$$aB \frac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \cos \eta - \operatorname{sh} \xi \operatorname{sen}^2 \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} + B' \frac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \cos \eta - \operatorname{sh} \xi \cos^2 \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}$$

Tomando $B' = aB$, los términos en $\operatorname{sen}^2 \eta$ y $\cos^2 \eta$ de los numeradores dejan de depender de η y el numerador completo depende de η solamente

a través del término en $\cos \eta$ al igual que ocurre con la función (b). Esto mismo sucederá con los potenciales complejos (d) si tomamos $C' = aC$, obteniéndose con estas restricciones funciones más sencillas que son, sin embargo, adecuadas para nuestro problema.

Tomando por lo tanto

$$\psi(z) = iB \operatorname{ch} \xi, \quad \chi(z) = aB \operatorname{sh} \xi \quad (e)$$

obtenemos, mediante las ecuaciones (109), (110) y las (a) y (f) del § 65, las siguientes componentes de la tensión

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = 2B(2 \operatorname{sh} \xi \cos \eta - \operatorname{sh} 2\xi \cos 2\eta) \quad (f)$$

$$a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = -2B[\operatorname{sh} 2\xi - 2 \operatorname{sh} 2\xi \operatorname{ch} \xi \cos \eta + \operatorname{sh} 2\xi \cos 2\eta - i(2 \operatorname{ch} 2\xi \operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \eta - \operatorname{ch} 2\xi \operatorname{sen} 2\eta)] \quad (g)$$

De forma semejante las funciones

$$\psi(z) = iC \operatorname{sh} \xi, \quad \chi(z) = aC \operatorname{ch} \xi \quad (h)$$

nos dan

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = -2C(1 - 2 \operatorname{ch} \xi \cos \eta + \operatorname{ch} 2\xi \cos 2\eta) \quad (i)$$

$$a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = 2C[-\operatorname{ch} 2\xi + 2 \operatorname{ch} 2\xi \operatorname{ch} \xi \cos \eta - \operatorname{ch} 2\xi \cos 2\eta + i(2 \operatorname{sh} 2\xi \operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \eta - \operatorname{sh} 2\xi \operatorname{sen} 2\eta)] \quad (j)$$

Las componentes de la tensión producidas por

$$\chi(z) = aD\xi \quad (k)$$

son

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = D[\operatorname{sh} 2\xi - 2 \operatorname{sh} 2\xi \operatorname{cos} \eta - i(2 \operatorname{ch} 2\xi \operatorname{sen} \eta - \operatorname{sh} 2\xi \operatorname{sen} 2\eta)] \quad (l)$$

Las correspondientes al estado equitensional uniforme

$$\psi(z) = Ax \quad (m)$$

vienen dadas por

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4A, \quad \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 0$$

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = 2A, \quad \tau_{\xi\eta} = 0 \quad (n)$$

La solución de nuestro problema puede obtenerse superponiendo los estados tensionales representados por los potenciales complejos (e),

(h), (k) y (m). Reuniendo los términos que representan τ_{ξ_1} en las ecuaciones (g), (j), y (l) se obtiene que para que τ_{ξ_1} se anule en los contornos $\xi = \xi_0$ y $\xi = \xi_1$ se han de cumplir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} D - 2B \operatorname{ch} 2\xi_0 - 2C \operatorname{sh} 2\xi_0 &= 0 \\ D - 2B \operatorname{ch} 2\xi_1 - 2C \operatorname{sh} 2\xi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (o)$$

que una vez resueltas nos dan

$$2B = D \frac{\operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_0)}{\operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_0)}, \quad 2C = -D \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 + \xi_0)}{\operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_0)} \quad (p)$$

La tensión normal σ_ξ , que se obtiene restando de la ecuación (f) la parte real de la (g) (y haciendo lo mismo con los otros pares de ecuaciones) ha de ser igual a $-p_0$ en el contorno $\xi = \xi_0$ y a $-p_1$ en el borde $\xi = \xi_1$. De estas condiciones y sustituyendo los valores de B y C , dados por las ecuaciones (p), se deducen las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A + \frac{D}{a} \operatorname{sh}^2 \xi_0 \operatorname{tgh}(\xi_1 - \xi_0) &= -p_0 \\ 2A - \frac{D}{a} \operatorname{sh}^2 \xi_1 \operatorname{tgh}(\xi_1 - \xi_0) &= -p_1 \end{aligned}$$

que resueltas nos dan

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \frac{p_0 \operatorname{sh}^2 \xi_1 + p_1 \operatorname{sh}^2 \xi_0}{\operatorname{sh}^2 \xi_1 + \operatorname{sh}^2 \xi_0} \\ D &= -a \frac{(p_0 - p_1) \operatorname{ctgh}(\xi_1 - \xi_0)}{\operatorname{sh}^2 \xi_1 + \operatorname{sh}^2 \xi_0} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones junto con las (p), completan la determinación de los potenciales complejos. Cuando $p_0 = 0$ la tensión periférica en el orificio viene dada por

$$(\sigma_\eta)_\xi = -p_1 + 2p_1(\operatorname{sh}^2 \xi_1 + \operatorname{sh}^2 \xi_0)^{-1} (\operatorname{ch} \xi_1 - \cos \eta) [\operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{ctgh}(\xi_1 - \xi_0) + \cos \eta]$$

expresión, cuyo valor máximo ha sido dado ya en el § 26¹.

G. B. Jeffery² ha dado una forma general de la función de tensión en coordenadas bipolares. Los potenciales complejos correspondientes se obtienen fácilmente y comprenden las funciones consideradas aquí, junto con las análogas bipolares de las funciones presentadas en los problemas del § 61, cuando se presentan fuerzas concentradas y dislocaciones. El método ha sido aplicado a los siguientes problemas: placa semiindefinida sometida en un punto cualquiera a la acción de una fuerza concentrada³,

¹ Un estudio completo del valor máximo ha sido realizado por Coker y Filon, *loc. cit.*

² *Lac. cit.*

³ E. Melan, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 5, pág. 314, 1925.

placa semiindefinida con orificio circular sometida a una tracción paralela al borde recto de la misma⁴ o a su propio peso⁵ y placa indefinida con dos orificios⁶ o con uno solo formado por la intersección de dos círculos⁷.

Asimismo, con y sin coordenadas bipolares⁸, se han resuelto los siguientes problemas: disco circular sometido a una fuerza concentrada en un punto cualquiera⁹, disco circular sometido a su propio peso estando suspendido de un punto¹⁰, disco circular en rotación alrededor de un eje excéntrico¹¹ y efecto de un orificio circular en la distribución de tensiones en una placa semiindefinida sometida a una fuerza concentrada en su borde¹².

Otras coordenadas curvilíneas. La ecuación

$$z = e^\xi + abe^{-\xi} + ac^3 e^{-3\xi}$$

que se desdobra en las

$$\begin{aligned} x &= (e^\xi + abe^{-\xi}) \cos \eta + ac^3 e^{-3\xi} \cos 3\eta \\ y &= (e^\xi - abe^{-\xi}) \sin \eta - ac^3 e^{-3\xi} \sin 3\eta \end{aligned}$$

donde a , b y c son constantes, nos da curvas $\xi = \text{cte.}$ a las que se puede hacer tomar diversas formas ovaladas, incluyendo cuadrados de ángulos redondeados. El efecto de un agujero tal, en una placa sometida a tracción ha sido estudiado (empleando una función de tensión real) por M. Greenspan¹³. Mediante una generalización de estas coordenadas A. E. Green¹⁴ ha obtenido la solución para el caso de un agujero triangular de esquinas redondeadas y haciendo uso de otra transformación de coordenadas, para el de un agujero perfectamente rectangular.

Las coordenadas curvilíneas dadas por la expresión

$$z = \xi + ia_1 e^{i\xi} + ia_2 e^{2i\xi} + \dots + ia_n e^{ni\xi}$$

en la que a_1, a_2, \dots, a_n , son constantes reales han sido aplicadas por C. Weber¹⁵ al caso de una placa semiindefinida de borde «dentado». Tal es el

¹ Véase el § 32.

² R. D. Mindlin, *Proc. A.S.M.E.*, pág. 619, 1939.

³ T. Pöschl, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 1, pág. 174, 1921 y vol. 2, pág. 187, 1922. Véase también C. Weber, *ibid.*, vol. 2, pág. 267, 1922; E. Weinel, *ibid.*, vol. 17, pág. 276, 1937; Chih Bing Ling, *J. Applied Phys.*, vol. 19, pág. 77, 1948.

⁴ Chih Bing Ling, *ibid.*, pág. 405, 1948.

⁵ B. Sen, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 36, págs. 58 y 83, 1944.

⁶ R. D. Mindlin, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 4, pág. A-115, 1937.

⁷ R. D. Mindlin, *J. Applied Physics*, vol. 9, pág. 714, 1938.

⁸ R. D. Mindlin, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 26, pág. 713, 1938.

⁹ A. Barjansky, *Quart. Applied Math.*, vol. 2, pág. 16, 1944.

¹⁰ *Quart. Applied Math.*, vol. 2, pág. 60, 1944. Véase también V. Morkovin, *ibid.*, pág. 350, 1945.

¹¹ *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 184, pág. 231, 1945.

¹² C. Weber, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 22, pág. 29, 1942.

caso de entalladuras semicirculares regularmente espaciadas. Cuando la distancia entre los centros de las entalladuras es doble del diámetro de las mismas, la concentración de tensión, para el caso en que se aplica una tracción, viene dada por un factor igual a 2,13. Para el caso de una sola entalladura el factor es 3,07 (véase el § 33).

N. Mušchelisvili^{1,2} ha desarrollado un método para determinar los potenciales complejos a partir de las condiciones de contorno, sin que sea necesario suponer su forma *a priori*.

¹ *Math. Ann.*, vol. 107, págs. 282-312, 1932. Véase también *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 13, pág. 264, 1933. Una exposición del método ha sido realizada por I. S. Sokolnikoff, *Lectures on the Theory of Elasticity*, Brown University, 1941.

² El método es utilizado por Morkovin (véase la nota 10 de la pág. 245). La mayoría del trabajo de N. I. Muschelishvili y sus colaboradores está en ruso. Su libro *Singular Integral Equations* (2.^a edición), que contiene las soluciones de diversos problemas de elasticidad bidimensional, ha sido traducido por los Aeronautical Research Laboratories, Dept. of Supply and Development, Commonwealth of Australia (Traducción núm. 12, 1949). Otra traducción editada por J. R. M. Radok fue publicada por P. Noordhoff, N. V. Groningen, Holanda, 1953. Muschelishvili da su método en *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 3.^a edición, Moscú, 1949, traducida por J. R. M. Radok y publicada por P. Noordhoff, Groningen, Holanda, 1953. Los resultados del tipo citado en las notas 10 y 11 de la página 245 han sido ya obtenidos por los autores rusos que se citan en este último libro.

Tensiones y deformaciones en tres dimensiones

67. Definición de la tensión en un punto. El estudio realizado en los capítulos anteriores se ha limitado a los problemas bidimensionales. Consideremos ahora el caso general de la distribución de tensiones en tres dimensiones. Como hemos visto (§ 4) las tensiones que actúan sobre las seis caras de un elemento cúbico vienen definidas por las seis componentes de la tensión, las tres componentes normales σ_x , σ_y , σ_z y las tres tangenciales

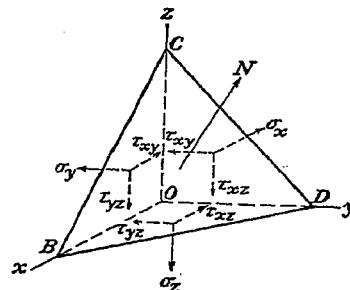


FIG. 132

$\tau_{xy} = \tau_{yz}$, $\tau_{xz} = \tau_{xy}$, $\tau_{yz} = \tau_{xy}$. Si en un punto cualquiera, se conocen estas componentes, podremos calcular mediante las ecuaciones de la estática la tensión que actúa sobre un plano de orientación arbitraria que pase por ese punto. Sea O un punto del cuerpo cargado y supongamos que se conocen las tensiones que actúan sobre los planos de coordenadas xy , xz , yz (fig. 132). Para determinar la tensión que actúa en otro plano cualquiera que pase por O , tracemos a distancia muy pequeña de ese punto, el plano BCD paralelo al dado, el cual formará con los planos coordinados un tetraedro elemental, $BCDO$. Como según se ha supuesto las tensiones

varían de manera continua en todo el volumen del cuerpo, la que actúa sobre el plano BCD , al acercarse éste al origen cuando el elemento se hace infinitésimo, tenderá a un límite, que es la tensión correspondiente al plano paralelo al mismo por el punto O .

Al establecer las condiciones de equilibrio del tetraedro elemental se podrá despreciar las fuerzas másicas, según se explicó en el § 4. Asimismo podremos dejar de lado la variación de la tensión en las caras del elemento, por ser de orden infinitesimal, y suponer una distribución uniforme de tensiones, de forma que las fuerzas que actúan sobre el tetraedro se determinarán multiplicando las áreas de sus caras por las respectivas componentes de la tensión. Si con A denotamos el área de la cara BCD las áreas de las otras caras se obtienen proyectando A sobre los tres planos coordenados.

Si N es la normal al plano BCD y escribimos:

$$\cos(Nx) = l, \quad \cos(Ny) = m, \quad \cos(Nz) = n \quad (a)$$

las áreas de las otras tres caras del tetraedro serán

$$Al, \quad Am, \quad An$$

Sean X, Y, Z las componentes de la tensión que actúan en la cara BCD , paralelamente a los ejes coordenados respectivos. La componente según la dirección x de la fuerza que obra sobre dicha cara será AX y las componentes de las fuerzas que actúan en las otras tres caras del tetraedro, en la misma dirección serán $-Al\sigma_x, -Am\tau_{xy}, -An\tau_{xz}$ de manera que tendremos la siguiente ecuación de equilibrio del tetraedro:

$$AX - Al\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0$$

De manera análoga, es decir, proyectando las fuerzas sobre los ejes y y z se obtienen las otras dos ecuaciones de equilibrio y dividiendo luego ambos miembros de cada ecuación por el factor A , podremos escribir

$$\begin{aligned} X &= \sigma_z l + \tau_{zy} m + \tau_{xz} n \\ Y &= \tau_{zy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (112)$$

Estas son las ecuaciones buscadas, ya que ellas nos permiten determinar las componentes del esfuerzo que actúa en un plano cualquiera que pase por el punto O , de orientación definida por sus cosenos directores l, m, n siempre que sean conocidas las seis componentes del esfuerzo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, en dicho punto.

68. Tensiones principales. Consideremos ahora la componente normal del esfuerzo, σ_n que actúa en el plano BCD (fig. 132). Empleando las notaciones consignadas en (a) para los cosenos directores, tendremos

$$\sigma_n = Xl + Ym + Zn$$

y remplazando los valores de X, Y y Z , de las ecuaciones (112)

$$\sigma_n = \sigma_z l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{zy} lm \quad (113)$$

Podemos representar geométricamente la variación de la tensión σ_n cuando cambia la dirección de la normal N , es decir, la orientación del plano que se considera, por medio de un radio vector de dirección N , cuya intensidad r sea inversamente proporcional a la raíz cuadrada del valor absoluto del esfuerzo, esto es:

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (b)$$

donde k es una constante. Las coordenadas de la punta del vector serán

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr \quad (c)$$

Remplazando en la ecuación (113) el valor

$$\sigma_n = \pm \frac{k^2}{r^2} \quad (d)$$

deducido de la igualdad (b), así como los cosenos directores l, m, n , que resultan de las expresiones (c), tendremos¹

$$\pm k^2 = \sigma_z x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{xz} zx + 2\tau_{zy} xy \quad (114)$$

Si se hace girar al plano BCD alrededor del punto O , la extremidad del radio vector r se mantendrá constantemente sobre la superficie de segundo orden representada por la ecuación (114), la cual está perfectamente definida por el estado de tensión en el punto O . Si cambiamos la orientación de los ejes del sistema de coordenadas rectangulares, dicha superficie no variará y tan sólo sufrirán modificaciones, las componentes del esfuerzo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, quedando alterados en consecuencia los coeficientes de la ecuación (114).

Es sabido que dada una superficie de segundo orden como la que representa la ecuación (114), siempre puede efectuarse una transformación de coordenadas que haga desvanecer los términos en que figuran los productos de variables, esto es, que podremos hallar una terna ortogonal de referencia que origine la desaparición de las tensiones tangenciales, lo que significa que las tensiones resultantes son perpendiculares a los planos sobre los cuales actúan. A tales tensiones se las denomina *tensiones principales*, relativas al punto de que se trata. A sus direcciones, *ejes principales*,

¹ En las ecuaciones (d) y (114) se emplea el signo más cuando σ_n es una tracción y el menos cuando es una compresión. Cuando las tres tensiones principales tienen el mismo signo, bastará con tomar un signo para las ecuaciones citadas, siendo entonces la superficie un elipsoide. Si las tres tensiones principales no tienen el mismo signo habrá que considerar los dos signos en (d) y (114). Las superficies que resultan son un hiperboloide de dos hojas y un hiperboloide de una hoja, ambos con el mismo cono asintótico.

cipales y planos principales a los planos sobre los cuales actúan. Se ve en seguida que la tensión alrededor de un punto queda completamente definida cuando se conocen las direcciones de los ejes principales y las magnitudes de las tres tensiones principales.

69. Elipsoide de las tensiones y superficie directriz. Si se adoptan como ejes coordenados, x, y, z los ejes principales, el cálculo de las tensiones que corresponden a un plano cualquiera resulta muy simple. Las tensiones tangenciales $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, son nulos en este caso y las ecuaciones de equilibrio del tetraedro (112) se transforman en

$$X = \sigma_z l, \quad Y = \sigma_y m, \quad Z = \sigma_x n \quad (115)$$

Remplazando los valores de l, m, n , deducidos de estas ecuaciones en la conocida relación $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, tendremos

$$\frac{X^2}{\sigma_z^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_x^2} = 1 \quad (116)$$

Esto significa que si la tensión que corresponde a cada uno de los infinitos planos que pasan por O se representa por un vector con origen en dicho punto y cuyas proyecciones sobre los ejes sean X, Y, Z , el lugar geométrico de las extremidades de dichos vectores será la superficie del elipsoide cuya ecuación es (116). Esta superficie, representativa de las tensiones, se denomina elipsoide de las tensiones. Sus semiejes son las tensiones principales en el punto considerado. Resulta de aquí que la tensión máxima en un punto cualquiera es el semieje mayor del mismo elipsoide, esto es, el mayor de los tres esfuerzos principales correspondientes.

Si dos de las tensiones principales son iguales en valor absoluto el elipsoide de las tensiones es de revolución y si además ellas tienen el mismo signo, las tensiones resultantes en todos los planos que pasan por el eje de simetría del elipsoide serán iguales y perpendiculares a los planos en que actúan. En este caso las tensiones que correspondan a cualquier par de planos perpendiculares que se corten en ese eje pueden considerarse como tensiones principales. Cuando las tres tensiones principales son iguales y del mismo signo el elipsoide de las tensiones resulta ser una esfera y cualquier terna de direcciones perpendiculares entre sí puede ser considerada como de ejes principales. Si una de las tensiones principales es nula el elipsoide de las tensiones se reduce a una elipse y los vectores representativos de las tensiones en todos los planos que pasan por el punto son coplanares. El estado elástico correspondiente se denomina *estado plano de tensión* y ha sido ya estudiado en los capítulos precedentes. Cuando dos tensiones principales son nulas se tendrá el caso de una tracción o una compresión simples.

Cada radio vector del elipsoide de las tensiones representa a cierta escala la tensión que corresponde a uno de los planos que pasa por el centro del elipsoide. Para determinar este plano emplearemos, además, del elipsoide (116) la llamada *superficie directriz* que está definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{\sigma_z} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_x} = 1 \quad (117)$$

Demostraremos que la tensión representada por un radio vector del elipsoide de las tensiones, actúa en el plano paralelo al plano tangente a la superficie directriz por el punto en que la corta. En efecto, la ecuación del plano tangente a la superficie directriz en un punto x_0, y_0, z_0 , es

$$\frac{xx_0}{\sigma_z} + \frac{yy_0}{\sigma_y} + \frac{zz_0}{\sigma_x} = 1 \quad (a)$$

ecuación que también puede escribirse así:

$$lx + my + nz = h \quad (b)$$

en la cual h es la distancia del origen al plano tangente y l, m, n los cosenos directores de dicha perpendicular. Comparando (a) y (b) encontramos

$$\sigma_x = \frac{x_0 h}{l}, \quad \sigma_y = \frac{y_0 h}{m}, \quad \sigma_z = \frac{z_0 h}{n} \quad (c)$$

Llevando estos valores a las fórmulas (115) resulta

$$X = x_0 h, \quad Y = y_0 h, \quad Z = z_0 h$$

lo que nos dice que las componentes del esfuerzo en el plano definido por los cosenos directores l, m, n son proporcionales a las coordenadas x_0, y_0, z_0 , y, por tanto, el vector representativo de la tensión pasa por el punto x_0, y_0, z_0 , como se quería demostrar¹.

70. Determinación de las tensiones principales. Utilizando la propiedad de que gozan las tensiones principales, de ser perpendiculares a los planos sobre los cuales actúan, podremos determinar las direcciones y magnitudes de las tensiones principales si conocemos las componentes de los esfuerzos que corresponden a tres planos coordinados. Sean l, m, n , los cosenos directores de uno de los planos principales y S la magnitud de la tensión principal correspondiente al mismo. Sus componentes serán, entonces:

$$X = Sl, \quad Y = Sm, \quad Z = Sn$$

Remplazando en las ecuaciones (112) encontramos:

$$\begin{aligned} (S - \sigma_z)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n &= 0 \\ -\tau_{xy}l + (S - \sigma_y)m - \tau_{yz}n &= 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (S - \sigma_x)n &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

¹ Otto Mohr describe otro método para representar las tensiones en un punto por medio de círculos en su *Technische Mechanik*, 2.^a edición, pág. 192, 1914. Puede verse también A. Föppl, I., Föppl, *Drang und Zwang*, vol. 1, pág. 9, y H. M. Westergaard, *Z. angew. Math. Mech.* vol. 4, pág. 520, 1924. Al estudiar los problemas bidimensionales (§ 9) hemos dado algunas aplicaciones de los diagramas circulares de Mohr.

Para que estas tres ecuaciones lineales y homogéneas en l, m, n tengan soluciones diferentes de cero es necesario que su determinante sea nulo. Si calculamos dicho determinante y lo igualamos a cero, obtendremos la siguiente ecuación de tercer grado en S llamada ecuación característica

$$\begin{aligned} S^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)S^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2)S \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{zx}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (118) \end{aligned}$$

Las tres raíces de esta ecuación nos dan los valores de las tensiones principales cuya sustitución en las ecuaciones (a), cuenta tenida de la relación $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, nos permite determinar tres grupos de cosenos directores para los tres planos principales.

Es de advertir que la ecuación (118) que permite determinar los valores de las tensiones principales debe ser independiente de la dirección de los ejes coordenados x, y, z , de manera que los coeficientes encerrados en paréntesis en la misma serán invariantes. En consecuencia, los coeficientes de la ecuación (118)

- (a) $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$
- (b) $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$
- (c) $\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{zx}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$

permanecerán constantes cualquiera que sea el sistema de referencia.

Esto nos dice que la suma $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ de las tres componentes normales de la tensión en un punto, correspondiente a tres direcciones perpendiculares, es constante e igual a la suma de las tensiones principales en el mismo punto.

71. Determinación de la tensión tangencial máxima. Supongamos que x, y, z son los ejes principales o lo que es lo mismo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las tensiones principales y l, m, n los cosenos directores de un plano dado. El cuadrado de la tensión resultante, correspondiente al mismo será, con arreglo a las ecuaciones (115)

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2$$

El cuadrado de la componente normal de la tensión en el mismo plano es, según la ecuación (113)

$$\sigma_n^2 = (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad (a)$$

El cuadrado de la tensión tangencial en el mismo plano deberá ser entonces

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad (b)$$

Eliminaremos ahora en esta ecuación uno de los cosenos directores, verbi gracia m , empleando para ello la relación

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

y pasaremos a determinar l y m de manera que τ resulte máximo. Reemplazando en la expresión (b), n^2 por $1 - (l^2 - m^2)$, deducido de la anterior ecuación, calculando las derivadas de la tensión tangencial τ respecto a l y a m e igualándolas a cero, llegaremos a las ecuaciones que nos permitirán determinar los cosenos directores de los planos en los cuales τ es máximo o mínimo; ellas son

$$\begin{aligned} l[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)] &= 0 \\ m[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)] &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Se obtiene una solución de estas ecuaciones haciendo $l = m = 0$, pero también podemos obtener soluciones diferentes de cero. En efecto, haciendo, por ejemplo, $l = 0$, la segunda de las ecuaciones (c) nos da entonces $m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ y con $m = 0$, de la primera de dichas ecuaciones, resulta $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$. En general no existen soluciones de las ecuaciones (c) con l y m distintas las dos de cero, puesto que en este caso las expresiones contenidas en los paréntesis no pueden anularse.

Repetiendo los cálculos anteriores, eliminando m y l de (b), obtenemos las direcciones de los planos en los que τ es máxima o mínima, direcciones cuyos cosenos directores damos en la tabla siguiente:

COSENOS DIRECTORES DE LOS PLANOS DE τ_{\max} Y τ_{\min}

$l =$	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$m =$	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n =$	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Las tres primeras columnas nos dan las direcciones de los planos de coordenadas, los cuales coinciden, conforme al supuesto original con los planos principales; como para éstos la tensión tangencial es cero, es un mínimo la expresión (b). Las columnas restantes dan los planos que, conteniendo a los ejes principales, bisectan a los ángulos formados por los otros dos ejes principales. Reemplazando en la expresión (b) los cosenos directores que corresponden a estos tres planos, llegamos a los siguientes valores de las tensiones tangenciales correspondientes a los mismos:

$$\tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z), \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x), \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \quad (119)$$

Lo que nos demuestra que la máxima tensión tangencial actúa en el plano bisector del ángulo que forman las tensiones principales máxima y mínima y que su valor es igual a la semidiferencia de las mismas.

Si los ejes x y z de la figura 132 tienen las direcciones de las tensiones principales y si $OB = OC = OD$, de forma tal que la normal N a la cara oblicua del tetraedro tenga los cosenos directores $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ la tensión normal a esta cara, dada por las ecuaciones (a) o (113) es igual a:

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (d)$$

siendo llamada «tensión media». La tensión tangencial sobre esa misma cara, dada por (b) es

$$\tau^2 = \frac{1}{9}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{9}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

pudiendo escribirse

$$\tau^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$$

o también

$$\tau^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_n)^2 + (\sigma_y - \sigma_n)^2 + (\sigma_z - \sigma_n)^2]$$

Recibe el nombre de «tensión tangencial octoédrica» por ser la cara sobre la cual actúa, la correspondiente a un octaedro regular con vértices en los ejes. Esta tensión es considerada con frecuencia en la teoría de la plasticidad.

72. Deformación homogénea. Nos ocuparemos tan sólo de deformaciones pequeñas que son las que prevé el ingeniero se han de producir en las construcciones. Los desplazamientos elementales de las partículas de un cuerpo deformado serán resueltos por lo general en sus componentes u , v , w , paralelas a los ejes coordenados x , y , z respectivamente y se supondrá que dichas componentes son cantidades infinitesimales que varían en forma continua en el ámbito del cuerpo.

Sea, por ejemplo, el caso de una barra prismática fija por su extremidad superior (fig. 133) y sujetada a extensión axial. Si ϵ es el alargamiento específico de la pieza en la dirección x y $\nu\epsilon$ el correspondiente acortamiento transversal, las componentes del desplazamiento de un punto de coordenadas x , y , z serán evidentemente,

$$u = \epsilon x, \quad v = -\nu\epsilon y, \quad w = -\nu\epsilon z$$

Llamemos x' , y' , z' a las coordenadas del mismo punto una vez producida la extensión. Sus valores serán

$$x' = x + u = x(1 + \epsilon), \quad y' = y + v = y(1 - \nu\epsilon), \\ z' = z + w = z(1 - \nu\epsilon) \quad (a)$$

y si consideramos en la barra, antes de ser deformada, una superficie plana tal como la que representa la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (b)$$

los puntos de aquella pertenecerán después de la deformación a un nuevo plano, cuya ecuación se obtiene sustitu-

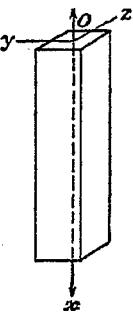


FIG. 133

yendo en (b) los valores de x , y , z , dados por las ecuaciones (a). De este modo puede fácilmente demostrarse que los planos paralelos conservan su paralelismo después de la deformación y que las rectas paralelas lo siguen siendo una vez deformado el cuerpo a que pertenecen.

Una superficie esférica de la barra, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (c)$$

antes de la deformación de aquella, se transforma a consecuencia de la misma en un elipsoide cuya ecuación se obtiene remplazando en (c) las expresiones x , y , z deducidas de las ecuaciones (a), hecho lo cual tenemos

$$\frac{x'^2}{r^2(1 + \epsilon)^2} + \frac{y'^2}{r^2(1 - \nu\epsilon)^2} + \frac{z'^2}{r^2(1 - \nu\epsilon)^2} = 1 \quad (d)$$

Esto es, que la esfera de radio r se ha transformado en un elipsoide cuyos semiejes son $r(1 + \epsilon)$, $r(1 - \nu\epsilon)$, $r(1 - \nu\epsilon)$.

La extensión axial y el acortamiento transversal considerados en lo que antecede no son más que un caso particular de una deformación de un tipo más general, en el que las componentes u , v , w , del desplazamiento son funciones lineales de las coordenadas, deformación que —como puede probarse por un razonamiento análogo al anterior— tiene las mismas propiedades que hemos hallado para el caso de la tracción simple, esto es, que las rectas y planos se conservan como tales después de la deformación, que los planos y rectas paralelos también conservan su paralelismo y que una esfera se transforma, a raíz de la deformación, en un elipsoide. Según se demostrará más adelante, en toda deformación homogénea, como se denomina a las de este género, todos los puntos del cuerpo deformado experimentan igual deformación en una dirección dada cualquiera y dos elementos geométricamente semejantes igualmente orientados se conservan geométricamente semejantes después de la deformación.

En casos más generales, la deformación varía de punto a punto del cuerpo deformado. Por ejemplo, cuando una viga es flectada, las dilataciones y acortamientos de las fibras longitudinales varían con su distancia a la capa de fibras neutras. La tensión tangencial en los elementos de un eje circular, sometido a torsión, es proporcional a las distancias que los separan del eje de la pieza. En tales casos de deformación, no homogénea, es necesario efectuar el estudio analítico de la deformación en el entorno de un punto.

73. Deformación en un punto. Para estudiar la deformación en la vecindad de un punto O de un cuerpo deformado (fig. 134), consideremos un pequeño elemento lineal OO_1 , de largo r , cuyos cosenos directores llamamos l , m , n . Sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas, a saber:

$$\delta x = rl, \quad \delta y = rm, \quad \delta z = rn \quad (a)$$

representan las coordenadas del punto O_1 con relación a los ejes x, y, z , que pasan por el origen O . Si u, v, w , son las componentes del trayecto del punto O durante la deformación del cuerpo, las que corresponden al

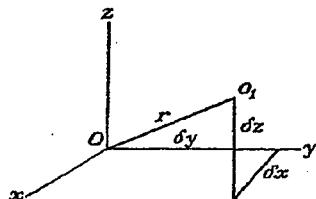


FIG. 134

desplazamiento del punto vecino O_1 estarán dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (b)$$

Se supone que las cantidades $\delta x, \delta y, \delta z$, son infinitamente pequeñas y, por lo tanto, los términos de grado superior al primero, así como sus productos, serán infinitésimos de orden superior y como tales pueden despreciarse en (b). Las coordenadas del punto O_1 después de la deformación, serán:

$$\begin{aligned} \delta x + u_1 - u &= \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta y + v_1 - v &= \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta z + w_1 - w &= \delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (c)$$

Estas coordenadas, como se ve, son funciones lineales de las primitives, $\delta x, \delta y, \delta z$, y conforme a la definición dada en el § 72, la deformación de un elemento muy pequeño de un cuerpo en el punto O puede entonces considerarse como homogénea.

Pasemos a considerar el alargamiento experimentado por el elemento r . El cuadrado de su longitud después de la deformación será igual a la suma de los cuadrados de las nuevas coordenadas del punto O , que están

dadas en (c) así que si llamamos ϵ al alargamiento específico del elemento de que se trata, se tendrá:

$$\begin{aligned} (r + \epsilon r)^2 &= \left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2 \\ &\quad + \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \right)^2 \\ &\quad + \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \right)^2 \end{aligned}$$

o bien, dividiendo por r^2 y teniendo en cuenta las ecuaciones (a)

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)^2 &= \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \\ &\quad + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \\ &\quad + \left[l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (d)$$

Recordando ahora que tanto ϵ como las derivadas parciales $\partial u / \partial x, \dots, \partial w / \partial z$, son cantidades muy pequeñas cuyos cuadrados y productos pueden ser despreciados y simplificando en razón de ser, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, se deduce:

$$\begin{aligned} \epsilon &= l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &\quad + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (120)$$

Relación que nos dice que podrá calcularse el alargamiento de un elemento r siempre que se conozcan las expresiones $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, etc. La ecuación (120) puede expresarse en forma más simple si empleamos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \epsilon_z \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy}, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \gamma_{xz}, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (e)$$

Se tendrá así:

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} ln + \gamma_{yz} mn. \quad (121)$$

El significado físico de las cantidades $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz} \dots$ ha sido explicado en el § 5 y según se indica en el mismo $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ son los alargamientos específicos en las direcciones x, y, z , en tanto que $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ son las distorsiones correspondientes a esas mismas direcciones. Como en dicho párrafo se anuncia, queda aquí demostrado que el alargamiento de un elemento cualquiera que pase por el punto O podrá ser calculado, aplicando la ecuación (121), en función de las seis componentes de la deformación.

En el caso particular de una deformación homogénea las componentes u, v, w , del desplazamiento, son funciones lineales de las coordenadas, de manera que, según las ecuaciones (e) las componentes de la deformación son constantes en todos los puntos del cuerpo, esto es, que, en dicho caso, todos los elementos del cuerpo se deforman igualmente.

Al estudiar la deformación en el entorno de un punto O es muchas veces necesario saber cuánto varía el ángulo que forman dos elementos lineales que pasan por ese punto. Sean l_1, m_1, n_1 los cosenos directores del elemento r (fig. 134) después de la deformación, y l'_1, m'_1, n'_1 , los de otro elemento r' caracterizado por valores l', m', n' antes de la deformación. Aplicando las ecuaciones (d) y (a) y considerando ϵ como cantidad infinitésima, tendremos como expresiones de los primeros

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\delta x + u_1 - u}{r(1 + \epsilon)} = l \left(1 - \epsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 &= \frac{\delta y + v_1 - v}{r(1 + \epsilon)} = l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 - \epsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 &= \frac{\delta z + w_1 - w}{r(1 + \epsilon)} = l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 - \epsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (f)$$

y otras tantas ecuaciones análogas para los cosenos directores del elemento r' . La conocida ecuación que da el coseno del ángulo formado por dos direcciones, aplicada a las de los dos elementos después de la deformación, nos da:

$$\cos(r'r') = l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1$$

Las ecuaciones (f) nos darán, considerando como cantidades muy pequeñas los alargamientos ϵ y ϵ' en dichas direcciones,

$$\begin{aligned} \cos(r'r') &= (ll' + mm' + nn')(1 - \epsilon - \epsilon') + 2(\epsilon_x ll' + \epsilon_y mm' + \epsilon_z nn') \\ &\quad + \gamma_{xy}(mm' + m'n) + \gamma_{xz}(nl' + n'l) + \gamma_{yz}(ln' + l'm) \end{aligned} \quad (122)$$

Si las direcciones r y r' fueran perpendiculares entre sí, resultaría:

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

y entonces la ecuación (122) da el valor de la distorsión que sufre el ángulo formado por esas direcciones.

74. Ejes principales de deformación. La ecuación (121) nos permite interpretar geométricamente la variación de la deformación en

un punto determinado. Trámemos para ello en la dirección de cada elemento lineal, tal como r (fig. 134), un radio vector cuyo valor sea:

$$R = \frac{k}{\sqrt{|\epsilon|}} \quad (a)$$

Razonando, entonces, como se ha indicado en el § 68, concluimos que el lugar geométrico de las extremidades de los radios vectores correspondientes es la superficie de ecuación.

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 + \gamma_{xy}yz + \gamma_{xz}xz + \gamma_{yz}xy \quad (123)$$

Esta superficie queda completamente determinada por el estado de deformación en el punto considerado y es independiente de la orientación de los ejes coordenados rectangulares. Es siempre posible dar a estos ejes ortogonales, direcciones tales, que los términos de la ecuación (123) que contengan productos de variables desaparezcan, lo que entraña la nulidad de las variaciones angulares en tales direcciones. Estas han recibido el nombre de *ejes principales de deformación*; los planos correspondientes, *planos principales de deformación* y las deformaciones respectivas, *deformaciones principales*. De todo ello resulta evidente que los ejes principales de deformación siguen siendo perpendiculares después de ocurrida la deformación, de manera que un paralelepípedo rectangular de caras paralelas a los planos principales se conservarán como tal después de la deformación. En general sufre una pequeña *rotación*.

Si los ejes x, y y z coinciden con los ejes principales de deformación, la ecuación (123) se transforma en:

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2$$

En este caso, la dilatación de un elemento cualquiera cuyos cosenos directores sean l, m, n , valdrá, con arreglo a las ecuaciones (121):

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 \quad (124)$$

y según la ecuación (122) la deformación tangencial o distorsión correspondiente a dos direcciones r y r' , perpendiculares entre sí, estará dada por la fórmula:

$$\gamma_{rr'} = 2(\epsilon_x ll' + \epsilon_y mm' + \epsilon_z nn') \quad (125)$$

Resulta de lo que antecede que la deformación en un punto está completamente determinada si se conocen las direcciones de los ejes principales de deformación y las magnitudes de los alargamientos principales. La determinación de unos y otros se efectúa de una manera análoga a la que se explicó en el § 70. Puede también demostrarse que cuando el sistema de ejes coordenados experimenta un giro, la suma $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ permanece constante. Como se sabe, el significado físico de esta suma es simple: se

trata de la dilatación cúbica causada por la deformación que se produce alrededor de un punto.

75. Rotación. En general cuando un cuerpo se deforma, un elemento cualquiera de superficie cambia de forma y sufre una translación y una rotación. A causa de la deformación transversal las aristas no sufren la misma rotación y es necesario entonces definir, qué se entiende por rotación del elemento. Un elemento rectangular cualquiera puede llegar a tornar la forma, posición y orientación finales mediante la aplicación al mismo, en su estado inicial (no deformado) de las tres operaciones siguientes.

1. Se aplican las deformaciones $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ al elemento, el cual está orientado de forma tal que las direcciones de las deformaciones principales no giran.

2. Se traslada el elemento hasta que su centro ocupe la posición final.
3. Se gira el elemento hasta que tome su orientación final.

La rotación de la operación 3 es evidentemente la rotación de las direcciones de la deformación principal, siendo, por lo tanto, independiente de la dirección de los ejes x, y, z . Debe poder ser evaluada si se conocen los desplazamientos u, v, w . Por otra parte es evidentemente independiente de las componentes de la deformación.

Puesto que la translación del elemento no tiene ningún interés para nosotros, podemos considerar, como en el § 73 y en la figura 134, el desplazamiento relativo de un punto O_1 respecto al centro O del elemento. Este desplazamiento viene dado por las ecuaciones (b) del § 73.

$$\begin{aligned} u_1 - u &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v_1 - v &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w_1 - w &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (b)$$

Sustituyendo la expresión (e) del § 73, de las componentes de la deformación, e introduciendo igualmente la notación¹

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \omega_x, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \omega_y, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_z \quad (126)$$

¹ Examinando la figura 6, se ve fácilmente que $\partial v / \partial x$ y $-u / \partial y$, que entran en la expresión ω_x son las rotaciones, en el sentido de las agujas del reloj, sufridas por los elementos lineales $O'A'$, $O'B'$, a partir de sus posiciones iniciales OA , OB ; ω_z es, por lo tanto, la media de estas rotaciones y ω_x y ω_y tienen el mismo significado en sus planos respectivos.

podemos escribir las ecuaciones (a) en la forma

$$\begin{aligned} u_1 - u &= \epsilon_x \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \delta z - \omega_x \delta y + \omega_y \delta x \\ v_1 - v &= \frac{1}{2} \gamma_{zy} \delta x + \epsilon_y \delta y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \delta z - \omega_z \delta z + \omega_x \delta x \\ w_1 - w &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \delta y + \epsilon_z \delta z - \omega_y \delta x + \omega_z \delta y \end{aligned} \quad (b)$$

que descompone los desplazamientos relativos en dos partes: una que sólo depende de las componentes de la deformación y otra que depende únicamente de las cantidades $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Podemos ahora demostrar que $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ son, de hecho, las componentes de la rotación 3 más arriba citada. Consideremos la superficie definida por la ecuación (123). El cuadrado de un radio cualquiera es inversamente proporcional a la deformación unitaria del elemento lineal de la misma dirección y la forma de la ecuación es:

$$F(x, y, z) = \text{constante} \quad (c)$$

Si consideramos un punto vecino $(x + dx, y + dy, z + dz)$ situado en la superficie, se cumplirá la relación:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad (d)$$

El desplazamiento dx, dy, dz , se efectúa en una dirección cuyos cosenos directores son proporcionales a dx, dy, dz , y las tres cantidades $\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z$, definen igualmente otra dirección de cosenos directores proporcionales a ellas mismas. El primer miembro de la ecuación (d) es entonces proporcional al coseno del ángulo formado por esas dos direcciones las cuales, por ser ese coseno cero, serán perpendiculares entre sí. Puesto que dx, dy, dz , representa un elemento cualquiera del plano tangente a la superficie, la dirección representada por $\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z$, será la de la normal a la misma.

En el caso estudiado $F(x, y, z)$ es el segundo miembro de la ecuación (123). En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2\epsilon_x x + \gamma_{xy} y + \gamma_{xz} z \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \gamma_{zy} x + 2\epsilon_y y + \gamma_{yz} z \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \gamma_{zx} x + \gamma_{yz} y + 2\epsilon_z z \end{aligned} \quad (e)$$

Habiendo trazado la superficie definida por la ecuación (123) con el punto O como centro (fig. 134) podremos identificar $\delta x, \delta y, \delta z$ [ecuaciones (b)] con x, y, z [ecuaciones (e)].

Consideremos ahora el caso particular en que ω_x, ω_y y ω_z son nulos. Los

segundos miembros de las ecuaciones (e) y (b) son entonces idénticos salvo en un factor 2. Resulta de ello que el desplazamiento definido por las ecuaciones (b) es normal a la superficie definida por la ecuación (123). Esto significa que si consideramos al punto O_1 (fig. 134) como perteneciente a la superficie, su desplazamiento es normal a la misma. En consecuencia, si OO_1 es uno de los ejes principales de deformación, o lo que es lo mismo uno de los ejes principales de la superficie, el desplazamiento de O_1 se efectúa en la dirección de OO_1 , deduciéndose que OO_1 no gira. El desplazamiento correspondiente será entonces del tipo 1, anteriormente citado.

Para completar el desplazamiento debemos volver a introducir en las ecuaciones (b) los términos en ω_x , ω_y , ω_z , los cuales corresponden a una pequeña rotación de conjunto cuyas componentes según los ejes x , y , z , son ω_x , ω_y , ω_z respectivamente. Resulta entonces que estas cantidades cuya expresión viene dada por las ecuaciones (126) expresan la rotación del tipo 3 es decir, la rotación, en el punto O , de los ejes de deformación. Tales cantidades reciben el nombre de componentes de la rotación.

Problema

1. ¿Cuál es la ecuación, del tipo $f(x, y, z) = 0$, de la superficie, de centro O , que se convierte en una esfera $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$ al sufrir la deformación homogénea del § 72? ¿De qué tipo de superficie se trata?

Teoremas generales



76. Ecuaciones diferenciales de equilibrio. En el § 67 hemos desarrollado el estudio de la tensión en un punto de un cuerpo elástico. Nos proponemos efectuar, ahora, el análisis de la variación de la tensión al cambiar la posición del punto. Para ello debemos establecer las condiciones de equilibrio de un elemento, de forma de paralelepípedo rectan-

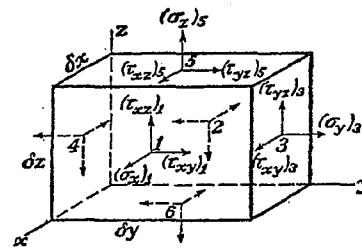


FIG. 135

gular, cuyas dimensiones son: δx , δy , δz , como el que se presenta en la figura 135, en la cual se indican las componentes de la tensión que actúan en cada cara, así como sus sentidos positivos. Tomaremos aquí en consideración las variaciones que experimentan dichas componentes, como consecuencia de los incrementos infinitamente pequeños, δx , δy , δz , de las coordenadas y al calcular las fuerzas actuantes en el elemento, consideraremos que las caras son infinitamente pequeñas, de manera que la fuerza que corresponde a cada cara se obtiene multiplicando por su área la tensión en el baricentro respectivo. Llamando 1, 2, 3, 4, 5, 6, a los centros de las caras (fig. 135) designamos $(\sigma_x)_1$ al valor de σ_x en 1 $(\sigma_x)_2$ al valor de σ_x en 2,

etcétera. El símbolo σ_x representa el valor de esta componente de la tensión en el punto x, y, z .

La fuerza mísica relativa al elemento considerado, que fue despreciada, como infinitésimo de orden superior, al establecer las condiciones de equilibrio del tetraedro (fig. 132), deberá ahora intervenir en las ecuaciones, por ser del mismo orden de magnitud que los términos que corresponden a la variación de las componentes de la tensión. Si designamos entonces por X, Y, Z , las componentes de la fuerza mísica específica, obtendremos una de las ecuaciones de equilibrio, proyectando las fuerzas sobre la dirección x :

$$[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_2] \delta y \delta z + [(\tau_{xy})_3 - (\tau_{xy})_4] \delta x \delta z + [(\tau_{xz})_5 - (\tau_{xz})_6] \delta x \delta y + X \delta x \delta y \delta z = 0$$

De manera análoga se obtienen las otras dos ecuaciones de equilibrio y después de efectuar las simplificaciones, llegamos a las siguientes ecuaciones, que deben quedar satisfechas en todos los puntos del cuerpo considerado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (127)$$

Estas ecuaciones (127) deben ser satisfechas en todo el volumen del cuerpo.

Las tensiones varían de uno a otro punto del cuerpo y en su periferia deberán equilibrar a las fuerzas exteriores que actúan sobre la superficie del mismo. Las expresiones matemáticas de las condiciones de equilibrio, relativas a la superficie, pueden obtenerse partiendo de las ecuaciones (112). Consideremos para ello que el tetraedro $OBED$ (fig. 132) está dispuesto de manera que la cara BCD coincida con la superficie del cuerpo y llamemos $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ a las componentes de las fuerzas superficiales referidas a la unidad de área, en dicho punto. Las ecuaciones mencionadas son entonces:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \bar{Y} &= \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l \\ \bar{Z} &= \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m \end{aligned} \quad (128)$$

en las que l, m, n , son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie del cuerpo en el punto considerado.

Si el problema consiste en determinar el estado de tensión que se origina en un cuerpo sometido a la acción de fuerzas dadas, es necesario

resolver las ecuaciones (127), de manera que la solución satisfaga a las condiciones de límite o condiciones de borde (128). Es evidente que estas ecuaciones que contienen seis componentes de tensión, $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$, no bastan para determinar estas cantidades; el problema es estáticamente indeterminado y para resolverlo se deberá proceder como en el caso del estado plano de tensión, haciendo intervenir a las deformaciones elásticas del cuerpo.

77. Condiciones de compatibilidad. Para establecer las ecuaciones que buscamos, deberá tenerse en cuenta que las seis componentes de la deformación en cada punto, quedan completamente determinadas por las tres funciones u, v, w , que representan las componentes de su desplazamiento, así que las componentes de la deformación no pueden expresarse arbitrariamente en función de x, y, z , sino que habrán de satisfacer a determinadas relaciones que se deducen de las ecuaciones (2) (véase § 5):

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

de donde resulta que:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (a)$$

Una permutación cíclica de las letras x, y, z , nos permitirá obtener otras dos relaciones análogas.

Calculando ahora las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, & \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (b)$$

Por permutación de las letras x, y, z , obtendremos otras dos relaciones análogas a (b). Procediendo como se ha indicado, se llega a seis ecuaciones diferenciales entre las componentes de la deformación, las cuales deberán quedar satisfechas en virtud de las ecuaciones (2). Ellas reciben el nombre de *condiciones de compatibilidad* y son las siguientes¹:

¹ La demostración de que estas seis ecuaciones bastan para asegurar la existencia del desplazamiento, correspondiente a un conjunto dado de funciones $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$, puede encontrarse en A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 49, e I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, pág. 24, 1946.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y}, & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (129)$$

Las condiciones expresadas por las ecuaciones (129) pueden transformarse en relaciones entre las componentes de la tensión, utilizando la ley de Hooke [ecuaciones (3)]. Tomemos, por ejemplo, una de ellas:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (c)$$

De las ecuaciones (3) y (4) resulta, teniendo en cuenta la igualdad (7), mediante una transformación sencilla:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu \Theta] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_z - \nu \Theta] \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \nu) \tau_{yz}}{E} \end{aligned}$$

Remplazando en (c) estas expresiones, obtenemos:

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (d)$$

El segundo miembro de esta ecuación puede transformarse empleando las ecuaciones de equilibrio (127). En efecto, de las dos últimas resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y \end{aligned}$$

Sumando las derivadas de la primera ecuación con respecto a z y de la segunda con respecto a y , se tiene:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial y}$$

o bien, si se tiene en cuenta la primera de las ecuaciones (127):

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Si se lleva esta última a la ecuación (d) y para simplificar la escritura se utiliza el símbolo:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

encontramos:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad (e) \end{aligned}$$

Las otras dos condiciones de compatibilidad del tipo (c), permiten escribir dos ecuaciones análogas a la anterior.

Sumando ordenadamente las tres ecuaciones del tipo (e) así obtenidas, se tiene:

$$(1 - \nu) \nabla^2 \Theta = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$$

Reemplazando en la ecuación (e) el valor de $\nabla^2 \Theta$, que resulta de esta última expresión, se tiene:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \quad (f)$$

Podemos obtener tres ecuaciones de esta clase, correspondientes a las primeras tres ecuaciones del grupo (129). Análogamente, las tres condiciones restantes de ese grupo pueden transformarse en ecuaciones del tipo siguiente:

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \quad (g)$$

Con las fuerzas másicas constantes o nulas (f) y (g) nos dan:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0, & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0, & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0, & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (130)$$

Se ve pues, que además de las ecuaciones de equilibrio (127) y las condiciones de borde (128), las componentes de la tensión en un cuerpo isotrópico habrán de satisfacer a las seis condiciones de compatibilidad (f) y (g) o a las seis condiciones (130). Este sistema de ecuaciones basta, por

lo general, para determinar sin ambigüedad alguna las componentes de la tensión (véase § 82).

Las ecuaciones que expresan las condiciones de compatibilidad contienen, según se ha visto, tan sólo derivadas segundas de las componentes de la tensión. Por lo tanto, si las fuerzas exteriores permitieran satisfacer las ecuaciones de equilibrio (127) conjuntamente con las condiciones de límite (128), mediante unas componentes de la tensión que fuesen constantes o funciones lineales de las coordenadas, las ecuaciones de compatibilidad quedarían idénticamente satisfechas y este sistema de tensiones representaría la solución correcta del problema. En el capítulo 10 desarrollamos varios ejemplos de problemas de esta clase.

78. Determinación de los desplazamientos. La ley de Hooke [ecuaciones (3) y (4)] nos permitirá determinar las componentes de la deformación una vez calculadas las componentes de la tensión, mediante las ecuaciones anteriores. Para determinar los desplazamientos u, v, w , se utilizan entonces las ecuaciones (2). Derivando éstas con respecto a x, y, z , se pueden obtener 18 ecuaciones entre las 18 derivadas de u, v, w , y calcular así dichas derivadas. Para u , por ejemplo, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

Si en las ecuaciones anteriores intercambiamos cíclicamente las letras x, y, z hallaremos las derivadas segundas de las componentes de los desplazamientos v y w y por medio de integraciones dobles obtendremos u, v, w a las cuales, como constantes arbitrarias de integración, añadiremos funciones lineales de x, y y z que, evidentemente, no afectarán a las ecuaciones (a) y sus correlativas. Tampoco modificarán a las componentes de la deformación [ecuaciones (2)] siempre que sean de la forma:

$$\begin{aligned} u' &= a + by - cz \\ v' &= d - bx + ez \\ w' &= f + cx - ey \end{aligned} \quad (b)$$

Esto significa que las tensiones y las deformaciones no determinan por completo los desplazamientos y que a las ecuaciones que los expresan, deducidas de (127), (128) y (130), podrá añadirse el desplazamiento que corresponde a un movimiento a la manera de cuerpo rígido. Las constantes a, d, f , en las ecuaciones (b), representan un movimiento de traslación del cuerpo y las constantes b, c, e , son las tres rotaciones del cuerpo rígido alrededor de los ejes coordinados. Cuando existen vínculos bastante para impedir el movimiento del cuerpo como si fuera rígido, las

seis constantes de las ecuaciones (b) pueden ser calculadas fácilmente, de manera que satisfagan las condiciones de vínculo. Más adelante se exponen diversos ejemplos de cálculos de esa naturaleza.

79. Ecuaciones de equilibrio como funciones de los desplazamientos. Un método que permite resolver los problemas de elasticidad es el que conduce a formular tres ecuaciones de equilibrio cuyas incógnitas son las tres funciones u, v, w . Para ello se elimina de las ecuaciones (127) y (128) las componentes de la tensión recurriendo a la ley de Hooke y a las ecuaciones (2), que nos permiten expresar las componentes de la deformación en función de los desplazamientos. Sustituyendo (11) en (127) tenemos:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

y de (6):

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (b)$$

de donde:

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0$$

Las otras dos ecuaciones pueden transformarse de la misma manera, así que utilizando el símbolo laplaciano, las ecuaciones de equilibrio (127), se transforman en:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned} \quad (131)$$

y cuando no existen fuerzas másicas, se tendrá:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (132)$$

Derivando la primera de estas ecuaciones con respecto a x , la segunda con respecto a y , y la tercera con respecto a z , y sumando miembro a miembro las igualdades que se obtienen, se llega a:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 e = 0$$

de donde resulta evidentemente que la dilatación cúbica, e , satisface a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (133)$$

La misma conclusión es aplicable al caso en que las fuerzas másticas sean constantes para todo punto del cuerpo.

Remplazando los valores que dan las ecuaciones (a) y (b) en las condiciones de borde (128), hallamos:

$$\bar{X} = \lambda e l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) \quad (134)$$

.....

Definidas así completamente las tres funciones u , v , w , mediante las ecuaciones (131) y las condiciones de borde (134), podremos obtener las componentes de la deformación aplicando las ecuaciones (2), y luego las componentes de la tensión, valiéndonos de las fórmulas (9) y (6). En el capítulo 15 se hace aplicación de estas ecuaciones.

80. Solución general para los desplazamientos. Se comprueba fácilmente que las ecuaciones diferenciales de equilibrio (132), expresadas en función de los desplazamientos, son satisfechas por¹:

$$u = \phi_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3)$$

$$v = \phi_2 - \alpha \frac{\partial}{\partial y} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3)$$

$$w = \phi_3 - \alpha \frac{\partial}{\partial z} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3)$$

donde $4\alpha = 1/(1 - \nu)$ y las cuatro funciones ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 son armónicas, es decir:

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = 0, \quad \nabla^2 \phi_3 = 0$$

¹ Esta solución ha sido dada independiente por P. F. Papkovitch, *Compt. rend.*, vol. 195, págs. 513 y 754, 1932, y por H. Neuber, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 14, pág. 203, 1934. Otras soluciones generales han sido dadas por B. Galerkin, *Compt. rend.*, vol. 190, pág. 1047, 1930, y por Boussinesq y Kelvin (véase Todhunter y Pearson, *History of Elasticity*, vol. 2, parte 2., pág. 268). Véase también R. D. Mindlin, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1936, pág. 373.

Se puede demostrar que esta solución es general y que una de las cuatro funciones puede ser suprimida sin perder generalidad.

Este tipo de solución ha sido adaptado a las coordenadas curvilíneas por Neuber¹, quien lo ha aplicado a la solución de problemas relativos a sólidos de revolución, generados por hipérbolas (cilindro con entalladura hiperbólica) o elipses (cavidad con forma de elipsoide de revolución), que transmiten tracción, flexión, torsión o esfuerzos tangenciales normales a su eje, junto con flexión.

81. Principio de superposición. La solución del problema relativo a un cuerpo elástico dado, limitado por una superficie conocida y sometido a unas determinadas fuerzas másticas, exige la determinación de las componentes de la tensión, o de los desplazamientos, que satisfagan las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno. Si decidimos trabajar con las componentes de la tensión se deberán cumplir: a) las ecuaciones de equilibrio (127); b) las condiciones de compatibilidad (129); c) las condiciones de contorno (128). Sean $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$, las componentes de la tensión así determinadas, las cuales han sido producidas por las fuerzas superficiales $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, y las fuerzas másticas X, Y, Z .

Si llamamos $\sigma_x' \dots \tau_{xy}' \dots$ a las componentes de la tensión producidas en el mismo cuerpo por las fuerzas superficiales $\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}'$ y las fuerzas másticas X', Y', Z' , las componentes $\sigma_x + \sigma_x', \dots, \tau_{xy} + \tau_{xy}', \dots$, representarán las tensiones causadas por las fuerzas superficiales $\bar{X} + \bar{X}' \dots$, y las fuerzas másticas $X + X' \dots$. Esto es así por ser lineales todas las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno. Añadiendo, de esta forma, la primera de las ecuaciones (127) a la ecuación correspondiente:

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} + X' = 0$$

se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + \sigma_x') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{xy}') + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} + \tau_{xz}') + X + X' = 0$$

y análogamente de la primera de las ecuaciones (128) y de su homóloga, se deduce:

$$\bar{X} + \bar{X}' = (\sigma_x + \sigma_x')l + (\tau_{xy} + \tau_{xy}')m + (\tau_{xz} + \tau_{xz}')n$$

Las condiciones de compatibilidad pueden combinarse también de la misma forma. El conjunto completo de ecuaciones, muestra que $\sigma_x + \sigma_x', \dots, \tau_{xy} + \tau_{xy}', \dots$, satisfacen todas las ecuaciones y condiciones, que determinan las tensiones producidas por las fuerzas $\bar{X} + \bar{X}' \dots, X + X' \dots$. Este resultado constituye el principio de superposición.

¹ H. Neuber, *Kerbspannungslehre*. Esta obra contiene también la solución de problemas bidimensionales. Véase el capítulo 7 del presente libro.

Al deducir las ecuaciones de equilibrio (127) y las condiciones de contorno (128), no hicimos ninguna distinción entre la posición y forma del elemento antes y después de aplicar la carga. De ello resulta, que nuestras ecuaciones y las conclusiones de ellas deducidas, son válidas solamente si los pequeños desplazamientos producidos en la deformación no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas exteriores. Existen casos, sin embargo, en los que es preciso tener en cuenta esa modificación. En este caso la justificación del principio de superposición, que acabamos de dar, falla.

Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de una viga sometida simultáneamente a una carga lateral y a otra carga, aplicada según su dirección longitudinal; otros muchos ejemplos se presentan en el estudio de estructuras con paredes delgadas.

82. Unidad de la solución. Estudiemos ahora, si las ecuaciones precedentes pueden tener más de una solución, dadas unas determinadas fuerzas básicas y de superficie. Supongamos que σ_x' , ..., τ_{xy}' , ... y σ_x'' , ..., τ_{xy}'' , ... representen dos soluciones correspondientes a las mismas cargas \bar{X} , ..., X . Aplicando, entonces, las ecuaciones (127) y (128) a la primera solución tendremos:

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} + X = 0$$

$$\bar{X} = \sigma_x' l + \tau_{xy}' m + \tau_{xz}' n$$

junto con las condiciones de compatibilidad.

De igual forma considerando la segunda solución, tenemos:

$$\frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial z} + X = 0$$

$$\bar{X} = \sigma_x'' l + \tau_{xy}'' m + \tau_{xz}'' n$$

junto, también, con las condiciones de compatibilidad.

Restando las expresiones precedentes se encuentra la distribución de tensiones, definida por las diferencias $\sigma_x' - \sigma_x''$, ..., $\tau_{xy}' - \tau_{xy}''$, las cuales satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sigma_x' - \sigma_x'', \dots, \tau_{xy}' - \tau_{xy}'' \\ & \frac{\partial(\sigma_x' - \sigma_x'')}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}' - \tau_{xy}'')}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz}' - \tau_{xz}'')}{\partial z} = 0 \\ & \dots \dots \dots \\ & 0 = (\sigma_x' - \sigma_x'')l + (\tau_{xy}' - \tau_{xy}'')m + (\tau_{xz}' - \tau_{xz}'')n \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

en las que todas las fuerzas exteriores se anulan. Las condiciones de compatibilidad (129) serán también satisfechas por las componentes correspondientes de la deformación $\epsilon_x' - \epsilon_x''$, ..., $\gamma_{xy}' - \gamma_{xy}''$, ...

Esta distribución tensional corresponde, en consecuencia, a fuerzas básicas y de superficie nulas. El trabajo realizado por tales fuerzas durante el proceso de carga es cero, siéndolo también, por lo tanto, $\iiint V_0 dx dy dz$. Ahora bien, dado que, como se deduce de la ecuación (85), V_0 es positivo para cualquier estado de deformación, la integral se anulará, solamente, si V_0 es nulo en todos los puntos del cuerpo, lo cual implica que lo sean cada una de las componentes $\epsilon_x' - \epsilon_x''$, ..., $\gamma_{xy}' - \gamma_{xy}''$, ... En consecuencia, los dos estados de deformación $\epsilon_x', \dots, \gamma_{xy}'$ y $\epsilon_x'', \dots, \gamma_{xy}''$ son idénticos, lo que demuestra que para unas cargas determinadas la solución de las ecuaciones es única¹.

Acabamos de probar la unicidad de la solución, basándonos en la hipótesis de que las tensiones existentes en un cuerpo, desaparecen cuando el mismo es liberado de la acción de las fuerzas exteriores. Hay ciertos casos, sin embargo, en los que pueden existir tensiones iniciales en un cuerpo sin que ninguna fuerza exterior sea aplicada. Un ejemplo de este tipo ha sido encontrado al estudiar el anillo circular (véase el § 39). Si se practica un corte siguiendo dos secciones transversales adyacentes de un anillo y se unen de nuevo los bordes obtenidos, soldándolos o mediante otro proceso cualquiera, se obtiene un anillo en el cual existen tensiones iniciales². Varios ejemplos de este tipo han sido estudiados al considerar los problemas bidimensionales.

Asimismo pueden presentarse tensiones iniciales en un cuerpo simplemente conexo como resultado de las deformaciones no elásticas, sufri-

¹ Este teorema se debe a G. Kirchhoff. Véase su *Vorlesungen über Math. Phys., Mechanik*.

² El anillo representa el ejemplo más sencillo de cuerpo múltiplamente conexo. Para los cuerpos de este tipo, las ecuaciones generales de la elasticidad, expresadas en función de las componentes de la tensión, no son suficientes para determinar las tensiones y si se desea una solución completa, un estudio adicional de los desplazamientos es necesario. Las primeras investigaciones de este tipo fueron realizadas por J. H. Michell, *Proc. London. Math. Soc.*, vol. 31, pág. 103, 1899. Véase también L. N. G. Filon, *Brit. Assoc. Advancement. Sci. Rept.*, 1921, pág. 305, y V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiples et connectés*, *Ann. école norm.*, Paris, serie 3, vol. 24, págs. 401-517, 1907. Otros datos sobre las tensiones iniciales se encuentran en la memoria de P. Némenyi, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 11, pág. 59, 1931.

das durante el proceso de fabricación. En ciertas piezas metálicas grandes, por ejemplo, pueden existir tensiones iniciales considerables, producidas por un enfriamiento no uniforme; de igual forma el laminado de barras metálicas puede originar notables tensiones, a consecuencia de la deformación plástica producida por el trabajo en frío. Las ecuaciones de la elasticidad no bastan entonces para determinar las tensiones iniciales, siendo necesario añadir información sobre el proceso de fabricación al cual ha estado sometido el cuerpo.

Es de advertir que en todos aquellos casos en los que se puede usar el principio de superposición las deformaciones y tensiones producidas por la acción de las fuerzas exteriores, no son afectadas por las tensiones iniciales, pudiendo ser calculadas de la misma forma que si tales tensiones iniciales no existieran. Las tensiones totales se obtienen, entonces, añadiendo a las iniciales las producidas por las fuerzas exteriores. En los casos en los que el principio de superposición no es aplicable, las tensiones provocadas por las fuerzas exteriores no pueden ser determinadas si no se conocen las tensiones iniciales. No podemos, por ejemplo, calcular las tensiones de flexión producidas por cargas laterales en una barra delgada que está sometida a una tracción o una compresión, sin conocer previamente la magnitud de esas tensiones iniciales.

83. Teorema de reciprocidad. Limitándonos al caso de los problemas bidimensionales, consideremos una placa sometida a dos sistemas de cargas distintos. Sean X_1 , Y_1 , \bar{X}_1 e \bar{Y}_1 las componentes de las fuerzas másicas y de contorno del primer sistema y X_2 , Y_2 , \bar{X}_2 e \bar{Y}_2 las del segundo. Los desplazamientos y las componentes de la deformación y de la tensión, correspondientes a los dos sistemas de carga, serán designados u_1 , v_1 , ϵ_x' , ϵ_y' , γ_{xy}' , σ_x' , σ_y' , τ_{xy}' y u_2 , v_2 , ϵ_x'' , ϵ_y'' , γ_{xy}'' , σ_x'' , σ_y'' , τ_{xy}'' , respectivamente. Consideremos ahora el trabajo que producirían las fuerzas del primer sistema al actuar sobre los desplazamientos del segundo. Su valor es:

$$T = \int \bar{X}_1 u_2 ds + \int \bar{Y}_1 v_2 ds + \iint X_1 u_2 dx dy + \iint Y_1 v_2 dx dy \quad (a)$$

extendiéndose la primera integral a toda la curva que limita la placa y la segunda al área de la misma. Sustituyendo \bar{X}_1 por su expresión, dada por la ecuación (20) del § 14, podemos escribir el primer término del segundo miembro de (a), de la forma siguiente:

$$\int \bar{X}_1 u_2 ds = \int l \sigma_x' u_2 ds + \int m \tau_{xy}' u_2 ds \quad (b)$$

Procediendo ahora en la forma indicada en la página 193 se obtiene:

$$\begin{aligned} \int l \sigma_x' u_2 ds &= \iint u_2 \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma_x' dx dy \\ \int m \tau_{xy}' u_2 ds &= \iint u_2 \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} dx dy + \iint \frac{\partial u_2}{\partial y} \tau_{xy}' dx dy \end{aligned}$$

Llevando esta expresión a (b), se deduce que el segundo y tercer término de (a) se convierten en:

$$\begin{aligned} \int \bar{X}_1 u_2 ds + \iint X_1 u_2 dx dy &= \iint \left(\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + X_1 \right) u_2 dx dy \\ &+ \iint \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma_x' + \frac{\partial u_2}{\partial y} \tau_{xy}' \right) dx dy \quad (c) \end{aligned}$$

De forma semejante el segundo y cuarto término nos dan:

$$\begin{aligned} \int \bar{Y}_1 v_2 ds + \iint Y_1 v_2 dx dy &= \iint \left(\frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + Y_1 \right) v_2 dx dy \\ &+ \iint \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \sigma_y' + \frac{\partial v_2}{\partial x} \tau_{xy}' \right) dx dy \quad (d) \end{aligned}$$

Observando ahora que, como consecuencia de las ecuaciones de equilibrio (18), los primeros términos de los segundos miembros de las ecuaciones (c) y (d) se anulan, se obtiene, sustituyendo en la ecuación (a):

$$\begin{aligned} T &= \iint (\epsilon_x'' \sigma_x' + \epsilon_y'' \sigma_y' + \gamma_{xy}'' \tau_{xy}') dx dy \\ &= \frac{1}{E} \iint [\sigma_x'' \sigma_x' + \sigma_y'' \sigma_y' - \nu \sigma_y'' \sigma_x' - \nu \sigma_x'' \sigma_y' \\ &\quad + 2(1 + \nu) \tau_{xy}'' \tau_{xy}'] dx dy \end{aligned}$$

El mismo resultado se obtiene calculando el trabajo realizado por las fuerzas correspondientes al segundo sistema de cargas, sobre los desplazamientos del primer sistema. Podemos pues concluir que si se comparan

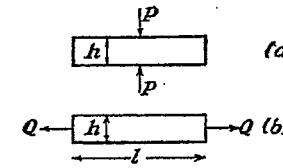


FIG. 136

dos estados tensionales diferentes, el trabajo realizado por las fuerzas del primer estado al actuar sobre los desplazamientos del segundo es igual al trabajo de las fuerzas del segundo sobre los desplazamientos del primero. Este enunciado constituye el *teorema de reciprocidad*, el cual puede ser extendido fácilmente a cuerpos en movimiento o en vibración, considerando además de las fuerzas exteriores las fuerzas de inercia. El teorema de reciprocidad encuentra un importante campo de aplicación en la

teoría de estructuras, en la construcción de las líneas de influencia. Tiene asimismo útiles aplicaciones en teoría de elasticidad.

Consideremos ahora el ejemplo sencillo de una barra prismática comprimida por dos fuerzas P , iguales y opuestas (fig. 136a). El problema de encontrar las tensiones producidas por estas fuerzas es complicado, pero nosotros vamos a suponer que estamos interesados en conocer, no las tensiones sino el alargamiento total δ de la barra. Se puede resolver este problema rápidamente haciendo uso del teorema. Con tal fin, consideremos la adición, a las tensiones correspondientes al caso de la figura 136a, de la tracción axial de la figura 136b. Para este último caso obtenemos una contracción lateral igual a $\delta_1 = \nu Qh/AE$, donde A es el área de la sección transversal de la barra. El teorema de reciprocidad nos permite escribir:

$$P + \nu \frac{Qh}{AE} = Q\delta$$

de donde el alargamiento producido por las dos fuerzas P , de la figura 136a, será:

$$\delta = \frac{\nu Ph}{AE}$$

resultando ser independiente de la forma de la sección transversal.

Como segundo ejemplo, calculemos la disminución de volumen Δ de un cuerpo elástico, producida por las dos fuerzas P , iguales y opuestas, de la figura 137a. Como segundo estado tensional, consideremos al mismo cuerpo sometido a la acción de una presión p uniformemente repartida.

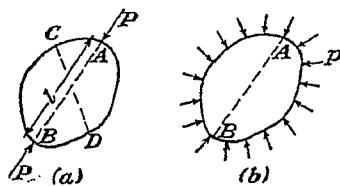


FIG. 137

En este último caso tendremos en todo punto del cuerpo una compresión uniforme (según todas las direcciones) de valor $(1 - 2\nu)p/E$ [véase la ecuación (8) del § 6] y la distancia l entre los puntos de aplicación A y B

¹ Podemos suponer que las fuerzas se reparten sobre una pequeña superficie con el fin de evitar singularidades. La consideración en problemas bidimensionales de fuerzas (ideales) concentradas, conduce generalmente a obtener desplazamientos de valor infinito, lo que indica que los desplazamientos reales dependen de la distribución de la carga.

disminuirá en la cantidad $(1 - 2\nu)p l/E$. El teorema de reciprocidad, aplicado a los dos sistemas de tensiones¹ de la figura 137 nos dará:

$$P \cdot \frac{(1 - 2\nu)p l}{E} = \Delta p$$

y la disminución de volumen será entonces:

$$\Delta = \frac{Pl(1 - 2\nu)}{E}$$

84. Carácter aproximado de las soluciones de los estados tensionales planos. Hemos señalado en la página 48 que el conjunto de ecuaciones que bastan para determinar los problemas planos de tensión, bajo las hipótesis hechas ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, σ_x , σ_y , τ_{xy} , independientes de z), no cumplían todas las condiciones de compatibilidad. Estas hipótesis implicaban que ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} sean independientes de z y que γ_{xz} , γ_{yz} sean nulas. La primera de las condiciones de compatibilidad (129) fue incluida en la teoría de los estados planos de tensión como ecuación (21). Se verifica fácilmente, que las otras cinco son satisfechas solamente si ϵ_z es función lineal de x e y , lo que más bien es excepción que regla para las soluciones obtenidas en los capítulos 3 a 7. Evidentemente, tales soluciones no pueden ser exactas, pero como veremos a continuación, sin embargo, constituyen excelentes aproximaciones para el caso de placas delgadas.

Busquemos las soluciones exactas de las ecuaciones tridimensionales, en las que²:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

y las fuerzas máximas son cero. Tales soluciones deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio (127) y las condiciones de compatibilidad (130).

Dado que σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} , son nulos la tercera, cuarta y quinta de las ecuaciones (130) (leyendo por columnas) nos dan:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0$$

lo que quiere decir que $\partial \theta / \partial z$ es constante. Designando k a su valor, tendremos, al integrar respecto a z

$$\theta = kz + \theta_0 \quad (a)$$

donde θ_0 es una función arbitraria de x e y .

La tercera de las ecuaciones (127) es verificada, entonces, idénticamente y las dos primeras toman la forma bidimensional.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

que son satisfechas, como antes, por:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (b)$$

siendo ϕ , ahora, función de x , y y z .

¹ Para otras aplicaciones del mismo tipo véase A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, págs. 174-176, 1927.

² A. Clebsch, *Elasticität*, § 39. Véase también A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 145, 1927.

Volvendo a las ecuaciones (130) y recordando que $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, observamos que sumando las tres ecuaciones de la izquierda tenemos:

$$\nabla^2\theta = 0 \quad (c)$$

y, por tanto, usando (a):

$$\nabla_1^2\theta_0 = 0 \quad (d)$$

donde:

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Resulta entonces, siendo σ_z nulo y viiendo dados σ_x y σ_y por las dos primeras ecuaciones (b), que podemos escribir $\nabla_1^2\phi = \theta_0$, que sustituyendo (a), queda:

$$\nabla_1^2\phi = kz + \theta_0 \quad (e)$$

donde θ_0 es una función de x e y que satisface la ecuación (d). Teniendo en cuenta las expresiones (a) y la primera de las (b), la primera de las ecuaciones (130) se convierte en:

$$(1 + \nu)\nabla^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} = 0 \quad (f)$$

Pero:

$$\nabla^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2\phi = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\nabla_1^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\theta_0 + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right)$$

donde, en la última igualdad, se ha usado la ecuación (e). Se puede, entonces, habida cuenta de (d), sustituir $\partial^2\theta_0/\partial x^2$ en (f) por $-\partial^2\theta_0/\partial y^2$, resultando:

$$(1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\theta_0 + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 \right) = 0 \quad (g)$$

Podemos usar esta ecuación en lugar de la primera de las (130). De forma análoga la segunda y tercera pueden remplazarse por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 \right) = 0$$

Estas ecuaciones y la (g) muestran que las derivadas segundas respecto a x e y de la función (de x , y y z), contenidas en el paréntesis, se anulan. Esta función es, por tanto, lineal en x e y , pudiendo escribirse:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 = a + bx + cy \quad (h)$$

donde a , b y c son funciones arbitrarias de z . Integrando esta ecuación dos veces respecto a z , obtenemos:

$$\phi = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 z^2 + A + Bx + Cy + \phi_1 z + \phi_0 \quad (i)$$

donde A , B , C , son funciones de z obtenidas por integración repetida de a , b , c , y ϕ_1 , ϕ_0 funciones de x e y , arbitrarias por el momento.

Si calculamos σ_x , σ_y , τ_{xy} a partir de (i) mediante las relaciones (b), los términos:

$$A + Bx + Cy$$

no intervienen pudiendo, por tanto, ser anulados lo que equivale a tomar para a , b , c , el valor cero en (h).

Limitándonos a los problemas en los que la distribución de tensión es simétrica respecto al plano medio, $z = 0$, el término $\phi_1 z$ debe también ser cero, siéndolo, por lo mismo, el factor k de (a). La ecuación (i) se reduce entonces a:

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 z^2 \quad (j)$$

No obstante ϕ y θ_0 vienen relacionados por (e), donde ahora podemos hacer $k = 0$. Sustituyendo entonces (j) en (e) y usando (d), tenemos:

$$\nabla_1^2\phi_0 = \theta_0 \quad (k)$$

y, por tanto, según (d):

$$\nabla_1^4\phi_0 = 0 \quad (l)$$

Las restantes ecuaciones de (130) son satisfechas, habida cuenta de la ecuación (a) y de que σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} , son nulos.

Podemos ahora obtener una distribución de tensiones eligiendo una función ϕ_0 de x e y que satisfaga la ecuación (l), obteniendo θ_0 a partir de (k) y ϕ a partir de (j). Las tensiones, entonces, se obtienen mediante las fórmulas (b). Cada una de ellas consta de dos partes, la primera que se deduce de ϕ_0 en la ecuación (j), la segunda del término $-\frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} \theta_0 z^2$. A la vista de la ecuación (l) se deduce, que la primera parte es exactamente igual a la componente plana de la tensión determinada en los capítulos 3 a 7. La segunda parte, proporcional a z^2 , puede reducirse a un valor tan pequeño como se quiera, eligiendo una placa suficientemente delgada. De ahí la conclusión de que las soluciones de los capítulos 3 a 7, que no satisfacen todas las condiciones de compatibilidad sean, sin embargo, buenas aproximaciones para placas delgadas.

Las soluciones «exactas», representadas por funciones de tensión del tipo (j), exigen que las tensiones en los bordes y en cualquier otro punto, sigan una variación parabólica a lo largo del espesor. Cualquier alteración, sin embargo, de esta distribución, que no cambie la fuerza por unidad de contorno, altera la tensión, según el principio de Saint-Venant (§ 18), solamente en la vecindad inmediata del borde. Las soluciones del tipo considerado hasta aquí, representan siempre la tensión real y las componentes σ_x , τ_{xz} , τ_{yz} serán efectivamente nulas salvo en la proximidad del borde.

Problemas

1. Demostrar que:

$$\epsilon_x = k(x^2 + y^2), \quad \epsilon_y = k(y^2 + z^2), \quad \gamma_{xy} = k'xyz \\ \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde k y k' son cantidades pequeñas constantes, no es un estado posible de deformación.

2. Un sólido es calentado de forma no uniforme a la temperatura T función

de x , y y z . Si suponemos que todo elemento del cuerpo puede dilatarse libremente las componentes de la deformación serán:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

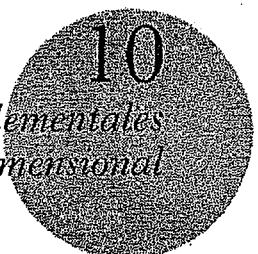
donde α es el coeficiente de dilatación.

Demostrar que esto sólo puede ocurrir cuando T es función lineal de x , y y z . (Las tensiones y deformaciones consecuentes que se producen cuando T no es lineal son estudiadas en el capítulo 14.)

3. Un disco o cilindro de la forma mostrada en la figura 137a es comprimido por dos fuerzas P , aplicadas en C y D y dirigidas según CD , que provocan una extensión de AB . A continuación se le comprime mediante dos fuerzas P según AB (fig. 137a) que producen la extensión de CD . Demostrar que estas extensiones son iguales.

4. En la solución general del § 80 ¿cómo hay que elegir las funciones ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 para obtener la solución general para el caso de deformación plana ($w = 0$)?

Problemas elementales de elasticidad tridimensional



85. Tensión uniforme. Al estudiar las ecuaciones de equilibrio (127) y las condiciones de borde (128), quedó establecido que la verdadera solución del problema deberá satisfacer, no solamente a aquéllas, sino también a las condiciones de compatibilidad (§ 77). Si las fuerzas másicas

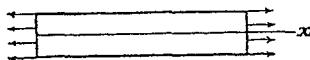


FIG. 138

son constantes o inexistentes, las condiciones de compatibilidad sólo contienen derivadas segundas de las componentes de la tensión. Por lo tanto, si unas componentes de la tensión que sean constantes o bien funciones lineales de las coordenadas pueden cumplir las ecuaciones (127) y (128), las condiciones de compatibilidad quedarán idénticamente satisfechas y dichas tensiones constituyén, entonces, la solución exacta del problema.

En el caso de una barra prismática sometida a una extensión de dirección axil (fig. 138) (caso que constituye un ejemplo muy sencillo), si se desprecian las fuerzas másicas, las ecuaciones de equilibrio quedan satisfechas tomando:

$$\sigma_x = \text{constante}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (a)$$

Sobre la superficie lateral de la barra no actúa fuerza exterior alguna y las condiciones de borde (128) están evidentemente satisfechas desde que, con excepción de σ_z , todas las componentes de la tensión son nulas. Para las caras limitantes de la barra en ambas extremidades, las condiciones de límite están reducidas a:

$$\sigma_z = \bar{X} \quad (b)$$

lo que nos dice, que si las tensiones de tracción están uniformemente repartidas en las bases de una barra prismática, en cada sección recta habrá una distribución uniforme de tensiones normales. En este caso las relaciones (a) satisfacen a las ecuaciones (127) y (128) y constituyen la solución correcta del problema, puesto que las condiciones de compatibilidad (130) quedan satisfechas idénticamente.

La solución (a) deja de ser correcta cuando los esfuerzos de extensión no se reparten uniformemente sobre las extremidades, porque entonces no se satisface en éstas a las condiciones de límite. La solución verdadera resulta, entonces, más complicada, a causa de que la distribución de tensiones en una sección transversal deja de ser uniforme. Al tratar algunos problemas de elasticidad bidimensional (pág. 75 y 197) hemos encontrado ejemplos de ese género de repartición de tensiones.

Sea ahora, como segundo ejemplo, el caso de una compresión hidrostática, uniforme. Con fuerzas máscicas inexistentes, las ecuaciones de equilibrio (127) quedan satisfechas, tomando:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (c)$$

El elipsoide de tensiones es, en este caso, una esfera, lo que quiere decir que tres direcciones perpendiculares cualesquiera pueden ser consideradas como direcciones principales, y el esfuerzo en un plano elegido arbitrariamente es una tensión normal de compresión igual a p . Las condiciones periféricas (128) quedarán satisfechas, evidentemente, si la presión p está uniformemente distribuida en la superficie del cuerpo.

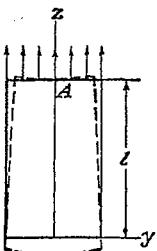


FIG. 139

86. Barra prismática extendida por acción de su propio peso. Si ρg es el peso específico del material de la barra (fig. 139), las fuerzas máscicas serán:

$$X = Y = 0, \quad Z = -\rho g \quad (a)$$

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (127) quedan satisfechas poniendo en ellas:

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (b)$$

o lo que es lo mismo, suponiendo que cada sección transversal está sujeta a una tracción uniforme originada por el peso de la parte de la barra situada por debajo de aquélla.

Fácilmente se comprueba, que para las superficies laterales, sobre las cuales no actúa fuerza alguna, las condiciones periféricas (128) están satisfechas. Para la extremidad inferior de la barra, de longitud l , las condiciones de límite se traducen en tensiones nulas y en una tensión extensora, uniformemente distribuida, $\sigma_x = \rho gl$, sobre la extremidad superior.

La solución (b), concordante con la que dan generalmente los textos elementales de resistencia de materiales, satisface también a las ecuaciones de compatibilidad (130) y por lo tanto, es la solución correcta del problema para una repartición uniforme de fuerzas en la base superior del prisma.

Pasemos ahora a considerar los desplazamientos (ver § 78). Para la aplicación de la ley de Hooke empleamos las ecuaciones (3) y (6), con lo cual llegamos a:

$$\epsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E} \quad (c)$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -v \frac{\rho g z}{E} \quad (d)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (e)$$

Los recorridos u, v, w pueden obtenerse, entonces, integrando las ecuaciones anteriores. Por integración de (c) se obtiene:

$$w = \frac{\rho g z^2}{2E} + w_0 \quad (f)$$

en la cual w_0 es una función de x y de y , que se determinará más adelante. Remplazando este último valor en las ecuaciones (e), encontramos:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

de las cuales resulta:

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0, \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \quad (g)$$

En ésta u_0 y v_0 son funciones de x y de y solamente. Remplazando en (d) las expresiones (g) tenemos:

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -v \frac{\rho g z}{E}, \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -v \frac{\rho g z}{E} \quad (h)$$

Si recordamos que u_0 y v_0 son independientes de z , concluiremos que las ecuaciones (h) quedarán satisfechas, solamente si se verifica:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\nu \rho g}{E} \quad (k)$$

Por sustitución de las expresiones (g), que nos dan u y v , en la primera de las ecuaciones (e), tendremos:

$$-2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

y puesto que u_0 y v_0 no dependen de z , será necesario que:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

Las ecuaciones (k) y (l) nos permiten establecer las expresiones generales de las funciones u_0 , v_0 , w_0 . Es fácil demostrar que todas estas ecuaciones se cumplen para los valores:

$$\begin{aligned} u_0 &= \delta y + \delta_1 \\ v_0 &= -\delta x + \gamma_1 \\ w_0 &= \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned}$$

en los cuales, α , β , γ , δ , δ_1 , γ_1 son constantes arbitrarias. Ahora bien, con arreglo a las expresiones (f) y (g), se tendrá para los desplazamientos las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu \rho g x z}{E} - \alpha z + \delta y + \delta_1 \\ v &= -\frac{\nu \rho g y z}{E} - \beta z - \delta x + \gamma_1 \\ w &= \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned} \quad (m)$$

Las seis constantes arbitrarias deberán ser determinadas teniendo en cuenta las condiciones de sustentación de la pieza, las cuales deben evitar el movimiento de la barra como cuerpo rígido. Con objeto de impedir toda traslación de la misma, fijemos el baricentro A de su cara superior de manera que $u = v = w = 0$ para $x = y = 0$ y $z = l$. Para eliminar la posibilidad de rotación de la barra alrededor de ejes paralelos a las direcciones x e y , que pasen por A , fijemos en dicho punto un elemento del eje z , con lo cual se verificará en él: $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$. En cuanto a la posibilidad de rotación alrededor del eje de las z , desaparece fijando alrededor del punto A un área elemental, en un plano paralelo al xz , con lo cual, en dicho punto, se tendrá $\partial v / \partial x = 0$. Aplicando las ecuaciones (m), las seis condiciones mencionadas, relativas al punto A , se convierten en:

$$\begin{aligned} -\alpha l + \delta_1 &= 0, & -\beta l + \gamma_1 &= 0, & \frac{\rho g l^2}{2E} + \gamma &= 0 \\ \alpha &= 0, & \beta &= 0, & \delta &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta:

$$\delta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma = -\frac{\rho g l^2}{2E}$$

de manera que en definitiva, los desplazamientos son:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu \rho g x z}{E} \\ v &= -\frac{\nu \rho g y z}{E} \\ w &= \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{aligned}$$

De aquí resulta, que los puntos que están sobre el eje de las z efectúan únicamente desplazamientos verticales, dados por:

$$w = -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2)$$

A consecuencia de la contracción lateral, otros puntos de la barra, experimentan, además del desplazamiento vertical, otro horizontal, de manera que las rectas que antes de la deformación eran paralelas al eje de las z , formarán un ángulo con esa dirección después de deformarse la barra, y ésta adquirirá la forma que se indica en la figura 139 con líneas punteadas. Sus secciones rectas pasarán a ser paraboloides. Los puntos por ejemplo, de la sección transversal $z = c$, estarán situados, después de la deformación de la barra, sobre la superficie de ecuación:

$$z = c + w = c + \frac{\rho g c^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}$$

Esta superficie es perpendicular a todas las fibras longitudinales de la barra, las que a causa de la deformación, adquieren una inclinación respecto al eje z , y las distorsiones γ_{xy} y γ_{xz} serán, entonces, nulas.

87. Torsión de ejes cilíndricos de sección circular constante. Con arreglo a la teoría elemental de la torsión de piezas cilíndricas de sección circular, la tensión tangencial, τ , en un punto cualquiera de la sección transversal (fig. 140), es perpendicular al radio r y proporcional a su distancia al eje y al ángulo específico de torsión, θ :

$$\tau = G \theta r \quad (a)$$

en la cual, G , es el módulo de rigidez. Las componentes de la tensión tangencial según los ejes x e y son:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= G \theta r \cdot \frac{x}{r} = G \theta x \\ \tau_{xz} &= -G \theta r \cdot \frac{y}{r} = -G \theta y \end{aligned} \quad (b)$$

De acuerdo con la teoría elemental, se supone también que:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

Podemos demostrar que bajo ciertas condiciones, esta solución elemental es exacta. Para ello, tendremos presente que todas las componentes de la tensión son, si no nulas, funciones lineales de las coordenadas, de

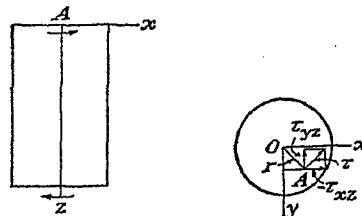


FIG. 140

modo que las ecuaciones de compatibilidad (130) se cumplen y tan sólo es necesario considerar las condiciones de equilibrio (127) y las condiciones de límite (128). Reemplazando las expresiones (b) en las (127), encontramos que estas últimas quedan satisfechas siempre que no existan fuerzas másicas. La superficie lateral del árbol considerado no está sometido a carga alguna, de manera que recordando que para la superficie cilíndrica $\cos(Nz) = n = 0$, las condiciones de límite (128) se reducen a:

$$0 = \tau_{zz} \cos(Nx) + \tau_{yy} \cos(Ny) \quad (c)$$

Para el caso de un cilindro circular se verifica, asimismo, que:

$$\cos(Nx) = \frac{x}{r}, \quad \cos(Ny) = \frac{y}{r} \quad (d)$$

La sustitución de estas expresiones y de las designadas con la letra (b) en la ecuación (c), patentiza que esta última queda satisfecha. Es también evidente que para secciones transversales no circulares, casos en los cuales no son aplicables las relaciones (d), las componentes de la tensión dadas en (b) no satisfacen la condición de límite (c) y, por lo tanto, no es adecuada la solución (a). Estos problemas de torsión, más complicados, se tratarán en el capítulo 11.

Por lo que hace a las condiciones de límite en correspondencia con las bases, es visible que las fuerzas cortantes superficiales, deben repartirse en ellas de manera exactamente igual que lo están las tensiones τ_{xz} y τ_{yz} en cualquiera de las secciones rectas intermedias de la pieza. La distribución de tensiones que dan las ecuaciones (b) representa la solución exacta del problema sólo para este caso, pero su aplicación práctica puede extenderse a otros, puesto que según el principio de Saint-Venant, a suficiente distancia de las extremidades de una barra larga sujetada a torsión, las tensiones dependen únicamente de la magnitud del momento

torsor, M_t , y son prácticamente independientes de la repartición de fuerzas que reine en las extremidades.

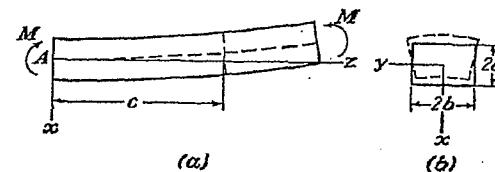


FIG. 141

En este caso, los desplazamientos pueden ser determinados de la misma manera que en el problema tratado en el párrafo anterior. Admitiendo en el punto A las mismas condiciones de vínculo supuestas en dicho problema, llegamos a:

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta zx, \quad w = 0$$

Este resultado significa que las hipótesis de la conservación de las secciones transversales planas y de los radios rectilíneos, que se formula habitualmente en el desarrollo de la teoría de la torsión, son correctas.

88. Flexión simple de barras prismáticas. Consideraremos una barra prismática flectada bajo la acción de dos pares de fuerzas iguales y opuestos M , que actúan en uno de sus planos principales (fig. 141). Tomando como origen de coordenadas el baricentro de la sección recta y como plano zx el plano principal de flexión, la teoría elemental correspondiente, nos da para las componentes de la tensión los valores:

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (a)$$

R es aquí el radio de curvatura de la barra deformada a consecuencia de la flexión. Llevando los valores que dan las expresiones (a) a las ecuaciones de equilibrio (127), se concluye que estas ecuaciones quedan satisfechas siempre que no existan fuerzas másicas. Las condiciones de límite (128), para la superficie lateral de la barra, que está exenta de fuerzas exteriores, también quedan satisfechas. Para las caras limitantes de la barra en sus extremidades, las condiciones de contorno (128), exigen que las fuerzas de superficie estén distribuidas en ellas de la misma manera que lo están las tensiones σ_z . Es esta condición necesaria para que las tensiones (a) representen la solución exacta del problema. El momento flector M está dado por la ecuación:

$$M = \int \sigma_z x \, dA = \int \frac{Ex^2 \, dA}{R} = \frac{EI_y}{R}$$

en la cual, I_y es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro paralelo al eje y . De esta ecuación resulta:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}$$

que es la conocida fórmula de la teoría elemental de la flexión.

Consideremos ahora los desplazamientos en el caso de la flexión simple. La ley de Hooke y las ecuaciones (2), llevadas a la solución (a), nos dan:

$$\epsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R} \quad (b)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R} \quad (c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (d)$$

Tomando en consideración las condiciones de sustentación de la barra, las ecuaciones diferenciales anteriores permitirán determinar los desplazamientos como en el § 86. De la ecuación (b) resulta inmediatamente

$$w = \frac{xz}{R} + w_0$$

en la cual w_0 es función de x y de y solamente. De la segunda y tercera ecuación, que resultan de la serie (d), tenemos entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

de las cuales:

$$u = -\frac{z^2}{2R} - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0, \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \quad (e)$$

Aquí u_0 y v_0 denotan funciones incógnitas de x e y , las que más adelante serán determinadas. REMPLAZANDO EN LAS ECUACIONES (c) ESTAS ÚLTIMAS EXPRESIONES, TENDREMOS:

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R}, \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R}$$

ESTAS ECUACIONES DEBERÁN QUEDAR SATISFECHAS PARA CUALQUIER VALOR DE z , Y POR LO TANTO:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

Por integración, resulta de las ecuaciones mencionadas:

$$u_0 = -\frac{\nu x^2}{2R} + f_1(y), \quad v_0 = -\frac{\nu xy}{R} + f_2(x) \quad (g)$$

REEMPLAZANDO AHORA (e) Y (g) EN LA PRIMERA ECUACIÓN INCLUIDA EN LA SERIE (d), LLEGAMOS A:

$$2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + \frac{\nu y}{R} = 0$$

ADVIRTIENDO QUE TAN SÓLO EL PRIMER TÉRMINO DE ESTA ECUACIÓN DEPENDE DE z , CONCLUIMOS QUE SE DEBERÁ TENER:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \frac{\nu y}{R} = 0$$

ESTAS ECUACIONES, ASÍ COMO LAS DESIGNADAS CON (f) EXIGEN QUE SE CUMPLA:

$$w_0 = mx + ny + p$$

$$f_1(y) = \frac{\nu y^3}{2R} + \alpha y + \gamma$$

$$f_2(x) = -\alpha x + \beta$$

EN LAS QUE m , n , p , α , β , γ , SON CONSTANTES ARBITRARIAS. DE ESTA MANERA, LAS EXPRESIONES QUE CORRESPONDEN A LOS DESPLAZAMIENTOS SERÁN:

$$u = -\frac{z^2}{2R} - mz - \frac{\nu x^2}{2R} + \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma$$

$$v = -nz - \frac{\nu xy}{R} - \alpha x + \beta$$

$$w = \frac{xz}{R} + mx + ny + p$$

LAS CONSTANTES ARBITRARIAS SE DETERMINAN MEDIANTE LAS CONDICIONES DE SUSTENTACIÓN DE LA PIEZA. SUPONIENDO FIJOS: EL BARICENTRO A DE LA CARA LIMITANTE DE LA BARRA POR LA IZQUIERDA: UN ELEMENTO DEL EJE DE LAS z Y UN ELEMENTO DEL PLANO xz , TENDREMOS PARA $x = y = z = 0$:

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ESTAS CONDICIONES QUEDAN SATISFECHAS SI TODAS LAS CONSTANTES ARBITRARIAS SON IGUALES A CERO, Y ENTONCES:

$$u = -\frac{1}{2R} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)], \quad v = -\frac{\nu xy}{R}, \quad w = \frac{xz}{R} \quad (h)$$

Para obtener la curva de deflexión, remplazarlos en las ecuaciones (*h*) los valores $x = y = 0$. Se tiene entonces:

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y}, \quad v = w = 0$$

que es la expresión de la curva de deflexión que da la teoría elemental de la flexión.

Consideremos ahora una sección transversal cualquiera, $z = c$, que dista c de la extremidad izquierda de la barra.

Después de la deformación, los puntos de esa sección transversal se encontrarán en el plano

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R}$$

es decir, que tal como lo admite la teoría elemental, en la flexión simple las secciones transversales permanecen planas. Con el objeto de estudiar ahora la deformación de la sección transversal en su propio plano, consideremos las caras $y = \pm b$, después de la flexión. Los costados de la viga toman la inclinación que se indica con líneas de trazos en la figura 141*b*, con arreglo a la ecuación:

$$y = \pm b + v = \pm b \left(1 - \frac{vx}{R} \right)$$

Los otros dos lados de la sección transversal, $x = \pm a$, se habrán curvado por efecto de la flexión y después de ésta estarán constituidos por curvas parabólicas, de ecuaciones:

$$x = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R} [c^2 + v(a^2 - y^2)]$$

Si la deformación es pequeña, esas curvas pueden ser sustituidas, con suficiente exactitud, por arcos de circunferencia de radio R/v . Cuando a causa de la flexión, la curvatura de esos costados muestra, en la dirección longitudinal, su concavidad hacia arriba, transversalmente presentan su concavidad hacia abajo. Podremos obtener la ecuación de las líneas de nivel que corresponden a esta superficie, de curvaturas opuestas, cuyo aspecto será el que indica la figura 142*a*, haciendo en la primera de las ecuaciones (*h*), x y u constantes. De esa manera, se tiene como ecuación de esas curvas

$$z^2 - vy^2 = \text{constante}$$

que son, por lo tanto, hipérbolas, de asíntotas

$$z^2 - vy^2 = 0$$

de donde resulta para el ángulo α (fig. 142*a*):

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{v}$$

Estas ecuaciones han sido utilizadas para determinar el coeficiente de Poisson, v^1 . Si se pule la cara superior de la viga y se coloca sobre ella

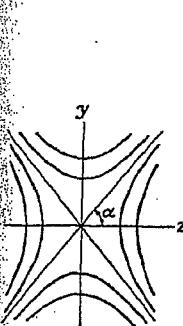


FIG. 142a

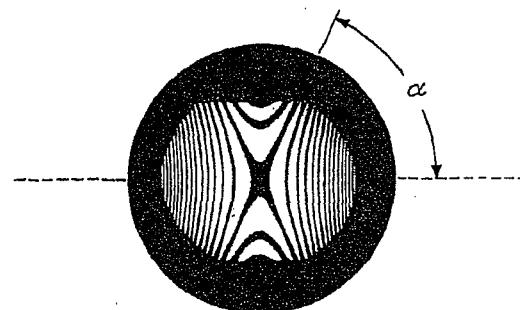


FIG. 142b

una lámina de vidrio, después de la flexión existirá holgura entre la lámina de vidrio y la superficie curva de la barra, cuya amplitud, variable, puede medirse por procedimientos ópticos. Un haz luminoso monocromático, tal como el de una llama amarilla de sodio, dirigido normalmente sobre la placa de vidrio, se reflejará en parte sobre ésta y en parte sobre las superficies de la viga y, en aquellos puntos en los que el espesor de la capa de aire determine una diferencia de caminos ópticos de esos rayos, equivalente a un múltiplo impar de una semilongitud de onda lumínosa, se producirá una interferencia de los dos rayos reflejados. De esa manera puede obtenerse una imagen tal como la que muestra la figura 142*b* que permite apreciar las líneas hiperbólicas de nivel de las superficies comprobadas.

89. Flexión simple de placas planas. Los resultados obtenidos en el párrafo anterior son de aplicación al caso de la flexión de placas de espesor uniforme. Si sobre los bordes de la placa paralelos al eje de las y (fig. 143) están repartidas las tensiones $\sigma_x = Ez/R$, la cara de ésta se transformará² en una superficie de curvaturas opuestas: en planos para-

¹ A. Cornu, *Compt. rend.*, vol. 69, pág. 333, 1869. Véase también R. Straubel, *Wied. Ann.*, vol. 68, pág. 369, 1899.

² Se supone que las deformaciones son pequeñas frente al espesor de la placa.

lelos a zx es $1/R$ y en dirección perpendicular, $-\nu/R$. Si h es el espesor de la placa, M_1 el momento flector por unidad de longitud sobre los bordes paralelos al eje de las y , y

$$I_y = \frac{1 \cdot h^3}{12}$$

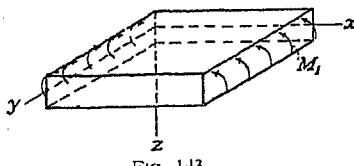


FIG. 143

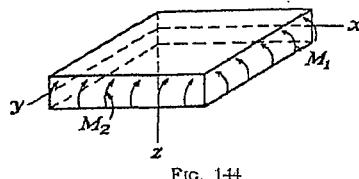


FIG. 144

el momento de inercia por unidad de longitud, la relación entre M_1 y R será, con arreglo a lo explicado en el párrafo precedente,

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3} \quad (a)$$

Si llegaran a actuar momentos flectores en dos direcciones ortogonales (fig. 144) las curvaturas de las superficies deformadas pueden obtenerse por vía de superposición. Sean $1/R_1$ y $1/R_2$ las curvaturas de las superficies elásticas en los planos paralelos a los ejes de coordenadas zx y zy y M_1 y M_2 los momentos flectores por unidad de longitud de los bordes paralelos a los ejes y y x , respectivamente. Aplicando la ecuación (a) y el principio de superposición, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) \end{aligned} \quad (b)$$

Los momentos se consideran de signo positivo si al deformar la placa, ésta muestra su convexidad hacia abajo. Despejando M_1 y M_2 en las ecuaciones (b) resulta

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \nu \frac{1}{R_2} \right) \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_2} + \nu \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned} \quad (c)$$

Para pequeñas deformaciones se puede admitir, aproximadamente:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Escribiendo entonces:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \quad (135)$$

se llega a

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (136)$$

La constante D se denomina *rígidez de flexión* de la placa. En el caso particular en que la placa adquiere la forma de superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje y tendremos $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ y de acuerdo con las ecuaciones (136):

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_2 &= -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (137)$$

Para el caso particular en que $M_1 = M_2 = M$, tenemos

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

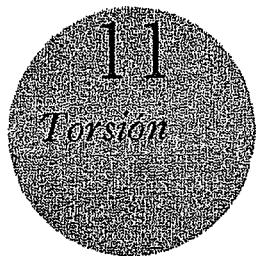
La placa adquiere, entonces, forma esférica y la relación entre la curvatura y el momento flector es, según las ecuaciones (c)

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R} \quad (138)$$

Más adelante tendremos oportunidad de emplear estos resultados.

Las fórmulas (136) son usadas en la teoría de placas, cuando los momentos flectores no son uniformes y vienen acompañados de presiones superficiales y fuerzas tangenciales. En esas circunstancias esas fórmulas, que son una aproximación válida para placas delgadas, se deducen de las ecuaciones generales del capítulo 9. La teoría elemental de la flexión de barras puede relacionarse con las ecuaciones generales de manera semejante¹.

¹ J. N. Goodier, *Trans. Roy. Soc. Can.*, 3.^a edición, sección III, vol. 32, pág. 65, 1938.



90. Torsión de barras prismáticas. Hemos visto ya (§ 87) que la solución exacta del problema de la torsión de una pieza cilíndrica de sección circular, se obtiene admitiendo que las secciones transversales de la barra permanecen planas y giran sin deformarse durante la torsión. Esta teoría, desarrollada por Coulomb¹, fue aplicada más tarde por Navier² al caso de una barra prismática de sección no circular. Adoptando la hipótesis mencionada, Navier llegó a la conclusión errónea de que para

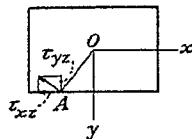


FIG. 145

un determinado momento el ángulo de torsión es inversamente proporcional al momento polar de inercia respecto al baricentro de la sección transversal y de que los valores máximos de la tensión tangencial se dan en los puntos más alejados del centro de la sección³. Es fácil ver que esta hipótesis está en contradicción con las condiciones de contorno. Tomemos, por ejemplo, una barra de sección rectangular (fig. 145). De la teoría de Navier se sigue que en todo punto *A* del contorno, la tensión tangencial debe actuar

¹ *Histoire de l'académie*, 1784, págs. 229-269. París, 1787.

² Navier, *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*, 3.^a edición, París, 1864, editada por Saint-Venant.

³ Estas condiciones se dan en una lámina elástica delgada (correspondiente a una rebanada de la barra, comprendida entre dos secciones transversales) ligada a dos placas rígidas. Véase J. N. Goodier, *J. Applied Phys.*, vol. 13, pág. 167, 1942.

según la dirección normal al radio *OA*. Descomponiendo esta tensión en sus dos componentes τ_{xz} y τ_{yz} , es evidente que una tensión complementaria, igual a τ_{yz} actuará sobre el elemento de superficie lateral de la barra que circunda al punto *A* (véase § 4). Esto está en contradicción con la hipótesis de que la torsión es causada únicamente por los pares que actúan sobre los extremos de la barra, estando libres las caras laterales de la acción de toda fuerza exterior. Una sencilla experiencia realizada con una barra rectangular (fig. 146) muestra que las secciones transversales de la barra no permanecen planas al sufrir la torsión y que la distorsión de los elementos rectangulares de la superficie es máxima en el centro de los lados, es decir, en los puntos más próximos al eje de la barra.

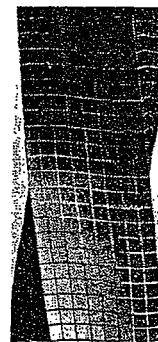


FIG. 146

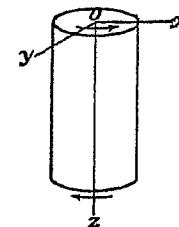


FIG. 147

La solución exacta del problema de la torsión de barras prismáticas por pares aplicados en los extremos, fue dada por Saint-Venant⁴, quien utilizó el método llamado *semiinverso*. Comenzó haciendo ciertas suposiciones respecto a la deformación de la barra sometida a torsión, suposiciones que demostró cumplían las ecuaciones de equilibrio (127) y las condiciones de contorno (128). Se sigue, entonces, de la unicidad de la solución de las ecuaciones de la elasticidad (§ 82), que las suposiciones hechas son correctas y que la solución obtenida es la verdadera solución del problema de torsión.

Consideremos una barra prismática que trabaja a torsión bajo la acción de los pares aplicados en los extremos (fig. 147). Basándose en la solución obtenida para el árbol cilíndrico (pág. 285), Saint-Venant supone que la deformación de la barra prismática sometida a torsión, consiste en: *a)* una rotación de las secciones transversales, como en el caso del árbol cilíndrico

⁴ *Mém. savants étrangers*, vol. 14, 1855. Véase también la nota de Saint-Venant relativa a la obra de Navier, *loc. cit.*, e I. Todhunter y K. Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2.

y b) un *alabeo* de las secciones transversales, igual para todas ellas. Tomando el origen de coordenadas en una de las secciones extremas (fig. 147), encontramos que los desplazamientos correspondientes a la rotación de las secciones transversales son:

$$u = -\theta zy, \quad v = \theta zx \quad (a)$$

donde θ es el ángulo de rotación de la sección transversal distante z del origen.

El alabeo de las secciones transversales estará definido por una función:

$$w = \theta\psi(x, y) \quad (b)$$

Partiendo de los desplazamientos (a) y (b) supuestos, calculamos las componentes de la deformación mediante las ecuaciones (2), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (c)$$

Las componentes de la tensión correspondientes, dadas por las ecuaciones (3) y (6) son:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (d)$$

Puede verse que las hipótesis (a) y (b), relativas a los desplazamientos, implican la ausencia de tensiones normales que actúen entre las fibras longitudinales de la pieza o en la dirección longitudinal de las mismas. Asimismo no hay distorsión de las secciones transversales por ser ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} nulos. Tenemos en todo punto un estado de esfuerzo cortante simple definido por las componentes τ_{xz} y τ_{yz} . La función $\psi(x, y)$, que define el alabeo de la sección recta, debe ser determinada ahora, de forma que satisfaga las ecuaciones de equilibrio (127). Llevando a estas ecuaciones la expresión (d) y despreciando las fuerzas másicas vemos que la función ψ debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (139)$$

Consideremos ahora las condiciones de contorno (128). En las superficies laterales de la barra, sobre las que no actúa ninguna fuerza exterior

y cuyas normales son perpendiculares al eje z , tenemos $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$ y $\cos(Nz) = n = 0$. Las dos primeras ecuaciones (128) son idénticamente satisfechas y la tercera da:

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \quad (e)$$

lo que significa que la tensión tangencial resultante que actúa en el contorno, tiene por dirección la de la tangente al mismo (fig. 148). Anteriormente demostramos (pág. 294) que esta condición debe ser satisfecha si sobre la superficie lateral de la barra no actúa ninguna fuerza.

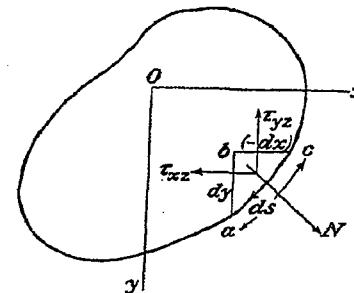


FIG. 148

Considerando un elemento de arco abc del contorno y suponiendo que s aumenta yendo de c hacia a , tenemos:

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}$$

y la ecuación (e) se convierte entonces en:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} = 0 \quad (140)$$

De esta forma todo problema de torsión se reduce a la determinación de una función ψ que satisfaga la ecuación (139) y las condiciones de contorno (140).

Otra manera de operar que ofrece la ventaja de simplificar la expresión de la condición de contorno es la siguiente. Habida cuenta de la anulación de σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} [ecuación (d)], las ecuaciones de equilibrio (127) se reducen a:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Las dos ecuaciones primeras son cumplidas ya que τ_{xz} y τ_{yz} son, según las ecuaciones (d), independientes de z . La tercera significa que podemos expresar τ_{xz} y τ_{yz} de la forma:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (141)$$

donde ϕ es una función de x e y llamada *función de tensión*¹.

De las ecuaciones (141) y (d) se deduce:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (f)$$

Si eliminamos ψ derivando la primera expresión respecto a y y la segunda respecto a x y restándolas, encontramos que la función de tensión debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F \quad (142)$$

en la que:

$$F = -2G\theta \quad (143)$$

La condición de contorno (e), introduciendo las ecuaciones (141), se convierte en:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (144)$$

Lo que nos dice que la función de tensión ϕ debe ser constante a lo largo del contorno de la sección transversal. Si se trata de directrices que sean recintos simplemente conexos (barras macizas) esta constante puede ser elegida arbitrariamente, asignándosela el valor cero en el estudio que sigue. La determinación, entonces, de la distribución de tensiones en la sección transversal de una barra sometida a torsión, consiste en determinar la función ϕ que satisfaga la ecuación (142) y se anule en el contorno. Más adelante, daremos algunos ejemplos de aplicación de esta teoría general a diversos casos particulares de secciones transversales.

Consideremos ahora las condiciones existentes en los extremos de una barra sometida a torsión. Las normales a esas secciones extremas son paralelas al eje z . En consecuencia $l = m = 0$, $n = \pm 1$ y las ecuaciones (128) se convierten en:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz}, \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz} \quad (g)$$

en las que el signo positivo deberá tomarse para el extremo de la barra cuya normal exterior tenga el sentido del semieje positivo de las z , como

¹ Esta función ha sido introducida por L. Prandtl. Véase *Physik. Z.*, vol. 4, 1903.

ocurre con el extremo inferior de la barra de la figura 147. En los extremos las fuerzas tangenciales se distribuyen de igual manera que las tensiones tangenciales en las secciones rectas. Es fácil probar que la resultante de esas fuerzas es un par. Sustituyendo en las ecuaciones (g) los valores (141) y observando que ϕ es cero en el contorno se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint \bar{X} dx dy &= \iint \tau_{xz} dx dy = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = \int dx \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \\ \iint \bar{Y} dx dy &= \iint \tau_{yz} dx dy = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \\ &= - \int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = 0 \end{aligned}$$

Vemos, pues, que la resultante de las fuerzas distribuidas sobre los extremos de la barra son cero y que estas fuerzas representan un par cuya magnitud es:

$$\begin{aligned} M_t &= \iint (\bar{Y}x - \bar{X}y) dx dy = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy \\ &\quad - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy \quad (h) \end{aligned}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\phi = 0$ en el contorno, encontramos:

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy \quad (145)$$

contribuyendo cada una de las integrales del último miembro de las ecuaciones (h) a la mitad del valor del par. Vemos así que una mitad del par es debida a la componente τ_{xz} y la otra a τ_{yz} .

Queda así demostrado que la distribución de tensiones que se obtiene suponiendo que los desplazamientos vienen dados por (a) y (b) y determinando las componentes τ_{xz} y τ_{yz} mediante las ecuaciones (141), (142) y (144), satisfacen las ecuaciones de equilibrio (127), anula las fuerzas aplicadas sobre la superficie lateral de la barra y da en los extremos el par expresado por (145). Las condiciones de compatibilidad (130) no necesitan ser consideradas dado que las tensiones han sido deducidas de los desplazamientos (a) y (b). Las ecuaciones de la elasticidad quedan, pues, satisfechas y la solución del problema de la torsión, así obtenida, es la exacta.

Como se ha hecho notar esa solución exige que las fuerzas en los extremos de la barra, se distribuyan de una cierta manera. No obstante, las aplicaciones prácticas de la solución no se limitan a casos de ese tipo, ya que, según el principio de Saint-Venant, a suficiente distancia de los extremos de una barra larga sometida a torsión, las tensiones dependen

solamente de la magnitud del momento de torsión M_t y son prácticamente independientes de la distribución de fuerzas que exista en sus bases.

91. Barras de sección transversal elíptica. Supongamos que el contorno de la sección transversal (fig. 149) venga dado por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a)$$

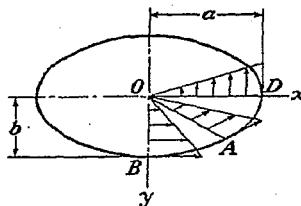


FIG. 149

La ecuación (142) y la condición de contorno (144) son satisfechas si la función de tensión es de la forma:

$$\phi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (b)$$

en la que m es una constante. Llevando el valor (b) a la ecuación (142) se obtiene:

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F$$

de donde:

$$\phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (c)$$

La ecuación (145) permitirá ahora determinar la constante F . Sustituyendo el valor (c) en esta ecuación tendremos:

$$M_t = \frac{a^2 b^2 F}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right) \quad (d)$$

Puesto que:

$$\iint x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi b a^3}{4}, \quad \iint y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4},$$

$$\iint dx dy = \pi a b$$

la ecuación (d) se convierte en:

$$M_t = -\frac{\pi a^3 b^3 F}{2(a^2 + b^2)}$$

de donde:

$$F = -\frac{2 M_t (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad (e)$$

La ecuación (e) da entonces:

$$\phi = -\frac{M_t}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (f)$$

Las componentes de la tensión se obtienen sustituyendo en las ecuaciones (141) la función de tensión (b), que operando nos da:

$$\tau_{xz} = -\frac{2 M_t y}{\pi a b^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2 M_t x}{\pi a^3 b} \quad (146)$$

La relación entre las componentes de la tensión es proporcional a y/x y por lo tanto constante a lo largo de cualquier radio tal como OA (fig. 149). Esto significa que la tensión tangencial resultante a lo largo de un radio cualquiera OA , tiene una dirección constante que será evidentemente la de la tangente al contorno en el punto A . A lo largo del eje vertical OB la componente τ_{yz} de la tensión tangencial es nula y la tensión resultante es igual a τ_{xz} . A lo largo del eje horizontal OD la tensión tangencial resultante es igual a τ_{yz} . Es evidente que la tensión máxima se produce en el contorno y puede demostrarse fácilmente que este máximo se da en los extremos del eje menor de la elipse. Sustituyendo $y = b$ en la primera de las ecuaciones (146) obtendremos el valor absoluto de dicho máximo:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi a b^3} \quad (147)$$

Para $a = b$ esta expresión coincide con la conocida fórmula correspondiente a la sección circular:

Sustituyendo (e) en (143) resulta la siguiente expresión para el ángulo específico de torsión:

$$\theta = M_t \cdot \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} \quad (148)$$

Damos el nombre de *rigidez torsional* al factor por el cual debe dividirse el momento torsor para obtener el ángulo específico de torsión. Si los denotamos por C , su valor, de (148), para el caso de sección elíptica es:

$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G}{4\pi^2} \frac{(A)^4}{I_p} \quad (149)$$

donde:

$$A = \pi ab, \quad I_p = \frac{\pi ab^3}{4} + \frac{\pi ba^3}{4}$$

son el área y el momento polar de inercia de la sección transversal.

Conocidas las componentes de la tensión (146) podemos determinar fácilmente los desplazamientos. Las componentes u y v vienen dadas por

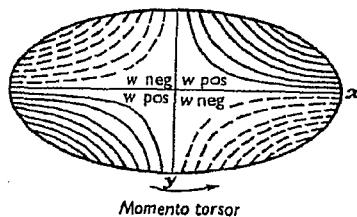


FIG. 150

las ecuaciones (a) del § 90. El desplazamiento w se deduce de las ecuaciones (d) y (b) del § 90. Sustituyendo los valores dados por (146) y (148) e integrando obtenemos:

$$w = M_t \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G} \quad (150)$$

Esto prueba que las curvas de nivel de las secciones alabeadas son hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes principales de la elipse (fig. 150).

92. Otras soluciones elementales. En el curso de un estudio del problema de la torsión, Saint-Venant analizó varias soluciones polinómicas de la ecuación (142). Para resolver el problema representamos la función de tensión de la forma:

$$\phi = \phi_1 + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) \quad (a)$$

La ecuación (142) nos da entonces:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (b)$$

y a lo largo del contorno, según (144):

$$\phi_1 + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) = \text{constante} \quad (c)$$

El problema de la torsión se reduce entonces a la obtención de las soluciones de la ecuación (b), que satisfagan a la condición de contorno (c). Con el fin de llegar a soluciones de forma polinómica, tomemos la función de variable compleja:

$$(x + iy)^n$$

Las partes real e imaginaria de esta expresión son soluciones de la ecuación (b) (véase la pág. 214). Tomando, por ejemplo, $n = 2$, se obtienen las soluciones $x^2 - y^2$ y $2xy$. Con $n = 3$ se tienen $x^3 - 3xy^2$ y $3x^2y - y^3$. Con $n = 4$ llegamos a soluciones funciones homogéneas de cuarto grado y así sucesivamente. Combinando tales soluciones podremos obtener otras varias de forma polinómica.

Tomando, por ejemplo:

$$\phi = \frac{F}{4} (x^2 + y^2) + \phi_1 = \frac{F}{2} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) + b \right] \quad (e)$$

se obtendrá una solución de la ecuación (142) que será un polinomio de tercer grado con dos constantes a determinar a y b . Este polinomio será solución del problema torsional si satisface a las condiciones de contorno (144), o lo que es lo mismo si el contorno de la sección transversal de la barra tiene por ecuación:

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) + b = 0 \quad (f)$$

dando diversos valores a la constante (b) de esta ecuación, obtendremos otras tantas formas para la sección transversal.

Tomando $b = -(2/27)a^3$ se obtiene como solución el triángulo equilátero. La ecuación (f) en este caso tendrá la forma:

$$(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a)(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a)(x + \frac{1}{3}a) = 0$$

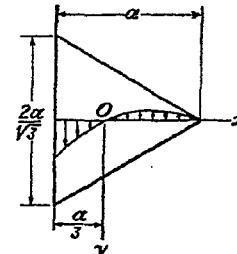


FIG. 151

que es el producto de las ecuaciones de los lados del triángulo mostrado en la figura 151. Observando que $F = -2G\theta$ y sustituyendo:

$$\phi = -G\theta \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27} a^3 \right] \quad (g)$$

en las ecuaciones (141) obtenemos las componentes de la tensión τ_{xz} y τ_{yz} . Por razones de simetría a lo largo del eje x , $\tau_{xz} = 0$ y entonces deducimos de (g):

$$\tau_{yz} = \frac{3G\theta}{2a} \left(\frac{2ax}{3} - x^2 \right) \quad (h)$$

La máxima tensión se produce en los puntos medios de los lados del triángulo donde, con arreglo a (h), tiene el valor:

$$\tau_{\max} = \frac{G\theta a}{2} \quad (i)$$

En los vértices del triángulo, la tensión tangencial es cero (véase la fig. 151).

Sustituyendo (ρ) en la ecuación (145) se obtiene:

$$M_t = \frac{G\theta a^4}{15\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \theta G I_p \quad (l)$$

Si como solución de la ecuación (142) se toma un polinomio de cuarto grado que contenga solamente potencias pares de x e y , obtendremos la siguiente función de tensión:

$$\phi = -G\theta \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{1}{2}(a - 1) \right]$$

La condición de contorno (144) queda satisfecha si el contorno de la sección transversal tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + a - 1 = 0$$

Variando a , Saint-Venant obtuvo una familia de secciones transversales como las que muestra la figura 152 a. Combinando soluciones polinómicas de cuarto y octavo grado Saint-Venant llegó a la sección recta que representa la figura 152 b.

Basándose en sus investigaciones, Saint-Venant formuló ciertas conclusiones generales de interés práctico. Demostró que para contornos simplemente conexos y para una determinada área de la sección, la rigidez torsional aumenta cuando el momento polar de inercia de aquélla dismi-

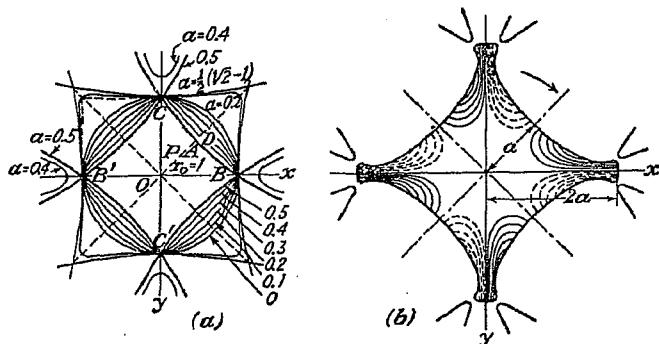


FIG. 152

nuye. En consecuencia, dada una cierta cantidad de material, la máxima rigidez a la torsión se obtiene en un eje de sección circular. Conclusiones semejantes resultan de considerar la máxima tensión tangencial. Para un par de torsión y un área de sección transversal dados, el menor valor de la tensión máxima corresponde a la figura de mínimo momento polar de inercia.

Comparando diversas secciones rectas de contornos simplemente

conexos, dedujo Saint-Venant que la rigidez torsional puede calcularse aproximadamente mediante la ecuación (143), es decir, sustituyendo el eje dado por uno de sección elíptica con igual área y momento polar de inercia.

En todos los casos estudiados por Saint-Venant, la tensión máxima correspondió a los puntos del contorno más próximos al baricentro de la sección recta. Posteriormente las investigaciones más detalladas de Filon¹, mostraron que existen casos en los que los puntos con tensiones máximas, si bien pertenecen al contorno, no son los más próximos al baricentro de la sección transversal.

Tomando $n = 1$ y $n = -1$ en la expresión (d) y usando las coordenadas polares r y ψ , tenemos las siguientes soluciones de la ecuación (b):

$$\phi_1 = r \cos \psi, \quad \phi_2 = \frac{1}{r} \cos \psi$$

La función de tensión (a) podrá tomar entonces la forma:

$$\phi = \frac{F}{4}(x^2 + y^2) - \frac{Fa}{2}r \cos \psi + \frac{Fb^2 a}{2r} \cos \psi - \frac{F}{4}b^2 \quad (m)$$

en la que a y b son constantes. La condición de contorno (144) se cumplirá si en el contorno de la sección recta tenemos $\phi = 0$ ó, según (m):

$$r^2 - b^2 - 2a(r^2 - b^2) \frac{\cos \psi}{r} = 0 \quad (n)$$

$$(r^2 - b^2) \left(1 - \frac{2a \cos \psi}{r} \right) = 0 \quad (o)$$

ecuación del contorno de la sección recta representada en la figura 153². Tornando:

$$r^2 - b^2 = 0$$

obtendremos una circunferencia de radio b centro en el origen, y haciendo:

$$1 - \frac{2a \cos \psi}{r} = 0$$

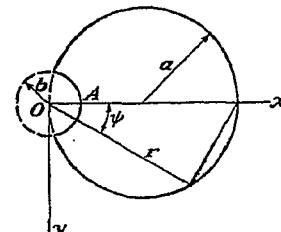


FIG. 153

resulta una circunferencia de radio a tangente del eje y en el origen. La tensión tangencial máxima se da en el punto A y es:

$$\tau_{\max} = G\theta(2a - b) \quad (p)$$

Cuando b es muy pequeña comparada con a , es decir, cuando se tiene una ranura longitudinal semicircular de radio muy pequeño, la tensión en el fondo de la ranura es el doble de la tensión máxima correspondiente al eje de sección circular de radio a sin entalladura.

¹ L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. London*, serie A, vol. 193, 1900. Véase también el trabajo de G. Polya, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 10, pág. 353, 1930.

² Este problema fue estudiado por C. Weber, *Forschungsarbeiten*, núm. 249, 1921.

93. Analogía con la membrana. La analogía con la membrana, introducida por L. Prandtl¹ ha resultado de gran utilidad para la solución de problemas de torsión. Imaginemos una membrana homogénea (fig. 154) cuyos bordes se mantienen fijos sobre un contorno igual al de la sección transversal de la barra sujeta a torsión, que es sometida a una tracción

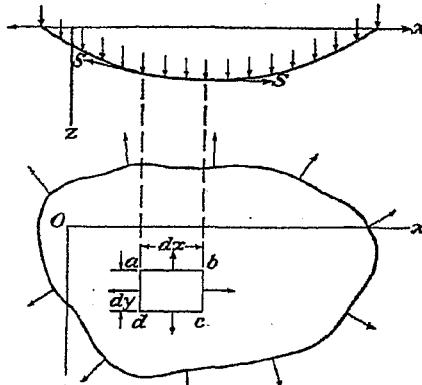


FIG. 154

uniforme sobre sus bordes y a una presión uniforme sobre sus caras. Sea q la presión por unidad de superficie de la membrana y S la tracción uniforme por unidad de longitud del contorno. Los esfuerzos de tracción que actúan sobre los lados ad y bc del elemento infinitesimal $abcd$ (fig. 154) tienen, cuando las flechas de la membrana son pequeñas, una resultante dirigida hacia arriba cuyo valor es $-S(\partial^2 z / \partial x^2) dx dy$. De igual forma, las tracciones que actúan sobre los otros lados del elemento tienen por resultante $-S(\partial^2 z / \partial y^2) dx dy$ y la ecuación de equilibrio del elemento será:

$$q dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (151)$$

En el contorno la flecha de la membrana es cero. Comparando la ecuación (151) y las condiciones de contorno para las flechas z de la membrana,

¹ Physik Z., vol. 4, 1903. Véase también Anthes, Dinglers polytech. J., pág. 342, 1906. Otros desarrollos de la analogía, así como ciertas aplicaciones de la misma, pueden verse en los trabajos de A. A. Griffith y G. I. Taylor, Tech. Rept. Adv. Comm. Aeronautics, vol. 3, páginas 910 y 938, 1917-1918.

con la ecuación (142) y la condición de contorno (144) (véase el § 90) para la función de tensión ϕ , se deduce que estos dos problemas son idénticos. Podemos entonces deducir de las flechas de la membrana los valores de ϕ sin más que sustituir la cantidad $-(q/S)$ de la ecuación (151) por la cantidad $F = -2G\theta$ de la ecuación (142).

Mediante la representación de la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel (fig. 155) se pueden obtener varias conclusiones importantes relativas a la distribución de tensiones en la torsión. Consideremos un punto cualquiera B de la membrana. La flecha a lo largo de la curva de nivel que pasa por este punto es constante y se tendrá:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

La ecuación correspondiente para la función de tensión será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = \tau_x \frac{dy}{ds} - \tau_{yx} \frac{dx}{ds} = 0$$

ecuación que expresa que la proyección de la tensión tangencial resultante en el punto B , sobre la normal N a la curva de nivel es cero, deduciéndose que la tensión tangencial en el punto B tiene la dirección de la tangente

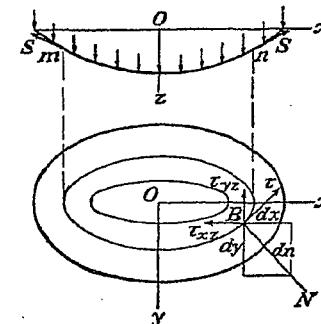


FIG. 155

a la curva de nivel que pasa por ese punto. Si en la sección transversal de una barra sujeta a torsión se trazan curvas tales que la tensión tangencial resultante en cualquier de sus puntos tenga la dirección de la tangente respectiva, dichas curvas serán las llamadas *líneas de tensión tangencial*. Por lo tanto, las curvas de nivel de la membrana son las curvas de tensión tangencial de la sección transversal de la barra sometida a torsión.

La magnitud de la tensión resultante τ en B (fig. 155) se obtiene proyectando sobre la tangente las componentes τ_{xz} y τ_{yz} . Se tiene entonces:

$$\tau = \tau_{yz} \cos(Nx) - \tau_{xz} \cos(Ny)$$

Sustituyendo:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \cos(Nx) = \frac{dx}{dn}, \quad \cos(Ny) = \frac{dy}{dn}$$

se obtiene:

$$\tau = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn}\right) = -\frac{d\phi}{dn}$$

La magnitud de la tensión tangencial en B viene dada por la pendiente máxima de la membrana en ese punto. Basta simplemente con sustituir q/S por $2G\theta$ en la expresión de la pendiente. De este hecho, se deduce que las máximas tensiones tangenciales actúan en los puntos en los que las curvas de nivel están muy próximas unas a otras.

La ecuación (145) nos permite establecer que el doble del volumen limitado por la membrana deformada y el plano xy (fig. 155) representa el par de torsión supuesto que q/S es sustituido por $2G\theta$.

Se puede observar que la forma de la membrana y , en consecuencia, la distribución de tensiones es la misma cualquiera que sea el punto de la sección transversal, tomado como origen en el problema de torsión. Este punto, por supuesto, representa el eje de rotación de las secciones rectas. Es sorprendente a primera vista que las secciones rectas puedan girar respecto a un eje diferente (paralelo) siendo el mismo el par al que se encuentran sometidas. Esta diferencia, sin embargo, se resuelve mediante una rotación de conjunto (rotación de sólido rígido) de la pieza. Consideremos, por ejemplo, un cilindro circular sometido a torsión, cuyas secciones rectas han sufrido rotaciones respecto al eje central. Una generatriz lateral toma una posición oblicua respecto a su dirección original, a la cual puede ser llevada de nuevo mediante una rotación de conjunto del cilindro alrededor de un diámetro. Las posiciones finales de las secciones transversales corresponderán, entonces, a una rotación de torsión alrededor de esta generatriz, tomada como eje. Las secciones rectas se mantienen planas pero se encuentran ahora inclinadas respecto a su plano inicial, a causa de la rotación de conjunto del cilindro. Cualquier sección estará alabeada y con una elección dada de los ejes, la inclinación de un elemento de superficie de la sección terminal estará definida [$\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$ estando dados por las ecuaciones (d) y (b) del § 90]. Ese elemento puede ser devuelto a su orientación original mediante una rotación de conjunto alrededor de un eje perteneciente a la sección terminal. Una rotación tal sustituye el eje de las rotaciones de torsión por un eje paralelo. Es posible, entonces, definir un eje o un centro de las rotaciones de torsión, llamado *centro de torsión* si se precisa la orientación final de un elemento de superficie de la sección terminal, por ejemplo, si tal elemento se mantiene fijo.

Consideremos ahora la condición de equilibrio de la porción mn de la membrana limitada por una curva de nivel (fig. 155). La pendiente de la membrana a lo largo de esta curva es en cualquier punto proporcional a la tensión tangencial τ e igual a $\tau \cdot q/S \cdot 1/2G\theta$. Llamando, entonces, A a la proyección horizontal de la porción mn de membrana, la ecuación respectiva de equilibrio será:

$$\int S \left(\tau \frac{q}{S} \frac{1}{2G\theta} \right) ds = qA$$

o bien:

$$\int \tau ds = 2G\theta A \quad (152)$$

Mediante esta expresión puede obtenerse el valor medio de la tensión tangencial a lo largo de una curva de nivel.

Tomando $q = 0$, es decir, considerando una membrana sobre la que no actúe carga lateral alguna, se llega a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (153)$$

la cual coincide con la ecuación de la función ϕ_1 [ecuación (b) del § 92]. Tomando las ordenadas del contorno de la membrana, de forma tal que se verifique la ecuación:

$$z + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) = \text{constante} \quad (154)$$

se cumplirá también la condición de contorno (c) del § 92. De esta forma, podemos obtener la función ϕ_1 a partir de la superficie de deformación de una membrana no cargada, supuesto que las ordenadas de la superficie de la misma tengan unos determinados valores en el contorno. Más adelante veremos que tanto las membranas cargadas, como las no cargadas, pueden ser utilizadas para determinar experimentalmente la distribución tensional en piezas sometidas a torsión.

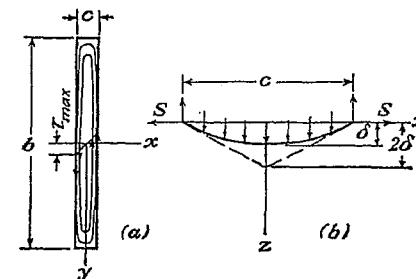


FIG. 156

La analogía de la membrana no es útil solamente cuando el material de la barra sometida a torsión, se mantiene dentro del límite elástico, sino también cuando ese límite es superado en ciertos puntos de la sección y el material comienza a ceder haciéndose plástico¹. Suponiendo

¹ Este hecho fue indicado por Prandtl, véase A. Náda, *Z. angev. Math. Mech.*, vol. 3, pág. 442. Véase también E. Trefftz, *ibid.*, vol. 5, pág. 64, 1925.

que la tensión tangencial se mantenga constante durante la deformación plástica, la distribución tensional en la zona de la sección transversal elásticamente deformada sigue estando representada por la membrana, pero en la zona de deformaciones plásticas, la tensión vendrá dada por una superficie de pendiente máxima y constante correspondiente a la tensión límite. Imaginemos que esa superficie esté colocada sobre la sección de la barra a la manera de un tejado y que también esté aplicada la membrana tersa y cargada como se explicó anteriormente. Al aumentar la presión, ciertas partes de la membrana comienzan a ponerse en contacto con el techo rígido. Esto corresponde a la iniciación de la deformación plástica de la barra sometida a torsión. Si se sigue aumentando la presión, ciertas zonas entran en contacto con el techo. Estas zonas son las regiones de deformación plástica de la barra. A Nádai ha realizado interesantes experimentos que ilustran esta teoría¹.

94. Torsión de barras de sección rectangular estrecha. La analogía con la membrana, proporciona una solución muy sencilla del problema de la torsión de una barra de sección rectangular estrecha. Despreciando el efecto de los lados cortos del rectángulo y suponiendo que la membrana, ligeramente deformada, toma una forma cilíndrica (fig. 156), podremos obtener la flecha de la membrana mediante la fórmula elemental de la parábola, que corresponde a la curva de equilibrio de un hilo uniformemente cargado² (fig. 156b):

$$\delta = \frac{qc^2}{8S} \quad (a)$$

La pendiente máxima que se presenta en el punto medio de los lados largos del rectángulo es, de acuerdo con las conocidas propiedades de la parábola:

$$\frac{4\delta}{c} = \frac{qc}{2S} \quad (b)$$

El volumen limitado por la membrana deformada y el plano xy , calculado como cilindro parabólico, será:

$$V = \frac{2}{3} c \delta b = \frac{qc^3}{12S} \quad (c)$$

Empleando ahora la analogía de la membrana y sustituyendo q/S por $2G\theta$ en (b) y (c), se obtiene:

$$\tau_{\max} = cG\theta, \quad M_t = \frac{1}{2}bc^2G\theta \quad (d)$$

¹ Véase *Trans. A.S.M.E. Applied Mechanics Division*, 1930. Véase también A. Nádai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, 1950, capítulos 35 y 36.

² Véase S. Timoshenko y D. Young, *Engineering Mechanics*, pág. 35.

de donde:

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{2}bc^2G} \quad (155)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{2}bc^2} \quad (156)$$

En la curva de deflexión parabólica (fig. 156b):

$$z = \frac{4\delta}{c^2} \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right)$$

y la pendiente de la membrana en cualquier punto es:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{8\delta x}{c^2} = - \frac{q}{S} x$$

La tensión correspondiente en la barra sometida a torsión es:

$$\tau_{yz} = 2G\theta x$$

La distribución de tensiones obedece, pues, a una ley lineal, como se ve en la figura 156a. Calculando la magnitud del par correspondiente a esta distribución de tensiones se obtiene:

$$\frac{\tau_{\max}}{4} c \cdot \frac{2}{3} c \cdot b = \frac{1}{6} bc^2 \tau_{\max}$$

El valor obtenido es solamente la mitad del total dado por la ecuación (156). La otra mitad corresponde a la componente τ_{xz} , la cual fue despreciada al suponer que la superficie de la membrana deformada era cilíndrica. Aun cuando la magnitud de estas tensiones sólo es apreciable en la proximidad de los lados cortos y aunque los valores máximos que alcanzan son inferiores al de τ_{\max} calculado anteriormente, actúan a mayores distancias del eje de la barra y su momento representa la segunda mitad del par de torsión M_t *.

Es interesante destacar que el valor máximo de la tensión τ_{\max} , dado por la primera de las ecuaciones (d), es doble del que se origina en un eje circular de diámetro igual a c sometido al mismo giro θ . Esto puede ser explicado considerando el alabeo de las secciones transversales. Los lados de las secciones rectas tales como m_1 (fig. 157) permanecen normales a las aristas de la barra, como es mostrado en la figura, en los puntos n y m . La distorsión total de un elemento tal como el $abcd$ se compone de dos partes: la parte γ_1 debida a la rotación de la sección transversal alrededor del eje de la barra, la cual es igual a la producida en un cilindro circular de diámetro c y la parte γ_2 debida al alabeo de la sección transversal.

* Esta cuestión fue aclarada por Lord Kelvin y Tait, *Natural Philosophy*, vol. 2, pág. 267.

En el caso de una sección rectangular estrecha $\gamma_2 > \gamma_1$ y la distorsión resultante es doble de la que se da en un eje circular de diámetro c .

Las ecuaciones (155) y (156), obtenidas para el caso de una sección rectangular estrecha, pueden ser usadas también cuando se trate de barras de pared delgada, de secciones tales como las mostradas en la figura 158,

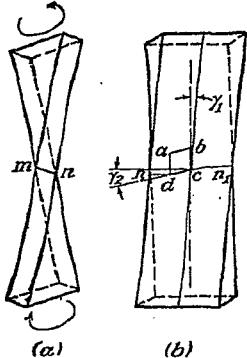


FIG. 157

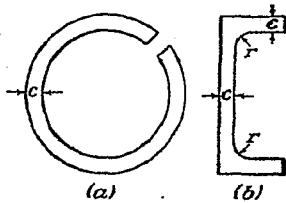


FIG. 158

bastando para ello hacer b igual a la longitud de la sección transversal desarrollada. Tal extensión se sigue del hecho de que si el espesor c de un tubo cilíndrico cortado a lo largo de una generatriz (fig. 158a) es pequeño frente al diámetro del mismo, la pendiente máxima de la membrana y el volumen por ella limitado serán aproximadamente los mismos que para una sección rectangular estrecha de espesor c y longitud la de la circunferencia media del tubo. Una conclusión análoga se obtiene para el caso de la sección L representada en la figura 158b. Es de advertir, sin embargo, que en este último caso existe una concentración de tensiones considerable en los ángulos entrantes, cuyo valor depende del radio r de la transición, no pudiendo aplicarse a tales puntos la ecuación (156). Un estudio mas detallado de este tema será realizado en el § 98.

95. Torsión de barras de sección rectangular. Sirviéndonos de nuevo de la analogía con la deformación de una membrana, el problema se reduce a la determinación de las flechas de una membrana rectangular, como la representada en la figura 159. Estas flechas deben satisfacer la ecuación (151)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (a)$$

y ser cero en el contorno.

La condición de simetría con respecto al eje y y las condiciones de contorno en los lados $x = \pm a$ del rectángulo, quedan satisfechas si se expresa z bajo la forma de una serie,

$$z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2a} Y_n \quad (b)$$

en la que b_1, b_3, \dots son coeficientes constantes e Y_1, Y_3, \dots son funciones de y solamente. Sustituyendo (b) en la ecuación (a) y observando que el segundo miembro de esta ecuación puede ser desarrollado en serie¹:

$$-\frac{q}{S} = -\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (c)$$

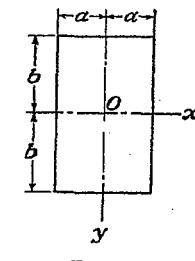


FIG. 159

llegamos a la siguiente ecuación para la determinación de Y_n :

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{4a^2} Y_n = -\frac{q}{S} \frac{4}{n\pi b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (d)$$

de donde:

$$Y_n = A \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} + B \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (e)$$

La simetría de la superficie deformada de la membrana respecto al eje x , exige que la constante de integración A sea cero. La constante B es determinada a partir de la condición de que la flecha de la membrana sea nula para $y = \pm b$, es decir, $(Y_n)_{y=\pm b} = 0$ lo que da:

$$Y_n = \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(n\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \right] \quad (f)$$

y la expresión general, según (b), de la superficie deformada de la membrana será:

$$z = \frac{16qa^2}{Sn^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(n\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Sustituyendo q/S por $2G\theta$ obtenemos la función de tensión:

$$\phi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(n\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (g)$$

¹ B. O. Peirce, *A Short Table of Integrals*, pág. 95, 1910.

Las componentes de la tensión se obtienen ahora a partir de las ecuaciones (141) derivando. Por ejemplo:

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(n\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \right] \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad (h)$$

Suponiendo que $b > a$ la tensión tangencial máxima, correspondiente a la mayor pendiente de la membrana, se da en los puntos medios de los lados largos $x = \pm a$ del rectángulo. Sustituyendo $x = a, y = 0$ en (h) obtenemos:

$$\tau_{\max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \right]$$

y observando que:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

tenemos:

$$\tau_{\max} = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \quad (157)$$

La serie del segundo miembro converge con gran rapidez para $b > a$, no siendo difícil calcular τ_{\max} con suficiente exactitud para cualquier valor particular de b/a . En el caso de un rectángulo muy estrecho, por ejemplo, b/a resulta muy grande, por lo cual podemos despreciar la sumatoria de (157). Tenemos entonces:

$$\tau_{\max} = 2G\theta a$$

lo que coincide con la primera de las ecuaciones (d) del § 94.

Si la sección es cuadrada $a = b$ y de la ecuación (157):

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= 2G\theta a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi/2)} + \frac{1}{9 \operatorname{ch}(3\pi/2)} + \dots \right] \right\} \\ &= 2G\theta a \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{2,509} + \frac{1}{9 \times 55,67} + \dots \right) \right] \\ &= 1,351 G\theta a \end{aligned} \quad (158)$$

En general se tiene:

$$\tau_{\max} = k 2G\theta a \quad (159)$$

donde k es un factor numérico cuyo valor depende de b/a . Diversos valores de este factor son dados a continuación:

TABLA DE CONSTANTES DE LA TORSIÓN DE UNA BARRA RECTANGULAR

b/a	k	k_1	k_2	b/a	k	k_1	k_2
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,312
2,5	0,968	0,249	0,258	∞	1,000	0,333	0,333

Calculemos ahora el momento torsor M_t en función del ángulo específico de torsión θ . Usando para ello la ecuación (145) obtenemos:

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx \, dy = \frac{64G\theta a^2}{\pi^3} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(n\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \right\} dx \, dy = \frac{32G\theta(2a)^3(2b)}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &\quad - \frac{64G\theta(2a)^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \end{aligned}$$

y observando que¹

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

tenemos:

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (160)$$

La serie que figura en el segundo miembro converge rápidamente y M_t puede ser calculado fácilmente para cualquier valor de la relación a/b . En el caso de un rectángulo estrecho podemos tomar:

$$\frac{n\pi b}{2a} = 1$$

Entonces:

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left(1 - 0,680 \frac{a}{b} \right) \quad (161)$$

Para la sección cuadrada, $a = b$, y (160) da

$$M_t = 0,1406 G\theta(2a)^4 \quad (162)$$

¹ B. O. Peirce, *A short table of Integrals*, pág. 90, 1910.

En general, el momento puede ser representado por la ecuación:

$$M_t = k_1 G \theta (2a)^3 (2b) \quad (163)$$

en la que k_1 es un factor numérico cuyo valor depende de la relación b/a . Diversos valores de este factor son dados en la tabla anteriormente escrita.

Sustituyendo el valor de θ dado por la ecuación (163) en la ecuación (159) obtenemos la tensión tangencial máxima en función del momento de torsión:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2 (2a)^2 (2b)} \quad (164)$$

donde k_2 es un factor numérico cuyo valor viene indicado en la tabla de la página 315.

96. Resultados complementarios. El problema torsional correspondiente a barras cuya sección transversal tiene otras formas puede ser resuelto usando series, como ya se ha hecho en el párrafo anterior.

En el caso de un sector circular¹ (fig. 160) los contornos vienen dados por $\rho = \pm a/2$, $r = 0$, $r = a$. Tomamos una función de tensión de la siguiente forma:

$$\phi = \phi_1 + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) = \phi_1 - \frac{G \theta r^2}{2}$$

La función ϕ_1 debe satisfacer la ecuación de Laplace (véase el § 92). Tomando como solución de esta ecuación la serie:

$$\phi_1 = \frac{G \theta}{2} \left[\frac{r^2 \cos 2\psi}{\cos \alpha} + a^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right]$$

llegamos a la función de tensión:

$$\phi = \frac{G \theta}{2} \left[-r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + a^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right]$$

Para conseguir que también se anule en el contorno circular $r = a$ debemos poner

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} = 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha}$$

de donde se obtiene en la forma usual:

$$A_n = \frac{16\alpha^2}{\pi^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n \left(n + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left(n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)}$$

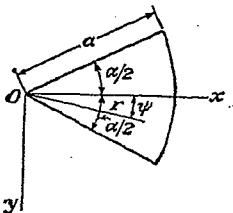


FIG. 160

¹ Este problema fue estudiado por Saint-Venant, *Compt. rend.*, vol. 87, págs. 849 y 893, 1878. Véase también A. G. Greenhill, *Messenger of Math.*, vol. 9, pág. 35, 1879. Otro método en el que se utiliza la función de Bessel fue dado por A. Dinnik, *Bull. Don Polytech. Inst., Novotcherkassk*, vol. 1, pág. 309. Véase también A. Föppl y L. Föppl, *Drang und Zwang*, pág. 96, 1928.

La función de tensión resulta, por tanto:

$$\phi = \frac{G \theta}{2} \left[-r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + \frac{16\alpha^2 \theta^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\cos \frac{n\pi\psi}{\alpha}}{n \left(n + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left(n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)} \right]$$

Sustituyendo en la ecuación (165) obtenemos $M_t = 2 \int \int \phi r d\psi dr = k G \theta^4 \theta$, donde k es un factor que depende del ángulo α del sector. Diversos valores de k , calculados por Saint-Venant, son dados a continuación:

$\alpha =$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$k =$	0,0181	0,0349	0,0825	0,148	0,296	0,572 ¹	0,672 ¹	0,878 ²
$k_1 =$	0,452	0,622	0,719
$k_2 =$	0,490	0,652	0,849

¹ Estos datos han sido corregidos por M. Asseu. Véase G. Polya y G. Szegö, *Inequalities in Mathematical Physics*, pag. 261, Princeton University Press, 1951.

² Este dato ha sido corregido por Dinnik, *loc. cit.*

Las máximas tensiones tangenciales a lo largo de los contornos circular y radial, vienen dados por las fórmulas $k_1 G \theta$ y $k_2 G \theta$, respectivamente. Diversos valores de k_1 y k_2 se encuentran en la tabla precedente.

La solución para un sector de corona circular puede obtenerse de la misma manera¹.

En el caso de un triángulo rectángulo isósceles², el ángulo específico de torsión dado por

$$\theta = 38,3 \frac{M_t}{G a^4}$$

en la que a es la longitud de los lados iguales del triángulo. La tensión tangencial máxima se produce en el punto medio de la hipotenusa y es igual a

$$\tau_{\max} = 18,02 \frac{M_t}{a^3}$$

Introduciendo coordenadas curvilineas ha sido estudiada la torsión de piezas con otras secciones transversales. Tomando coordenadas elípticas (véase el § 60) y usando las funciones conjugadas ξ y η determinadas por la ecuación:

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$$

Obtenemos secciones transversales limitadas por elipses e hipérbolas homofocales³.

¹ Saint-Venant, *loc. cit.* Véase también A. E. H. Love, *Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 319, 1927.

² B. G. Galerkin, *Bull. acad. des sci. de Russ.*, pág. 111, 1919; G. Kolosoff, *Compt. rend.*, vol. 178, pág. 2057, 1924.

³ A. G. Greenhill, *Quart. J. Math.*, vol. 16, 1879. Véase también L. N. G. Filon, *Trans. Soc. (London)*, serie A, vol. 193, 1900.

Usando la ecuación¹

$$x + iy = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2$$

obtenemos secciones transversales limitadas por paráolas ortogonales.

Asimismo han sido obtenidas las soluciones correspondientes a otras muchas secciones², macizas y huecas, incluyendo polígonos, ángulos, cardioides, lemniscatas³, y círculos con uno o varios agujeros excéntricos⁴. En todos los casos en los que la sección puede ser aplicada sobre el círculo unidad mediante una representación conforme es siempre posible obtener una solución expresada por una integral compleja⁵.

97. Resolución de problemas de torsión por el método elasto-energético⁶. Hemos visto que la solución de los problemas torsionales se reduce, en cada caso particular, a la determinación de la función de tensión que satisface la ecuación diferencial (142) y la condición de contorno (144). Cuando se trata de obtener una solución aproximada del problema, resulta útil determinar la función de tensión a partir de la condición de mínimo de una cierta integral⁷, en lugar de trabajar con la ecuación diferencial. Dicha condición puede obtenerse mediante la expresión de la energía potencial elástica de la barra sometida a torsión. La energía de deformación de la barra por unidad de longitud, según (88), es

$$V = \frac{1}{2G} \int \int (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2) dx dy = \frac{1}{2G} \int \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Dando un pequeño incremento $\delta \phi$ a la función de tensión ϕ , incremento que se anule en el contorno⁸, la energía de deformación varía en

$$\frac{1}{2G} \delta \int \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

y la variación del momento de torsión, según la ecuación (145), es

$$\int \int \delta \phi dx dy$$

¹ E. W. Anderson y D. L. Holl, *Iowa State Coll. J. Sci.*, vol. 3, pág. 231, 1929.

² Véase la recopilación de T. J. Higgins, *Am. J. Phys.*, vol. 10, pág. 248, 1942.

³ Las referencias de los trabajos que dan las soluciones exactas de estos casos, demasiado abundantes para ser incluidas aquí, pueden encontrarse consultando *Applied Mechanics Review*, *Science Abstracts A, Mathematical Reviews* y *Zentralblatt für Mechanik*. La mayoría de las referencias dadas en la pág. 370 incluyen o se refieren al problema de torsión.

⁴ Véase G. B. Ling, *Quart. Applied Math.*, vol. 5, pág. 168, 1947.

⁵ Resultado obtenido por N. I. Muschelisvili. Véase I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, capítulo 4, 1946.

⁶ Un resumen con referencias de este y otros métodos aproximados es dado por T. J. Higgins, *J. Applied Phys.*, vol. 14, pág. 469, 1943.

⁷ Este método fue propuesto por W. Ritz, quien lo usó en la resolución de problemas de flexión y de vibración de placas rectangulares. Véase *J. reine angew. Math.*, vol. 135, 1908, y *Ann. Physik*, serie 4, vol. 28, pág. 737, 1909.

⁸ Haciendo $\delta\phi = 0$ en el contorno las variaciones de ϕ no introducirán ninguna nueva fuerza sobre la superficie lateral de la barra.

Empleando un razonamiento análogo al usado para establecer la ecuación (91) se obtiene:

$$\frac{1}{2G} \delta \int \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 2\theta \int \int \delta \phi dx dy$$

o bien:

$$\delta \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy = 0$$

La verdadera expresión de la función de tensión ϕ es, por lo tanto, aquella que anula la variación de la integral

$$U = \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy \quad (165)$$

Llegamos a la misma conclusión empleando la analogía de la membrana y el principio de los trabajos virtuales (§ 48). Si S es la tracción uniforme aplicada a la membrana, el aumento de su energía potencial elástica, producido durante su deformación, se obtiene multiplicando S por el aumento de superficie que experimenta la membrana. De esta forma obtenemos

$$\frac{1}{2} S \int \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

donde z es la flecha de la membrana. Si consideramos ahora un desplazamiento virtual de la membrana a partir de su posición de equilibrio, el cambio de su energía de deformación, producido por este desplazamiento, debe ser igual al trabajo realizado por la carga uniforme q en la traslación virtual. Podemos entonces escribir:

$$\frac{1}{2} S \delta \int \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int \int q \delta z dx dy$$

y la determinación de la superficie de deformación de la membrana se reduce a la obtención de la expresión de la función z , que haga mínima la integral

$$\int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{q}{S} z \right\} dx dy$$

Sustituyendo $2G\theta$ por q/S llegamos a la integral (165) anteriormente obtenida.

En la resolución aproximada de los problemas de torsión remplazamos, como hemos visto, el cálculo varacional por una simple determinación del mínimo de una función. Tomemos como función de tensión la serie

$$\phi = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots \quad (a)$$

en la que $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ son funciones que satisfacen la condición de contorno, es decir, se anulan en la periferia. Al elegir estas funciones, debemos guiarnos por la analogía con la membrana, dándoles la forma

adecuada a la representación de la función ϕ : Las cantidades a_0, a_1, a_2, \dots son factores numéricos, a determinar a partir de la condición de mínimo de la integral (165). Sustituyendo la serie (a) en esta integral e integrando, obtenemos una función de segundo grado en a_0, a_1, a_2, \dots cuya condición de mínimo es

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0, \dots \quad (b)$$

Obtenemos así un sistema lineal de ecuaciones, a partir del cual pueden determinarse los coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots . Aumentando el número de términos de la serie (a) aumenta la exactitud de la solución aproximada y utilizando una serie infinita llegaríamos a la solución exacta del problema torsional¹.

Tomamos como ejemplo, el caso de una sección transversal rectangular² (fig. 159). El contorno viene dado por las ecuaciones $x = \pm a$, $y = \pm b$ y la función $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$ se anula en la periferia. La serie (a) puede ponerse en la forma

$$\phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum \sum a_{mn} x^m y^n \quad (c)$$

en la cual m y n , por razones de simetría, deben ser pares.

Suponiendo que tenemos una sección transversal cuadrada y limitando el desarrollo de la serie (c) al primer término, tomemos

$$\phi = a_0(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad (d)$$

Sustituyendo ésta expresión en (165), se deduce de la condición de mínimo que

$$a_0 = \frac{5}{8} \frac{G\theta}{a^2}$$

La magnitud del momento, según (145), será

$$M_t = 2 \int \int \phi dx dy = \frac{25}{64} G\theta a^4 = 0,1888(2a)^4 G\theta$$

valor que difiere de la solución exacta (162) en un $1\frac{1}{2}\%$.

Para obtener una mayor aproximación, tomaremos los tres primeros términos de la serie (c). Usando, entonces, la condición de simetría, obtenemos

$$\phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)[a_0 + a_1(x^2 + y^2)] \quad (e)$$

que sustituida en (165) y usando las ecuaciones (b) nos da

$$a_0 = \frac{5}{8} \cdot \frac{259}{277} \cdot \frac{G\theta}{a^2}, \quad a_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \cdot \frac{G\theta}{a^4}$$

¹ Las condiciones de convergencia de este método fueron estudiadas por Ritz, *loc. cit.* Véase también E. Trefftz, *Handbuch der Physik*, vol. 6, pág. 130, 1928.

² Véase S. Timoshenko, *Bull. Inst. Wiss. of Communication*, San Petersburgo, 1913 y *Proc. London Math. Soc.*, serie 2, vol. 20, pág. 389, 1921.

El momento de torsión, que se obtiene sustituyendo ϕ en (145), resulta

$$M_t = \frac{25}{8} \left(\frac{259}{277} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \right) G\theta a^4 = 0,1404 G\theta (2a)^4$$

valor que es tan sólo 0,15 % menor que el correcto.

Se comete un error mucho mayor en la determinación de la tensión máxima. Sustituyendo (e) en las expresiones (141) de las componentes de la tensión, nos encontramos con un error del orden del 4 %, debiendo tomar más términos de la serie (c) para conseguir una mayor exactitud.

Puede demostrarse mediante la analogía con la membrana que procediendo de la forma explicada anteriormente, se obtiene generalmente para el momento de torsión, valores menores que el exacto. Una membrana perfectamente flexible, uniformemente estirada en su contorno y uniformemente cargada es un sistema con un número infinito de grados de libertad. El limitarnos en el cálculo a unos pocos términos de la serie (c), equivale a introducir en el sistema ciertos vínculos que lo reducen a otro con un número pequeño de grados de libertad. Tales vínculos solamente pueden reducir la flexibilidad del sistema y disminuir el volumen limitado por la membrana deformada. El momento de torsión, que se deduce de ese volumen, será pues, de ordinario, menor que el verdadero.

Otro método para la determinación aproximada de la función ϕ ha sido sugerido por E. Trefftz¹. Con este método, el valor aproximado del momento es superior al verdadero. Usando entonces los métodos de Ritz y Trefftz juntos, pueden establecerse los límites de error de la solución aproximada.

La aplicación del método de Ritz no entraña el empleo exclusivo de los polinomios (c), pudiendo usarse toda función $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ para la serie (a), cuya forma sea adecuada para la representación de la función de tensión ϕ . Tomando, por ejemplo, funciones trigonométricas y atendiendo a las condiciones de simetría (fig. 159), obtenemos

$$\phi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (f)$$

Sustituyendo en (165) y efectuando la integración, resulta

$$U = \frac{\pi^2 ab}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2G\theta \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \cdot \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n-1}{2}}$$

¹ E. Trefftz, *Proc. Second. Intern. Congr. Applied. Mech.*, Zürich, 1926, pág. 131. Véase también N. M. Basu, *Phil. Mag.*, vol. 10, pág. 886, 1930.

Las ecuaciones (b) se convierten en

$$\frac{\pi^2 ab}{4} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2G\theta \cdot \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} = 0$$

y de aquí

$$a_{mn} = \frac{128G\theta b^2 (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\pi^4 mn(m^2\alpha^2 + n^2)}$$

donde $a = b/a$. Sustituyendo en (f), obtenemos la solución exacta del problema bajo la forma de una serie trigonométrica. El momento torsor será entonces

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx \, dy \\ &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{128G\theta b^2}{\pi^4 mn(m^2\alpha^2 + n^2)} \cdot \frac{32ab}{mn\pi^2} \quad (g) \end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2(m^2\alpha^2 + n^2)} = \frac{\pi^4}{96m^2} \frac{\operatorname{tgh} \frac{m\alpha\pi}{2} - \frac{m\alpha\pi}{2}}{-\frac{1}{3}(m\alpha\pi/2)^3}$$

vemos que la expresión anterior coincide con la (160). Considerando, ahora, el caso de un rectángulo alargado, con una dimensión b muy grande frente a la otra a (fig. 159), podemos tomar como primera aproximación

$$\phi = G\theta(a^2 - x^2) \quad (h)$$

que coincide con la solución estudiada en el § 94. Con el fin de conseguir una mayor aproximación, a la par del cumplimiento de las condiciones de contorno en los lados cortos del rectángulo, podemos tomar

$$\phi = G\theta(a^2 - x^2)[1 - e^{-\beta(b-x)}] \quad (k)$$

y elegir la cantidad β de forma tal que la integral (165) tome el valor mínimo. Resulta así

$$\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

A causa del término exponencial encontrado entre corchetes en la expresión (k), la distribución de tensiones que se obtiene, coincide prácticamente con la solución (h), en todos aquellos puntos suficientemente distantes de los lados cortos del rectángulo. En la proximidad de estos lados,

la función de tensión (k) satisface la condición de contorno (144). Llevando (k) a la ecuación (145) del momento de torsión obtenemos

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx \, dy = \frac{1}{3} G\theta (2a)^3 (2b) \left(1 - 0,632 \frac{a}{b} \right)$$

lo que coincide bastante satisfactoriamente con la ecuación (161), obtenida antes mediante el empleo de una serie.

En todos aquellos casos en los que la sección transversal tenga por contorno un polígono convexo, puede usarse como función de tensión, con excelentes resultados, una expresión polinómica análoga a la (c). Si

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \dots$$

son las ecuaciones de los lados del polígono, podemos tomar la función de tensión de la forma

$$\phi = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \cdots (a_nx + b_ny + c_n) \sum a_{mn} x^n y^m$$

obteniéndose, por regla general, una exactitud satisfactoria con sólo considerar unos pocos términos del principio de la serie.

El método elastoenergético es útil también cuando el contorno de la sección transversal (fig. 161) está dado por dos curvas¹

$$y = a\psi\left(\frac{x}{b}\right) \quad y = -a\psi\left(\frac{x}{b}\right)$$

donde

$$\psi\left(\frac{x}{b}\right) = \psi(t) = t^m [1 - (t^2)^q]$$

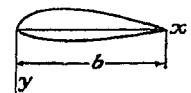


FIG. 161

Las condiciones de contorno serán cumplidas si tomamos para la función de tensión una expresión aproximada

$$\phi = A(y - a\psi)(y + a_1\psi)$$

Sustituyéndola en la integral (165) obtenemos, según la ecuación $dI/dA = 0$

$$A = -\frac{G\theta}{1 + \alpha(a^2 + a_1^2 + aa_1)/b^2}$$

donde

$$\alpha = \frac{\int_0^1 \psi^3 (d\psi/dt)^2 dt}{\int_0^1 \psi^3 dt}$$

¹ Tales problemas fueron estudiados por L. S. Leibenson. Véase su libro *Variational Methods for Solving Problems of the Theory of Elasticity*, Moscú, 1943. Véase también W. J. Duncan, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 25, pág. 634, 1938.

El momento deducido de la ecuación (145) es

$$M_t = -A \frac{b(a + a_1)^3}{3} \int_0^1 \psi^3 dt$$

En el caso particular en el que $m = \frac{1}{2}$, $p = q = 1$, $a = a_1$, tenemos $\psi = \pm a$ $\psi(x/b) = \pm \sqrt{x/b} \cdot [1 - (x/b)]$, obteniéndose

$$A = -\frac{G\theta}{1 + \frac{11}{13} \frac{a^2}{b^2}}, \quad M_t = 0,0736 \frac{G\theta ba^3}{1 + \frac{11}{13} \frac{a^2}{b^2}}$$

A. Weigand¹ ha dado una solución aproximada, que ha comparado con los resultados obtenidos en ensayos experimentales, para secciones limitadas por una circunferencia y una cuerda. Los métodos numéricos son estudiados en el apéndice.

98. Torsión de perfiles laminados. Las fórmulas obtenidas para barras de sección rectangular estrecha (§ 94), pueden ser utilizadas en el estudio de la torsión de secciones como las que presentan los aceros laminados, tales como perfiles en *U*, *L* e *I*. Si la sección transversal es de espesor

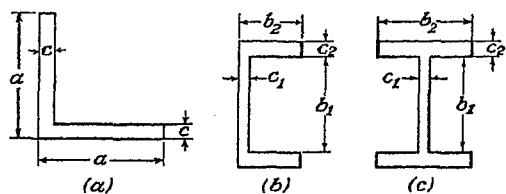


FIG. 162

constante, como en la figura 162a, el ángulo de torsión se obtiene con suficiente exactitud a partir de la ecuación (155), haciendo en ella b igual a la longitud desarrollada de la fibra media² de la sección, es decir, $b = 2a - c$. En el caso de una sección en *U* (fig. 162b), se obtiene con cierta aproximación el ángulo de torsión considerando para las alas un espesor medio c_2 , descomponiendo la sección transversal en tres rectángulos y sustituyendo en la ecuación (155) bc^3 por $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$, lo que significa que la rigidez torsional de la pieza es igual a la suma de las rigideces de los tres rectángulos³.

¹ *Lufthansa-forsch.*, vol. 20, 1944, traducido al inglés como *N.A.C.A. Tech. Mem.*, 1182, 1948.

² Una fórmula más elaborada, que tiene en cuenta el aumento de rigidez resultante de la unión de los rectángulos, fue desarrollada por G. W. Trayer y H. W. March, *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Rept.*, 334, 1930.

³ La comparación de la rigidez a la torsión obtenida por este método con la dada por los ensayos experimentales, para distintos perfiles y diversas dimensiones ha sido realizada por A. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.*, pág. 295, Munich, 1921. Véase también *Bauingenieur*, serie 5, vol. 3, pág. 42, 1922.

Se tiene entonces

$$\theta = \frac{3M_t}{(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)G} \quad (a)$$

Para calcular la tensión en los puntos del contorno, situados a considerable distancia de los vértices de la sección transversal, podemos usar una vez más la ecuación correspondiente a un rectángulo alargado y tomar

$$\tau = c\theta G$$

Según la ecuación (a) tendremos, entonces, para las alas del perfil

$$\tau = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad (b)$$

Las mismas ecuaciones aproximadas pueden ser usadas para una viga de sección I (fig. 162c).

En los ángulos entrantes se produce una considerable concentración de tensiones cuya magnitud depende del radio de las curvas de transición.

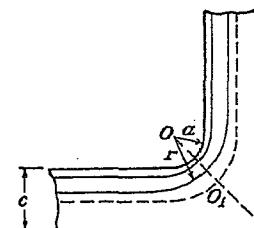


FIG. 163

Un valor aproximado de las tensiones existentes en tales puntos, puede obtenerse mediante la analogía con la membrana. Consideremos una sección transversal angular, de espesor constante c (fig. 163) y sea a el radio en la transición que corresponde al ángulo entrante. Suponiendo que la superficie de la membrana en la bisectriz OO_1 , es aproximadamente una superficie de revolución de eje perpendicular al plano de la figura en O y empleando coordenadas polares, la ecuación (151) de la superficie deformada de la membrana se transforma en (véase el § 25).

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{q}{S} \quad (c)$$

Recordando que la pendiente de la membrana dz/dr nos da la tensión tangencial sin más que sustituir q/S por $2G\theta$, de la expresión (c) deduciremos la siguiente ecuación para la tensión tangencial

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = -2G\theta \quad (d)$$

La ecuación correspondiente para los puntos de las alas del ángulo, situados a considerable distancia de los mismos, donde la membrana tiene una superficie aproximadamente cilíndrica, será

$$\frac{d\tau}{dn} = -2G\theta \quad (e)$$

en la cual n es la normal al contorno. Llamando τ_1 a la tensión en el borde, la ecuación (e) previamente obtenida para el caso de un rectángulo alargado, nos da $\tau_1 = G\theta c$, que empleando la ecuación (d) nos lleva a

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r}\tau = -\frac{2\tau_1}{c} \quad (d')$$

de donde, integrando

$$\tau = \frac{A}{r} - \frac{\tau_1 r}{c} \quad (f)$$

siendo A una constante de integración. Para la determinación de la misma, supongamos que la tensión tangencial se anula en el punto O_1 , distante $c/2$ del contorno (fig. 163). Según (f) se tendrá

$$\frac{A}{a + (c/2)} - \frac{\tau_1[a + (c/2)]}{c} = 0$$

y

$$A = \frac{\tau_1}{c} \left(a + \frac{c}{2} \right)^2$$

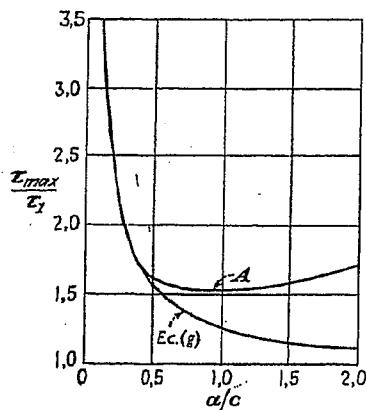
Sustituyendo en (f) y tomando $r = a$ obtenemos

$$\tau_{\max} = \tau_1 \left(1 + \frac{c}{4a} \right) \quad (g)$$

FIG. 164

Para $a = \frac{1}{2}c$, como en la figura 163, tenemos $\tau_{\max} = 1,5\tau_1$. Si el radio de la transición es muy pequeño la tensión máxima resulta muy grande. Tomando por ejemplo $a = 0,1c$, se llega a $\tau_{\max} = 3,5\tau_1$.

Resultados más exactos y completos pueden ser obtenidos mediante cálculos numéricos basados en el método de las diferencias finitas (véase el apéndice). La figura 164 (línea A) muestra la curva τ_{\max}/τ_1 función



de a/c , obtenida por este método¹ junto con la curva que representa a la ecuación (g). Vemos que esta fórmula sencilla da resultados aceptables para valores de a/c inferiores a 0,3.

99. Empleo de películas de jabón para resolver problemas de torsión. Hemos visto que la analogía con la membrana, es de gran utilidad por hacer visible la distribución de tensiones en la sección transversal de una barra sometida a torsión. Membranas constituidas por películas de jabón han sido empleadas con éxito para la medida directa

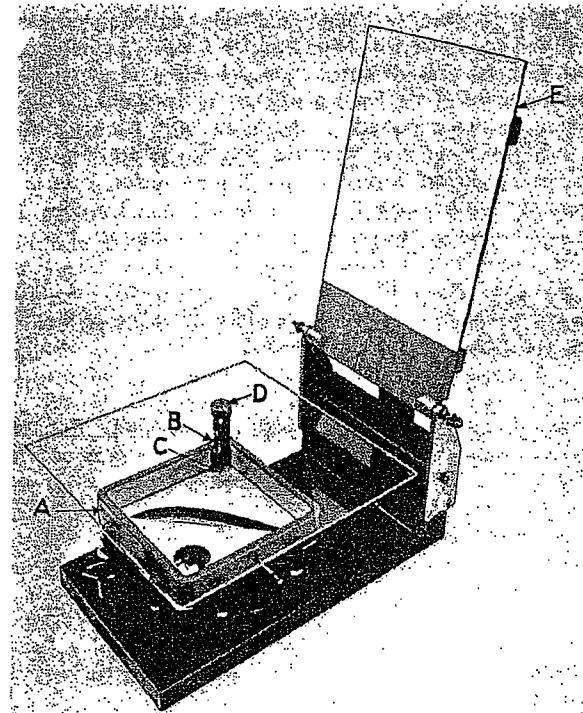


FIG. 165

¹ Debido a J. M. Huth, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 17, pág. 388, 1950. La elevación de la curva real hacia la derecha se da en el caso límite en el que el radio de la transición aumenta considerablemente en relación al espesor del ala. I. Lyse y B. G. Johnston han dado en *Proc. A.S.C.E.*, 1935, pág. 469, las referencias de los intentos anteriores de resolución del problema, incluyéndose las medidas con películas de jabón.

de las tensiones^{1,2}. Tales películas son formadas sobre agujeros de forma conveniente realizados en placas planas. Con el fin de hacer posible la determinación directa de las tensiones, se ha encontrado que es necesario que la misma placa tenga un orificio circular, representativo de una sección circular la cual es utilizada con fines comparativos. Sometiendo a ambas películas a la misma presión, tendremos valores iguales del cociente q/S^3 , lo que corresponde a los mismos valores de $G\theta$ para las dos barras sometidas a torsión. Determinando, en consecuencia, la pendiente de las dos películas, podremos comparar las tensiones producidas en la barra de sección dada con las existentes en el eje circular, supuesto que el ángulo de torsión θ y la constante G tengan igual valor en los dos casos. La relación correspondiente entre los momentos de torsión, se determina por la de los volúmenes encerrados entre cada película y el plano de la placa.

Las curvas de nivel de las superficies de las películas se obtienen mediante el aparato representado en la figura 165⁴. La placa de aluminio donde han sido practicados los agujeros, está sujetada entre las dos mitades de una caja de fundición de hierro A . La parte inferior de la caja, que tiene la forma de una bandeja, es soportada por unos tornillos. El trazado de las curvas de nivel se efectúa mediante el tornillo B , el cual atraviesa una placa de vidrio de tamaño suficiente para cubrir la caja, cualquiera que sea la posición del tornillo. El extremo inferior del tornillo lleva una punta de acero duro cuya distancia a la placa de vidrio es regulada por el tornillo. Se aproxima la punta del tornillo a la película desplazando la placa de vidrio hasta que la distorsión de la imagen muestre que se ha establecido el contacto entre uno y otro. El trazado de las curvas, se hace sobre una hoja de papel que está adherida a una plancha E , la cual puede girar alrededor de un eje horizontal hasta que la punta de acero registradora D produzca en ella una picadura. Después de haber puesto en contacto la punta C con la película en un número de puntos suficientes, se unen los puntos señalados sobre el papel, obteniéndose así una curva de nivel. Ajustando el tornillo B en una nueva posición, podemos repetir esta operación tantas veces como curvas de nivel necesitemos. Una vez registradas todas las curvas, se obtiene por sumación el volumen y el momento de torsión correspondientes. Las pendientes y las tensiones correspondientes se obtienen midiendo la distancia entre curvas de nivel vecinas. Esta pendiente puede ser determinada por métodos ópticos con mucha mayor precisión proyectando un haz de luz sobre la película y midiendo el ángulo del rayo reflejado. La normal a la película será la

¹ Véanse los trabajos de Taylor y Griffith, *loc. cit.* y el de Trayer y March, *loc. cit.*

² T. J. Higgins ha realizado un estudio de esta y otras analogías en *Experimental Stress Analysis*, vol. 2, pág. 17, 1945.

³ Se supone que la tensión superficial es la misma en las dos películas. Los ensayos realizados mostraron que esto es aproximadamente cierto.

⁴ Véase el trabajo de Taylor y Griffith, *loc. cit.*

bisectriz del ángulo comprendido entre los rayos incidente y reflejado. Un instrumento especial, destinado a realizar esa medida, ha sido desarrollado por Griffith y Taylor. La figura 166 representa un ejemplo de curvas de nivel obtenidas para una viga en I (larguero de madera de un ala de avión). El hecho de que las curvas estén muy próximas unas a otras en los

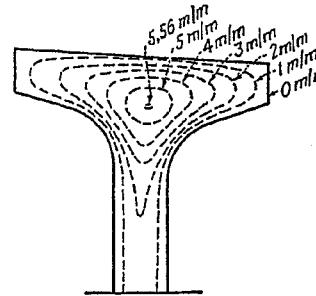


FIG. 166

ángulos entrantes y en la parte central de la cara superior, prueba que en estos puntos las tensiones son muy elevadas. Los extremos de las alas, por el contrario, están sometidos a tensiones mucho menores. La tensión máxima en la parte central del alma del perfil es prácticamente constante e igual a la que se produce en un rectángulo estrecho para el mismo ángulo de torsión. La aplicación del método de la película de jabón a secciones tales como elipses y rectángulos, para las que las soluciones exactas son conocidas muestra que la tensión máxima y el momento, pueden ser determinados por ese método con una aproximación del 1 ó 2 %. En los puntos de gran concentración de tensiones, como es el caso en las transiciones de radio muy pequeño, no es fácil conseguir una aproximación del orden indicado¹.

100. Analogías hidrodinámicas. El problema de la torsión, presenta algunas analogías con el problema hidrodinámico del movimiento de un fluido en un tubo. Lord Kelvin² señaló que la función ϕ_1 [ecuación (a), § 90] que a veces es empleada en la resolución de los problemas de torsión, es idéntica a la *función de corriente* de cierto movimiento irrotacional de un «fluido ideal» en un conducto cuya sección transversal es igual a la de la barra sometida a torsión.

J. Boussinesq³ ha señalado otra analogía. Ha demostrado que la ecua-

¹ Véanse los trabajos de C. B. Biezeno y J. M. Rademaker, *De Ingenieur*, núm. 52, 1931; P. A. Cushman, *Trans. A.S.M.E.*, 1932; H. Quest, *Ingenieur-Archiv*, vol. 4, pág. 510, 1933 y J. H. Muth, *loc. cit.*

² Kelvin y Tait, *Natural Philosophy*, 2.^a parte, pág. 242.

³ J. Boussinesq, *J. math. pure et appl.*, serie 2, vol. 16, 1871.

ción diferencial y la condición de contorno, que determinan la función de tensión ϕ [véanse las ecuaciones (142) y (144) del § 90] son idénticas a las que determinan las velocidades del movimiento laminar de un fluido viscoso en un tubo, cuya sección transversal sea la de la barra sujeta a torsión¹.

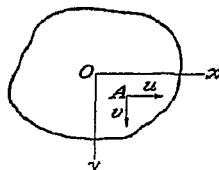


FIG. 167

Greenhill señaló que la función de tensión ϕ es matemáticamente idéntica a la función de corriente, correspondiente al movimiento de un fluido ideal que circula con torbellino constante² a través de un tubo de sección transversal igual a la de la barra³. Sean u y v las componentes de la velocidad del fluido en el punto A (fig. 167). En virtud de la condición de incompresibilidad del líquido ideal, tendremos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

La condición de torbellino constante es

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \text{constante} \quad (b)$$

Tomando

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (c)$$

queda satisfecha la ecuación (a) y la (b) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \text{constante} \quad (d)$$

expresión que coincide con la (142) correspondiente a la función de tensión para el caso de la torsión.

La velocidad del líquido en la periferia tiene por dirección la de la tangente a ese contorno, de forma que la condición de borde del problema

¹ Esta analogía fue utilizada por M. Boschoud, *Compt. rend.*, vol. 179, pág. 451, 1924. Véase también *Bull. tech. Suisse Rom.* (Lausanne), noviembre, 1925.

² El torbellino o rotor tiene igual expresión que la rotación ω , estudiada en la pág. 260, siempre que u y v sean las componentes de la velocidad del fluido.

³ A. G. Greenhill, «Hydromechanics», artículo de la *Encyclopædia Britannica*, 11.^a edición, 1910.

hidrodinámico, es la misma que la correspondiente (144) al problema de torsión. Se sigue de ello que la distribución de velocidades del problema hidrodinámico es matemáticamente idéntica a la distribución de tensiones de la barra sometida a torsión, pudiendo deducirse de ello algunas conclusiones de importancia práctica.

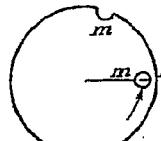


FIG. 168

Consideremos como primer ejemplo, el caso de un eje circular, que presenta un orificio también circular (fig. 168) sometido a torsión¹. El efecto de este agujero en la distribución tensional, será semejante al que produce la introducción de un cilindro macizo, de igual diámetro que el orificio, dentro de la corriente líquida del modelo hidrodinámico. Ese cilindro alterará notablemente la velocidad del fluido en su vecindad inmediata. Las velocidades en los puntos frontal y posterior del cilindro se anulan, mientras que en los puntos m y n se duplican. Un taladro de esta naturaleza duplica, por lo tanto, las tensiones tangenciales en la parte de eje en la que se encuentra situada. Una pequeña ranura semicircular realizada en la superficie del eje según la dirección longitudinal (fig. 168), produce el mismo efecto. La tensión tangencial en el fondo de la entalladura (punto m) es aproximadamente el doble de la que se produce en los puntos de la superficie del eje alejados en la ranura.

La misma analogía hidrodinámica explica la influencia en la distribución tensional de un pequeño orificio de sección elíptica o de una ranura de sección semielíptica. Si uno de los ejes principales, a , del orificio elíptico tiene dirección radial y es b el otro eje principal, las tensiones en el borde del orificio, en los extremos del eje a , aumentan en la relación $(1 + a/b)$: 1. Vemos, pues, que la tensión máxima producida depende de la relación a/b . Cuando el eje mayor de la elipse tiene dirección radial, el efecto del orificio sobre la tensión es mayor que cuando dicho eje tiene la dirección de la tangente a la circunferencia. Esto explica el notable debilitamiento producido por las fisuras radiales en la resistencia de un eje. Efectos análogos sobre la distribución tensional son producidos por una entalladura semielíptica practicada en la superficie de un eje, paralelamente a las generatrices del mismo.

De la analogía hidrodinámica se deduce, asimismo, que en los ángulos salientes de la sección transversal de una barra sometida a torsión, las

¹ Véase J. Larmor, *Phil. Mag.*, vol. 33, pág. 76, 1892.

tensiones tangenciales se anulan mientras que en los ángulos entrantes toman valores teóricamente infinitos, lo que implica que el más pequeño momento de torsión produzca en tales puntos, bien una fisura, bien una deformación plástica. En el caso de una entalladura para chaveta de forma rectangular, se producirá, pues, en los ángulos entrantes, una notable elevación de las tensiones, la cual podrá ser atenuada redondeándolos adecuadamente¹.

101. Torsión de árboles huecos. En el estudio hasta aquí realizado, nos hemos limitado a árboles cuyas secciones transversales son recintos simplemente conexos. Consideremos ahora ejes huecos cuyas secciones rectas tengan dos o más contornos. El problema más sencillo de este tipo es el de un árbol hueco, cuyo contorno interior coincide con una de las *curvas de tensión tangencial* (véase el § 93) del árbol macizo de contorno exterior igual al del eje hueco.

Tomemos, por ejemplo, una sección transversal elíptica (fig. 149). La función de tensión para el árbol macizo es

$$\phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (a)$$

La curva

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1 \quad (b)$$

es una elipse semejante al contorno exterior de la sección transversal. A lo largo de esta elipse la función de tensión (a) se mantiene constante y en consecuencia para valores de k , inferiores a la unidad, esta elipse es una línea de tensión tangencial del árbol macizo. La tensión tangencial en todos los puntos de la misma, tiene por dirección la de la tangente a la curva. Imaginemos ahora, una superficie cilíndrica generada por esta línea de tensión que tenga su eje paralelo al del árbol. De la conclusión anterior, referente a la dirección de las tensiones tangenciales, se deduce que no actuará ninguna tensión sobre esta superficie cilíndrica. Se puede pues imaginar suprimido el material limitado por esta superficie, sin que ello altere la distribución de tensiones en la parte exterior de la pieza. La función de tensión (a) será también, en consecuencia, la correspondiente al caso del árbol hueco.

Para un determinado ángulo de torsión θ , las tensiones en el árbol hueco serán las mismas que en el árbol macizo. El momento, sin embargo,

¹ La investigación de las tensiones en una entalla para chaveta ha sido realizada por el método de la película de jabón (véase el trabajo de A. A. Griffith y G. I. Taylor, *Tech. Rept. Comun. Aeronaut.*, vol. 3, pág. 938, 1917-1918) y también por el método fotelástico (véase el trabajo de A. G. Solakian y G. B. Karchtz, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Applied Mechanics Division*, 1931).

se verá disminuido en la cantidad que, en el caso del árbol macizo, proviene de la parte de sección transversal correspondiente al hueco. La ecuación (148) muestra que esa cantidad guarda con el momento total la relación de $k^4 : 1$. Para el árbol hueco, por lo tanto, la ecuación (148) será remplazada por

$$\theta = \frac{M_t}{1 - k^4} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}$$

y la función de tensión (a) se convierte en

$$\phi = - \frac{M_t}{\pi ab(1 - k^4)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

La fórmula que da la tensión máxima será

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2} \frac{1}{1 - k^4}$$

En la analogía con la membrana la porción central, correspondiente al hueco del árbol (fig. 169), puede ser sustituida por una placa horizontal *CD*. Observamos que la presión, uniformemente distribuida sobre la

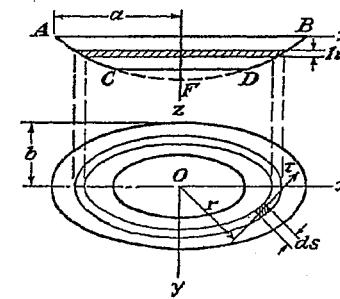


FIG. 169

porción *CFD* de la membrana, es estáticamente equivalente a una presión de igual magnitud repartida sobre la placa *CD* y que las fuerzas de tracción *S*, que actúan sobre la membrana a lo largo del borde de la placa, están en equilibrio con la carga uniforme que obra sobre esta última. Podremos, por lo tanto, emplear en este caso el procedimiento de la película de jabón, puesto que la sustitución de la porción *CFD* de la membrana por la placa *CD* no altera la configuración ni el estado de equilibrio de la porción restante de la membrana.

Consideremos ahora el caso, más general, en el que el contorno del orificio no coincide con una de las curvas de tensión del árbol macizo. De acuerdo con la teoría general de la torsión (véase el § 90) sabemos que

la función de tensión debe ser constante a lo largo de cada contorno; estas constantes, sin embargo, no pueden ser elegidas arbitrariamente. Al estudiar los problemas bidimensionales, referentes a contornos múltiplemente conexos, vimos que era preciso recurrir a las expresiones de los desplazamientos y que las constantes de integración debían ser elegidas de manera tal que esas expresiones resulten de valor único. En el estudio de la torsión de árboles huecos es necesario proceder de una manera análoga, debiendo elegirse, como valores constantes de la función de tensión a lo largo de los contornos, aquellos que hagan que la expresión de los desplazamientos no tome más que un valor. De esta manera obtendremos un número de ecuaciones suficiente para determinar estas constantes.

De las ecuaciones (b) y (d) del § 90 tenemos

$$\tau_{zz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right), \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right) \quad (e)$$

Calculemos ahora la integral

$$\int \tau ds \quad (d)$$

a lo largo de cada contorno. Descomponiendo la tensión total en sus componentes y usando las expresiones (c) resulta

$$\begin{aligned} \int \tau ds &= \int \left(\tau_{zz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= G \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) - \theta G \int (y dx - x dy) \end{aligned}$$

Dado que w es una función uniforme y que la integración se extiende sobre una curva cerrada, la primera integral deberá anularse. En consecuencia

$$\int \tau ds = \theta G \int (y dx - x dy)$$

La integral del segundo miembro equivale al doble del área de la parte hueca. Entonces

$$\int \tau ds = 2G\theta A \quad (e)$$

Los valores constantes de la función de tensión a lo largo de los agujeros, deberán pues ser determinados, de manera tal que para cada uno de ellos quede satisfecha la ecuación (e). Esta ecuación es igualmente válida para toda curva cerrada, trazada sobre la sección transversal, como puede comprobarse volviendo a examinar la demostración.

Ya hemos estudiado anteriormente el significado físico de la ecuación (e) [véase la ecuación (152)]. Dicha ecuación indica que al aplicar la analogía con la membrana, el nivel de cada placa, la *CD* por ejemplo de la

figura 169, debe toriarse de manera tal que la carga vertical que actúa sobre la placa, sea igual y de sentido opuesto a la componente vertical de la resultante de las fuerzas de tracción que sobre la misma ejerce la membrana. Si los contornos de los agujeros coinciden con las líneas de tensión del correspondiente eje macizo, la condición precedente basta para asegurar el equilibrio de las placas. En el caso general esta condición sola no es suficiente y para que la placa esté en equilibrio en una posición horizontal, es necesario emplear mecanismos especiales de guía, lo que implica el que el método de la película de jabón sea más complicado para los árboles huecos.

Con el fin de vencer esta dificultad podemos adoptar la siguiente solución¹. Se practica en la placa una abertura (fig. 165) que corresponda al contorno exterior del árbol. Los contornos interiores, correspondientes a los orificios, van montados sobre tubos que pueden deslizarse verticalmente de forma que su altura pueda ser ajustada fácilmente. Fijando arbitrariamente estas alturas y estirando la película sobre los contornos, obtenemos una superficie que satisface la ecuación (142) y las condiciones de borde (144), pero que, en general, no cumplirá las ecuaciones (e), no representando, por tanto, la distribución tensional existente en el árbol hueco. Repitiendo la operación, tantas veces como contornos existen ajustando las alturas de los contornos interiores de cada caso y efectuando las correspondientes medidas sobre la película, se obtendrán suficientes datos para determinar los valores correctos de las alturas de los contornos interiores, pudiendo lograrse finalmente, la tensión adecuada en la película de jabón. Esto puede ser demostrado de la siguiente forma: Si i es el número de contornos y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i$ son las superficies de las películas obtenidas con los i ajustes diferentes de las alturas de los contornos, la función

$$\phi = m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2 + \dots + m_i \phi_i \quad (f)$$

en la que m_1, m_2, \dots, m_i son factores numéricos será igualmente una solución de la ecuación (142), supuesto que

$$m_1 + m_2 + \dots + m_i = 1$$

Observando ahora que la tensión tangencial es igual a la pendiente de la membrana y sustituyendo (f) en la ecuación (e), obtenemos i ecuaciones de la forma

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 2G\theta A$$

de las cuales los i factores m_1, m_2, \dots, m_i pueden ser determinados en función de θ . La verdadera función de tensión, se obtiene, entonces, a partir de (f)². Este método fue aplicado por Griffith y Taylor a la determinación de las tensiones en un árbol hueco de sección circular con entalladura para una chaveta. Pudieron demostrar que alejando la entalladura del centro del árbol, la tensión tangencial disminuye y la resistencia de la pieza aumenta.

¹ A. A. Griffith y G. I. Taylor, *Tech. Rept. Natl. Advisory Comm. Aeronaut.*, vol. 3, página 938, 1917-1918.

² Griffith y Taylor dedujeron, de sus experimentos, que para estudiar las tensiones en árboles huecos resulta más conveniente usar películas con presión cero (véase la pág. 310) que con presión constante. El desarrollo del cálculo de los coeficientes m_1, m_2, \dots puede verse en su trabajo antes citado.

En el caso de un árbol con uno o varios agujeros, el momento de torsión es igual al doble del volumen encerrado por la membrana y la placa rígida. Para ver que esto es así, calculemos el momento producido por las tensiones tangenciales que actúan sobre un anillo elemental, comprendido entre dos líneas de tensión, tal, por ejemplo, como el representado en la figura 169 (la cual es supuesto, ahora, que representa un árbol hueco). Llamemos δ a la anchura variable del anillo y consideremos un elemento tal como el rayado en la figura, la fuerza tangencial que actúa sobre este elemento es igual a $\tau \delta ds$ y su momento respecto a O es $\tau \delta ds$. El momento que actúa sobre el anillo elemental vendrá dado por

$$dM_t = \int \tau \delta ds \quad (c)$$

donde la integración se extiende a toda la longitud del anillo. Llamando A al área limitada por el anillo y observando que τ es la pendiente y $\tau \delta$, en

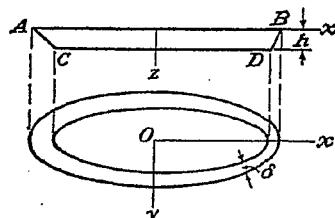


FIG. 170

consecuencia, la diferencia h de nivel entre las dos líneas de contorno adyacentes obtendremos de (c)

$$dM_t = 2hA \quad (d)$$

lo que nos dice que el momento correspondiente al anillo elemental es igual al doble del volumen rayado en la figura. El momento total, que se obtiene sumando todos estos volúmenes, será por lo mismo el doble del volumen limitado por AB , la membrana AC y DB y la placa CD . La conclusión es idéntica para los casos en los que existen varios agujeros.

102. Torsión de tubos de pared delgada. Se puede obtener fácilmente una solución aproximada del problema de la torsión de tubos de pared delgada, empleando el método de la analogía con la membrana. Sean AB y CD (fig. 170) los niveles de los contornos exterior e interior y AC y DB los perfiles de la membrana extendida entre dichos contornos. Por tratarse de una pared delgada podemos despreciar la variación de pendiente de la membrana y admitir que AC y BD son líneas rectas, lo que equivale a suponer que las tensiones tangenciales se distribuyen uniformemente a través del espesor de la pared. Llamemos h a la diferencia

de nivel de los dos contornos y δ al espesor variable de la pared, la tensión en cualquier punto, dada según sabemos por la pendiente de la membrana, será

$$\tau = \frac{h}{\delta} \quad (a)$$

Si su valor es inversamente proporcional al espesor de la pared, siendo por lo tanto mayor cuanto más delgado sea el tubo. Con el fin de relacionar la

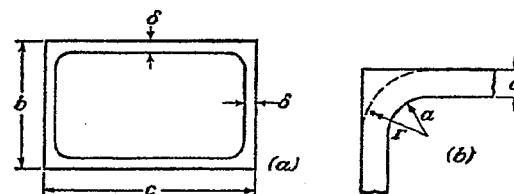


FIG. 171

tensión con el momento M_t , apliquemos de nuevo la analogía con la membrana y calculemos el momento en función del volumen $ACDB$. Tenemos:

$$M_t = 2Ah = 2A\delta r \quad (b)$$

donde A representa la media de las áreas encerradas por los contornos interior y exterior de la sección transversal del tubo. La expresión (b) nos da una fórmula sencilla para el cálculo de la tensión tangencial:

$$\tau = \frac{M_t}{2A\delta} \quad (166)$$

Para determinar el ángulo específico de torsión θ se aplica la ecuación (152), la cual nos da

$$\tau ds = \frac{M_t}{2A} \int \frac{ds}{\delta} = 2G\theta A \quad (c)$$

de donde¹

$$\theta = \frac{M_t s}{4A^2 G} \int \frac{ds}{\delta} \quad (167)$$

Si el espesor del tubo es constante δ lo es también y (167) nos da

$$\theta = \frac{M_t s}{4A^2 G \delta} \quad (168)$$

¹ Las ecuaciones (166) y (167) fueron obtenidas por R. Bredt, *V.D.I.*, vol. 40, pág. 815, 1896.

donde s es la longitud de la curva media de la sección anular del tubo.

Si el tubo tiene ángulos entrantes como es el caso de la figura 171, pueden producirse en ellos considerables concentraciones de tensión. La tensión máxima es superior a la dada por la ecuación (166) y su valor depende del radio a de la curva de transición (fig. 171b). Para calcular su valor haremos uso de la analogía con la membrana, tal como hicimos en el § 98 al estudiar los ángulos entrantes de los perfiles de hierro laminado. Como ecuación de la membrana en el ángulo entrante podremos tomar la

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{q}{S}$$

Sustituyendo q/S por $2G\theta$ y teniendo en cuenta que $\tau = -dz/dr$ (fig. 170), obtenemos:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = 2G\theta \quad (d)$$

Suponiendo que el espesor del tubo δ sea constante y llamando τ_0 a la tensión, calculada con la ecuación (166), existente en los puntos alejados del ángulo, tendremos según la ecuación (c)

$$2G\theta = \frac{\tau_0 s}{A}$$

y sustituyendo en (d)

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = \frac{\tau_0 s}{A} \quad (e)$$

La solución general de esta ecuación es:

$$\tau = \frac{C}{r} + \frac{\tau_0 s r}{2A} \quad (f)$$

Admitiendo ahora que los ángulos salientes de la sección transversal se redondean siguiendo una curva de transición de radio a , como se indica en la figura, la constante de integración C podrá ser determinada mediante la ecuación:

$$\int_a^{a+\delta} \tau dr = \tau_0 \delta \quad (g)$$

deducida de la analogía hidrodinámica (§ 100); esto equivale a decir que si un fluido ideal circula por un conducto, cuya sección es igual a la del tubo, la cantidad de líquido que atraviesa cada sección deberá ser constante. Llevando el valor de τ , dado por (f) a la ecuación (g), resulta

$$C = \tau_0 \delta \frac{1 - (s/4A)(2a + \delta)}{\log_e(1 + \delta/a)}$$

y la ecuación (f) toma la forma:

$$\tau = \frac{\tau_0 \delta}{r} \frac{1 - (s/4A)(2a + \delta)}{\log_e(1 + \delta/a)} + \frac{\tau_0 s r}{2A} \quad (h)$$

Para tubos de pared delgada las relaciones $s(2a + \delta)/A$ y sr/A serán pequeñas y (h) nos queda:

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{\delta}{r} / \log_e \left(1 + \frac{\delta}{a} \right) \quad (i)$$

Haciendo $r = a$ obtenemos la tensión en el ángulo entrante, la cual es representada en función de a/δ en la figura 172. La otra curva¹ (A en la figura) ha sido obtenida mediante el método de las diferencias finitas, sin haber sido empleada la hipótesis de que la membrana tenga la forma de una superficie de revolución en los ángulos. Ella confirma la exactitud de la ecuación (i) para las curvas de transición de radio a pequeño, tal, por ejemplo, que a/δ sea inferior a 1/4. Para valores

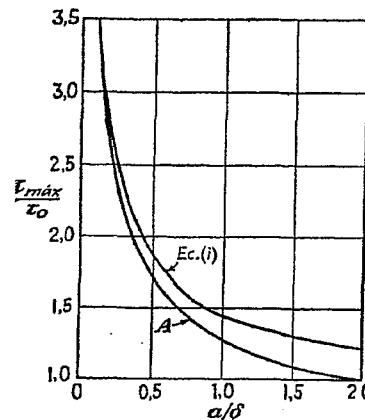


FIG. 172

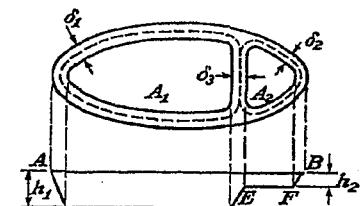


FIG. 173

de a mayores los resultados dados por la ecuación (i) son demasiado altos.

Consideremos ahora el caso de una pieza tubular cuya sección transversal tenga más de dos contornos. Tomando, por ejemplo, el caso mostrado en la figura 173 y suponiendo que el espesor de la pared sea muy pequeño, las tensiones tangenciales que actúan sobre cada porción de pared, deducidas de la analogía de la membrana, serán:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{h_1}{\delta_1} \\ \tau_2 &= \frac{h_2}{\delta_2} \\ \tau_3 &= \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1 \delta_1 - \tau_2 \delta_2}{\delta_3} \end{aligned} \quad (k)$$

¹ Huth, loc. cit.

donde h_1 y h_2 son los niveles de los contornos interiores CD y EF^1 .

El momento torsor determinado a partir del volumen $ACDEFB$ es:

$$M_t = 2(A_1 h_1 + A_2 h_2) = 2A_1 \delta_1 r_1 + 2A_2 \delta_2 r_2 \quad (l)$$

donde A_1 y A_2 representan las áreas encerradas por las líneas marcadas a trazos en la figura.

Otras ecuaciones para resolver el problema se obtienen aplicando la ecuación (152) a las curvas cerradas señaladas a trazos en la figura. Suponiendo que los espesores δ_1 , δ_2 , δ_3 sean constantes y llamando S_1 , S_2 , S_3 a la longitud de las curvas mencionadas, resulta, de la figura 173.

$$\begin{aligned} \tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 &= 2G\theta A_1 \\ \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 &= 2G\theta A_2 \end{aligned} \quad (m)$$

Utilizando las ecuaciones (l), (m) y la última de las (k) obtenemos las tensiones τ_1 , τ_2 , τ_3 , expresadas en función del momento:

$$\tau_1 = \frac{M_t [\delta_3 s_2 A_1 + \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)]}{2[\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad (n)$$

$$\tau_2 = \frac{M_t [\delta_3 s_1 A_2 + \delta_1 s_3 (A_1 + A_2)]}{2[\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad (o)$$

$$\tau_3 = \frac{M_t (\delta_1 s_2 A_1 - \delta_2 s_1 A_2)}{2[\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad (p)$$

En el caso de una sección simétrica, $S_1 = S_2$, $\delta_1 = \delta_2$, $A_1 = A_2$ y $\tau_3 = 0$. En este caso el momento es absorbido por la pared exterior del tubo en tanto que el nervio interior queda exento de toda tensión².

El ángulo específico de torsión correspondiente a cualquier sección, tal por ejemplo como la mostrada en la figura 173, se obtiene sustituyendo los valores de las tensiones en una de las ecuaciones (m). De esta manera podrá ser obtenido en función del momento torsor M_t .

103. Torsión de una barra en la que se impide el alabeo de una de las secciones transversales. En el estudio hasta aquí realizado de los problemas de torsión, se ha supuesto siempre, que el momento torsor es aplicado mediante tensiones tangenciales distribuidas sobre los extremos de la barra de una manera definida, la correspondiente a la solución de la ecuación (142) que satisfaga la condición de contorno (144). Si la distribución de tensiones en esos extremos es otra, el estado tensional resultante presenta irregularidades locales y las soluciones dadas por (142) y (144) son aplicables con exactitud satisfactoria solamente en las regiones alejadas de esos extremos³.

¹ Se supone que las placas son guindas de forma tal que permanecen horizontales (véase la pág. 335).

² Las pequeñas tensiones correspondientes a la variación de la pendiente de la membrana a través del espesor del alma, son despreciables en esta derivación.

³ Las irregularidades locales en los extremos de un cilindro circular han sido estudiadas por F. Purser, Proc. Roy. Irish. Acad., Dublín, vol. 26, serie A, pág. 54, 1906. Véase también K. Wolf, Sitzber. Akad. Wiss. Wien., vol. 125, pág. 1149, 1916, y A. Timpe, Math. Annalen, vol. 71, pág. 480, 1912.

Una particularidad análoga, se produce cuando en una barra sometida a torsión, se impide por algún medio el alabeo de una sección transversal. Problemas de este tipo se presentan a veces en ingeniería⁴. Un ejemplo sencillo es el mostrado en la figura 174. Por razones de simetría puede admitirse que la sección media permanece plana durante la torsión y, en consecuencia, que la distribución tensional existente en los puntos próximos a esta sección transversal, es distinta de la obtenida anteriormente para barras rectangulares (§ 95). Para estudiar estas tensiones consideremos primero el caso de un rectángulo⁵ estrecho cuya dimensión a supondremos grande frente a la b . Si las secciones transversales son libres de alabearse, las tensiones, según el § 94, serán:

$$\tau_{xz} = -2G\theta y, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (a)$$

y los desplazamientos correspondientes, con arreglo a las ecuaciones (a), (b) y (d) del § 90.

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta zx, \quad w = -\theta xy \quad (b)$$

Para impedir el alabeo de las secciones transversales, caracterizado por el desplazamiento w , será necesario aplicar tensiones tangenciales σ_z sobre estas secciones. Una solución aproximada, se obtiene suponiendo que σ_z es proporcional a w y que disminuye al aumentar la distancia z a la sección media. Tales hipótesis quedan satisfechas haciendo

$$\sigma_z = -mE\theta e^{-mz} \quad (c)$$

donde m es un coeficiente a determinar. A causa del factor e^{-mz} la tensión σ_z disminuye al crecer z , haciéndose despreciable a una cierta distancia, la cual depende del valor de m .

Las restantes componentes de la tensión deben ser elegidas ahora de forma tal que las ecuaciones de equilibrio (127) y las condiciones de contorno sean satisfechas. Es fácil ver que tales requisitos son cumplidos haciendo:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{8}Em^2\theta e^{-mz}(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{4}Em^2\theta e^{-mz}(a^2 - x^2)y - 2G\theta y \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{4}Em^2\theta e^{-mz}(b^2 - y^2)x \end{aligned} \quad (d)$$

Para valores grandes de z esta distribución tensional se approxima a la (a), correspondiente a la torsión simple. La componente τ_{xy} se anula en los bordes $x = \pm a$ y $y = \pm b$; y las τ_{xz} y τ_{yz} para $x = \pm a$, $y = \pm b$, respectivamente. Las condiciones de contorno son, pues, satisfechas y la superficie lateral está libre de fuerzas.

Para determinar el coeficiente m consideremos la energía elástica de la barra

⁴ La torsión de vigas en I ha sido estudiada por S. Timoshenko, Z. Math. Physik, vol. 58, pág. 361, 1910. Véase también C. Weber, Z. angew. Math. Mech., vol. 6, pág. 85, 1926.

⁵ Véase S. Timoshenko, Proc. London. Math. Soc., serie 2, vol. 20, pág. 389, 1921.

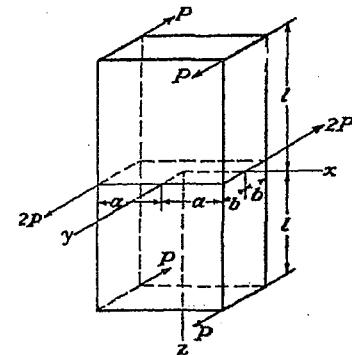


FIG. 174

y busquemos qué valor de m la hace mínima. Empleando la ecuación (84) (§ 47), tenemos:

$$V = \frac{1}{2G} \int_{-l}^l \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \sigma_z^2 \right] dx dy dz$$

Sustituyendo en esta expresión los valores dados por (d) y teniendo en cuenta que para una barra larga podemos poner

$$\int_0^l e^{-mz} dz = \frac{1}{m}$$

llegamos a:

$$V = \frac{1}{9} EI^3 a^2 b^2 \left\{ -3m + (1+\nu) \left[\frac{2}{25} a^2 b^2 m^5 + \frac{1}{5} (a^2 + b^2) m^3 + \frac{12}{(1+\nu)^2} \frac{l}{a^2} \right] \right\} \quad (e)$$

La condición de mínimo nos da la siguiente ecuación para determinar m :

$$(1+\nu) \left[\frac{3}{5} a^2 b^2 m^4 + \frac{3}{5} (a^2 + b^2) m^2 \right] = 3$$

la cual, para el caso de un rectángulo estrecho, se reduce aproximadamente a:

$$m^2 = \frac{5}{(1+\nu)a^2} \quad (f)$$

Sustituyendo este valor de m en (c) y (d), obtenemos la distribución tensional correspondiente al caso en que la sección media de la barra permanece plana.

Para calcular el ángulo de torsión ψ , igualamos la energía potencial (e) al trabajo realizado por el momento M_t .

$$\frac{M_t \psi}{2} = V$$

de donde se deduce:

$$\psi = \frac{3M_t}{16Gb^3} \left[l - \frac{\sqrt{5}(1+\nu)}{6} a \right] \quad (g)$$

Comparando este resultado con la ecuación (155), se deduce que impidiendo el alabeo de la sección se aumenta la rigidez a la torsión de la barra. El efecto de la irregularidad local de la distribución de tensiones sobre el valor de ψ , equivale al influjo de disminuir en:

$$a \frac{\sqrt{5}(1+\nu)}{6}$$

la longitud l de la pieza. Tomando $\nu = 0,30$, esa reducción es 0,425 a . Vemos, pues, que el efecto de impedir el alabeo de la sección media sobre el ángulo de torsión, es pequeño si la dimensión a es pequeña comparada con l .

La torsión de una barra de sección elíptica puede ser estudiada de forma análoga¹. Mayor importancia tiene el efecto de fijar una sección en el caso de la torsión de una barra de sección I. El ángulo de torsión, en este caso, puede obtenerse por un método aproximado considerando la flexión de las alas, producida por la torsión².

104. Torsión de árboles circulares de diámetro variable. Consideremos ahora, el caso de un árbol de la forma de un sólido de revolución sometido a torsión por la acción de pares de fuerzas, aplicadas a sus

¹ A. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Phys. Klasse*, Munich, 1920, página 261.

² Véase S. Timoshenko, *Z. Math. Physik*, vol. 58, página 361, 1910; o *Strength of Materials*, vol. 2, pág. 287, 1941.

extremos (fig. 175). Podemos tomar como eje z el eje de la pieza y usar las coordenadas polares r y θ para definir la posición de un elemento del plano de la sección. Las notaciones entonces empleadas, para las componentes de la tensión serán σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$. Las componentes de

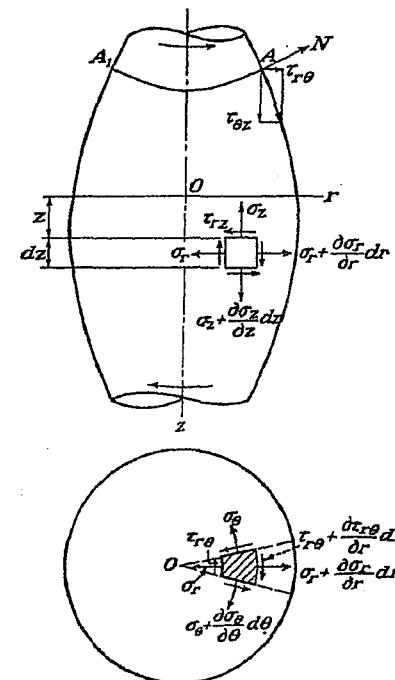


FIG. 175

los desplazamientos de dirección radial y tangencial serán designados u y v y la componente de dirección z , w . Empleando las fórmulas obtenidas anteriormente para los problemas bidimensionales (§ 28), encontramos las siguientes expresiones para las componentes de la deformación:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (169)$$

Escribiendo las ecuaciones de equilibrio de un elemento (fig. 175), de igual manera que lo hicimos para el caso bidimensional (§ 25) y supo-

niendo que las fuerzas másticas son nulas, obtenemos las ecuaciones diferenciales de equilibrio siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (170)$$

Para aplicar estas ecuaciones al problema de la torsión, utilizamos el *método semiinverso* (véase la pág. 295) y suponemos que u y w son nulos (esto significa que durante la torsión las partículas se mueven según la dirección tangencial). Esta hipótesis, difiere de la correspondiente al caso de la torsión de un eje circular de sección constante, en que en el caso actual los desplazamientos tangenciales no son proporcionales a la distancia al eje (esto implica el que los radios de una sección se curven durante la torsión). Como veremos en las páginas siguientes la solución basada en esa hipótesis satisface todas las ecuaciones de la elasticidad representando, por lo tanto, la verdadera solución del problema.

Sustituyendo $u = w = 0$ en (169) y teniendo en cuenta que por razones de simetría el desplazamiento v no depende de θ , se obtiene:

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{rz} = 0, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (a)$$

Resulta pues, que sólo las componentes $\tau_{r\theta}$ y $\tau_{\theta z}$ son distintas de cero. Las dos primeras ecuaciones (170) son satisfechas idénticamente y la tercera da:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (b)$$

Esta ecuación puede escribirse de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \quad (c)$$

expresión que es satisfecha por una función ϕ , de r y de z tal que:

$$r^2 \tau_{r\theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad r^2 \tau_{\theta z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (d)$$

Para satisfacer las condiciones de compatibilidad, es preciso tener en cuenta el hecho de que $\tau_{r\theta}$ y $\tau_{\theta z}$ son funciones del desplazamiento v . Las ecuaciones (a) y (d) nos dan:

¹ Estas ecuaciones fueron obtenidas por Lamé y Chapeyron; véase *Crelle's J.*, vol. 7, 1831

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} = G \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \tau_{\theta z} &= G \gamma_{\theta z} = G \frac{\partial v}{\partial z} = Gr \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (e)$$

De estas ecuaciones, se deduce que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (f)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (g)$$

Consideraremos ahora, las condiciones de contorno correspondientes a la función ϕ . Puesto que sobre la superficie lateral de la barra no actúa ninguna fuerza, podemos concluir que en todo punto A de la periferia de una sección que pase por el eje (fig. 175), la tensión tangencial total debe tener la dirección de la tangente al contorno, siendo cero su proyección sobre la normal al mismo N . En consecuencia:

$$\tau_{r\theta} \frac{dz}{ds} - \tau_{\theta z} \frac{dr}{ds} = 0$$

siendo ds un elemento del contorno. Sustituyendo en esta expresión los valores (d) resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0 \quad (h)$$

de donde se deduce que dada una sección axial del árbol, la función ϕ se mantiene constante a lo largo de su contorno.

La ecuación (g) junto con la condición de contorno (h) determinan completamente la función de tensión ϕ , la cual permite obtener las tensiones que satisfacen a las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de compatibilidad y la condición de borde sobre la superficie lateral del eje¹.

La magnitud del par, se obtiene considerando una sección transversal y calculando el momento producido por las tensiones tangenciales $\tau_{\theta z}$. Resulta entonces:

$$M_t = \int_0^a 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr = 2\pi \int_0^a \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = 2\pi \left[\phi \right]_0^a \quad (k)$$

¹ Esta solución general se debe a J. M. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, pág. 141, 1899. Véase también A. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.*, Munich, vol. 35, págs. 249 y 504, 1905 y el libro *Kerbspannungstheorie*, de H. Nember, donde se encuentran las soluciones correspondientes al hiperboloide de revolución y a la cavidad de forma de elipsoide de revolución. T. Pöschl, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 137, 1922 y T. J. Higgins, *Experimental Stress Analysis*, vol. 3, núm. 1, pág. 94, 1945 dan una reseña de la bibliografía sobre el tema.

donde a es el radio exterior de la sección. Vemos que el momento puede ser determinado fácilmente si se conoce el valor de la función en el centro y en el contorno de la sección transversal.

En el estudio de los desplazamientos producidos por la torsión del árbol, emplearemos la notación $\psi = v/r$ para designar el ángulo de rotación del anillo elemental de radio r perteneciente a una sección transversal cualquiera. Un anillo tal puede ser considerado como la sección de uno de los numerosos tubos de pared delgada, en que puede ser descompuesto el eje. El ángulo de torsión de esos tubos será pues ψ . Dado que los radios de la sección transversal se curvan, ese ángulo, ψ , variará con r y los ángulos de torsión de los tubos elementales no son iguales para una misma sección transversal de la pieza. Las ecuaciones (c) toman ahora la forma:

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (l)$$

Una de las soluciones de esta ecuación nos da el ángulo de torsión en función de r y z . Si en esa solución hacemos

$$\psi = \text{constante} \quad (m)$$

obtenemos una superficie, lugar geométrico de los puntos de igual ángulo de torsión. En la figura 175, AA_1 representa la curva de intersección de esa superficie con la sección axial del árbol. Por razones de simetría, se deduce que la superficie dada por la ecuación (m) es de revolución, siendo AA_1 el meridiano de la misma que pasa por A . Durante la torsión, estas superficies giran alrededor del eje z sin sufrir ninguna deformación, exactamente como les ocurre a las secciones transversales de los ejes cilíndricos de sección circular. La deformación total en un punto cualquiera del meridiano AA_1 , será, pues, una deformación tangencial en el plano normal al mismo y la tensión tangencial correspondiente, en la sección axial de la pieza, será perpendicular a dicho meridiano. En la periferia esta tensión es tangente al borde de la pieza, siendo, por tanto, los meridianos, normales al contorno de la sección axial. Si pasamos de una superficie $\psi = \text{cte.}$, a otra adyacente, la variación de ψ

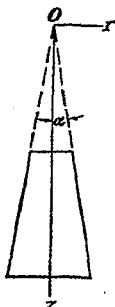


FIG. 176

a lo largo del contorno de la sección axial será $d\psi/ds$ y, de igual manera que para el caso de un árbol cilíndrico de sección circular (§ 87), tendremos:

$$\tau = Gr \frac{d\psi}{ds} \quad (n)$$

donde:

$$\tau = \tau_{r0} \frac{dr}{ds} + \tau_{z0} \frac{dz}{ds}$$

es la tensión tangencial resultante en la periferia. El valor de esa tensión tangencial puede ser obtenido fácilmente si determinamos experimentalmente $d\psi/ds$ ¹.

Consideremos el caso particular de un árbol troncocónico² (fig. 176). En este caso la relación:

$$\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

es constante e igual a $\cos \alpha$ en el contorno de la sección axial, y cualquier función de esa relación cumplirá la condición (h) de contorno. Con el fin de satisfacer también la ecuación (g), tomamos:

$$\phi = c \left\{ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} \left[\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^3 \right\} \quad (o)$$

donde c es una constante. Derivando resulta:

$$\tau_{z0} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{crz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (p)$$

En cuanto a la constante c se obtiene de la ecuación (k). Sustituyendo (o) en esta ecuación tenemos:

$$c = - \frac{M_i}{2\pi(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha)}$$

El ángulo de torsión se deduce de las ecuaciones (e), las cuales dan la expresión de ψ , que satisface la ecuación (l) y la condición de contorno.

$$\psi = \frac{c}{3G(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (q)$$

Como puede verse las superficies de igual ángulo de torsión son esferas con centro en el origen O .

¹ Experimentos de este tipo fueron realizados por R. Sonntag, *Z. angew. Math. Mech.*, volumen 9, pág. 1, 1929.

² Véase Föppl, *loc. cit.*

Los casos de ejes en forma de elipsoides, hiperboloides o paraboloides de revolución pueden ser tratados de manera análoga¹.

Los problemas que se presentan en la práctica son, por lo general, más complicados pues el diámetro del eje suele cambiar bruscamente como se muestra en la figura 177a. El estudio de estos problemas ha sido iniciado por A. Föppl. C. Runge propuso un método numérico de resolución de los mismos², con el que pudo comprobarse que en puntos tales como m o n se produce una notable concentración de tensiones y que en los ejes con dos diámetros diferentes, d y D (fig. 177a), el valor de la tensión máxima depende de las relaciones entre el radio a de la curva de transición y el diámetro d y de la d/D .

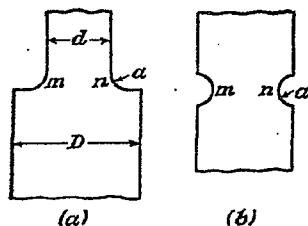


FIG. 177

En el caso de una entalladura de radio muy pequeño, a (fig. 177b), la tensión máxima en el fondo de la muesca es doble de la que se produce en la superficie del eje cilíndrico carente de muescas.

Para el estudio de la concentración de tensiones en las zonas de transición entre distintas secciones y en entalladuras, tiene gran utilidad la analogía eléctrica³. La ecuación general del flujo de corriente eléctrica en una placa homogénea de espesor variable es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad (r)$$

en la que h es el espesor variable de la placa y ψ la función potencial.

¹ Véanse los trabajos de E. Melan, *Tech. Blätter*, Praga, 1920; A. N. Dinnik, *Bull. Don Polytech. Inst. Novotcherkask*, 1912; W. Arndt, *Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Höhlträumen*, Dissertation, Göttingen, 1926; A. Timpe, *Math. Annalen*, 1911, pág. 480; Higgins, *loc. cit.*, de la bibliografía sobre el tema.

² Ver F. A. Wallers, *Z. Math. Physik*, vol. 55, pág. 225, 1907. Otro método aproximado fue desarrollado por L. Föppl, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.*, Munich, vol. 51, pág. 61, 1921, y por R. Sonntag, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 9, pág. 1, 1929.

³ Ver el trabajo de L. S. Jacobsen, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 47, pág. 619, 1925, y la revisión bibliográfica de T. J. Higgins, *loc. cit.* Las discrepancias entre los resultados dados por este y otros métodos son estudiados en este último trabajo. A. Weigand, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 20, pág. 217, 1943 (traducido en *N.A.C.A. Tech. Mem.*, 1179, setiembre, 1947), realiza otras comparaciones y da los resultados de ciertas medidas con bandas extensométricas que extienden la figura 179 hasta $2a/d = 0.05$.

Supongamos que la placa tenga el mismo contorno que la sección axial del eje (fig. 178), que los ejes x e y coincidan con los x y r y que el espesor de la placa sea proporcional al cubo de r ($h = ar^3$). La ecuación (r) se convierte entonces en:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0$$

que coincide con la ecuación (l). Se deduce entonces, que las líneas equipotenciales de la placa vienen determinadas por la misma ecuación que las líneas de igual ángulo de torsión en el caso de un árbol de diámetro variable.

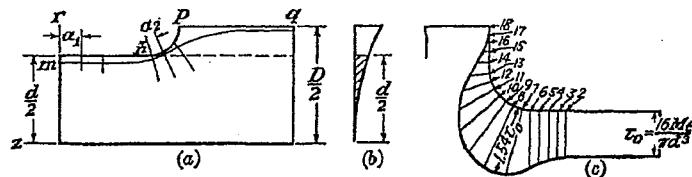


FIG. 178

Suponiendo que entre los extremos de la placa correspondientes a los del eje, se establece una cierta diferencia de potencial, de modo que la corriente circule a lo largo del eje z , las líneas equipotenciales serán normales a los bordes laterales de la placa dándose, por lo tanto, las mismas condiciones de contorno que en el caso de las líneas de ángulo de torsión constante. Si las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno son las mismas, las dos haces de líneas serán idénticas por lo que estudiando la distribución de potencial, obtendremos información útil para el conocimiento de la repartición de tensiones en el árbol sometido a torsión.

La tensión máxima se da en la superficie del árbol y su valor se deduce de (n). De esta ecuación, aplicando la analogía eléctrica, resulta que la tensión es proporcional a la variación de la caída de potencial a lo largo del borde de la placa.

Sobre un modelo de acero de 24 pulgadas de largo, 6 de ancho en su extremidad mayor y 1 de espesor máximo (fig. 178) han sido realizadas medidas. La caída de potencial a lo largo del borde $mnpq$ del modelo, ha sido determinada mediante un galvanómetro muy sensible cuyos terminales estaban conectados a dos agujas muy agudas, fijadas a un bloque y distantes 2 mm entre sí. Al tocar la placa con las agujas, la caída de tensión existente entre los puntos de las mismas era indicada por el galvanómetro. Moviendo las agujas a lo largo del borde de transición se pudo localizar y medir el gradiente máximo de voltaje. La relación de este máximo al gradiente correspondiente a un punto alejado, como el m por

ejemplo (fig. 178a) permite evaluar el coeficiente de concentración de tensión k^1 de la ecuación:

$$\tau_{\max} = k \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

Los resultados de los ensayos citados para un caso particular están representados en la figura 178c, en la que la caída de potencial medida en

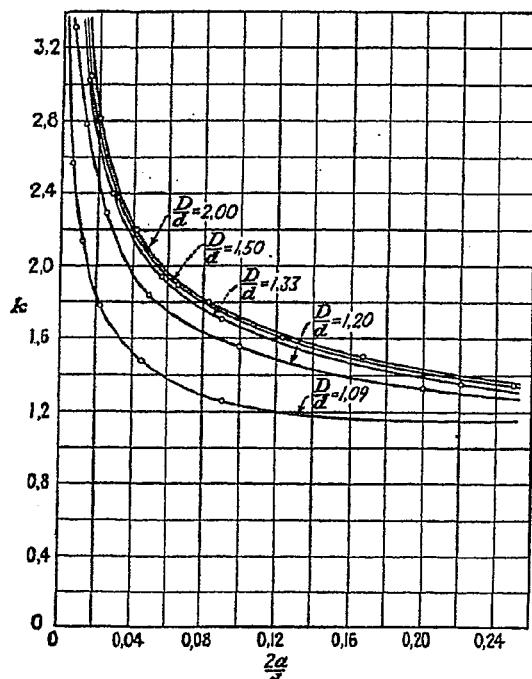


FIG. 179

cada punto viene indicada por la longitud de la normal al borde, trazada en ese punto. El coeficiente de concentración correspondiente es 1,54. Los valores de este coeficiente obtenidos para otras proporciones de árboles son mostrados en la figura 179, en la cual las abscisas representan $2a/d$ y las ordenadas el factor k para cada una de los valores de la relación D/d (véase la fig. 177). Mediante estas curvas puede determinarse por interpolación, con suficiente exactitud, el coeficiente de concentración correspondiente a cualquier caso particular.

¹ Las pequeñas variaciones del radio r [ecuación (n)] pueden ser despreciadas en este caso.

Problemas

1. Demostrar, a partir de las condiciones de equilibrio de la barra completa, que cuando todas las componentes de la tensión, excepto τ_{zz} , τ_{yy} se anulan, las fuerzas aplicadas sólo pueden consistir en pares de torsión [ver las ecuaciones (h) del § 90].

2. Demostrar que $\phi = A(r^2 - a^2)$ es la solución del problema del árbol cilíndrico, macizo o hueco. Determinar A en función de $G\theta$. Mediante las ecuaciones (141) y (146) calcular la tensión tangencial máxima y la rigidez a la torsión en función de M_t para el árbol macizo y verificar que estos resultados concuerdan con los dados en los libros de resistencia de materiales.

3. Demostrar que aplicando la misma torsión, la sección elíptica sufre una tensión tangencial mayor que la correspondiente a la sección circular inscrita (de radio igual al eje menor b de la elipse). ¿Cuál de las dos secciones da el momento mayor para igual tensión máxima?



FIG. 180

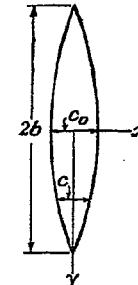


FIG. 181

4. Calcular, usando la ecuación (g) del § 92 y la (145), la rigidez a la torsión del triángulo equilátero y comprobar la concordancia con la ecuación (1) del § 92.

5. Obtener la expresión de τ_{yy} a lo largo de la línea media Ax de la figura 153, usando la función de tensión (m) del § 92 expresada en coordenadas rectangulares. Verificar que el valor máximo a lo largo de esa línea es el dado por la ecuación (p).

6. Evaluar la rigidez torsional de la sección representada en la figura 153. Difiere apreciablemente de la correspondiente a la sección circular completa cuando la muesca es pequeña?

7. Demostrar que la función de tensión ϕ correspondiente a la membrana parabólica del § 94 es

$$\phi = -G\theta \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

Demostrar que para una sección delgada tal como la mostrada en la figura 180, se puede obtener una solución aproximada suponiendo que para cualquier valor de y , la membrana tiene la forma parabólica correspondiente a la anchura de la pieza para ese valor de y . Probar que para una sección triangular de altura b se tiene aproximadamente,

$$M_t = \frac{1}{12} G\theta b c_a^3$$

8. Usando el método indicado en el problema anterior, obtener una expresión aproximada para la rigidez torsional de la sección delgada simétrica limitada por las dos parábolas de la figura 181, para la cual la anchura c , a la distancia y del centro, viene dada por:

$$c = c_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

9. Demostrar que el método indicado en el problema 7 da para una sección elíptica alargada la función de tensión aproximada:

$$\phi = -G\theta b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

siendo la elipse la de la figura 149 con b/a pequeño. Demostrar que la solución exacta indicada en el § 94 tiende a la dada aquí cuando b/a es pequeño.

Deducir las fórmulas aproximadas

$$M_t = \pi ab^3 G\theta, \quad \tau_{\max} = 2G\theta b = \frac{2M_t}{\pi ab^2}$$

para la sección elíptica delgada y compararla con las fórmulas correspondientes relativas a la sección rectangular estrecha de longitud $2a$ y anchura $2b$.

10. Aplicar el método indicado al final del § 97, para obtener un valor aproximado de la rigidez a la torsión de la sección considerada en el problema 8.

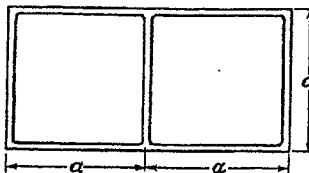


FIG. 182

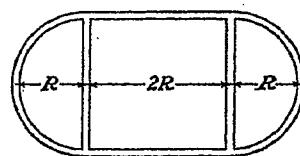


FIG. 183

11. La función de tensión ϕ , correspondiente a una sección que contiene un agujero, se anula en el contorno exterior y toma el valor ϕ_0 , constante, en el contorno del orificio. Adoptando el método de cálculo que permite llegar a la ecuación 145 (pág. 299), demostrar que el momento total viene dado por el doble del volumen limitado por la superficie ϕ aumentado en el doble del volumen cerrado por un techo plano de altura ϕ_0 , que cubre el agujero (véase la pág. 336).

12. Un tubo cerrado de pared delgada de espesor δ tiene un perímetro l . Practicando un corte longitudinal en él se obtiene un tubo abierto. Demostrar que si la tensión tangencial máxima es la misma en uno y otro caso se cumple

$$\frac{M_{\text{abiertu}}}{M_{\text{cerrado}}} = \frac{l\delta}{6A}, \quad \frac{\theta_{\text{abiertu}}}{\theta_{\text{cerrado}}} = \frac{2A}{l\delta}$$

y que la relación entre las rigideces torsionales es $l^2\delta^2/12A^2$, siendo A el área del «agujero». Evaluar estas relaciones para el caso de un tubo de radio 25,4 mm y de espesor de pared 2,54 mm.

13. Un tubo de pared delgada, de espesor constante δ , tiene la sección mostrada en la figura 182. Demostrar que cuando es sometido a torsión no actúa tensión alguna sobre el nervio central.

Establecer las fórmulas que dan: a) la tensión tangencial en los puntos de las paredes laterales alejadas de las aristas; b) la torsión unitaria θ en función del momento.

14. Obtener las expresiones que dan la tensión tangencial en un tubo de espesor constante δ y sección la mostrada en la figura 183.

15. En el estudio de secciones cerradas de pared delgada se ha supuesto que la tensión tangencial es constante a través del espesor de la pared, lo que corresponde a una membrana de pendiente constante a través de este espesor. Demostrar que esto no puede ser rigurosamente exacto para una porción recta de pared (fig. 171 a, por ejemplo) y que en general el término correctivo a añadir a esta tensión tangencial es la tensión correspondiente al tubo «abierto» por cortes longitudinales (véase el problema 12).

16. La teoría expuesta en el § 104 comprende como caso particular el de un eje de sección circular uniforme. ¿Cuáles son las funciones ϕ y ψ correspondientes? Demostrar que estas funciones dan la relación correcta entre el momento y la torsión unitaria.

17. Demostrar que:

$$\phi = \frac{z}{R} + \frac{Az^3}{R^3} \quad \text{donde} \quad R = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

no satisface la ecuación (g) del § 104 más que si $A = -1/3$ [véase la ecuación (a)].

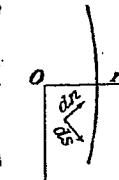


FIG. 184

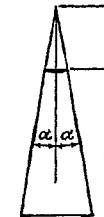


FIG. 185

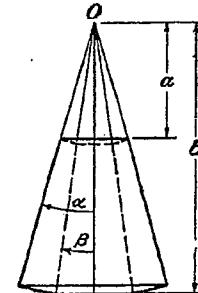


FIG. 186

18. En un punto cualquiera de una sección axial de un eje de diámetro variable, elegimos arbitrariamente dos elementos ds y dn (perpendiculares entre sí) tales como se indican en la figura 184. La tensión tangencial es expresada por sus componentes τ_z y τ_n según esas direcciones. Demostrar que:

$$\tau_z = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad \tau_n = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad \tau_z = Gr \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \tau_n = Gr \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

y deducir la condición de contorno satisfecha por ψ .

Demostar, sin cálculos, que la función dada por la ecuación (q) del § 104 verifica esta condición para el caso de un contorno en forma de tronco de cono, cualesquiera que sea el ángulo del mismo.

19. Comprobar que la ecuación (g) del § 104 da correctamente la función que corresponde a la ϕ de la ecuación (o).

20. Si modificamos la teoría del § 104, eliminando la condición de contorno $\phi = \text{cte.}$, la tensión será producida por los momentos aplicados en los extremos de una parte y por ciertos «anillos de tensión tangencial» de otra. Considerando un eje de sección circular uniforme, estudiar el problema resuelto por $\phi = Czr^4$, donde C es una constante, para $0 < z < l$.

21. Demostrar que la rotación relativa de los extremos del eje troncocónico de la figura 185, producida por el momento M_i , viene dada por:

$$\frac{M}{2\pi(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha)} \cdot \frac{1}{3G} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right)$$

Si a y b aumentan ($b \sim a = l$) y a disminuye, el resultado anterior deberá tender al valor de la rotación relativa de los extremos de un eje de sección uniforme de longitud l y radio aa producida por el momento M_i . Demuéstrese que es así en efecto.

22. Usando las funciones dadas por las ecuaciones (o) y (q) del § 104, expresar en función de M_i la rotación relativa de los extremos del árbol troncocónico hueco de la figura 186. Los extremos son superficies esféricas de centro O y radio a y b .

Flexión de piezas prismáticas



105. Flexión de una pieza en voladizo. Hemos visto al estudiar la flexión simple (§ 88) que si una pieza prismática es sometida en uno de sus planos principales, a la acción de dos pares iguales y opuestos aplicados en sus extremos, la flexión de la misma se produce en ese mismo plano y de las seis componentes de la tensión sólo la tensión normal, paralela al eje de la pieza, es distinta de cero siendo proporcional a la distancia al eje neutro. La solución exacta coincide, pues, en este caso, con la que da la teoría elemental de la flexión. Vimos también al tratar el caso de una pieza en voladizo de sección rectangular estrecha, flectada

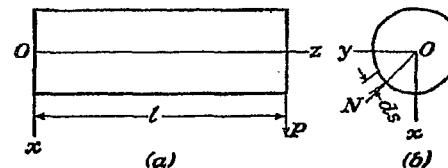


FIG. 187

bajo la acción de una fuerza aplicada en su extremo (§ 20), que además de las tensiones normales, proporcionales en cada sección transversal al momento flector, se producen tensiones tangenciales que son proporcionales a la fuerza cortante.

Consideremos ahora, el caso más general de la flexión de una ménsula (de sección transversal constante, de forma cualquiera) por la acción de una fuerza P aplicada en el extremo, paralelamente a uno de los ejes principales de la sección transversal¹ (fig. 187). Tomemos como centro de

¹ Este problema fue resuelto por Saint-Venant, *J. mathémat. (Liouville)*, serie 2, vol. 1, 1856.

coordenadas, el baricentro de la sección fija, de forma que el eje x coincida con la fibra central de la pieza y los ejes x e y con los ejes principales de dicha sección. Para resolver el problema, aplicamos el método semiinverso Saint-Venant y establecemos, en principio, ciertas hipótesis referentes a las tensiones.

Suponemos que las tensiones normales que actúan sobre una sección transversal, situada a la distancia z de la sección fija se distribuyen siguiendo la misma ley que en el caso de la flexión simple:

$$\sigma_z = -\frac{P(l-z)x}{I} \quad (a)$$

Suponemos asimismo, que existen tensiones tangenciales que actúan sobre las mismas secciones transversales, las cuales se resuelven en sus componentes τ_{xz} y τ_{yz} y que las tres componentes restantes de la tensión σ_x , σ_y , τ_{xy} , son cero. Demostrarímos ahora que usando estas hipótesis llegamos a una solución que satisface todas las ecuaciones de la elasticidad y que, por lo tanto, constituye la solución exacta del problema.

Partiendo de estas hipótesis y despreciando las fuerzas másticas, las ecuaciones diferenciales de equilibrio (127) quedan así:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{I} \quad (c)$$

La ecuación (b) nos dice que las tensiones tangenciales no dependen de z , siendo iguales para todas las secciones transversales de la barra.

Aplicando ahora las condiciones de contorno (128) a la superficie lateral de la pieza, que está libre de fuerzas exteriores, encontramos que las dos primeras ecuaciones son satisfechas idénticamente y que la tercera nos da:

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$$

De la figura 187b, resulta:

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}$$

donde ds es un elemento del borde de la sección transversal. La condición de contorno será entonces:

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0 \quad (d)$$

Pasando a las ecuaciones de compatibilidad (130), vemos que las tres primeras de ellas, que contienen componentes normales de la tensión, y

la última en la que aparece τ_{xy} , resultan idénticamente satisfechas. El sistema (130) se reduce entonces a las dos ecuaciones:

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{P}{I(1+\nu)} \quad (e)$$

La resolución del problema de la flexión de una ménsula prismática, de cualquier sección transversal, se reduce por lo tanto a la obtención de las expresiones de τ_{xz} y τ_{yz} en función de x e y que satisfagan las ecuaciones de equilibrio (c), la condición de contorno (d) y las ecuaciones de compatibilidad (e).

106. Función de tensión. Al estudiar los problemas de flexión, usaremos de nuevo la función de tensión $\phi(x, y)$. Es fácil ver que las ecuaciones diferenciales de equilibrio (b) y (c) del párrafo anterior quedan cumplidas tomando:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + f(y), \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (171)$$

donde ϕ es la función de tensión de x e y y $f(y)$ es función de y solamente, que será determinada más tarde con arreglo a las condiciones de contorno.

Sustituyendo (171) en las ecuaciones de compatibilidad (e) del párrafo anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} - \frac{df}{dy^2} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy} + c \quad (a)$$

donde c es una constante de integración cuyo significado físico es muy sencillo. Consideremos la rotación de un elemento superficial de una sección transversal de las piezas en voladizo. Esta rotación viene expresada por la ecuación (véase el § 75).

$$2\omega_x = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

y su variación según la dirección z podrá escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}$$

Aplicando la ley de Hooke y usando las expresiones (171) de las componentes de la tensión, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{df}{dy} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación (a) se tiene:

$$-G \frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} + c \quad (b)$$

Si el eje x es un eje de simetría de la sección transversal, la flexión provocada por una fuerza P , dirigida según este eje, produce una repartición simétrica de rotaciones ω_z de la sección transversal (correspondiente a una curvatura antielástica) de valor medio nulo para el conjunto de la sección. El valor medio de $\partial \omega_z / \partial z$ será también cero lo que exige que c sea nula en la ecuación (b). Si la sección transversal no es simétrica podemos definir la flexión sin torsión por la condición de que el valor medio de $\partial \omega_z / \partial z$ sea nulo lo que exige naturalmente que también lo sea c . La ecuación (b) muestra entonces que $\partial \omega_z / \partial z$ se anula en los elementos que contienen al baricentro de las secciones transversales. Esto equivale a decir que los elementos situados a lo largo del eje sufren una rotación relativa (unos respecto a otros) nula, por lo que si uno de tales elementos es mantenido fijo la rotación de los otros respecto al eje será cero. Haciendo cero a c la ecuación (a) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy} \quad (172)$$

Sustituyendo (172) en la condición de contorno (d) del párrafo anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - f(y) \right] \frac{dy}{ds} \quad (173)$$

ecuación que nos permite calcular los valores de la función ϕ a lo largo del contorno de la sección transversal, una vez escogida la función $f(y)$. La ecuación (172) junto con la condición de contorno (173) determina la función de tensión ϕ .

En los problemas que serán estudiados a continuación tomaremos la función $f(y)$ de manera tal que el segundo miembro de la ecuación (173) se anule¹, con lo que la función ϕ será constante a lo largo del contorno. Haciendo igual a cero esa constante, el problema de la flexión se reduce a la resolución de la ecuación diferencial (172) con la condición de con-

¹ J. N. Goodier, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 11, pág. 273, 1944. Una definición diferente fue propuesta por E. Trefftz, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 15, pág. 220, 1935.

² Véase S. Timoshenko, *Bull. Inst. Engineers of Ways of Communications*, San Petersburgo, 1931. Véase también *Proc. London. Math. Soc.*, serie 2, vol. 20, pág. 398, 1922.

torno $\phi = 0$. Este problema es análogo al de la deformación de una membrana uniformemente estirada cuyo borde tiene un contorno igual al de la sección transversal de la barra sometida a flexión y que está sujeta a una carga continua dada por el segundo miembro de la ecuación (172). En lo que sigue daremos algunas aplicaciones de esta analogía de la membrana.

107. Sección transversal circular. Sea:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (a)$$

la ecuación del contorno de la sección transversal. El segundo miembro de la condición de límite o contorno (173) se anula si tomamos:

$$f(y) = \frac{P}{2I} (r^2 - y^2) \quad (b)$$

Llevando este valor a (172) la función de tensión ϕ vendrá determinada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \quad (c)$$

y la condición $\phi = 0$ en el contorno. De esta manera la función está dada por las deformaciones de una membrana de contorno circular, de radio r , uniformemente tensada y sometida a una carga transversal de intensidad proporcional a:

$$-\frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

La ecuación (c) y la condición de contorno quedan satisfechas tomando:

$$\phi = m(x^2 + y^2 - r^2)y \quad (d)$$

donde m es un factor constante. Esta función se anula en el contorno (a) y cumplirá la ecuación (c) si hacemos:

$$m = \frac{(1+2\nu)P}{8(1+\nu)I}$$

La ecuación (d) toma entonces la forma:

$$\phi = \frac{(1+2\nu)P}{8(1+\nu)I} (x^2 + y^2 - r^2)y \quad (e)$$

y las componentes de la tensión que se obtienen aplicando las ecuaciones (171) serán:

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \frac{(3+2\nu)P}{8(1+\nu)I} \left(r^2 - x^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{(1+2\nu)Pxy}{4(1+\nu)I} \end{aligned} \quad (174)$$

La tensión tangencial vertical τ_{xz} es una función par de x e y , la componente horizontal τ_{yz} una función impar de las mismas variables. La distribución tensional (174) dará, por tanto, una resultante cuya línea de acción coincide con el diámetro vertical de la sección transversal.

En el diámetro horizontal de la sección recta $x = 0$ y según (174) tendremos

$$\tau_{xz} = \frac{(3+2\nu)P}{8(1+\nu)I} \left(r^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right), \quad \tau_{yz} = 0 \quad (f)$$

La máxima tensión tangencial se presenta en el centro ($y = 0$) donde:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{(3+2\nu)Pr^2}{8(1+\nu)I} \quad (g)$$

La tensión tangencial en los extremos del diámetro horizontal ($y = \pm r$) vale:

$$(\tau_{xz})_{y=\pm r} = \frac{(1+2\nu)Pr^2}{4(1+\nu)I} \quad (h)$$

Como se ve la magnitud de la tensión tangencial depende del valor del coeficiente de Poisson. Haciendo $\nu = 0,3$, (g) y (h) resultan

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1,38 \frac{P}{A}, \quad (\tau_{xz})_{y=\pm r} = 1,23 \frac{P}{A} \quad (k)$$

siendo A el área de la sección transversal de la pieza. La teoría elemental de la flexión de vigas basada en la suposición de que la tensión tangencial τ_{xz} se distribuye uniformemente a lo largo del diámetro horizontal de la sección recta, nos da:

$$\tau_{xz} = \frac{4P}{3A}$$

siendo un 4 % el error de esta solución elemental.

108. Sección transversal elíptica. El método que acabamos de emplear en el párrafo anterior puede ser usado también en el caso de sección transversal elíptica. Sea:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a)$$

la ecuación del perímetro de la sección. El segundo miembro de la ecuación (173) se anulará si hacemos:

$$f(y) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) \quad (b)$$

Sustituyendo esta expresión en (172) resulta,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{Py}{I} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \right) \quad (c)$$

ecuación, que junto con la condición $\phi = 0$ en el perímetro, determina la función de tensión ϕ . La condición de contorno y la ecuación (c) quedan satisfechas tomando:

$$\phi = \frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)} \cdot \frac{P}{I} \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y \quad (d)$$

Cuando $a = b$ esta solución coincide con la dada anteriormente para la sección circular.

Sustituyendo (b) y (d) en las ecuaciones (171) obtendremos las componentes de la tensión:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu)a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \cdot \frac{P}{2I} \left[a^2 - x^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} y^2 \right] \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \cdot \frac{Pxy}{I} \end{aligned} \quad (175)$$

En el eje horizontal de la sección elíptica ($x = 0$) y resulta:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu)a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \cdot \frac{P}{2I} \left[a^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} y^2 \right] \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

La tensión máxima, que se presenta en el centro ($y = 0$), viene dada por la ecuación:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{2I} \left[1 - \frac{a^2 + \nu b^2 / (1+\nu)}{3a^2 + b^2} \right]$$

Si b es pequeño comparado con a podemos despreciar los términos conteniendo b^2/a^2 , en cuyo caso resulta:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{3I} = \frac{4P}{3A}$$

que coincide con la solución dada por la teoría elemental de la flexión. Si b es muy grande en relación con a tendremos:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{2}{1+\nu} \frac{P}{A}$$

La tensión en los extremos del diámetro horizontal ($y = \pm b$) será en este caso:

$$\tau_{xz} = \frac{4\nu}{1+\nu} \frac{P}{A}$$

La distribución de tensiones a lo largo del diámetro horizontal dista mucho, en este caso, de ser uniforme y depende del coeficiente de Poisson ν . Haciendo $\nu = 0,30$ obtenemos

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1,54 \frac{P}{A}, \quad (\tau_{xz})_{x=0, y=b} = 0,92 \frac{P}{A}$$

La tensión máxima así calculada es aproximadamente un 14 % mayor de la obtenida aplicando la fórmula elemental.

109. Sección transversal rectangular. La ecuación del contorno del rectángulo de la figura 188 es:

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0 \quad (a)$$

Sustituyendo $f(y)$ en la ecuación (173) por la constante $Pa^2/2I$, la expresión $Px^2/2I - Pa^2/2I$ se anula a lo largo de los lados $x = \pm a$ del rec-

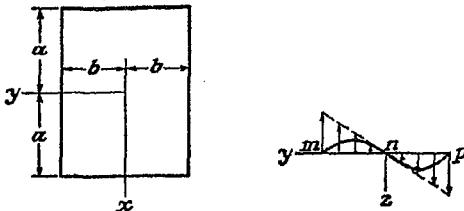


FIG. 188

táculo. La derivada dy/ds se anula, por otra parte, a lo largo de los lados verticales $y = \pm b$. De todo ello resulta que el segundo miembro de la ecuación (173) se hace cero en el contorno, pudiendo ser en él, por tanto, $\phi = 0$. La ecuación diferencial (172) se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} \quad (b)$$

ecuación que junto con la condición de contorno determina completamente la función de tensión. Nuestro problema queda reducido a determinar las deformaciones que produce en una membrana rectangular uniformemente estirada una carga continua cuya intensidad es proporcional a:

$$-\frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I}$$

La curva mnp de la figura 188 representa la intersección de la membrana con el plano yz .

Según las ecuaciones (171) las tensiones tangenciales pueden descomponerse en los dos sistemas siguientes:

$$(1) \quad \tau_{xz}' = \frac{P}{2I} (a^2 - x^2), \quad \tau_{yz}' = 0$$

$$(2) \quad \tau_{xz}'' = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz}'' = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (c)$$

El primer sistema representa la distribución parabólica de tensiones dada por la teoría elemental. El segundo, que depende de la función ϕ , representa las correcciones a aplicar a la solución elemental. La magnitud de tales correcciones viene dada por las pendientes de la membrana. Por razones de simetría $\partial \phi / \partial x = 0$ a lo largo del eje y y las correcciones a la teoría elemental serán tensiones tangenciales verticales dadas por la pendiente $\partial \phi / \partial y$. Conforme a la figura 188, τ_{xz}'' es positiva en los puntos m y p y negativa en n . La tensión τ_{xz} , en consecuencia, no es uniforme a lo largo del eje horizontal de simetría (uniformidad ésta a la que llega la teoría elemental) presentando máximos en los extremos m y p y un mínimo en el centro n .

De las condiciones de carga de la membrana resulta que ϕ es función par de x e impar de y . Este requisito, así como la condición de contorno, quedan cumplidos si damos a la función de tensión ϕ la forma de serie de Fourier

$$\phi = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2m+1,n} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (d)$$

Sustituyendo en (b) y aplicando el método usual para calcular los coeficientes de las series de Fourier, llegamos a las ecuaciones:

$$A_{2m+1,n} \pi^2 ab \left[\left(\frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]$$

$$= -\frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P}{I} \int_{-a}^a \int_{-b}^b y \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$A_{2m+1,n} = -\frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P}{I} \frac{8b(-1)^{m+n-1}}{\pi^4 (2m+1)n \left[\left(\frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}$$

Sustituyendo en (d) obtenemos:

$$\phi = -\frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P}{I} \frac{8b^3}{\pi^4} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{(2m+1)n \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

Con esta función de tensión las componentes de la tensión tangencial pueden ser determinadas mediante las ecuaciones (c).

Deduzcamos ahora qué correcciones hay que añadir a las tensiones, que para el eje y , da la teoría elemental. Considerando para ello la deformación de la membrana (fig. 188), podemos ver que las correcciones alcanzan los valores máximos a lo largo de este eje y que, por tanto, la máxima tensión aparece en el punto medio de los lados $y = \pm b$. Calculando la derivada $\partial\phi/\partial y$ y haciendo $x = 0$ tenemos:

$$(\tau_{xx}'')_{x=0} = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I}\frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos \frac{n\pi y}{b}}{(2m+1) \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

De aquí deducimos las siguientes fórmulas, aplicables en el centro de la sección transversal ($y = 0$) y en el punto medio de los lados verticales del rectángulo.

$$(\tau_{xx}'')_{x=0, y=0} = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I}\frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1) \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

$$(\tau_{xx}'')_{x=0, y=b} = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I}\frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1) \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

La suma de estas series se simplifica grandemente usando las conocidas fórmulas:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2 + k^2]} = \frac{\pi^3}{32} \left(1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2} \right)^*$$

* Esta fórmula puede deducirse de la siguiente manera: Usando la serie trigonométrica (h) (pág. 184) para el caso de un tirante cargado por una fuerza transversal P y una tracción axial S , obtenemos que

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2(n^2 + k^2)}$$

Se tendrá entonces

$$(\tau_{xx}'')_{x=0, y=0} = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{3P}{2A}\frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \quad (176)$$

$$(\tau_{xx}'')_{x=0, y=b} = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{3P}{2A}\frac{b^2}{a^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right]$$

en donde $A = 4ab$, es el área de la sección transversal. Estas series convergen rápidamente y no es difícil calcular las correcciones τ_{xx}'' para cualquier valor de la relación a/b . Estas correcciones deben ser añadidas al

Punto	$\frac{a}{b} =$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x = 0, y = 0$	Exacto Aproximado	0,983 0,981	0,940 0,936	0,856 0,856	0,805 0,826
$x = 0, y = b$	Exacto Aproximado	1,033 1,040	1,126 1,143	1,396 1,426	1,988 1,934

valor $3P/2A$ dado por la fórmula elemental. En la primera línea de la tabla adjunta se dan los factores por lo que hay que multiplicar el valor aproximado $3P/2A$ de la tensión tangencial para obtener los valores exactos¹.

donde:

$$k^2 = \frac{Sl^2}{EI\pi^2}$$

y c es la distancia de la fuerza P al apoyo izquierdo (fig. 112). Haciendo ahora $c = 0$ y $Pc = M$, llegamos a la siguiente curva de deflexión producida por el par M aplicado en el extremo izquierdo:

$$y = \frac{2Ml^4}{EI\pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n(n^2 + k^2)}$$

y la flecha en el centro será:

$$\delta = \frac{2Ml^4}{EI\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2 + k^2]} \quad (a)$$

La misma flecha obtenida por integración de la ecuación diferencial de la curva de deflexión es:

$$\delta = \frac{Ml^2}{2EI\pi^2 k^2} \left(1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2} \right) \quad (b)$$

La fórmula anterior se sigue de la comparación de (a) y (b).

¹ Los datos de la tabla difieren algo de los datos por Saint-Venant. La comprobación de los resultados de Saint-Venant demostró la existencia de un error en sus cálculos.

En estos cálculos se ha tomado el valor 1/4 para el coeficiente Poisson ν . Como se ve la teoría elemental da valores muy exactos para estas tensiones cuando $a/b \geq 2$. Para una sección cuadrada el error que se introduce al considerar la tensión máxima dada por la fórmula elemental, es de un 10 %.

Usando la analogía con la membrana pueden deducirse fórmulas aproximadas para el cálculo de estas tensiones tangenciales, fórmulas éstas de gran utilidad. Si a es grande comparado con b (fig. 188) podemos suponer que a suficiente distancia de los lados cortos del rectángulo la superficie de la membrana es prácticamente cilíndrica. La ecuación (b) entonces se convierte en

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

y de ello resulta:

$$\phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} (y^3 - b^2 y) \quad (e)$$

Sustituyendo en (c) tenemos para las tensiones a lo largo del eje y .

$$\tau_{zz} = \frac{P}{2I} \left[a^2 + \frac{\nu}{1+\nu} \left(y^2 - \frac{b^2}{3} \right) \right] \quad (f)$$

Se observará que para un rectángulo estrecho la corrección de la fórmula elemental dada por el segundo término del corchete es siempre pequeña.

Si b es grande frente a a la deformación de la membrana en los puntos alejados de los lados cortos del rectángulo, puede ser considerada función lineal de y , de donde según la ecuación (b) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \\ \phi &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{2I} (x^2 - a^2) \end{aligned} \quad (g)$$

Sustituyendo en (c), las componentes de la tensión tangencial son:

$$\tau_{zz} = \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{P}{2I} (a^2 - x^2), \quad \tau_{yz} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} xy$$

En el baricentro de la sección recta ($x = y = 0$),

$$\tau_{zz} = \frac{1}{1+\nu} \frac{Pa^2}{2I}, \quad \tau_{yz} = 0$$

que comparada con la solución elemental da una tensión reducida en $1/(1+\nu)$.

Para satisfacer la condición de contorno en los lados cortos del rec-

táculo tomaremos como función de tensión la siguiente expresión en lugar de la (g):

$$\phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2) [1 - e^{-(b-y)m}] \quad (h)$$

en la que m debe ser determinada con arreglo a la condición de mínima energía (véase el § 97). De esta manera obtenemos:

$$m = \frac{1}{2a} \sqrt{10}$$

Con este valor de m y empleando la ecuación (h) podemos calcular con suficiente exactitud la tensión tangencial máxima, la cual se presenta en el centro de los lados menores del rectángulo.

Si ambos lados del rectángulo son del mismo orden de magnitud, podemos obtener una solución aproximada de forma polinómica para la distribución tensional, dando a la función de tensión la forma:

$$\phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(my + ny^3) \quad (k)$$

Calculando los coeficientes m y n mediante la condición de mínima energía obtenemos¹

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^2} \left(\frac{1}{7} + \frac{3a^2}{5b^2} \right) \left(\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2} \right) + \frac{1}{21} + \frac{9a^2}{35b^2} \\ n &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^4} \left(\frac{1}{7} + \frac{3a^2}{5b^2} \right) \left(\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2} \right) + \frac{1}{21} + \frac{9a^2}{35b^2} \end{aligned}$$

Las tensiones tangenciales calculadas con la fórmula (k) son:

$$\begin{aligned} (\tau_{zz})_{x=0, y=0} &= \frac{Pa^2}{2I} + ma^2b^2 \\ (\tau_{zz})_{x=a, y=b} &= \frac{Pa^2}{2I} - 2a^2b^2(m + nb^2) \end{aligned} \quad (l)$$

Los valores aproximados de la tensión tangencial dados en la segunda línea de la tabla de la página 365 han sido calculados usando estas fórmulas. Como puede verse las fórmulas aproximadas (l) dan una exactitud satisfactoria para este orden de valores de la relación a/b .

Si la anchura del rectángulo es grande comparada con su altura la tensión máxima es muy superior al valor $3P/2A$, dado por la teoría elemental. Por otra parte si b/a es mayor de 15 la tensión máxima deja de

¹ Véase Timoshenko, loc. cit.

ser la componente τ_{xz} en los puntos medios de los lados verticales ($x = 0$, $y = \pm b$), siéndolo la componente horizontal τ_{yz} en los puntos $x = a$, $y = \pm \eta$, pertenecientes a los bordes superior e inferior y próximos a los vértices. Los valores de estas tensiones son dados en la tabla¹ siguiente: Los valores de η aparecen en la forma $(b - \eta)/2a$ en la última columna, siendo $b - \eta$ la distancia entre el vértice y el punto donde se da la tensión máxima.

$\frac{b}{a}$	$\frac{(\tau_{xz})_{x=0, y=b}}{3P/2A}$	$\frac{(\tau_{yz})_{x=a, y=\eta}}{3P/2A}$	$\frac{b - \eta}{2a}$
0	1,000	0,000	0,000
2	1,39(4)	0,31(6)	0,31(4)
4	1,988	0,968	0,522
6	2,582	1,695	0,649
8	3,176	2,452	0,739
10	3,770	3,226	0,810
15	5,255	5,202	0,939
20	6,740	7,209	1,030
25	8,225	9,233	1,102
50	15,650	19,466	1,322

110. Resultados complementarios. Consideremos el caso de una sección transversal limitada por las dos rectas verticales $y = \pm a$ (fig. 189) y las dos hipérbolas²

$$(1 + \nu)x^2 - \nu y^2 = a^2 \quad (a)$$

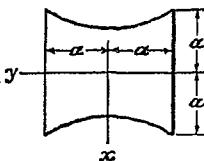


FIG. 189

Es fácil demostrar que esta ecuación anula el segundo miembro de la (173) si tomamos

$$f(y) = \frac{P}{2I} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} y^2 + \frac{a^2}{1 + \nu} \right)$$

Sustituyendo en (172) resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

ecuación que junto con la condición de contorno (173) queda satisfecha haciendo $\phi = 0$. Las componentes de la tensión tangencial deducidas, según (171), serán entonces:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{P}{2I} \left(-x^2 + \frac{\nu}{1 + \nu} y^2 + \frac{a^2}{1 + \nu} \right) \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

La tensión tangencial es, pues, vertical en todo punto de la sección transversal y su valor máximo que se da en el punto medio de los lados verticales es:

$$\tau_{\max} = \frac{Pa^2}{2I}$$

¹ E. Reissner y G. B. Thomas, *J. Math. Phys.*, vol. 25, pág. 241, 1946.

² Este problema fue estudiado por F. Grashof, *Elastizität und Festigkeit*, pág. 246, 1878.

El problema puede también resolverse fácilmente si el contorno de la sección transversal viene dado por la ecuación:

$$\left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad a > x > -a \quad (b)$$

Para $\nu = 1/4$ ese contorno tiene la forma mostrada en la figura 190.

Haciendo:

$$f(y) = \frac{Pa^2}{2I} \left[1 - \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right]$$

el primer miembro de la condición de contorno (173) se anula, lo que significa que ϕ debe ser constante a lo largo del perímetro. La ecuación (172) toma entonces la forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} \pm \frac{Pa^2}{2bI\nu} \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}-1}$$

Esta ecuación y la condición de contorno quedan satisfechas tomando:

$$\phi = \frac{Pa^2\nu}{2(1 + \nu)I} \left[y \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \pm b \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}+1} \right]$$

que llevada a las ecuaciones (171) nos da:

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2(1 + \nu)I} (a^2 - x^2), \quad \tau_{yz} = -\frac{P\nu}{(1 + \nu)I} xy \quad (c)$$

Podemos llegar al mismo resultado de distinta forma. Al estudiar las tensiones que se producen en una viga rectangular, cuya anchura es grande comparada con su altura, emplearnos como solución aproximada para la función de tensión [ecuación (g), § 109] la expresión:

$$\phi = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2)$$

de la cual pueden deducirse las fórmulas (c) de las componentes de la tensión. Podemos obtener ahora la ecuación del contorno partiendo de la condición de que la dirección de la tensión tangencial coincida con la de la tangente a la periferia. Tenemos entonces:

$$\frac{dx}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{\tau_{yz}}$$

Sustituyendo (c) e integrando obtenemos la siguiente ecuación para el contorno:

$$y = b(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

El método de la energía (§ 109) permite obtener en muchos otros casos soluciones aproximadas. Consideremos, por ejemplo, la sección recta mostrada en la figura 191. Los lados verticales del contorno vienen dados por la ecuación $y = \pm b$ y los otros dos son arcos de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (d)$$

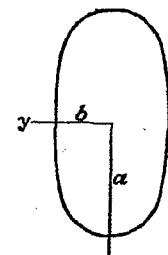


FIG. 190

El segundo miembro de la ecuación (173) se anula para:

$$f(y) = \frac{P}{2I}(r^2 - y^2)$$

Una expresión aproximada para la función de tensión será entonces:

$$\phi = (y^2 - b^2)(x^2 + y^2 - r^2)(Ay + By^3 + \dots)$$

en la cual los coeficientes A, B, \dots , han de ser calculados con arreglo a la condición de mínima energía.

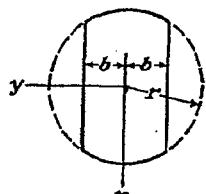


FIG. 191

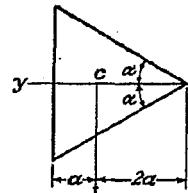


FIG. 192

Las soluciones correspondientes a secciones transversales de otras muchas formas han sido obtenidas empleando coordenadas curvilíneas y funciones de variable compleja. Entre los casos estudiados se encuentran los de secciones limitadas por dos círculos, concéntrico¹ o no², un círculo con ranuras radiales³, una cardiode⁴, un limacon⁵, un limacon elíptico⁶, dos elipses homofocales⁷ y una elipse y una hipérbola homofocales⁸, triángulos y polígonos⁹ incluyendo un rectángulo con ranuras¹⁰ y un sector de un anillo circular¹¹.

111. Secciones transversales no simétricas. Empecemos considerando el caso de un triángulo isósceles (fig. 192). La ecuación de su contorno es:

$$(y - a)[x + (2a + y)\operatorname{tg} \alpha][x - (2a + y)\operatorname{tg} \alpha] = 0.$$

El segundo miembro de la ecuación (173) se anula si tomamos:

$$f(y) = \frac{P}{2I}(2a + y)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

¹ Véase A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 335, y I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, pág. 253.

² B. R. Seth, *Proc. Indian Acad. Sci.*, vol. 4, sec. A, pág. 531, 1936 y vol. 5, pág. 23, 1937.

³ W. M. Shepherd, *Proc. Roy. Soc. London*, serie A, vol. 138, pág. 607, 1932; L. A. Wigglesworth, *Proc. (London) Math. Soc.*, serie 2, vol. 47, pág. 20, 1940, y *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 170, pág. 365, 1939.

⁴ W. M. Shepherd, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 154, pág. 500, 1936.

⁵ D. L. Holl y D. H. Rock, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 19, pág. 141, 1939.

⁶ A. C. Stevenson, *Proc. London Math. Soc.*, serie 2, vol. 45, pág. 126, 1939.

⁷ A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 336.

⁸ B. G. Galerkin, *Bull. Inst. Engineers of Ways of Communication*, San Petersburgo, 96, 1927. Véase también S. Ghosh, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 27, pág. 7, 1935.

⁹ B. R. Seth, *Phil. Mag.*, vol. 22, pág. 582, 1936 y vol. 23, pág. 745, 1937.

¹⁰ D. F. Gunders, *Physics*, vol. 6, pág. 38, 1935.

¹¹ M. Seeger y K. Pearson, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 96, pág. 211, 1920.

y la (172), que determina la función de tensión ϕ resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I} (2a + y) \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (a)$$

El método energético permite obtener una solución aproximada. En el caso particular en que:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{1}{3} \quad (b)$$

se llega a la solución exacta de la ecuación (a), tomando para la función de tensión la expresión:

$$\phi = \frac{P}{6I} \left[x^2 - \frac{1}{3} (2a + y)^2 \right] (y - a)$$

Las componentes de la tensión obtenidas aplicando las ecuaciones (171) son:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{P}{6I} (2a + y)^2 = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4} [-x^2 + a(2a + y)] \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4} x(a - y) \end{aligned} \quad (c)$$

A lo largo del eje y ($x = 0$) la tensión tangencial resultante es vertical y viene dada por la función lineal.

$$(\tau_{yz})_{x=0} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^3} (2a + y)$$

El valor máximo de la misma, que se presenta en el punto medio del lado vertical de la sección, es:

$$\tau_{\max} = \frac{2\sqrt{3}P}{9a^2} \quad (d)$$



FIG. 193

Calculando el momento producido por las tensiones tangenciales (c) respecto al eje z veremos, que en este caso, la fuerza tangencial resultante pasa por el baricentro C de la sección recta.

Consideremos ahora el caso más general de una sección transversal con un eje horizontal de simetría (fig. 193), cuyas porciones superior e inferior tengan el contorno dado por:

$$\begin{array}{lll} x = \psi(y) & \text{para} & x > 0 \\ x = -\psi(y) & \text{para} & x < 0 \end{array}$$

La función:

$$[x + \psi(y)][x - \psi(y)] = x^2 - [\psi(y)]^2.$$

se anula entonces, y en las expresiones (171) de las componentes de la tensión podemos poner:

$$f(y) = \frac{P}{2I} [\psi(y)]^2$$

La función de tensión, en consecuencia, tendrá que satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I} \psi(y) \frac{d\psi}{dy}$$

y ser constante en el contorno. Nuestro problema se reduce a la obtención de las deformaciones de una membrana, uniformemente estirada y sometida a una carga cuya intensidad viene dada por el segundo miembro de la ecuación anterior. Por lo general, como ya hemos visto para el caso de la sección rectangular estrecha, este último problema puede ser resuelto con suficiente exactitud aplicando el método de la energía.

El caso representado en la figura 194 puede ser tratado de forma similar. Supongamos, por ejemplo, que la sección transversal sea un segmento parabólico y que la ecuación de la parábola sea:

$$x^2 = A(y + a)$$

Tomando:

$$f(y) = \frac{P}{2I} \cdot A(y + a)$$

FIG. 194

el primer factor, del segundo miembro de la ecuación (173) se anulará en la porción parabólica del contorno. A lo largo de la porción recta se anula el factor d^2y/ds^2 . Obtenemos, pues, una vez más, que la función de tensión es constante a lo largo del contorno y que el problema puede ser tratado por el método de la energía.

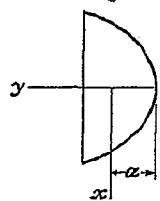
112. Centro de flexión o centro de cortadura. Al estudiar el problema de la flexión de una pieza en voladizo, hemos tomado como eje z la línea que pasa por los baricentros de las secciones de la barra y como ejes x e y los ejes principales de la sección fija de la pieza. Hemos supuesto asimismo que la fuerza P es paralela al eje x y que la distancia de su línea de acción al baricentro es tal que no se produce torsión. Esta distancia, de importancia para los cálculos prácticos, se obtiene fácilmente si se conocen las tensiones representadas por las ecuaciones (171). Evaluemos, en efecto el momento respecto al baricentro producido por las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} . Este momento será evidentemente:

$$M_z = \iint (\tau_{xz}y - \tau_{yz}x) dx dy \quad (a)$$

Observando que las tensiones repartidas sobre la sección terminal de la barra son estáticamente equivalentes a la fuerza P se deduce que la distancia d de la fuerza P al baricentro, es:

$$d = \frac{|M_z|}{P} \quad (b)$$

siendo M_z positivo si la distancia d es tomada en el sentido positivo del eje y . En el estudio precedente hemos supuesto que la fuerza aplicada era paralela al eje x .



Cuando la fuerza P es paralela al eje y , en lugar de al eje x , podemos establecer, de manera análoga, la posición de la línea de acción de P para la cual no se dé ninguna rotación de los elementos de las secciones transversales que contienen a los baricentros. La intersección de estas dos líneas de acción de las fuerzas de flexión, determina un punto que es de interés considerar. Si en ese punto se aplica una fuerza perpendicular al eje de la viga podremos descomponerla según sus componentes paralelas a los ejes x e y y basándonos en el estudio anterior llegamos a la conclusión de que los elementos situados en el centro de gravedad de las secciones no sufrirán ninguna rotación. Este punto recibe el nombre de *centro de flexión* o *centro de cortadura*.

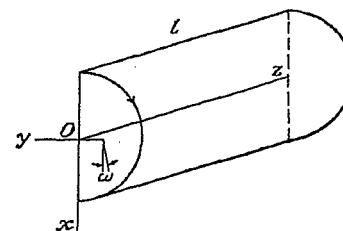


FIG. 195

Si la sección transversal de la viga tiene dos ejes de simetría, se ve fácilmente que el centro de flexión coincidirá con el baricentro de dicha sección. Si solamente existe un eje de simetría se deduce que por razones de simetría, el centro de flexión estará en dicho eje. Tomándolo como eje y podremos calcular mediante la ecuación (b), la posición del centro de flexión.

Consideremos, por ejemplo, la sección semicircular¹ representada en la figura 195. Las tensiones tangenciales pueden obtenerse empleando la solución correspondiente al caso de vigas de sección circular (véase la ecuación 174, pág. 359), en el que las tensiones actúan sobre la sección diametral vertical xz con cero. Podemos, pues, imaginar a la viga circular dividida por el plano xz en dos mitades que representan dos vigas semicirculares flectadas por la fuerza $P/2$. Las tensiones vienen dadas por la ecuación (174). Sustituyendo en (a), integrando y dividiendo M_z por $P/2$ obtenemos para la distancia de flexión al punto O el valor:

$$e = \frac{2M_z}{P} = \frac{8}{15\pi} \frac{3+4\nu}{1+\nu} r$$

¹ Véase S. Timoshenko, *Bull. Inst. Engineers of Ways of Communications*, San Petersburgo, 1913. Parece ser que es en este artículo donde se ha estudiado por primera vez el desplazamiento de la fuerza de flexión del baricentro de la sección recta.

el cual define la posición de la fuerza para la que el elemento de sección recta que contiene al punto O , centro del círculo, no gira. Simultáneamente el elemento que contiene al baricentro de la sección semicircular girará la cantidad [véase la ecuación (b), pág. 358]

$$\omega = \frac{\nu P(l-z)}{EI} \cdot 0,424r$$

donde $0,424r$ es la distancia del origen O al baricentro del semicírculo. Para eliminar esta rotación es preciso aplicar un par, en la forma que se indica en la figura 195. El valor de ese par se obtiene haciendo uso de la tabla de la página 317, la cual da para una sección semicircular el siguiente ángulo de torsión

$$\theta = \frac{M_t}{0,296Gr^4}$$

La condición de rotación nula de los elementos situados en los baricentros de las secciones rectas se traduce entonces por:

$$\frac{M_t(l-z)}{0,296Gr^4} = \frac{\nu P(l-z)}{EI} \cdot 0,424r$$

y

$$M_t = \frac{\nu P \cdot 0,296r^4 \cdot 0,424r}{2(1+\nu)I}$$

Se obtendrá este par desplazando la fuerza de flexión $P/2$ hacia el eje de las z la distancia:

$$\delta = \frac{2M_t}{P} = \frac{8\nu \cdot 0,296 \cdot 0,424r}{2(1+\nu)\pi}$$

Esta cantidad restada del valor e , previamente obtenido, nos da la distancia del centro de flexión al centro O del círculo. Suponiendo que $\nu = 0,3$, se tiene:

$$e - \delta = 0,548r - 0,037r = 0,511r$$

En secciones tales como la de la figura 193, las componentes de la tensión tangencial son:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{P}{2I} [x^2 - \psi^2(y)], \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Resulta entonces:

$$M_z = \iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dx dy - \frac{P}{2I} \iint [x^2 - \psi^2(y)] y dx dy \quad (c)$$

Integrando por partes y observando que ϕ se anula en el contorno $y = \pm \psi(y)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dx dy &= -2 \iint \phi dx dy \\ \iint [x^2 - \psi^2(y)] dx &= \frac{2}{3} \psi^3(y) - 2\psi^3(y) = -\frac{4}{3} \psi^3(y) \\ \iint [x^2 - \psi^2(y)] y dx dy &= -\frac{4}{3} \int y \psi^3(y) dy \\ I = \iint x^2 dx dy &= \frac{2}{3} \int \psi^3(y) dy \end{aligned}$$

Sustituyendo en (c) y dividiendo por P resulta

$$d = \frac{|M_z|}{P} = \left| -\frac{2}{P} \iint \phi dx dy + \frac{\iint y \psi^3(y) dy}{\iint \psi^3(y) dy} \right|$$

Conociendo $\psi(y)$ y determinando ϕ mediante la analogía de la membrana, podremos calcular¹ siempre, con suficiente exactitud, la posición del centro de flexión para estas secciones transversales.

La cuestión del centro de flexión es de particular importancia en los casos de secciones abiertas de pared delgada. Su posición puede ser determinada fácilmente, con suficiente aproximación, suponiendo que las tensiones tangenciales se distribuyen uniformemente a través del espesor de la pared y que son paralelas a la superficie media de la pared².

La posición del centro de flexión depende únicamente de la forma geométrica de la sección. La situación del centro de torsión, por el contrario (véase la pág. 308) depende de la forma en que es sujetada la barra. Eligiendo convenientemente la forma de sujeción podemos hacer coincidir el eje de centros de torsión con el de centros de flexión. Puede demostrarse que esto ocurre cuando la sujeción de la pieza es tal que la integral $\iint w^3 dx dy$ extendida a la sección recta es un mínimo³ siendo w el desplazamiento de alabeo de torsión (indeterminado en una función lineal de x e y mientras no se aplique esta condición). En la práctica, la fijación perturbará la repartición de tensiones en la vecindad del extremo fijo, cosa ésta que ocurre, por ejemplo, cuando se impiden por completo los desplazamientos de la sección extrema. En este caso, si consideramos a la fuerza de flexión como localizada en el centro de flexión y produciendo una rotación nula, el teorema de reciprocidad (véase la pág. 274) muestra que la aplicación de un par producirá un desplazamiento nulo de ese centro. Esto indica que el centro de torsión coincide con el centro de flexión⁴. Este argumento no tiene más que un carácter aproximado puesto que la existencia del centro de torsión depende de la ausencia de deformación de las secciones rectas en su plano, condición ésta que no es cumplida en la zona perturbada próxima al extremo fijo.

¹ Ejemplos de cálculos de este tipo pueden verse en la obra de L. S. Leibenson, *Variational Methods for Solving Problems of the Theory of Elasticity*, Moscú, 1943.

² Pueden encontrarse referencias en S. Timoshenko *Strength of Materials*, 2.^a edición, vol. 2, pág. 55.

³ R. Kappus, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 19, pág. 347, 1939; A. Weinstein, *Quart. Applied Math.*, vol. 5, pág. 79, 1947.

⁴ Véase R. V. Southwell, *Introduction to the Theory of Elasticity*, pág. 29; W. J. Duncan, D. L. Ellis y C. Scruton, *Phil. Mag.*, vol. 16, pág. 201, 1933.

113. Resolución de los problemas de flexión por el método de la película de jabón. La solución exacta de los problemas de torsión no se conoce más que para unos pocos casos en los que la sección recta es de forma sencilla. Es por ello muy importante, de cara a las aplicaciones prácticas, disponer de métodos de resolución para cualquier tipo de sección recta. Unos de ellos son los métodos numéricos basados en las ecuaciones en diferencias finitas, que son explicados en el apéndice, y otro el método experimental de la película de jabón¹, análogo al empleado para la resolución de los problemas de torsión (véase la pág. 327). Para deducir las fórmulas correspondientes a este método emplearemos las ecuaciones (171), (172) y (173) (véase el § 106). Tomando:

$$f(y) = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I}$$

la ecuación de la función de tensión (172), es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

que es la misma que la correspondiente a una membrana uniformemente estirada y sin carga (véase la pág. 308). La condición de contorno (173) se transforma en:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \right] \frac{dy}{ds} \quad (b)$$

Integrando a lo largo del contorno s , se obtiene la expresión:

$$\phi = \frac{P}{I} \int \frac{x^2 dy}{2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} + \text{constante} \quad (c)$$

que permite obtener el valor de ϕ para todo punto del contorno. La integral $\int(x^2/2)dy$, cuando es tomada a lo largo del contorno, se anula ya que representa el momento de la sección transversal respecto al eje y , el cual pasa por el baricentro de la misma. La función ϕ calculada mediante la expresión (c) está representada a lo largo del contorno por una curva cerrada.

Supongamos ahora que la película de jabón es estirada de tal forma que su borde coincide con dicha curva. La superficie de la película satisface entonces la ecuación (a) y la condición de contorno (c) y sus ordenadas representarán la función ϕ , en todo punto de la sección transversal, a la escala empleada para representar ϕ a lo largo del contorno (ecuación (c)).

La fotografía 196a ilustra uno de los métodos empleados para cons-

¹ Este método fue señalado por primera vez por Vening Meinesz, *De Ingenieur*, pág. 108, Holanda, 1911. Independientemente fue desarrollado por A. A. Griffith y G. I. Taylor, *Tech. Rept. Natl. Advisory Comm. Aeronaut.*, vol. 3, pág. 950, 1917-1918, de donde se han tomado los resultados que aquí damos.

truir el contorno de la película de jabón. En una lámina de celuloide se practica un agujero de forma tal que después de deformada aquélla, la proyección del borde del orificio sobre un plano horizontal, tiene igual

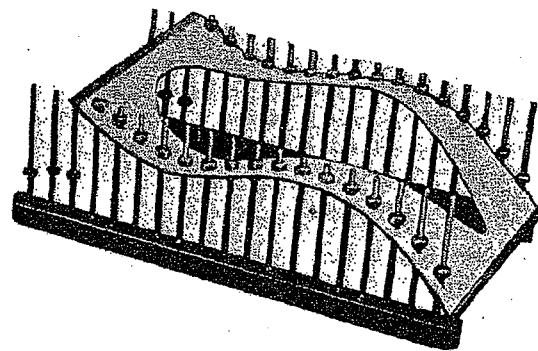


FIG. 196a

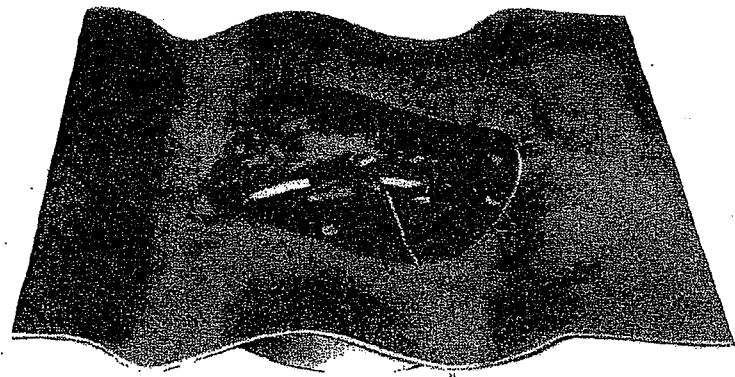


FIG. 196b

forma que el contorno de la sección recta de la viga. La lámina viene fijada por unas clavijas verticales y su posición se ajusta con tuercas y arandelas hasta que las ordenadas de los puntos del borde del orificio representan, a cierta escala, los valores de ϕ dados por la expresión (c). La fotografía 196b ilustra otro método para materializar el contorno que hace uso de

delgadas láminas de latón recocido¹. Las pequeñas correcciones de las ordenadas en los distintos puntos del orificio se obtienen deformándolo ligeramente.

La analogía entre las ecuaciones de la película de jabón y del problema de la flexión se mantiene rigurosamente, solamente si las deformaciones de la membrana son infinitamente pequeñas. Al realizar el ensayo es conveniente que el orden de magnitud de las ordenadas de la película no sea superior a un décimo de la máxima dimensión horizontal. En caso necesario el intervalo de variación de la función a lo largo del contorno puede reducirse introduciendo una nueva función ϕ_1 , en lugar de ϕ , ligada a ella por la relación:

$$\phi = \phi_1 + ax + by \quad (d)$$

donde a y b son constantes arbitrarias. Puede observarse que la función ϕ_1 satisface también la ecuación de la membrana (a). Los valores a lo largo del contorno de ϕ_1 , deducidos de (c) y (d) son:

$$\phi_1 = \frac{P}{I} \int \frac{x^2}{2} dy - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} - ax - by + \text{constante}$$

La reducción del intervalo de variación de ϕ_1 , a lo largo del contorno, se obtiene por lo general ajustando de forma adecuada las constantes a y b .

Determinada la función ϕ_1 mediante el método de la película de jabón, obtenemos la función ϕ a partir de la ecuación (d). Una vez conocida la función de tensión ϕ las componentes de la tensión se obtienen aplicando las ecuaciones (171) que ahora toman la forma:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \\ \tau_{yz} &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (e)$$

Las componentes de la tensión pueden ser calculadas ahora fácilmente en cada uno de los puntos de la sección transversal siempre que se conozcan los valores de las derivadas $\partial \phi / \partial x$ y $\partial \phi / \partial y$ en ese punto. Estas derivadas vienen dadas por las pendientes de la película de jabón según las direcciones x e y . Para determinar tales pendientes procedemos, como en el caso de los problemas de torsión, trazando en primer lugar las curvas de nivel de la superficie de la película. Una vez trazadas esas curvas, las pendientes se obtienen dibujando rectas paralelas a los ejes coordenados y construyendo las curvas que representan las secciones correspondientes de la película de jabón. Las pendientes así obtenidas son introducidas en las expresiones (e) de las componentes de la tensión tangencial. La exactitud de este procedimiento, puede ser comprobada calculando la resul-

tante de todas las tensiones tangenciales distribuidas en la sección transversal. Esta resultante deberá ser igual a la fuerza P que actúa sobre el extremo de la ménsula.

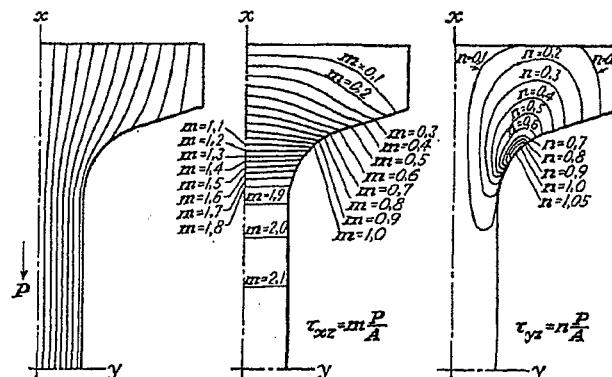


FIG. 197

Los experimentos realizados muestran que el método de la película de jabón permite determinar las tensiones con suficiente exactitud. Las figuras 197 muestran los resultados obtenidos para una sección en I¹, observándose en las mismas que las hipótesis de la teoría elemental, según las cuales el alma de una viga en I absorbe la mayor parte de la fuerza tangencial, y las tensiones tangenciales son constantes a través del ancho del alma, son completamente confirmadas. La máxima tensión tangencial en el plano neutro, concuerda muy bien con la calculada aplicando la teoría elemental. La componente τ_{yz} es prácticamente nula en el alma, alcanzando el valor máximo en el ángulo entrante. Ese valor depende del radio de la curva de transición de dicho ángulo. Para las proporciones tomadas en este ejemplo, llega a ser tan sólo la mitad del valor máximo de τ_{xz} en el plano neutro. En las figuras han sido trazadas las curvas de igual tensión tangencial y se indica el valor de la relación entre estas componentes y la tensión tangencial media P/A . La concentración de tensiones en el ángulo entrante ha sido estudiada para el caso de una viga en T. El radio de la curva de transición fue aumentando gradualmente y las curvas de nivel fueron trazadas en cada caso. De esta forma se observó que la tensión máxima en el ángulo se hace igual a la tensión máxima del alma cuando el radio de la curva de transición es aproximadamente 1/16 del espesor del alma.

¹ Véase el trabajo de P. A. Cushman, *Trans. A.S.M.E.*, 1932.

¹ Por la simetría del problema basta con considerar una cuarta parte de la sección.

114. Desplazamientos. Una vez conocidas las componentes de la tensión, los desplazamientos u , v , w , pueden ser calculados de igual forma que en el caso de la flexión simple (véase el § 88). Consideremos la curva de deflexión de la pieza en voladizo. Las curvaturas de esta línea en los planos xz e yz están dadas con suficiente exactitud por los valores de las derivadas $\partial^2 u / \partial z^2$ y $\partial^2 v / \partial z^2$ para $x = y = 0$. Estas cantidades pueden ser calculadas mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = \frac{P(l-z)}{EI} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (a)$$

Como puede verse, la fibra axial de la ménsula se deforma en el plano xz , que es el plano en el que actúan las fuerzas, y la curvatura en cualquier punto es proporcional al momento flector en ese punto tal como se supone en la teoría elemental de la flexión. Integrando la primera de las ecuaciones (a) resulta:

$$u = \frac{Plz^2}{2EI} - \frac{Pz^3}{6EI} + cz + d \quad (b)$$

donde c y d son constantes de integración que deben ser determinadas con arreglo a las condiciones del extremo fijo de la pieza. Si la extremidad de la fibra axial está empotrada, u y du/dz serán nulas para $z = 0$ y las constantes c y d de la ecuación (b) serán entonces cero.

Las secciones transversales de la viga no permanecen planas sino que se alabeán como consecuencia de la acción de las tensiones tangenciales. El ángulo formado por la curva de deflexión y un elemento de la superficie de la sección alabeada es:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(\tau_{xz})_{z=0, y=0}}{G}$$

y puede calcularse, si se conocen las tensiones tangenciales en el baricentro.

115. Otros estudios sobre la flexión. En los párrafos precedentes hemos estudiado el problema de la flexión de una pieza en voladizo, cargada en su extremo libre por una fuerza transversal. Las soluciones obtenidas son las exactas, si las fuerzas exteriores se distribuyen sobre las secciones rectas extremas de la misma manera que las tensiones σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} , obtenidas en la solución. De no cumplirse esa exigencia, la distribución tensinal presentará irregularidades locales en las proximidades de los extremos de la viga, pero según el principio de Saint-Venant a suficiente distancia de los extremos, a distancias superiores a las dimensiones de la sección transversal, nuestras soluciones son suficientemente exactas. Usando el

mismo principio, podemos extender la aplicación de las ecuaciones anteriores a otros casos de carga y a otras condiciones de apoyo de vigas. Podemos admitir con suficiente exactitud que las tensiones en cualquier sección transversal de la viga, distante de los puntos de aplicación de las cargas, depende solamente de la magnitud del momento flector y de la fuerza cortante en esa sección y que pueden ser calculadas superponiendo las soluciones antes obtenidas para la viga en voladizo.

Si las fuerzas exteriores tienen direcciones distintas de las de los ejes principales de la sección recta de la viga, aquéllas podrán ser siempre descompuestas según las direcciones principales, siendo posible estudiar la flexión separadamente, en cada uno de los dos planos principales. Las tensiones y desplazamientos totales se obtendrán entonces, usando el principio de superposición.

Cerca de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores, se dan irregularidades en la distribución tensinal que ya han sido estudiadas para el caso de una sección rectangular estrecha (véase el § 36). Un estudio análogo para secciones transversales de otras formas, muestra que estas irregularidades tienen carácter local¹.

El problema de la flexión producida por cargas repartidas ha sido también resuelto para ciertos casos². Se ha demostrado que en tales casos el eje de la pieza sufre, por lo general, un alargamiento o un acortamiento como en el caso de piezas de sección rectangular estrecha (véase el § 21) ya estudiado. La curvatura de la fibra axial en estos casos deja de ser proporcional al momento flector, pero las correcciones a aplicar son lo suficientemente pequeñas como para poder ser despreciadas en los casos prácticos. En el caso, por ejemplo, de una viga circular flectada por su propio peso³, la curvatura del extremo fijo viene dada por la ecuación:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \left[1 - \frac{7 + 12\nu + 4\nu^2 a^2}{6(1+\nu)} \frac{a^2}{l^2} \right]$$

en la que a es el radio de la sección transversal y l la longitud de la pieza. El segundo término del corchete representa la corrección de la curvatura que nace de la repetición de la carga. Su valor, pequeño, es del orden de a^2/l^2 . Esta misma conclusión se aplica también a vigas, con otras formas de sección, flectadas por su propio peso⁴.

¹ Véase L. Pochhammer, *Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes*, Kiel, 1879. Véase también el trabajo de J. Dougall, *Trans. Roy. Soc. (Edinburgh)*, vol. 49, pág. 895, 1914.

² J. H. Michell, *Quart. J. Math.*, vol. 32, 1901; véase también K. Pearson, *ibid.*, vol. 24, 1889 y K. Pearson y L. N. G. Filon, *ibid.*, vol. 31, 1900.

³ Este problema es estudiado por A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 362, 1927.

⁴ El caso de una ménsula de sección transversal elíptica ha sido estudiado por J. M. Klinchieff, *Bull. Polytech. Inst.*, San Petersburgo, pág. 441, 1915.

13

Distribución tensional simétrica respecto al eje en un sólido de revolución

116. Ecuaciones generales. Muchos problemas de importancia práctica se refieren a cuerpos de revolución, que son deformados simétricamente respecto al eje. Los ejemplos más sencillos son los del cilindro circular sometido a una presión interior y exterior uniformes y el del disco circular giratorio (véase los §§ 26 y 30). Para resolver problemas de este tipo suele ser conveniente utilizar coordenadas cilíndricas [véanse las ecuaciones (170), pág. 344]. Siendo la deformación simétrica respecto al eje z , se deduce que las componentes de la tensión serán independientes del ángulo θ , anulándose, pues, todas las derivadas respecto a esta variable. Las componentes de la tensión tangencial $\tau_{r\theta}$ y $\tau_{\theta z}$ se anulan igualmente a causa de la simetría del problema. Las ecuaciones (170) se reducen entonces a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (177)$$

Las componentes de la deformación, para el caso de deformación simétrica respecto al eje, serán, según (169):

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (178)$$

Una vez más, resulta ventajoso introducir una función de tensión ϕ . Como puede verificarse por sustitución, las ecuaciones (177) quedan satisfechas si tomamos como componentes de la tensión las:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (179)$$

supuesto que la función de tensión ϕ , satisface a la ecuación:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (180)$$

El símbolo ∇^2 indica la operación

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (a)$$

que corresponde al operador de Laplace

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

en coordenadas cartesianas [véase la ecuación (d), pág. 82]. Es de advertir que la función ϕ no depende de θ , de forma que el tercer término de (a) resultará nulo cuando la operación es aplicada a ϕ .

Pasemos ahora las ecuaciones de compatibilidad (130) (véase la página 267) a coordenadas cilíndricas. Llamando θ al ángulo formado por r y el eje x tendremos [ecuación (13)]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (b)$$

donde no intervienen σ_z ni τ_{rz} .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta) \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \cos 2\theta (\sigma_r - \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (c)$$

Usando el símbolo Θ para la suma de las tres componentes normales de la tensión y aplicando la ecuación (b) de la página 82, resulta, que para una distribución simétrica de tensión:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad (d)$$

Sustituyendo (c) y (d) en la primera de las ecuaciones (130), obtenemos:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \right] \cos^2 \theta + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right] \sin^2 \theta = 0$$

ecuación que es válida para cualquier valor de θ , por lo que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} = 0 \quad (e)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0$$

Se llega al mismo resultado considerando la segunda de las ecuaciones (130), de manera que las ecuaciones (e) sustituirán a las dos primeras de (130) para el caso de una deformación simétrica. La tercera ecuación (130) conserva la misma forma en coordenadas cilíndricas.

Consideremos ahora las tres ecuaciones restantes del sistema (130), que contienen las componentes de la tensión tangencial. En el caso de deformación simétrica, sólo τ_{rz} es distinta de cero y las componentes τ_{xz} y τ_{yz} , que actúan sobre un plano perpendicular al eje z , se obtienen descomponiendo τ_{rz} según sus dos componentes paralelas a los ejes x e y :

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \cos \theta, \quad \tau_{yz} = \tau_{rz} \sin \theta$$

Tenemos, además:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} \cos \theta$$

$$\nabla^2 \tau_{rz} = \nabla^2 (\tau_{rz} \cos \theta) = \left(\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} \right) \cos \theta$$

Sustituyendo en la quinta ecuación del grupo (130), resulta:

$$\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} = 0 \quad (f)$$

y considerando la cuarta ecuación del grupo citado se llega al mismo resultado. En lo que se refiere a la última ecuación de (130), puede ser expresada en coordenadas cilíndricas, sustituyendo:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta$$

De esta forma, obtenemos:

$$(1 + \nu) \nabla^2 \left[\frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta \right] + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Theta = 0$$

ecuación, que resulta inmediatamente, si se resta una de las ecuaciones (e) de la otra. Las ecuaciones de compatibilidad (130) para el caso de una deformación simétrica respecto a un eje, expresadas en coordenadas cilíndricas, serán, pues:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (g)$$

Puede demostrarse que todas estas ecuaciones son satisfechas por las tensiones (179), cuando la función de tensión satisface la ecuación (180).

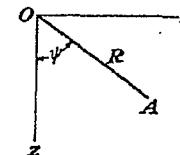


FIG. 198

Vemos pues, que el estudio de los problemas referentes a distribuciones tensionales simétricas respecto al eje, se reduce en cada caso particular a la obtención de la solución de la ecuación (180), que satisfaga las condiciones de contorno del problema¹.

¹ Este método, mediante el cual se expresan todas las componentes de la tensión en función de una función de tensión que satisface la ecuación (180), es explicado con detalle por A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 274, 1927. Otro método para tratar el problema, mediante una función de tensión, ha sido dado por J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, pág. 144, 1900. La relación que existe entre la función de tensión de los problemas bidimensionales y la estudiada en este capítulo ha sido considerada por C. Weber, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 5, 1925.

En algunos casos resulta útil expresar la ecuación (180) en coordenadas polares R y ψ (fig. 198), en lugar de las coordenadas cilíndricas r y z . Esta transformación puede realizarse fácilmente empleando las fórmulas del § 25, las cuales nos dan:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

Sustituyendo en la ecuación (180), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (181)$$

En los párrafos siguientes, faremos uso de esta ecuación con el fin de estudiar diversos problemas particulares con simetría axial.

Podemos resolver estos problemas de otra forma considerando explícitamente los desplazamientos. Las ecuaciones (178) permiten expresar las componentes de la tensión en función de los desplazamientos u y w . Sustituyendo estas funciones en (177), obtenemos dos ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden que contienen a u y w . El problema se reduce, entonces, a la resolución de esas dos ecuaciones.

117. Soluciones polinómicas. Consideraremos las soluciones de la ecuación (181), que al mismo tiempo lo son de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} = 0 \quad (182)$$

Una solución particular de esta última ecuación puede tomar la forma:

$$\phi_n = R^n \Psi_n \quad (a)$$

en la que Ψ_n es función del ángulo ψ solamente. Sustituyendo (a) en la ecuación (182), obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \Psi_n}{\partial \psi} \right) + n(n+1)\Psi_n = 0 \quad (b)$$

ecuación que puede simplificarse introduciendo una nueva variable $x = \cos \psi$. Entonces:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \sin \psi, \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} \sin^2 \psi - x \frac{\partial \Psi_n}{\partial x}$$

Sustituyendo en (b) resulta:

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} + n(n+1)\Psi_n = 0 \quad (183)$$

ecuación que resolveremos por medio de una serie¹. Suponiendo que:

$$\Psi_n = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \dots \quad (c)$$

y sustituyendo en (183), tendremos:

$$n(n+1)(a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \dots) = m_1(m_1+1)a_1 x^{m_1} \\ - m_1(m_1-1)a_1 x^{m_1-2} + m_2(m_2+1)a_2 x^{m_2} - m_2(m_2-1)a_2 x^{m_2-2} \\ + \dots \quad (d)$$

Para que esta ecuación sea satisfecha por cualquier valor de x , deben darse las siguientes relaciones entre los exponentes m_1, m_2, m_3, \dots

$$m_2 = m_1 - 2, \quad m_3 = m_2 - 2, \quad \dots$$

relaciones, de las que se sigue, que la serie (c) viene ordenada según las potencias decrecientes de x . El valor de m_1 será ahora determinado igualando los coeficientes de x^{m_1} en (d). Tenemos entonces:

$$n(n+1) - m_1(m_1+1) = (n-m_1)(m_1+n+1) = 0$$

que nos da para m_1 , las dos soluciones:

$$m_1 = n, \quad m_1 = -(n+1) \quad (e)$$

Para la primera de ellas, se tendrá:

$$m_1 = n, \quad m_2 = n-2, \quad m_3 = n-4, \quad \dots$$

Los coeficientes a_2, a_3, \dots , que figuran en (d), se obtienen igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias de x . Tomando, por ejemplo, los términos que contienen x^{m_1-2+2} , encontramos para el cálculo del coeficiente a_r la ecuación:

$$n(n+1)a_r = (m_1-2r+2)(m_1-2r+3)a_r \\ - (m_1-2r+4)(m_1-2r+3)a_{r-1}$$

que sustituyendo m_1 por n nos da:

$$a_r = - \frac{(n-2r+4)(n-2r+3)}{2(r-1)(2n-2r+3)} a_{r-1}$$

La serie (c) tomará, ahora, la forma:

$$\Psi_n = a_1 \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right] \quad (f)$$

¹ Conocida como *ecuación de Legendre*. Un estudio detallado de la misma puede verse en A. R. Forsyth, *A Treatise on Differential Equations*, pág. 155, 1903.

expresión que constituye una solución de la ecuación (183). Sustituyendo esta solución en (a) y recordando que:

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

se tendrá para n igual a 0, 1, 2, 3, ..., las siguientes soluciones polinómicas particulares de la ecuación (182):

$$\begin{aligned} \phi_0 &= A_0 \\ \phi_1 &= A_1 z \\ \phi_2 &= A_2 [z^2 - \frac{3}{5}(r^2 + z^2)] \\ \phi_3 &= A_3 [z^3 - \frac{3}{8}z(r^2 + z^2)] \\ \phi_4 &= A_4 [z^4 - \frac{9}{8}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{8}z^5(r^2 + z^2)^2] \\ \phi_5 &= A_5 [z^5 - \frac{15}{8}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{2}z^7(r^2 + z^2)^2] \\ &\dots \end{aligned} \quad (184)$$

Estos polinomios en los que A_0, A_1, \dots , son constantes arbitrarias, son también soluciones de la ecuación (181). De estas soluciones podemos obtener otras nuevas, de la ecuación (181), que no lo son de la (182). Si $R^n \Psi_n$ es una solución de la ecuación (182), puede demostrarse que $R^{n+2} \Psi_n$ lo es de la (181). Efectuando la operación indicada entre paréntesis en (181), se tendrá:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Psi_n = 2(2n+3)R^n \Psi_n \quad (g)$$

Si, como indica la ecuación (181), repetimos la misma operación, obtendremos cero ya que (g) es solución de (182). En consecuencia, $R^{n+2} \Psi_n$, es una solución de la ecuación (181). Puede verse, también, que multiplicando las soluciones (184) por $R^2 = r^2 + z^2$, obtenemos las siguientes soluciones nuevas:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= B_2(r^2 + z^2) \\ \phi_3 &= B_3 z(r^2 + z^2) \\ \phi_4 &= B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2) \\ \phi_5 &= B_5(2z^3 - 3r^2 z)(r^2 + z^2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (185)$$

118. Flexión de una placa circular. Entre los diversos problemas de interés práctico que pueden ser resueltos mediante las soluciones anteriormente expresadas, se encuentran algunos casos de placas circulares, flectadas por cargas simétricamente aplicadas (fig. 199). Tomando, por ejemplo, los polinomios de tercer grado de (184) y (185), obtenemos la función de tensión

$$\phi = a_3(2z^3 - 3r^2 z) + b_3(r^2 z + z^3) \quad (a)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (179), resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3, & \sigma_z &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3 \\ \sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, & \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (186)$$

expresiones que muestran que las componentes de la tensión son constantes en la placa. Ajustando convenientemente las constantes a_3 y b_3 , obtendremos las tensiones en una placa, cuando se nos da alguno de los valores constantes de σ_z y σ_r .

Tomemos ahora los polinomios de cuarto grado de (184) y (185), los cuales nos dan la función de tensión:

$$\phi = a_4(8z^4 - 24r^2 z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2 z^2 - r^4) \quad (b)$$

Sustituyendo en (179), obtendremos:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 96a_4 z + 4b_4(14\nu - 1)z \\ \sigma_z &= -192a_4 z + 4b_4(16 - 14\nu)z \\ \tau_{rz} &= 96a_4 r - 2b_4(16 - 14\nu)r \end{aligned} \quad (187)$$

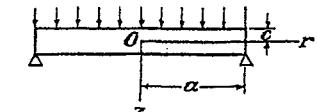


FIG. 199

Tomando:

$$96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$$

se tendrá:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4 z \quad (c)$$

Si z es la distancia contada desde el plano medio de la placa, la solución (c) representa un estado de flexión simple de la misma, causado por la acción de pares uniformemente distribuidos en su contorno.

Para obtener la solución correspondiente al caso de la placa uniformemente cargada, tomemos como función de tensión un polinomio de sexto grado. Procediendo en la forma indicada en el párrafo precedente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{6}a_6(16z^6 - 120z^4r^2 + 90z^2r^4 - 5r^6) \\ &\quad + b_6(8z^6 - 16z^4r^2 - 21z^2r^4 + 3r^6) \end{aligned}$$

que sustituyendo en (179) nos da:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_6(320z^3 - 720r^2 z) + b_6[64(2 + 11\nu)z^5 + (504 - 48 \cdot 22\nu)r^2 z] \\ \sigma_z &= a_6(-640z^3 + 960r^2 z) + b_6\{[-960 + 32 \cdot 22(2 - \nu)]z^5 \\ &\quad + [384 - 48 \cdot 22(2 - \nu)]r^2 z\} \\ \tau_{rz} &= a_6(960rz^2 - 240r^3) \\ &\quad + b_6[(-672 + 48 \cdot 22\nu)z^4 r + (432 - 12 \cdot 22\nu)r^3] \end{aligned}$$

A estas tensiones deberemos añadir las:

$$\sigma_r = .96a_4 z, \quad \sigma_z = -192a_4 z, \quad \tau_{rz} = 96a_4 r$$

obtenidas haciendo $b_4 = 0$ en (187), así como una tracción uniforme de dirección z , $\sigma_z = b$, que puede obtenerse de las fórmulas (186). Llegamos de ésta forma a unas expresiones de las componentes de la tensión, que contienen cuatro constantes a_0 , b_0 , a_4 , b , que pueden ser evaluadas, de forma tal, que queden satisfechas las condiciones de contorno en las caras superior e inferior de la placa (fig. 199). Estas condiciones son:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 0 && \text{para } z = c \\ \sigma_z &= -q && \text{para } z = -c \\ \tau_{rz} &= 0 && \text{para } z = c \\ \tau_{rz} &= 0 && \text{para } z = -c\end{aligned}\quad (d)$$

donde q representa la intensidad de la carga uniforme y $2c$ es el espesor de la placa. Sustituyendo las expresiones de las componentes de la tensión en estas ecuaciones, determinamos las cuatro constantes a_0 , b_0 , a_4 , b . Usando los valores obtenidos, llegamos a las siguientes expresiones para las componentes de la tensión, que satisfacen las condiciones (d):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3 z}{8 c} \right] \\ \sigma_z &= q \left(-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3 z}{4c} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2)\end{aligned}\quad (e)$$

Se verá que las tensiones σ_z y τ_{rz} , se distribuyen de forma exactamente igual que en el caso de una viga rectangular estrecha uniformemente cargada (§ 21). Las tensiones radiales σ_r , vienen representadas por una función impar de z y originan en el contorno de la placa momentos uniformemente distribuidos. Para obtener la solución en el caso de una placa simplemente apoyada (fig. 199), superponemos la tensión de flexión simple (c) y determinamos la constante b_4 , de forma tal que en el contorno ($r = a$):

$$\int_{-a}^a \sigma_r z dz = 0$$

La expresión final de σ_r , resulta:

$$\sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \quad (188)$$

que para el centro de la placa nos da el valor:

$$(\sigma_r)_{r=0} = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \quad (f)$$

La teoría elemental de la flexión de placas, basada en la suposición de que los elementos lineales de la placa perpendiculares al plano medio ($z = 0$), se conservan rectos y normales a la superficie deformada de dicha placa¹, da el siguiente valor para la tensión radial en el centro:

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} q \quad (g)$$

Comparando este resultado con (f), vemos que los términos adicionales de la solución exacta, son pequeños si el espesor de la placa, $2c$ es pequeño comparado con el radio a .

Es de advertir que la superposición de una flexión simple eliminará los momentos flectores aplicados en el contorno de la placa, pero no las tensiones radiales en ese mismo contorno cuyo valor es:

$$(\sigma_r)_{r=a} = q \left(\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} \right) \quad (h)$$

La resultante de estas tensiones por unidad de longitud de la periferia y su momento son, sin embargo, cero. Basándonos, pues, en el principio de Saint-Venant, podemos decir que la supresión de estas tensiones no altera la distribución tensinal en los puntos distantes del borde.

Tomando polinomios de orden superior al sexto para la función de tensión, podemos estudiar la flexión de placas circulares provocada por cargas distribuidas de manera no uniforme. Si en lugar de la solución (f) de la página 387, tomásemos la otra solución de la ecuación (182), podríamos obtener también las soluciones correspondientes a una placa circular con un agujero en el centro². Todas estas soluciones son satisfactorias, solamente si las flechas que alcanza la placa son pequeñas comparadas con su espesor. Para mayores deformaciones, deberá tenerse en cuenta la extensión que sufre el plano medio de la placa³.

119. Caso del disco giratorio considerado como problema tridimensional. En nuestro estudio anterior, (§ 30), hemos supuesto que las tensiones no variaban a través del espesor del disco. Consideremos ahora, el mismo problema, suponiendo solamente que la distribución tensinal es simétrica respecto al eje de rotación. Las ecuaciones diferenciales de equilibrio se obtienen añadiendo, en las ecuaciones (177), la fuerza centrífuga.

¹ Esta hipótesis es análoga a la de conservación de las secciones transversales planas de la teoría de la flexión de vigas. La teoría exacta de la flexión de placas fue desarrollada por J. M. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, 1900 y A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 465, 1927.

² A. Korobov, *Bull. Politech. Inst. Kiev*, 1913, ha estudiado algunas soluciones del caso de placa circular cargada uniformemente. Soluciones semejantes han sido obtenidas independientemente por A. Timpe, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 4, 1924.

³ Véase Kelvin y Tait, *Natural Philosophy*, vol. 2, pág. 171, 1903.

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (189)$$

dónde ρ es la densidad y ω la velocidad angular del disco.

Las ecuaciones de compatibilidad, deben ser cambiadas también. En lugar del sistema (130), tendremos tres ecuaciones del tipo (f) [véase la pág. 267] y tres del tipo (g). Sustituyendo en estas ecuaciones las componentes de la fuerza mísica

$$X = \rho \omega^2 x, \quad Y = \rho \omega^2 y, \quad Z = 0 \quad (a)$$

obtenemos, que las últimas tres ecuaciones que contienen las componentes tangenciales de la tensión, son las mismas que las del sistema (130) y que las tres primeras se convierten en [véase las ecuaciones (e), § 116]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu} \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{2\nu\rho\omega^2}{1-\nu} \end{aligned} \quad (b)$$

Comenzamos con una solución particular de las ecuaciones (189), que satisface las condiciones de compatibilidad y le superponemos soluciones de la forma polinómica (184) y (185), cuyos coeficientes determinaremos de manera que queden satisfechas las condiciones de contorno del problema. Como solución particular, tomamos las expresiones

$$\sigma_r = Br^2 + Dz^2, \quad \sigma_z = Ar^2, \quad \sigma_\theta = Cr^2 + Dz^2, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (c)$$

que como se ve satisfacen a la segunda de las ecuaciones de equilibrio, cumpliendo asimismo las condiciones de compatibilidad que contienen las componentes de la tensión tangencial [véanse las ecuaciones (f) y (g), § 116]. Falta ahora determinar las constantes A, B, C, D , de forma tal que satisfagan las restantes cuatro ecuaciones, es decir, la primera de las (189) y las (b). Sustituyendo (c) en estas ecuaciones, obtenemos

$$A = \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu}, \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}$$

La solución particular resulta entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\rho\omega^2}{3} r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2 \\ \sigma_z &= \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu} r^2 \\ \sigma_\theta &= -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (180)$$

Esta solución, puede ser utilizada al estudiar las tensiones existentes en cualquier cuerpo que gira alrededor de su eje de revolución.

En el caso de un disco circular, de espesor constante, añadimos a la solución (190) la distribución de tensiones, correspondientes a una función de tensión que tenga la forma de un polinomio de quinto grado [véanse las ecuaciones (184) y (185)].

$$\phi = a_5(8z^6 - 40r^2z^4 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z) \quad (d)$$

De las ecuaciones (179) deducimos

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54\nu)r^2 + (1 + 18\nu)6z^2] \\ \sigma_z &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(96 - 108\nu)z^2 + (-102 + 54\nu)r^2] \\ \sigma_\theta &= a_5(-60r^2 + 240z^2) + b_5[(6 + 108\nu)z^2 + (12 - 54\nu)r^2] \\ \tau_{rz} &= 480a_5rz - b_5(96 - 108\nu)r^2 \end{aligned} \quad (e)$$

Al añadiendo estas tensiones a las (190) y determinando las constantes a , y b , bajo la condición de que las tensiones resultantes τ_{rz} y σ_z desaparezcan, encontramos:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\rho\omega^2 \left[\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 + \frac{3+\nu}{8} r^2 \right] \\ \sigma_z &= -\rho\omega^2 \left[\frac{(1+3\nu)}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 \right] \end{aligned} \quad (f)$$

Para eliminar la compresión radial resultante que actúa a lo largo del contorno, es decir, para que

$$\left(\int_{-c}^c \sigma_r dz \right)_{r=a} = 0$$

añadimos a (f) una tracción radial, uniforme, de magnitud

$$\frac{\rho\omega^2}{8} (3+\nu)a^2 + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \frac{c^2}{3}$$

Las tensiones finales, por tanto, serán

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} (a^2 - r^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right] \\ \sigma_z &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} a^2 - \frac{1+3\nu}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right] \\ \sigma_\theta &= 0, \quad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (191)$$

Si se compara esta última con la solución (55), vemos que en la solución actual existen términos adicionales que contienen al factor¹ ($c^2 - 3z^2$). Las tensiones correspondientes son pequeñas para el caso de un disco delgado y su resultante es cero en su espesor. Si la superficie cilíndrica limitante de la rodaja estuviese libre de fuerzas exteriores, la solución (191) representa el estado de tensión en las partes del disco distantes de su borde.

La distribución tensinal en un disco giratorio que tenga la forma de un elipsoide de revolución achatado, ha sido estudiada por C. Chree².

¹ Estos términos son de igual naturaleza que los en z^2 encontrados en el § 84. Las ecuaciones (191) representan un estado tensinal plano, puesto que σ_x y τ_{xz} se anulan. La fuerza mísica (la fuerza centrífuga aquí), no incluida en el § 84, no altera las conclusiones generales, siempre que sea independiente de z .

² C. Chree, Proc. Roy. Soc. (London), vol. 58, pág. 39, 1895.

120. Sólido, de extensión indefinida cargado en uno de sus puntos. Al estudiar este problema, usamos de nuevo la ecuación (182) de la página 386. Tomando $m_1 = -(n+1)$ [véase la ecuación (e), página 387], obtenemos la segunda integral de la ecuación (183) bajo forma de la serie

$$\Psi_n = a \left[x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots \right]$$

Haciendo n igual a $-1, -2, -3, \dots$, resulta de esta última, las siguientes soluciones particulares de la ecuación (182)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_1(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \phi_2 &= A_2z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \phi_3 &= A_3[z^2(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}] \\ &\dots \end{aligned} \quad (192)$$

que también son soluciones de la ecuación (181). Multiplicando las expresiones (192) por $r^2 + z^2$ (véase la pág. 388), obtenemos otra serie de soluciones de la ecuación (181), a saber,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= B_1(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \phi_2 &= B_2z(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\dots \end{aligned} \quad (193)$$

Cada una de las soluciones (192) y (193) y cualquier combinación lineal de ellas, puede ser tomada como función de tensión, obteniéndose la solución de diversos problemas, mediante una elección conveniente de las constantes $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$

Para el caso de una fuerza concentrada, tomamos la primera de las soluciones (193) y suponemos que la función de tensión es

$$\phi = B(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

donde B es una constante a determinar. Sustituyendo en (179), deducimos las correspondientes componentes de la tensión

$$\begin{aligned} \sigma_r &= B[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 3r^2z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}] \\ \sigma_\theta &= B(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \sigma_z &= -B[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 3z^2(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}] \\ \tau_{rz} &= -B[(1 - 2\nu)r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 3rz^2(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (194)$$

Todas estas tensiones tienden a infinito cuando nos acercamos al origen de coordenadas, donde la fuerza concentrada está aplicada. Para evitar la

necesidad de considerar tensiones infinitas, suponemos que el origen es el centro de una pequeña cavidad esférica (fig. 200) y consideramos, que la superficie de esa cavidad está sometida a fuerzas calculadas con arreglo a las ecuaciones (194). Puede demostrarse, que la resultante de estas fuerzas

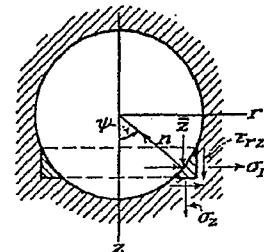


FIG. 200

representa una fuerza aplicada en el origen con la dirección del eje de las z . De la condición de equilibrio de un elemento anular adyacente a la cavidad (fig. 200), se deduce que la componente de las fuerzas superficiales según la dirección z es

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \operatorname{sen} \psi + \sigma_z \cos \psi)$$

Usando las ecuaciones (194) y las fórmulas

$$\operatorname{sen} \psi = r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \cos \psi = z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

obtenemos que

$$\bar{Z} = B[(1 - 2\nu)(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 3z^2(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}]$$

La resultante de estas fuerzas, aplicadas sobre la superficie de la cavidad, es

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{Z} \sqrt{r^2 + z^2} \cdot dz \cdot 2\pi r = 8B\pi(1 - \nu)$$

siendo nula la resultante de las fuerzas superficiales según la dirección radial, como se deduce por razones de simetría. Si P es el valor de la fuerza aplicada, tendremos

$$P = 8B\pi(1 - \nu)$$

Sustituyendo

$$B = \frac{P}{8\pi(1 - \nu)} \quad (195)$$

en las ecuaciones (194), obtenemos las tensiones producidas por una fuerza P aplicada en el origen según la dirección z ¹. Esta solución es la análoga tridimensional del problema bidimensional estudiado en el § 38.

Sustituyendo $z = 0$ en las ecuaciones (194), deducimos que no existen tensiones normales que actúen sobre el plano coordenado $z = 0$. Las tensiones tangenciales en el mismo plano son

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2} = -\frac{P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)r^2} \quad (a)$$

Estas tensiones son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia r desde el punto en cuestión al de aplicación de la carga.

121. Recipiente esférico sometido a una presión uniforme interior o exterior. Partiendo de la solución del párrafo precedente y por superposición, podemos obtener nuevas soluciones de interés práctico. Comencemos con el caso de dos fuerzas iguales y opuestas, que actúan sobre un cuerpo elástico de extensión indefinida en puntos separados entre sí la distancia pequeña d (fig. 201). Las tensiones producidas por la fuerza P , aplicada en el origen O , vienen determinadas por las ecuaciones (194)

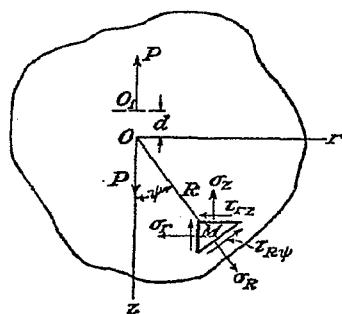


FIG. 201

y (195) del párrafo precedente. Asimismo, haciendo uso de las mismas ecuaciones, podemos calcular las tensiones producidas por la fuerza P , que actúa en O_1 . Recordando que la segunda fuerza es de dirección opuesta a la primera y considerando a la distancia d como infinitamente pequeña, los términos $f(r, z)$ de las expresiones (194), deberán ser remplazados por

¹ La solución de este problema fue dada por Lord Kelvin, *Cambridge and Dublin Math. J.*, 1848. Véase también *Mathematical and Physical Papers*, vol. 1, pág. 37. De esta solución se deduce que los desplazamientos correspondientes a las tensiones (194) son uniformes, lo que prueba que (194) es la solución correcta del problema (véase § 82).

$-[f + (\partial f / \partial z)d]$. Superponiendo las tensiones producidas por las dos fuerzas y representando mediante el símbolo A el producto Bd , resulta

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-1} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-1}] \\ \sigma_\theta &= -A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-1}] \\ \sigma_z &= A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-1} + 3z^2(r^2+z^2)^{-1}] \\ \tau_{rz} &= A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)r(r^2+z^2)^{-1} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-1}]\end{aligned}\quad (196)$$

Consideremos (fig. 201) las componentes de la tensión σ_R y $\tau_{R\psi}$, que actúan en un punto M de una superficie de área elemental normal al radio OM , cuya longitud designaremos por R . De la condición de equilibrio de un pequeño elemento triangular, tal como el indicado en la figura, obtenemos¹

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma_r \operatorname{sen}^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + 2\tau_{rz} \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ \tau_{R\psi} &= (\sigma_r - \sigma_z) \operatorname{sen} \psi \cos \psi - \tau_{rz}(\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)\end{aligned}\quad (a)$$

Usando (196) y tomando

$$\operatorname{sen} \psi = r(r^2+z^2)^{-1} = \frac{r}{R}, \quad \cos \psi = z(r^2+z^2)^{-1} = \frac{z}{R}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_R &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \left[-\operatorname{sen}^2 \psi + \frac{2(2-\nu)}{1+\nu} \cos^2 \psi \right] \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \operatorname{sen} \psi \cos \psi\end{aligned}\quad (b)$$

La distribución de estas tensiones es simétrica respecto al eje z y respecto al plano coordenado perpendicular a z .

Imaginemos ahora, que además del sistema de dos fuerzas P que actúan en la dirección del eje z , tenemos, en el origen, un sistema idéntico a lo largo del eje r y otro según el eje perpendicular al plano rz . En virtud de la simetría señalada, obtendremos una distribución de tensiones simétrica respecto al origen, que para el caso de una esfera con centro en ese punto, dará una distribución de tensiones que consiste simplemente en una tensión normal uniforme que actúa sobre la superficie de esa esfera. La magnitud de esta tensión puede ser calculada mediante la primera de las ecuaciones (b). Considerando la tensión que actúa en los puntos del

¹ Las componentes de la tensión σ_θ que actúan sobre los lados del elemento en las secciones meridianas del cuerpo, dan como resultante un infinitésimo de orden mayor, que puede ser despreciado al deducir las ecuaciones de equilibrio.

círculo contenido en el plano rz , la primera de las ecuaciones (b) nos da la parte de tensión originada por la fuerza doble a lo largo del eje z . Inter cambiando sen ψ y cos ψ , obtenemos la tensión normal que produce la doble fuerza que actúa a lo largo del eje r . La tensión normal, producida por la doble fuerza perpendicular al plano rz , se obtiene haciendo $\psi = \pi/2$ en la misma ecuación. Combinando la acción de las tres fuerzas dobles perpendiculares, se obtiene la siguiente tensión normal que actúa sobre la superficie de la esfera,

$$\sigma_R = -\frac{4(1-2\nu)A}{R^3} \quad (c)$$

La combinación de las tres dobles fuerzas perpendiculares, determina lo que se llama *centro de compresión* y la ecuación (c) nos dice, que la compresión correspondiente según la dirección radial depende solamente de la distancia al centro de compresión y que es inversamente proporcional al cubo de esta distancia.

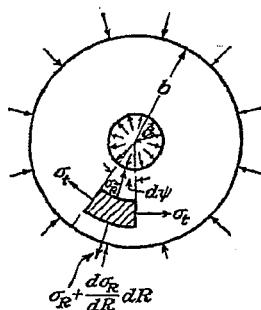


FIG. 202

Esta solución, puede ser empleada para el cálculo de las tensiones en un recipiente esférico sometido a la acción de una presión uniforme interior o exterior. Sean a y b los radios interior y exterior de la esfera (fig. 202) y p_i y p_o las presiones uniformes interior y exterior. Añadiendo a la tensión (c) un estado equitensional de tracción o compresión, podemos tomar la expresión general de la tensión normal radial en la forma,

$$\sigma_R = \frac{C}{R^3} + D \quad (d)$$

donde C y D son constantes cuyo valor se calcula con arreglo a las condiciones en la superficie interior y exterior del recipiente, las cuales son

$$\frac{C}{a^3} + D = -p_i, \quad \frac{C}{b^3} + D = -p_o$$

Tendremos entonces

$$\begin{aligned} C &= \frac{(p_i - p_o)a^3b^3}{a^3 - b^3} \\ D &= \frac{p_o b^3 - p_i a^3}{a^3 - b^3} \\ \sigma_R &= \frac{p_o b^3 (R^3 - a^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} + \frac{p_i a^3 (b^3 - R^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} \end{aligned} \quad (197)$$

Las presiones p_o y p_i , producen también en la esfera tensiones normales σ de dirección tangencial, cuya magnitud determinaremos a partir de la condición de equilibrio de un elemento de esfera, limitado por dos superficies esféricas concéntricas de radios R y $R + dR$ y por un cono circular de ángulo sólido muy pequeño $d\psi$ (fig. 202). La ecuación de equilibrio es

$$\sigma_t \frac{\pi R}{2} dR (d\psi)^2 = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{\pi R^2}{4} dR (d\psi)^2 + \sigma_R \frac{\pi R}{2} dR (d\psi)^2$$

de donde

$$\sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R \quad (e)$$

Usando la expresión (197) de σ_R , resulta

$$\sigma_t = \frac{p_o b^3 (2R^3 + a^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} - \frac{p_i a^3 (2R^3 + b^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} \quad (198)$$

Si $p_o = 0$, se tendrá

$$\sigma_t = \frac{p_i a^3}{2R^3} \frac{(2R^3 + b^3)}{b^3 - a^3}$$

Como puede verse en este caso, la tensión de dirección tangencial máxima se da en la superficie interior, donde

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p_i}{2} \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3}$$

Todos estos resultados son debidos a Lamé¹.

122. Tensiones locales alrededor de una cavidad esférica. Consideremos ahora, como segundo ejemplo, la distribución tensional existente en torno a una pequeña cavidad esférica que se encuentra en una barra sometida a una tracción uniforme de valor S (fig. 203)². En el caso de una barra maciza sometida a

¹ Lamé, *Leçons sur la théorie... de l'élasticité*, París, 1852.

² La solución de este problema ha sido dada por R. V. Southwell, *Phil. Mag.*, 1926; véase también J. N. Goodier, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 55, pág. 39, 1933. La cavidad elipsoidal es considerada por E. Sternberg y M. Sadowsky, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 16, pág. 149, 1949.

tracción, las componentes normal y tangencial de la tensión que actúa sobre una superficie esférica son

$$\sigma_n = S \cos^2 \psi, \quad \tau_{R\psi} = -S \sin \psi \cos \psi$$

Para obtener la solución correspondiente al caso de una pequeña cavidad esférica, de radio a , debemos superponer a la tracción simple un sistema tensional cuyas componentes sobre la superficie esférica sean iguales y opuestas a las dadas por las ecuaciones (a) y que en el infinito se anulen.

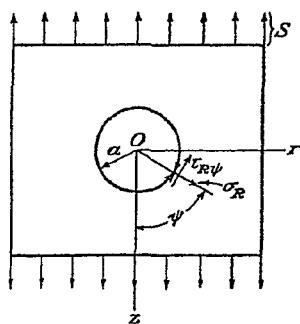


FIG. 203

Tomando del párrafo anterior las tensiones (b), producidas por una doble fuerza de dirección z y las tensiones (c), causadas por un centro de compresión, las tensiones correspondientes que actúan sobre la superficie esférica de radio a podrán escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_R' &= -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \left(-1 + \frac{5-\nu}{1+\nu} \cos^2 \psi \right), \quad \tau_{R\psi}' = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi \quad (b) \\ \sigma_R'' &= \frac{B}{a^3}, \quad \tau_{R\psi}'' = 0 \quad (c) \end{aligned}$$

donde A y B son constantes a determinar. Puede verse, que las tensiones (a) que origina la tracción no pueden ser anuladas combinando las (b) y (c), siendo necesario un sistema adicional de tensiones.

Tomando de las soluciones (192) una función de tensión

$$\phi = Cz(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

las correspondientes componentes de la tensión, según (179) serán

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3C}{R^6} (1 - 5 \cos^2 \psi - 5 \sin^2 \psi + 35 \sin^2 \psi \cos^2 \psi) \\ \sigma_z &= \frac{3C}{R^6} (3 - 30 \cos^2 \psi + 35 \cos^4 \psi) \\ \sigma_\theta &= \frac{3C}{R^6} (1 - 5 \cos^2 \psi) \\ \tau_{rz} &= \frac{15C}{R^6} (-3 \sin \psi \cos \psi + 7 \sin \psi \cos^3 \psi) \end{aligned} \quad (d)$$

Usando ahora las ecuaciones (a) del párrafo anterior, las componentes de la tensión que actúan sobre una superficie esférica de radio a son

$$\sigma_R''' = \frac{12C}{a^6} (-1 + 3 \cos^2 \psi), \quad \tau_{R\psi}''' = \frac{24C}{a^6} \sin \psi \cos \psi \quad (e)$$

Combinando los sistemas tensionales (b), (c) y (e), resulta

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{2(1+\nu)A}{a^3} - 2(5-\nu) \frac{A}{a^3} \cos^2 \psi + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^6} + \frac{36C}{a^6} \cos^2 \psi \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi + \frac{24C}{a^6} \sin \psi \cos \psi \end{aligned} \quad (f)$$

Añadiendo estas tensiones a las (a), la superficie esférica de la cavidad quedará libre de fuerzas si se cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^6} &= 0 \\ -2(5-\nu) \frac{A}{a^3} + \frac{36C}{a^6} &= -S \\ -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{24C}{a^6} &= S \end{aligned} \quad (g)$$

de las que se deduce

$$\frac{A}{a^3} = \frac{5S}{2(7-5\nu)}, \quad \frac{B}{a^3} = \frac{S(1-5\nu)}{7-5\nu}, \quad \frac{C}{a^6} = \frac{S}{2(7-5\nu)} \quad (h)$$

La tensión total que actúa en cualquier punto se obtiene ahora superponiendo a la tracción simple S las tensiones dadas por las ecuaciones (d), las (196), debidas a la doble fuerza y las que originan el centro de presión que vienen expresadas por las ecuaciones (c) y (e) del párrafo precedente.

Consideremos, por ejemplo, las tensiones que actúan sobre el plano $x = 0$. De las condiciones de simetría, se deduce que sobre este plano no actúan tensiones tangenciales y a partir de las ecuaciones (d), haciendo $\psi = \pi/2$ y $R = r$, resulta

$$\sigma_z' = \frac{9C}{r^6} = \frac{9Sa^6}{2(7-5\nu)r^6} \quad (k)$$

Para $z = 0$, las ecuaciones (196) dan

$$\sigma_z'' = \frac{A(1-2\nu)}{r^3} = \frac{5(1-2\nu)S}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} \quad (l)$$

De la ecuación (e) del párrafo anterior, tenemos

$$\sigma_z''' = (\sigma_z)_{z=0} = -\frac{B}{2r^3} = -\frac{S(1-5\nu)}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} \quad (m)$$

La tensión total sobre el plano $x = 0$, es

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' + \sigma_z''' + S = S \left[1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)} \frac{a^6}{r^6} \right] \quad (n)$$

En $r = a$ tendremos

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{27-15\nu}{2(7-5\nu)} S \quad (o)$$

que haciendo $\nu = 0,3$ nos da

$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{4}{3} S$$

La tensión máxima resulta ser, por tanto, el doble de la tracción uniforme S aplicada a la barra. Este aumento de la tensión está muy localizado y cuando r aumenta, la tensión (τ_z) se aproxima rápidamente al valor S . Tomando, por ejemplo, $r = 2a$, $\nu = 0,3$, resulta $\sigma_z = 1,054S$.

De igual forma, para los puntos del plano $z = 0$, resulta

$$(\sigma_\theta)_{z=0} = \frac{3C}{r^5} - \frac{A(1-2\nu)}{r^3} - \frac{B}{2r^3}$$

Sustituyendo los valores dados por la ecuación (6) y haciendo $r = a$, obtenemos la tensión de tracción que actúa a lo largo del ecuador de la cavidad ($\psi = \pi/2$), la cual es

$$(\sigma_\theta)_{z=0, r=a} = \frac{15\nu - 3}{2(7 - 5\nu)} S$$

En el polo de la cavidad ($\psi = 0$ ó $\psi = \pi$), tenemos

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2(1-2\nu)A}{a^3} - \frac{12C}{a^5} - \frac{B}{2a^3} = -\frac{3 + 15\nu}{2(7 - 5\nu)} S$$

lo que indica que la tracción longitudinal, S , produce una compresión en ese punto.

Si se combina una tracción S según una dirección, con una compresión S en la dirección perpendicular, podemos obtener la distribución tensional existente alrededor de una cavidad esférica para el caso en el que la solicitación aplicada es la de esfuerzo cortante¹. Podemos demostrar de esta forma, que la máxima tensión tangencial vale

$$\tau_{\max} = \frac{15(1-\nu)}{7-5\nu} S \quad (p)$$

Los resultados a los que hemos llegado, pueden tener interés práctico al estudiar la influencia que sobre la tensión límite de fatiga de probetas sometidas a la acción de tensiones cíclicas, tienen las pequeñas cavidades².

123. Fuerza sobre el contorno de un cuerpo semiindefinido. Imaginemos que el plano $z = 0$, constituye el contorno de un sólido semiindefinido y que una fuerza P actúa sobre este plano a lo largo del eje z (fig. 204)³. Como se ha visto en el § 120, la distribución de tensiones dada por las ecuaciones (194) y (195), puede ser producida en un cuerpo semiindefinido por la acción de una fuerza concentrada en el origen y de fuerzas tangenciales sobre el contorno plano $z = 0$, de valor

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2} \quad (a)$$

¹ Este problema fue estudiado por J. Larmor, *Phil. Mag.*, serie 5, vol. 33, 1892. Véase también A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.^a edición, pág. 252, 1927.

² Tales cavidades se presentan, por ejemplo, en una soldadura, mostrando los ensayos de fatiga, que las fisuras se iniciaron por lo general, en esas cavidades.

³ La solución de este problema se debe a J. Boussinesq, véase *Application des potentiels...*, París, 1885. La solución pura el caso en que la fuerza actúa en un punto interior del cuerpo semiindefinido, fue obtenida por R. D. Mindlin, *Physics*, vol. 7, pág. 195, 1936.

Para eliminar estas fuerzas y obtener la solución del problema representado en la figura 204, utilizamos la distribución tensional que corresponde al centro de compresión (véase pág. 399). En coordenadas polares, esta distribución de tensiones es la

$$\sigma_r = \frac{A}{R^3}, \quad \sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3}$$

donde A es una constante. En coordenadas cilíndricas (fig. 204), las expresiones de las componentes de la tensión son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_R \operatorname{sen}^2 \psi + \sigma_t \cos^2 \psi = A(r^2 - \frac{1}{2}z^2)(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \sigma_t &= \sigma_R \cos^2 \psi + \sigma_t \operatorname{sen}^2 \psi = A(z^2 - \frac{1}{2}r^2)(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2}(\sigma_R - \sigma_t) \operatorname{sen} 2\psi = \frac{3}{2}Arz(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \sigma_\theta &= \sigma_t = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3} = -\frac{1}{2} A(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (199)$$

Supongamos ahora que los centros de presión se encuentran distribuidos uniformemente a lo largo del eje z , desde $z = 0$ hasta $z = -\infty$. Usando entonces el principio de superposición, las componentes de la tensión producidas en un sólido de extensión indefinida, serán, según las ecuaciones (199),

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A \int_z^\infty (r^2 - \frac{1}{2}z^2)(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ \sigma_z &= A \int_z^\infty \left(z^2 - \frac{1}{2}r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{A}{2} z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \tau_{rz} &= \frac{3}{2} A \int_z^\infty rz(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{A}{2} r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{2} A \int_z^\infty (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{A}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (200)$$

Considerando el plano $z = 0$, encontramos que la tensión normal en el mismo es nula y que la tensión tangencial vale

$$(\tau_{rz})_{z=0} = \frac{1}{2} \frac{A}{r^2} \quad (b)$$

Vemos ahora que combinando las soluciones (194) y (200) podemos, ajustando convenientemente las constantes A y B , obtener una distribución de tensiones tal que el plano $z = 0$ quede libre de tensiones y que una fuerza concentrada P actúe en el origen. Las expresiones (a) y (b) indican que las fuerzas tangenciales sobre el contorno plano, son eliminadas si

$$-B(1-2\nu) + \frac{A}{2} = 0$$

de donde

$$A = 2B(1 - 2\nu)$$

Sustituyendo en las expresiones (200) y sumando esta última con las (194), obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_r &= B \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-1} \right\} \\ \sigma_z &= -3Bz^2 (r^2 + z^2)^{-1} \\ \sigma_\theta &= B(1 - 2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1} + z(r^2 + z^2)^{-1} \right] \\ \tau_{rz} &= -3Brz^2 (r^2 + z^2)^{-1}\end{aligned}\quad (c)$$

Esta distribución tensional satisface las condiciones de contorno puesto que $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ para $z = 0$. Queda aún por determinar, el valor de la

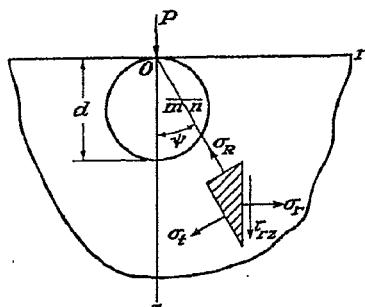


FIG. 204

constante B que haga que las fuerzas distribuidas en la superficie de un hemisferio, cuyo centro sea el origen, sean estáticamente equivalentes a la fuerza P que actúa a lo largo del eje z . Considerando el equilibrio de un elemento tal como el mostrado en la figura 200, la componente en la dirección z de las fuerzas que actúan sobre la superficie del hemisferio es

$$\bar{Z} = -(r_{rz} \operatorname{sen} \psi + \sigma_z \cos \psi) = 3Bz^2(r^2 + z^2)^{-2}$$

Para determinar B obtenemos la ecuación

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{Z} r (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} d\psi = 6\pi B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi d\psi = 2\pi B$$

de donde

$$B = \frac{P}{2\pi}$$

Sustituyendo finalmente (c), obtenemos las siguientes expresiones para las componentes de la tensión producida por una fuerza P , que actúa normalmente sobre el plano limitante del sólido semiindefinido

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-1} \right\} \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^2 (r^2 + z^2)^{-1} \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \left\{ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1} + z(r^2 + z^2)^{-1} \right\} \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} rz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (201)$$

Esta solución es la análoga tridimensional de la correspondiente a la placa semiindefinida (véase el § 33).

Si consideramos el área elemental mm perpendicular al eje z (fig. 204), la relación entre las componentes normal y tangencial correspondientes a ese elemento, según las ecuaciones (201), será

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{rz}} = \frac{z}{r} \quad (d)$$

relación que nos dice que la tensión resultante pasa por el origen O . La magnitud de esa resultante es

$$S = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \psi}{(r^2 + z^2)^2} \quad (202)$$

Vemos, pues, que la tensión es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto en cuestión al de aplicación de la carga P . Imaginemos una superficie esférica de diámetro d , tangente al plano $z = 0$ en el origen O . Para todo punto de esta superficie

$$r^2 + z^2 = d^2 \cos^2 \psi \quad (e)$$

de donde sustituyendo en (202), llegamos a la conclusión de que para todo punto de la esfera, la tensión total que actúa sobre los planos horizontales es constante e igual a $3P/2\pi d^2$.

Consideremos ahora los desplazamientos que la carga P provoca en el sólido semiindefinido. Según las ecuaciones (178) para las componentes de la tensión

$$u = \epsilon_\theta r = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

Sustituyendo los valores de las componentes de la tensión, dadas por las ecuaciones (201), resultará

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er} \left[z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (203)$$

Las ecuaciones (178) permiten determinar los desplazamientos verticales w

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \gamma_{rz} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)\tau_{rz}}{E} - \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las expresiones de las componentes de la tensión y del desplazamiento u los valores encontrados, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{P}{2\pi E} \{ 3(1+\nu)r^2 z (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - [3+\nu(1-2\nu)]z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \} \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= -\frac{P(1+\nu)}{2\pi E} [2(1-\nu)r(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}] \end{aligned}$$

de donde, integrando, se tiene

$$w = \frac{P}{2\pi E} [(1+\nu)z^2(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(1-\nu^2)(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}] \quad (204)$$

Para el plano límite ($z = 0$) los desplazamientos son

$$(u)_{z=0} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er}, \quad (w)_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er} \quad (205)$$

lo que nos dice que el producto wv es constante en el contorno. Por tanto, los radios que parten del origen y se encuentran en el contorno plano del cuerpo se transforman, a consecuencia de la deformación, en hipérbolas de asíntotas Or y Oz . En el origen los desplazamientos y las tensiones alcanzan un valor infinito. Para salvar las dificultades de aplicación, de las ecuaciones halladas, podemos imaginar que el material próximo al origen es separado en un pequeño hemisferio, y que la fuerza concentrada P es sustituida por las fuerzas estáticamente equivalentes que se distribuyen sobre esa superficie.

124. Sólido semiindefinido sometido a la acción de una carga distribuida sobre una zona de su plano limitante. Una vez obtenida la solución correspondiente al caso de una fuerza concentrada que actúa sobre el contorno de un sólido semiindefinido, podemos obtener,

por superposición, los desplazamientos y tensiones provocados por una carga distribuida. Consideremos el ejemplo sencillo de una carga distribuida sobre un círculo de radio a (fig. 205) y estudiemos el desplazamiento según la dirección de la carga de un punto M de la superficie del cuerpo,

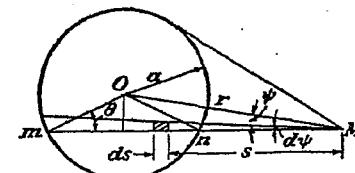


FIG. 205

distante r del centro del círculo. Considerando el pequeño elemento de superficie cargada que se muestra rayado en la figura, limitado por dos radios que forman el ángulo $d\psi$ y dos arcos de circunferencia de radios s y $s+ds$, todos ellos con centro en M , la carga que actúa sobre este elemento es $qs d\psi ds$ y el desplazamiento correspondiente en M , según (205), es

$$\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \cdot \frac{s d\psi ds}{s} = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} d\psi ds$$

La flecha total se obtiene entonces por integración doble

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint d\psi ds$$

Integrando respecto a s y teniendo en cuenta que la cuerda mm tiene una longitud igual a $2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}$, resulta

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\psi_1} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (a)$$

donde ψ_1 es el valor máximo de ψ , es decir, el ángulo comprendido entre r y la tangente a la circunferencia. El cálculo de la integral (a), se simplifica introduciendo la variable angular θ en lugar de la variable ψ . A la vista de la figura, se deduce que

$$a \sin \theta = r \sin \psi$$

de donde

$$d\psi = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \cos \psi} = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}}$$

Sustituyendo en la ecuación (a) y recordando que θ varía de 0 a $\pi/2$, cuando ψ lo hace de 0 a ψ_1 , obtenemos

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 \theta \, d\theta}{r \sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}} = \frac{4(1-\nu^2)qr}{\pi E}$$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta} \, d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}} \right] \quad (206)$$

Las integrales de esta ecuación reciben el nombre de *integrales elípticas* y el valor de las mismas para cualquier valor de a/r , puede ser encontrado en tablas¹.

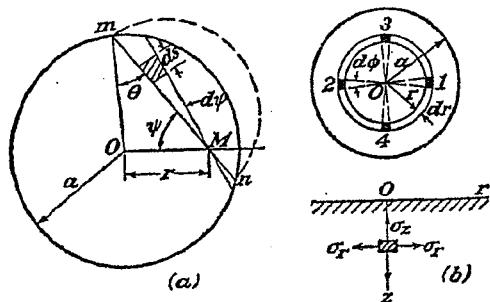


FIG. 206

Para obtener la flecha en el contorno del círculo cargado, ponemos $r = a$ en la ecuación (206), obteniendo

$$(w)_{r=a} = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \quad (207)$$

Si el punto M se encuentra dentro de la superficie cargada, (fig. 206 a), podemos considerar de nuevo la flecha provocada por el elemento rayado sobre el que actúa la carga $qs \, ds \, d\psi$. La flecha total será, entonces,

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \int \int ds \, d\psi$$

La longitud de la cuerda mm es $2a \cos \theta$ y ψ varía desde 0 a $\pi/2$, de forma que

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \, d\psi$$

¹ Véase por ejemplo, E. Jahnke y F. Emde, *Funktionentafeln*, Berlín, 1909; o Pearce, *Short Table of Integrals*, 1910.

que teniendo en cuenta la igualdad $a \sin \theta = r \sin \psi$, nos da

$$w = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \psi} \, d\psi \quad (208)$$

La flecha puede, pues, calcularse para cualquier valor de la relación r/a , usando tablas de integrales elípticas. La flecha máxima se presenta, por supuesto, en el centro del círculo y su valor obtenido haciendo $r = 0$ en (208), es

$$(w)_{\max} = \frac{2(1-\nu^2)qa}{E} \quad (209)$$

Comparando este resultado con el correspondiente al contorno del círculo, vemos que la flecha de los puntos de ese contorno es $2/\pi$ veces la flecha máxima¹. Es interesante advertir que para una intensidad dada de la carga q , la flecha máxima no es constante sino que aumenta en proporción con el radio del círculo cargado.

Podemos igualmente, aplicando el principio de superposición, calcular las tensiones. Consideremos, por ejemplo, las tensiones en un punto del eje z (fig. 206b). La tensión σ_z producida en tal punto por una carga distribuida sobre una corona circular de radio r y anchura dr , se obtiene sustituyendo en la segunda de las ecuaciones (201) $2\pi r \, dr \, q$, en lugar de P . La tensión σ_z producida por la carga uniforme distribuida sobre la superficie del círculo de radio a , será entonces

$$\sigma_z = - \int_0^a 3qr \, dr \, z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = qz^3 \left| (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right|_0^a$$

$$= q \left[-1 + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (b)$$

Esta tensión es igual a $-q$ en la superficie del cuerpo y disminuye gradualmente cuando aumenta la distancia z . Para calcular las tensiones σ_x y σ_y en el mismo punto, consideremos los dos elementos 1 y 2 de la superficie cargada (fig. 206b), a los que corresponde una carga $qr \, d\phi \, dr$. Las tensiones producidas por estas dos cargas elementales en un punto del eje z serán, con arreglo a la primera y tercera de las ecuaciones (201),

¹ La solución de este problema fue obtenida por Boussinesq, *loc. cit.* Véase también H. Lamb, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 34, pág. 276, 1902; K. Terazawa, *J. Coll. Sci. Univ. Tokyo*, vol. 37, 1916; F. Schleicher, *Bauingenieur*, vol. 7, 1926, y *Bauingenieur*, vol. 14, pág. 242, 1933. El estudio completo de este problema, así como el caso en que la carga es distribuida sobre un rectángulo, se encuentra en el trabajo de A. E. H. Love, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 228, 1929. Las propiedades especiales de la deformación y la tensión en el caso general son señaladas por S. Way, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 7, pág. A-1-17, 1940.

$$d\sigma_r' = \frac{qr d\phi dr}{\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} \quad (c)$$

$$d\sigma_\theta' = \frac{qr d\phi dr}{\pi} (1 - 2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

Las tensiones normales producidas en los mismos planos por las cargas elementales que corresponden a los puntos 3 y 4, son

$$d\sigma_r'' = \frac{qr d\phi dr}{\pi} (1 - 2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (d)$$

$$d\sigma_\theta'' = \frac{qr d\phi dr}{\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

Sumando (c) y (d), obtenemos las tensiones producidas por las cuatro cargas elementales indicadas en la figura, las cuales son

$$\begin{aligned} d\sigma_r = d\sigma_\theta &= \frac{qr d\phi dr}{\pi} [(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 3r^2 z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] \\ &= \frac{qr d\phi dr}{\pi} [-2(1 + \nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 3z^3(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] \end{aligned} \quad (e)$$

Para obtener las tensiones que la carga total uniformemente distribuida sobre la superficie del círculo de radio a produce, debemos integrar la expresión (e), respecto a ϕ , entre los límites 0 y $\pi/2$ y respecto a r entre 0 y a . Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{q}{2} \int_0^a [-2(1 + \nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 3z^3(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] r dr \\ &= \frac{q}{2} \left[-(1 + 2\nu) + \frac{2(1 + \nu)z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (f)$$

Para el punto O , centro del círculo cargado, las ecuaciones (b) y (f), nos dan

$$\sigma_z = -q, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{q(1 + 2\nu)}{2}$$

Haciendo $\nu = 0,3$, obtenemos $\sigma_r = \sigma_\theta = -0,8q$. La tensión tangencial máxima en el punto O , en planos a 45 grados con el eje z , es igual a $0,1q$. Admitiendo que la deformación plástica del material se produce cuando la tensión tangencial alcanza un cierto valor, se puede demostrar que el punto O , arriba considerado, no es, entre los puntos del eje z , el más propenso a que tal tipo de deformación se produzca. La tensión tangen-

cial máxima en un punto cualquiera del eje z (fig. 206b) es, según las ecuaciones (b) y (f),

$$\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z) = \frac{q}{2} \left[\frac{1 - 2\nu}{2} + (1 + \nu) \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right] \quad (g)$$

Esta expresión toma el valor máximo cuando

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{2(1 + \nu)}$$

de donde

$$z = a \sqrt{\frac{2(1 + \nu)}{7 - 2\nu}} \quad (h)$$

Sustituyendo en (g), se tiene

$$\tau_{\max} = \frac{q}{2} \left[\frac{1 - 2\nu}{2} + \frac{2}{9}(1 + \nu) \sqrt{2(1 + \nu)} \right] \quad (k)$$

Suponiendo que $\nu = 0,3$, obtenemos, de las ecuaciones (h) y (k),

$$z = 0,638a, \quad \tau_{\max} = 0,33q$$

lo que nos muestra que la tensión tangencial máxima, en los puntos del eje z , se produce a una cierta profundidad, igual aproximadamente a los dos tercios del radio del círculo cargado, y que la magnitud de este máximo es aproximadamente un tercio de la presión uniforme q aplicada.

Para el caso de una presión uniforme, distribuida sobre un cuadrado de lado $2a$; la flecha máxima se da en el centro, siendo su valor

$$w_{\max} = \frac{8}{\pi} \log_e (\sqrt{2} + 1) \frac{qa(1 - \nu^2)}{E} = 2,24 \frac{qa(1 - \nu^2)}{E} \quad (210)$$

La flecha en los vértices del cuadrado, es solamente la mitad de la correspondiente al centro y el valor medio de la misma es

$$w_{\text{med}} = 1,90 \frac{qa(1 - \nu^2)}{E} \quad (211)$$

Cálculos análogos han sido realizados para el caso en que la presión uniforme se distribuya sobre rectángulos, para diversos valores de la relación, $a = a/b$, entre los lados. Todos los resultados pueden ser expresados en la forma¹

$$w_{\text{med}} = m \frac{P(1 - \nu^2)}{E \sqrt{A}} \quad (212)$$

donde m es un factor numérico que depende de a , A es el valor del área y P la carga total.

¹ Véase Schleicher, loc. cit.

TABLA DE VALORES DEL COEFICIENTE m DE LA ECUACIÓN (212)

	Círculo	Cuadra- do	Rectángulo con diversos valores $a = \frac{a}{b}$					
			1,5	2	3	5	10	100
$m =$	0,96	0,95	0,94	0,92	0,88	0,82	0,71	0,37

Varios valores del factor m son dados en la tabla adjunta. Puede observarse que para un cierto valor de la carga P y del área A , las flechas aumentan cuando la relación entre el perímetro y el área de la superficie cargada disminuye. La ecuación (212), se usa a veces en el estudio de las deformaciones que se producen en las fundaciones¹ de las estructuras. Si se quiere que sean iguales las flechas en las distintas partes de la estructura, la presión media sobre la fundación debe guardar una cierta relación con la forma y área de la superficie cargada.

En el estudio precedente hemos supuesto que la carga era un dato, obteniendo los desplazamientos por ella producidos. Consideremos ahora el caso en que son conocidos los desplazamientos y donde es necesario encontrar la correspondiente distribución de presiones sobre el plano limitante. Tomemos, por ejemplo, el caso de un punzón cilíndrico perfectamente rígido, de base circular, el cual es aplicado contra el plano limitante de un sólido semiindefinido. En un caso tal, el desplazamiento w es constante en toda la base del punzón. La distribución de presiones, por el contrario, no lo es, viéndose dado su valor por la ecuación²

$$q = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (213)$$

en la que P es la carga total aplicada por el punzón, a el radio del mismo y r la distancia del centro del círculo al punto que se considera. Esta distribución de presiones no es, como se ve, uniforme, siendo el valor mínimo de la misma, que se da en el centro ($r = 0$)

$$q_{\min} = \frac{P}{2\pi a^2}$$

valor, que es igual a la mitad de la presión media sobre el área circular de contacto. En el contorno de la superficie de contacto ($r = a$) la presión es infinita. En los casos reales, se producirá una deformación plástica del material a lo largo de esa periferia. Este tipo de deformación es, sin embargo, de carácter local, no afectando sustancialmente a la distribución

¹ Véase Schleicher, *loc. cit.*

² Esta solución fue dada por Boussinesq, *loc. cit.*

de presiones (213) en los puntos distantes de la circunferencia que limita la zona cargada.

El recorrido del punzón está dado por la ecuación

$$w = \frac{P(1 - \nu^2)}{2aE} \quad (214)$$

que nos indica que para un determinado valor de la presión media sobre el plano límite, la deformación aumenta en proporción inversa al radio del punzón.

La flecha correspondiente al caso de una distribución uniforme de presiones, que damos con fines comparativos, es [ecuación (208)]

$$w_{\text{med}} = \frac{\int_0^a w 2\pi r dr}{\pi a^2} = \frac{16}{3\pi^2} \frac{P(1 - \nu^2)}{aE} = 0,54 \frac{P(1 - \nu^2)}{aE} \quad (215)$$

El valor de la misma difiere poco del recorrido (214) correspondiente a un punzón perfectamente rígido.

125. Presión entre dos cuerpos esféricos en contacto. Los resultados del párrafo precedente pueden ser usados al estudiar la distribución de presión entre dos cuerpos en contacto¹. Supongamos que en el punto de contacto la superficie de estos cuerpos sea esférica, con radios R_1 y R_2 (fig. 207). Si tales cuerpos no ejercen ninguna presión el uno contra el otro, el contacto se reduce al punto O . Las distancias del plano tangente en O a puntos tales como el M y el N , situados en la sección meridiana de las esferas, a pequeña distancia² r de los ejes z_1 y z_2 , pueden ser expresadas con suficiente exactitud mediante las fórmulas

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{-r^2}{2R_2} \quad (a)$$

y la distancia mutua entre estos puntos es

$$z_1 + z_2 = r^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} \quad (b)$$

En el caso particular del contacto entre una esfera y un plano (fig. 208 a), $R_1 = \infty$ y la ecuación (b) de la distancia MN nos da

$$\frac{r^2}{2R_2} \quad (c)$$

¹ Este problema fue resuelto por H. Hertz, *J. Math. (Crelle's J.)*, vol. 92, 1881. Véase también H. Hertz, *Gesammelte Werke*, vol. 1, pag. 155, Leipzig, 1895.

² r es pequeña comparada con R_1 y R_2 .

En el caso de contacto entre una bola y una superficie esférica (figura 208b), R_1 es negativo en la ecuación (b), resultando

$$z_2 - z_1 = \frac{r^2(R_1 - R_2)}{2R_1R_2} \quad (c')$$

Si los cuerpos son comprimidos uno contra otro en la dirección de la normal en O , por una fuerza P , se producirá una deformación local en la vecindad del punto de contacto, que extenderá ese contacto sobre una pequeña superficie de contorno circular llamada *superficie de contacto*.

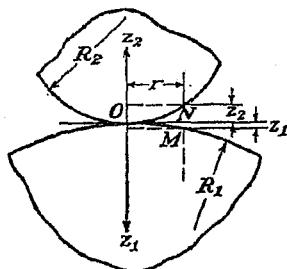


FIG. 207

Suponiendo que los radios de curvatura R_1 y R_2 sean muy grandes comparados con el radio del contorno de la superficie de contacto, podremos aplicar, al estudiar la deformación local, los resultados anteriormente obtenidos para cuerpos semiindefinidos. Sea w_1 el desplazamiento, provocado por la deformación local según la dirección z_1 , de un punto tal como el M perteneciente a la superficie de la bola inferior (fig. 207) y w_2 el mismo desplazamiento, según la dirección z_2 , para un punto tal como el N de la bola superior. Suponiendo que el plano tangente en O permanece inmóvil durante la compresión local, dos puntos cualesquiera situados en los ejes z_1 y z_2 , a distancias¹ grandes de O , se aproximarán entre sí una cierta cantidad α como consecuencia de la compresión y la distancia entre dos puntos tales como M y N (fig. 207) disminuirá en $\alpha - (w_1 + w_2)$. Si además, suponemos que estos puntos M y N caen dentro de la superficie de contacto, tendremos

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \beta r^2 \quad (d)$$

donde β es una constante cuyo valor depende de los radios R_1 y R_2 y viene dada por las ecuaciones (b), (c) o (c'). Basándonos, pues, en consi-

¹ Distancias tales que las deformaciones provocadas por la compresión en estos puntos pueda ser despreciada.

deraciones geométricas, encontramos que para todo punto de la superficie de contacto,

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta r^2 \quad (e)$$

Consideremos ahora las deformaciones locales. Según la condición de simetría, puede deducirse que la intensidad, q , de la presión ejercida entre los dos cuerpos en contacto y la deformación correspondiente, son simétricas respecto al centro O de la superficie de contacto. Suponiendo que la figura 206a represente la superficie de contacto y que M sea un punto

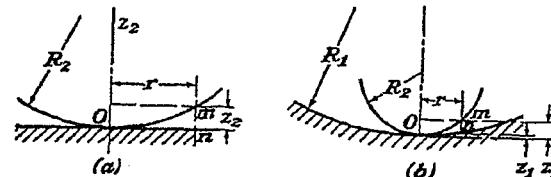


FIG. 208

perteneciente a la superficie de la esfera inferior, el desplazamiento w_1 de este punto, según lo obtenido anteriormente, será

$$w_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \iint q ds d\psi \quad (f)$$

donde la integración se extiende sobre toda el área de contacto y ν_1 , E_1 , son las constantes elásticas de la bola inferior. Una fórmula análoga se obtiene también para la bola superior. Tenemos entonces

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \iint q ds d\psi \quad (g)$$

en donde

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (216)$$

De las ecuaciones (e) y (g) resulta

$$(k_1 + k_2) \iint q ds d\psi = \alpha - \beta r^2 \quad (h)$$

Debemos, pues, encontrar una expresión para q que satisfaga la ecuación (h). Demostraremos que esta exigencia queda satisfecha si suponemos que la distribución de presiones q , en la superficie de contacto, obedece a una ley que viene representada por las ordenadas de un hemisferio de radio a , construido sobre la superficie de contacto. Si q_0 es la presión en el centro O de dicha superficie, tendremos que

$$q_0 = ka$$

donde $k = q_0/a$, es un factor constante que indica la escala con que hemos representado la distribución de presión. A lo largo de una cuerda mn , la presión q varía como se indica en la figura 206 mediante la semicircunferencia a trazos. Realizando la integración a lo largo de esta cuerda, obtenemos

$$\int q \, ds = \frac{q_0}{a} A$$

donde A es el área del semicírculo señalado por la línea a trazos que es igual a $\frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \psi)$. Sustituyendo en (h), llegamos a

$$\frac{\pi(k_1 + k_2)q_0}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \psi) \, d\psi = \alpha - \beta r^2$$

y de ahí

$$(k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi r^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2$$

Esta ecuación debe ser cumplida para cualquier valor de r , y por tanto, la distribución de presiones que habíamos supuesto es la correcta si se dan las siguientes relaciones entre el desplazamiento a y el radio a de la superficie de contacto.

$$\alpha = (k_1 + k_2)q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \quad (217)$$

$$a = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\beta}$$

El valor de la presión máxima, q_0 , se obtiene igualando la suma de las presiones que actúan sobre el área de contacto a la fuerza de compresión P . Considerando una distribución hemisférica de presión, obtenemos

$$\frac{q_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = P$$

de donde

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (218)$$

lo que nos dice que la presión máxima es 1,5 veces la presión media sobre la superficie de contacto. Sustituyendo en las ecuaciones (217) y tomando, según la ecuación (b),

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}$$

encontramos, para el caso de contacto de dos esferas (fig. 207),

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)}} \quad (219)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 P^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16 R_1 R_2}}$$

Suponiendo que las dos esferas tienen las mismas propiedades elásticas y haciendo $\nu = 0,3$, resulta

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (220)$$

$$\alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

La presión máxima correspondiente es

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_1^2 R_2^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 R_2}} \quad (221)$$

En el caso de una bola oprimida contra una superficie plana, suponiendo que las propiedades elásticas de los materiales de ambos sólidos sean las mismas, encontramos, sustituyendo $R_1 = \infty$ en (220) y (221)

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P R_2}{E}}, \quad \alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 R_2}}, \quad q_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{R_2^3}} \quad (222)$$

Las ecuaciones correspondientes al caso de una bola apretada contra un asiento esférico (fig. 208 b) se obtienen, dando a R_1 signo negativo.

Conocida la magnitud de la superficie de contacto y las presiones que actúan en ella, podemos calcular las tensiones mediante el método desarrollado en el § 124¹. Los resultados de estos cálculos para puntos de los ejes Oz_1 y Oz_2 son mostrados en la figura 209. La presión máxima, q_0 , que se da en el centro de la superficie de contacto es tomada como unidad de tensión. El radio a de la superficie de contacto, es tomado como unidad en la medida de las distancias a lo largo del eje z . La tensión máxima es la tensión de compresión σ_z que se da en el centro de la superficie de contacto, pero las otras dos tensiones principales σ_x y σ_y en el mismo punto son iguales a $\frac{1+2\nu}{2} \sigma_z$. Resulta entonces, que la tensión tangencial máxima, determinante de la deformación plástica de materiales tales como

¹ Tales cálculos fueron realizados por A. N. Dinnik, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1909. Véase también M. T. Huber, *Ann. Physik*, vol. 14, 1904, pág. 153; S. Fuchs, *Physik Z.*, vol. 14, pág. 1282, 1913; M. C. Huber y S. Fuchs, *Physik Z.*, vol. 15, pág. 298, 1914; W. B. Morton y L. J. Close, *Phil. Mag.*, vol. 43, pág. 320, 1922.

el acero, es, en este punto, relativamente pequeña. El punto en que se presenta la máxima tensión tangencial se encuentra en el eje z , a una profundidad aproximadamente igual a la mitad del radio de la superficie de contacto. Dicho punto debe ser considerado como el más débil en el caso de que tratemos con materiales tales como el acero. La tensión tangencial máxima en ese punto (para $\nu = 0,3$) es, aproximadamente, $0,31q_0$.

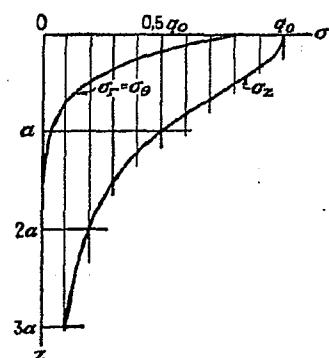


FIG. 209

En el caso de materiales frágiles tales, por ejemplo, como el vidrio, la posibilidad de fractura del material viene determinada por la máxima tensión de tracción. Esta tensión se presenta en la circunferencia límite de la superficie de contacto. Actúa según la dirección radial y tiene el valor

$$\sigma_r = \frac{(1 - 2\nu)}{3} q_0$$

La otra tensión principal que actúa según la dirección circumferencial, es igual, en valor absoluto, a la tensión radial citada, pero de signo opuesto. Tenemos, pues, que el contorno de la superficie de contacto, donde la presión normal sobre la superficie se anula, se encuentra sometido a un esfuerzo constante de valor $q_0(1 - 2\nu)/3$. Haciendo $\nu = 0,3$ este valor es $0,133q_0$. Esta tensión es muy inferior a la máxima tensión tangencial calculada anteriormente, pero es superior a la tensión tangencial que actúa en el centro de la superficie de contacto, donde la presión normal es máxima.

Con el fin de verificar la validez de los resultados teóricos de Hertz, para materiales que siguen la ley de Hooke y para tensiones inferiores al límite elástico, han sido realizados muchos ensayos¹.

¹ En el trabajo de G. Berndt, *Z. tech. Physik*, vol. 3, pág. 14, 1922, pueden encontrarse las referencias relativas a este asunto. Véase también *Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, vol. 3, pág. 120.

126. Caso general de presión entre dos cuerpos en contacto¹.

El caso general de la compresión entre dos cuerpos elásticos en contacto, puede ser tratado de igual manera que el caso de cuerpos esféricos que acabamos de estudiar. Consideraremos el plano tangente en el punto de contacto O , como plano xy (fig. 207). Las superficies de los cuerpos en la vecindad del punto de contacto, despreciando infinitésimos de orden superior, pueden ser representadas por las ecuaciones²

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 \\ z_2 &= B_1 x^2 + B_2 xy + B_3 y^2 \end{aligned} \quad (a)$$

La distancia entre dos puntos tales como M y N es, entonces,

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_2 + B_2)xy + (A_3 + B_3)y^2 \quad (b)$$

Tomando como direcciones x e y , aquellas que anulan el término que contienen el producto xy , cosa siempre posible, resulta

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (c)$$

donde A y B son constantes cuyo valor depende de la magnitud de las curvaturas principales de las superficies en contacto y del ángulo formado por los planos de curvatura principal de las dos superficies. Si R_1 y R_1' indican los radios principales de curvatura en el punto de contacto de uno de los cuerpos y R_2 y R_2' los del otro³, y si ψ es el ángulo comprendido entre los planos normales a los que pertenecen las curvas de curvatura $1/R_1$ y $1/R_2$, las constantes A y B vendrán determinadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) \\ B - A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\psi \right] \end{aligned} \quad (d)$$

Se puede demostrar que en la ecuación (c) A y B tienen el mismo signo, deduciéndose, por tanto, que todos los puntos separados por igual distancia $z_1 + z_2$, se encuentran en una elipse. Ocurre, pues, que al comprimir entre sí dos cuerpos según la dirección normal al plano tangente

¹ Esta teoría fue desarrollada por Hertz, *loc. cit.* La fuerza tangencial y el par de torsión en el contacto son considerados por R. D. Mindlin, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 16, pág. 259, 1949.

² Se supone que el punto O no es punto singular de las superficies de los cuerpos, siendo redondeada la superficie adyacente al punto de contacto, pudiendo ser considerada como de segundo grado.

³ La curvatura de un cuerpo es considerada positiva si el centro de curvatura correspondiente se encuentra en el interior del sólido. En la figura 207 las curvaturas de los cuerpos son positivas. En la figura 208b, la del asiento esférico es negativa.

en O , la superficie de contacto que se forma tendrá un contorno elíptico.

Dando a α , w_1 , w_2 , el mismo significado que en el párrafo precedente, se tendrá, para los puntos de la superficie de contacto,

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = \alpha \quad (e)$$

o bien,

$$w_1 + w_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$$

lo cual es resultado de simples consideraciones geométricas. Consideremos ahora la deformación local en la superficie de contacto. Suponiendo que dicha superficie es muy pequeña y aplicando la ecuación (205), obtenida para cuerpos semiindefinidos, la suma de los desplazamientos w_1 y w_2 de los puntos de las superficies de contacto será

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{q dA}{r} \quad (f)$$

donde qdA , es la presión que actúa sobre un elemento infinitamente pequeño de la superficie de contacto, y r la distancia de este elemento al punto que consideramos. La integración debe extenderse a toda la superficie de contacto. Empleando las notaciones (216) y haciendo uso de (e) y (f), obtenemos

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{q dA}{r} = \alpha - Ax^2 - By^2 \quad (g)$$

Nuestro problema, ahora, es obtener la distribución de presiones q que satisface la ecuación (g). H. Hertz demostró que este requisito queda satisfecho, suponiendo que la intensidad de las presiones q en la superficie de contacto, es la representada por las ordenadas de un semielipsoide construido sobre la superficie de contacto. La presión máxima se presenta, como es natural, en el centro de la superficie de contacto. Llamándola q_0 y señalando con las letras a y b los semiejes del contorno elíptico de la superficie de contacto, la magnitud de la presión máxima se obtiene a partir de la ecuación

$$P = \iint q dA = \frac{2}{3} \pi ab q_0$$

de donde se deduce

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad (223)$$

Vemos, pues, que la presión máxima es 1,5 veces la presión media sobre la superficie de contacto. Para calcular esta presión debemos conocer el valor de los semiejes a y b . Realizando un análisis análogo al efectuado para cuerpos esféricos, resulta

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} \quad (224)$$

$$b = n \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4(A + B)}}$$

donde $A + B$ está determinada por las ecuaciones (d) y los coeficientes m y n son números que dependen de la relación $(B - A)/(A + B)$. Usando la notación

$$\cos \theta = \frac{B - A}{A + B} \quad (h)$$

los valores de m y n , para distintos valores de θ , son los dados en la tabla siguiente¹:

$\theta =$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$m =$	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
$n =$	0,4930	0,5300	0,5670	0,6040	0,6410	0,6780	0,7170	0,7590	0,8020	0,8460	0,8930	0,9440	1,0000

Considerando, por ejemplo, el contacto de una rueda de llanta cilíndrica de radio $R_1 = 400$ mm con un rail cuyo hongo tiene un radio $R_2 = 306$ mm encontramos, sustituyendo $R_1' = R_2' = \infty$ y $\psi = \pi/2$ en las ecuaciones (d)

$$A + B = 0,0733 \quad B - A = 0,0099 \quad \cos \theta = 0,135 \quad \theta = 82^\circ 15'$$

Usando la tabla anterior e interpolando, obtenemos

$$m = 1,098, \quad n = 0,918$$

Sustituyendo las ecuaciones (224) y haciendo $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ y $\nu = 0,25^2$, resulta

$$a = 0,00946 \sqrt[3]{P}, \quad b = 0,00792 \sqrt[3]{P}$$

Para una carga $P = 409$ kg

$$a = 0,240 \text{ cm} \quad b = 0,201 \text{ cm} \quad \text{área de contacto } \pi ab = 0,152 \text{ cm}^2$$

y la presión máxima en el centro es

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = 4036 \text{ kg/cm}^2$$

¹ Esta tabla ha sido tomada del trabajo de H. L. Whittemore y S. N. Petrenko, U. S. Bur. Standards, Tech. Paper, 201, 1921.

² Si ν aumenta de 0,25 a 0,30, los semiejes (224) disminuyen aproximadamente en un 1 % y la presión máxima q_0 aumenta aproximadamente en un 2 %.

Una vez conocida la distribución de presiones, podemos calcular la tensión en cualquier punto¹. Se comprueba, de esta forma, que el punto con máxima tensión tangencial está en el eje z , a una cierta profundidad z_1 , pequeña, que depende de la magnitud de los semiejes a y b . Por ejemplo: $z_1 = 0,47a$, cuando $b/a = 1$; y $z_1 = 0,24a$ cuando $b/a = 0,34$. Los valores correspondientes de la máxima tensión tangencial (para $\nu = 0,3$) son $\tau_{\max} = 0,31q_0$ y $\tau_{\max} = 0,32q_0$, respectivamente.

Considerando los puntos de la superficie elíptica de contacto y tomando los ejes x e y en la dirección de los semiejes a y b , respectivamente, las tensiones principales en el centro de la superficie de contacto son

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2\nu q_0 - (1 - 2\nu)q_0 \frac{b}{a+b} \\ \sigma_y &= -2\nu q_0 - (1 - 2\nu)q_0 \frac{a}{a+b} \\ \sigma_z &= -q_0\end{aligned}\quad (k)$$

En los extremos de los ejes de la elipse, resulta $\sigma_x = -\sigma_y$ y $\tau_{xy} = 0$. La tensión de tracción según la dirección radial, es igual a la tensión de compresión según la dirección circunferencial. En estos puntos, pues, tenemos una solicitación de esfuerzo cortante. El valor de la misma para los extremos del eje mayor ($x = +a$, $y = 0$) es

$$\tau = (1 - 2\nu)q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{e} \operatorname{arctgh} e - 1 \right) \quad (l)$$

y para los extremos del eje menor ($x = 0$, $y = \pm b$)

$$\tau = (1 - 2\nu)q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta} \right) \quad (m)$$

donde $\beta = b/a$ y $e = (1/a)\sqrt{a^2 - b^2}$. Cuando b tiende a a , el contorno de la superficie de contacto tiende a tornar la forma de una circunferencia y las tensiones dadas por (k), (l) y (m) se aproximan a las obtenidas en el párrafo precedente para el caso de compresión entre dos esferas.

Un estudio más detallado de las tensiones en todos los puntos de la superficie de contacto, muestra² que para $e < 0,89$ la máxima tensión tangencial viene dada por la ecuación (l). Para $e > 0,89$ la tensión tangencial máxima se presenta en el centro de la elipse y se calcula mediante las ecuaciones (k).

Aumentando la relación a/b , obtenemos elipses de contacto cada vez

¹ Tales estudios han sido realizados por el profesor N. M. Belajef, véase *Bull. Inst. Engineers of Ways of Communications*, San Petersburgo, 1917, y *Memoirs on Theory of Structures*, San Petersburgo, 1924; véase también H. R. Thomas y V. A. Hoersch, *Univ. Illinois Eng Expt. Sta., Bull.*, 212, 1930, y G. Lundberg y F. K. G. Odqvist, *Proc. Ingenieurs Vetenskaps Akad.*, núm. 116, Estocolmo, 1932.

² Véase Belajef, *loc. cit.*

más estrechas y en el límite $a/b = \infty$ se produce el caso de contacto de dos cilindros de ejes paralelos¹. La superficie de contacto es ahora un rectángulo estrecho. La distribución de presión q a través de la anchura de la superficie de contacto (fig. 210), está representada por una semielipse.

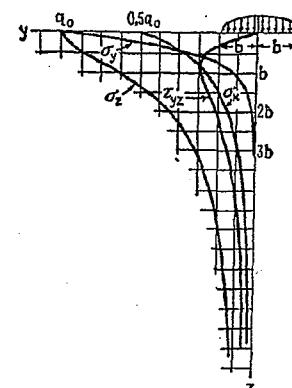


FIG. 210

Si el eje x es perpendicular al plano de la figura, b es la mitad de la anchura de la superficie de contacto y P' , carga por unidad de longitud de superficie de contacto, estará dada, conforme a la distribución de tensión semielíptica, por

$$P' = \frac{1}{2}\pi b q_0$$

de donde

$$q_0 = \frac{2P'}{\pi b} \quad (225)$$

El estudio de la deformación local nos da para la cantidad b la expresión

$$b = \sqrt{\frac{4P'(k_1 + k_2)R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (226)$$

donde R_1 y R_2 , son los radios de los cilindros y k_1 y k_2 constantes definidas por las ecuaciones (216). Si ambos cilindros son del mismo material y $\nu = 0,3$, resulta

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P'R_1 R_2}{E(R_1 + R_2)}} \quad (227)$$

¹ Una deducción directa de este caso con la consideración de la fuerza tangencial de contacto es dada por H. Roritsky, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, vol. 17, pág. 191, 1950.

Si los radios son iguales, $R_1 = R_2 = R$

$$b = 1,08 \sqrt{\frac{P'R}{E}} \quad (228)$$

Para el caso de contacto de un cilindro con una superficie plana

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P'R}{E}} \quad (229)$$

Llevando el valor de b que da la ecuación (226) a la (225), obtenemos

$$q_0 = \sqrt{\frac{P'(R_1 + R_2)}{\pi^2(k_1 + k_2)R_1R_2}} \quad (230)$$

Si el material de ambos cilindros es el mismo y $\nu = 0,3$

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P'E(R_1 + R_2)}{R_1R_2}} \quad (231)$$

En el caso del contacto de un cilindro con un plano

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P'E}{R}} \quad (232)$$

Una vez conocida q_0 y b , pueden calcularse las tensiones en cualquier punto. Estos cálculos muestran¹ que el punto con máxima tensión tangencial se encuentra en el eje z a una cierta profundidad. La variación de las componentes de la tensión con la profundidad, para $\nu = 0,3$, es la mostrada en la figura 210. La tensión tangencial máxima se da a la profundidad $z_1 = 0,78b$ y su valor es $0,304q_0$.

127. Choque de esferas. Los resultados de los dos últimos párrafos, pueden ser utilizados en el estudio del choque de cuerpos elásticos. Consideremos, como ejemplo, el choque de dos esferas (fig. 211). Tan pronto como las esferas entran en contacto en el punto O^2 , la fuerza de compresión P comienza a actuar cambiando las velocidades de las esferas. Si v_1 y v_2 son los valores de estas velocidades, las aceleraciones que definen la variación de las mismas, vienen dadas por las ecuaciones

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -P, \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = -P \quad (a)$$

en las que m_1 y m_2 señalan las masas de las esferas. Sea a la distancia que las dos esferas se aproximan como resultado de la compresión en O . La velocidad de esta aproximación será

$$\dot{a} = v_1 + v_2$$

¹ Véase Belujef, loc. cit.

² Suponemos que los movimientos tienen lugar a lo largo de la recta que une los centros de las esferas.

que, empleando las ecuaciones (a), queda

$$\ddot{a} = -P \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (b)$$

Las investigaciones realizadas muestran que la duración del choque, es decir, el tiempo durante el cual las esferas permanecen en contacto es muy grande comparado

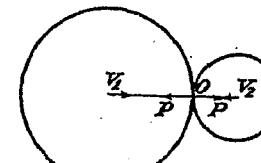


FIG. 211

con el período de la vibración de más baja frecuencia de las esferas¹. Las vibraciones pueden ser, por tanto, despreciadas, pudiendo suponerse que la ecuación (219) establecida para condiciones estáticas, sigue siendo válida durante el choque. Empleando las notaciones

$$n = \sqrt{\frac{16}{9\pi^2} \frac{R_1R_2}{(k_1 + k_2)^2(R_1 + R_2)}}, \quad n_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (c)$$

obtenemos, a partir de (219),

$$P = n\alpha \cdot \quad (d)$$

y la ecuación (b) se convierte en

$$\ddot{a} = -nn_1\alpha \cdot \quad (e)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por a , resulta

$$\frac{1}{2}d(\dot{a})^2 = -nn_1\alpha^2 da$$

que integrando, nos da

$$\frac{1}{2}(\dot{a}^2 - v^2) = -\frac{2}{3}nn_1\alpha a \quad (f)$$

donde v es la velocidad de aproximación de las dos esferas en el momento inicial del impacto. Si hacemos $a = 0$ en esta ecuación, obtenemos la aproximación de las esferas en el instante de máxima compresión a_1 , la cual es

$$a_1 = \left(\frac{5}{4} \frac{v^2}{nn_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (g)$$

Con este valor, podremos calcular, a partir de las ecuaciones (219), la máxima fuerza de compresión P que actúa entre las dos esferas durante el choque y el radio correspondiente a de la superficie de contacto.

La duración del impacto se calcula escribiendo la ecuación (f) de la forma siguiente

$$dt = \frac{da}{\sqrt{v^2 - \frac{2}{3}nn_1\alpha a}}$$

¹ Lord Rayleigh, Phil. Mag., serie 6, vol. 11, pág. 283, 1906.

o bien escribiendo $a/a_1 = x$ y empleando la ecuación (g)

$$dt = \frac{a_1}{v} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x)^2}}$$

de donde se deduce que la duración del choque es

$$t = \frac{2a_1}{v} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x)^2}} = 2.94 \frac{a_1}{v} \quad (233)$$

En el caso particular de dos esferas iguales, realizadas con el mismo material, y de radio R , se tendrá, con arreglo a la ecuación (g),

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{5 \sqrt{2} \pi \rho}{4} \frac{1 - v^2}{E} \right)^{\frac{1}{2}} R \\ t &= 2.94 \left(\frac{5 \sqrt{2} \pi \rho}{4} \frac{1 - v^2}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R}{(v)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (234)$$

donde ρ señala la densidad de las esferas.

Como vemos, la duración del choque es proporcional al radio de las esferas e inversamente proporcional a $(v)^{1/2}$. Este resultado ha sido verificado por varios investigadores¹. En el caso de barras largas con extremidades esféricas, el período de la vibración fundamental puede ser del mismo orden que la duración del choque, por lo que el estudio de la compresión local en el punto de contacto, debe tener en cuenta tales vibraciones².

128. Deformación de un cilindro circular cargado simétricamente. Con el fin de estudiar el caso del cilindro circular sometido a la acción de fuerzas aplicadas sobre la superficie lateral del mismo y distribuidas simétricamente con respecto a su eje, introducimos una función de tensión ϕ en coordenadas cilíndricas y aplicamos la ecuación (180)³. Esta ecuación es satisfecha si tomamos como función de tensión ϕ una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (a)$$

solución que puede tener la forma

$$\phi = f(r) \operatorname{sen} kz \quad (b)$$

en la que f es función de r solamente. Sustituyendo (b) en (a), obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria para la determinación de $f(r)$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = 0 \quad (c)$$

¹ M. Hamburger, *Wied. Ann.*, vol. 28, pág. 653, 1886; A. Dinnik, *J. Russ. Phys. Chem. Soc.*, vol. 38, pág. 242, 1906, y vol. 41, pág. 57, 1909. Otras referencias de la bibliografía que tratan sobre el tema son dadas en *Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, vol. 3, pág. 448, 1927.

² Véase página 495. El impacto longitudinal de varillas con extremos esféricos ha sido estudiado por J. E. Sears, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 14, pág. 257, 1908, y *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, pág. 49, 1912. El impacto lateral de las barras en el que se considera la compresión local fue estudiado por S. Timoshenko, *Z. Math. Physik*, vol. 62, pág. 198, 1914.

³ El problema de la deformación de un cilindro circular sujeto a la acción de fuerzas aplicadas sobre su superficie, fue tratado por primera vez por L. Pochhammer, *Crelle's J.*, vol. 81, 1876. Varios problemas de deformación simétrica de cilindros fueron estudiados por C. Chree, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 14, pág. 250, 1889. Véase también el trabajo de L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 198, 1902, que contiene las soluciones de varios problemas de interés práctico, referentes a la deformación simétrica de un cilindro.

Como integral de esta ecuación tornarnos la serie

$$f(r) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots \quad (d)$$

que sustituida en la ecuación (c), nos da la siguiente relación entre los coeficientes de la misma:

$$(2n)^2 a_n - k^2 a_{n-1} = 0$$

Despejando, obtenemos

$$a_1 = \frac{k^2}{2^2} a_0, \quad a_2 = \frac{k^2}{4^2} a_1 = \frac{k^4}{2^2 \cdot 4^2} a_0, \dots$$

Sustituyendo estos valores en la serie (d), resulta

$$f(r) = a_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{k^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \quad (e)$$

La segunda integral de la ecuación (c), puede ser expresada también en forma de una serie y se puede demostrar que toma el valor infinito cuando $r = 0$, por lo que no deberá ser considerada al estudiar la deformación de un cilindro macizo. La serie contenida en el paréntesis de la ecuación (e) es la función de Bessel de orden cero y de argumento imaginario, ikr ⁴. En lo que sigue, esta función será designada con la notación $J_0(ikr)$, escribiendo la función de tensión (b) de la forma

$$\phi_1 = a_0 J_0(ikr) \operatorname{sen} kz \quad (f)$$

La ecuación (180), tiene también soluciones diferentes de las de la ecuación (a). Una de ellas puede deducirse de la función $J_1(ikr)$. Derivando, obtenemos

$$\frac{dJ_0(ikr)}{d(ikr)} = -ikr \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{k^6 r^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right) \quad (g)$$

derivada de signo negativo, que recibe el nombre de función de Bessel de primer orden y que se denota por $J_1(ikr)$. Consideraremos ahora la función

$$f_1(r) = r \frac{d}{dr} J_0(ikr) = -ikr J_1(ikr) = \frac{k^2 r^2}{2} \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right) \quad (h)$$

Por diferenciación se demuestra que

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) f_1(r) = 2k^2 J_0(ikr)$$

Recordando que $J_0(ikr)$ es una solución de la ecuación (c), se deduce que $f_1(r)$ lo es de la ecuación

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} - k^2 f_1 \right) = 0$$

Así, pues, la solución de la ecuación (180) podrá adoptar la forma

$$\phi_2 = a_1 \operatorname{sen} kz J_1(ikr) \quad (i)$$

Combinando las soluciones (f) e (i) obtenemos la función de tensión

$$\phi = \operatorname{sen} kz [a_0 J_0(ikr) + a_1(ikr) J_1(ikr)] \quad (j)$$

⁴ Acerca de la ecuación diferencial (c) y de las funciones de Bessel, pueden consultarse las obras siguientes: A. R. Forsyth, *A Treatise on Differential Equations* y A. Gray y G. B. Mathews, *A Treatise on Bessel Functions*. Tablas numéricas sobre las funciones de Bessel pueden encontrarse en E. Jahnke y F. Emde, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, Berlin, 1909.

que llevada a las ecuaciones (179), nos da las siguientes expresiones para las componentes de la tensión

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \cos kz[a_0 F_1(r) + a_1 F_2(r)] \\ \tau_{rz} &= \sin kz[a_0 F_3(r) + a_1 F_4(r)]\end{aligned}\quad (k)$$

donde $F_1(r), \dots, F_4(r)$ son ciertas funciones de r que contienen a $J_0(ikr)$ y $J_1(ikr)$. Usando las tablas de las funciones de Bessel, podremos calcular fácilmente los valores de $F_1(r), \dots, F_4(r)$, cualquiera que sea r .

Si llamamos a al radio exterior del cilindro, las fuerzas aplicadas sobre su superficie estarán dadas, según las ecuaciones (k), por los siguientes valores de las componentes de la tensión:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \cos kz[a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a)] \\ \tau_{rz} &= \sin kz[a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a)]\end{aligned}\quad (l)$$

Eligiendo convenientemente las constantes k, a_0, a_1 , podremos estudiar diversos casos de carga simétrica. Llamando l a la longitud del cilindro y tomando

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

$$\begin{aligned}a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a) &= -A_n \\ a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a) &= 0\end{aligned}$$

obtenemos los valores de las constantes a_0 y a_1 para el caso en que una presión normal, $A_n \cos(n\pi z/l)$, actúa sobre la superficie lateral del cilindro. El caso en que $n = 1$ está representado en la figura 212. De igual forma, podemos obtener la solución para el caso en que fuerzas tangenciales de intensidad $B_n \sin(n\pi z/l)$, actúan sobre la superficie del cilindro.

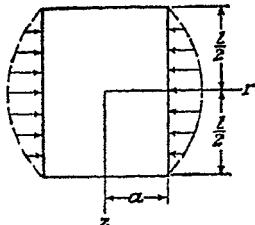


FIG. 212

Haciendo $n = 1, 2, 3, \dots$, y usando el principio de superposición, obtenemos las soluciones correspondientes a los problemas en los que sobre la superficie del cilindro actúan presiones normales que pueden ser expresadas por la serie

$$A_1 \cos \frac{\pi z}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad (m)$$

y fuerzas tangenciales expresables por la serie

$$B_1 \sin \frac{\pi z}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad (n)$$

Si, en lugar de la expresión (b), empleamos la función de tensión ϕ

$$\phi = f(r) \cos kz$$

llegaremos, por un procedimiento análogo al anterior, a la siguiente función de tensión

$$\phi = \cos kz[b_0 J_0(ikr) + b_1 J_1(ikr)] \quad (o)$$

en lugar de la expresión (j). Eligiendo convenientemente las constantes k, b_0, b_1 , obtenemos la solución para el caso en que las presiones normales que actúan sobre el cilindro, están representadas por una serie senoidal y las fuerzas tangenciales por una serie cosenoide. Combinando las soluciones (j) y (o), tendremos, por tanto, cualquier distribución de fuerzas normales y tangenciales simétricas respecto al eje.

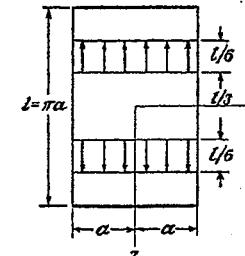


FIG. 213

Al mismo tiempo, existirán ciertas fuerzas distribuidas sobre los extremos del cilindro. Añadiendo una tracción o una compresión, podremos conseguir siempre que la resultante de tales fuerzas sea cero, con lo que su efecto a alguna distancia de los extremos se hace despreciable en virtud del principio de Saint-Venant. Varios ejemplos de carga simétrica de cilindros son estudiados por L. N. G. Filon en el trabajo anteriormente citado¹. Nosotros damos aquí los resultados finales, por él obtenidos para el caso mostrado en la figura 213. Se trata de un cilindro cuya longitud es igual a $n\pi a$, que es sometido a una acción extensora mediante fuerzas cortantes, que se distribuyen uniformemente sobre la porción de superficie del cilindro que se muestra rayada en la figura. La distribución de la tensión normal σ_z sobre las secciones transversales del cilindro, es de interés práctico y la tabla adjunta da la relación entre estas tensiones y la tensión media de tracción obtenida dividiendo la fuerza total de tracción por el área de la sección recta del cilindro. Como puede verse, las tensiones locales de tracción, en la proximidad de las porciones cargadas de la superficie, disminuyen rápidamente al aumentar su distancia a las mismas, tiendiendo al valor medio.

z	$r = 0$	$r = 0,2a$	$r = 0,4a$	$r = 0,6a$	$r = a$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,05l	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,10l	0,631	0,652	0,720	0,859	1,344
0,15l	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,20l	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

¹ Loc. cit. Véase también G. Pickett, *J. Applied Mechanics* (*Trans. A.S.M.E.*), vol. 11, pág. 176, 1944.

Otra aplicación de la solución general, expresada bajo forma de funciones de Bessel, es duda por A. Nádai al estudiar la flexión de placas circulares sometidas a una fuerza concentrada en el centro¹ (fig. 214).

129. Cilindro circular sometido a la acción de una presión sobre una banda de su superficie. Cuando un anillo corto se encoge estando abrazando un eje, las fórmulas sencillas, válidas cuando anillo y eje tienen iguales longitudes, dejan de ser exactas. Se obtiene una aproximación mucho mayor considerando el problema indicado en la figura 215a de un cilindro largo, sometido en la banda ABCD de su superficie, a la acción de una presión normal p .

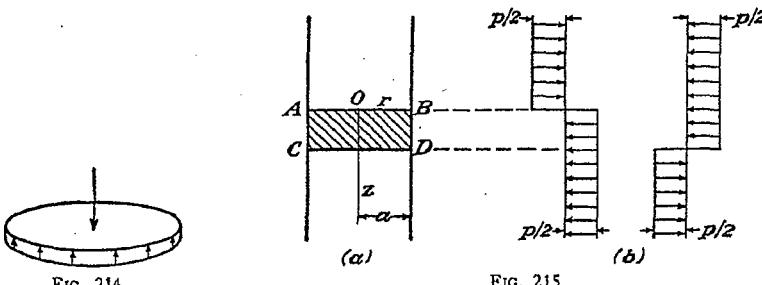


FIG. 215

La solución que buscamos puede obtenerse, evidentemente, superponiendo los efectos de las dos distribuciones de presión mostradas en la figura 215b. El problema básico, por tanto, es el correspondiente a la acción de una presión $p/2$ sobre la mitad inferior de la superficie cilíndrica y de otra $-p/2$ sobre la mitad superior. En la solución que damos a continuación, se considera que la longitud del cilindro es infinita.

Si comenzamos con la función de tensión dada en la ecuación (a) del § 128, llamando $I_0(kr)$ a $J_0(ikr)$, $iI_1(kr)$ a $J_1(ikr)$ y haciendo $b_1 = \rho b_1$, resulta

$$\phi = [\rho I_0(kr) - kr I_1(kr)] b_1 \cos kz \quad (a)$$

expresión que satisface a la ecuación (180) cualquiera que sea el valor de k . Si consideramos que k toma un cierto intervalo de valores, podemos hacer que b_1 dependa de k y del incremento dk , escribiendo

$$b_1 = f(k) dk$$

Llevando esta expresión a (a) y sumando todas las funciones de tensión así obtenidas, llegaremos a una función de tensión más general que toma la forma

$$\phi = \int_0^{\infty} [\rho I_0(kr) - kr I_1(kr)] f(k) \cos kz dk \quad (b)$$

Como veremos a continuación, es posible seleccionar la función $f(k)$ de forma tal que la función de tensión nos dé la solución del problema.

Según las ecuaciones (179) las tensiones tangenciales serán

$$\tau_{rs} = \int_0^{\infty} [\rho k I_0'(kr) - k^2 r I_1'(kr) - k I_1(kr) - 2k(1-\nu) I_0'(kr)] k^2 f(k) \cos kz dk \quad (c)$$

¹ A. Nádai, *Elastische Platten*, pág. 315, 1925.

donde el signo prima indica diferenciación respecto a kr . Esta tensión debe anularse en la superficie $r = a$. Poniendo $r = a$ en la expresión contenida entre corchetes e igualando ese corchete a 0, obtenemos una ecuación en ρ que nos da

$$\rho = 2(1-\nu) + ka \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \quad (d)$$

Las restantes condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} & \text{para } r = a, z > 0 \\ \sigma_r &= -\frac{p}{2} & \text{para } r = a, z < 0 \end{aligned} \quad (e)$$

El valor de σ_r obtenido a partir de (d), mediante las ecuaciones (179), es

$$\sigma_r = - \int_0^{\infty} \left[(1-2\nu-\rho) I_0(kr) + \left(kr + \frac{\rho}{kr} \right) I_1(kr) \right] k^2 f(k) \sin kz dk \quad (f)$$

Haciendo ahora uso del hecho de que

$$\left. \begin{aligned} 0 > z \text{ and } \frac{\pi}{2} - \\ 0 &= 0 \text{ para } z \\ \frac{\pi}{2} &< z < 0 \end{aligned} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \sin kz dk \quad (g)$$

y multiplicando por p/π obtenemos

$$\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{k} dk = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{2} \text{ para } z > 0 \\ 0 \text{ para } z = 0 \\ -\frac{p}{2} \text{ para } z < 0 \end{array} \right. \quad (h)$$

donde los valores de la derecha corresponden a los valores de σ_r en el contorno, dados por (e). Las condiciones de contorno (e) quedan, por tanto, cumplidas si hacemos el segundo miembro de la ecuación (f), con $r = a$, idéntico con el primer miembro de la ecuación (h). Esto exige que

$$-\left[(1-2\nu-\rho) I_0(ka) + \left(ka + \frac{\rho}{ka} \right) I_1(ka) \right] k^2 f(k) = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \quad (i)$$

ecuación que permite determinar $f(k)$. Las componentes de la tensión se obtienen, entonces, a partir de la función de tensión (b), aplicando las fórmulas (179), y resultan ser integrales de la misma naturaleza que la de la ecuación (f). Valores, obtenidos por integración numérica, pueden encontrarse en el trabajo de Rankin citado en la página 430. Las curvas de la figura 216 muestran la variación de las tensiones según la dirección axial para diversas distancias radiales, así como los desplazamientos superficiales.

Tales curvas han sido tomadas del trabajo de Barton (véase la pág. 430) habiendo sido obtenidas mediante un método que hace uso de las series de Fourier. A partir de estas curvas, se pueden obtener por superposición los resultados correspon-

¹ Véase, por ejemplo, I. S. Sokolnikoff, *Advanced Calculus*, primera edición, pág. 362

dientes al problema de la figura 215 en la manera explicada anteriormente. Las curvas de las tensiones y desplazamientos correspondientes a bandas de presión de diversas anchuras, son dadas en los trabajos citados. Cuando la anchura es igual al radio del cilindro, la tensión normal de dirección tangencial σ_θ en la superficie, y en el centro de la banda de presión, toma un valor superior en un 10 % al de la presión aplicada siendo, naturalmente, una compresión. La tensión axial σ_z en la superficie, en los puntos situados justamente encima de la banda de presión, es una tracción cuyo valor supera en un 45 % al de la presión aplicada. La tensión tangencial τ_{rz} alcanza el valor máximo, igual al 31,8 % de la presión aplicada, en los bordes AB y CD de la banda de presión (fig. 215) y justamente debajo de la superficie.

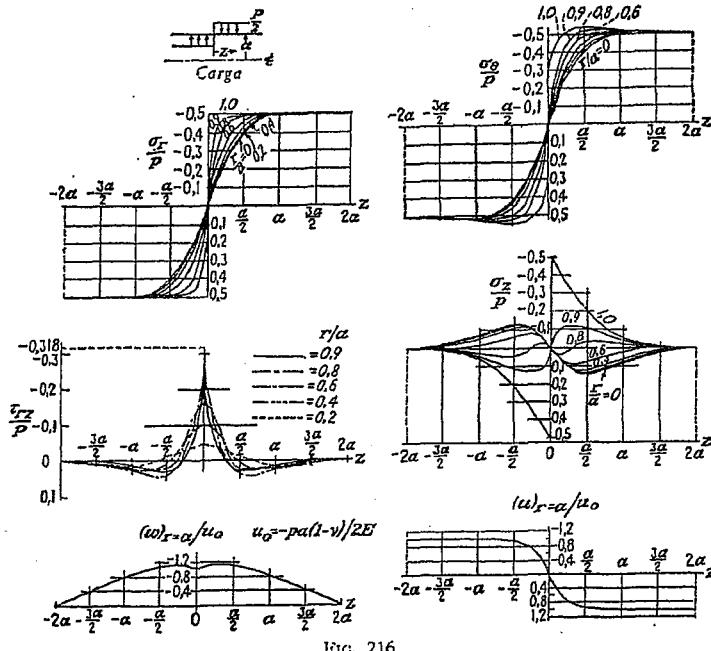


FIG. 216

Cuando la presión es aplicada sobre toda la superficie lateral del cilindro, cualquiera que sea la longitud del mismo, tenemos simplemente tensiones de compresión σ_z y σ_θ iguales a la presión, siendo σ_x y σ_{xz} iguales a cero.

De manera análoga, han sido obtenidas las soluciones correspondientes a una banda de presión actuando en un agujero de un sólido indefinido¹ y a una banda de presión actuando en la proximidad de uno de los extremos de un cilindro macizo².

¹ C. J. Tranter, *Quart. Applied Math.*, vol. 4, pág. 298, 1946; O. L. Bowie, *ibid.*, vol. 5, pág. 100, 1947.

² C. J. Tranter y J. W. Craggs, *Phil. Mag.*, vol. 38, pág. 214, 1947.

130. Torsión de un sector de anillo de sección circular. Este problema, es de interés práctico por estar relacionado con el cálculo de tensiones en los resortes helicoidales de espiras cerradas. Consideremos un sector de anillo sometido, en la forma que indica la figura 217, a la acción de dos fuerzas P iguales y opuestas.

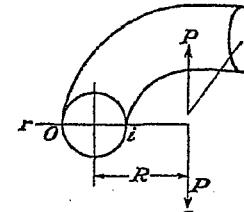


FIG. 217

Estas fuerzas originan el mismo par $M_t = PR$ en todas las secciones rectas del anillo. Si las dimensiones de las secciones transversales son pequeñas comparadas con el radio R , las fórmulas deducidas para la torsión de piezas prismáticas pueden ser utilizadas, con suficiente exactitud, para el cálculo de las tensiones. En el caso

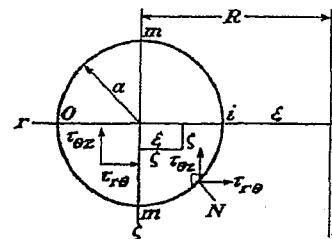


FIG. 218

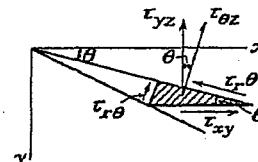


FIG. 219

de un resorte helicoidal grueso, las dimensiones de la sección transversal ya no son pequeñas y la diferencia de longitud entre las fibras circulares interiores y exteriores debe ser considerada. De esta forma, puede demostrarse que en los puntos interiores tales como el i , la tensión tangencial es considerablemente mayor que la dada por la teoría de la torsión de barras rectas¹. Una solución más rigurosa del problema puede obtenerse aplicando las ecuaciones generales de la teoría de la elasticidad, expresadas en coordenadas cilíndricas² [ecuaciones (170), pág. 344]. Admitiendo que en este caso de torsión las únicas componentes de la tensión no nulas son τ_{rz} y τ_{rz} (fig. 218), deducimos, de las ecuaciones (170),

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (a)$$

¹ Una teoría elemental de la torsión del sector de anillo fue desarrollada por V. Roever, *V.D.I.*, vol. 57, 1913. Véase también M. Pilgram, *Artill. Monatshefte*, 1913. La determinación experimental de la tensión máxima, realizada mediante la medida de la deformación en la superficie del resorte, ha sido realizada por A. M. Wahl, *Trans. A.S.M.E.*, 1928.

² Esta solución es debida a O. Göhrner, *Ingenieur-Archiv*, vol. 1, pág. 619, 1930; vol. 2, págs. 1 y 381, 1931; vol. 9, pág. 355, 1938.

Consideremos ahora las ecuaciones de compatibilidad (130). Segundo la figura 219 resulta

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{\theta z} \cos \theta \\ \tau_{xy} &= \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tau_{r\theta} \cos 2\theta\end{aligned}$$

Sustituyendo en la cuarta y quinta de las ecuaciones (130) y recordando que

$$\theta = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 0$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial z^2} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{4\tau_{r\theta}}{r^2} &= 0\end{aligned}\quad (b)$$

Las cuatro ecuaciones restantes [véanse ecuaciones (g), pág. 385], son satisfactorias como consecuencia de haber supuesto que $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_z = 0$. El problema se reduce, por tanto, a la resolución de las ecuaciones (a) y (b), resolución para cuya obtención empleamos la función de tensión ϕ . La ecuación (a) se satisface si tomamos

$$\tau_{r\theta} = \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (c)$$

donde G es el módulo de rigidez y R el radio del anillo. Sustituyendo (c) en las ecuaciones (b), resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= 0\end{aligned}$$

de donde se deduce que la expresión contenida en el paréntesis debe ser una constante. Llamando a esta constante $-2c$, la ecuación para determinar la función de tensión ϕ es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2c = 0 \quad (d)$$

Introduciendo ahora las coordenadas ξ y ζ en lugar de las r y z (fig. 218), definidas por

$$\xi = R - r, \quad \zeta = z$$

encontramos que la ecuación (d), toma la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + 2c = 0 \quad (e)$$

Considerando ξ/R como una pequeña cantidad y empleando el desarrollo

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{R}} = 1 + \frac{\xi}{R} + \frac{\xi^2}{R^2} + \dots \quad (f)$$

podremos resolver la ecuación (e) por aproximaciones sucesivas. Supongamos que

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots \quad (g)$$

y determinemos $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, de forma tal que satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \zeta^2} + 2c &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{3\xi}{R^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} &= 0\end{aligned}\quad (h)$$

A medida que el número de términos de la serie (g) aumenta, la suma de las ecuaciones (h) se va aproximando más y más a la ecuación (e) y la serie (g) tiende a la solución exacta que corresponde a la función ϕ . Consideremos ahora las condiciones de contorno. La tensión tangencial en la periferia (fig. 218), debe ser tangente a la misma, por lo que

$$\tau_{r\theta} \cos(N\xi) - \tau_{\theta z} \cos(N\zeta) = 0$$

que empleando las ecuaciones (c), queda

$$\frac{GR^2}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{ds} \right) = 0$$

lo que demuestra que ϕ debe ser constante en el contorno, condición que queda satisfecha empleando soluciones de las ecuaciones (h) que anulen a $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, en el contorno.

Obtenidas ϕ_0, ϕ_1, \dots , llegaremos a las componentes de la tensión por aproximaciones sucesivas mediante las ecuaciones (c). Introduciendo las nuevas variables ξ y ζ , estas ecuaciones pueden ser expresadas de la siguiente forma

$$\tau_{r\theta} = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (i)$$

Usando ahora el desarrollo

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} = 1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} + \dots$$

y la serie (g), obtenemos como primera aproximación

$$(\tau_{r\theta})_0 = G \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi}, \quad (\tau_{\theta z})_0 = G \frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta} \quad (j)$$

La segunda aproximación, deducida de (i), es

$$\begin{aligned}(\tau_{r\theta})_1 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right] \\ (\tau_{\theta z})_1 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} \right]\end{aligned}\quad (k)$$

y la tercera

$$\begin{aligned}(\tau_{r\theta})_2 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right] \\ (\tau_{\theta z})_2 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} \right]\end{aligned}\quad (l)$$

Aplicaremos ahora este método general al caso particular de un anillo de sección circular de radio a . La ecuación del contorno (fig. 218) es

$$\xi^2 + \zeta^2 - a^2 = 0 \quad (m)$$

y la solución de la primera de las ecuaciones (h) que satisface la ecuación de contorno, será

$$\phi_0 = -\frac{c}{2}(\xi^2 + \zeta^2 - a^2)$$

La primera aproximación para las componentes de la tensión, deducida de las ecuaciones (j), nos da

$$(\tau_{rs})_0 = -cG\xi, \quad (\tau_{\theta s})_0 = -cG\zeta \quad (n)$$

distribución que coincide con la correspondiente a un eje de sección circular. El valor del momento que a tal distribución corresponde, es

$$M_t = -\iint (\tau_{rs}\xi + \tau_{\theta s}\zeta) d\xi d\zeta \quad (o)$$

que sustituyendo las ecuaciones (n), resulta

$$(M_t)_0 = \frac{cG\pi a^4}{2}, \quad c = \frac{2(M_t)_0}{G\pi a^4}$$

Para obtener la segunda aproximación, utilizamos la segunda de las ecuaciones (h). Sustituyendo la expresión de ϕ_0 , anteriormente obtenida, encontramos

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} - \frac{3c\xi}{R} = 0$$

ecuación cuya solución, que satisface la condición de que ϕ_1 se anule en el contorno, es

$$\phi_1 = \frac{3c\xi}{8R}(\xi^2 + \zeta^2 - a^2)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (k), obtenemos la segunda aproximación para las componentes de la tensión:

$$\begin{aligned} (\tau_{rs})_1 &= -cG\left(\xi + \frac{5}{4}\frac{\xi r}{R}\right) \\ (\tau_{\theta s})_1 &= -cG\left[\xi + \frac{7}{8}\frac{\xi^2}{R} - \frac{3}{8R}(\xi^2 - a^2)\right] \end{aligned} \quad (p)$$

Remplazando ϕ_0 y ϕ_1 en la tercera de las ecuaciones (h), se tiene

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{8}\frac{c}{R^2}(\xi^2 + 3\xi^2 - 3a^2) = 0$$

La solución de esta ecuación que cumple la condición de contorno es

$$\phi_2 = -\frac{c}{64R^2}(\xi^2 + 5\xi^2 - 15a^2)(\xi^2 + \zeta^2 - a^2)$$

Empleando las ecuaciones (l) obtenemos la tercera aproximación para las componentes de la tensión

$$\begin{aligned} (\tau_{rs})_2 &= -cG\left[\xi + \frac{5}{4}\frac{\xi r}{R} + \frac{5}{16}\frac{\xi^3}{R^2}(27\xi^2 + 5\xi^2 - 10a^2)\right] \\ (\tau_{\theta s})_2 &= -cG\left[\xi + \frac{7\xi^2}{8R} - \frac{3}{8R}(\xi^2 - a^2) + \frac{13}{16}\frac{\xi^3}{R^2} - \frac{9}{16}\frac{\xi^5}{R^2} + \frac{1}{4}\frac{a^2\xi}{R^2}\right] \end{aligned} \quad (q)$$

expresiones que sustituidas en (o) nos dan el momento de torsión correspondiente:

$$(M_t)_2 = \frac{cG\pi a^4}{2} \left(1 + \frac{3}{16}\frac{a^2}{R^2}\right) \quad (r)$$

Determinando a partir de esta igualdad la constante c y sustituyéndola en las expresiones (q), podemos obtener las componentes de la tensión expresadas en función del par de torsión (M_t). A lo largo del diámetro horizontal de la sección transversal del anillo (fig. 218) $\xi = 0$, $\tau_{rs} = 0$, y según la segunda de las ecuaciones (q) resulta

$$(\tau_{\theta s})_2 = -cG \left(\xi + \frac{7}{8}\frac{\xi^2}{R} + \frac{13}{16}\frac{\xi^3}{R^2} + \frac{3a^2}{8R} + \frac{a^2\xi}{4R^2}\right)$$

Para el punto interior i , $\xi = a$, tendremos

$$(\tau_{\theta s})_2 = -cG a \left(1 + \frac{5}{4}\frac{a}{R} + \frac{17}{16}\frac{a^2}{R^2}\right)$$

Para el punto exterior 0, $\xi = -a$, y entonces

$$(\tau_{\theta s})_2 = cG a \left(1 - \frac{5}{4}\frac{a}{R} + \frac{17}{16}\frac{a^2}{R^2}\right)$$

Conforme a la ecuación (r), los valores de estas tensiones resultan

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta s})_2 &= \frac{-2M_t}{\pi a^3} \frac{1 + \frac{5}{4}\frac{a}{R} + \frac{17}{16}\frac{a^2}{R^2}}{1 + \frac{3}{16}\frac{a^2}{R^2}} = -\frac{2M_t}{\pi a^3} \left(1 + \frac{5}{4}\frac{a}{R} + \frac{7}{8}\frac{a^2}{R^2}\right) \\ (\tau_{\theta s})_2 &= \frac{2M_t}{\pi a^3} \left(1 - \frac{5}{4}\frac{a}{R} + \frac{7}{8}\frac{a^2}{R^2}\right) \end{aligned}$$

El cálculo de ulteriores aproximaciones, muestra que la expresión final de la máxima tensión tangencial es la siguiente¹:

$$(\tau_{\theta s})_2 = -\frac{2PR}{\pi a^3} \frac{\frac{1}{1 - (a/R)} + \frac{1}{4}\frac{a}{R} + \frac{1}{16}\left(\frac{a}{R}\right)^2}{1 - \frac{3}{16}\frac{(a/R)^2}{1 - (a/R)^2}} \quad (235)$$

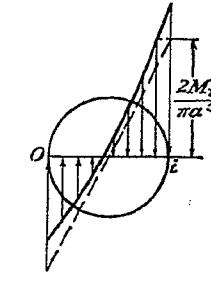


FIG. 220

La figura 220 representa la distribución de las tensiones tangenciales a lo largo del diámetro horizontal para el caso en que $a/R = 1/5$. Asimismo, y con fin comparativo, se ha dibujado la primera aproximación obtenida por aplicación de la fórmula correspondiente a un árbol de sección circular², línea de puntos.

El método descrito, ha sido aplicado también al problema de la torsión de sectores de anillos de sección transversal elíptica y rectangular³. Para una sección cuadrada de lados iguales a $2a$, la tercera aproximación da como tensión en el punto interior el siguiente valor:

$$(\tau_{\theta s})_3 = -\frac{0.6PR}{a^3} \left(1 + 1.20\frac{a}{R} + 0.50\frac{a^2}{R^2}\right) \quad (236)$$

¹ Esta fórmula la fue comunicada a S. Timoshenko por O. Göhner en una carta.

² Las soluciones elementales anteriormente citadas (véase pág. 433), dan para $(\tau_{\theta s})$ valores que concuerdan bastante bien con los resultados calculados mediante la ecuación (235).

³ O. Göhner, loc. cit.

131. Flexión simple de un sector de anillo de sección circular. El método de las aproximaciones sucesivas, empleado en la pregunta anterior, puede ser aplicado también al estudio de la flexión simple de un sector de un anillo de sección circular¹. Al aplicar dos pares iguales y opuestos M en los extremos de un sector de anillo circular en la forma que indica la figura 221 (tales pares actúan en el plano de la curva central del anillo), se produce una deformación simétrica respecto al eje z y las tensiones tangenciales τ_{rz} y $\tau_{\theta z}$, en las secciones transversales meridianas, son nulas. Las cuatro componentes restantes de la tensión, deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio que corresponden al caso de una deformación simétrica (véase § 116)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

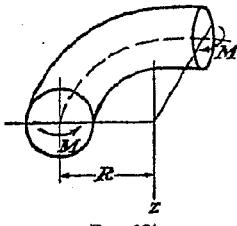


FIG. 221

y también las respectivas ecuaciones de compatibilidad [véanse ecuaciones (g), § 116]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Si se toma como ejemplo el caso de un anillo de sección circular constante, y se emplean las nuevas coordenadas ξ y ζ (fig. 218), definidas por

$$\xi = R - r, \quad \zeta = z \quad (c)$$

las ecuaciones (a) y (b) se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi \zeta}}{\partial \zeta} - \frac{\sigma_\xi - \sigma_\theta}{R - \xi} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\xi \zeta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} - \frac{\tau_{\xi \zeta}}{R - \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} - \frac{2}{(R - \xi)^2} (\sigma_\xi - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \xi} + \frac{2}{(R - \xi)^2} (\sigma_\xi - \sigma_\theta) - \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \xi} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{\xi \zeta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tau_{\xi \zeta}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \tau_{\xi \zeta}}{\partial \xi} - \frac{1}{(R - \xi)^2} \tau_{\xi \zeta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi \partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

Como primera aproximación, vamos a tomar la misma distribución tensional que se presenta en la flexión simple de barras prismáticas. Se tendrá, entonces,

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi)_0 &= (\sigma_\zeta)_0 = (\tau_{\xi \zeta})_0 = 0 \\ (\sigma_\theta)_0 &= -cE\xi \end{aligned} \quad (f)$$

¹ Göhner, loc. cit.

donde

$$c = \frac{4M}{\pi a^4 E}$$

Para obtener la segunda aproximación, podemos despreciar los términos en ξ/R , ya que ξ es pequeña comparada con R . Las ecuaciones (d) y (e) toman, entonces, la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_\xi)_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (\tau_{\xi \zeta})_1}{\partial \zeta} - \frac{cE\xi}{R} &= 0 \\ \frac{\partial (\tau_{\xi \zeta})_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (\sigma_\zeta)_1}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (d')$$

$$\Delta (\sigma_\xi)_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\Theta)_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (e')$$

$$\Delta (\sigma_\theta)_1 + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{1+\nu} \right) cE = 0$$

$$\Delta (\sigma_\zeta)_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\Theta)_1}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$\Delta (\tau_{\xi \zeta})_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\Theta)_1}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

donde el símbolo Δ significa $\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \zeta^2$.

Introduciendo ahora una función de tensión ϕ_1 , satisfaremos las ecuaciones (d')

si tomamos

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi)_1 &= \frac{cE}{2R} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2) + \frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} \\ (\sigma_\zeta)_1 &= \frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} \\ (\tau_{\xi \zeta})_1 &= -\frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \zeta} \end{aligned} \quad (g)$$

Sustituyendo (g) en las ecuaciones (e') hallamos que la función de tensión ϕ deberá cumplir la ecuación

$$\Delta \Delta \phi_1 = -\frac{1+2\nu}{1+\nu} \quad (h)$$

Las condiciones de contorno para ϕ_1 se deducen de las ecuaciones (12). Puesto que el primer término de la expresión de $(\sigma)_1$ es cero en el contorno circular, y

$$l = \frac{d\xi}{ds}, \quad m = -\frac{d\zeta}{ds}$$

resulta

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) = 0$$

Tenemos, pues, que $\partial \phi_1 / \partial \zeta$ y $\partial \phi_1 / \partial \xi$ son constantes a lo largo de la periferia y podemos admitir que ϕ_1 y $d\phi_1/dn$ son cero en el contorno. La ecuación (h), junto con estas condiciones de borde, determina completamente la función de tensión ϕ_1 . Es interesante destacar que la ecuación (h) y las condiciones de contorno arriba mencionadas son idénticas a las ecuaciones referentes al caso de la flexión de una placa empotrada en su borde sometida a una carga uniforme. Si se trata de una placa

circular, la superficie de deflexión, ya conocida, nos permite obtener la siguiente expresión para la función de tensión

$$\phi_1 = -\frac{1+2\nu}{64(1+\nu)} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2)^2 \quad (k)$$

Sustituyendo en (g), encontramos que las componentes de la tensión son

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi)_1 &= \frac{cE}{16R(1+\nu)} \{(7+6\nu)(\xi^2 - a^2) + (5+2\nu)\zeta^2\} \\ (\sigma_\zeta)_1 &= -\frac{cE(1+2\nu)}{16R(1+\nu)} (3\xi^2 + \zeta^2 - a^2) \\ (\tau_{\xi\zeta})_1 &= \frac{cE}{8R} \frac{1+2\nu}{1+\nu} \xi\zeta \end{aligned} \quad (l)$$

Remplazando estas expresiones en (e') obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\sigma_\theta)_1}{\partial\xi^2} &= -\frac{cE(4+5\nu+2\nu^2)}{2R(1+\nu)} \\ \frac{\partial^2(\sigma_\theta)_1}{\partial\zeta^2} &= \frac{cE(3\nu+2\nu^2)}{2R(1+\nu)} \\ \frac{\partial^2(\sigma_\theta)_1}{\partial\xi\partial\zeta} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando estas ecuaciones y ajustando las constantes de integración de forma tal que la distribución de tensiones normales que actúa sobre las secciones transversales del anillo sea estáticamente equivalente al momento flector M , obtenemos

$$(\sigma_\theta)_1 = -\frac{4M}{\pi a^4} \left[\xi + \frac{(8+10\nu+4\nu^2)\xi^2 - (6\nu+4\nu^2)\zeta^2 - (2+\nu)a^2}{8(1+\nu)R} \right] \quad (m)$$

Tomando $\xi = 0$ y $\zeta = a$, la tensión en el punto interior i (fig. 218), vendrá expresada por

$$(\sigma_\theta)_1 = \frac{4M}{\pi a^3} \left\{ 1 + \frac{6+9\nu+4\nu^2}{8(1+\nu)} \frac{a}{R} \right\}$$

Para $\nu = 0,3$ la ecuación anterior nos da

$$(\sigma_\theta)_1 = -\frac{4M}{\pi a^3} \left(1 + 0,87 \frac{a}{R} \right) \quad (n)$$

El cálculo de las aproximaciones ulteriores conduce a la siguiente expresión para la tensión en el punto interior¹ ($\xi = a$)

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[1 + 0,87 \frac{a}{R} + \frac{0,64(a/R)^2}{1-(a/R)} \right] \quad (p)$$

La teoría elemental de la flexión de piezas curvas, basada en la hipótesis de que las secciones transversales se conservan planas, nos da, para este caso², despreciando las tensiones

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[1 + 0,75 \frac{a}{R} + 0,50 \frac{a^2}{R^2} + \dots \right]$$

¹ Esta fórmula le fue comunicada a S. Timoshenko por O. Göhner en una carta.

² Véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 2.^a edición, vol. 2, pág. 73.

Tensiones de origen térmico



132. Casos sencillos de tensiones de origen térmico. Una de las causas que originan tensiones iniciales en un cuerpo, es el calentamiento no uniforme del mismo. Como sabemos, al elevar la temperatura, los elementos que componen un cuerpo, se dilatan. Tal dilatación no puede, por lo general, desarrollarse libremente en un cuerpo continuo, por lo que el calor provoca en el mismo tensiones internas. En muchos proyectos de maquinaria, tales como turbinas de vapor o motores Diesel, las *tensiones de origen térmico* revisten gran importancia debiendo ser estudiadas con todo detalle.

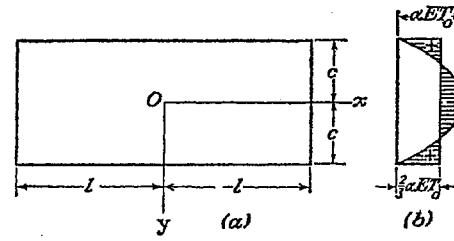


FIG. 222

Los problemas más sencillos de tensiones de origen térmico pueden reducirse fácilmente a problemas, ya estudiados, de fuerzas de contorno. Consideremos, para empezar, el caso de una placa rectangular delgada, de espesor uniforme, cuyos puntos se encuentran sometidos a una temperatura T que es función par de y (fig. 222) y que no depende de x y z .

La dilatación térmica longitudinal αT , quedará suprimida si en todo punto de la placa aplicamos tensiones longitudinales de compresión, de valor:

$$\sigma_x' = -\alpha' E \quad (a)$$

Dado que la placa puede extenderse libremente en dirección lateral, la aplicación de las tensiones (a) no producirá tensiones laterales, de donde se deduce que para mantener las tensiones (a) bastará con aplicar fuerzas compresivas de valor (a) en los extremos de la placa. Tales fuerzas suprimirán completamente la dilatación longitudinal de la placa provocada por la elevación de la temperatura T . Para obtener las tensiones térmicas existentes en la placa, cuando sobre ella no actúa ninguna fuerza exterior, tenemos que superponer a las tensiones (a) las producidas en la misma por la acción sobre sus extremos de fuerzas de tracción de intensidad αTE . La resultante de estas fuerzas es:

$$\int_{-c}^{+c} \alpha TE dy$$

y el efecto que producen a suficiente distancia de los extremos, será aproximadamente una distribución uniforme de tensiones, de valor:

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy$$

Así, pues, las tensiones térmicas existentes en la placa (de extremos libres) en puntos alejados de los extremos, serán:

$$\sigma_x = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy - \alpha TE \quad (b)$$

Suponiendo, por ejemplo, que la distribución de la temperatura es parabólica y que viene dada por la ecuación:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$$

obtenemos, según (b):

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \alpha T_0 E - \alpha T_0 E \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \quad (c)$$

Esta distribución tensional es la mostrada en la figura 222b. En los puntos próximos a los extremos, la repartición de tensiones producida por las fuerzas de tracción, no es uniforme, pero puede ser calculada mediante el método explicado en la página 196. Añadiendo a estas tensiones las dadas por (a), tendremos las tensiones térmicas correspondientes a los puntos próximos a los extremos de la placa.

Si la temperatura T no es simétrica respecto al eje x , comenzamos

de nuevo con las de compresión (a) que anulan la deformación ϵ_x . En los casos no simétricos, estas tensiones dan lugar, no solamente a una fuerza resultante $-\int_{-c}^{+c} \alpha ET dy$, sino también a un momento $-\int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy$,

por lo que para satisfacer las condiciones de equilibrio, debemos añadir a las tensiones de compresión (a) una tracción uniforme, que se determina en la forma indicada anteriormente y tensiones flectoras $\sigma_z'' = \alpha y/c$, que vienen determinadas por la condición de que el momento de las fuerzas distribuidas sobre una sección transversal debe ser nulo. Tendremos entonces:

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sigma y^2}{c} dy - \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy = 0$$

de donde:

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{3}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy, \quad \sigma_z'' = \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy$$

La tensión total será, pues:

$$\sigma_x = -\alpha ET + \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha ET dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ET y dy \quad (d)$$

En el estudio realizado, hemos supuesto que la placa era delgada en la dirección z . Imaginemos ahora, que la dimensión según esa dirección sea grande. Tenemos entonces una placa cuyo plano medio coincide con el xz y cuyo espesor es $2c$. Supongamos, asimismo, que la temperatura T sea como antes función de y solamente.

La dilatación libre de un elemento de la placa según las direcciones x y z , quedará suprimida completamente si aplicamos las tensiones σ_x , σ_z que se obtienen aplicando las ecuaciones (3) del § 6 en las que se hace $\epsilon_x = \epsilon_z = -\alpha T$, $\sigma_y = 0$. Estas ecuaciones nos dan entonces:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu} \quad (e)$$

Podemos mantener a los elementos en esta condición aplicando en las aristas ($x = \text{cte.}$, $z = \text{cte.}$), la distribución de fuerzas de compresión dada por (e). La tensión térmica en la placa libre de fuerzas exteriores se obtiene añadiendo a las tensiones (e) las que resultan de la aplicación de distribuciones de fuerzas iguales y opuestas en las aristas. Si T es una función par de y , tal que su valor medio a través del espesor de la placa es cero, la fuerza resultante por unidad de longitud de arista es nula y según el principio de Saint-Venant (§ 18), resulta que las tensiones que produce serán cero en todos los puntos excepto en aquellos próximos a la arista.

Si el valor medio de T no es cero, será necesario añadir a las tensiones de compresión (e) tracciones uniformes, correspondientes a la fuerza resul-

tante, según las direcciones x y z . Si además la temperatura no es simétrica respecto al plano xz , tendremos que agregar las tensiones de flexión. De esta forma llegamos a la siguiente ecuación final:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha TE}{1-\nu} + \frac{1}{2c(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy + \frac{3y}{2c^3(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha TE y dy \quad (f)$$

la cual es análoga a la (d), obtenida más arriba. Mediante la ecuación (f) podemos calcular fácilmente las tensiones de origen térmico, creadas por una determinada distribución de temperatura T , supuesto que esta distribución sea conocida.

Consideremos, por ejemplo, el caso de una placa, inicialmente a la temperatura uniforme T_0 , que es enfriada al mantener sus caras $y = \pm c$ a una temperatura constante T_1 . La teoría de Fourier da la siguiente distribución de temperatura para cualquier instante t :

$$T = T_1 + \frac{4}{\pi} (T_0 - T_1) \left(e^{-p_1 t} \cos \frac{\pi y}{2c} - \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \cos \frac{3\pi y}{2c} + \dots \right) \quad (g)$$

en la que $p_1, p_3 = 3^2 p_1, \dots, p_n = n^2 p_1$, representan ciertas constantes. Sustituyendo en (f), se tiene:

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \left[e^{-p_1 t} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \left(\frac{2}{3\pi} + \cos \frac{3\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{5} e^{-p_5 t} \left(\frac{2}{5\pi} - \cos \frac{5\pi y}{2c} \right) + \dots \right] \quad (h)$$

Al cabo de algún tiempo, el primer término adquiere una importancia predominante y entonces podremos admitir:

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right)$$

Para $y = \pm c$ tenemos tensiones de tracción:

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \frac{2}{\pi}$$

En el plano medio $y = 0$, obtenemos tensiones de compresión:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

Los puntos en los que las tensiones son nulas vienen dados por la ecuación:

$$\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} = 0$$

de la que se deduce:

$$y = \pm 0,560c$$

¹ Este problema fue resuelto por Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, serie 6, vol. 1, pág. 169, 1901.

Si las superficies $y = \pm c$ son mantenidas a dos temperaturas diferentes T_1, T_2 , se origina un flujo calorífico que después de cierto tiempo será estacionario. La temperatura, entonces, estará dada por la función lineal:

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \frac{y}{c} \quad (i)$$

Sustituyendo en la ecuación (f), vemos que si la placa puede dilatarse libremente las tensiones térmicas serán cero¹. Si se impide toda dilatación o rotación de los bordes, la tensión producida por el calentamiento viene dada por las ecuaciones (e). Si, por ejemplo, $T_2 = -T_1$, se tendrá, conforme a (i)

$$T = T_1 \frac{y}{c} \quad (j)$$

y la ecuación (e) da:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha T}{1-\nu} T_1 \frac{y}{c} \quad (k)$$

La tensión máxima es:

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_z)_{\max} = \frac{\alpha E T_1}{1-\nu} \quad (l)$$

En esta fórmula no figura el espesor de la placa, pero en el caso de una placa más gruesa, lo probable es que exista una mayor diferencia de temperaturas. Esto es lo que explica el que una placa gruesa de un material frágil, esté más expuesta a romperse bajo la acción de tensiones térmicas que una placa delgada.

Consideremos, para acabar, una esfera de radio grande y supongamos que un pequeño elemento esférico de la misma, de radio a , situado en el centro, sufre una elevación de temperatura T . Puesto que este elemento no puede dilatarse libremente, en su superficie se producirá una presión p . Las tensiones radial y tangencial que esa presión produce en un punto cualquiera de la esfera, distante $r > a$ del centro, pueden obtenerse aplicando las ecuaciones (197) y (198) (véase la pág. 399). Suponiendo que el radio exterior de la esfera sea muy grande, comparado con a , resulta:

$$\sigma_r = -\frac{pa^3}{r^3}, \quad \sigma_t = \frac{pa^3}{2r^3} \quad (m)$$

A la distancia $r = a$, se tiene:

$$\sigma_r = -p, \quad \sigma_t = \frac{1}{2}p$$

¹ En general, cuando T es función lineal de x, y, z , la deformación correspondiente a la libre dilatación de cada elemento, es decir a:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

satisface las ecuaciones de compatibilidad (129), por lo que no existirán tensiones térmicas.

y el aumento de ese radio, producido por la presión p , será:

$$\Delta r = (ae_i)_{r=a} = \frac{a}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_r + \sigma_t)]_{r=a} = \frac{pa}{2E} (1 + \nu)$$

aumento que deberá ser igual al producido por la elevación de la temperatura y la presión p en el elemento esférico.

Tenemos entonces:

$$\alpha Ta - \frac{pa}{E} (1 - 2\nu) = \frac{pa}{2E} (1 + \nu)$$

de donde:

$$p = \frac{2}{3} \frac{\alpha TE}{1 - \nu} \quad (n)$$

Sustituyendo en (m), obtenemos las relaciones siguientes para las tensiones en el exterior del elemento calentado.

$$\sigma_r = -\frac{2}{3} \frac{\alpha TE a^3}{(1 - \nu) r^3}, \quad \sigma_t = \frac{1}{3} \frac{\alpha TE a^3}{(1 - \nu) r^3} \quad (o)$$

133. Algunos problemas planos de tensiones de origen térmico.

Supongamos que una faja de una placa delgada (fig. 223), es calentada de forma no uniforme, de manera tal que la temperatura T sea función de x solamente, manteniéndose constante a lo largo de cualquier sección recta.

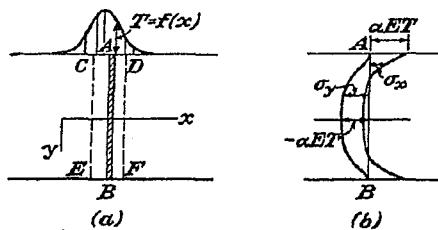


FIG. 223

Si la placa es cortada en bandas tales como la AB (fig. 223), esas bandas sufrirán dilataciones verticales diferentes. Es por ello, y a causa del enlace mutuo entre esas bandas en el conjunto de la pieza, que se producirán tensiones.

Considerando las bandas como si fueran libres, podremos suprimir su dilatación vertical sometiéndolas a las tensiones de compresión:

$$\sigma_y = -\alpha ET \quad (a)$$

las cuales son aplicadas en los extremos A y B de cada banda. Conseguimos entonces, que las distintas bandas se presenten como si la placa no hubiera sido calentada. Para obtener las tensiones térmicas, debemos añadir a (a) la tensión producida por la aplicación de fuerzas iguales y opuestas, es decir, de una tracción de valor αET , a lo largo de los bordes $y = \pm c$ de la faja.

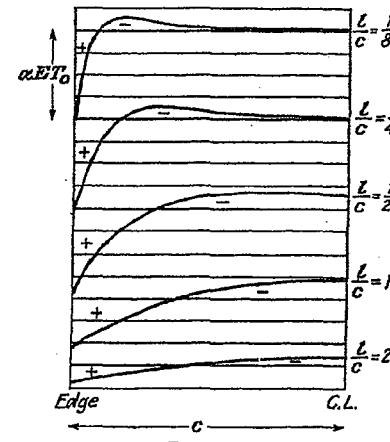


FIG. 224

Si el calentamiento se limita a una zona de la faja corta en comparación con su anchura, $2c$, tal como la $CDFE$ de la figura 223, el efecto de las tracciones αET se hará notar solamente en la proximidad de CD , en el borde superior y de EF en el borde inferior. Podemos, pues, considerar, que estas dos zonas representan un problema del tipo estudiado en el § 34. Hemos mostrado en la página 121 que una tensión normal aplicada sobre un borde recto produce una tensión igual, normal, sobre ese borde, que es paralela al mismo. Las tracciones αET producirán, por tanto, una tensión de tracción αET en la dirección x . Las dos tensiones normales se anulan cuando se penetra en el interior de la placa perpendicularmente a la arista. Si estas tensiones son superpuestas a la compresión (α) de dirección y , podemos trazar curvas¹ que dan σ_x y σ_y a lo largo de una línea tal como la AB , trazada en la parte más caliente de la pieza, cuyo aspecto es el mostrado en la figura 223b. Cerca de los bordes, la tensión predominante es σ_x , cuyo valor es αET y cuyo signo es el de una tracción cuando T es positivo. Las tensiones máximas toman el valor αET_{max} .

Si la temperatura T es función periódica de x , la aplicación de las tracciones αET representa un problema del tipo considerado en el § 23. Cuando:

$$T = T_0 \sin \alpha x \quad (b)$$

¹ J. N. Goodier, *Physics*, vol. 7, pág. 156, 1936.

las ecuaciones (k) del § 23, poniendo $A = B = -\alpha ET_0$ y teniendo en cuenta (f), nos dan:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2\alpha ET_0 \frac{(ac \operatorname{ch} ac - sh ac) \operatorname{ch} ay - ay \operatorname{sh} ay \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \cdot \operatorname{sen} ax \\ \sigma_y &= 2\alpha ET_0 \frac{(ac \operatorname{ch} ac + sh ac) \operatorname{ch} ay - ay \operatorname{sh} ay \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \cdot \operatorname{sen} ax \\ \tau_{xy} &= 2\alpha ET_0 \frac{ac \operatorname{ch} ac \operatorname{sh} ay - ay \operatorname{ch} ay \operatorname{sh} ac}{\operatorname{sh} 2ac + 2ac} \cdot \cos ax\end{aligned}$$

Las tensiones térmicas en la placa¹ vienen, pues, dadas por aquellas cuya expresión acabamos de dar, junto con la tensión de compresión $\sigma_y = -\alpha ET$ de la ecuación (a). La figura 224 muestra la variación de σ , a lo largo de las líneas de temperatura máxima para distintos valores de la longitud de onda $2l = 2\pi/a$. Vemos que la tensión máxima aumenta cuando la longitud de onda disminuye, tendiendo hacia el valor αET_0 . Obtenida la solución para el caso de una distribución sinusoidal de la temperatura, pueden tratarse otros casos en los que la temperatura es función periódica de x . Puede igualmente concluirse, que la tensión máxima en una placa de longitud finita difiere sólo ligeramente del valor αET_0 , obtenido para una placa infinita.

134. Disco circular delgado. Repartición de temperatura simétrica respecto al centro. Si la temperatura T no varía a lo largo del espesor del disco, podemos suponer que ocurre lo mismo con las tensiones y desplazamientos producidos por el calentamiento. Las tensiones σ_r y σ_θ satisfacen la ecuación de equilibrio:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (a)$$

deducida de la ecuación (40), página 83, haciendo $R = 0$. La tensión tangencial τ_{xy} será nula por razones de simetría.

Las relaciones (52) entre tensión y deformación, deberán ser modificadas ya que la deformación es debida por una parte a la dilatación térmica y por otra a la tensión. Si ϵ , representa la deformación radial real, $\epsilon_r - \alpha T$ será la parte correspondiente a la tensión. Tendremos entonces:

$$\epsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (b)$$

y de forma semejante:

$$\epsilon_\theta - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (c)$$

¹ Este problema fue estudiado por J. P. Den Gartog, *J. Franklin Inst.*, vol. 222, pág. 149, 1936, al investigar las tensiones de origen térmico producidas durante el proceso de la soldadura.

Despejando σ_r y σ_θ de (b) y (c), resulta:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta - (1 + \nu) \alpha T],$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r - (1 + \nu) \alpha T] \quad (d)$$

con lo que la ecuación (a) toma la forma:

$$r \frac{d}{dr} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) + (1 - \nu)(\epsilon_r - \epsilon_\theta) = (1 + \nu) \alpha r \frac{dT}{dr} \quad (e)$$

Si u es el desplazamiento radial tenemos, según el § 28:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (f)$$

Sustituyendo en (e) obtenemos:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1 + \nu) \alpha \frac{dT}{dr}$$

expresión que puede ser escrita en la forma:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] = (1 + \nu) \alpha \frac{dT}{dr} \quad (g)$$

La integración de esta ecuación da:

$$u = (1 + \nu) \alpha \frac{1}{r} \int_a^r Tr dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (h)$$

donde el límite inferior de integración, a , puede ser elegido arbitrariamente. Para un disco con un agujero, puede ser el radio interior. Para un disco macizo podemos tomar $a = 0$.

Las componentes de la tensión se obtienen, ahora, llevando la solución (h) a las ecuaciones (f) y sustituyendo los resultados en (d). Se tiene

$$\sigma_r = -\alpha E \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr + \frac{E}{1 - \nu^2} \left[C_1(1 + \nu) - C_2(1 - \nu) \frac{1}{r^2} \right] \quad (i)$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr - \alpha ET + \frac{E}{1 - \nu^2} \left[C_1(1 + \nu) + C_2(1 - \nu) \frac{1}{r^2} \right] \quad (j)$$

donde las constantes C_1 y C_2 vienen determinadas por las condiciones de contorno.

Para un disco macizo tomamos $a = 0$ y observando que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r Tr dr = 0$$

vemos, según la ecuación (h), que C_2 debe anularse para que u sea nula en el centro. En el borde $r = b$, debemos tener $\sigma_r = 0$, de donde según la ecuación (i):

$$C_1 = (1 - \nu) \frac{\alpha}{b^2} \int_0^b Tr dr$$

Las tensiones vendrán, pues, dadas por las relaciones:

$$\sigma_r = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right) \quad (237)$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left(-T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right) \quad (238)$$

que dan valores finitos en el centro, puesto que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr = \frac{1}{2} T_0$$

donde T_0 es la temperatura en el centro.

135. Cilindro largo de sección circular. En el estudio de este problema, se supone que la distribución de la temperatura es simétrica respecto al eje e independiente de la coordenada axial z^1 . Comenzaremos estudiando el caso en el que el desplazamiento axial w es idénticamente nulo y modificaremos a continuación la solución para incluir el caso de extremos libres.

Dada la simetría axial del problema y la uniformidad del mismo según esta dirección, las tres tensiones y las tres deformaciones tangenciales serán nulas, por lo que sólo tendremos que considerar las tres componentes σ_r , σ_θ , σ_z . Las relaciones tensión-deformación son:

$$\begin{aligned} \epsilon_r - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \epsilon_\theta - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \epsilon_z - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \end{aligned} \quad (239)$$

Teniendo en cuenta que $w = 0$, $\epsilon_z = 0$, la tercera de estas ecuaciones nos da

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET \quad (a)$$

Sustituyendo este valor en las dos primeras ecuaciones (239), resulta:

¹ La primera solución de este problema fue obtenida por J. M. C. Duhamel, *Mémoires... par divers savants*, vol. 5, pág. 440, París, 1838.

$$\begin{aligned} \epsilon_r - (1 + \nu) \alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_\theta \right) \\ \epsilon_\theta - (1 + \nu) \alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r \right) \end{aligned} \quad (b)$$

Vemos fácilmente que estas ecuaciones pueden deducirse a partir de las correspondientes a la tensión plana, ecuaciones (b) y (c) del párrafo precedente, sustituyendo en ellas E por $E/(1 - \nu^2)$, ν por $\nu/(1 - \nu)$ y α por $(1 + \nu)\alpha$.

Las ecuaciones (a) y (f) del párrafo precedente siguen siendo válidas. El cálculo de u , σ_r y σ_θ , se realiza exactamente de la misma forma. Podemos escribir, por tanto, los resultados, realizando las sustituciones citadas en las ecuaciones (h), (i) y (j). Obtenemos de esta manera

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{r} \int_a^r Tr dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (c)$$

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr + \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{C_1}{1 - 2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (d)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr - \frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{C_1}{1 - 2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (e)$$

y según (a):

$$\sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{2\nu EC_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (f)$$

Para mantener $w = 0$, es preciso que una fuerza normal, definida por la ecuación (f), sea aplicada en los extremos del cilindro. Añadiendo una tensión axial $\sigma_z = C_3$, podemos elegir C_3 de forma tal que la fuerza resultante sobre los extremos sea nula. La distribución de fuerzas de resultante nula que actúa sobre cada extremo, producirá únicamente tensiones locales, como se deduce del principio de Saint-Venant.

Las ecuaciones (d) y (e) seguirán dándonos las tensiones σ_r y σ_θ . El desplazamiento u , sin embargo, es afectado por la tensión axial C_3 , siendo necesario añadir al segundo miembro de (c) el término $-\nu C_3 r/E$. El desplazamiento axial será el correspondiente a la tensión uniforme C_3 .

Cilindro macizo. En este caso anulamos la cantidad a límite inferior de las integrales de las ecuaciones (c), (d) y (e). El desplazamiento u debe anularse para $r = 0$ lo que exige que $C_2 = 0$.

La constante C_1 se obtiene a partir de la condición de que sobre la superficie $r = b$ no actúe ninguna fuerza, o lo que es lo mismo, que $(\sigma_r)_r|_b = 0$. Haciendo entonces $C_2 = 0$ y $a = 0$ en la ecuación (d), resulta:

$$\frac{C_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{\alpha}{1 - \nu} \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr. \quad (g)$$

La resultante de la tensión axial (σ_z) es:

$$\int_0^b \sigma_z 2\pi r dr = -\frac{2\pi\alpha E}{1-\nu} \int_0^b Tr dr + \frac{2\nu EC_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \pi b^2$$

y la de la tensión axial uniforme C_3 es $C_3 \cdot \pi b^2$. El valor de C_3 que anula la fuerza axial total viene dado, entonces, por la relación.

$$C_3 \cdot \pi b^2 = \frac{2\pi\alpha E}{1-\nu} \int_0^b Tr dr - \frac{2\nu EC_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \pi b^2 \quad (h)$$

Las expresiones finales de u , σ_r , σ_θ , σ_z , deducidas de las ecuaciones (c), (d), (e), (f), (g) y (h), son:

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \left[(1-2\nu) \frac{r}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r} \int_0^r Tr dr \right] \quad (240)$$

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right) \quad (241)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr - T \right) \quad (242)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2\nu}{b^2} \int_0^b Tr dr - T \right) \quad (243)$$

Tomemos, por ejemplo, un cilindro largo cuya temperatura inicial sea constante e igual a T_0 . Si a partir del instante $t = 0$ la superficie lateral del cilindro se mantiene a temperatura cero¹, la distribución de la temperatura que corresponde a otro instante t , viene dada por la serie²

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\beta_n \frac{r}{b} \right) e^{-p_n t} \quad (i)$$

en la que $J_0(\beta_n r/b)$ es la función Bessel de orden cero (véase la pág. 427) y β es el símbolo de las raíces de la ecuación $J_0(\beta) = 0$. Los coeficientes de la serie (i) son:

$$A_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)}$$

y las constantes p_n vienen dadas por la ecuación:

$$p_n = \frac{k}{cp} \cdot \frac{\beta_n^2}{b^2} \quad (j)$$

¹ Se supone que la superficie del cilindro toma bruscamente la temperatura cero. Si la temperatura de la superficie es T_1 , debemos sustituir T_0 por $T_0 - T_1$ en las ecuaciones obtenidas.

² Véase Byerly, *Fourier Series and Spherical Harmonics*, pág. 229. El cálculo de las tensiones térmicas para este caso, puede encontrarse en A. Dinnik, *Applications of Bessel's Function to Elasticity Problems*, 2.^a parte, pág. 95. Ekaterinoslav, 1915. Véase también C. H. Lees, *Proc. Roy. Soc. (London)*, vol. 101, pág. 411, 1922.

en la que k es la conductibilidad térmica, c el calor específico del material y ρ la densidad. Sustituyendo la serie (i) en la ecuación (241) y teniendo en cuenta el hecho de que³:

$$\int_0^r J_0 \left(\beta_n \frac{r}{b} \right) r dr = \frac{b r}{\beta_n} J_1 \left(\beta_n \frac{r}{b} \right)$$

se obtiene:

$$\sigma_r = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1[\beta_n(r/b)]}{J_1(\beta_n)} \right\} \quad (k)$$

De igual forma, sustituyendo la serie (i) en la ecuación (242), resulta:

$$\sigma_\theta = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1[\beta_n(r/b)]}{J_1(\beta_n)} - \frac{J_0[\beta_n(r/b)]}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \quad (l)$$

Sustituyendo la serie (i) en la ecuación (243), tenemos:

$$\sigma_z = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left\{ \frac{2}{\beta_n^2} - \frac{J_0[\beta_n(r/b)]}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \quad (m)$$

Las fórmulas (k), (l) y (m) representan la solución completa del problema. En los trabajos de A. Dinnik y C. H. Lees, antes mencionados, se desarrollan algunos ejemplos numéricos⁴.

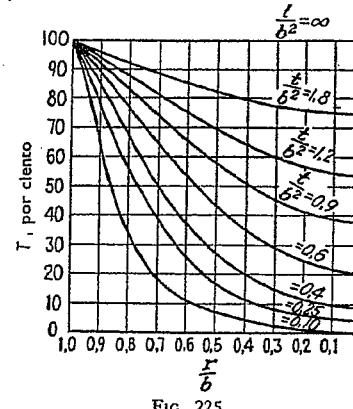


FIG. 225

La figura 225 representa⁵ la distribución de temperatura en un cilindro de acero, que se supone a temperatura inicial uniforme e igual a cero

¹ Véase E. Jahnke y F. Emde, *Funktionentafeln*, pág. 165, Berlin, 1909.

² La distribución de temperatura en los sólidos durante el proceso de calentamiento o enfriamiento ha sido estudiada por Williamson y Adams, *Phys. Rev.*, serie 2, vol. 14, pág. 99, 1919. Ingberg, Griffin, Robinson y Wilson han estudiado experimentalmente el efecto del fuego y del agua sobre las columnas. Véase U. S. Bur. Standards, *Tech. Paper*, 184, 1921.

³ Estos datos han sido tomados de A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, 6.^a edición, página 961, 1924.

y cuya superficie se mantiene a la temperatura T_1 a partir de un instante $t = 0$. Las diferentes curvas representan la distribución de temperatura a lo largo del radio para distintos valores de t/b^2 (t es medido en segundos y b en centímetros). De las ecuaciones (i) y (j) se deduce que la distribución de temperatura es la misma en distintos cilindros, si la duración del calentamiento es proporcional al cuadrado del diámetro. La figura permite calcular la temperatura media del cilindro completo y también la de una porción interior del mismo de radio r . Obtenidas estas temperaturas, obtenemos las tensiones térmicas mediante las ecuaciones (241), (242) y (243). Si tomamos para t un valor muy pequeño, las temperaturas medias antes mencionadas tienden a cero y en la superficie se tendrá:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_z = -\frac{\alpha ET_1}{1-\nu}$$

Este valor, que es el máximo que puede adquirir la tensión que se origina por calentamiento en un cilindro, equivale a la tensión necesaria para suprimir por completo la dilatación térmica en la superficie. Durante el calentamiento, esta tensión es una compresión y durante el enfriamiento, una tracción. Con el fin de reducir la tensión máxima, es corriente iniciar el calentamiento de áboles y rotores a una temperatura algo inferior a la final, T_1 , y aumentar el tiempo de calentamiento en proporción al cuadrado del diámetro de la pieza.

*Cilindro con un agujero central*¹. Si llamamos a al radio del agujero y b al radio exterior del cilindro, las constantes C_1 y C_2 , que figuran en las ecuaciones (c), (d) y (e), son determinadas mediante la condición de nulidad de σ_r para esos dos radios. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{a^2} &= 0 \\ -\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{b^2} \int_a^b Tr dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{b^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{-EC_2}{1+\nu} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{a^2}{b^2-a^2} \int_a^b Tr dr \\ \frac{EC_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2-a^2} \int_a^b Tr dr \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (d), (e) y (f) y añadiendo a la última la tensión axial C_3 , necesaria para anular la fuerza resultante axial, se obtienen las fórmulas

¹ Véase R. Lorenz, Z. Ver deutsch. Ing., vol. 51, pág. 743, 1907.

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - \int_a^r Tr dr \right) \quad (244)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr - Tr^2 \right) \quad (245)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - T \right) \quad (246)$$

Consideremos, por ejemplo, la existencia de un *flujo estacionario de calor*. Si la temperatura de la superficie interior del cilindro es T_i y la de la superficie exterior es cero, la temperatura T a una distancia cualquiera r del centro viene dada por la expresión:

$$T = \frac{T_i}{\log(b/a)} \log \frac{b}{r} \quad (n)$$

Llevando este valor a las ecuaciones (244), (245) y (246) obtenemos las siguientes expresiones para las tensiones de origen térmico¹:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[-\log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[1 - \log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right] \\ \sigma_z &= \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[1 - 2 \log \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{(b^2 - a^2)} \log \frac{b}{a} \right] \end{aligned} \quad (247)$$

Si T_i es positivo, la tensión radial es de compresión en todos los puntos, anulándose en las superficies interior y exterior del cilindro. Las componentes de la tensión σ_θ y σ_z toman sus valores máximos en esas mismas superficies. Haciendo $r = a$, resulta:

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu) \log \frac{b}{a}} \left(1 - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \log \frac{b}{a} \right) \quad (248)$$

Para $r = b$ se tiene:

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu) \log \frac{b}{a}} \left(1 - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \log \frac{b}{a} \right) \quad (249)$$

La figura 226 muestra la repartición de las tensiones de origen térmico a través del espesor de la pared cilíndrica para el caso particular en que

¹ L. Barker, Engineering, vol. 124, pág. 443, 1927, ha dado ciertos gráficos que facilitan el cálculo de las tensiones mediante las ecuaciones (247).

$a/b = 0,3$. Si T_i es positiva, las tensiones son de compresión en la superficie interior y de tracción en la superficie exterior. En el caso de materiales tales como piedra, ladrillo u hormigón, que son débiles a la tracción, es de temer la aparición de fisuras en la superficie exterior del cilindro.

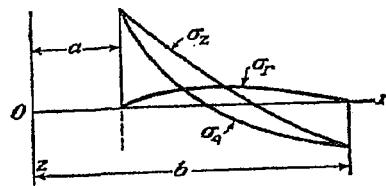


FIG. 226

Cuando el espesor de la pared del cilindro es pequeño, comparado con su radio exterior, las ecuaciones (248) y (249) pueden simplificarse poniendo

$$\frac{b}{a} = 1 + m, \quad \log \frac{b}{a} = m - \frac{m^3}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

y considerando que m es una cantidad pequeña. Resulta entonces:

$$(\sigma_z)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=b} = -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{m}{3}\right) \quad (248')$$

$$(\sigma_z)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{m}{3}\right) \quad (249')$$

Si la temperatura en la superficie exterior del cilindro es distinta de cero, los resultados anteriores podrán ser aplicados sin más que sustituir en todas las ecuaciones la temperatura T_i por la diferencia $T_i - T_o$ entre las temperaturas exterior e interior.

En el caso de una pared muy delgada podemos despreciar el término $m/3$ en comparación con la unidad, en las ecuaciones (248') y (249'). Resulta entonces:

$$(\sigma_z)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=b} = -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \quad (250)$$

$$(\sigma_z)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)}$$

lo que nos dice que la distribución de las tensiones de origen térmico, a través del espesor de la pared, es igual a la que se produce en el caso de una placa de espesor $2c = b - a$, cuando la temperatura viene dada por la ecuación (fig. 222):

$$T' = \frac{T_i y}{(b-a)}$$

y siempre que los bordes estén sujetos, de tal manera, que la flexión de la placa, producida por el calentamiento no uniforme, sea impedida [véase la ecuación (k) del § 132].

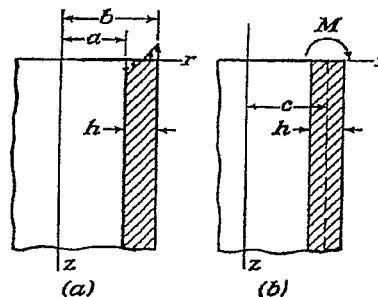


FIG. 227

Si al flujo estacionario de calor se superpone una fluctuación de temperatura de alta frecuencia, las tensiones que esta última provoca pueden ser calculadas de una manera análoga a la explicada para el caso de placas planas (véase el § 132)¹.

En el estudio precedente, se supuso que el cilindro es muy largo y el cálculo de las tensiones que hemos realizado es aplicable a las regiones alejadas de los extremos. Cerca de los mismos, las irregularidades locales complican el problema de la distribución de las tensiones de origen térmico, problema éste que vamos a considerar ahora para el caso de un cilindro de paredes delgadas. La solución (250) exige que las fuerzas normales, indicadas en la figura 227a, estén distribuidas sobre los extremos del cilindro. Para hallar las tensiones en un cilindro con extremos libres, debemos superponer a las tensiones (250) las producidas por fuerzas iguales y opuestas a las mostradas en la figura 227a, fuerzas que en el caso de una pared delgada de espesor h , pueden ser reducidas a momentos flectores, como se muestra en la figura 227b, uniformemente distribuidos a lo largo del borde del cilindro y cuyo valor por unidad de longitud es:

$$M = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{6} \quad (o)$$

¹ El cálculo de las tensiones de origen térmico en las paredes de los cilindros tiene gran importancia en el diseño de máquinas Diesel. G. Eichelberg (*Forschungsergebnisse*, núm. 263, 1923) ha dado una solución gráfica del problema para el caso en el que el espesor de la pared y la temperatura varían a lo largo del cilindro. Se puede encontrar información sobre la distribución de temperatura en los motores Diesel en los siguientes trabajos: H. F. G. Letson, *Proc. Mech. Eng.*, pág. 19, Londres, 1925; A. Nügel, *Engineering*, vol. 127, págs. 59, 179, 279, 456 y 626, 1929.

Para calcular las tensiones producidas por estos momentos, imaginemos una faja longitudinal de anchura unidad separada de la envolvente cilíndrica. Una faja tal puede ser tratada como si estuviese apoyada sobre una fundación elástica. La curva de deflexión de esta faja viene dada por la ecuación¹

$$u = \frac{M e^{-\beta z}}{2\beta^2 D} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad (p)$$

donde:

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{c^2 h^2}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (q)$$

y c es el radio medio del tubo cilíndrico. Esta curva de deflexión permite calcular las tensiones de flexión σ_z correspondientes y las tensiones tangenciales σ_θ para todo valor de z . La flecha máxima se encuentra evidentemente en el extremo $z = 0$, donde:

$$(u)_{z=0} = \frac{M}{2\beta^2 D} = \frac{\alpha c T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)}$$

La componente de la deformación, que corresponde a este valor, según la dirección tangencial, es:

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{c} = \frac{\alpha T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} \quad (r)$$

La componente de la tensión de dirección tangencial en la superficie exterior de la pared, se determina, empleando la ley de Hooke, por la ecuación:

$$\sigma_\theta = E \epsilon_\theta + \nu \sigma_z = \frac{\alpha E T_i \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} - \frac{\nu \alpha E T_i}{2(1-\nu)}$$

Sumando esta tensión a la tensión correspondiente calculada mediante la ecuación (250), obtenemos la tensión tangencial máxima para un cilindro de pared delgada y extremos libres, la cual es:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)} \left(\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3}} - \nu + 1 \right) \quad (251)$$

Tomando para ν el valor 0,3, resulta:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 1,25 \frac{\alpha E T_i}{2(1-\nu)}$$

¹ Véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 2.^a edición, vol. 2, pág. 166.

La tensión máxima de tracción en el extremo libre de un cilindro es, pues, un 25 % mayor que la obtenida mediante las ecuaciones (250), para los puntos alejados de los extremos. La ecuación (p) permite constatar que el aumento de la tensión en la cercanía de los extremos libres del cilindro es de carácter local, puesto que depende de la flecha u , y disminuye rápidamente cuando la distancia z al extremo aumenta.

Este método aproximado para el cálculo de las tensiones de origen térmico, basado en la curva de deflexión de una barra sobre fundación elástica, puede aplicarse también en el caso de una temperatura variable a lo largo del eje del cilindro¹.

136. Tensiones de origen térmico en una esfera. Estudiaremos aquí el caso sencillo de una distribución de temperatura simétrica respecto al centro, función, pues, solamente, del radio r^2 .

Por razones de simetría no habrá más que tres componentes de la tensión no nulas: la componente radial σ_r y dos componentes tangenciales σ_t , como en el § 121, las cuales deberán satisfacer la condición de equilibrio de un elemento en la dirección radial [fig. 202, ecuación (e), pág. 399].

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_t) = 0 \quad (a)$$

Las relaciones tensión-deformación serán:

$$\epsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_r - 2\nu\sigma_t) \quad (b)$$

$$\epsilon_t - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] \quad (c)$$

y siendo u el desplazamiento radial, tendremos

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r} \quad (d)$$

De (b) y (c), resulta:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_r + 2\nu\epsilon_t - (1+\nu)\alpha T] \quad (e)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\epsilon_t + \nu\epsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \quad (f)$$

¹ S. Timoshenko y J. M. Lessells, *Applied Elasticity*, pág. 147, 1925 y C. H. Kent, *Trans. A.S.M.E.*, Applied Mechanics Division, vol. 53, pág. 167, 1931.

² Este problema fue resuelto por Duhamel, *loc. cit.*; F. Neuman, *Abhandl. Akad. Wiss., Berlin*, 1841; véase también su *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper*, Leipzig, 1885; J. Hopkinson, *Messenger of Math.*, vol. 8, pág. 168, 1879. El caso de temperaturas no simétricas ha sido estudiado por C. W. Borchardt, *Monatsber. Akad. Wiss., Berlin*, 1873, pág. 9.

Llevando estas expresiones a la ecuación (a) y sustituyendo ϵ_r y ϵ_t por sus valores, dados por (d), resulta la siguiente ecuación diferencial para u :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \frac{dT}{dr} \quad (g)$$

la cual puede escribirse:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \frac{dT}{dr}$$

y cuya solución es:

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr^2 dr + C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad (h)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración que habrá que determinar con arreglo a las condiciones de contorno, y a cualquier límite inferior de integración conveniente, tal como el radio interior si se trata de una esfera hueca.

Esta solución puede ser llevada a las ecuaciones (d) y utilizar los resultados en las (e) y (f). Resulta entonces:

$$\sigma_r = - \frac{2\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \quad (i)$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} + \frac{EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{\alpha ET}{1-\nu} \quad (j)$$

Consideremos ahora algunos casos particulares:

Esfera maciza. En este caso, podemos dar el valor cero al límite inferior, a , de las integrales. Asimismo, es preciso que $u = 0$ para $r = 0$, lo que llevado a la ecuación (h) implica que $C_2 = 0$, puesto que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr^2 dr = 0$$

Las componentes de la tensión, dadas por (i) y (j), serán pues finitas en el centro, ya que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr = \frac{T_0}{3}$$

donde T_0 es la temperatura en el centro. La constante C_1 viene determinada por la condición de que la superficie exterior, $r = b$, esté libre de fuerzas, o lo que es lo mismo que $\sigma_r = 0$. Haciendo entonces $\sigma_r = 0$, $a = 0$, $C_2 = 0$, $r = b$, en la ecuación (i) resulta:

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr$$

de donde las componentes de la tensión serán:

$$\sigma_r = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr \right) \quad (252)$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr - T \right)$$

La temperatura media de la esfera en el interior de la superficie esférica de radio r es:

$$\frac{4\pi \int_0^r Tr^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr$$

Vemos, pues, que el valor de la tensión σ_r en un punto cualquiera, definido por el radio r , es proporcional a la diferencia entre las temperaturas medias de la esfera completa y de la esfera de radio r . La tensión tangencial, en un punto cualquiera, se obtiene multiplicando el coeficiente:

$$\frac{2\alpha E}{3(1-\nu)}$$

por la expresión

[Temperatura media de la esfera completa + (1/2 de la temperatura media de la esfera de radio r) - 3/2 T].

El cálculo de las tensiones en cada caso particular, puede realizarse sin dificultad si se conoce la distribución de la temperatura¹. G. Grünberg² ha desarrollado un ejemplo interesante de la aplicación de cálculos de este tipo, en relación con el estudio de la resistencia de materiales isotropos sometidos a una solicitación triaxial de tracciones iguales. Si una esfera maciza cuya temperatura inicial es T_0 es introducida en un líquido que se encuentra a una temperatura mayor T_1 , la porción exterior de la esfera se dilata, ejerciendo sobre el centro de la misma una tracción uniforme en todas las direcciones, cuyo valor máximo, acontece después de transcurrido el tiempo:

$$t = 0,0574 \frac{b^2 cp}{k} \quad (k)$$

En esta fórmula b es el radio de la esfera, k la conductibilidad térmica, c el calor específico del material y ρ la densidad.

¹ Varios ejemplos de tales cálculos son dados en el trabajo de E. Honegger, *Festchrift Prof. A. Stodola*, Zürich, 1929. En la obra citada de Adams y Williamson se da una tabla para el cálculo de la distribución de temperatura en una esfera durante su calentamiento o enfriamiento.

² G. Grünberg, *Z. Physik*, vol. 35, pág. 548, 1925.

La magnitud de esta tracción máxima es¹:

$$\sigma_r = \sigma_t = 0.771 \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} (T_1 - T_0) \quad (l)$$

La tensión máxima de compresión, que se produce en la superficie de la esfera en el momento de aplicar la temperatura T_1 , es igual a $\alpha E(T_1 - T_0)/1-\nu$. Este valor es el mismo que antes obtuvimos para un cilindro (véase la pág. 454). Aplicando las ecuaciones (k) y (l) al caso del acero y tomando $b = 10$ cm y $T_1 - T_0 = 100$ °C obtenemos $\sigma_r = \sigma_t = 1270$ kg/cm² y $t = 33.4$ s.

Esfera hueca. Llamando a y b a los radios interior y exterior de la esfera, determinamos las constantes C_1 y C_2 de las expresiones (i) y (j) empleando la condición de que σ_r sea cero en las superficies interior y exterior. La expresión (i) da:

$$\begin{aligned} \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{a^3} &= 0 \\ -\frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^3} \int_a^b Tr^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{b^3} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando C_1 y C_2 y llevando los valores encontrados a (i) y (j) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{r^3 - a^3}{(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr \right] \\ \sigma_t &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2r^3 + a^3}{2(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b Tr^2 dr + \frac{1}{2r^3} \int_a^r Tr^2 dr - \frac{1}{2} T \right] \end{aligned} \quad (253)$$

Vemos, pues, que las componentes de la tensión podrán ser calculadas cuando se conozca la distribución de temperatura.

Consideremos, a título de ejemplo, el caso de un flujo estacionario de calor. Llamaremos T_i a la temperatura de la superficie esférica interior y supondremos nula la temperatura en la superficie exterior. La temperatura a distancia r del centro es entonces:

$$T = \frac{T_i a}{b-a} \left(\frac{b}{r} - 1 \right) \quad (m)$$

Sustituyendo este valor en las expresiones (253), resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha ET_i}{1-\nu} \frac{ab}{b^3 - a^3} \left[a + b - \frac{1}{r} (b^2 + ab + a^2) + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right] \\ \sigma_t &= \frac{\alpha ET_i}{1-\nu} \frac{ab}{b^3 - a^3} \left[a + b - \frac{1}{2r} (b^2 + ab + a^2) - \frac{a^2 b^2}{2r^3} \right] \end{aligned}$$

¹ Hemos supuesto en este cálculo que la superficie de la esfera toma inmediatamente la temperatura T_1 del fluido.

Como vemos, la tensión σ_r es nula para $r = a$ y $r = b$. Se hace máxima o mínima cuando:

$$r^2 = \frac{3a^2b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

Para $T_i > 0$, la tensión σ_r aumenta a medida que r crece. Para $r = a$, tenemos:

$$\sigma_t = -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \frac{b(b-a)(a+2b)}{b^3 - a^3} \quad (n)$$

Si $r = b$, resulta:

$$\sigma_t = \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \frac{a(b-a)(2a+b)}{b^3 - a^3} \quad (o)$$

En el caso de una esfera hueca de pared delgada, podemos poner:

$$b = a(1+m)$$

donde m es una cantidad pequeña. Sustituyendo en (n) y (o) y despreciando las potencias superiores de m , obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{para } r = a, \quad \sigma_t &= -\frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{2}{3}m \right) \\ \text{para } r = b, \quad \sigma_t &= \frac{\alpha ET_i}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{2}{3}m \right) \end{aligned}$$

Si despreciamos la cantidad $2/3m$, obtenemos para las tensiones tangenciales los mismos valores que antes fueron deducidos para un cilindro de pared delgada [véase las ecuaciones (250)] y para una placa delgada empotrada en su contorno.

137. Ecuaciones generales. Las ecuaciones diferenciales (132) que expresan las condiciones de equilibrio en función de los desplazamientos, pueden ser generalizadas para incluir los casos de tensiones y deformaciones de origen térmico. Las relaciones tensión-deformación para los problemas tridimensionales son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \epsilon_z - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (b)$$

Las ecuaciones (b) no son afectadas por la temperatura, puesto que la dilatación térmica libre no produce ninguna distorsión angular en un cuerpo isotrópico.

Sumando las ecuaciones (a) y usando la notación definida en (7), resulta:

$$\epsilon = \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \theta + 3\alpha T$$

Despejando las tensiones de las ecuaciones (a) y empleando este resultado, obtenemos:

$$\sigma_x = \lambda \epsilon + 2G \epsilon_x - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \quad (c)$$

Llevando estas expresiones, así como las ecuaciones (6), a las ecuaciones de equilibrio (127) y suponiendo que las fuerzas másticas son nulas, resulta:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (254)$$

Estas ecuaciones remplazan a las (131) en el cálculo de las tensiones térmicas. En cuanto a las ecuaciones de contorno (128), sustituyendo los valores (c) y (b) y suponiendo que las fuerzas de superficie son nulas, nos quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} l &= \lambda \epsilon l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) \\ &\quad + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) \end{aligned} \quad (255)$$

Comparando las ecuaciones (254) y (255) con las (131) y (134) vemos que los términos:

$$-\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}$$

sustituyendo a las componentes X, Y, Z de las fuerzas másticas y los:

$$\frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} l, \quad \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} m, \quad \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} n$$

a las componentes $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, de las fuerzas de superficie. Los desplazamientos u, v, w , producidos por el cambio de temperatura T son, pues, los mismos que provocarían las fuerzas másticas:

$$X = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (d)$$

y las tensiones normales:

$$\frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \quad (e)$$

aplicadas sobre la superficie.

Si podemos determinar la solución de las ecuaciones (254) que satisfaga las condiciones de contorno (255), esta solución nos dará los desplazamientos u, v, w , a partir de los cuales, y mediante las ecuaciones (b) y (c), podremos determinar las tensiones tangenciales y normales. Estas últimas ecuaciones, las (c), nos muestran que las componentes normales de la tensión constan de dos partes: a) una parte deducida en la forma habitual de las componentes de la deformación; b) una presión hidrostática de valor:

$$\frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \quad (f)$$

proporcional en todo punto a la variación de temperatura en ese mismo punto. La tensión total producida por un calentamiento no uniforme se obtiene, pues, superponiendo la presión hidrostática (f) a las tensiones producidas por las fuerzas másticas (d) y las fuerzas de superficie (e).

A la misma conclusión podemos llegar por otro camino. Imaginemos, en efecto, que el cuerpo sometido a calentamiento no uniforme es subdividido en elementos infinitamente pequeños, y supongamos que las deformaciones térmicas $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T$, de estos elementos, son contrarrestadas por la aplicación a cada elemento de una presión uniforme p cuyo valor, conforme a la ecuación (8), viene dado por (f). De esta forma, la deformación térmica es eliminada y los elementos toman su posición mutua para formar un cuerpo continuo, que conserva su forma inicial. La distribución de la presión (f) puede realizarse aplicando al cuerpo inicial, formado por los elementos, ciertas fuerzas másticas y ciertas presiones superficiales, que deberán satisfacer a las condiciones de equilibrio (127) y a las de contorno (128). Sustituyendo en estas ecuaciones los valores:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -\frac{\alpha ET}{1 - 2\nu}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (g)$$

encontramos que: para mantener la forma inicial del cuerpo formado por los elementos, en su forma inicial, las fuerzas másticas necesarias son:

$$X = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad Z = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (h)$$

y además, deberá aplicarse la presión (f) sobre su superficie.

Supongamos, ahora, que los elementos están vinculados entre sí y suprimamos las fuerzas (h) y la presión superficial (f). Las tensiones térmicas

cas se obtendrán entonces, evidentemente, superponiendo a las presiones (f) las tensiones producidas en el cuerpo elástico por las fuerzas másicas:

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}$$

y por la tracción, normal a la superficie, de valor:

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu}$$

Estas últimas tensiones satisfacen a las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (256)$$

y a las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} m \\ \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} n \end{aligned} \quad (257)$$

junto con las condiciones de compatibilidad estudiadas en el § 77. La solución de estas ecuaciones, añadidas a la presión (f), nos da la expresión de las tensiones de origen térmico en un cuerpo sometido a un cambio de temperatura.

Tendremos un estado de *deformación plana* en un cuerpo alargado, cilíndrico o prismático, cuando la temperatura variable en la sección recta no varíe a lo largo de las paralelas al eje del cilindro o del prisma (el eje z). T es entonces, independiente de z .

Comenzando de nuevo con la aplicación de las tensiones (g) que anulan la deformación, tendremos que añadir las fuerzas másicas (h) en las que ahora $Z = 0$, y la presión (f) actuará sobre toda la superficie, extremos incluidos.

Supongamos, ahora, que estando los elementos unidos unos a otros, suprimimos las fuerzas másicas y la presión que actúa sobre la superficie lateral curvada, presión ésta que conserva nula la deformación axial ϵ_z . La distribución tensinal resultante, se obtiene resolviendo el problema que corresponde a la aplicación de las fuerzas másicas:

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (i)$$

y de la tracción normal:

$$\frac{\alpha ET'}{1-2\nu} \quad (j)$$

la cual actúa sobre la superficie lateral solamente. Este problema, que corresponde a un estado de deformación plana ($\epsilon_z = 0$), es del tipo considerado en el § 16 con la sola excepción de que es preciso pasar la ecuación (32) del caso de tensión plana al de deformación plana sustituyendo ν por $\nu/(1-\nu)$. De esta forma, las ecuaciones (31) y (32) serán remplazadas por:

$$\sigma_x - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (k)$$

y

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (l)$$

La función de tensión correcta es, pues, aquella que satisface la ecuación (l) y produce la tensión normal definida por (j) sobre el contorno. En lo que se refiere a las tensiones, se calculan mediante las relaciones (k) a las que deberemos superponer las tensiones (g).

La tensión axial σ_z se compondrá del término dado por (g) junto con el $\nu(\sigma_x + \sigma_y)$ deducido de (k). La fuerza axial y el momento flector resultantes en los extremos, podrán ser suprimidos superponiendo una tracción simple y un par de flexión simple.

El caso de *tensión plana* se presentará en una placa delgada en la que la temperatura no varía a través del espesor. Tomando como plano xy el plano medio de la placa, podremos suponer que $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Podremos, igualmente, considerar que todo elemento es libre de dilatarse en la dirección z . Bastará, pues, para unir a los elementos, con suprimir la dilatación en las direcciones x e y . Esto exige que:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\alpha ET'}{1-\nu}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (m)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de equilibrio (18) encontramos que las fuerzas másicas necesarias son iguales a:

$$X = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (n)$$

y que es preciso aplicar una compresión normal de valor $\alpha ET/(1-\nu)$ sobre el contorno de la placa.

Suprimiendo estas fuerzas, deducimos que la tensión térmica se compone de (m) y de las tensiones producidas por las fuerzas másicas:

$$X = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (o)$$

y por la tracción normal $\alpha ET/(1-\nu)$ aplicada sobre el contorno. La determinación de esta tensión plana constituye un problema del tipo considerado en el § 16. Basta solamente con poner en las ecuaciones (31) y (32) la función:

$$V = \frac{\alpha ET}{1-\nu}$$

como función potencial correspondiente a las fuerzas (o).

Cuando el contorno está fijo, el problema se reduce a la obtención de las tensiones producidas por las fuerzas másicas (o). En la página 185 fue explicado un método de resolución de este problema para el caso de una placa rectangular.

138. Tensiones iniciales. El método que hemos empleado para calcular las tensiones de origen térmico, puede ser aplicado al problema más general de las *tensiones iniciales*. Imaginemos un cuerpo subdividido en pequeños elementos y supongamos que cada uno de estos elementos, sufre una cierta deformación plástica, producida por una transformación metalográfica, definida por las componentes de la deformación

$$\epsilon_x', \quad \epsilon_y', \quad \epsilon_z', \quad \gamma_{xy}', \quad \gamma_{xz}', \quad \gamma_{yz}' \quad (a)$$

Supondremos que estas componentes de la deformación son pequeñas y que vienen representadas por funciones continuas de las coordenadas. Si las componentes de que se trata satisfacen, también, las condiciones de compatibilidad (129), los elementos en los que hemos subdividido el cuerpo se adaptan mutuamente después de la deformación permanente (a) y no habrá en él tensiones iniciales.

Consideremos, ahora, el caso más general en el que las componentes (a) no satisfacen las condiciones de compatibilidad, de forma que los elementos en los que el cuerpo está subdividido no se acomodarán entre sí después de la deformación permanente, lo que exige la aplicación de fuerzas sobre la superficie de cada uno de estos elementos, con el fin de satisfacer las ecuaciones de compatibilidad. Suponiendo que el material sigue siendo perfectamente elástico después de la deformación permanente y aplicando la ley de Hooke, deducirnos, de las ecuaciones (11) y (6), que la deformación permanente (a) puede ser eliminada aplicando a cada elemento las fuerzas superficiales:

$$\sigma_x' = -(\lambda\epsilon' + 2G\epsilon_x'), \quad \dots, \quad \tau_{xy}' = -G\gamma_{xy}', \quad \dots \quad (b)$$

en las que:

$$\epsilon' = \epsilon_x' + \epsilon_y' + \epsilon_z'$$

Las fuerzas de superficie (b) pueden ser provocadas aplicando al cuerpo, formado por los pequeños elementos, ciertas fuerzas máticas y superficiales, las cuales deberán satisfacer a las ecuaciones de equilibrio (127) y a las condiciones de contorno (128). Sustituyendo las componentes de la tensión (b) en estas ecuaciones, obtenemos para las fuerzas máticas la expresión:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda\epsilon' + 2G\epsilon_x') + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma_{xy}') + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma_{xz}') \quad (c)$$

y para las fuerzas superficiales la:

$$\bar{X} = -(\lambda\epsilon' + 2G\epsilon_x')l - G\gamma_{xy}'m - G\gamma_{xz}'n \quad (d)$$

Mediante la aplicación de las fuerzas máticas (c) y de las fuerzas superficiales (d) hemos suprimido la deformación inicial permanente (a), de manera que los elementos del cuerpo se ajustarán entre sí para formar un cuerpo continuo. Supongamos, ahora, que los elementos citados se unen entre sí y que suprimimos las fuerzas (c) y (d). Las tensiones iniciales se obtendrán entonces, evidentemente, superponiendo a las tensiones (b) las producidas en el cuerpo elástico por las fuerzas máticas:

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda\epsilon' + 2G\epsilon_x') - \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma_{xy}') - \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma_{xz}') \quad (e)$$

y por las fuerzas de superficie:

$$\bar{X} = (\lambda\epsilon' + 2G\epsilon_x')l + G\gamma_{xy}'m + G\gamma_{xz}'n$$

(f)

De esta manera, el problema de la determinación de las tensiones iniciales queda reducido al sistema corriente de ecuaciones de la teoría de la elasticidad, en la cual las fuerzas máticas y superficiales ficticias están completamente determinadas si se conoce la deformación permanente (a).

En el caso particular en el que $\epsilon_x' = \epsilon_y' = \epsilon_z' = aT$ y $\gamma_{xy}' = \gamma_{xz}' = \gamma_{yz}' = 0$, las ecuaciones anteriores coinciden con las obtenidas para el cálculo de las tensiones de origen térmico.

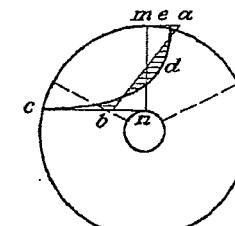


FIG. 228

Consideremos ahora el problema inverso en el que las tensiones iniciales son conocidas y queremos determinar la deformación permanente (a) que ha producido esas tensiones. En el caso de materiales transparentes, tales como el vidrio, las tensiones iniciales pueden ser estudiadas mediante el método fotoelástico (cap. 5). En otros casos, esas tensiones pueden ser determinadas cortando el cuerpo en pequeños elementos y midiendo las deformaciones que en ellos se dan como consecuencia de liberarlos de las fuerzas de superficie representativas de las tensiones que existen en el cuerpo antes de ser cortado. Del estudio precedente se deduce que la deformación inicial produce tensiones iniciales solamente cuando las componentes (a) de la deformación no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad; de no ser así esas deformaciones pueden existir sin que produzcan tensiones iniciales. De esto se sigue que el conocimiento de las tensiones iniciales no basta para determinar las componentes de la deformación (a). Obtenida una solución para esas componentes, podemos sumarlas cualquier sistema de deformación permanente que satisfaga las ecuaciones de compatibilidad sin alterar las tensiones iniciales¹.

Las tensiones iniciales, que provocan el fenómeno de la doble refracción en el vidrio, dificultan notablemente la fabricación de instrumentos ópticos. Para disminuir estas tensiones se recurre ordinariamente al recocido del vidrio. El límite elástico del vidrio a temperaturas elevadas es muy bajo, por lo que el material fluye bajo la acción de las tensiones iniciales. Después de un tiempo suficiente, el flujo plástico de la materia a la temperatura elevada se traduce en una considerable liberación de las tensiones iniciales. El recocido produce un efecto análogo cuando es aplicado a diversas aleaciones metálicas y productos forjados.

Cortando un cuerpo grande en piezas más pequeñas, se liberan las tensiones iniciales a lo largo de las superficies de corte y la energía total de deformación causada

¹ H. Reissner ha estudiado el hecho de que el conjunto (a) no esté determinado completamente por las tensiones iniciales. Véase Z. angew. Math. Mech., vol. 11, pág. 1, 1931.

por las tensiones iniciales disminuye. No ocurre siempre lo mismo, sin embargo, con el valor de la tensión inicial máxima. Consideremos, por ejemplo, un anillo circular (fig. 228) al que suponemos sometido a tensiones iniciales distribuidas simétricamente respecto al centro y cuya componente σ_θ' varía a lo largo de la sección recta mn de acuerdo con una ley lineal (ab en la figura). Cortando el anillo radialmente, en la forma en la que se indica en la figura, mediante líneas a trazos, se liberan las tensiones σ_θ' a lo largo de esos cortes. Esto equivale a aplicar en los extremos de cada porción de anillo dos pares iguales y opuestos que dan lugar a una flexión simple, la cual origina una distribución de la tensión σ_θ a lo largo de mn casi hiperbólica (véase el § 27), la cual es representada por la curva cde . Las tensiones residuales a lo largo de mn después de efectuar el corte vienen dadas por $\sigma_\theta + \sigma_\theta'$ y es mostrada en la figura por el área rayada. Si el radio interior del anillo es pequeño, existe una elevada concentración de tensiones en el contorno interior y la máxima tensión inicial después del corte, representada en la figura 228 por bc puede ser mayor que la máxima tensión inicial anterior al corte del anillo. Este razonamiento u otro análogo explica por qué el vidrio se fisura después de cortado¹.

139. Problemas bidimensionales con flujo estacionario de calor. En el caso de un flujo estacionario de calor paralelo al plano xy (flujo a través de una placa delgada o de un cilindro largo, por ejemplo), en el que la temperatura no varíe con z , esta magnitud, T , cumplirá la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

Consideremos un cilindro, que no ha de ser necesariamente circular, en un estado plano de deformación, con $\epsilon_z = \gamma_{zz} = \gamma_{yz} = 0$. Las relaciones tensión-deformación, en coordenadas cartesianas, serán análogas a las ecuaciones (a) y (b) del § 135, en el caso de deformación plana. Las ecuaciones correspondientes a (b) serán:

$$\begin{aligned} \epsilon_z - (1 + \nu) \alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y - (1 + \nu) \alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z \right) \end{aligned} \quad (b)$$

Preguntémonos ahora si es posible que σ_x , σ_y y τ_{xy} puedan ser nulos. Haciendo $\sigma_x = \sigma_y = 0$ en (b), tendremos:

$$\epsilon_x = (1 + \nu) \alpha T, \quad \epsilon_y = (1 + \nu) \alpha T \quad (c)$$

y naturalmente $\gamma_{xy} = 0$.

Una deformación tal es posible solamente si satisface las ecuaciones de compatibilidad (129). Dado que $\epsilon_z = 0$ y que las otras componentes

¹ Varios ejemplos del cálculo de las tensiones iniciales en los trozos cortados en una placa circular han sido estudiados por M. V. Laue, *Z. tech. Physik*, vol. 11, pág. 285, 1930. Diversos métodos de cálculo de las tensiones residuales son estudiados en el trabajo de N. Dawidenkov *Z. Metallkunde*, vol. 24, pág. 25, 1932.

de la deformación son independientes de z , todas esas condiciones son verificadas *a priori* excepto la primera. Esta se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 0$$

ecuación, que teniendo en cuenta las (c) y (a) será igualmente satisfecha. Vemos, pues, que en el caso de un flujo estacionario de calor las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno, según las cuales la superficie lateral no está sometida a ninguna fuerza, son satisfechas simultáneamente si tomamos:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_z = -\alpha E T \quad (d)$$

En el caso de un cilindro macizo las ecuaciones anteriores constituyen un conjunto completo, de donde podemos deducir que en un estado estacionario bidimensional de conducción térmica todas las tensiones térmicas son nulas excepto la tensión axial σ_z , la cual viene dada por la ecuación (d) y es necesaria para mantener las condiciones de deformación plana, $\epsilon_z = 0$.

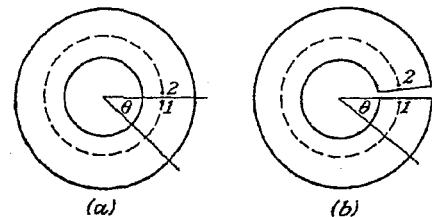


FIG. 229

En el caso de un cilindro alargado de extremos libres, obtenemos una solución aproximada, válida para todos los puntos excepto para aquellos próximos a los extremos, superponiendo una tracción, o una compresión simple, y una flexión simple tales que la fuerza y el momento resultantes en los extremos, producidas por σ_z , se anulen.

En el caso de un cilindro hueco, sin embargo, no podemos decir que las ecuaciones (d) resuelvan el problema de la deformación plana, siendo necesario estudiar los desplazamientos correspondientes. Es posible, en efecto, que éstas presenten discontinuidades análogas a las estudiadas en las páginas 93 y 148.

Supongamos, por ejemplo, que el cilindro sea un tubo en el que se ha hecho un corte longitudinal en la forma que se indica en la figura 229b. Si el interior del mismo se encuentra a una temperatura más elevada que el exterior, el tubo tenderá a abrirse y la ranura aumentará. Existirá una discontinuidad de desplazamiento entre los dos lados de la abertura, por lo que los desplazamientos deberán venir representados por una función

discontinua de θ . La sección recta forma un recinto simplemente conexo y las ecuaciones (d) dan correctamente las tensiones para el caso de deformación plana. Si, por el contrario, el tubo no presenta ninguna ranura (fig. 229a) las discontinuidades de los desplazamientos son imposibles, lo que implica que la distribución supuesta para la temperatura producirá, de hecho, componentes σ_x , σ_y , τ_{xy} , que representan las tensiones producidas al unir las caras separadas de la ranura (véase el § 39 y la fig. 82). La componente σ_z quedará igualmente modificada por esta operación.

Para estudiar esta cuestión con más detalle, escribamos de nuevo las ecuaciones (c) de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon', \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon' \quad (e)$$

donde $\epsilon' = (1 + \nu)\alpha T$. Dado que $\gamma_{xy} = 0$, tendremos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (f)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z \quad (g)$$

donde ω_z es una componente de rotación (véase la pág. 259). Las ecuaciones (f) y (g) nos dan:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega_z, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \omega_z \quad (h)$$

que juntamente con (e) nos permiten escribir:

$$\frac{\partial \epsilon'}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \epsilon'}{\partial y} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad (i)$$

relaciones éstas, que no son otras que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, estudiadas en el § 55. Estas relaciones muestran que $\epsilon' + i\omega_z$ es una función analítica de la variable compleja $x + iy$. Llamando a esta función Z , tenemos:

$$Z = \epsilon' + i\omega_z \quad (j)$$

Si u_1, v_1, u_2, v_2 son los valores de u y v en dos puntos 1 y 2 de la sección transversal del cilindro, las diferencias $u_2 - u_1, v_2 - v_1$, pueden expresarse de la forma:

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right), \quad v_2 - v_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

donde las integrales son tomadas a lo largo de una curva cualquiera, contenida en el cuerpo, que une los dos puntos. Multiplicando la segunda por i y sumándola a la primera, resulta:

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = \int_1^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \right] \quad (k)$$

relación cuya integral se comprueba fácilmente, a partir de las ecuaciones (e) y (h), que es igual que la $\int_1^2 (\epsilon' + i\omega_z) (dx + idy)$ ó $\int_1^2 Z dz$. La ecuación (k) toma entonces la forma:

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = \int_1^2 Z dz \quad (l)$$

Los desplazamientos serán uniformes si esta integral se anula para toda curva cerrada (tal, por ejemplo, como la circunferencia representada a trazos en la fig. 229a) que pueda ser trazada sobre el material de la sección recta. Este resultado será utilizado más adelante para resolver un problema de tensiones térmicas en un cilindro circular hueco.

Al igual que los desplazamientos, la rotación ω_z debe ser continua. Tenemos:

$$(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} dy \right)$$

que empleando las ecuaciones (i) nos queda:

$$(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1 = \int_1^2 \left(-\frac{\partial \epsilon'}{\partial y} dx + \frac{\partial \epsilon'}{\partial x} dy \right)$$

Dado que ϵ' es proporcional a T , esta integral es proporcional al calor que fluye, por unidad de tiempo y de distancia axial, a través de la línea que une los puntos 1 y 2. Si la curva que consideremos es cerrada $(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1$ será cero, debiendo serlo también, por tanto, el flujo total de calor a través de esa curva. Si en un tubo existe flujo de calor desde el interior hacia el exterior o viceversa, esta ecuación no es cumplida y las ecuaciones (d) no representarán correctamente el estado tensional.

Si el tubo presenta una ranura tal como la indicada en la figura 229b, el desplazamiento y la rotación pueden ser diferentes en el punto 2 y en el 1. Tal ocurre, por ejemplo, si el calentamiento ensancha la ranura. En ese caso el estado tensional dado por las ecuaciones (d) es correcto. Para obtener la distribución tensional correspondiente al caso del tubo sin ranura, tendremos que añadir las tensiones resultantes del cierre de la misma a las dadas por (d). La determinación de esas tensiones discontinuidad es un problema análogo a los ilustrados por las figuras 45 y 82¹.

Consideraremos, por ejemplo, el caso de un cilindro circular hueco de radio exterior b con un orificio concéntrico de radio a . Si la temperatura de la superficie interior es T , y la de la superficie exterior es cero, la temperatura T a una distancia r cualquiera del eje vendrá dada por la ecuación (n) del § 135. Esta expresión puede escribirse de la forma:

$$T = -A \log b + A \log r \quad (m)$$

en la que:

$$A = -\frac{T_i}{\log(b/a)} \quad (n)$$

y donde el término constante $-A \log b$ puede ser suprimido, ya que una variación uniforme de temperatura no provoca tensiones de origen térmico. Tendremos entonces, poniendo $\log z = \log r + i\theta$, que:

$$Z = \epsilon' + i\omega_z = (1 + \nu)\alpha T + i\omega_z \\ = (1 + \nu)\alpha A \log r + i\omega_z = (1 + \nu)\alpha A \log z$$

Llamando B a $(1 + \nu)\alpha A$ y usando la ecuación (l), tendremos:

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = B \int_1^2 \log z dz = B \left[z(\log z - 1) \right]_1^2 \quad (o)$$

¹ La relación entre las tensiones de origen térmico y las de discontinuidad para el caso de flujo estacionario de calor han sido establecidas por N. Muschelisvili, Bull. Elec. Tech. Inst., San Petersburgo, vol. 13, pág. 23, 1916, e independientemente por M. A. Biot, Phil. Mag., serie 7, vol. 19, pág. 540, 1935. E. E. Weibel ha estudiado fotelásticamente las tensiones térmicas en un cilindro circular hueco y en un prisma con un orificio circular, Proc. Fifth Intern. Congr. Applied. Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, pág. 213.

relación que se aplica a toda curva que une los puntos 1 y 2 a través del material que compone el cuerpo, y que expresa el desplazamiento relativo de un punto respecto a otro cuando la temperatura es la dada por (m) y la tensión la correspondiente a las ecuaciones (d).

Al considerar la curva circular de radio r que partiendo del punto 1, rodea el orificio y termina en el 2 tendremos (puesto que $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$):

$$[z(\log z - 1)]^2 = r e^{i2\pi} (\log r + i \cdot 2\pi) - r e^{i0} (\log r + i \cdot 0) = i \cdot 2\pi r$$

que llevado a (o), nos da:

$$u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = B \cdot 2\pi r \quad (p)$$

Al no ser cero el desplazamiento relativo, es necesario considerar que el cilindro presenta una ranura que permite que el punto 2 se separe del 1 el desplazamiento vertical $2\pi r B$ (fig. 229b). El movimiento del labio superior de la ranura respecto al labio inferior es equivalente a una rotación de valor $2\pi B$, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor del centro del cilindro (B , sin embargo, es negativo si T , es positivo). La ranura, pues, se abre, siendo vista desde el centro bajo un ángulo de valor $-2\pi B$. El problema de cerrar esa ranura ha sido resuelto en la página 95 para el caso tensional plano. Pasando la solución allí obtenida al caso de deformación plana, mediante las sustituciones indicadas en la página 57, obtendremos unas componentes de la tensión que añadidas a la tensión axial $\sigma_z = -aET$, de las ecuaciones (d), nos da un estado tensional idéntico al que definen las ecuaciones (247).

Cuando la temperatura varía a lo largo de los contornos circulares exterior e interior podemos usar para su representación las series de Fourier:

$$\begin{aligned} T_i &= A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + \dots + B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + \dots \\ T_o &= A'_0 + A'_1 \cos \theta + A'_2 \cos 2\theta + \dots + B'_1 \sin \theta + B'_2 \sin 2\theta + \dots \end{aligned} \quad (q)$$

Las tensiones térmicas provocadas por cada uno de esos términos pueden ser estudiadas separadamente, siendo las producidas por los términos constantes A_0 , A'_0 , las definidas en el estudio anterior, donde ahora $T_i = A_0 - A'_0$. Las funciones Z que corresponden a los términos $\cos \theta$, $\sin \theta$; $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, etc., contendrán términos proporcionales a:

$$z, z^{-1}; \quad z^2, z^{-2}; \quad \text{etc.} \quad (r)$$

Consideremos ahora la integral $\int z^n dz$ tomada a lo largo de una circunferencia completa de radio r . Operando, resulta:

$$\begin{aligned} \int z^n dz &= \int r^n e^{in\theta} r e^{i\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta] d\theta \end{aligned}$$

que es evidentemente nula, excepto para $n+1 = 0$, caso en el que:

$$\int \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (s)$$

Vemos, pues, que el único término de (r) que no anula a la integral del segundo miembro de (t) es el término en z^{-1} . Se sigue de ello que los términos en $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ y los armónicos superiores de la serie (q), no producen ningún desplazamiento relativo entre los dos labios de la ranura, correspondiendo, por tanto, a un flujo de calor global desde el interior hacia el exterior nulo, que produce solamente las tensiones expresadas por las ecuaciones (d).

Los términos de (q) que originan las potencias z^{-1} en Z son $\cos \theta$ y $\sin \theta$, cuyo efecto vamos a estudiar considerando solamente el de $\cos \theta$ ya que el de $\sin \theta$ se

deduce del correspondiente a $\cos \theta$ sin más que cambiar la dirección inicial $\theta = 0$. Consideraremos pues solamente:

$$T_i = A_1 \cos \theta, \quad T_o = A'_1 \cos \theta \quad (t)$$

La distribución de temperatura, correspondiente a estos valores de contorno, coincide con la parte real de la función:

$$\frac{C_1}{z} + C_2 z \quad (u)$$

en la que las constantes C_1 y C_2 se determinan mediante las condiciones (t). Sus valores son:

$$C_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{A_1}{a} - \frac{A'_1}{b} \right), \quad C_2 = \frac{A'_1 b - A_1 a}{b^2 - a^2} \quad (v)$$

El término C_1/z de (u) corresponde al valor:

$$(1 + \nu) \alpha \frac{C_1}{z}$$

de la función Z . Llevando este valor a (t) y teniendo en cuenta (s), resulta que la discontinuidad del desplazamiento es:

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = i \cdot 2\pi(1 + \nu) \alpha C_1$$

de donde:

$$u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 2\pi(1 + \nu) \alpha C_1$$

lo que significa que el borde superior de la ranura de la figura 229 se desplaza la cantidad $2\pi(1 + \nu) \alpha C_1$ en el espacio ocupado por el borde inferior y el material subyacente. Esto es, evidentemente, imposible, siendo impedido por la acción de las fuerzas de contacto entre los dos labios, los cuales generan un desplazamiento opuesto. Las tensiones que acompañan a ese desplazamiento terminan en la forma indicada en el § 39, tratándose en este caso naturalmente de deformación plana. Las componentes de la tensión que deberán ser añadidas a las dadas por las ecuaciones (d), son:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \kappa \cos \theta \cdot r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \kappa \cos \theta \cdot r \left(\frac{a^2 b^2}{r^4} + \frac{a^2 + b^2}{r^2} - 3 \right) \\ \tau_{r\theta} &= \kappa \sin \theta \cdot r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

donde:

$$\kappa = \frac{-\alpha E}{2(1 - \nu)} \left(\frac{A_1}{a} - \frac{A'_1}{b} \right) \frac{a^2 b^2}{b^4 - a^4}$$

La tensión axial, si la dilatación es impeditida en esa dirección, viene dada por las ecuaciones (d) en las que T está determinada por (u) y (v). Si los extremos no están sujetos a ninguna fuerza, es preciso tener en cuenta la tensión axial creada por la supresión de la fuerza y momento que sobre ellos actúan.

140. Solución de las ecuaciones generales. Toda solución particular de las ecuaciones (254) que podamos obtener, reduce el problema de las tensiones de origen térmico a un problema ordinario de fuerzas de superficie. Obtenidas las soluciones en u , v , w , los valores de las componentes de la tensión se obtienen por medio

de las ecuaciones (a) y (b) del § 139 y las (2). Las fuerzas de superficie requeridas, junto con la temperatura no uniforme para mantener esas tensiones, se encuentran aplicando las ecuaciones (128). La supresión de esas fuerzas, que hace que las tensiones existentes sean debidas únicamente a la temperatura no uniforme, constituye un problema corriente de cargas de superficie.

Una manera de obtener soluciones particulares de las ecuaciones (254) consiste en tomar:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (a)$$

donde ψ es una función de x, y, z , y también del tiempo t si la temperatura varía con el tiempo.

Haciendo uso de las ecuaciones (5) y (10) podemos escribir las (254) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial e}{\partial x} + (1 - 2\nu)\nabla^2 u = 2(1 + \nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (b)$$

Dado que $e = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z$, de las ecuaciones (a), resulta $e = \nabla^2 \psi$ que llevado a (b) nos da:

$$(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi = (1 + \nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (c)$$

donde $\partial / \partial y$ y $\partial / \partial z$ sustituyen a $\partial / \partial x$ en la segunda y tercera ecuación, respectivamente. Estas ecuaciones son evidentemente satisfechas si tomamos como función ψ una solución de la ecuación:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha T \quad (d)$$

Las soluciones de las ecuaciones de este tipo son estudiadas en la teoría del potencial¹. Una de ellas es el potencial gravitatorio correspondiente a la distribución de materia de densidad $-(1 + \nu)\alpha T / 4\pi(1 - \nu)$. Su expresión es²:

$$\psi = -\frac{(1 + \nu)\alpha}{4\pi(1 - \nu)} \int \int \int T(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r'} d\xi d\eta d\zeta \quad (e)$$

en la que $T(\xi, \eta, \zeta)$ es la temperatura en un punto cualquiera ξ, η, ζ contenido en un elemento de volumen $d\xi d\eta d\zeta$ y r' es la distancia de este punto al punto x, y, z . La ecuación (e), da la solución completa del problema de las tensiones de origen térmico, en un sólido infinito que se encuentra a temperatura nula en todos sus puntos salvo en una región calentada (o enfriada³). Los casos en los que esa región tiene la forma de un elipsoide de revolución o de un cilindro circular semiindefinido, uniformemente calentado, han sido estudiados⁴. En el caso del elipsoide la tensión

¹ E. Almansi ha empleado funciones de este tipo en el problema de la esfera. Véase: 1) *Atti reale accad. sci. Torino*, vol. 32, pág. 963, 1896-1897; 2) *Mem. reale accad. sci. Torino*, serie 2, vol. 47, 1897.

² Véase por ejemplo *Theory of the Potential*, de W. D. MacMillan, Nueva York, 1930.

³ Esta función potencial fue empleada por C. W. Borchardt en el problema de la esfera. Véase *Monatsber. königl. Preuss. Akad. Wiss.*, pág. 9, Berlín, 1873.

⁴ J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, vol. 23, pág. 1017, 1937. El sólido semidefinido ha sido estudiado por R. D. Mindlin y D. H. Cheng, *J. Applied. Phys.*, vol. 21, págs. 926, 931, 1950.

⁵ N. O. Myklestad, *J. Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.)*, pág. A-131, 1942.

máxima que puede presentarse tiene el valor $\alpha ET / (1 - \nu)$, y es normal a la superficie del elipsoide en los puntos de mayor curvatura de la ellipse generatriz. Este valor se presenta solamente en los dos casos extremos de elipsoide muy alargado o muy aplano. En los casos intermedios la tensión máxima toma un valor más bajo. Para una esfera ese valor es los dos tercios del citado anteriormente.

Cuando T es independiente de x y $w = 0$ la deformación es plana y ψ, u, v y w no dependen de x . La ecuación (d) toma entonces la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha T \quad (f)$$

Una solución particular de la misma es:

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \alpha \int \int T(\xi, \eta) \log r' d\xi d\eta \quad (g)$$

donde:

$$r' = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

En una placa delgada en la que T no varíe a través del espesor, el estado tensional será plano con $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ y $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ funciones sólo de x e y . Las relaciones tensión-deformación serán entonces [véanse las ecuaciones (d) del § 134]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (1 + \nu)\alpha T \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (1 + \nu)\alpha T \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (h)$$

que sustituidas en las ecuaciones de equilibrio (18) (con fuerzas másticas nulas) nos dan:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 2\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (i)$$

Estas ecuaciones son satisfechas por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (j)$$

supuesto que ψ sea solución de:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = (1 + \nu)\alpha T \quad (k)$$

Comparando esta relación con la (f), vemos que una solución particular de la misma es el potencial logarítmico (g), con el factor $(1 - \nu)$ del denominador suprimido. Esta es, pues, la solución completa para el caso de un calentamiento local en una placa indefinida en la que tensión y deformación tienden a cero en el infinito.

Consideraremos, como primer ejemplo, una placa sometida a la temperatura cero en todos sus puntos excepto en la región rectangular ABCD de lados $2a, 2b$ (fig. 230) en la que la temperatura es uniforme e igual a T^* . El potencial logarítmico correspondiente será:

$$\psi = \frac{1}{2\pi} (1 + \nu)\alpha T^* \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{2} \log [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] d\xi d\eta \quad (l)$$

¹ Goodier, loc. cit.

Una vez obtenidos los desplazamientos por la aplicación de las ecuaciones (j), podemos hallar las componentes de la tensión por medio de las relaciones (h). Los valores encontrados para σ_x y τ_{xy} en puntos tales como P, exterior al rectángulo caliente, pueden ponerse en la forma:

$$\sigma_x = E\alpha T \frac{1}{2\pi} (\psi_1 - \psi_2), \quad \tau_{xy} = E\alpha T' \frac{1}{4\pi} \log \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (m)$$

donde los ángulos ψ_1 , ψ_2 y las distancias r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , son los indicados en la figura 230. Los ángulos son los subtendidos en P por los dos lados del rectángulo AD y BC, paralelos al eje x. La expresión de σ_y se obtiene a partir de la primera de las ecuaciones (m) sin más que sustituir ψ_1 y ψ_2 por los ángulos subtendidos en P por los otros dos lados del rectángulo AB y DC.

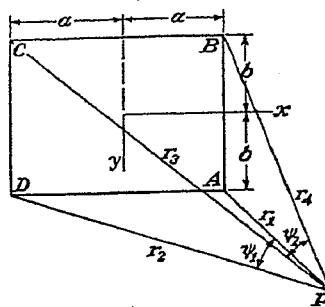


FIG. 230

El valor de σ_x en un punto situado inmediatamente debajo de AD y a la izquierda de A es:

$$E\alpha T \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right)$$

valor, éste, que alcanza su máximo $\frac{1}{2}E\alpha T$ en el caso de un rectángulo infinitamente largo según la dirección y. Las dos componentes normales de la tensión varían bruscamente cuando se contornea la esquina del rectángulo. La tensión tangencial τ_{xy} tiende a infinito cuando nos acercamos al vértice. Estas características, tan peculiares, resultan de la existencia de vértices perfectos en el rectángulo calentado.

Si la zona calentada es elíptica¹ en vez de rectangular y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el valor de la tensión σ_y en un punto exterior a la elipse, situado muy cerca del extremo del eje mayor, es:

$$\frac{E\alpha T}{1 + (b/a)}$$

valor que tiende a $E\alpha T$ para una elipse muy alargada. Si la zona calentada es circular, este valor es $\frac{1}{2}E\alpha T$. La tensión σ_r en la vecindad inmediata del eje menor es:

$$\frac{E\alpha T}{1 + (a/b)}$$

tendiendo a cero para una elipse muy alargada.

¹ Goodier, loc. cit.

El método que estamos estudiando resulta especialmente sencillo cuando la temperatura varía con el tiempo y satisface la ecuación diferencial de la conducción del calor¹

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (n)$$

en la que κ es la conductibilidad térmica dividida por el calor específico y por la densidad. Derivando la ecuación (d) respecto a t y sustituyendo $\partial T / \partial t$ por el valor dado por (n), vemos que la función ψ debe verificar la ecuación:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \kappa \nabla^2 T$$

Podemos poner, por tanto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \kappa T$$

ecuación, cuya integral para el caso en el que la temperatura tiende a cero al transcurrir el tiempo, es:

$$\psi = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \kappa \int_t^\infty T dt \quad (o)$$

como puede verificarse sustituyendo en la ecuación (d) y haciendo uso de la ecuación (n).

Consideremos, por ejemplo, un cilindro circular largo (deformación plana) que es calentado o enfriado según un régimen estacionario de conducción térmica. La temperatura no es simétrica respecto al eje pero es independiente de la coordenada axial z. Podemos representar la temperatura por una serie de la forma:

$$T_{sn} = e^{-\kappa a^2 t} J_n(sr) e^{in\theta} \quad (p)$$

donde podemos separar las partes real o imaginaria de $e^{in\theta}$ para obtener $\cos n\theta$ o $\sin n\theta$. Según la ecuación (a), la función ψ que corresponde a una temperatura que tenga esta expresión se escribe:

$$\psi_{sn} = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \kappa \frac{1}{s^2} T_{sn} \quad (q)$$

La serie formada por tales términos, que corresponden a los de la serie que da T , representará una solución particular de las ecuaciones generales (b). Los desplazamientos serán calculados mediante las ecuaciones (a) o sus equivalentes polares:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

en las que u y v son las componentes radial y tangencial respectivamente. La componente axial w , por tratarse de deformación plana, será nula.

Las componentes de la deformación se deducen de los resultados del § 28. En cuanto a las componentes de la tensión se obtienen a partir de las fórmulas (a) y (b) de la deformación plana del § 135, junto con la última de las ecuaciones (52) para la tensión tangencial $\tau_{\theta\theta}$.

Una vez obtenida nuestra solución encontraremos que, en general, tenemos fuerzas de contorno (σ_r , $\tau_{\theta\theta}$) no nulas sobre la superficie lateral del cilindro. La presión de tales fuerzas constituirá un problema corriente de deformación plana, que se resuelve utilizando la función general de tensión en coordenadas polares dada en el § 39².

¹ Véase por ejemplo, *Theory of Heat Conduction*, de Ingersoll y Zobel.

² Este problema, para el caso de un cilindro hueco [estando dada la temperatura por (p)] ha sido estudiado por J. N. Goodier en el trabajo citado.

15

Propagación de ondas en medios elásticos

141. Movimiento generado por fuerzas. En los capítulos precedentes hemos supuesto que el cuerpo elástico se encontraba en reposo bajo la acción de las fuerzas exteriores, tratándose, pues, de problemas de estática. Existen casos, sin embargo, en los que debemos considerar el movimiento provocado en un cuerpo elástico, por cargas aplicadas bruscamente o por fuerzas variables. La acción de una fuerza bruscamente aplicada no es transmitida simultáneamente a todas las partes del cuerpo. En el instante inicial las zonas alejadas del mismo no son alteradas y las deformaciones provocadas por la fuerza se propagan a través del sólido en forma de ondas elásticas. Si las dimensiones del cuerpo son grandes, el tiempo que las ondas emplean en atravesarlo, es lo suficientemente grande como para ser considerado, a efectos prácticos. Tales problemas se presentan, por ejemplo, al estudiar el efecto de las percusiones o el de las ondas producidas por los terremotos. El estudio de la propagación de las ondas en los medios elásticos es el tema del presente capítulo¹. Comencemos por el problema sencillo de la propagación de ondas longitudinales en una barra prismática larga.

142. Ondas longitudinales en barras prismáticas. Tomando como eje x el de la barra (fig. 231) y suponiendo que las secciones transversales de la misma se mantienen planas durante la deformación, la extensión unitaria en cualquier sección recta mn , debida al desplazamiento longitudinal u , es igual a $\partial u / \partial x$ y la fuerza de tracción correspondiente será $A\epsilon(\partial u / \partial x)$, donde A es el área de la sección recta². Consideraremos un

¹ Los problemas de las vibraciones estacionarias de los cuerpos elásticos son estudiados en S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, Nueva York, 1928.

² Suponemos que tenemos una tracción simple que actúa en la dirección x y que la extensión $\epsilon = u / \partial x$ viene acompañada por una contracción lateral de valor $v = (\partial u / \partial x)$. Las fuerzas de

elemento de la barra contenido entre dos secciones rectas adyacentes mn y m_1n_1 . La diferencia entre las fuerzas que actúan sobre las dos secciones transversales es

$$AE \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) - AE \frac{\partial u}{\partial x} = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

y la ecuación diferencial del movimiento de dicho elemento es

$$A\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (258)$$

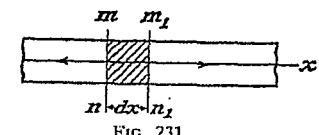
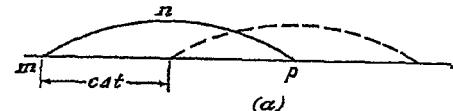


FIG. 231



(a)

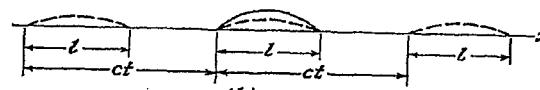


FIG. 232

expresión en la que ρ es la densidad del material de la barra y

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (259)$$

Puede demostrarse por sustitución que cualquier función $f(x + ct)$ es una solución de la ecuación (258). Asimismo, toda función $f_1(x - ct)$ es también una solución viniendo la solución general de la ecuación (258) representada por la expresión.

$$u = f(x + ct) + f_1(x - ct) \quad (260)$$

inercia correspondientes al movimiento de las partículas según la dirección lateral, son despreciadas en nuestra deducción. Esta solución aproximada es suficientemente exacta siempre que la longitud de onda de las vibraciones no sea pequeña comparada con las dimensiones transversales de la barra. En el caso en el que la longitud de onda es pequeña, el movimiento de las partículas según la dirección perpendicular al eje de la banda debe ser considerado. Véase Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, cap. 7; L. Pochhammer, *J. Math. Crelle's J.*, vol. 81, 1876; C. Chree, *Quart. J. Math.*, vol. 21, 1886 y vol. 24, 1890; J. Prescott, *Phil. Mag.*, vol. 33, pág. 703, 1942; R. M. Davies, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 240, pág. 375, 1948.

Esta solución tiene un significado físico muy sencillo que puede ser explicado de la siguiente manera. Consideremos el segundo término del segundo miembro de la ecuación (260). En un determinado instante t este término es función de x solamente, pudiendo ser representado por una cierta curva, tal como la mnp (fig. 232a), cuya forma depende de la función f_1 . Después de un cierto intervalo de tiempo Δt , el argumento de la función f_1 será $x - c(t + \Delta t)$. La función f_1 no variará, si al mismo tiempo que la variable t se incrementa en Δt aumenta la abscisa en una cantidad Δx igual a $c\Delta t$. Esto significa que la curva mnp , construida para el instante t puede ser utilizada también en el $t + \Delta t$, con tal de desplazarse según la dirección x la cantidad $\Delta x = c\Delta t$, tal como se muestra mediante la línea a trazos de la figura. A partir de esta consideración, puede verse que el segundo término de la solución (260), representa una onda que se propaga a lo largo del eje x con una velocidad constante c . De igual forma, puede demostrarse que el primer término de la solución (260) representa una onda que se propaga en sentido opuesto. La solución general (260) representa, pues, dos ondas que se propagan a lo largo del eje x en sentidos opuestos con la velocidad constante c dada por la ecuación (259). Esta velocidad depende únicamente del módulo E y de la densidad del material de la barra. En el caso del acero, por ejemplo, podemos adoptar el valor $c = 5135$ m/s.

Las funciones f y f_1 deberán ser determinadas, en cada caso particular, a partir de las condiciones iniciales en el instante $t = 0$. Para ese instante tendremos, según la ecuación (260)

$$\begin{aligned} (u)_{t=0} &= f(x) + f_1(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= c[f'(x) - f'_1(x)] \end{aligned} \quad (a)$$

Supongamos, por ejemplo, que la velocidad inicial a lo largo de la barra sea nula y que exista un desplazamiento inicial dado por la ecuación

$$(u)_{t=0} = F(x)$$

Las condiciones (a) quedan satisfechas, tomando

$$f(x) = f_1(x) = \frac{1}{2}F(x)$$

El desplazamiento inicial se dividirá en este caso, por tanto, en dos partes iguales que se propagan como ondas, en sentidos opuestos (fig. 232b).

La velocidad de propagación de las ondas en las barras prismáticas, puede obtenerse a partir de consideraciones elementales. Supongamos que una tensión de compresión uniformemente distribuida, es aplicada bruscamente sobre el extremo izquierdo de una barra prismática (fig. 233). En el instante inicial, se producirá una compresión uniforme que afecta a una capa infinitamente delgada situada en ese extremo de la barra. Esta compresión será transmitida a la capa adyacente continuándose este proceso al transcurrir el tiempo. En consecuencia, una onda de compresión co-

mienza a propagarse a lo largo de la barra con una cierta velocidad c , de forma tal, que después de un cierto intervalo de tiempo t , una porción de la barra de longitud ct , estará comprimida mientras que la porción restante se encontrará libre de toda solicitud.

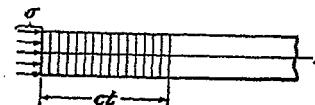


FIG. 233

La velocidad de propagación de la onda c no deberá ser confundida con la velocidad v transmitida a las partículas de la zona afectada por la compresión. Esta velocidad, v , puede calcularse teniendo en cuenta que dicha zona (rayada en la figura) experimenta como consecuencia de la compresión σ un acortamiento de valor $(\sigma/E)ct$. De aquí resulta, que la velocidad del movimiento vibratorio en el extremo izquierdo de la barra, igual a la que adquieren las partículas de la zona comprimida, es

$$v = \frac{c\sigma}{E} \quad (b)$$

La velocidad c de propagación de la onda, puede obtenerse aplicando la ecuación de momentos. En el instante inicial la porción rayada de la barra se encontraba en reposo. En el instante t tiene una velocidad v y un momento $Act\sigma v$. Igualando este momento al impulso de la fuerza de compresión se tiene

$$Actl = Act\sigma v \quad (c)$$

Sustituyendo (b), encontramos para (c) el valor dado por la ecuación (259)¹ y para la velocidad de las partículas

$$v = \frac{\sigma}{\sqrt{E\rho}} \quad (261)$$

Como puede verse, mientras que c es independiente de la fuerza de compresión, la velocidad v de las partículas es proporcional a la tensión.

Si en lugar de una compresión, aplicamos bruscamente una tracción en el extremo de la barra, se producirá la propagación del esfuerzo correspondiente a lo largo de la misma con una velocidad c . Una vez más la velocidad de las partículas viene dada por la ecuación (261). El sentido de esta velocidad será el opuesto al sentido positivo de las x . Así, pues, en

¹ Esta deducción elemental de la fórmula que da la velocidad de propagación de la onda es debida a Babinet; véase Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traducida por Saint-Venant, pág. 480d, 1883.

una onda de compresión la velocidad v de las partículas tiene el mismo sentido que la velocidad de propagación de la onda, mientras que en una onda de tracción el sentido es el opuesto.

De las ecuaciones (259) y (261) se deduce

$$\sigma = E \frac{v}{c} \quad (262)$$

fórmula que expresa que la tensión producida por la onda es igual al producto del módulo elástico E del material por la relación de las velocidades. Si un cuerpo absolutamente rígido, que se desplaza con una velocidad v , golpea según la dirección longitudinal una barra prismática, la tensión de compresión que se produce en la superficie de contacto en el instante inicial estará dada por la ecuación (262)¹. Si la velocidad del cuerpo v supera un determinado límite, límite que depende de las propiedades mecánicas del material de la barra, se producirá una deformación permanente en la pieza aunque la masa del cuerpo que choca con ella sea muy pequeña².

Consideremos ahora, la energía de la onda que se extiende a la zona rayada de la figura 233. Esta energía consta de dos partes: la correspondiente a la deformación cuyo valor es

$$\frac{Acd\sigma^2}{2E}$$

y la energía cinética que es igual a

$$\frac{Ac\dot{\sigma}v^2}{2} = \frac{Acd\sigma^2}{2E}$$

Como puede verse, la energía total de la onda, igual al trabajo realizado por la fuerza de compresión $A\sigma$ que actúa a lo largo del camino $(\sigma/E)ct$ se descompone, a partes iguales, en energía potencial y cinética.

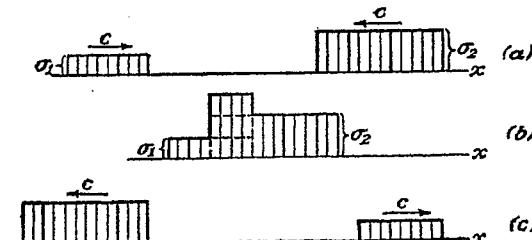


FIG. 234

¹ Esta conclusión es debida a Thomas Young; véase su *Course of Lectures on Natural Philosophy...*, vol. 1, págs. 135 y 144, 1807.

² Se supone que el contacto se produce simultáneamente en todos los puntos de la sección extrema de la barra.

La ecuación (258), que gobierna la propagación de la onda, es lineal, de forma que si tenemos dos soluciones de la misma su suma lo será también. Se sigue de ello, que al estudiar la propagación de las ondas a lo largo de una barra podemos utilizar el método de superposición. Si dos ondas se propagan en sentidos opuestos (fig. 234), al encontrarse producen una tensión y una velocidad resultante que serán obtenidas por superposición. Si ambas ondas son, por ejemplo, compresivas, la compresión resultante se obtiene por simple adición como lo indica la figura 234b, y la velocidad resultante de las partículas por sustracción. Después de haberse cruzado, las ondas recobran sus formas iniciales tal como se indica en la figura 234c.

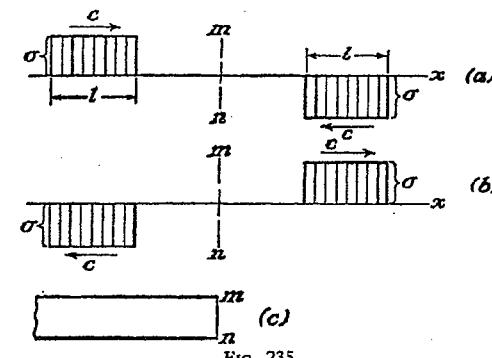


FIG. 235

Supongamos que una onda de compresión se traslada a lo largo de una barra en el sentido positivo de las x y que una onda de tracción de la misma longitud de onda y de igual intensidad lo hace en el sentido opuesto (fig. 235). Cuando ambas ondas se encuentran, la tracción y la compresión se anulan entre sí y la porción de barra en la que ambas se superponen se encuentra sometida a una tensión nula. Al mismo tiempo la velocidad de las partículas en esa porción de la barra alcanza el valor $2v$. Después de haberse cruzado las ondas recuperan su forma inicial tal como se muestra en la figura 235b. En la sección transversal media mn , la tensión será siempre nula, pudiendo ser considerada dicha sección como extremo libre de la barra (fig. 235c). Si se comparan las figuras 235a y 235b puede deducirse que en el caso de un extremo libre, una onda de compresión se refleja como una onda de tracción semejante, y viceversa.

Al encontrarse dos ondas idénticas que se trasladan en sentidos contrarios (fig. 236a), el valor de la tensión se doblará y el de la velocidad se anulará en aquella porción de la barra en la que se superponen las dos ondas. La sección media mn presentará siempre una velocidad nula. Dicha

sección permanece, pues, inmóvil durante el paso de las ondas, pudiendo ser considerada como extremo fijo de la barra (fig. 236c). De la comparación de las figuras 236a y 236b podemos deducir, pues, que una onda cualesquiera no sufre ninguna alteración al reflejarse en un extremo fijo.

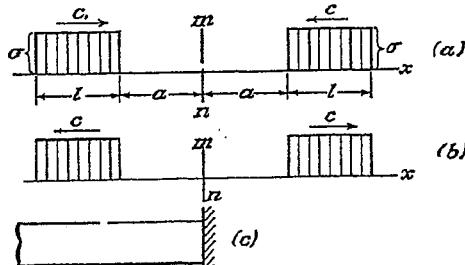


FIG. 236

Hemos considerado hasta aquí las ondas producidas por fuerzas constantes. La tensión σ y la velocidad de las partículas v resultan entonces constantes a lo largo de la onda. En el caso de una fuerza variable, la tensión σ y la velocidad v varían a lo largo de la onda. Las conclusiones obtenidas en el estudio precedente, referentes a la propagación, superposición y reflexión de las ondas, pueden ser aplicadas también en este caso más general.

143. Choque longitudinal de dos barras. Si dos barras iguales, del mismo material, chocan longitudinalmente entre sí estando animadas de la misma velocidad v (fig. 237), el plano de contacto mn no se moverá durante el choque¹ y dos ondas de compresión idénticas empezarán a trasladarse a lo largo de ambas barras con una misma velocidad c . Las velocidades de las partículas, superpuestas a las velocidades iniciales de las barras, determinan un estado de reposo en las zonas de oscilación y en el instante en que las ondas alcanzan los extremos libres de las barras ($t = l/c$), las dos barras se encontrarán inmóviles y uniformemente comprimidas. Las ondas de compresión se reflejarán entonces en los extremos libres como ondas de tracción y en el instante $t = 2l/c$, en el que estas ondas llegan a la superficie de contacto de las dos barras, las velocidades de las barras 1 y 2 son

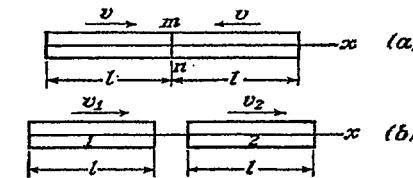


FIG. 237

partículas, respecto a las partes no sometidas a tensión de ambas barras, son iguales y están dirigidas en cada barra siguiendo el sentido que se aleja de la superficie de contacto. La magnitud de las mismas debe ser igual a $(v_1 - v_2)/2$, con el fin de que las velocidades absolutas de las partículas de ambas barras sean las mismas en la superficie de contacto. Despues de un intervalo de tiempo igual a l/c las ondas de compresión alcanzan los extremos libres de las barras, las cuales se encuentran entonces en un estado de compresión uniforme. En ese instante, asimismo, las velocidades absolutas de todas sus partículas serán

$$v_1 - \frac{v_1 - v_2}{2} = v_2 + \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Las ondas de compresión se reflejarán, entonces, en los extremos libres como ondas de tracción y en el instante $t = 2l/c$, en el que estas ondas llegan a la superficie de contacto de las dos barras, las velocidades de las barras 1 y 2 son

$$\frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{v_1 - v_2}{2} = v_2, \quad \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} = v_1$$

Vemos, pues, que las barras intercambian, a consecuencia del choque, las velocidades.

Si las barras que acabamos de considerar tienen longitudes diferentes, l_1 y l_2 (fig. 238a), las condiciones provocadas por el choque en los instantes iniciales serán las mismas que en el caso precedente. Transcurrido un intervalo de tiempo igual a $2l_1/c$, momento en el que la onda reflejada en la barra corta 1 alcanza la superficie de contacto mn , la vibración que a través de esta superficie se propaga a lo largo de la otra barra produce la situación

¹ Se supone que el contacto tiene lugar simultáneamente en toda la superficie de los extremos de las barras.

Consideremos ahora el caso más general en que las barras 1 y 2 (figura 237b) se desplazan¹ con velocidades v_1 y v_2 ($v_1 > v_2$). En el instante del choque, se producirán dos ondas de compresión idénticas que se desplazan a lo largo de ambas barras. Las velocidades correspondientes de las

¹ Las velocidades son consideradas positivas si su sentido es el del eje x .

que se representa en la figura 238b. La onda de tracción de la barra de longitud l_1 , anula la compresión mutua de las barras, pero éstas permanecerán en contacto hasta que la onda de compresión correspondiente a la barra larga (rayada en la figura) haya alcanzado, después de reflejarse la superficie de contacto, cosa que ocurre en el instante $t = 2l_2/c$.

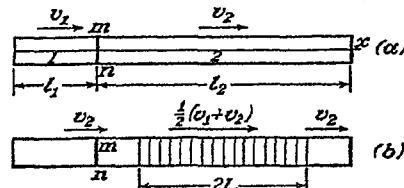


FIG. 238

En el caso de dos barras de longitudes iguales, las dos presentan después del rebote la misma velocidad en todos los puntos, moviéndose como cuerpos rígidos. La energía total es la que corresponde al movimiento de traslación. En el caso de barras de diferente longitud, la barra larga, después del rebote, posee una energía adicional correspondiente a la onda que se propaga en su seno, la cual deberá ser considerada al calcular la energía total de la barra¹.

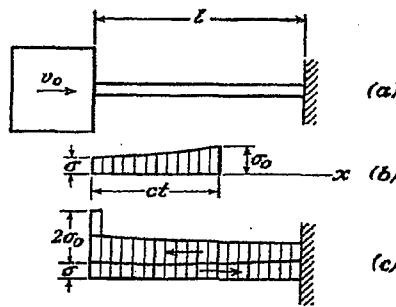


FIG. 239

Consideremos, ahora, el problema más complejo de una barra fija en uno de sus extremos golpeada por una masa móvil en el otro extremo² (fig. 239). Sean M la masa del cuerpo en movimiento, referida al área

¹ El problema de la pérdida de la energía cinética correspondiente al movimiento de traslación, en el caso del choque longitudinal de barras, ha sido estudiado por Cauchy, Poisson y, finalmente, por Saint-Venant; véase *Compt. rend.*, pág. 1108, 1866 y *J. mathémat. (Liouville)*, págs. 257 y 376, 1867.

² Este problema ha sido estudiado por varios autores. La solución final ha sido dada por J. Boussinesq, *Compt. rend.*, pág. 154, 1883. La historia del problema puede encontrarse en

unidad de la sección transversal de la barra, y v_0 la velocidad inicial de este cuerpo. Considerando el cuerpo como absolutamente rígido, la velocidad de las partículas del extremo de la barra en el instante del impacto ($t = 0$) es v_0 y la tensión de compresión inicial, dada por la ecuación (261), será

$$\sigma_0 = v_0 \sqrt{E\rho} \quad (a)$$

Debido a la resistencia de la barra, la velocidad del cuerpo móvil y en consecuencia la presión sobre la barra, disminuirán gradualmente, de manera que habrá una onda de compresión con una tensión de compresión decreciente que se propaga a lo largo de la pieza (fig. 239b). La variación de la compresión con el tiempo, puede obtenerse fácilmente a partir de la ecuación de movimiento del cuerpo. Llamando σ a la tensión de compresión variable en el extremo de la barra y v a la velocidad variable del cuerpo, obtenemos

$$M \frac{dv}{dt} + \sigma = 0 \quad (b)$$

que sustituyendo la expresión de v , dada por (261), nos queda

$$\frac{M}{\sqrt{E\rho}} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0$$

de donde

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t\sqrt{E\rho}}{M}} \quad (c)$$

Esta ecuación, puede ser usada siempre que $t < 2l/c$. Cuando $t = 2l/c$, la onda compresiva, con un valor σ_0 para la presión frontal, vuelve a la extremidad de la barra que está en contacto con el cuerpo móvil. La velocidad de éste no puede cambiar bruscamente y, en consecuencia, la onda se reflejará como si el extremo estuviera fijo, de forma que la tensión de compresión en la superficie de contacto aumenta bruscamente alcanzando el valor $2\sigma_0$, tal como se indica en la figura 239c. Un aumento tal, brusco, de la presión, se produce durante el choque en el extremo, en instantes de tiempos separados por el intervalo $T = 2l/c$, debiendo obtener una expresión de σ para cada uno de dichos intervalos. Para el primero, en el que $0 < t < T$, usamos la ecuación (c). Para el segundo, en el que $T < t < 2T$, tenemos las condiciones representadas en la figura 239c y la tensión de

Theorie de l'élasticité des corps solides, de Clebsch, traducida por Saint-Venant (véase la nota de la pág. 86). El problema fue asimismo estudiado por L. H. Donnell quien, empleando las leyes de la propagación de las ondas, simplificó la solución y la extendió al caso de una barra cónica. Véase *Trans. A.S.M.E., Applied Mechanics Division*, 1930.

compresión σ es producida por dos ondas que se alejan del extremo que ha sufrido el choque y por otra que se acerca a dicha extremidad. Si designamos por $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$, ..., la tensión total de compresión, producida en el extremo golpeado por todas las ondas que se alejan del mismo después de los intervalos de tiempo T , $2T$, $3T$, ..., las ondas que vuelven de la extremidad que sufre el choque, son simplemente las emitidas durante el intervalo precedente, retardadas un tiempo T a causa de su viaje de ida y vuelta a través de la barra. La compresión producida por estas ondas en el extremo golpeado, se obtendrá, en consecuencia, sustituyendo t por $t - T$ en la expresión de la compresión producida por las ondas emitidas durante el intervalo precedente. La expresión general para la tensión de compresión total durante cualquier intervalo $nT < t < (n+1)T$, será, por tanto,

$$\sigma = s_n(t) + s_{n-1}(t - T) \quad (d)$$

La velocidad de las partículas en el extremo sometido al choque, será la diferencia entre la velocidad provocada por la presión $s_n(t)$ de las ondas que se alejan del extremo y la correspondiente a la presión $s_{n-1}(t - T)$ de las ondas que se aproximan al mismo extremo. Tendremos entonces, según la ecuación (261),

$$v = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} [s_n(t) - s_{n-1}(t - T)] \quad (e)$$

La relación entre $s_n(t)$ y $s_{n-1}(t - T)$, se obtendrá, empleando la ecuación de movimiento (b) del cuerpo que choca. Llamando α a la relación entre las masas de la barra y del cuerpo percutor, tenemos

$$\alpha = \frac{l\rho}{M}, \quad \frac{\sqrt{E\rho}}{M} = \frac{cl\rho}{Ml} = \frac{2\alpha}{T} \quad (f)$$

y aplicando esta última expresión, así como las ecuaciones (d) y (e), la ecuación (b) toma la forma

$$\frac{d}{dt} [s_n(t) - s_{n-1}(t - T)] + \frac{2\alpha}{T} [s_n(t) + s_{n-1}(t - T)] = 0$$

Multiplicando por $e^{\frac{2\alpha t}{T}}$,

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\alpha t}{T}} \frac{ds_n(t)}{dt} + \frac{2\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_n(t) &= e^{\frac{2\alpha t}{T}} \frac{ds_{n-1}(t-T)}{dt} \\ &+ \frac{2\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T) - \frac{4\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T) \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{d}{dt} [e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_n(t)] = \frac{d}{dt} [e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T)] - \frac{4\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T)$$

de donde

$$s_n(t) = s_{n-1}(t - T) - \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \left[\int e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t - T) dt + C \right] \quad (g)$$

donde C es una constante de integración. Esta ecuación, será usada a continuación para reducir las expresiones de los valores consecutivos s_1, s_2, \dots . Durante el primer intervalo $0 < t < T$, la tensión de compresión está dada por la ecuación (c) y podemos escribir

$$s_0 = \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \quad (h)$$

Sustituyendo la expresión correspondiente a s_{n-1} en la ecuación (g), se tiene

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sigma_0 e^{-2\alpha(\frac{t}{T}-1)} - \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \left(\int \sigma_0 e^{2\alpha} dt + C \right) \\ &= \sigma_0 e^{-2\alpha(\frac{t}{T}-1)} \left(1 - \frac{4\alpha t}{T} \right) - C \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \end{aligned} \quad (k)$$

La constante de integración C , se obtiene a partir de la condición de que en el instante $t = T$ la tensión de compresión en la extremidad de la barra que recibe el choque aumenta bruscamente en una cantidad $2\sigma_0$ (fig. 239c). Usando entonces la ecuación (d), resulta

$$\begin{aligned} \left[\sigma_0 e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \right]_{t=T} + 2\sigma_0 &= \left[\sigma_0 e^{-2\alpha(\frac{t}{T}-1)} + \sigma_0 e^{-2\alpha(\frac{t}{T}-1)} \left(1 - \frac{4\alpha t}{T} \right) \right. \\ &\quad \left. - C \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha t}{T}} \right]_{t=T} \end{aligned}$$

de donde nos queda

$$C = -\frac{\sigma_0 T}{4\alpha} (1 + 4\alpha e^{2\alpha})$$

Sustituyendo en la ecuación (k), se tendrá

$$s_1 = s_0 + \sigma_0 e^{-2\alpha(\frac{t}{T}-1)} \left[1 + 4\alpha \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (l)$$

Procediendo de igual forma y sustituyendo s_1 en lugar de s_{n-1} en la ecuación (g), obtenemos

$$s_2 = s_1 + \sigma_0 e^{-2\alpha(\frac{t}{T}-2)} \left[1 + 2 \cdot 4\alpha \left(2 - \frac{t}{T} \right) + 2 \cdot 4\alpha^2 \left(2 - \frac{t}{T} \right)^2 \right] \quad (m)$$

Repetiendo el proceso, llegamos a

$$s_3 = s_2 + \sigma_0 e^{-2\alpha\left(\frac{t}{T}-3\right)} \left[1 + 2 \cdot 6\alpha \left(3 - \frac{t}{T} \right) + 2 \cdot 3 \cdot 4\alpha^2 \left(3 - \frac{t}{T} \right)^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3} 8\alpha^3 \left(3 - \frac{t}{T} \right)^3 \right] \quad (n)$$

y así sucesivamente. En la figura 240 se representan gráficamente las funciones s_0, s_1, s_2, \dots , para $\sigma_0 = 1$ y para cuatro valores diferentes de las relaciones¹, $\alpha = 1/6, 1/4, 1/2, 1$. Utilizando estas curvas, puede calcularse fácilmente la tensión de compresión σ mediante la ecuación (d). En la figura 241 está representada gráficamente esta tensión para $\sigma_0 = 1$ y $\alpha = 1/4, 1/2, 1$. Como puede verse, varía por saltos a intervalos $T, 2T, \dots$

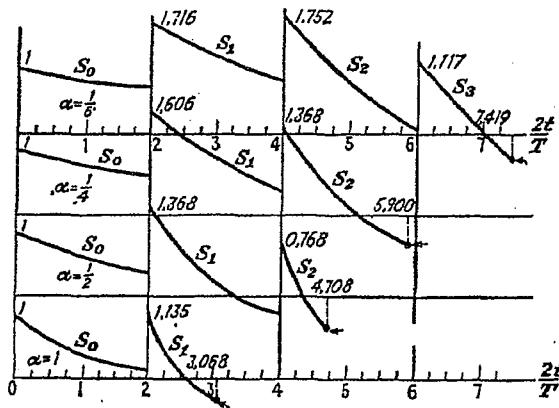


FIG. 240

El valor máximo de esta tensión depende de la relación α . Para $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 1$, la tensión toma su valor máximo para $t = T$. Cuando $\alpha = 1/4$, la tensión máxima se produce para $t = 2T$. El instante en el que σ se anula, indica el final del choque. Es de advertir que la duración del mismo aumenta cuando α disminuye. Los cálculos de Saint-Venant dan los siguientes valores para esa duración

$\alpha =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{2t}{T} =$	7,419	5,900	4,708	3,068

¹ Estas curvas fueron calculadas por Saint-Venant y Flamant. Véase *Compt. rend.*, páginas 127, 214, 281 y 353, 1883.

Para valores muy pequeños de α el tiempo de contacto puede ser calculado a partir de la fórmula elemental,

$$t = \frac{\pi l}{c} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \quad (p)$$

la cual se obtiene, despreciando totalmente la masa de la barra y suponiendo que la duración del impacto es igual a la mitad del período de la oscilación armónica simple del cuerpo unido a la barra.

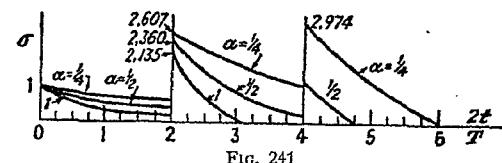


FIG. 241

Las funciones s_1, s_2, s_3, \dots , calculadas anteriormente, pueden ser usadas también para determinar las tensiones en cualquiera otra sección transversal de la barra. La tensión total es siempre la suma de dos valores de s [ecuación (d)]: uno de ellos en la onda resultante que se traslada hacia el extremo fijo y el otro en la que se propaga en sentido opuesto. Cuando

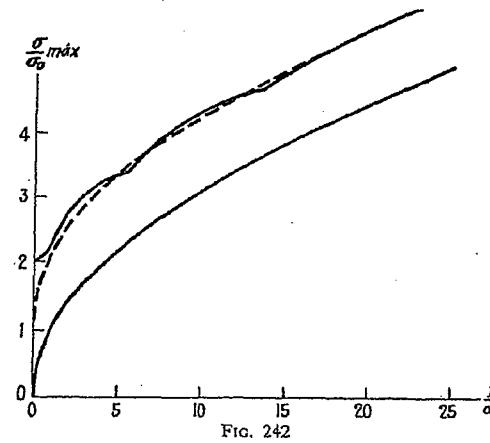


FIG. 242

la porción de onda que corresponde al valor máximo de s (el pico más alto de una de las curvas de la fig. 240) llega al extremo fijo y es allí reflejada, las dos ondas mencionadas anteriormente alcanzan su valor máximo: la tensión de compresión total en este punto, en este instante, es la máxima

que puede producirse durante el choque. De ésto se sigue, que la tensión máxima durante el choque se produce en el extremo fijo, siendo su valor el doble del máximo de s . De la figura 240 puede deducirse rápidamente que para $\alpha = 1/6, 1/4, 1/2, 1$, las tensiones de compresión máxima son $2 \times 1,752 \sigma_0, 2 \times 1,606 \sigma_0, 2 \times 1,368 \sigma_0, 2 \times 1,135 \sigma_0$, respectivamente. En la figura 242 son dados los valores de σ_{\max}/σ_0 para diversos valores de la relación $\alpha = \rho l/M^1$. En la misma figura y con fines comparativos, es mostrada también la parábola de ecuación

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{M}{\rho l}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\alpha}} \quad (q)$$

que puede ser obtenida fácilmente, de forma elemental, despreciando la masa de la barra e igualando la energía de deformación de la misma a la energía cinética del cuerpo que choca con ella. La línea a trazos muestra la parábola² que viene definida por la ecuación

$$\sigma = \sigma_0 \left(\sqrt{\frac{M}{\rho l}} + 1 \right) \quad (r)$$

Como puede verse, esta curva, para valores de $1/\alpha$ grandes da una aproximación bastante buena.

La teoría del impacto desarrollada anteriormente, se basa en la hipótesis de que el contacto tiene lugar simultáneamente en toda la superficie de la extremidad de la barra. Esta condición, raramente se realiza en la práctica y los experimentos no muestran una concordancia satisfactoria con la teoría³. Se obtiene una concordancia con la teoría mucho mayor, si se usan resortes helicoidales en lugar de barras⁴. En este caso, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es pequeña y el tiempo T invertido por la onda para hacer el recorrido de ida y vuelta de la pieza, es grande comparado con el necesario para conseguir un contacto completo de los extremos.

También se puede ensayar, bajo condiciones precisas, utilizando en los experimentos barras terminadas por esferas, teniendo en cuenta las deformaciones locales, que pueden calcularse mediante la fórmula de Hertz⁵ (véase pág. 413).

¹ Véanse los trabajos de Saint-Venant y Flamant, *loc. cit.*

² Esta curva fue propuesta por Boussinesq; véase *Compt. rend.*, pág. 154, 1883.

³ Véase W. Voigt, *Ann. Physik*, vol. 19, pág. 44, 1883, y vol. 46, pág. 657, 1915. Para una revisión de la bibliografía sobre el tema véase el artículo de T. Pöschl, «Handbuch der Physik», vol. 6, pág. 525, Berlin, 1928.

⁴ Tales experimentos fueron realizados por C. Ramsauer, *Ann. Physik*, vol. 30, pág. 416, 1909.

⁵ Tal estudio fue realizado por J. E. Sears, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, pág. 49, 1908. Véase también J. E. P. Wagstaff, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 105, pág. 544, 1924; y W. A. Prowse, *Phil. Mag.*, vol. 22, pág. 209, 1936.

144. Ondas de dilatación y de distorsión en medios elásticos isótropos. Al estudiar la propagación de ondas en medios elásticos, es ventajoso utilizar las ecuaciones diferenciales expresadas en función de los desplazamientos [ecuaciones (131), pág. 269]. Para obtener las ecuaciones de los pequeños movimientos a partir de estas ecuaciones de equilibrio, basta simplemente con añadir las fuerzas de inercia. Admitiendo que las fuerzas másicas son nulas, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (263)$$

donde e es la dilatación cúbica y el símbolo ∇^2 representa la operación

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Supongamos, en primer lugar, que la deformación producida por las ondas es tal que la dilatación cúbica es cero, de forma que la deformación consista solamente en una rotación y en una distorsión. Las ecuaciones (263) se transforman en

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned} \quad (264)$$

Estas son las ecuaciones de las llamadas *ondas de distorsión*.

Consideremos ahora el caso en que la deformación provocada por las ondas no está acompañada de rotación. La rotación de un elemento respecto al eje x es (véase § 75)

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (a)$$

Expresiones análogas dan la rotación respecto a los ejes y e z . La condición de que la deformación sea *irrotacional*, podrá ser expresada, por tanto, en la forma

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

Estas ecuaciones son satisfechas, si los desplazamientos u, v, w , se deducen de una única función ϕ como sigue:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (c)$$

Entonces,

$$e = \nabla^2 \phi, \quad \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = \nabla^2 u$$

que sustituidas en las ecuaciones (263), nos dan

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (265)$$

Estas son las ecuaciones de las *ondas irrotacionales u ondas de dilatación*.

Un caso más general de propagación de ondas en un medio elástico, se obtiene superponiendo ondas de distorsión y ondas de dilatación. Para ambas clases de ondas, las ecuaciones de movimiento tienen la forma común

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \psi \quad (266)$$

en la que

$$a = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (267)$$

para el caso de ondas de dilatación, y

$$a = c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (268)$$

para el de ondas de distorsión. Vamos a demostrar ahora que c_1 y c_2 son las velocidades de propagación de las ondas de dilatación y de distorsión.

145. Ondas planas. Si en un punto cualquiera de un medio elástico se produce una perturbación, las ondas que se originan se propagan en todas las direcciones. A gran distancia del centro de perturbación, sin embargo, tales ondas pueden ser consideradas como planas, pudiendo superponerse que todas las partículas se mueven paralelamente a la dirección de propagación de la onda (ondas longitudinales o perpendicularmente a esa dirección (ondas transversales). En el primer caso, tenemos *ondas de dilatación* y en el segundo *ondas de distorsión*.

Considerando las ondas longitudinales y tomando el eje x como direc-

ción de propagación de la onda, tendremos que $v = w = 0$ y que u es función de x solamente. Las ecuaciones (265) nos dan, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a)$$

Esta es la misma ecuación que hemos encontrado al estudiar la propagación de ondas longitudinales en barras prismáticas [véase ecuación (258), pág. 481], excepto en que la cantidad

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

es remplazada por la cantidad

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

Sustituyendo λ y G por sus expresiones en función de E y del coeficiente de Poisson (véanse págs. 30 y 31), esta última cantidad puede ser representada en la forma

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho}} \quad (269)$$

Puede verse fácilmente que c_1 es mayor que c . Este resultado se debe al hecho de que el desplazamiento lateral, en este caso, se considera suprimido mientras que en el caso de una barra, se supone que la deformación longitudinal es acompañada por una contracción o expansión lateral. La relación c_1/c depende de la magnitud del coeficiente de Poisson. Para $\nu = 0,25$, $c_1/c = 1,095$; para $\nu = 0,30$, $c_1/c = 1,16$. Todas las conclusiones anteriormente obtenidas, referentes a la propagación y superposición de ondas longitudinales, pueden ser aplicadas también en este caso.

Consideremos ahora las *ondas transversales*. Tomando como eje de las x la dirección de propagación de la onda y como eje y la dirección del desplazamiento transversal, encontramos que los desplazamientos u y w son cero y que el desplazamiento v es función de x y t . Las ecuaciones (264) nos dan, entonces

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (b)$$

Encontramos de nuevo una ecuación de la misma forma que la anterior, pudiendo pues concluir, que las ondas transversales se propagan a lo largo del eje x con la velocidad

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

o bien, según (269)

$$c_2 = c_1 \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \quad (270)$$

Para $\nu = 0,25$, la ecuación anterior nos da

$$c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{3}}$$

Cualquier función

$$f(x - c_2 t) \quad (c)$$

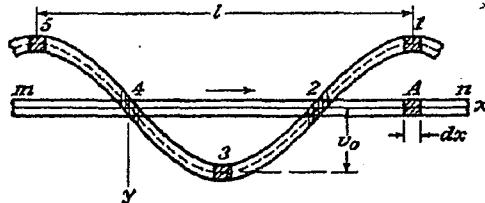


FIG. 243

es solución de la ecuación (b) y representa una onda que se propaga en la dirección x con velocidad c_2 . Tomemos, por ejemplo, la solución (c) de la forma

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \quad (d)$$

La onda tiene en este caso una forma sinusoidal. La longitud de onda es l y la amplitud v_0 . La velocidad del movimiento transversal será

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{2\pi c_2}{l} v_0 \cos \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \quad (e)$$

la cual es cero cuando el desplazamiento (d) es máximo, y tiene su valor máximo cuando el desplazamiento es nulo. La deformación tangencial producida por la onda es

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\pi v_0}{l} \cos \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t) \quad (f)$$

Como puede verse, la distorsión máxima (f) y el máximo del valor absoluto de la velocidad (e), se producen, en un punto determinado, simultáneamente.

Podemos representar esta forma de propagación de ondas de la manera siguiente: sea mn (fig. 243) una fibra de un medio elástico. Cuando una onda sinusoidal (d) se propaga a lo largo del eje x , el elemento A de

la fibra experimenta desplazamientos y distorsiones, cuyos valores consecutivos están indicados en la figura mediante los elementos rayados: 1, 2, 3, 4, 5, ... En el instante $t = 0$, el elemento A toma la posición indicada por 1. En este momento su distorsión y su velocidad son cero. Después adquiere una velocidad positiva y después de un intervalo de tiempo igual a $\frac{l}{c_2}$ su distorsión está representada por 2. En este instante el desplazamiento del elemento es cero y su velocidad es máxima. Después de un intervalo de tiempo igual $\frac{l}{c_2}$, las condiciones están indicadas por 3, y así sucesivamente.

Suponiendo que el área de la sección transversal de la fibra sea igual a la unidad, la energía cinética del elemento A es

$$\frac{\rho}{2} dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} dx \cdot \frac{4\pi^2 c_2^2}{l^2} v_0^2 \cos^2 \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t)$$

y su energía de deformación

$$\frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 dx = \frac{G}{2} dx \frac{4\pi^2 v_0^2}{l^2} \cos^2 \frac{2\pi}{l} (x - c_2 t)$$

Recordando que $c_2^2 = G/\rho$, podemos deducir que las energías cinética y potencial del elemento, en cualquier instante, son iguales. Esta es la misma conclusión que obtuvimos anteriormente al estudiar las ondas longitudinales en barras prismáticas (véase pág. 484).

En el caso de un terremoto, se producen los dos tipos de ondas, de dilatación y de distorsión, las cuales se propagan a través de la tierra con velocidades c_1 y c_2 . Esas ondas pueden ser registradas por un sismógrafo, de forma que el intervalo de tiempo transcurrido entre la llegada de los dos tipos de ondas, es un dato que da una orientación respecto a la distancia que separa a la estación registradora del centro de perturbación¹.

146. Propagación de ondas sobre la superficie de un cuerpo elástico. En la pregunta anterior, hemos estudiado la propagación de las ondas a cierta distancia de la superficie limitante de un medio elástico. Pude ocurrir, no obstante, que en la superficie de un cuerpo elástico tengamos ondas de un tipo diferente, las cuales se propagan sobre la superficie penetrando muy poco en el interior del cuerpo. Son semejantes a las ondas producidas en la superficie tranquila del agua al ser arrojada una piedra. Lord Rayleigh, que fue el primero en estudiar tales ondas², señaló: «No es improbable que las ondas superficiales aquí estudiadas,

¹ Las ondas provocadas en la tierra por las máquinas de movimiento alternativo son estudiadas en los siguientes trabajos: L. Mintrop, *Dissertation*, Göttingen, 1911; A. Heinrich, *Dissertation*, Breslau, 1930; G. Bornitz, *Über die Ausbreitung von Bodenschwingungen*, Berlin, 1932. Véase también E. Reissner y H. F. Sagoci, *J. Applied Phys.*, vol. 15, pág. 652, 1944; H. F. Sagoci, *ibid.*, pág. 655.

² Véase *Proc. London Math. Soc.*, vol. 17, 1887.

jueguen un papel importante en los terremotos y en los fenómenos de colisión de cuerpos elásticos. Divergiendo en dos dimensiones solamente, deben adquirir, a distancias grandes del origen, una importancia continuamente en aumento». El estudio de las gráficas de las ondas sísmicas, confirma la hipótesis de Rayleigh.

A distancias grandes del origen en que la onda ha sido creada, la deformación producida por las ondas que estudiamos puede ser considerada como bidimensional. Admitamos que el cuerpo está limitado por el plano $y = 0$, y tomemos como sentido positivo del eje y el que va hacia el interior del cuerpo y como sentido positivo del eje x el de propagación de la onda. Las expresiones de los desplazamientos, se obtienen combinando ondas de dilatación [ecuaciones (265)], y ondas de distorsión [ecuaciones (264)]. Suponiendo en ambos casos que $w = 0$, la solución de las ecuaciones (265), que representa las ondas de dilatación, puede escribirse

$$u_1 = se^{-ry} \operatorname{sen}(pt - sx), \quad v_1 = -re^{-ry} \cos(pt - sx) \quad (a)$$

donde p , r , y s son constantes. El factor exponencial de estas expresiones indica que, para valores reales positivos de r , la amplitud de la onda disminuye rápidamente al aumentar la profundidad y . El argumento $pt - sx$ de las funciones trigonométricas, muestra que las ondas se propagan en la dirección x con la velocidad

$$c_3 = \frac{p}{s} \quad (271)$$

Sustituyendo las expresiones (a) en las ecuaciones (265), encontramos que estas ecuaciones son satisfechas si

$$r^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2G}$$

o usando la notación

$$\frac{\rho p^2}{\lambda + 2G} = \frac{p^2}{c_1^2} = h^2 \quad (b)$$

si tenemos

$$r^2 = s^2 - h^2 \quad (c)$$

Tomaremos las soluciones de las ecuaciones (264), que representan las ondas de distorsión, en la forma

$$u_2 = Abe^{-by} \operatorname{sen}(pt - sx), \quad v_2 = -Abe^{-by} \cos(pt - sx) \quad (d)$$

donde A es una constante y b un número positivo. Puede demostrarse que la dilatación cúbica que corresponde a los desplazamientos (d) es cero y que las ecuaciones (264) son satisfechas si

$$b^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{G}$$

o empleando la notación

$$\frac{\rho p^2}{G} = \frac{p^2}{c_2^2} = k^2 \quad (e)$$

llegamos a

$$b^2 = s^2 - k^2 \quad (f)$$

Combinando las soluciones (a) y (b) y tomando $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, determinamos las constantes A , b , p , r , s , de forma que sean satisfechas las condiciones de contorno. La periferia del cuerpo está libre de fuerzas exteriores, de manera que para $y = 0$, $\bar{X} = 0$ e $\bar{Y} = 0$. Sustituyendo las ecuaciones (134) y tomando $l = n = 0$ y $m = -1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (g)$$

La primera de estas ecuaciones indica que las tensiones son tangenciales y la segunda, que las tensiones normales en la superficie del cuerpo, son nulas. Sustituyendo las expresiones anteriores para u y v en estas ecuaciones, resulta

$$\begin{aligned} 2rs + A(b^2 + s^2) &= 0 \\ \left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right)(r^2 - s^2) + 2(r^2 + Abs) &= 0 \end{aligned} \quad (h)$$

donde, según (b) y (e)

$$\frac{k^2}{h^2} - 2 = \frac{\lambda}{G}$$

Eliminando la constante A de las ecuaciones (h) y usando (c) y (f), obtenemos

$$(2s^2 - k^2)^2 = 4brs^2 \quad (k)$$

o bien, según (c) y (f)

$$\left(\frac{k^2}{s^2} - 2\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{h^2}{s^2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{s^2}\right)$$

Empleando las ecuaciones (b), (e) y (271), todas las cantidades de esta ecuación pueden ser expresadas en función de las velocidades c_1 de las ondas de dilatación, c_2 de las ondas de distorsión y c_3 de las ondas superficiales, obteniéndose

$$\left(\frac{c_3^2}{c_2^2} - 2\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{c_3^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c_3^2}{c_2^2}\right) \quad (l)$$

Empleando la notación

$$\frac{c_3}{c_2} = \alpha$$

y recordando que

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

la ecuación (l) se convierte en

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8 \left(3 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \alpha^2 - 16 \left[1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right] = 0 \quad (m)$$

Tomando por ejemplo, $\nu = 0,25$, obtenemos

$$3\alpha^6 - 24\alpha^4 + 56\alpha^2 - 32 = 0$$

o

$$(\alpha^2 - 4)(3\alpha^4 - 12\alpha^2 + 8) = 0$$

Las tres raíces de esta ecuación son

$$\alpha^2 = 4, \quad \alpha^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \alpha^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Las cantidades r^2 y b^2 , dadas por las ecuaciones (c) y (f), son números positivos y como se observará, solamente la última de las tres raíces satisface esas condiciones. En consecuencia

$$c_3 = \alpha c_2 = 0,9194 \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Tomando como caso extremo $\nu = \frac{1}{4}$, la ecuación (m) se transforma en

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 24\alpha^2 - 16 = 0$$

llegándose entonces a

$$c_3 = 0,9553 \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

En ambos casos, la velocidad de las ondas superficiales es ligeramente inferior a la de las ondas de distorsión propagadas a través del cuerpo. Conocida a , se puede calcular fácilmente la relación entre las amplitudes de los desplazamientos horizontales y verticales que ocurren en la superficie. Para $\nu = 1/4$ esta relación es 0,681. Podemos asimismo obtener la velocidad de propagación de las ondas superficiales, partiendo de la consideración de las vibraciones de un cuerpo limitado por dos planos paralelos¹.

¹ Véase H. Lamb, *Proc. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 93, pág. 114, 1917. Véase también S. Timoshenko, *Phil. Mag.*, vol. 43, pág. 125, 1922.

APÉNDICE

Aplicaciones de las ecuaciones en diferencias finitas en elasticidad

1. Deducción de las ecuaciones en diferencias finitas. Como hemos visto, el estudio de los problemas de elasticidad requiere la solución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales, sometidas a unas determinadas condiciones de contorno, las cuales sólo en los casos de contornos muy sencillos son resolubles de manera rigurosa.

A menudo es imposible obtener la solución exacta siendo necesario hacer uso de métodos aproximados, uno de los cuales, el método numérico basado en la sustitución de las ecuaciones en derivadas parciales por las correspondientes en diferencias finitas, va a ser tratado aquí¹.

Si una función continua $y(x)$ viene dada por el conjunto de valores y_0, y_1, y_2, \dots , correspondientes a $x = 0, x = \delta, x = 2\delta, \dots$, podemos obtener, restando, las *diferencias primas* $(\Delta_1 y)_{x=0} = y_1 - y_0, (\Delta_1 y)_{x=\delta} = y_2 - y_1, (\Delta_1 y)_{x=2\delta} = y_3 - y_2, \dots$, las cuales, divididas por el intervalo δ nos dan los valores aproximados de la derivada primera de $y(x)$ en los puntos correspondientes:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} \approx \frac{y_1 - y_0}{\delta}, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\delta} \approx \frac{y_2 - y_1}{\delta}, \dots \quad (1)$$

¹ Parece ser que C. Runge fue el primero en aplicar las ecuaciones en diferencias finitas en elasticidad, al emplear este método para la resolución de problemas de torsión (*Z. Math. Phys.*, vol. 56, pág. 225, 1908). Runge reduce el problema a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. L. F. Richardson, *Trans. Roy. Soc. (London)*, serie A, vol. 210, pág. 307, 1910, aplicó un proceso iterativo a la resolución de esas ecuaciones algebraicas obteniendo así los valores aproximados de las tensiones, que producen en las presas las fuerzas gravitatorias y la presión del agua. Otro proceso iterativo, así como la prueba de su convergencia, ha sido dado por H. Liebmann, *Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.*, 1918, pág. 385. La convergencia de este proceso de iteración en el caso de ecuaciones armónicas y biamónicas ha sido estudiada por F. Wolf, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 118, 1926, y R. Courant, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 322. El método de las diferencias finitas fue aplicado con éxito en el estudio de las placas por H. Marcus, *Armierter Beton*, 1919, pág. 107; H. Hencky, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 1, pág. 81, 1921, y vol. 2, pág. 58, 1922. Modernamente R. V. Southwell, *Relaxation Methods*, vols. I, II y III.

Partiendo de las diferencias primeras, las diferencias segundas se calculan de la siguiente manera

$$(\Delta_2 y)_{z=1} = (\Delta_1 y)_{z=1} - (\Delta_1 y)_{z=0} = y_2 - 2y_1 + y_0$$

y a partir de ellas, se obtienen los valores aproximados de las derivadas segundas

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{z=1} \approx \frac{(\Delta_2 y)_{z=1}}{\delta^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\delta^2} \quad (2)$$

Si tenemos una función continua de dos variables $w(x, y)$, podemos utilizar para el cálculo aproximado de sus derivadas parciales, ecuaciones semejantes a las (1) y (2). Supongamos, por ejemplo, que el contorno de nuestro problema es rectangular (fig. 1) y que se conocen los valores nu-

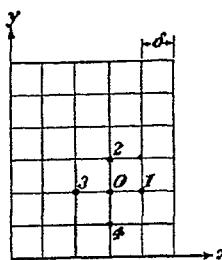


FIG. 1

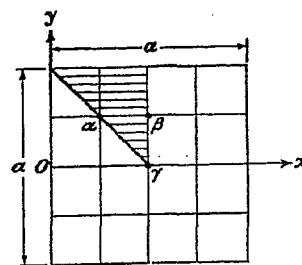


FIG. 2

méricos de la función w en los nudos de la cuadrícula, cuya celda elemental tiene la dimensión δ . Podemos entonces determinar los valores aproximados de las derivadas parciales de w en O mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{w_1 - w_0}{\delta}, & \frac{\partial w}{\partial y} &\approx \frac{w_2 - w_0}{\delta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &\approx \frac{w_1 - 2w_0 + w_3}{\delta^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &\approx \frac{w_2 - 2w_0 + w_4}{\delta^2} \end{aligned} \quad (3)$$

De forma similar, obtenemos las expresiones aproximadas de las derivadas parciales de orden superior. Obtenidas esas expresiones, podemos transformar fácilmente las ecuaciones en diferencias finitas. Consideremos, para empezar, el caso de la torsión de barras prismáticas. El problema, como sabemos¹, se reduce a la integración de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (4)$$

¹ Véase la ecuación (142), § 90.

en la que ϕ es la función de tensión, que debe ser constante a lo largo del contorno de la sección transversal, θ el ángulo de torsión por unidad de longitud de la barra y G el módulo de rigidez. Empleando ahora las fórmulas (3) podemos transformar la ecuación anterior en la ecuación en diferencias finitas

$$\frac{1}{\delta^2} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0) = -2G\theta \quad (5)$$

De esta forma todo problema torsional se reduce a la obtención de un conjunto de valores numéricos de la función de tensión ϕ que se mantengan constantes en el contorno de la sección transversal y que en los nudos interiores de la cuadrícula satisfagan la ecuación (5).

Vamos a considerar ahora el caso sencillo de una barra de sección cuadrada $a \times a$ (fig. 2), en la que usamos una red cuadrada cuya celda tiene la dimensión $\delta = 1/4a$. Por razones de simetría se ve que en el estudio de este caso, basta con considerar la parte de la sección que se muestra rayada en la figura. Determinados, en efecto, los valores α, β, γ de la función ϕ en los puntos que se señalan en la figura, conoceremos ϕ en todo nudo de la red. En cuanto al valor de ϕ en el contorno, podemos suponer que es cero. El problema, pues, se reduce al cálculo de α, β y γ , para lo que escribimos tres ecuaciones del tipo de la (5), que teniendo en cuenta las condiciones de simetría, nos quedan

$$\begin{aligned} 2\beta - 4\alpha &= -2G\theta\delta^2 \\ 2\alpha + \gamma - 4\beta &= -2G\theta\delta^2 \\ 4\beta - 4\gamma &= -2G\theta\delta^2 \end{aligned}$$

y que resueltas nos dan

$$\alpha = 1,375G\theta\delta^2, \quad \beta = 1,750G\theta\delta^2, \quad \gamma = 2,250G\theta\delta^2$$

La función de tensión viene, pues, determinada por el valor cero en el contorno y por los valores que acabamos de obtener en los nudos interiores.

Para calcular las derivadas parciales de la función de tensión, imaginemos una superficie continua que tenga por ordenadas en los nudos de la red los valores numéricos calculados. La pendiente en un punto cualquiera de esta superficie, nos dará el valor correspondiente (aproximado) de la tensión de torsión, dándose el valor máximo de la misma en el punto medio de los lados del cuadrado. Para hacernos una idea de la exactitud que se consigue al aplicar una red de tan pocos nudos, calculemos la tensión de torsión en el punto O de la figura 2. Para obtenerla, busquemos una curva continua cuyas ordenadas en los nudos del eje x sean los valores β, γ, β . Estos valores, divididos por $1/4G\theta\delta^2$, aparecen en la segunda línea de la tabla adjunta, dándose en las restantes líneas de la misma las sucesivas diferencias finitas¹.

¹ Consideraremos aquí las diferencias (que son usadas en la fórmula de Newton) como finitas todas ellas en un extremo del conjunto de cantidades.

La curva que buscamos puede entonces obtenerse aplicando la fórmula de interpolación de Newton:

$x =$	0	δ	2δ	3δ	4δ
$\phi =$	0	7	9	7	0
$\Delta_1 =$	7	2	-2	-7	
$\Delta_2 =$	-5	-4	-5		
$\Delta_3 =$	1	-1			
$\Delta =$	-2				

$$\begin{aligned}\phi = \phi_0 + x \frac{\Delta_1}{\delta} + x(x - \delta) \frac{\Delta_2}{1 \cdot 2 \cdot \delta^2} + x(x - \delta)(x - 2\delta) \frac{\Delta_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3\delta^3} \\ + x(x - \delta)(x - 2\delta)(x - 3\delta) \frac{\Delta_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\delta^4}\end{aligned}$$

Derivando ϕ y sustituyendo $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, por los valores de la tabla, que multiplicaremos por $G\theta\delta^2/4$, obtenemos para $x = 0$,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{124}{48} G\theta\delta = 0,646 \cdot G\theta\delta$$

Comparando este resultado con el valor exacto dado en el § 95, vemos que el error en este caso es del 4,3 %. Para conseguir mayor exactitud debemos usar una red más fina. Tomando, por ejemplo, como dimensión de la celda $\delta = a/6$ (fig. 3), tenemos que resolver seis ecuaciones de las que se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha = 0,952 \times 2G\theta\delta^2, \quad \beta = 1,404 \times 2G\theta\delta^2, \quad \gamma = 1,539 \times 2G\theta\delta^2 \\ \alpha_1 = 2,125 \times 2G\theta\delta^2, \quad \beta_1 = 2,348 \times 2G\theta\delta^2, \quad \gamma_1 = 2,598 \times 2G\theta\delta^2\end{aligned}$$

Usando ahora siete ordenadas a lo largo del eje x y calculando la pendiente en el punto O , obtenemos el valor máximo de la tensión¹, que resulta

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,661 G\theta\delta$$

El error del mismo es de un 2 %. Obtenidos los resultados para $\delta = 1/4a$ y $\delta = 1/6a$, puede conseguirse una mayor aproximación extrapolando¹. Se puede demostrar², en efecto, que el error de la derivada de la función

¹ El cálculo de las derivadas de una curva de interpolación se simplifica grandemente usando las tablas realizadas por W. G. Bickley. Estas tablas pueden verse en el libro *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, de R. V. Southwell.

² Véase L. F. Richardson, *loc. cit.*

de tensión ϕ , introducido por el uso de diferencias finitas, en lugar de ecuaciones diferenciales, es proporcional al cuadrado de la dimensión de la celda elemental de la red, supuesto que ésta sea pequeña. Si designamos

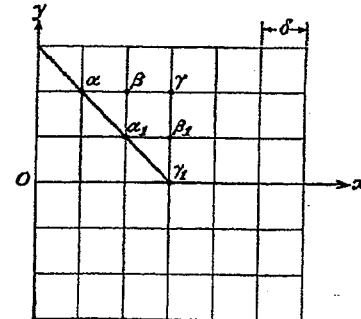


FIG. 3

por Δ el error de la tensión máxima para $\delta = 1/4a$ el error para $\delta = 1/6a$ podrá suponerse a $(\frac{2}{3})^2$. Usando los valores de la tensión máxima, calculados anteriormente, se obtiene 1 a partir de la ecuación

$$\Delta - (\frac{2}{3})^2 = 0,015 G\theta a$$

de donde

$$\Delta = 0,027 G\theta a$$

siendo entonces el valor más aproximado de la tensión

$$0,646 G\theta a + 0,027 G\theta a = 0,673 G\theta a$$

que difiere del valor exacto, $0,675 G\theta a$ en menos de $1/3 \%$.

2. Métodos de aproximación sucesiva. A la vista del sencillo ejemplo, estudiado más arriba, se deduce que el método de las diferencias finitas es más exacto cuanto más fina sea la red que utilizamos. Al mismo tiempo, sin embargo, el número de ecuaciones a resolver aumenta y el tiempo necesario para hallar su solución puede ser tan grande, que el método deje de ser práctico¹. La obtención de esa solución se facilita, no obstante, notablemente haciendo uso del método de aproximaciones sucesivas, método que vamos a ilustrar considerando la ecuación²

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

¹ En el trabajo de G. Runge, citado anteriormente, se llega a un sistema de 42 ecuaciones, que pudo ser resuelto sin gran dificultad gracias a la sencillez de las ecuaciones.

² Como vimos en el § 92, la solución de los problemas torsionales se reduce a la obtención de una función ϕ que tome unos determinados valores en el contorno y que satisfaga esa ecuación.

Como se deduce de (5) la ecuación en diferencias finitas correspondientes es

$$\phi_0 = \frac{1}{4}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (7)$$

ecuación que muestra que el valor de la función ϕ en cualquier nudo O de la red cuadrada, es igual a la media aritmética de los valores de la función en los cuatro nudos adyacentes. Este hecho va a permitirnos abordar

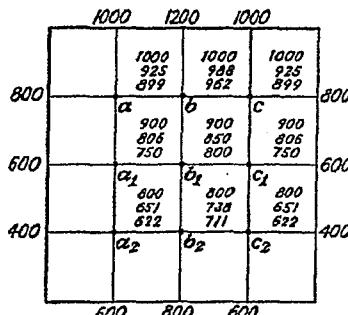


FIG. 4

el cálculo de los valores de ϕ por aproximaciones sucesivas. Consideremos de nuevo el caso sencillo en el que el contorno es un cuadrado (fig. 4) y supongamos que los valores de ϕ en ese contorno son los indicados en la figura. A causa de la simetría de estos valores respecto al eje vertical central, se deduce que ϕ será simétrica respecto a ese mismo eje. En consecuencia, bastará con calcular los valores de ϕ en los seis nudos a , b , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 . Esto puede realizarse fácilmente planteando seis ecuaciones (7) las cuales, son sencillas en este caso, y nos dan $\phi_a = 854$, $\phi_b = 914$, $\phi_{a1} = 700$, $\phi_{b1} = 750$, $\phi_{a2} = 597$, $\phi_{b2} = 686^1$. En lugar de proceder así, sin embargo, vemos a hacerlo de la siguiente forma: suponemos que la función ϕ toma unos ciertos valores (tales, por ejemplo, como los que encabezan las columnas numéricas escritas en la fig. 4) y después aplicamos a cada nudo la ecuación (7), con el fin de obtener una mayor aproximación. Considerando el punto a tenemos, como primera aproximación, el valor

$$\phi_a' = \frac{1}{4}(800 + 1000 + 1000 + 900) = 925$$

y para el punto b (empleando el valor obtenido de ϕ_a' y haciendo por simetría $\phi_b' = \phi_a'$)

$$\phi_b' = \frac{1}{4}(925 + 1200 + 925 + 900) = 988$$

¹ En el cálculo realizado despreciamos los decimales.

Realizando cálculos semejantes para todos los nudos interiores, obtenemos las primeras aproximaciones dadas por los segundos números de las columnas de la figura, pudiendo obtenerse a partir de ellas las segundas aproximaciones:

$$\begin{aligned}\phi_a'' &= \frac{1}{4}(800 + 1000 + 988 + 806) = 899 \\ \phi_b'' &= \frac{1}{4}(899 + 1200 + 899 + 850) = 962\end{aligned}$$

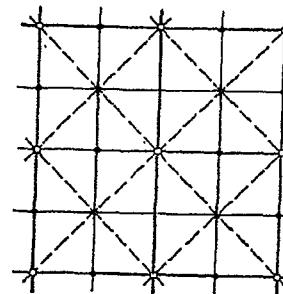


FIG. 5

Las segundas aproximaciones han sido escritas también en la figura 4, en la cual puede verse cómo las aproximaciones sucesivas tienden gradualmente a los valores exactos obtenidos anteriormente. En el caso presente y después de repetir 10 veces los cálculos, los resultados obtenidos difieren de los exactos en menos de una unidad, lo cual es una aproximación aceptable.

Generalmente el número de veces que es necesario repetir los cálculos depende mucho de la selección inicial de los valores de la función ϕ . Cuanto mejor sea ésta, menor será el número de las correcciones subsiguientes.

Al comenzar los cálculos conviene utilizar una red «abierta» que tenga pocos nudos interiores. Los valores de ϕ , en esos puntos, pueden obtenerse por solución directa de las ecuaciones (7) o mediante el proceso iterativo que acabamos de describir. A continuación, se pasa a una red más fina tal como la ilustrada en la figura 5, en la que la red «abierta» es representada por las líneas gruesas. Obtenidos los valores de ϕ en los nudos representados por pequeños círculos y aplicando las ecuaciones (7), se calculan los valores para los puntos marcados con cruces. Usando ahora las ecuaciones (7) y esos dos conjuntos de valores, se obtienen los correspondientes a los puntos señalados por pequeños círculos negros. De esta forma, estarán determinados todos los valores en los nudos de la red fina, pudiendo comenzarse los procesos de iteración en esa red.

En lugar de calcular los valores de ϕ , es posible asimismo obtener las correcciones a los valores ϕ^0 tomados inicialmente para la función ϕ^1 . Ocurre entonces que

$$\phi = \phi^0 + \psi$$

y dado que la función ϕ satisface la ecuación (6), otro tanto ocurrirá con la suma $\phi^0 + \psi$, obteniéndose

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

En el contorno se conocen los valores de ϕ anulándose en él, por tanto, las correcciones ψ . El problema, entonces, es encontrar la función ψ que satisfaga la ecuación (8) y se anule en el contorno. Sustituyendo la ecuación (8) por la correspondiente ecuación en diferencias finitas, se obtiene para cualquier punto O de una red cuadrada (fig. 1).

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = -(\phi_1^0 + \phi_2^0 + \phi_3^0 + \phi_4^0 - 4\phi_0^0) \quad (8')$$

El segundo miembro de esta ecuación puede ser evaluado, para todo nudo interior, partiendo de los valores supuestos ϕ^0 para la función ϕ . De esta forma, el problema de calcular las correcciones ψ se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones semejantes al (5), que puede ser atacado por el método iterativo estudiado.

3. Método de relajación. Un método útil para tratar ecuaciones en diferencias, tales como las (8'), ha sido desarrollado por R. V. Southwell quien lo ha nombrado *método de relajación*. Southwell comienza considerando la analogía de la membrana de Prandtl¹, la cual se basa en el hecho de que la ecuación diferencial (4), de los problemas de torsión, es de igual forma que la

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (9)$$

ecuación ésta que rige la deformación de una membrana sometida a una tracción uniforme en su borde y cargada lateralmente. En esta ecuación w es la flecha de la membrana respecto al plano horizontal, que es su posición inicial, q el valor de la carga repartida y S la tracción constante por unidad de longitud de contorno de la membrana. El problema es encontrar la flecha w función de x e y , que satisfaga la ecuación (9) en todo punto de la membrana y se anule en el contorno.

Deduzcamos ahora la ecuación en diferencias finitas correspondiente. Con ese fin sustituimos la membrana por la cuadrícula de hilos uniformemente estirados de la figura 1. Considerando el punto O y llamando $S\delta$

¹ Este método simplifica los cálculos, puesto que en él se trata con números relativamente pequeños.

² Véase el § 93.

a la tracción uniforme de los hilos, vemos que la fuerza vertical (hacia arriba) ejercida sobre el nudo O por los hilos $O-1$ y $O-3$ (fig. 6) es igual a

$$S\delta \left(\frac{w_0 - w_1}{\delta} + \frac{w_0 - w_3}{\delta} \right) \quad (10)$$

pudiendo escribirse una expresión semejante para los otros dos hilos $O-2$ y $O-4$. Remplazando la carga continua que actúa sobre la membrana

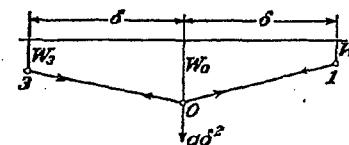


FIG. 6

por las fuerzas concentradas $q\delta^2$, aplicadas en los nudos, podemos escribir ahora la ecuación de equilibrio de un nudo O de la siguiente forma:

$$q\delta^2 + S(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0) = 0 \quad (11)$$

Esta es la ecuación en diferencias finitas que corresponde a la ecuación diferencial (9), debiendo obtenerse para resolver el problema un conjunto tal de valores, que satisfaga la ecuación (11) en todos los nudos.

Comenzaremos para ello con un conjunto cualesquiera de valores $w_0^0, w_1^0, w_2^0, w_3^0, w_4^0, \dots$, de la flecha. Sustituyéndolos en las ecuaciones (11) encontraremos, generalmente, que las condiciones de equilibrio no son satisfechas, de forma que para mantener las flechas supuestas en la red, necesitamos introducir soportes en sus nudos.

Las cantidades tales como:

$$R_0 = q\delta^2 + S(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0 - 4w_0^0) \quad (12)$$

que representan los esfuerzos a los que son sometidos los soportes, son llamados *fuerzas residuales* o residuos. Imaginemos ahora que los soportes son del tipo tornillo, de forma que todo nudo pueda ser desplazado a voluntad. Desplazando entonces convenientemente los soportes podremos conseguir finalmente que las fuerzas residuales (12) se anulen. Tales desplazamientos representarán, por tanto, las correcciones a añadir a las flechas $w_0^0, w_1^0, w_2^0, w_3^0, w_4^0, \dots$, supuestas inicialmente, para obtener los verdaderos valores de w .

El procedimiento utilizado por Southwell para realizar el desplazamiento de los soportes, es análogo al empleado por Calisev¹ al manejar

¹ K. A. Calisev, *Tehnicki List*, 1922 y 1923, Zagreb. Traducción alemana en *Publ. Intern. Assoc. Bridge and Structural Engineering*, vol. 4, pág. 199, 1936. Un método semejante ha sido desarrollado por Hardy Cross.

estructuras articuladas altamente indeterminadas desde el punto de vista estático. Se comienza desplazando uno de los soportes, el O , por ejemplo (fig. 6), dejando a los otros inmóviles. Ecuaciones tales como la (11) muestran que un desplazamiento hacia abajo w_0 , provoca la aparición de una fuerza vertical $-4Sw_0^2$ sobre el nudo O , indicando el signo menos que la fuerza es hacia arriba. Ajustando el desplazamiento de forma tal que

$$R_0 - 4Sw_0' = 0, \quad \text{es decir,} \quad w_0' = \frac{R_0}{4S} \quad (13)$$

podemos anular el residuo (12), consiguiendo que ninguna fuerza sea transmitida al soporte O . Al mismo tiempo, sin embargo, esfuerzos de valor Sw_0' son transferidos a los soportes adyacentes, lo que modifica sus fuerzas residuales. Procediendo de igual manera con el resto de los soportes y repitiendo varias veces la operación, se llega a reducir las fuerzas residuales a pequeñas cantidades que pueden ser despreciadas. Los desplazamientos totales de los soportes, finalmente ejecutados, representan las correcciones que es preciso realizar para obtener las verdaderas flechas de la cuadrícula tensada.

Con el fin de simplificar los cálculos que se presentan en la aplicación del método, que acaba de ser descrito, comenzaremos por poner la ecuación (11) en forma adimensional sustituyendo

$$w = \frac{q\delta^2}{S} \psi \quad (14)$$

lo que permite escribir:

$$1 + (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0) = 0 \quad (15)$$

donde las cantidades ψ_0, ψ_1, \dots , son números sin dimensiones.

El problema se reduce, de esta forma, a la determinación del conjunto de valores de ψ que verifican las ecuaciones (15) en todos los nudos interiores de la red. En el contorno ψ es nula. Para obtener la solución mediante el método descrito, partamos de un conjunto cualesquiera de valores iniciales $\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \dots$. Estos valores no satisfarán las ecuaciones de equilibrio (15) teniendo entonces los residuos

$$r_0 = 1 + (\psi_1^0 + \psi_2^0 + \psi_3^0 + \psi_4^0 - 4\psi_0^0) \quad (16)$$

que en este caso son números sin dimensiones.

Nuestro problema, ahora, consiste en añadir a los valores iniciales $\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \dots$, correcciones tales que anulen todos los residuos. Sumando la corrección ψ_0 a ψ_0^0 , añadimos la cantidad $-4\psi_0'$ al residuo r_0 y la ψ_0' a los residuos de los nudos adyacentes. Poniendo $\psi_0' = r_0/4$ anularemos el residuo de O y cambiaremos en una cierta cantidad los residuos de los nudos adyacentes. Operando de la misma forma con todos los nudos y repitiendo el proceso varias veces, reduciremos finalmente las fuerzas residuales a valores despreciables, lo que nos dará los valores de ψ con suficiente exactitud.

ciente exactitud. Los valores correspondientes de w se obtendrán entonces mediante la ecuación (14).

Con el fin de ilustrar el método, consideremos el problema, ya estudiado en el § 1 del apéndice, de la torsión de una barra de sección cuadrada. La ecuación diferencial correspondiente a este caso es la (4) la cual es expresada en forma adimensional poniendo

$$\phi = \frac{2G\delta^2}{1000} \psi \quad (17)$$

La ecuación en diferencias finitas (5) toma entonces la forma:

$$1000 + (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0) = 0 \quad (18)$$

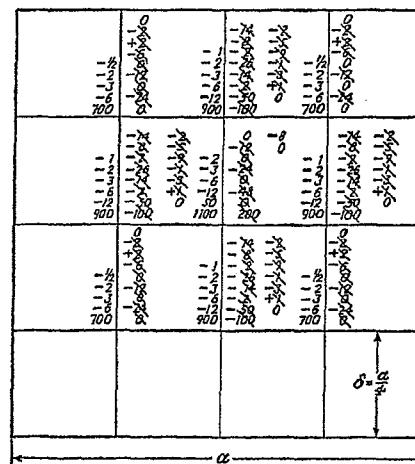


FIG. 7

El denominador 1000 ha sido introducido en la ecuación (17) con objeto de que los números sean lo suficientemente grandes como para poder despreciar media unidad de la última cifra significativa. De este forma trabajaremos solamente con números enteros. Con el fin de hacer nuestro ejemplo lo más sencillo posible comenzaremos considerando la red abierta de la figura 2. Bastará entonces con determinar los valores de ψ en tres puntos interiores, para los que ya conocemos la respuesta exacta (pág. 504). En la figura 7 la cuadrícula ha sido representada en una escala lo suficientemente grande como para permitir la inscripción de todos los resultados de los cálculos intermedios. El cálculo comienza con los valores de ψ , supuestos inicialmente, los cuales han sido inscritos a la izquierda de cada nudo. Los valores 700, 900 y 1100 han sido elegidos intencionadamente algo distintos de los exactos, calculados precedentemente. Sustituyendo

estos valores junto con el valor cero del contorno en el primer miembro de la ecuación (18), calculamos las fuerzas residuales para todos los nudos. Estas fuerzas están inscritas a la derecha y arriba de cada nudo. El valor máximo de las mismas, 200, se da en el centro de la red, punto éste a partir del cual comenzamos a aplicar el método de relajación. Corrigiendo el valor inicial 1100 mediante la adición del número 50, el cual está escrito encima del 1100, eliminamos completamente la fuerza residual en el centro. Es por eso que tachamos el número 200 poniendo el cero en su lugar. Hecho esto tendremos que cambiar los residuos de los nudos adyacentes. Añadimos para ello el número 50 a cada uno de estos residuos y escribimos los nuevos valores, -50, de las fuerzas residuales encima de los valores iniciales en la forma que se indica en la figura. Con esto finalizan las operaciones relativas al punto central de la red. Tenemos ahora cuatro nudos, simétricamente situados, con residuos iguales a -50 y es conveniente corregirlos simultáneamente. Aplicaremos para ello a todos estos puntos una misma corrección de valor -12¹. Estas correcciones que están escritas encima de los valores iniciales 900 alteran en $-12 \times 4 = -48$ los residuos previos de valor -50 obteniéndose como se expresa en la figura fuerzas residuales iguales a -2. Al mismo tiempo, fuerzas de valor -12 se sumarán a los residuos de los nudos adyacentes. De esta forma, como es fácil ver, el valor $-12 \times 4 = -48$ debe ser añadido al residuo del centro y el $-12 \times 2 = -24$ al de los nudos más próximos a los vértices de la figura. Con esto acabamos la primera etapa de nuestro cálculo. En la segunda volvemos a empezar con el punto central corrigiendo con el valor -12, lo que anula el residuo de ese punto y añade -12 al de los puntos adyacentes. Aplicando ahora una corrección igual a -6 a los puntos vecinos a los vértices, eliminamos sus residuos y alteramos en el valor -26 los de los cuatro nudos simétricos. El gráfico muestra tres etapas más del cálculo lo que supone una mayor reducción de los residuos. Los valores de ψ se obtendrán añadiendo a los valores iniciales todas las correcciones introducidas sucesivamente. Resulta, por tanto,

$$700 - 6 - 3 - \frac{1}{2} = 688,5, \quad 900 - 12 - 6 - 3 - 2 - 1 = 876,$$

$$1100 + 50 - 12 - 6 - 3 - 2 = 1127$$

La ecuación (17) nos da entonces los valores siguientes para ϕ :

$$\frac{688,5}{500} G\theta\delta^2 = 1,377G\theta\delta^2 = 0,0861G\theta a^2$$

$$\frac{876}{500} G\theta\delta^2 = 1,752G\theta\delta^2 = 0,1095G\theta a^2$$

$$\frac{1,127}{500} G\theta\delta^2 = 2,254G\theta\delta^2 = 0,1409G\theta a^2$$

¹ Tomamos -12 como corrección en lugar de $-\frac{50}{4} = -12,5$ por ser preferible trabajar con números enteros.

los cuales se aproximan mucho a los resultados exactos obtenidos anteriormente (véase el § 1 del apéndice).

Vemos que el método de Southwell da una representación física del proceso iterativo de resolución de las ecuaciones (15), lo que puede ayudar a elegir correctamente el orden en que deben ser abordados los nudos de la red.

Para obtener una mayor aproximación debemos pasar a una red más fina. Usando el método ilustrado en la figura 5, obtenemos los valores iniciales de ψ para una red cuadrada de dimensión $\delta = \frac{1}{8} a$. Aplicando a estos valores el proceso normal de relajación, podremos encontrar los valores de ψ para una red más fina y determinar así, con mayor precisión, el valor de la tensión máxima. Con los valores obtenidos para $\delta = \frac{1}{4} a$ y $\delta = \frac{1}{8} a$ puede conseguirse, extrapolando en la forma explicada en el § 1 del apéndice, una mayor aproximación.

4. Redes triangulares y exagonales. La red que hemos utilizado en el estudio precedente ha sido una cuadrícula. En ciertos casos, sin embargo, es preferible usar redes triangulares o exagonales (figs. 8a y 8b). Considerando la red triangular de la figura 8a vemos que la carga repartida en el interior del exágono, representado por la línea a trazos, estará aplicada en el nudo O. Si δ es la dimensión de la malla, el lado del exágono valdrá $\delta/\sqrt{3}$ y su área $\sqrt{3}\delta^2/2$, de forma que la carga aplicada a cada nudo será $\sqrt{3}\delta^2q/2$. Esta carga será equilibrada por las fuerzas ejercidas por los hilos 0-1, 0-2, ..., 0-6. Para que la red de hilos esté en correspondencia con la membrana uniformemente tensada, la tracción que

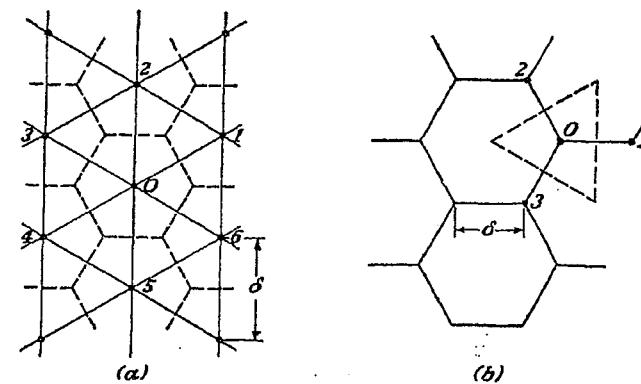


FIG. 8

existe en cada hilo debe ser igual a la transmitida por cada lado del exágono en la membrana. Su valor será entonces $S\delta/\sqrt{3}$. Procediendo ahora como en la pregunta anterior obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio para el punto O :

$$\frac{w_1 + w_2 + \dots + w_6 - 6w_0}{\delta} \cdot \frac{S\delta}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}q\delta^2}{2} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_6 - 6w_0 + \frac{3q\delta^2}{2S} = 0 \quad (19)$$

Introduciendo ahora la función adimensional ψ definida por:

$$w = \frac{3}{2} \frac{q\delta^2}{S} \psi \quad (20)$$

la ecuación en diferencias finitas quedará expresada de la siguiente forma:

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6 - 6\psi_0 + 1 = 0 \quad (21)$$

Una ecuación tal puede ser escrita para cada uno de los nudos interiores y su solución puede obtenerse bien por el método de iteración, bien por el de relajación.

En el caso de una red exagonal (fig. 8b), la carga repartida sobre el triángulo equilátero representado por la línea a trazos estará aplicada en el nudo O . Llamando δ a la longitud del lado de la malla exagonal, vemos que el lado del triángulo equilátero es $\delta\sqrt{3}$ y su área $3\sqrt{3}\delta^2/4$. La carga correspondiente, $3\sqrt{3}q\delta^2/4$, será equilibrada por las tensiones de los tres hilos $0-1, 0-2, 0-3$. Para que la red de hilos corresponda a la membrana tensada igualaremos la tensión de los hilos a $S\delta/\sqrt{3}$. La ecuación de equilibrio será entonces:

$$\frac{w_1 + w_2 + w_3 - 3w_0}{\delta} \cdot S\delta\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}q\delta^2}{4} = 0$$

o

$$w_1 + w_2 + w_3 - 3w_0 + \frac{3}{4} \frac{q}{S} \delta^2 = 0 \quad (22)$$

Para obtener las ecuaciones en diferencias finitas correspondientes a los problemas de torsión, tenemos que sustituir q/S por $2G\theta$ en las ecuaciones (19) y (22).

Consideremos, a título de ejemplo, la torsión de una barra cuya sección es un triángulo equilátero¹ (fig. 9). La solución exacta de este problema ha sido obtenida en el § 92.

¹ Este ejemplo es estudiado con detalle en el libro de Southwell, *loc. cit.*

Empleando el método de relajación, lo natural es elegir para el caso presente una red triangular. Comenzando con una red abierta tomamos como dimensión δ de la malla un tercio del lado a del triángulo. En consecuencia tendremos un único nudo interior O y los valores de la función ψ

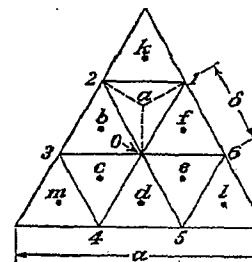


FIG. 9

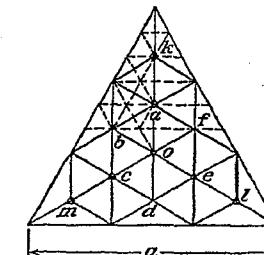


FIG. 10

de tensión en todos los nudos adyacentes, 1, 2, ..., 6, serán cero, por estar esos puntos en el contorno. La ecuación en diferencias finitas para el punto O se obtiene entonces, a partir de la ecuación (19) sustituyendo w_0 por ϕ_0 y q/S por $2G\theta$ lo que da:

$$6\phi_0 = 3G\theta\delta^2 = \frac{G\theta a^2}{3}$$

de donde se deduce:

$$\phi_0 = \frac{G\theta a^2}{18} \quad (23)$$

Pasemos ahora a una red más fina. Para obtener valores iniciales consideremos el punto a , centro del triángulo 1-2-0. Supongamos que este punto está unido a los nudos 0, 1 y 2, mediante los tres hilos $a-0, a-1, a-2$ de longitud $\delta/\sqrt{3}$. Considerando el punto a como un nudo de una red exagonal (fig. 8b), sustituyendo δ por $\delta/\sqrt{3}, q/S$ por $2G\theta$ en la ecuación (22) y tomando $w_1 = w_2 = 0, w_3 = \phi_0, w_0 = \phi_a$, se obtiene:

$$\phi_a = \frac{1}{3} \left(\phi_0 + \frac{G\theta\delta^2}{2} \right) = \frac{G\theta a^2}{27} \quad (24)$$

Estos mismos valores pueden ser tomados para la función de tensión en los puntos b, c, d, e y f de la figura 9. En lo que se refiere a los puntos k, l, m , usaremos una vez más la ecuación (22), que para este caso en el que $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ nos da:

$$\phi_k = \phi_m = \phi_l = \frac{G\theta a^2}{54} \quad (25)$$

De esta forma tenemos los valores de ϕ en todos los puntos señalados mediante pequeños círculos en la figura 10. En esta figura vemos, asimismo, que de cada uno de los nudos a , c y e parten seis hilos como se exige que ocurra en una red triangular (fig. 8a). En los nudos restantes, sin embargo, el número de hilos es inferior a seis. Con el fin de satisfacer las condiciones de red triangular en todos los puntos interiores, operamos en la forma que indican las líneas a trazos de la parte superior de la figura 10. De esta forma, la sección recta se encontrará dividida en triángulos

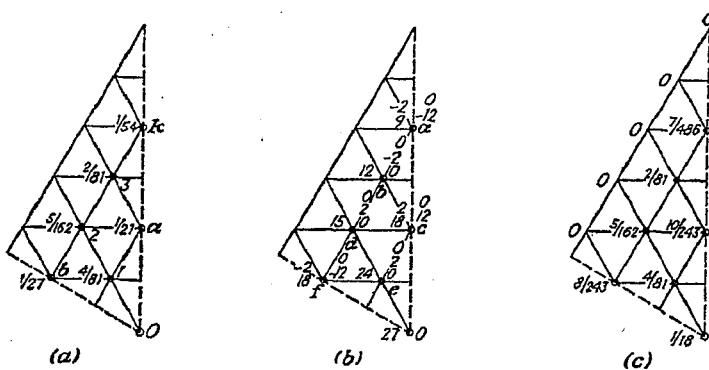


FIG. 11

equiláteros de lado $\delta = a/9$. Por razones de simetría vemos, que para resolver nuestro problema, basta con considerar una sexta parte de la sección recta, por ejemplo, la mostrada en la figura 11a. Los valores de ϕ en los nudos O , a , b y k están ya determinados. Los correspondientes a los puntos 1, 2 y 3 serán calculados ahora usando la ecuación (22) y el valor de ϕ en los tres puntos adyacentes. Para el punto 1, por ejemplo, tendremos:

$$\phi_0 + \phi_b + \phi_a - 3\phi_1 + \frac{3}{4} \cdot 2G\theta \left(\frac{a}{9}\right)^2 = 0$$

de donde sustituyendo ϕ_a , ϕ_b , ϕ_0 por sus valores anteriormente calculados, se obtiene:

$$\phi_1 = \frac{4}{81} \cdot G\theta a^2 \quad (26)$$

De igual manera podemos calcular ϕ_2 y ϕ_3 . En la figura 11a¹ han sido inscritos todos los valores a la izquierda del nudo correspondiente. Tales cantidades serán utilizadas ahora como valores iniciales para el proceso de relajación.

¹ En la figura ha sido omitido el factor $G\theta a^2$.

En el caso de la torsión, la ecuación (19) será sustituida por la

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_6 - 6\phi_0 + 3G\theta \frac{a^2}{81} = 0$$

que introduciendo la notación:

$$\phi = \frac{G\theta a^2 \psi^*}{486} \quad 0 \quad \psi = \frac{486\phi}{G\theta a^2} \quad (27)$$

queda en forma puramente numérica:

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6 - 6\psi_0 + 18 = 0 \quad (28)$$

Los valores iniciales de ψ , calculados mediante la ecuación (27), están inscritos a la izquierda de los nudos en la figura 11b. Sustituyendo estos valores en el primer miembro de (28) encontramos los residuos correspondientes:

$$R_0 = \psi_1^0 + \psi_2^0 + \dots + \psi_6^0 - 6\psi_0^0 + 18 \quad (29)$$

Los residuos así calculados, están escritos a la derecha de cada nudo en la figura 11b. Para la eliminación de los mismos comenzamos por el punto a . Dando a este punto un desplazamiento $\psi_a' = -2$ añadimos

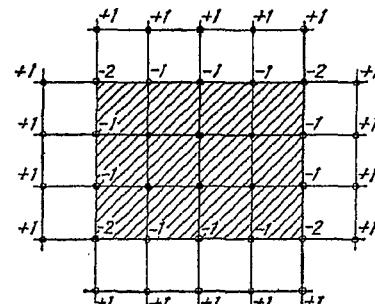


FIG. 12

[véase la ecuación (29)] +12 al residuo en a y -2 a los de todos los puntos adyacentes. De esta forma el residuo en a ha sido eliminado, mientras que el correspondiente al punto b toma el valor -2. Los residuos en el contorno carecen de importancia puesto que en los puntos del mismo tenemos soportes fijos. Considerando ahora el punto c e introduciendo en él un desplazamiento +2 anulamos su residuo y añadimos +2 a los residuos de los puntos b , d y e . El resto de los mismos será anulado im-

* El número 486 ha sido introducido en esta fórmula con el fin de trabajar solamente con números enteros.

poniendo un desplazamiento -2 al punto f. Sumando a los valores iniciales de ψ todas las correcciones registradas, obtenemos los valores correctos de ψ , y empleando la ecuación (27) los de ϕ . Tales valores que divididos por $G\theta a^2$ aparecen en la figura 11c coinciden con los obtenidos en la solución rigurosa (g) del § 92.

5. Relajación en grupo y en bloque. En el proceso seguido hasta aquí, para anular los residuos, se trabaja con un solo nudo, considerándose fijos al resto. A veces, sin embargo, es preferible desplazar un grupo de nudos simultáneamente. Supongamos, por ejemplo, que la figura 12 representa una porción de cuadrícula y que damos un desplazamiento unitario a todos los puntos de la zona rayada mientras el resto de los nudos permanecen fijos. Podemos imaginar que todos los nudos de la zona rayada están unidos a una placa rígida de masa nula, la cual es desplazada una longitud unidad según su propia normal. De las consideraciones sobre el equilibrio (fig. 6) se deduce que los desplazamientos descritos modifican los residuos de los nudos, extremos de los hilos que unen la placa rayada con el resto de la cuadrícula. Si O y 1 representan los nudos extremos de un hilo, la contribución a sus propios residuos de los desplazamientos w_0 y w_1 son:

$$R_0 = -S\delta \frac{w_0 - w_1}{\delta} \quad \text{y} \quad R_1 = S\delta \frac{w_0 - w_1}{\delta}$$

Si mantenemos fijo ahora el punto 1 y al O le damos un desplazamiento w_0 , las fuerzas residuales se incrementarán en:

$$\Delta R_0 = -S \Delta w_0, \quad \Delta R_1 = S \Delta w_1.$$

Introduciendo, conforme a nuestra notación anterior, las cantidades adimensionales:

$$\frac{R}{q\delta^2} = r, \quad w = \frac{q\delta^2}{S} \psi$$

obtenemos:

$$-\Delta\psi_0, \quad \Delta r_1 = \Delta\psi_0$$

Vemos entonces que dando un incremento unidad a ψ_0 se produce un cambio de los residuos igual a:

$$\Delta r_0 = -1, \quad \Delta r_1 = +1$$

Estos cambios son representados en la figura. Los residuos de los otros nudos de la red no varían. Si n es el número de hilos que unen la placa móvil al resto de la red el desplazamiento unidad de aquélla, tiene por efecto añadir la cantidad $-n$ a la resultante de las fuerzas residuales actuantes sobre la porción rayada de la red. Eligiendo un desplazamiento

tal que anule la resultante, obtenemos un conjunto de fuerzas residuales que se anulan mutuamente, siendo así más fácil su eliminación mediante el procedimiento normal de relajación punto por punto. En las aplicaciones prácticas es ventajoso alternar el proceso de relajación en bloque con el de relajación punto por punto. Supongamos, por ejemplo, que la zona rayada de la figura 13 representa una porción de una red triangular.

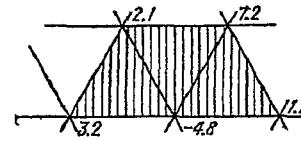


FIG. 13.

El número n de hilos que une esta porción al resto de la red es 16 y la resultante de los residuos escritos en la figura es 8.8. El desplazamiento en bloque apropiado sería, en consecuencia, $8.8/16 = 0.55$. Después de aplicar ese desplazamiento la resultante de las fuerzas residuales que actúan sobre la zona rayada de la red se anula y la liquidación de los residuos se conseguirá más fácilmente mediante el procedimiento de relajación punto por punto.

En lugar de dar a la placa ficticia un desplazamiento, perpendicular a su plano y constante para todos sus nudos, se la puede girar alrededor de un eje situado en su plano. Los desplazamientos correspondientes de los nudos y la modificación resultante de los residuos puede calcularse fácilmente. De esta forma podemos anular, no solamente la resultante de las fuerzas residuales sino también el momento resultante respecto a cualquier eje elegido en el plano de la placa.

Podemos igualmente prescindir de la noción de placa ficticia y asignar desplazamientos arbitrarios a cualquier grupo de nudos. Si tenemos alguna idea sobre la forma de la superficie de deformación de la red, podremos elegir desplazamientos de grupo que aceleren el proceso de anulación.

6. Torsión de barras de sección múltiplemente conexa. Como ya hemos demostrado¹, cuando las barras son de sección múltiplemente conexa la función de tensión ϕ aparte de satisfacer la ecuación (4) debe verificar a lo largo de cada contorno interior la relación:

$$-\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 2G\theta A \quad (30)$$

en la que A es la superficie del agujero.

¹ Véase el § 101.

En la analogía de la membrana la ecuación correspondiente es:

$$-S \int \frac{\partial w}{\partial n} ds = qA \quad (31)$$

que significa que la carga, uniformemente repartida sobre la superficie del agujero¹, es equilibrada por las tracciones existentes en la membrana. Aplicando ahora las ecuaciones en diferencias finitas y considerando como red una cuadrícula, pondremos $S\delta$ como tensión de los hilos y llamaremos w_0 a la flecha del contorno y w_i a la del nudo i , adyacente al agujero. Tendremos entonces, en lugar de la ecuación (31), la expresión:

$$S\delta \sum \frac{(w_i - w_0)}{\delta} + qA = 0$$

o la:

$$S \left(\sum_{i=1}^n w_i - nw_0 \right) + qA = 0 \quad (32)$$

en la que n es el número de hilos que unen la superficie del orificio al resto de la red. La ecuación (11) no es más que un caso particular de la ecuación (32) en la que $n = 4$.

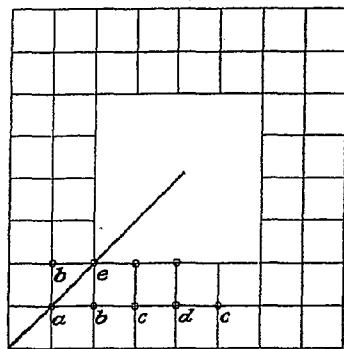


FIG. 14

Podemos escribir tantas ecuaciones (32) como agujeros existan en la sección transversal. Estas ecuaciones junto con las (11), escritas para cada nudo de la cuadrícula, bastan para determinar las flechas de todos los nudos de la red y del contorno de los agujeros.

Examinemos, por ejemplo, el caso de un tubo cuadrado cuya sección

¹ El orificio es representado por una placa absolutamente rígida de peso nulo, que se puede desplazar según la perpendicular al plano inicial de la membrana tensada.

es la representada en la figura 14. Tomando la cuadrícula abierta representada en la figura y teniendo en cuenta las condiciones de simetría, observamos que basta con determinar los valores de la función de tensión en a , b , c , d y e . Las relaciones necesarias se obtendrán utilizando la ecuación (32) y las cuatro ecuaciones (11), correspondientes a los nudos a , b , c y d . Sustituyendo q/S por $2G\theta$ y observando que $n = 20$ y $A = 16\delta^2$ estas ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 20e - 8b - 8c - 4d &= 16 \cdot 2G\theta\delta^2 \\ 2b - 4a &= -2G\theta\delta^2 \\ a - 4b + c + e &= -2G\theta\delta^2 \\ b - 4c + d + e &= -2G\theta\delta^2 \\ 2c - 4d + e &= -2G\theta\delta^2 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse fácilmente, obteniéndose:

$$e = \frac{1170}{488} \cdot 2G\theta\delta^2$$

así como los valores a , b , c y d .

Estos valores, obtenidos con una red abierta, no nos dan las tensiones con suficiente exactitud, siendo necesario pasar a una red más fina. El resultado de tales cálculos puede encontrarse en la obra de Southwell¹.

7. Puntos próximos al contorno. En los ejemplos precedentes existían nudos de la red que se encontraban en el contorno, pudiéndose aplicar el mismo procedimiento de relajación a todos los puntos. A menudo, sin embargo, ocurre que ciertos puntos se encuentran muy próximos al contorno, estando ligados al mismo por hilos muy cortos. A causa de las diferencias de longitud de los hilos es preciso introducir ciertas modificaciones en las ecuaciones (11) y (19). Vamos a estudiar ahora tales modificaciones centrándonos en el ejemplo representado en la figura 15. Una pieza plana en la que existen dos entalladuras semicirculares es sometida a esfuerzos de tracción, repartidos uniformemente en sus extremos. Supongamos que mediante el método fotoceléctrico, expuesto en el capítulo 5, se haya determinado en todos los puntos la diferencia de las tensiones principales. Nuestro problema ahora es determinar la suma de las tensiones principales, la cual como ya hemos indicado (§ 2 del apéndice) debe satisfacer la ecuación diferencial (6). En los puntos del contorno se conoce una de las tensiones principales, por lo que usando los resultados de los ensayos fotoelásticos, podremos determinar la otra tensión principal y la suma de las mismas. Nuestro problema, por tanto, es resolver la ecuación diferencial (6) conociendo los valores de ϕ en el contorno.

¹ R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, pág. 60, Oxford University Press, Nueva York, 1946.

Aplicando el método de las diferencias finitas a una red de malla cuadrada, observamos que a causa de la simetría de la pieza basta con considerar una cuarta parte de la misma. Esta porción junto con los valores de ϕ

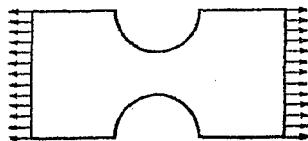


FIG. 15

en el contorno son mostrados en la figura 16. Considerando el punto A de esta figura, vemos que tres de los hilos que en él confluyen tienen la longitud «standard» δ , mientras el cuarto tiene una longitud menor $m\delta$

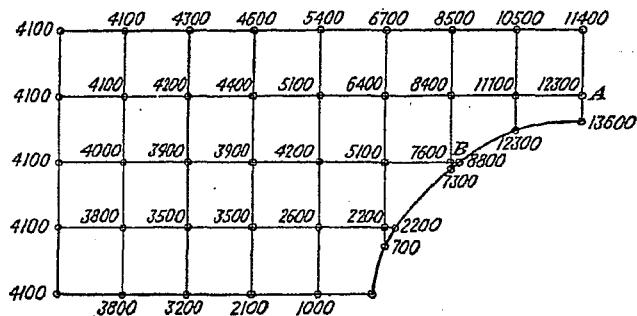


FIG. 16

($m \approx 0.4$ en este caso). Esta circunstancia deberá ser tenida en cuenta al establecer la ecuación de equilibrio del punto A , la cual será:

$$S\delta \left(\frac{\phi_a - \phi_1}{\delta} + \frac{\phi_a - \phi_2}{\delta} + \frac{\phi_a - \phi_3}{\delta} + \frac{\phi_a - \phi_4}{m\delta} \right) = 0$$

o:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \frac{1}{m} \phi_4 - \left(3 + \frac{1}{m} \right) \phi_a = 0$$

Aplicando al punto A el procedimiento normal de relajación y dando a ϕ_a un incremento igual a la unidad, introduciremos en los residuos los cambios que se muestran en la figura 17a. Este tipo de repartición debe ser empleado para la anulación de los residuos en A . Si consideramos el punto B , vemos que a él llegan dos hilos más cortos de lo normal. Llamando a sus longitudes $m\delta$ y $n\delta$, vemos que la eliminación de los residuos en el punto B debe ser realizada según la forma ilustrada en la figura 17b.

Aplicando esta forma operatoria en todos los puntos próximos al contorno y el proceso normal de relajación en el resto de los nudos, se llega a los valores de ϕ expresados en la figura 16¹.

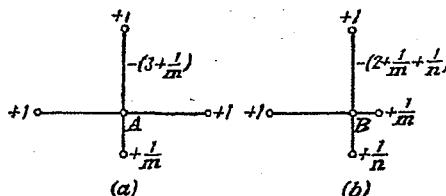


FIG. 17

En el caso más general en el que se emplea la ecuación (9) y existen cargas exteriores aplicadas a los nudos, llamamos $m\delta$, $n\delta$, $r\delta$ y $s\delta$ a las longitudes de los hilos que confluyen en un punto «irregular» O de la cuadrícula y supondremos que la carga transmitida a este nudo es $\frac{q\delta^2}{4} (m + n + r + s)$. La ecuación de equilibrio será entonces:

$$\begin{aligned} & \frac{q\delta^2}{4} (m + n + r + s) \\ & + S \left[\frac{w_1}{m} + \frac{w_2}{n} + \frac{w_3}{r} + \frac{w_4}{s} - w_0 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) \right] = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

Para $m = n = r = s = 1$, esta ecuación coincide con la (11), deducida para un punto regular. Mediante la ecuación (33) se puede, en cada caso, establecer el procedimiento conveniente semejante al mostrado en la figura 17 para ponderar los residuos. Podemos establecer igualmente una ecuación análoga para el caso de una red triangular.

Con las modificaciones que acabamos de estudiar, el procedimiento de relajación se aplica a los casos en los que existen puntos irregulares cerca del contorno.

8. Ecuación biarmónica. Hemos visto (§ 16) que en el caso de problemas de elasticidad, bidimensionales, con fuerzas conocidas actuando sobre el contorno y fuerzas másicas nulas, las tensiones vienen definidas por una función de tensión ϕ que satisface la ecuación biarmónica:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (34)$$

¹ Este ejemplo ha sido tratado por R. Weller y G. H. Shortley, véase *J. Applied Mechanics*, 1939, pág. A-71. Dado que los valores de ϕ en el contorno se obtienen de ensayos fotelásticos y son conocidos con una precisión pequeña, los valores en los puntos interiores son dados con sólo dos o tres cifras significativas.

y las condiciones de contorno (20) del § 14, que en este caso son:

$$\begin{aligned} l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \bar{X} \\ m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \bar{Y} \end{aligned} \quad (35)$$

Conociendo las fuerzas que actúan a lo largo de la periferia podemos calcular ϕ en el contorno integrando¹ las ecuaciones (35). El problema se reduce entonces a encontrar la función ϕ que cumpla en todo punto interior al contorno la ecuación (34) y que tome (la función ϕ y sus deri-

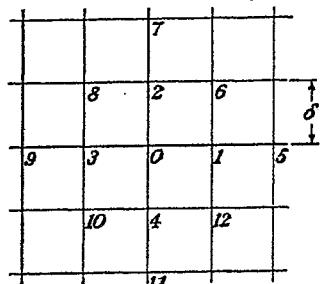


Fig. 18

vadas) en él ciertos valores prescritos. Usando el método de las diferencias finitas tomemos una red cuadrada (fig. 18) y transformemos la expresión (34) en la ecuación correspondiente en diferencias finitas. Conociendo las derivadas segundas:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_1 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_5 - 2\phi_1 + \phi_0)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_3 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_0 - 2\phi_3 + \phi_9)$$

se deduce que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \approx \frac{1}{\delta^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_1 - 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_3 \right] \\ &\approx \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_1 - 4\phi_3 + \phi_5 + \phi_9) \end{aligned}$$

¹ Consideraremos aquí solamente regiones simplemente conexas.

De forma semejante tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &\approx \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_7 + \phi_{11}) \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} &\approx \frac{1}{\delta^4} [4\phi_0 - 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}] \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (35), obtenemos la ecuación en diferencias finitas buscada:

$$\begin{aligned} 20\phi_0 - 8(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}) \\ + \phi_5 + \phi_7 + \phi_9 + \phi_{11} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Esta ecuación debe ser satisfecha en todo nudo de la red interior al contorno de la placa. Para obtener los valores de la función de tensión en el borde ϕ integramos las ecuaciones (35). Observando (fig. 20, § 15) que:

$$l = \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad y \quad m = \operatorname{sen} \alpha = -dx/ds$$

las ecuaciones (35) tomarán la forma

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \bar{X} \\ - \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \bar{Y} \end{aligned} \quad (37)$$

de donde por integración se obtiene:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \int \bar{Y} ds \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \int \bar{X} ds \end{aligned} \quad (38)$$

Para determinar ϕ utilizamos la ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

que integrando por partes nos da:

$$\phi = x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \left(x \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial x} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial y} \right) ds \quad (39)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de las derivadas, dados por las expresiones (37) y (38), se puede calcular el valor en el contorno de ϕ . Es preciso advertir que el cálculo de las derivadas primeras (38), introducirá dos constantes de integración A y B y que en la realización de la integral que figura en la ecuación (39) aparecerá una tercera constante C . La expre-

sión final de ϕ contendrá, por tanto, una función lineal $Ax + By + C$. Puesto que las componentes de la tensión vienen dados por las derivadas segundas de ϕ , esa función lineal no modifica su distribución, pudiéndose elegir arbitrariamente en consecuencia las constantes A , B y C .

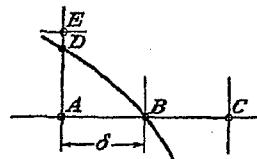


FIG. 19

Partiendo de los valores de ϕ y de sus derivadas primeras en el contorno, podremos calcular aproximadamente los valores de ϕ en los nudos adyacentes al contorno, tales como los puntos A , C y E de la figura 19. Teniendo, por ejemplo, los valores de ϕ_B y de $(\partial\phi/\partial x)_B$ en B se obtiene:

$$\phi_C = \phi_B + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_B \delta, \quad \phi_A = \phi_B - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_B \delta$$

Fórmulas análogas pueden ser escritas para el punto E . Ulteriormente, cuando la forma de la superficie que representa la función de tensión ϕ sea conocida de manera aproximada, se podrá realizar una evaluación más exacta de estas cantidades.

Conociendo los valores aproximados de ϕ en los nudos adyacentes al contorno y escribiendo para los restantes nudos interiores las ecuaciones del tipo (36) correspondientes, tendremos un sistema de ecuaciones lineales que basta para calcular los valores de ϕ en los nudos. Las diferencias segundas podrán ser usadas para el cálculo aproximado de las tensiones.

El sistema de ecuaciones (36) puede ser resuelto, bien directamente, bien de forma aproximada, mediante los procesos ya estudiados. Los diversos métodos para obtener la solución serán ilustrados a continuación mediante el ejemplo sencillo de una placa cuadrada, cargada en la forma que se indica en la figura 20¹.

Tomando los ejes de coordenadas que se muestran en la figura 2², calculamos a partir del origen los valores de ϕ en el contorno. De $x = 0$ a $x = 0,4a$, las fuerzas aplicadas sobre el borde son nulas, de donde:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = 0$$

¹ Este es uno de los muchos casos estudiados por P. M. Varvak, *Collection of Papers on Structural Mechanics*, Kiev Structural Institute, vol. 3, pág. 143, 1936. K. Beyer ha dado igualmente una solución numérica de un problema semejante en su libro *Die Statik im Eisenbetonbau*, 2.^a edición, vol. 2, pág. 733, Berlín, 1934.

² Se obtiene este sistema haciendo girar los ejes de la figura 20, § 14.

que integrando nos da:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = A, \quad \phi = Ax + B, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = C$$

donde A , B y C son constantes a lo largo del eje x , que como ya hemos dicho pueden ser elegidas arbitrariamente. Nosotros supondremos que $A = B = C = 0$. La función ϕ se anula entonces, en aquella porción del

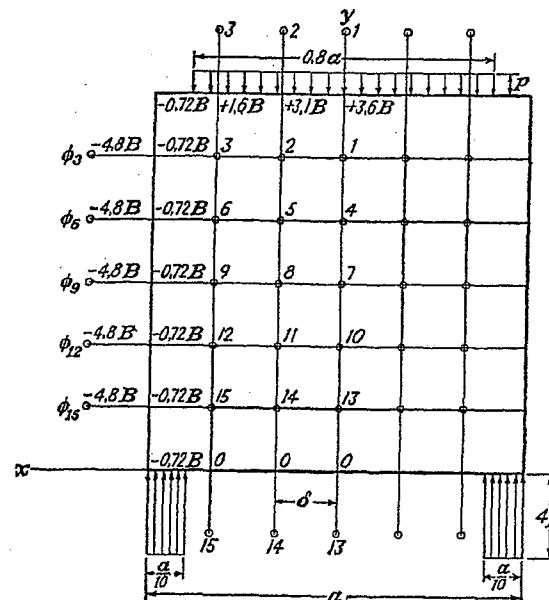


FIG. 20

lado inferior sobre la cual no actúa ninguna carga, lo que asegura la simetría de ϕ respecto al eje y . Desde $x = 0,4a$ hasta $x = 0,5a$, actúa una carga uniforme de intensidad $4p$ y las ecuaciones (38) dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= - \int 4p \, dx = -4px + C_1 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando se obtiene:

$$\phi = -2px^2 + C_1x + C_2$$

Las constantes de integración vendrán determinadas por las condiciones de que en el punto $x = 0,4a$, común a las dos partes de la arista inferior, los valores de ϕ y $\partial\phi/\partial x$ sean únicos. Tendremos, en consecuencia, que

$$(-4px + C_1)_{x=0,4a} = 0, \quad (-2px^2 + C_1x + C_2)_{x=0,4a} = 0$$

de donde se deduce

$$C_1 = 1,6pa, \quad C_2 = -0,32pa^2$$

La función de tensión ϕ desde $x = 0,4a$ a $x = 0,5a$, estará representada por la parábola

$$\phi = -2px^2 + 1,6pax - 0,32pa^2 \quad (a)$$

que para el vértice de la placa nos da:

$$(\phi)_{x=0,5a} = -0,02pa^2, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=0,5a} = -0,4pa \quad (b)$$

Sobre el lado vertical de la placa no actúa ninguna fuerza, por lo que de las ecuaciones (38), se deduce que para cualquier punto de este borde, los valores de $\partial\phi/\partial x$ y $\partial\phi/\partial y$ deben ser los mismos que para el vértice inferior, es decir,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -0,4pa, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (c)$$

Resulta de esto que ϕ permanece constante a lo largo del lado vertical. Este valor constante, ya calculado para el vértice inferior, será $-0,02pa^2$.

A lo largo de la parte no cargada del borde superior las derivadas primas de ϕ deben permanecer constantes. Tomarán, por tanto, el valor dado por (c), idéntico al correspondiente al vértice superior. La función de tensión será entonces:

$$\phi = -0,4pax + C$$

Puesto que en el vértice superior izquierdo el valor de ϕ es $-0,02pa^2$, se deduce que $C = 0,18pa^2$ y la función de tensión es:

$$\phi = -0,4pax + 0,18pa^2 \quad (d)$$

Considerando ahora la porción cargada del borde superior y observando que en ella $ds = -dx$ e $\bar{Y} = -p$, $X = 0$, se obtiene de las ecuaciones (38)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -px + C_1$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = C_2$$

Para $x = 0,4a$ estos valores deben coincidir con los (c). Se tiene entonces $C_1 = C_2 = 0$ y la función de tensión tomará la forma:

$$\phi = -\frac{px^2}{2} + C$$

Para $x = 0,4a$ su valor debe ser igual al dado por (d), de donde $C = 0,1pa^2$:

$$\phi = -\frac{px^2}{2} + 0,1pa^2 \quad (e)$$

La función de tensión viene representada por una parábola que tiene al eje y como eje de simetría. Con esto se termina el cálculo de los valores en el contorno de ϕ y de sus derivadas primeras, ya que los valores correspondientes a la parte derecha del borde se obtendrán por simetría.

Poniendo

$$\frac{pa^2}{36} = B$$

podemos expresar todos los valores calculados para el contorno, en la forma mostrada en la figura 20.

Calculemos ahora, extrapolando, los valores de ϕ en los nudos situados al exterior del contorno. Volviendo a empezar con el borde inferior de la placa y observando que la $\partial\phi/\partial y$ se anula a lo largo de este lado, podemos tomar para los puntos exteriores los mismos valores $\phi_{13}, \phi_{14}, \phi_{15}$, que para los puntos interiores adyacentes al contorno¹. De igual manera procedemos con el borde superior de la placa. A lo largo del borde vertical la derivada es:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=0,5a} = -0,4pa$$

y podemos obtener, de forma aproximada, los valores correspondientes a los puntos exteriores, restando la cantidad:

$$0,4pa \cdot 2\delta = \frac{0,4pa^2}{3} = 4,8B$$

de los valores asignados a los nudos interiores, adyacentes al contorno, en la figura 20.

Podemos ahora iniciar el cálculo de los valores de ϕ en los nudos interiores de la red. Abordando la resolución directa de las ecuaciones en diferencias finitas, debemos escribir, habida cuenta de la simetría del problema, las ecuaciones (36) para los 15 puntos indicados en la figura 20.

¹ Este procedimiento de extrapolación utilizado en el artículo de Varvak es diferente del indicado en la página 528.

La resolución de estas ecuaciones da para ϕ los valores que figuran en la tabla siguiente:

ϕ/B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	3,356	2,885	1,482	2,906	2,512	1,311	2,306	2,024	1,097	1,531	1,381	0,800	0,634	0,608	0,396

Calculemos la componente normal de la tensión σ_z a lo largo del eje y . Los valores de esta tensión vienen dados por la derivada segunda $\partial^2 \phi / \partial y^2$. Utilizando las diferencias finitas obtenemos para el punto superior ($y = a$)

$$(\sigma_z)_{y=a} \approx \frac{(3,356 - 2 \cdot 3,600 + 3,356)B}{\delta^2} = -\frac{0,488pa^2}{36\delta^2} = -0,488p$$

Para el punto inferior ($y = 0$)

$$(\sigma_z)_{y=0} = \frac{(0,634 - 0 + 0,634)B}{\delta^2} = 1,268p$$

Si consideramos la placa como una viga apoyada sobre dos soportes y suponemos que los valores de σ_z en la sección media ($x = 0$), siguen una distribución lineal, tendremos que $(\sigma_z)_{\max} = 0,60p$. Vemos, pues, que para una placa de esa forma la fórmula usual de las vigas da un resultado incorrecto.

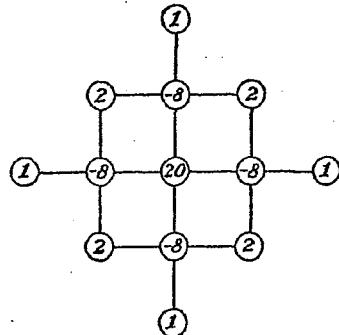


FIG. 21

Para resolver las ecuaciones en diferencias finitas mediante el proceso de iteración, tomemos ciertos valores iniciales arbitrarios $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{15}$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (36) obtenemos las fuerzas residuales correspondientes a todos los nudos interiores, los cuales pueden ser eliminados siguiendo el proceso de relajación. El tipo correcto de repartición obtenido a partir de las ecuaciones (36) es representado en la figura 21, en la que se dan los cambios de los residuos causados por la

variación de ϕ_0 en una unidad. Cuando este método es aplicado a la placa cuadrada estudiada anteriormente, debe observarse que los valores de ϕ a lo largo del contorno están sujetos a las restricciones, que se siguen de las condiciones de borde, lo que implica que las fuerzas residuales en

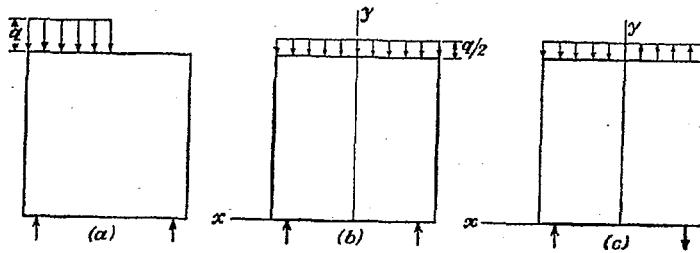


FIG. 22

los puntos del contorno no deben ser eliminadas. A continuación podemos pasar a una red más fina utilizando como valores iniciales de ϕ los obtenidos para la red abierta.

En casos de distribución asimétrica de carga tales, por ejemplo, como el mostrado en la figura 22a, la carga aplicada puede descomponerse según indican las figuras 22b y 22c, en una componente simétrica y otra antisimétrica. En estos dos últimos casos podremos limitarnos a considerar media placa, puesto que en el caso simétrico $\phi(x, y) = \phi(-x, y)$ y en el antisimétrico $\phi(x, y) = -\phi(-x, y)$.

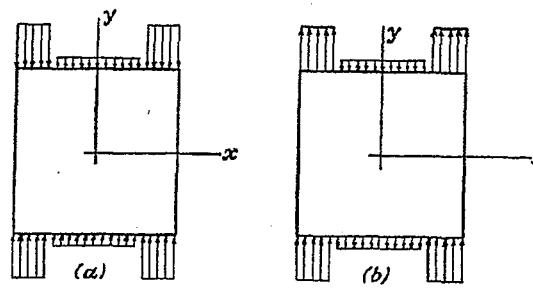


FIG. 23

El trabajo puede reducirse aún más, considerando igualmente el eje horizontal de simetría de la placa rectangular. La carga representada en la figura 20 puede descomponerse en la forma que indica la figura 23, en una componente simétrica y otra antisimétrica. En cada uno de estos casos bastará con calcular los valores numéricos de la función de tensión en una cuarta parte de la placa.

9. Torsión de árboles circulares de diámetro variable. El estudio de este problema exige, como hemos visto en el § 104, encontrar una función de tensión que satisfaga la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (40)$$

en todo punto de la sección axial del árbol (fig. 24) y que sea constante a lo largo del contorno de esa sección.

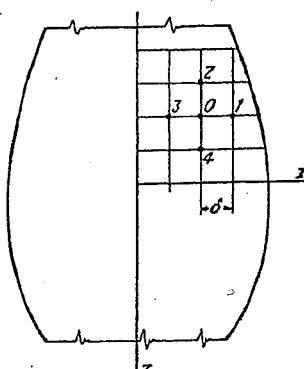


FIG. 24

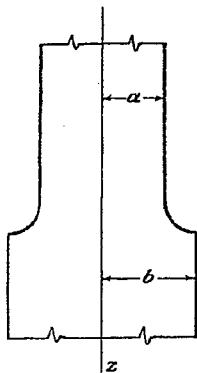


FIG. 25

La solución rigurosa del problema es obtenible solamente en unos pocos casos sencillos, siendo necesario en la mayoría de los casos prácticos, hacer uso de métodos aproximados.

Nosotros emplearemos el método de las diferencias finitas con una red cuadrada. Considerando un nudo O (fig. 24) podremos operar sobre las derivadas segundas que figuran en la ecuación (40), en la forma en que lo hemos hecho anteriormente. Como derivada primera podemos tomar:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=r_0} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} + \frac{\phi_0 - \phi_3}{\delta} \right) = \frac{\phi_1 - \phi_3}{2\delta}$$

La ecuación en diferencias finitas correspondiente a la ecuación (40) será:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 - \frac{3\delta}{2r_0} (\phi_1 - \phi_3) = 0 \quad (41)$$

Nuestro problema, entonces, se reduce a encontrar el conjunto de valores de ϕ que tomen el valor constante supuesto en el contorno y que satisfagan las ecuaciones (41) en todo nudo interior de la red. Podemos tratar este problema, bien resolviendo directamente las ecuaciones (41), bien mediante uno cualquiera de los métodos de iteración.

Consideraremos, a título de ejemplo, el caso representado en la figura 25. En la región en la que varía rápidamente el diámetro, tendremos una distribución tensional complicada, pero a suficiente distancia de la transición una solución sencilla de Coulomb, nos dará una precisión suficiente y la distribución de tensiones será independiente de z . La ecuación (40) para tales puntos toma la forma

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (42)$$

siendo la solución general de la misma

$$\phi = Ar^4 + B \quad (43)$$

y las tensiones correspondientes (véase el § 104).

$$\tau_{z\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{d\phi}{dr} = 4Ar, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

Comparando este resultado con la solución de Coulomb, tenemos:

$$4A = \frac{M_t}{I_p}$$

donde M_t es el par aplicado e I_p el momento polar de inercia del árbol. Suprimiendo de la solución general (43) la constante B , que no ejerce ninguna influencia sobre la repartición de tensiones, encontramos que a suficiente distancia de la transición, la función de tensión viene dada por las expresiones

$$\phi_a = \frac{M_t}{2\pi a^4} \cdot r^4, \quad \phi_b = \frac{M_t}{2\pi b^4} \cdot r^4 \quad (44)$$

Estas expresiones se anulan en el eje del árbol y toman sobre el borde el valor común $M_t/2\pi$. Dado que ϕ es constante a lo largo del contorno, ese mismo valor será el correspondiente a la curva de transición. De esta forma, en la resolución de las ecuaciones (41), la elección del valor constante en el contorno equivale a asignar al par un valor determinado.

En la resolución de las ecuaciones (41) podemos aplicar de nuevo la analogía de la membrana. Comenzamos con los puntos en los que se verifica la ecuación (42). La ecuación en diferencias finitas correspondientes es:

$$\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0 - \frac{3\delta}{2r_0} (\phi_1 - \phi_3) = 0 \quad (45)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la que define las deformaciones de una membrana de forma cilíndrica, cuya tensión varía en razón inversa con r^3 . Para demostrar esto consideremos tres puntos consecutivos de la red (fig. 26). Las flechas correspondientes son designadas por w_3 , w_b , w_1 .

La tensión en el centro de los hilos 3-0 y 0-1 será:

$$\frac{S\delta}{\left(r_0 - \frac{\delta}{2}\right)^3} \approx \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r_0}\right)$$

y

$$\frac{S\delta}{\left(r_0 + \frac{\delta}{2}\right)^3} \approx \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{2r_0}\right)$$

La ecuación de equilibrio del punto O será, entonces

$$\begin{aligned} \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{2r_0}\right) \frac{w_1 - w_0}{\delta} + \frac{S\delta}{r_0^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r_0}\right) \frac{w_3 - w_0}{\delta} &= 0 \\ w_1 - 2w_0 + w_3 - \frac{3\delta}{2r_0} (w_1 - w_3) &= 0 \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación (45).

En el caso general, observando que la tensión de la membrana no depende de z , obtenemos la ecuación

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0 - \frac{3\delta}{2r_0} (w_1 - w_3) = 0 \quad (46)$$

la cual concuerda con la (41). Vemos, pues, que podemos calcular la función de tensión como si se tratara de la deformación de una membrana sometida a una tensión no uniforme, cuya deflexión en el contorno es el valor constante $M_i/2$ y en puntos distantes de la transición el dado por (44).

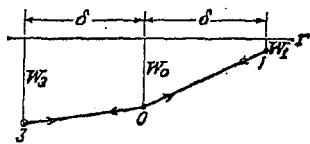


FIG. 26

Tomamos entonces ciertos valores iniciales arbitrarios para w , los sustituimos en el primer miembro de las ecuaciones (46) y calculamos los residuos. El problema, ahora, consiste en eliminar esos residuos por el procedimiento de relajación. La figura 26 muestra que dando al punto O un desplazamiento unidad, añadimos a los residuos de 1 y 3 las cantidades

$$\frac{S}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{2r_0}\right) \quad \text{y} \quad \frac{S}{r_0^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r_0}\right)$$

lo que nos indica que la repartición de las variaciones, para la operación de relajación, es la mostrada en la figura 27 y que cambia de un punto

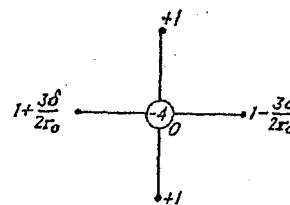


FIG. 27

a otro con la distancia radial r_0 . R. V. Southwell y D. N. de G. Allen han efectuado cálculos de este tipo¹.

¹ Proc. Roy. Soc. (London), serie A, vol. 183, págs. 125-134. Vease también el libro de Southwell *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, pág. 152.

Indice de auteurs

- ADAMS, L. H., 453.
AIRY, G. B., 48.
ALLEN, D. N. de G., 537.
ALMANSI, E., 476.
ANDERSON, E. W., 318.
ANTHIS, 306.
ARNDT, W., 348.
- BARNET, 483.
BARJANSKY, A., 245.
BARKER, L. H., 455.
BARTON, M. V., 431.
BASU, N. M., 321.
BAY, H., 74.
BELAJEF, N. M., 422.
BERNDT, G., 418.
BESCHKINE, L., 201.
BEYER, K., 77, 528.
BICKLY, W. G., 110, 506.
BIEZENO, C. B., 329.
BILLEVICZ, V., 89.
BIOT, M. A., 75, 473.
BISHOPE, K. E., 99.
BLICHT, F., 70, 76.
BORCHARDT, C. W., 459, 476.
BORNITZ, G., 499.
BOUSSINESQ, J., 111, 128, 270, 329, 402, 409,
 488, 494.
BRAHTZ, J. II. A., 125.
BREIDT, R., 337.
BREWSTER, D., 159, 172.
BYERLT, 73, 452.
- CALISEV, K. A., 511.
CAROTHERS, S. D., 69, 122.
CASTIGLIANO, A., 191.
CAUCHY, A. L., 488.
- CHREE, C., 95, 393, 426, 481.
CHWALLA, E., 201.
CLAPEYRON, B. P. E., 344.
CLEBSCH, A., 277, 483, 489.
CLOSE, L. J., 417.
COKER, E. G., 148, 151, 159, 237, 244.
CORNU, M. A., 291.
COULOMB, C. A., 294.
COURANT, R., 503.
CRAEMER, H., 77.
CRAGGS, J. W., 432.
CROSS, H., 511.
CUSHMAN, P. A., 329, 378.
- CHENG, D. H., 476.
CHURCHILL, R. V., 73.
- DAVIDENKOW, N., 470.
DAVIES, R. M., 481.
DEN HARTOG, J. B., 171, 448.
DINNIK, A., 316, 348, 417, 426, 452.
DONATH, M., 99.
DONNELL, L. H., 111, 237, 489.
DOUGALL, J., 381.
DRUCKER, D. C., 171.
DUHAMEL, J. M. C., 450, 459.
DUNCAN, W. J., 323, 375.
- EICHENBERG, G., 457.
ELLIOTT, II. A., 234.
ELLIS, D. L., 375.
- FILLINGER, P., 69, 153.
FILON, L. N. G., 70, 74, 128, 148, 150, 151,
 159, 237, 244, 273, 305, 317, 426, 429.
- FISCHER, A., 99.
FLAMANT, 111, 492.

- FÖPPL, A., 88, 251, 316, 324, 342, 345.
 FÖPPL, L., 251, 316, 347.
 FORSYTH, A. R., 387, 427.
 FROCHT, M. M., 160, 168, 171, 239.
 FUCHS, S., 417.
- GALERKIN, B., 188, 270, 317, 370.
 GIERMANN, K., 129.
 GÖHNER, O., 433, 437, 440.
 GOLOVIN, H., 88, 99, 104.
 GOODIER, J. N., 74, 76, 111, 137, 148, 178, 179, 200, 222, 293, 294, 358, 399, 447, 476, 477.
 GOURSAT, E., 216.
 GRAMMEL, R., 99.
 GRASHOF, F., 67, 89, 134, 368.
 GHAY, Å., 427.
 GREEN, A. E., 111, 237, 245.
 GREENHILL, A. G., 316, 317, 330.
 GHEESEGAN, M., 245.
 GRIFFIN, H. K., 453.
 GRIFFITH, A. A., 190, 306, 328, 332, 335, 376.
 GRÜBER, M., 98.
 GRUNBERG, G., 461.
 GUENDER, D. F., 370.
- HADJI-ARGYRIS, J., 207.
 HAMBURGER, M., 426.
 HEARLE, H., 99.
 HSINRICH, A., 499.
 HENCKY, H., 503.
 HENGST, H., 110.
 HERTZ, H., 137, 413, 419, 420, 494.
 HETÉNYI, M., 172, 173.
 HIGGINS, T. J., 318, 328, 345.
 HODKINSON, B., 99.
 HOERSCH, V. A., 422.
 HOFF, N. J., 42.
 HOILL, D. L., 318, 370.
 HOLZER, H., 98.
 HONECKER, E., 461.
 HOPKINSON, J., 459.
 HOSOKAWA, Y., 151.
 HOWLAND, R. C. J., 109, 129, 143.
 HSU, M. C., 110.
 HUBER, M. T., 177, 417.
 HUTH, J. H., 327, 339.
- INGBERG, S. H., 453.
 INGERSOLL, L. R., 479.
 INGLIS, C. E., 125, 200, 231.
- JACOBSEN, L. S., 348.
 JEFFERY, G. B., 86, 109, 241, 244.
 JING, K. S., 110.
 JOHNSTON, B. G., 327.
- KAPFUS, R., 375.
 KARELITZ, G. B., 332.

- KÁRMÁN, T. von, 67, 129, 201, 203.
 KELVIN, Lord, 270, 329, 396.
 KELVIN Y TAIT, 311, 329, 391.
 KRNT, C. H., 459.
 KIRCHHOFF, G., 273.
 KIRSCH, G., 106.
 KLITCHIEFF, J. M., 381.
 KNIGHT, R. C., 110.
 KOLOSOF, G., 220, 228, 231, 317.
 KOROBOV, A., 391.
- LAMB, H., 128, 409, 502.
 LAMÉ, G., 84, 224, 344, 399.
 LARMOR, J., 331, 402.
 LAUE, M. V., 470.
 LEES, C. H., 452.
 LEIBENSON, L. S., 323, 375.
 LESSELLS, J. M., 459.
 LETSON, H. F. G., 457.
 LEVEN, M. M., 160, 172.
 LEVY, M., 69, 153.
 LEVY, S., 108.
 LIERMAN, H., 503.
 LING, C. B., 110, 116, 245, 318.
 LODÉ, W., 178.
 LORENZ, K., 454.
 LOVE, A. E. H., 143, 148, 265, 277, 317, 370, 381, 385, 391, 402, 409.
 LUNDBERG, G., 422.
 LYSE, I., 327.
- MACMILLAN, W. D., 476.
 MCPHERSON, A. E., 108.
 MARCH, H. W., 324, 328.
 MARCUS, H., 503.
 MARGUERRE, K., 75.
 MARTIN, H. M., 99.
 MATVAR, J., 151.
 MATTHEWS, G. B., 427.
 MAUNSELL, F. G., 116.
 MAXWELL, J. C., 159.
 MEINESZ, V., 376.
 MELAN, E., 143, 144, 244, 348.
 MÉSMER, G., 74.
 MESNAGER, A., 52, 123, 159, 170.
 MICHELL, J. H., 111, 120, 123, 137, 139, 144, 273, 345, 381, 385, 391.
 MINDLIN, R. D., 108, 171, 223, 245, 270, 402, 419, 476.
 MINTROP, L., 499.
 MISES, R. von, 177.
 MIURA, A., 125.
 MOHR, O., 36, 120, 251.
 MORKOVIN, V., 246.
 MORTON, W. B., 417.
 MULLER, I., 69.
 MURPHY, G., 42.
 MUSCHELIŠVILI, N., 216, 237, 246, 318, 473.
 MYKLESTAD, N. O., 476.

- NÁDÁI, A., 310, 430.
 NÁGEL, A., 457.
 NAVIER, 294.
 NEMÉNYI, P., 273.
 NEUBER, H., 237-39, 270, 345.
 NEUMANN, F. E., 459.
 NISHIMURA, G., 111.
- ODQVIST, K. G., 422.
 OSGOOD, W. F., 73.
 OSGOOD, W. R., 68.
- PAPKOVITCH, P. F., 270.
 PASCHOUD, M., 330.
 PEARSON, K., 67, 69, 89, 370, 381.
 PETERSON, R. E., 239.
 PETRENKO, S. N., 421.
 PICKETT, G., 200, 429.
 PIGEAUD, M., 74.
 PILGRAM, M., 433.
 POCHHAMMER, L., 381, 426, 481.
 POISSON, S. D., 488.
 POLLARD, C., 69.
 POLYA, C., 305.
 PORITSKY, H., 116, 423.
 PÖSCHL, T., 231, 245, 345, 494.
 PRANDTL, L., 88, 298, 306, 309.
 PRESCOTT, J., 481.
 PROWSE, W. A., 494.
 PURSER, F., 340.
- QUEST, H., 329.
- RADEMAKER, J. M., 329.
 RAMSAUER, C., 494.
 RANKIN, A. W., 431.
 RANKINE, W. J. M., 67, 134.
 RAYLEIGH, Lord, 425, 444, 481, 499.
 REISSNER, E., 153, 201, 207, 368, 499.
 REISSNER, H., 150, 469.
 RÉSAL, H., 89.
 RIBIÈRE, C., 88, 104.
 RICHARDSON, L. F., 69, 503.
 RITZ, W., 187, 188, 318, 320.
 ROBINSON, W. C., 453.
 ROCK, D. H., 370.
 ROEVER, V., 433.
 RUNGE, C., 503.
- SADOWSKY, M. 110, 111, 122, 399.
 SAGOL, H. F., 499.
 SAINT-VENANT, 56, 57, 178, 295, 302, 304, 305, 316, 317, 355, 365, 488, 489, 492, 494.
 SCHIHCHTWEIG, H., 99.
 SCHLEICHER, F., 177, 409.
 SCHNADEL, G., 201.
 SCHULZ, K. J., 110.
 SCRUTON, C., 375.
 SEARLE, G. F. C., 175.
- SEARS, J. E., 426, 494.
 SEEGRÄ, M., 370.
 SEEWALD, F., 69, 74, 128.
 SEN, B., 245.
 SETH, B. R., 370.
 SEZAWA, K., 111.
 SHEPHERD, W. M., 125, 370.
 SHORTLEY, G. H., 525.
 SMEKAI, A., 189.
 SMITH, F. C., 108.
 SNEDDON, I. N., 234.
 SNIVELY, H. D., 116.
 SOKOLNIKOFF, I. S., 246, 265, 318, 370.
 SOLAKIAN, A. G., 332.
 SONNTAG, R., 347, 348.
 SOUTHWELL, R. V., 375, 399, 503, 506, 510, 511, 523, 537.
 STERNBERG, E., 111, 399.
 STEVENSON, A. C., 110, 231, 235, 370.
 STODOLA, A., 95, 98, 453.
 STOKES, G. G., 126.
 STRABEL, R., 291.
 STRAUCH, F., 150.
 SYMONDS, P. S., 237.
- TAKEMURA, K., 151.
 TAYLOR, G. I., 306, 328, 332, 335, 376.
 TERAZAWA, K., 409.
 THIBODEAU, W. E., 111.
 THOMAS, G. B., 368.
 THOMAS, H. R., 422.
 TIMOSHENKO, S., 28, 67, 86, 103, 107, 108, 149, 151, 177, 183, 184, 196, 239, 310, 320, 341, 342, 358, 373, 375, 426, 458, 459, 502.
 TIMPE, A., 52, 68, 74, 88, 144, 148, 237, 340, 348, 391.
 TODD-HUNTER Y PEARSON, 89, 270, 295.
 TRANTER, C. J., 153, 432.
 TRAYER, C. W., 324, 328.
 TREFFTZ, E., 309, 320, 321, 358.
 TUZI, Z., 109.
- VARVAK, P. M., 528.
 VOIGHT, W., 494.
 VOLTERA, V., 148, 273.
- WAGSTAFF, J. E. P., 494.
 WAHL, A. M., 239, 433.
 WANG, C. K., 110.
 WANG, P. S., 110.
 WATSON, G. N., 186, 210.
 WAY, S., 409.
 WEBER, C., 245, 305, 341, 385.
 WEIBEL, E. E., 168, 170, 473.
 WEIGAND, A., 324, 348.
 WEINEL, E., 245.
 WEINSTEIN, A., 375.
 WELLER, R., 525.
 WESTERGAARD, H. M., 251.

INDICE DE AUTORES

- WHITTAKER, E. T., 186, 210.
 WHITTEMORE, H. L., 421.
 WIECHARDT, K., 149.
 WIGGLESWORTH, L. A., 370.
 WILLERS, F. A., 348.
 WILLIAMSON, E. D., 453.
 WILSON, C., 111, 126, 159.
 WILSON, R. E., 453.
 WILSON, T. L., 108.
 WINKLER, E., 89.
- YOUNG, D. H., 310.
 YOUNG, Th., 484.
- ZOBEL, O. J., 479.

Indice alfabético

- Barra:**
 de sección rectangular:
 en la flexión, 362.
 en la torsión, 310, 312, 342.
 elíptica:
 bajo flexión, 360.
 bajo torsión, 299.
Biel de ojo, tensión en, 150.
Bolas, presión de, 413.
- Calentamiento no uniforme**, tensiones debidas al (v. *Tensiones de origen térmico*).
Calor, tensiones debidas a la distribución del, 444, 452, 454, 462, 470, 479.
Carácter localizado de la distribución de tensiones en el orificio, 107, 399.
- Cargas:**
 simétrica y asimétrica, 533.
 uniformemente distribuida sobre una viga, 63, 68, 73, 381.
Castigliano, teorema dc, 191.
Cauchy-Riemann, ecuaciones de, 213.
- Cavidad:**
 elipsoidal, 271.
 esférica, 399.
- Celda elemental**, 504.
- Centro:**
 de compresión, 398.
 de cortadura, 373.
 de flexión, 373.
 de torsión, 308, 375.
- Cilíndricas**, coordenadas, 343, 382, 385, 386.
- Cilindro:**
 banda de presión sobre un, 430.
 circular:
 con orificio excéntrico, 86, 241.

- Acción de una carga concentrada sobre:**
 un disco, 134.
 un sólido de extensión indefinida, 394, 402.
 una cuña, 123.
 una placa:
 indefinida, 139.
 semiindefinida, 111.
 una tira, 143.
 una viga, 125.
- Alabeo** de las secciones transversales de prismas bajo torsión, 296, 302.
- Alargamiento específico**, 26.
- Analizador**, 160.
- Analogías hidrodinámicas**, 222, 329.
- Anchura eficaz** de las vigas en T, 201.
- Angulos:**
 entrantes:
 concentración de tensiones en vigas en I, 379.
 en árboles, 325, 332.
 en placas, 170.
 en tubos, 338.
 específicos de torsión, 285, 295, 301, 311, 317, 324, 332, 337.
- Anillo circular** comprimido por dos fuerzas iguales y opuestas, 149.
 solución general, 145.
 tensiones iniciales, en el, 148.
- Anisotropía**, 22.
- Arboles:**
 de diámetro variable, 342.
 huecos, torsión de, 332.
 torsión de (v. *Torsión*).
 troncocónico, 347.
- Armónicas**, funciones, 213, 214.
- Arrastre** por tensión cortante, 207.

deformación simétrica, 426.
flexión, 358.
deformación simétrica, 426.
hueco, sometido a presión, 84.
tensiones de origen térmico, 450, 470, 479.
Circular, anillo (*v. Anillo circular*).
Coeficiente:
de dilatación térmica, 441.
de Poisson, 28.
determinación, 291.
Compatibilidad, condiciones de (*v. Condiciones de compatibilidad*).
Componentes:
de la deformación, 25, 27.
de la tensión, 24.
en coordenadas curvilineas, 227.
Compresión:
entre cuerpos sólidos, 419.
entre esferas, 413, 422.
por carga:
en cuñas, 123.
en discos, 134.
en placas rectangulares, 73, 75.
Concentración de tensiones:
en ángulos entrantes sujetos a torsión (véase también *Ángulos entrantes*), 325, 338.
en cavidad esférica, 399.
en orificio:
circular, 106-08.
elíptico, 110.
en zonas de transición de ejes de diverso diámetro, 348.
uso de la analogía hidrodinámica en la determinación de la, 329.
Condiciones:
de compatibilidad:
en coordenadas cilíndricas, 383.
en problemas:
bidimensionales, 46.
tridimensionales, 265.
de contorno:
como funciones de los desplazamientos, 270.
en la flexión, 356.
en la torsión, 296.
en problemas bidimensionales, 45, 265
Constantes:
elásticas (*v. t. Ley de Hooke*), 27, 28.
fotoelásticas, 161.
Contacto, superficie de, 414.
Coordenadas:
bipolares, 239.
cilíndricas, 382, 386.
curvilineas ortogonales, 223, 224.
componentes de la tensión en, 227.
elípticas, 225.
polares, 80, 386.
en problemas:

bidimensionales, 80.
tridimensionales, 386.
Corriente eléctrica, analogía con ejes de diámetro diámetro y con la torsión, 348.
Cortadura, centro de, 373, 375.
Cortante simple, esfuerzo, 29.
Cuerpo:
cilíndrico de cualquier sección transversal:
en la flexión, 287, 355.
en la tensión, 282, 283.
en la torsión, 294.
esférico bajo presión, 413.
múltiplemente conexos, 147, 148, 273, 521.
semiindefinido, contorno de un:
carga distribuida sobre él, 406.
fuerza sobre él, 402.
Cuña con carga:
en la punta, 123, 125.
sobre sus caras, 151.
Curvatura:
adicional de la viga, 131.
de las vigas, 67, 379, 381.
adicional, 131.
efecto de la fuerza transversal sobre la, 67.
relación con el momento de flexión, 380, 381.
Curvilineas, coordenadas, 223, 224.
Choque:
de esferas, 424.
duración, 425, 493.
longitudinal de barras, 486.
con extremos redondos, 494.
tensiones producidas por él, 484.
Deformación:
en un punto, 39, 255.
círculo de Mohr, 41, 42.
compatibilidad, 46, 265, 384.
componentes, 26, 258.
ejes principales de, 259.
en coordenadas polares, 91.
planos principales de, 259.
relaciones idénticas entre los componentes (*v. Deformación, compatibilidad*).
superficial, medida, 41.
homogénea, 254.
irrotacional, 495.
plana, 32, 46.
ecuaciones de compatibilidad para la, 45, 46.
plástica:
en ejes sometidos a torsión, 310.
tensiones iniciales debidas a la, 468.
principal, 41, 259.
radial, 91.
Desplazamiento:
de un cuerpo rígido, 268.

determinación de los:
en la flexión de piezas prismáticas, 380.
en la torsión de barras prismáticas, 295, 296.
en placas semiindefinidas, 115.
en problemas:
bidimensionales, 58, 60, 66, 92, 103.
tridimensionales, 268.
en sólido semiindefinido, 405.
radial, 91.
uniforme, 94, 146.
Diagrama de Mohr, 36.
Diámetro variable, áboles de, 342.
Dilatación:
cúbica, 30.
ondas de, 495.
térmica, 441.
coeficiente de, 441.
Direcciones principales, 35.
Disco:
circular:
giratorio, 95, 391.
dilatación térmica en, 448.
de espesor variable, 97, 98.
giratorio, 95, 391.
tensiones térmicas en, 448.
Distorsión:
de las secciones transversales:
de la barra sometida a presión (alabeo), 296, 302.
de la viga, 62, 381.
energía de deformación de la, 177.
ondas de, 495.
Distribución tensional simétrica axialmente, 382.
en dos dimensiones, 83.
en tres dimensiones, 382.
en un cilindro, 426.
Ecuaciones:
de Cauchy-Riemann, 213.
de Laplace, 212, 213.
diferenciales de equilibrio:
en dos dimensiones, 43, 81.
en términos de desplazamientos, 269.
en tres dimensiones, 265, 343.
en diferencias finitas, 503.
condiciones de contorno, 528, 531.
puntos próximos al contorno, 523, 528.
generales de equilibrio:
en coordenadas cilíndricas, 344, 382.
en el caso de cambios de temperatura, 464, 465.
Efecto:
de las fuerzas cortantes en la flexión, 63, 67, 128.
de un orificio circular sobre la distribución de tensiones, 104.
Ejes:

cilíndricos:
de diámetro variable, 342, 534.
torsión de, 285.
directriz:
de una pieza prismática, 355.
extensión, 66, 381.
principal:
de deformación, 258, 259.
de tensión, 35, 249, 250.
Elasticidad, 22.
Elipsode de las tensiones, 250.
Elípticas, coordenadas, 225.
problemas bidimensionales en, 230.
Energia:
de deformación, 175.
de las ondas elásticas, 484, 499.
potencial, 181.
elástica, 174.
del cambio de volumen y distorsión, 178.
mínimo, 182.
superficial, 190.
Enfriamiento no uniforme, tensiones debidas a:
en ejes, 454.
en placas, 444.
Entalladuras:
hiperbólicas, 237, 271.
semicirculares, 115, 246, 305, 311, 523.
Equilibrio, ecuaciones generales de, 263.
en coordenadas:
cilíndricas, 344, 382.
polares, 80.
en el caso de calentamiento no uniforme, 462, 465.
en términos de desplazamientos, 269.
Esférica, cavidad, en una barra maciza, 399.
Esfuerzo cortante simple, 29.
Estructuras, fundaciones de las (*v. t. Vigas*), 412.
Extensómetros a resistencia eléctrica, 41.
Fisuras:
de fatiga, 108.
en la torsión, 331.
reducción de la energía debida a, 190.
Flexión:
adicional debido a las fuerzas cortantes, 63, 131.
centro de (*v. t. Centro*), 373.
condiciones de contorno, 356.
de cilindros, 359.
de ménsula curva cargada en su extremo libre, 99.
de piezas prismáticas, 355.
determinación de los desplazamientos en las, 380.
de placas circulares, 388.
de vigas:

de diversas formas de sección:
circular, 359.
elíptica, 360.
otras formas, 368, 370, 371.
rectangular, 362.
de sección rectangular estrecha:
por carga:
concentrada, 125.
continua, 68.
en su extremidad libre, 58.
uniforme, 68, 70.
por su propio peso, 66, 77, 381.
resolución del problema por el método
de la película de jabón, 376.
método semiinverso, 356.
prisma triangular, 370.
sección circular en la, 438.
simple:
de barras prismáticas, 287.
de piezas curvas, 86, 438.
de placas, 291.

Fórmula de interpolación de Newton, 506.

Fotoelasticidad:
método de medición de tensiones por,
tridimensional, 171.

Fuerzas:

iguales y opuestas actuando:
sobre cuerpos de extensión indefinida,
396.
sobre placas, 142.

máximas, 23.
superficiales, 23.

Funciones:

analíticas, 212.
armónicas, 213, 214.
de corriente, 329.
de tensión, 48, 81, 112, 115, 144, 214, 298,
357, 382, 525.

Fundaciones:
de las estructuras, 412.
distribución de las presiones, 412.

Giratorio, disco (*v. Disco*).

Hertz, problema de, 412, 418.

Hilo, deflexión de un, 182.

Hiperbólicas, entalladuras, 237, 271.

Homogénea, deformación, 254.

Hooke, ley de, 27.

Inclusiones, 111.

Invariantes de tensión, 252.

Irrotacional, deformación, 495.

Isocílinas, líneas, 162.

Isocromáticas, líneas, 162.

Isostáticas, 162.

Lamé, problemas de, 84, 399.

Lámina elástica sobre una base rígida lisa, 75.

Laplace, ecuación de, 212, 213.

Ley de Hooke, 27.
Líneas:
de influencia, 118.
de tensión tangencial en la torsión, 307.
isocílinas, 162.
isocromáticas, 162.
Longitudinales, ondas, 480, 497.
Luz polarizada, medición de tensiones por
medio de, 159.

Materia homogénea, 21.
Material isotrópico, 21.
Membrana, analogía de la:
aplicación en fotoelasticidad, 171.
con barras sujetas a torsión, 306.
de diversas formas de sección transversal:
perfles laminados, 324.
rectangular estrecha, 310.
medición de las tensiones por, 328.
solución de las tensiones, en tubos de
pared delgada sujetos a torsión, 336.
con viga flexionada, 359.
determinación de las tensiones, 375.
uso, en el cálculo del par, 308.

Ménsula curva, flexión de la:
cargada en su extremo libre, 99.
simple, 86, 438.

Método:
de la película de jabón, para resolver pro-
blemas:
de flexión, 376.
de torsión, 327.
de relajación, 510.
elasto-energético, 174.
aplicación, 186, 196, 318.
semiinverso:
en la flexión, 356.
en la torsión, 295.
de árboles de diámetro variable, 344.

Mínimo trabajo:
aplicación del, 196.
principio, 195.

Módulo:
de elasticidad de volumen, 31.
de rigidez, 30.
de Young, 31.
en la tensión, 27.
en las cortaduras, 30.

Mohr, diagrama de, 36.
Momento flector, su relación con la curva-
tura, 380.

Newton, fórmula de interpolación de, 506.
Nicol, prisma de, su uso en fotoelasticidad,
160.

Ondas:
de dilatación, 495, 496.
de distorsión, 495, 496.

de Rayleigh, 499.
de superficie, 499.
longitudinales, 496, 497.
en barras prismáticas, 481.
placas, 496.
propagación (*v. Propagación de ondas*).
superposición, 485.
transversales, 497.
velocidad (*v. Velocidad*).

Orificio:
circular, efecto sobre las tensiones:
en discos giratorios, 97.
en entalladuras, 331.
en placas, 104.
concentración de tensiones en, 106, 107,
110.
de diversas formas en placas, 245.
de ejes sometidos a torsión, 331, 332.
elíptico, 110, 230, 234.
en árboles huecos, 332.
exen placas, 110, 230, 234.
excéntrico, 86, 241, 245.

Par, 299.
cálculo por aplicación de la analogía de la
membrana, 308.

Película (*v. Método de la película del jabón*).
Perfiles laminados, torsión de, 324.

Peso:
extensión de barras por su propio, 282.
flexión de la viga por su propio, 66, 77, 381.

Pieza en voladizo:
de diversas formas de sección transversal:
circular, 359.

elíptica, 360.
otras formas, 368.
rectangular, 362.
delgada, 58.

deflexión, 62, 380.
distorsión de la sección transversal de la,
62, 380.
tensiones, 58, 355.

Placas:
circulares cargadas simétricamente, 388.
de cuarto de onda, 164.

flexionadas, 291, 388.
semiindefinida, 111.

Planas, ondas, 496.

Plano:
medio de la placa, 390.
principal, 250, 259.
de la tensión, 36, 250.

Poisson, coeficiente de, 28.
determinación, 291.

Polariscopio:
circular, 164.
plano, 160.
Polarizada, uso en medida de tensiones de la
luz, 159.

Polarizador, 160.
Polinómicas, soluciones para problemas:
bidimensionales, 52.
de concentración de tensiones simétricas,
386.
de torsión, 302.

Potenciales complejos, 219.

Presas, tensiones en, 69.

Presión:
distribuida sobre superficie de contacto,
415, 416, 420.
entre dos cuerpos en contacto, 413, 419.
hidrostáticas, 30.
en cilindro hueco, 84.
en recipiente esférico, 396.
tensiones producidas por, 282.
producida por un punzón rígido, 412.

Príncipio:
de Saint-Venant, 56, 178.

de superposición, 271.

del mínimo trabajo, 195.
del trabajo virtual, 179.

Prisma:
de Nicol, uso en fotoelasticidad, 160.

flexión, 355.

torsión, 294.

triangular:
en la flexión, 370.
en la torsión, 303, 317, 516.

vibraciones longitudinales en, 480.

Problema:

de Hertz, 413, 418.

de Lamé, 84, 399.

Propagación de ondas:

en barras, 480.

en sólidos, 494.

sobre la superficie de un cuerpo, 499, 500.

Radial, deformación, 91.

Rayleigh, ondas de, 499.

Recipiente esférico:

sometido a presión interior o exterior, 396.
tensiones térmicas en, 461.

Recocido, disminución de las tensiones por
el, 469.

Red:

cuadrangular, 504.

hexagonal, 515.

triangular, 515.

Relación tensión-deformación (*v. Ley de
Hooke*).

Relaciones idénticas entre los componentes
de deformación (*v. Condiciones de compa-
tibilidad*).

Relajación en grupo y en bloque, 520.

Residuales, tensiones, 470.

Residuos, 511.

Resistencia eléctrica, extensómetros a, 41.

Resortes helicoidales, tensiones en los, 433.

Rigidez:
de flexión de las placas, 293.
módulo de, 30.
torsional, 301.

Roseta, extensómetro, 42.

Rotación, componentes de, 260.

Rotura:
hipótesis relativas a las condiciones de, 177.
tensión en la, 177.

Saint-Venant:
principio de, 56, 178.
problema de, 295, 356.

Sector:
circular, problema torsional correspondiente a un, 316.
de anillo:
en la flexión, 438.
en la torsión, 433.

Serie de Fourier:
aplicación en los problemas de flexión, 363.
curva de deflexión representada por, 184
en problemas:
bidimensionales, 70, 77, 145.

de torsión, 313, 321.

Semicirculares, entalladuras, 116, 246, 523.

Sismógrafo, 499.

Solución:
general:
de problemas bidimensionales:
en coordenadas polares, 144.
para una cuña, 151.

para los desplazamientos, 270.

unidad de la, 272.

Superficie:
de contacto, 414.
de curvaturas opuestas, 290.

directriz, 250.

neutra, 66.

Superposición, principio de, 271.

Temperatura, tensiones provocadas por:
la distribución no uniforme de la, 441.
la fluctuación:
en cilindros, 457.
en placas, 442.

Tensión:
componentes de, 25, 80.
de barras prismáticas:
por fuerzas concentradas, 74.
por la fuerza de gravedad, 282.
por tensiones distribuidas, 197.
uniforme, 281.

de cortadura, 25.

de origen térmico, 441.

ecuaciones generales para, 463.
solución, 475.

en bandas largas, 442, 446.

en cilindros, 450, 470.

Teorema:
de Castigliano, 191.
de reciprocidad, 274.

Teoría de la energía en los materiales frágiles, 189.

energía potencial como base de la, 177
Terremoto, ondas del, 499.

Torbellino constante, 330.

Torsión:

árbol troncocónico en, 347.

barras de sección transversal elíptica en, 300.

centro de, 308, 375.

condiciones de contorno en, 297.

cuerpo cilíndrico de sección transversal en, 294.

de árboles:

de diámetro variable, 342, 534.

huecos, 332.

de barras prismáticas, 294, 504.

curvas de transición en, 325, 336.

de diversas formas de sección transversal

de circular, 285.

elíptica, 300.

método semiinverso en, 295.

otras formas, 303, 316, 317, 323.

perfil laminado, 324.

rectangular, 310, 312.

desplazamientos en, 296.

función de tensión, 298.

método aproximado en su investigación, 318.

de tubos de pared delgada, 336.

de un sector de anillo de sección circular, 433.

ejes cilíndricos en, 285.

líneas de tensión tangencial en, 307.

tensiones locales en las curvas de transición en, 273, 338.

Torsional, rigidez, 301.

Trabajo virtual:
aplicación en los problemas de torsión, 319.

principio, 179.

Transición, concentración de tensiones en las zonas de:

en entalladuras de diámetro variable, 348.

en la flexión de placas, 168, 170.

en la torsión de piezas prismáticas, 325, 337.

Transversales, ondas, 496, 497.

Traslación virtual, 179.

Tubos:

de pared delgada, torsión de, 336.

sometidos a presión interna y externa, 84.

torsión de, 336.

Unidad de la solución, 272.

Valor de franja, 163.

Variable compleja, funciones de, 210.

Velocidad:

de las ondas superficiales, 502.

de ondas:

de dilatación, 496.

de dispersión, 496.

de propagación de ondas en barras prismáticas, 482.

Vibraciones longitudinales de barras prismáticas, 480.

Vigas:

carga concentrada sobre una, 125.

curvatura (v. t. *Curvatura de vigas*), 67,

131, 133, 380.

adicional, 131, 133.

deflexión, 62, 66, 380.

distorsión de sus secciones transversales, 62, 380.

en T, anchura eficaz de las, 201.

flexión (v. *Flexión de vigas*).

tensiones tangenciales, 59, 68, 129, 360, 361, 365, 368, 369, 371.

Young, módulo de, 31.