

Matemáticas Especiales II para Física

Notas de Clase*

Eduardo Rodríguez

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia

24 de mayo de 2016

* Notas de clase en proceso de construcción. Use bajo su propio riesgo. La originalidad ha sido sacrificada en aras de la claridad (o por lo menos esa es la idea). En particular, estas notas le deben muchísimo de su contenido al libro de Saff & Snider [1] y parte de la inspiración al libro de Needham [2]. Si encuentra un error en estas notas, le agradecería comunicármelo al email eduardorodriguezsal@unal.edu.co.

Índice general

1. Números complejos	3
1.1. Motivación	3
1.2. Representaciones	4
1.2.1. Par Ordenado	5
1.2.2. Matrices	5
1.3. El Plano Complejo	6
1.4. La identidad de Euler	7
1.5. Algunas funciones de variable compleja	10
1.5.1. Potencias	10
1.5.2. Raíces	11
1.5.3. Exponencial	12
1.5.4. Funciones trigonométricas	14
1.5.5. El Logaritmo	15
2. Funciones Analíticas	16
2.1. Límites y Continuidad	16
2.2. Derivadas	17
2.3. Las ecuaciones de Cauchy–Riemann	19
2.4. Funciones armónicas	20
3. Integración compleja	24
3.1. Contornos	24
3.2. Integrales de contorno	26
3.3. Cotas superiores para integrales	28
3.4. Independencia del camino	28
3.5. Teorema integral de Cauchy	30
3.6. Fórmula integral de Cauchy	37
3.7. Cotas para funciones analíticas	41
3.8. Aplicaciones a funciones armónicas	44

4. Series	50
4.1. Motivación	50
4.2. Series de potencias	52
4.3. Serie de Laurent	58
4.4. Ceros y singularidades	66
4.5. El punto en el infinito	71
5. El método de los residuos	74
5.1. El teorema del residuo	74
5.2. Integrales trigonométricas	80
5.3. Integrales impropias	81
5.4. Integrales impropias que involucran funciones trigonométricas .	88
5.5. Integrales impropias con singularidades en el eje real	91

Capítulo 1

Números complejos

1.1. Motivación

El protagonista de este curso es $i = \sqrt{-1}$, la “unidad imaginaria”. ¿Qué sentido tiene escribir $\sqrt{-1}$? ¿Existe *realmente* este objeto? Ciertamente, ningún número real x es solución de la ecuación $x^2 = -1$.

Para motivar la introducción de los números complejos, recurriremos a la historia. Sin embargo, es importante notar que, en última instancia, los números complejos son una abstracción matemática (pero, ¿qué no lo es?) que estudiamos porque resulta extremadamente útil para comprender el mundo “real”.

En uno de los primeros avances de la matemática desde la antigua Grecia, en 1545, Gerolamo Cardano publicó la solución general de la ecuación cúbica. Para nuestros propósitos, resulta suficiente considerar la ecuación cúbica reducida

$$x^3 = 3px + 2q, \quad (1.1)$$

donde p y q son dos números reales. La solución de Cardano para esta ecuación puede escribirse en la forma

$$x = (q + w)^{1/3} + (q - w)^{1/3}, \quad (1.2)$$

donde hemos definido $w = (q^2 - p^3)^{1/2}$. Usando esta fórmula podemos, por ejemplo, encontrar la solución $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ a la ecuación $x^3 = 6x + 6$.

Consideremos ahora el caso $x^3 = 15x + 4$. Inmediatamente nos vemos enfrentados a un problema: con $p = 5$ y $q = 2$, encontramos $w = \sqrt{-121} = 11i$. ¿Cómo hemos de interpretar en esta ocasión la solución de Cardano, $x = (2 + 11i)^{1/3} + (2 - 11i)^{1/3}$? El problema es particularmente agudo, pues la ecuación posee una solución real, $x = 4$. De hecho, como se sugiere en la figu-

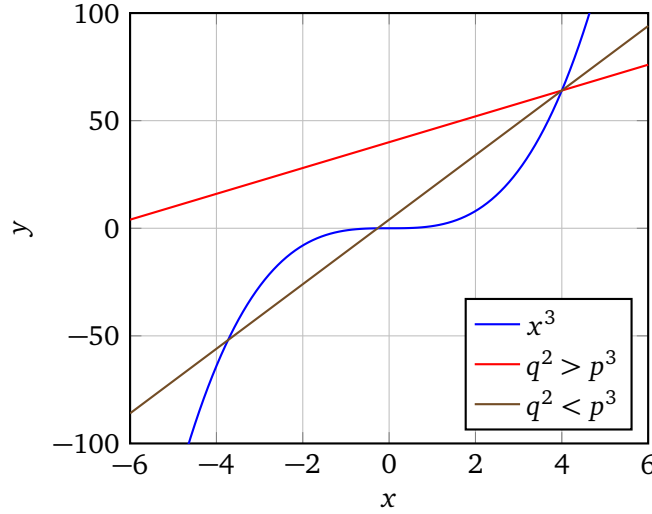


Figura 1.1: La ecuación $x^3 = 3px + 2q$ tiene una solución real cuando $q^2 > p^3$, dos soluciones reales cuando $q^2 = p^3$, y tres soluciones reales cuando $q^2 < p^3$.

ra 1.1, la ec. (1.1) *siempre* tiene al menos una solución real. La primera persona en entender cómo operar con números complejos fue Rafael Bombelli. Si podemos encontrar un número real b tal que $(2 \pm bi)^3 = 2 \pm 11i$, entonces habremos resuelto el problema, pues la solución de Cardano nos entregará $x = (2 + bi) + (2 - bi) = 4$. Asumiendo, con Bombelli, que podemos tratar i del mismo modo que una variable real cualquiera, tenemos

$$(2 + bi)^3 = 8 + 12bi + 6(bi)^2 + (bi)^3 = 8 - 6b^2 + ib(12 - b^2) = 2 + 11i. \quad (1.3)$$

Claramente, $b = 1$ resuelve esta ecuación y nos permite obtener $x = 4$ mediante aplicación directa de la fórmula de Cardano. Este ejemplo muestra cómo un problema estrictamente sobre números reales requiere de la introducción de los números complejos para ser resuelto, incluso cuando la solución es otro número real.

1.2. Representaciones

La idea de esta sección es mostrar que, más allá de preguntarnos, filosóficamente, ¿qué es un número complejo?, lo que de verdad importa es cuáles son las propiedades que éste satisface.

1.2.1. Par Ordenado

Para un matemático, es suficiente definir un número complejo z como el par ordenado (a, b) , donde a y b son números reales, junto con las siguientes operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (1.4)$$

$$c(a, b) = (ca, cb), \quad (1.5)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (1.6)$$

La regla (1.6) nos permite identificar $1 = (1, 0)$, pues

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b), \quad (1.7)$$

para cualquier par ordenado (a, b) . Además, el par $(0, 1)$ satisface

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad (1.8)$$

por lo que nos vemos motivados a escribir $i = (0, 1)$. Con estas definiciones, un par ordenado cualquiera adopta la forma

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi, \quad (1.9)$$

y las operaciones (1.4)–(1.6) son recuperadas a través de las reglas usuales del álgebra. Por ejemplo,

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i. \quad (1.10)$$

1.2.2. Matrices

Alternativamente, un número complejo puede ser representado a través de una matriz de 2×2 . Esta representación es probablemente más significativa para un físico. Consideremos matrices de la forma

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

donde a y b son números reales. El producto de dos matrices de esta clase produce

$$zw = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

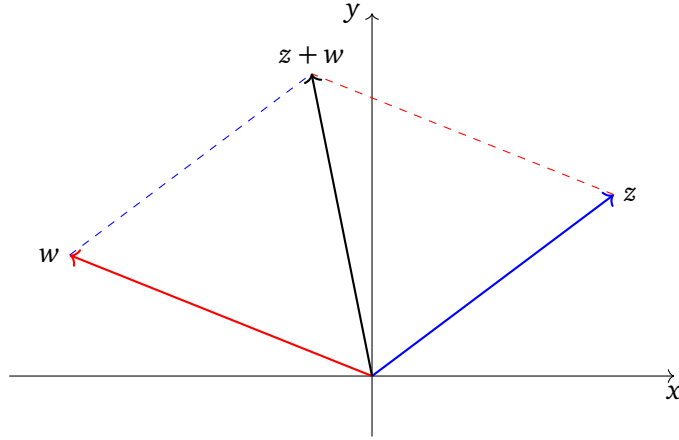


Figura 1.2: Interpretación geométrica de la suma de dos números complejos.

es decir, zw tiene también la misma forma que (1.11), y el producto reproduce la regla (1.6). Además, la matriz identidad, $\mathbb{1}$, corresponde a la elección $a = 1$, $b = 0$. Poniendo $a = 0$, $b = 1$, hallamos

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

la cual satisface $i^2 = -\mathbb{1}$. Finalmente, todas las matrices de la forma (1.11) pueden escribirse como la combinación lineal

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a\mathbb{1} + bi. \quad (1.14)$$

Omitiendo escribir explícitamente la matriz identidad, nos quedamos con la forma $z = a + bi$.

1.3. El Plano Complejo

Una representación particularmente importante de un número complejo es como un punto o un vector en un plano, el *plano complejo*.

En esta representación, la suma de números complejos corresponde a la aplicación de la regla del paralelogramo para vectores en dos dimensiones (ver figura 1.2). En particular, esto significa que se satisface la identidad triangular:

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (1.15)$$

Una forma alternativa de la identidad triangular, que es útil en algunos casos, se obtiene poniendo $w = u - z$ en la ec. (1.15). Hallamos:

$$|z - w| \geq ||z| - |w||. \quad (1.16)$$

Si $z = a + ib$, entonces la *magnitud* (o módulo) y el *argumento* (o fase) de z están dados por

$$|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad (1.17)$$

$$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right). \quad (1.18)$$

En la ec. (1.17) entendemos que debemos tomar la raíz cuadrada *positiva* para obtener $|z| \geq 0$. La ec. (1.18) es esencialmente incorrecta (aunque tradicional). El argumento de un número complejo z es el ángulo que el vector asociado a z hace con la parte positiva del eje x . La ec. (1.18) falla cuando z está en el segundo o tercer cuadrante, porque interpreta $b/a > 0$ como primer cuadrante (cuando podría ser el tercero) y $b/a < 0$ como cuarto cuadrante (cuando podría ser el segundo). Muchos lenguajes de programación incluyen una función $\text{atan2}(y, x)$ que acepta dos argumentos y entrega siempre el ángulo correcto.* Aún con estas precauciones, el argumento de z es intrínsecamente ambiguo, pues siempre es posible sumarle un múltiplo entero (positivo o negativo) de 2π . El *argumento principal* de z , $\text{Arg}(z)$ (escrito con mayúscula), se define explícitamente como aquel ángulo que satisface

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi. \quad (1.19)$$

1.4. La identidad de Euler

La suma de números complejos tiene una interpretación geométrica directa (ver sección 1.3). ¿Podemos hacer algo parecido con la multiplicación?

Llamando $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$, es claro que podemos escribir

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.20)$$

Esta *forma polar* de un número complejo resulta conveniente para la multiplicación, del mismo modo que la forma cartesiana, $z = a + ib$, resulta conveniente

* En algunos lenguajes el orden de los argumentos está invertido; tenga cuidado.

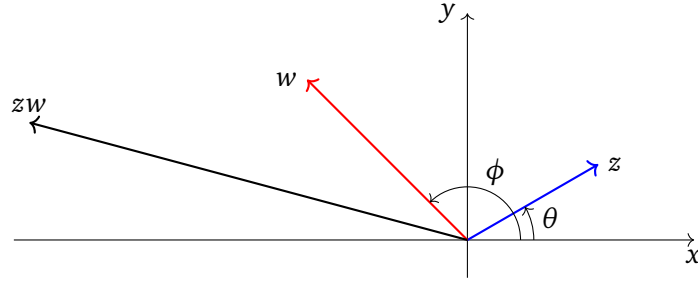


Figura 1.3: Interpretación geométrica de la multiplicación de dos números complejos.

para la suma. Si $w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$, entonces el producto zw puede escribirse como

$$zw = rR(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.21)$$

$$= rR[(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)] \quad (1.22)$$

$$= rR[\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)], \quad (1.23)$$

donde hemos utilizado las conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos. En palabras, entonces: al multiplicar dos números complejos, se multiplican las magnitudes y se suman los argumentos.

Esta conversión de una multiplicación en una suma es reminiscente del comportamiento de los logaritmos: $\log(ab) = \log a + \log b$. En efecto, si damos el audaz paso de escribir

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (1.24)$$

entonces la ec. (1.23) para la multiplicación de números complejos pasa a ser una manifestación de las propiedades de la exponencial [dado que $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$]. La *identidad de Euler* (1.24) es una de las ecuaciones más importantes de la teoría de los números complejos, cuando no de todas las matemáticas. Richard Feynman la consideraba “la fórmula más notable de las matemáticas”. La justificación formal para la identidad de Euler la daremos recién en la sección 4.2. Por ahora, presentamos dos argumentos heurísticos para hacer más plausible la existencia de esta conexión entre funciones trigonométricas y exponenciales.

Una manera de definir la función exponencial en el ámbito de los números reales es recurrir a su expansión en serie,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.25)$$

Si extendemos esta definición para el caso en que $x = i\theta$ es un número imaginario, encontramos

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \quad (1.26)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1.27)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \quad (1.28)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta, \quad (1.29)$$

donde hemos utilizado el hecho que $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = (-1)^n i$.

Otra manera de aproximarnos a la identidad de Euler es la siguiente. Si queremos dar sentido a la expresión $y = e^{i\theta}$, necesitamos decidir qué propiedades de la exponencial real queremos conservar como definitorias cuando extendemos su alcance a los números complejos. Una de estas propiedades fundamentales es

$$\frac{d}{dx} e^{kx} = k e^{kx}, \quad (1.30)$$

para cualquier constante (real) k . Exigiendo que esta propiedad se preserve cuando $k = i$, encontramos

$$\frac{dy}{d\theta} = iy, \quad (1.31)$$

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = -y. \quad (1.32)$$

La solución general de la ec. (1.32) puede escribirse en la forma

$$y = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad (1.33)$$

donde las constantes A y B deben determinarse a partir de las condiciones iniciales,

$$y(0) = 1, \quad (1.34)$$

$$\left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=0} = i. \quad (1.35)$$

Procediendo de este modo hallamos $A = 1$, $B = i$, y recuperamos la identidad de Euler.



Figura 1.4: Homero Simpson en el episodio *Treehouse of Horror VI* (1995).

Cuando $\theta = \pi$, la identidad de Euler produce $e^{i\pi} = -1$ (ver figura 1.4).

Reemplazando i por $-i$ (o, equivalentemente, θ por $-\theta$) en la identidad de Euler hallamos $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$. En particular, podemos escribir

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (1.36)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (1.37)$$

1.5. Algunas funciones de variable compleja

1.5.1. Potencias

Usando la identidad de Euler [cf. ec. (1.24)] y elevando a la n -ésima potencia, donde n es un número entero, encontramos

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (1.38)$$

Esta identidad, llamada *Fórmula de de Moivre*, permite elevar un número complejo $z = re^{i\theta}$ a una potencia entera arbitraria, y deducir fórmulas útiles para el seno y el coseno de $n\theta$.

Ejemplo 1.1. Con $n = 2$, la identidad de de Moivre (1.38) produce

$$\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta. \quad (1.39)$$

Poniendo $n = 3$, hallamos

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta). \end{aligned}$$

1.5.2. Raíces

¿Cuánto vale $\sqrt{4}$? En el ámbito de los números reales, es usual restringir el valor de la raíz cuadrada a un número *positivo*. Por este motivo escribimos las soluciones a la ecuación $x^2 = 4$ como $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Cuando nos pasamos al ámbito de los números complejos, esta restricción empieza a dejar de tener sentido.

Ejemplo 1.2. ¿Cuánto vale \sqrt{i} ?

Usando la identidad de Euler, podemos escribir $i = e^{i\pi/2}$. Luego, $\sqrt{i} = i^{1/2} = e^{i\pi/4}$. Sin embargo, como mencionamos en la sección 1.3, el argumento de un número complejo es ambiguo en el sentido que siempre podemos agregarle un múltiplo entero (positivo o negativo) de 2π . Escribiendo $i = e^{i(\pi/2-2\pi)} = e^{-3i\pi/2}$, hallamos $\sqrt{i} = i^{1/2} = e^{-3i\pi/4} = -e^{i\pi/4}$.

¿Cuál de estas dos raíces hemos de preferir? Ciertamente, no hay manera de llamar “positiva” a una y “negativa” a la otra. La respuesta es que no debemos escoger: ambos números complejos califican como la raíz cuadrada de i .

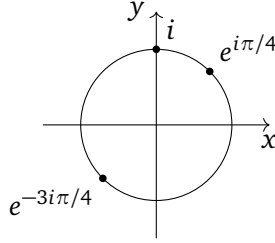


Figura 1.5: Raíces cuadradas de i .

En general, una raíz- n de $z = re^{i\theta}$ puede escribirse en la forma $\sqrt[n]{z} = r^{1/n}e^{i\theta/n}$. Para encontrar las demás raíces- n , es necesario tener en cuenta que el ángulo θ es intrínsecamente ambiguo, pues siempre podemos sumarle un múltiplo entero (positivo o negativo) de 2π . Luego, escribiendo $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$, encontramos

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad (1.40)$$

donde k es un número entero. Esta ecuación muestra que todo número complejo z posee exactamente n raíces- n , que corresponden a $k = 0, 1, \dots, n-1$. Otros valores para k simplemente reproducen las mismas raíces.

Llamando

$$\omega_n = e^{2\pi i/n}, \quad (1.41)$$

podemos escribir las raíces- n de z en la forma $\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i\theta/n} \omega_n^k$. Los números complejos ω_n^k , con $k = 0, 1, \dots, n-1$, son llamados *raíces de la unidad*, pues satisfacen $(\omega_n^k)^n = 1$. En la figura 1.6 se muestran las raíces- n de la unidad para $n = 3, 4, 5, 6$.

En la práctica, entonces, una vez que se conoce una raíz- n de un número complejo z , todas las demás raíces pueden obtenerse a partir de la primera multiplicando por las raíces de la unidad.

Ejemplo 1.3. Determine toda las raíces cúbicas de $2 + 11i$.

Una raíz cúbica de $2 + 11i$ es $2 + i$, pues

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i. \quad (1.42)$$

Las otras dos raíces pueden obtenerse multiplicando por las raíces cúbicas de la unidad,

$$\omega_3 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.43)$$

$$\omega_3^2 = e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1.44)$$

Obtenemos:

$$(2 + i)\omega_3 = -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right), \quad (1.45)$$

$$(2 + i)\omega_3^2 = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right). \quad (1.46)$$

1.5.3. Exponencial

Ya sabemos cómo interpretar $e^{i\theta}$ cuando θ es un número real (ver sección 1.4). ¿Cómo debemos entender el caso general, e^z , donde z es un número complejo? La respuesta es simple. Si la exponencial compleja ha de satisfacer la propiedad $e^{z+w} = e^z e^w$, entonces podemos escribir

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1.47)$$

Para todos los efectos prácticos, la ec. (1.47) representa nuestra definición de e^z . La exponencial compleja es un mapeo, $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de los números complejos en sí mismos. Note que, de acuerdo a la ec. (1.47), las partes real e imaginaria de e^z son $e^x \cos y$ y $e^x \sin y$, respectivamente.

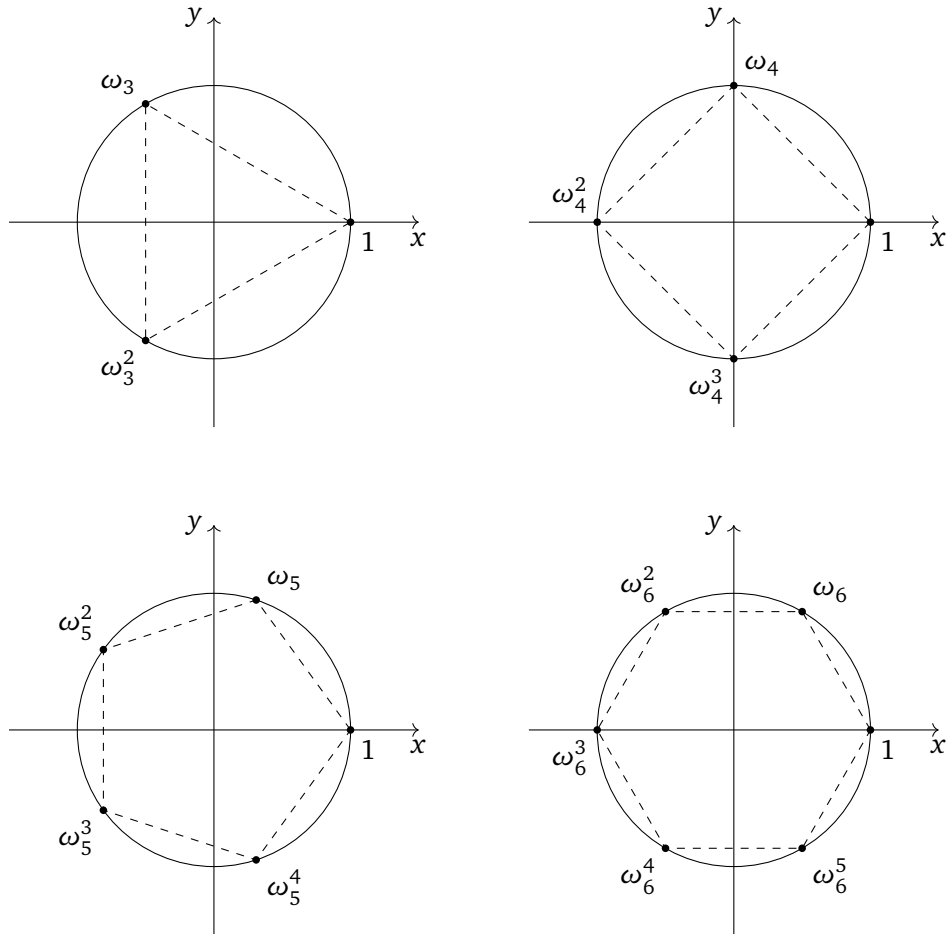


Figura 1.6: Llamando $\omega_n = e^{2\pi i/n}$, las raíces- n de la unidad pueden escribirse en la forma ω_n^k , con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se ilustran los casos $n = 3, 4, 5, 6$. Note que $(\omega_n^p)^* = \omega_n^{n-p}$.

Dado que $|e^z| = e^x \neq 0$, concluimos que la exponencial compleja nunca es igual a cero. Sin embargo, asume todos los demás valores complejos (incluidos todos los números reales *negativos*).

Como $e^{z+2\pi i} = e^z$, encontramos que la función exponencial es *periódica*, con período igual a $2\pi i$.

1.5.4. Funciones trigonométricas

Generalizando las ecs. (1.36)–(1.37), definimos ahora el seno y el coseno de una variable compleja z como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.48)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (1.49)$$

Estas definiciones coinciden con las funciones trigonométricas usuales cuando $z = x \in \mathbb{R}$. Al igual que la exponencial, las funciones trigonométricas (1.48) y (1.49) son mapeos de los números complejos en sí mismos. Esto significa que, en general, el seno o el coseno de un número complejo es otro número complejo.

Sumando y restando, obtenemos

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (1.50)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad (1.51)$$

generalizando la identidad de Euler. *Cuidado*: Este par de ecuaciones *no* afirma que $\cos z$ y $\sin z$ sean, respectivamente, las partes real e imaginaria de e^z . En efecto, es directo demostrar que

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (1.52)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \quad (1.53)$$

Las funciones trigonométricas hiperbólicas se definen en la forma

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.54)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (1.55)$$

Claramente, $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i \sin z$. Estas relaciones tan estrechas hacen que las funciones hiperbólicas sean ligeramente redundantes en el ámbito de los números complejos.

Elevando al cuadrado y sumando o restando, podemos demostrar

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad (1.56)$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \quad (1.57)$$

1.5.5. El Logaritmo

El *logaritmo* de un número complejo z se define de manera tal que $e^{\log z} = z$. Escribiendo $z = re^{i\theta}$, encontramos inmediatamente

$$\log z = \ln r + i\theta. \quad (1.58)$$

Al igual que el argumento de z , $\theta = \arg z$, el logaritmo es una *multifunción*, con infinitas ramas. En $z = 0$, la función logaritmo tiene un punto de ramificación.

La rama principal de $\log z$ se define como

$$\text{Log } z = \ln r + i \text{Arg } z, \quad (1.59)$$

con $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$. Esta rama tiene una discontinuidad en el eje real negativo.

La identidad

$$\log(ab) = \log a + \log b, \quad (1.60)$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$, sigue siendo válida si la interpretamos de la siguiente manera: todos los valores posibles del lado izquierdo de la ecuación están contenidos entre los valores posibles del lado derecho, y viceversa. La identidad (1.60) *falla* si nos restringimos a una única rama de la función logaritmo. Por ejemplo, si bien $\text{Log}(-1) = \pi i$, $\text{Log}(i) = \pi i/2$, el logaritmo del producto de -1 e i es $\text{Log}(-i) = -\pi i/2 \neq 3\pi i/2$.

A partir de la rama principal es posible obtener el valor del logaritmo en cualquier otra rama usando la ecuación

$$\log z = \text{Log } z + 2n\pi i, \quad (1.61)$$

donde n es un número entero (positivo o negativo).

Capítulo 2

Funciones Analíticas

2.1. Límites y Continuidad

Sea $f(z)$ una función definida en alguna vecindad de z_0 , con la posible excepción de z_0 mismo.

Decimos que w_0 es el *límite* de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 , y escribimos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (2.1)$$

si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe siempre un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - w_0| < \epsilon$. Cuando el límite existe, los valores de la función $f(z)$ se acercan arbitrariamente a w_0 cuando z se acerca a z_0 (ver figura 2.1).

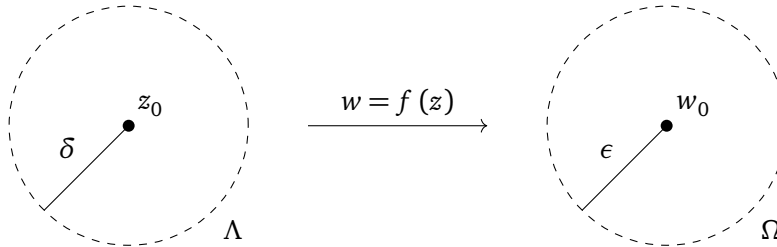


Figura 2.1: Sea Ω una vecindad pequeña en torno de w_0 . El límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 existe si es posible encontrar una vecindad perforada Λ en torno de z_0 tal que la imagen de Λ bajo f está contenida dentro de Ω .

Esta definición es equivalente al límite de una sucesión: si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, entonces, para cualquier sucesión z_1, z_2, \dots que converja a z_0 (con $z_n \neq z_0$), la sucesión $f(z_1), f(z_2), \dots$ converge a w_0 .

Decimos que $f(z)$ es *continua* en $z = z_0$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.2)$$

Las definiciones de límites y continuidad son análogas al caso real; escribiendo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (2.3)$$

la existencia del límite para $f(z)$ es equivalente a la existencia de los límites para u y v , y lo mismo pasa con la continuidad. En particular, esto significa que son válidos los teoremas del cálculo real relativos a límites y continuidad de sumas, productos y cuocientes.

2.2. Derivadas

Decimos que $f(z)$ es *derivable* en $z = z_0$, y escribimos su derivada como $f'(z_0)$, si el límite

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2.4)$$

existe. Note que Δz es un número complejo.

Las reglas usuales del cálculo real para la derivada de sumas, productos, cuocientes y composición de funciones siguen siendo válidas.

Ejemplo 2.1.

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}. \quad (2.5)$$

Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\ &= \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + \cdots - z^n}{\Delta z} \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

Este resultado implica que todos los polinomios son derivables.

Ejemplo 2.2. z^* no es derivable en ningún punto.

Para demostrar que el límite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^* - z_0^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} \quad (2.6)$$

no existe, basta mostrar que se obtienen resultados distintos según se tome primero $\Delta x \rightarrow 0$ o $\Delta y \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right] = 1,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right] = -1.$$

Definición 2.1. Decimos que $f(z)$ es *analítica* en z_0 si es derivable en una vecindad de z_0 . Otros términos equivalentes a “analítica” son “holomorfa” y “regular”. Si $f(z)$ es analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, decimos que $f(z)$ es *entera*.

Ejemplo 2.3. Determine si las siguientes funciones son analíticas:

$$f(z) = \frac{x-1-iy}{(x-1)^2+y^2}, \quad (2.7)$$

$$g(z) = x^2 + y^2 + 3x + 1 + 3yi. \quad (2.8)$$

Podemos reescribir f y g en términos de z usando las relaciones

$$x = \frac{z+z^*}{2}, \quad (2.9)$$

$$y = \frac{z-z^*}{2i}. \quad (2.10)$$

Obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{z-1}, \quad (2.11)$$

$$g(z) = zz^* + 3z + 1. \quad (2.12)$$

Claramente, $f(z)$ es analítica para todo $z \neq 1$. En cambio, $g(z)$ no es analítica jamás. Si lo fuera, entonces también lo sería

$$z^* = \frac{g(z) - 3z - 1}{z} \quad (2.13)$$

(excepto en $z = 0$), lo cual sabemos que es falso.

Las funciones analíticas son aquellas que pueden expresarse como funciones (diferenciables) de z exclusivamente, sin involucrar z^* .

2.3. Las ecuaciones de Cauchy–Riemann

Una función de variable compleja siempre puede escribirse en la forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.14)$$

Las partes real e imaginaria, u y v , son funciones de dos variables reales.

¿Qué condiciones sobre u y v impone la analiticidad de $f(z)$?

Para responder esta pregunta, calculamos el límite

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.15)$$

a través de dos caminos distintos, uno paralelo al eje x (con $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x$) y otro paralelo al eje y (con $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y$). En el primer caso encontramos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

En el segundo caso, en cambio, hallamos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Para que la derivada exista, los límites deben ser iguales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.17)$$

Éstas son las famosas *ecuaciones de Cauchy–Riemann*.

Las ecuaciones de Cauchy–Riemann son una condición *necesaria* para que una función $f(z)$ sea diferenciable en un punto z_0 , pero no son *suficientes*.

Teorema 2.1. Considere una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida en un conjunto abierto G que contiene al punto z_0 . Si las primeras derivadas parciales de u y v existen en G , son continuas en z_0 , y satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en z_0 , entonces $f(z)$ es diferenciable en z_0 .

En consecuencia, si las primeras derivadas parciales son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann para todo $z \in G$, entonces $f(z)$ es analítica en G .

Ejemplo 2.4. Muestre que

$$f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x) \quad (2.18)$$

no es analítica en ningún punto.

Las derivadas parciales de u y v son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y. \quad (2.22)$$

Las ecuaciones de Cauchy–Riemann se satisfacen sólo sobre la recta $x = y$. Como las derivadas parciales son todas continuas, $f(z)$ es diferenciable sobre esta recta. Sin embargo, cualquier vecindad abierta de un punto sobre la recta incluye puntos *fuera* de ella, donde la función no es diferenciable. Luego, $f(z)$ no es *nunca* analítica, ni siquiera sobre la recta donde es diferenciable.

2.4. Funciones armónicas

Una función $\phi(x, y)$ se dice *armónica* si sus derivadas parciales de segundo orden son continuas y satisfacen la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.23)$$

Un ejemplo de función armónica es el potencial electrostático en ausencia de cargas (y considerado como una función de sólo dos variables). Reemplazando $\vec{E} = -\nabla \phi$ en la ley de Gauss, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, encontramos $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$. Luego, ϕ satisface la ecuación de Laplace cuando $\rho = 0$.

Teorema 2.2. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica, entonces u y v son armónicas.

La demostración de este Teorema se sigue de manera inmediata a partir de las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Dada una función armónica $u(x, y)$, siempre es posible encontrar otra función armónica, $v(x, y)$, tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica.

Ejemplo 2.5. Encuentre la “conjugada armónica” de $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$. Las derivadas parciales de u son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 1. \quad (2.25)$$

Para ser la conjugada armónica de u , una función $v(x, y)$ debe satisfacer

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 1, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2. \quad (2.27)$$

Integrando estas ecuaciones encontramos $v(x, y) = 3x^2y - x - y^3$. Interpretando u y v como las partes real e imaginaria de una función compleja $f(z)$, podemos escribir $f(z) = z^3 - iz$.

Ejemplo 2.6. Grafique las curvas de nivel, $u(x, y) = \text{const.}$, $v(x, y) = \text{const.}$, para la función $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

En la figura 2.2 se muestran en rojo las curvas de nivel para u y en azul las curvas de nivel para v .

En general, las curvas de nivel $u(x, y) = \text{const.}$ son ortogonales a las curvas de nivel $v(x, y) = \text{const.}$ Una manera de demostrar esto es considerar el *gradiente* de cada curva. Dado que el gradiente es perpendicular a las superficies de nivel, la ortogonalidad entre los gradientes es equivalente a la ortogonalidad entre las curvas. En efecto, con

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j}, \quad (2.28)$$

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \hat{j}, \quad (2.29)$$

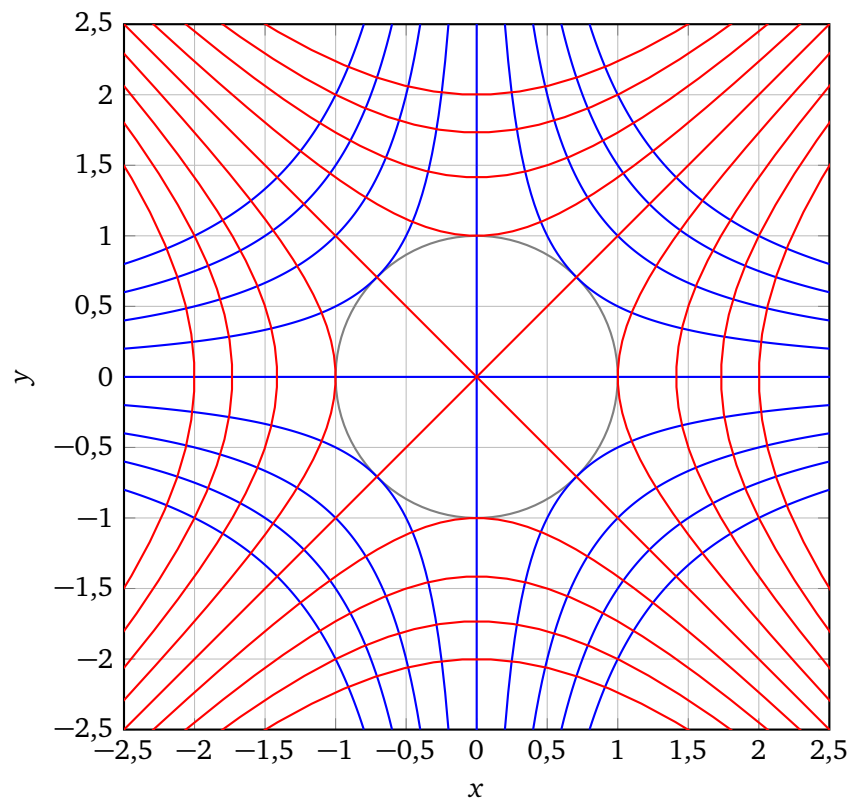


Figura 2.2: Algunas curvas de nivel para $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. En rojo las curvas $x^2 - y^2 = \text{const.}$, y en azul las curvas $2xy = \text{const.}$ Se incluye el círculo unitario (en gris) como referencia.

hallamos

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.30)$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. El único caso en que esta ortogonalidad puede fallar es cuando $\nabla u = 0$ o $\nabla v = 0$. Esto es exactamente lo que encontramos en la figura 2.2, donde las curvas rojas y las curvas azules son siempre ortogonales, *excepto* cuando $x = y = 0$: en este punto tenemos $\nabla u = \nabla v = 0$.

Capítulo 3

Integración compleja

3.1. Contornos

Para definir la integral de una función de variable compleja entre α y β , donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, necesitamos especificar la *trayectoria* que se sigue para llegar desde α hasta β .

Llamamos *contorno* a una curva continua (es decir, sin saltos o interrupciones) en el plano complejo. Un contorno tiene, en general, un punto inicial, α , y un punto final, β . Decimos que el contorno es *abierto* si $\beta \neq \alpha$ y *cerrado* si $\beta = \alpha$. El sentido en que se recorre un contorno es llamado su *orientación*. Si Γ es un contorno, denotamos por $-\Gamma$ al mismo contorno recorrido en dirección opuesta.

Decimos que un contorno es *simple* si no se intersecta a sí mismo (más que en los puntos inicial y final, en caso de ser cerrado).

En la figura 3.1 se muestran algunos contornos abiertos y cerrados.

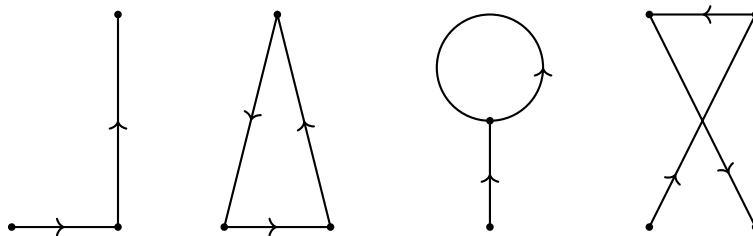


Figura 3.1: Algunos ejemplos de contornos abiertos y cerrados.

Para especificar la dirección de un contorno cerrado simple, una herramienta útil es el Teorema de la curva de Jordan.

Teorema 3.1. *Todo contorno cerrado simple separa el plano en dos dominios, siendo el contorno la frontera de ambos. Uno de estos dominios, llamado “interior”, es acotado; el otro, llamado “exterior”, es no acotado.*

La demostración del Teorema 3.1 es sorprendentemente complicada, por lo que la omitimos.

Decimos que un contorno tiene orientación *positiva* si, al recorrer el contorno, el interior de éste queda siempre a la *izquierda* (sentido “antihorario”).

Una *parametrización* de un contorno Γ es una función $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, tal que $z(a) = \alpha$ y $z(b) = \beta$. Para que la parametrización sea *admisibile*, requerimos que la función $z(t)$ sea continua. Note que t es un parámetro real, que eventualmente puede interpretarse como el tiempo.

Ejemplo 3.1. Algunos contornos y parametrizaciones admisibles.

- La función $z = (1 + i)t$, con $0 \leq t \leq 1$, parametriza la línea recta que comienza en $z = 0$ y acaba en $z = 1 + i$.
- Una parametrización alternativa para esta línea recta es $z = (1 + i)\tan t$, con $0 \leq t \leq \pi/4$.
- Un círculo de radio r centrado en z_0 puede parametrizarse como $z = z_0 + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Note que el punto inicial y final de este contorno es $z = z_0 + r$.
- Una elipse centrada en el origen admite la parametrización $z = a \cos t + ib \sin t$. ¿Qué representan las constantes a y b ?

La longitud de un contorno Γ puede calcularse en la forma

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds \quad (3.1)$$

$$= \int_{\Gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (3.2)$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (3.3)$$

$$= \int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \quad (3.4)$$

$$= \int_{\Gamma} |dz|. \quad (3.5)$$

Es importante notar que $l(\Gamma)$ es *independiente* de la parametrización escogida.

3.2. Integrales de contorno

En esta sección definimos la integral de una función de variable compleja, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, a lo largo de un contorno Γ .

Sea Γ un contorno con punto inicial α y punto final β . Una *partición* \mathcal{P}_n de Γ es definida como una colección finita de puntos z_0, z_1, \dots, z_n , tal que $z_0 = \alpha$ y $z_n = \beta$, donde todos los puntos están ordenados siguiendo la orientación de Γ (ver figura 3.2).

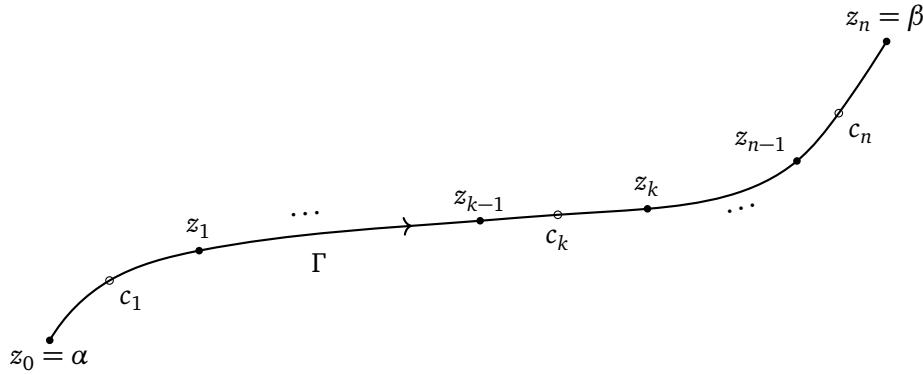


Figura 3.2: Una partición del contorno Γ .

Escojamos ahora n puntos sobre Γ , c_1, c_2, \dots, c_n , de manera tal que, para $k = 1, 2, \dots, n$, c_k yace en el arco de curva entre z_{k-1} y z_k . Llamando $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, podemos definir la *suma de Riemann* para la función $f(z)$ correspondiente a la partición \mathcal{P}_n como

$$S(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k. \quad (3.6)$$

Decimos que f es integrable sobre el contorno Γ si la suma de Riemann $S(\mathcal{P}_n)$ tiene un límite cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta z_k \rightarrow 0$, para cualquier partición \mathcal{P}_n :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} S(\mathcal{P}_n) = L = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f. \quad (3.7)$$

Como esta definición de integral es análoga a la definición dada en el cálculo real, muchas propiedades de las integrales reales son preservadas en el cálculo complejo. Por ejemplo, si f y g son integrables sobre un contorno Γ , entonces:

$$\blacksquare \int_{\Gamma} (f + g) = \int_{\Gamma} f + \int_{\Gamma} g$$

- $\int_{\Gamma} cf = c \int_{\Gamma} f$
- $\int_{-\Gamma} f = - \int_{\Gamma} f$

donde c es cualquier constante compleja y $-\Gamma$ denota el mismo contorno Γ recorrido en sentido inverso.

La clase de funciones integrables es lo suficientemente amplia:

Teorema 3.2. Si f es continua sobre Γ , f es integrable sobre Γ .

Para calcular $\int_{\Gamma} f$ podemos recurrir al siguiente teorema.

Teorema 3.3. Sea $f(z)$ una función continua sobre el contorno dirigido Γ . Entonces, si $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, es una parametrización admisible de Γ , conservando su orientación, tenemos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt. \quad (3.8)$$

La integral en el lado derecho de (3.8) es sobre la variable real t .

En la práctica, la parametrización $z(t)$ del contorno Γ funciona como un cambio de variable ordinario, reemplazando la variable compleja z por la variable real t . Claramente, el valor de la integral no depende de la parametrización escogida:

Corolario. Si z_1 y z_2 son dos parametrizaciones admisibles de Γ , con rangos $a \leq t \leq b$ y $c \leq t \leq d$, respectivamente, entonces

$$\int_a^b f(z_1(t)) \frac{dz_1}{dt} dt = \int_c^d f(z_2(t)) \frac{dz_2}{dt} dt. \quad (3.9)$$

Ejemplo 3.2. Calcular $\oint_{C_r} (z - z_0)^n dz$, donde C_r es el círculo de radio r centrado en z_0 , orientado positivamente.

Una parametrización sencilla de C_r , orientada positivamente, es $z(t) = z_0 + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Procediendo de acuerdo a la ec. (3.8), obtenemos

$$\oint_{C_r} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (r^n e^{int}) (ir e^{it}) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt. \quad (3.10)$$

Cuando $n = -1$, encontramos

$$\oint_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i, \quad (3.11)$$

sin importar el valor de r . Cuando $n \neq -1$, en cambio, hallamos

$$\oint_{C_r} (z - z_0)^n dz = ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0. \quad (3.12)$$

3.3. Cotas superiores para integrales

Sea $f(z)$ una función continua y acotada sobre el contorno dirigido Γ ,

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \Gamma, \quad (3.13)$$

donde M es una constante real positiva. Usando la identidad triangular, podemos acotar la suma de Riemann correspondiente a $f(z)$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |f(c_k) \Delta z_k| \\ &= \sum_{k=1}^n |f(c_k)| |\Delta z_k| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \\ &\leq M l(\Gamma), \end{aligned}$$

donde $l(\Gamma)$ es la longitud de Γ . Como esta desigualdad es válida para cualquier suma de Riemann, concluimos que, en el límite,

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\Gamma). \quad (3.14)$$

3.4. Independencia del camino

En general, el resultado de la integral de una función de variable compleja depende de los detalles del contorno de integración.

El Teorema 3.4 da las condiciones para cuando esta integral es independiente del camino recorrido entre los puntos inicial y final del contorno.

Definición 3.1. Un *dominio* D es un conjunto abierto y conexo (i.e., dos puntos $z_1, z_2 \in D$ pueden ser siempre conectados por una línea poligonal que yace completamente en D).

Teorema 3.4. Suponga que la función $f(z)$ es continua en un dominio D y que tiene una antiderivada (“primitiva”) $F(z)$ en todo D ; i.e., $dF/dz = f(z)$, $\forall z \in D$. Entonces, para todo contorno $\Gamma \subset D$, con punto inicial z_i y punto final z_f , tenemos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_f) - F(z_i). \quad (3.15)$$

Demostración. La demostración del teorema hace uso del Teorema Fundamental del Cálculo para una variable real t .

Para un contorno Γ ,

$$\int_{\Gamma} f(z) = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt,$$

donde $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, es una parametrización admisible de Γ . Pero

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dt} = f(z(t)) \frac{dz}{dt},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(z_f) - F(z_i). \end{aligned} \quad \square$$

Note que las condiciones del Teorema 3.4 implican que $F(z)$ es analítica (y, por lo tanto, continua) en D . Esto significa que, por ejemplo, la función $\log z$ no es una primitiva de $1/z$ en cualquier dominio que contenga parte del eje real negativo.

Corolario. Si $f(z)$ es continua en un dominio D y tiene una antiderivada $\forall z \in D$, entonces $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para cualquier contorno cerrado $\Gamma \subset D$.

Este corolario nos da una manera alternativa de entender el resultado de la integral $\oint_{C_r} (z - z_0)^n dz$ que calculamos en el Ejemplo 3.2. Cuando $n \neq -1$, $f(z) = (z - z_0)^n$ es la derivada de la función $F(z) = (z - z_0)^{n+1} / (n+1)$, la cual es analítica en el dominio* $D = \mathbb{C} - \{z_0\}$. Dado que C_r es un contorno cerrado completamente contenido en D , concluimos que $\oint_{C_r} (z - z_0)^n dz = 0$ siempre que $n \neq -1$. Cuando $n = -1$, en cambio, la función $f(z) = 1/(z - z_0)$ no tiene una antiderivada continua en ningún dominio D que incluya el contorno cerrado C_r . La función $F(z) = \log(z - z_0)$, en cualquiera de sus ramas, es discontinua sobre la línea horizontal que se extiende desde z_0 hacia la izquierda (ver figura 3.3).

* Es necesario excluir el punto z_0 del dominio de analiticidad de $F(z)$ sólo cuando n es negativo. Cuando n es positivo, $F(z)$ es analítica $\forall z \in \mathbb{C}$.

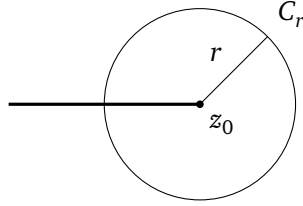


Figura 3.3: La función $F(z) = \log(z - z_0)$ es discontinua sobre la línea horizontal que se extiende desde z_0 hacia la izquierda.

3.5. Teorema integral de Cauchy

Una noción crucial en la teoría de las funciones de variable compleja es la de *deformación de contornos*.

Decimos que un loop* Γ_0 puede ser *deformado continuamente* en el loop Γ_1 , en el dominio D , si Γ_0 puede ser movido y deformado continuamente en el plano complejo, sin salir de D , de modo que finalmente coincida con Γ_1 (tanto en posición como en orientación).

Ejemplo 3.3. Algunos ejemplos ayudarán a clarificar esta idea.

1. En la figura 3.4 (a), el contorno Γ_0 puede modificarse continuamente en el contorno Γ_1 sin nunca salir del dominio anular D .
2. Si D es el plano complejo menos los puntos i y $-i$, entonces el contorno circular Γ_0 de la figura 3.4 (b) puede deformarse continuamente en el contorno Γ_1 , compuesto de dos círculos conectados por una línea recta. Se muestra también un contorno intermedio, $\Gamma_{1/2}$.
3. Si D es todo el plano complejo, todo contorno puede ser deformado continuamente a un punto, y vuelto a deformar en sí mismo con la orientación opuesta.

Definición 3.2. Decimos que el loop Γ_0 es *continuamente deformable* en el loop Γ_1 , en el dominio D , si existe una función $z(s, t)$, continua para $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, tal que

1. $\forall s \in [0, 1], z_s(t) \equiv z(s, t)$ parametriza un loop en D .
2. $z_0(t) \equiv z(0, t)$ parametriza Γ_0 .

* A veces usamos la expresión “loop” para referirnos a un contorno cerrado.

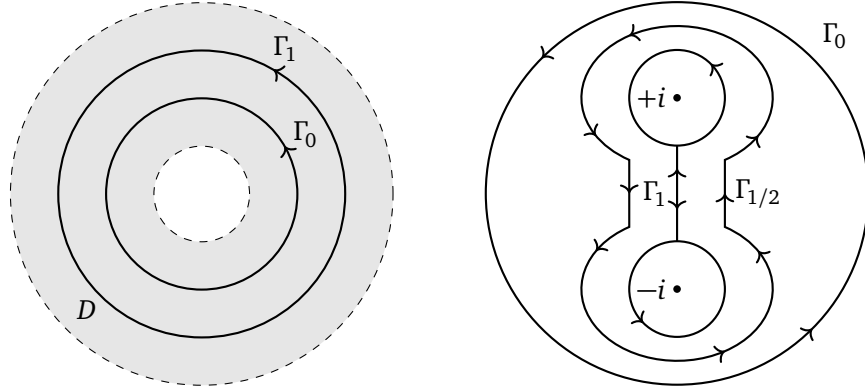


Figura 3.4: Deformando contornos en un dominio.

3. $z_1(t) \equiv z(1, t)$ parametriza Γ_1 .

Definición 3.3. Cualquier dominio D que posea la propiedad de que todo loop $\Gamma \subset D$ puede ser continuamente deformado a un punto es llamado *dominio simplemente conexo*.

Ejemplo 3.4. Sea $D = \mathbb{C} - \{0\}$. D no es simplemente conexo. Considere la figura 3.5.

1. Γ_1 no puede ser continuamente deformado en Γ_0 .
2. Γ_0 no puede ser continuamente deformado a un punto (pero Γ_1 sí).
3. Γ_0 no puede ser continuamente deformado en $-\Gamma_0$ (pero Γ_1 sí).

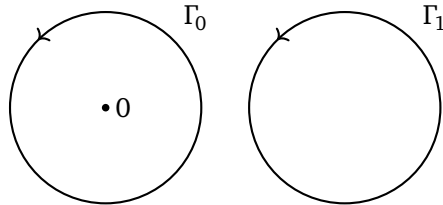


Figura 3.5: En el dominio $D = \mathbb{C} - \{0\}$, Γ_1 puede contraerse a un punto, pero Γ_0 no.

Teorema 3.5. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D que contiene los loops Γ_0 y Γ_1 . Si estos loops pueden ser deformados continuamente el uno en el otro

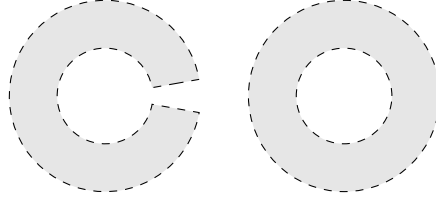


Figura 3.6: ¿Cuál de estos dominios es simplemente conexo?

en el dominio D , entonces

$$\oint_{\Gamma_0} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz. \quad (3.16)$$

Demostración. Demostraremos sólo el caso particular cuando Γ_0 y Γ_1 están vinculados por una función $z(s, t)$ con derivadas parciales de segundo orden continuas. Asumimos también que $f'(z)$ es continua.

Para cada $s \in [0, 1]$, la función $z(s, t)$ parametriza un loop, Γ_s , con $0 \leq t \leq 1$. Sea $I(s)$ la integral de $f(z)$ sobre Γ_s :

$$I(s) = \oint_{\Gamma_s} f(z) dz = \int_0^1 f(z(s, t)) \frac{\partial z}{\partial t} dt. \quad (3.17)$$

Derivando con respecto a s , hallamos

$$\frac{dI}{ds} = \int_0^1 \left[\frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \right] dt. \quad (3.18)$$

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial s} \right] = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}, \quad (3.19)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left[f(z(s, t)) \frac{\partial z}{\partial s} \right] dt \\ &= \left[f(z(s, t)) \frac{\partial z}{\partial s} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= f(z(s, 1)) \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{t=1} - f(z(s, 0)) \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Como el contorno Γ_s es cerrado, debemos tener $z(s, 1) = z(s, 0)$, $\forall s \in [0, 1]$. Derivando esta igualdad con respecto a s , encontramos

$$\left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_{t=1} = \left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_{t=0}. \quad (3.20)$$

Luego, $dI/ds = 0$, y, en particular, $I(0) = I(1)$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 3.6 (Teorema integral de Cauchy). *Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D , entonces $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$, donde Γ es cualquier contorno cerrado completamente contenido en D .*

Demostración. Como D es simplemente conexo, Γ puede ser reducido a un punto. La integral sobre un punto es idénticamente cero. \square

Para satisfacer las condiciones del Teorema 3.6, basta con que $f(z)$ sea analítica “sobre y dentro” de Γ .

Los resultados que hemos establecido hasta ahora pueden resumirse en el siguiente Teorema.

Teorema 3.7. *En un dominio simplemente conexo, una función analítica*

- *Tiene una antiderivada.*
- *Sus integrales de contorno son independientes del camino.*
- *Sus integrales sobre un loop son cero.*

Analizamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 3.5. Sea $f(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 0$, entonces $f(z)$ es analítica en todo \mathbb{C} . Como \mathbb{C} es simplemente conexo, obtenemos $\oint_{\Gamma} z^n dz = 0$, donde Γ es cualquier contorno cerrado.

Si $n < 0$, entonces $f(z)$ es analítica en $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Como D no es simplemente conexo, no podemos asegurar que las integrales de loop se anulen. De hecho, tenemos que

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad (3.21)$$

donde C es el círculo unitario centrado en el origen. Sin embargo,

$$\oint_C z^n dz = 0 \quad (n = -2, -3, \dots), \quad (3.22)$$

porque en este caso z^n sí tiene una antiderivada analítica en D .

Ejemplo 3.6. Determine el valor de la integral $\oint_{\Gamma} dz/z$, donde Γ es la elipse centrada en el origen que se muestra en la figura 3.7 (a) y Γ_0 es el círculo unitario.

La función $1/z$ es analítica en el dominio $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Dentro de D , es posible deformar continuamente Γ hasta hacerlo coincidir con el círculo unitario Γ_0 . Luego, el teorema 3.5 asegura que $\oint_{\Gamma} dz/z = \oint_{\Gamma_0} dz/z = 2\pi i$. Note que, como D no es simplemente conexo, la integral es distinta de cero.

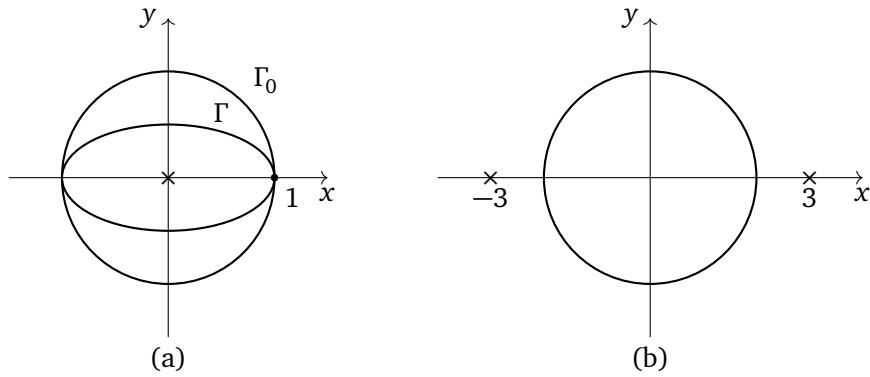


Figura 3.7: (a) El contorno Γ puede deformarse continuamente en el contorno Γ_0 . (b) Las singularidades de la función están fuera del contorno de integración.

Ejemplo 3.7. Determine el valor de la integral

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 9} dz. \quad (3.23)$$

Como se muestra en la figura 3.7 (b), el integrando es una función analítica sobre y dentro del contorno de integración; luego, el teorema 3.6 asegura que $I = 0$.

Ejemplo 3.8. Determine el valor de la integral

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}, \quad (3.24)$$

donde Γ es un contorno cerrado que no pasa por el punto a .

El integrando en I es analítico en el dominio $D = \mathbb{C} - \{a\}$. Si a está fuera de Γ , entonces Γ puede reducirse a un punto y la integral es cero. Si a está dentro

de Γ , entonces Γ puede deformarse en un círculo centrado en a , para el cual la integral vale $2\pi i$. Resumiendo:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ está fuera de } \Gamma \\ 2\pi i & \text{si } a \text{ está dentro de } \Gamma \end{cases} \quad (3.25)$$

Ejemplo 3.9. Determine el valor de la integral

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{3z-2}{z^2-z} dz, \quad (3.26)$$

donde Γ es el contorno poligonal que se muestra en la figura 3.8.

El integrando en I es analítico en todo \mathbb{C} , excepto por los puntos singulares $z = 0$ y $z = 1$. Sin salirse de este dominio de analiticidad, es posible deformar Γ hasta dejarlo convertido en dos círculos pequeños, uno alrededor de cada singularidad, conectados por un segmento de línea recta recorrido una vez hacia la izquierda y otra vez hacia la derecha. Esta deformación de contorno nos permite escribir $\oint_{\Gamma} f = \oint_{C_0} f + \oint_{C_1} f$, porque las integrales sobre el trozo recto se cancelan entre sí. Separando el integrando en fracciones parciales,

$$\frac{3z-2}{z^2-z} = \frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}, \quad (3.27)$$

podemos escribir

$$I = \oint_{C_0} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz + \oint_{C_1} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz. \quad (3.28)$$

Utilizando el resultado del ejemplo 3.8, obtenemos

$$I = 2 \times 2\pi i + 0 + 2 \times 0 + 2\pi i = 6\pi i. \quad (3.29)$$

Ejemplo 3.10. Determine el valor de la integral

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2-1}, \quad (3.30)$$

donde Γ es el contorno que se muestra en la figura 3.9.

Deformando el contorno a un pequeño círculo en torno a la singularidad en $z = -1$ y separando el integrando en fracciones parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \oint_C \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} (0 - 2\pi i) \\ &= -\pi i. \end{aligned}$$

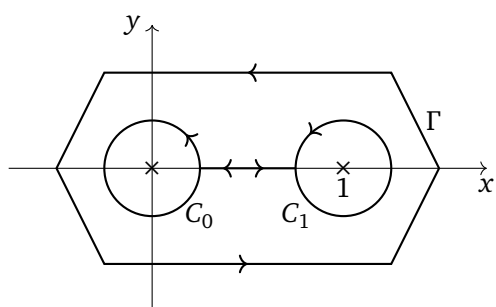


Figura 3.8: Contornos de integración para el ejemplo 3.9.

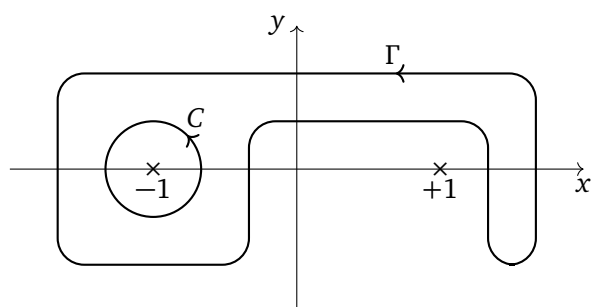


Figura 3.9: Contornos de integración para el ejemplo 3.10.

3.6. Fórmula integral de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica sobre y dentro de un contorno cerrado Γ , entonces el Teorema 3.6 nos asegura que $\oint_{\Gamma} f = 0$.

¿Qué pasa si $f(z)$ tiene una singularidad dentro de Γ ? El siguiente teorema nos permite dar una respuesta parcial a esta pregunta.

Teorema 3.8 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea Γ un contorno simple, cerrado, y orientado positivamente. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D que contiene a Γ , y z_0 es un punto dentro de Γ (ver figura 3.10), entonces*

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (3.31)$$

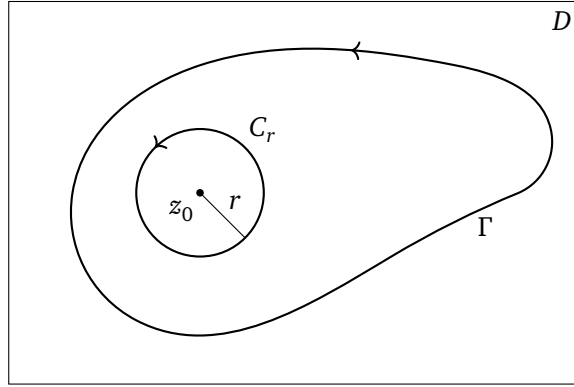


Figura 3.10: Ilustración del Teorema 3.8.

Demostración. Como primer paso para demostrar la fórmula integral de Cauchy, deformamos continuamente el contorno Γ hasta transformarlo en un pequeño círculo de radio r centrado en z_0 (ver figura 3.10). Escribimos ahora

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \oint_{C_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Como $\oint_{C_r} dz / (z - z_0) = 2\pi i$ (ver ejemplo 3.8), obtenemos

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (3.32)$$

En esta ecuación, el lado izquierdo y el primer término del lado derecho son independientes de r . Luego, el segundo término del lado derecho también debe ser independiente de r . Esto significa que, para calcularlo, podemos escoger cualquier valor de r , incluyendo el límite cuando $r \rightarrow 0$. Sea $M_r = \max_{z \in C_r} (|f(z) - f(z_0)|)$. El integrando de este término está acotado por

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \frac{M_r}{r}, \quad (3.33)$$

donde hemos utilizado el hecho que $|z - z_0| = r$. Luego, el valor de la integral misma está acotado por [cf. ec. (3.14)]

$$\left| \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{M_r}{r} 2\pi r = 2\pi M_r. \quad (3.34)$$

Como $f(z)$ es continua en z_0 , $\lim_{r \rightarrow 0} M_r = 0$. Luego,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \quad (3.35)$$

Esto concluye la demostración. \square

Reescribiendo la fórmula integral de Cauchy en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (3.36)$$

se hace evidente que los valores de $f(z)$ sobre el contorno simple y cerrado Γ determinan completamente los valores de $f(z)$ dentro de Γ . Tal es el poder del concepto de analiticidad.

Ejemplo 3.11. Determine el valor de la integral

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 4} dz, \quad (3.37)$$

donde Γ es el contorno que se muestra en la figura 3.11.

Llamando

$$f(z) = \frac{\cos z}{z + 2}, \quad (3.38)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-2} dz \\ &= 2\pi i f(2) \\ &= 2\pi i \frac{\cos 2}{4}. \end{aligned}$$

Note que la utilización de la fórmula integral de Cauchy está justificada por el hecho que $f(z)$ es analítica sobre y dentro de Γ .

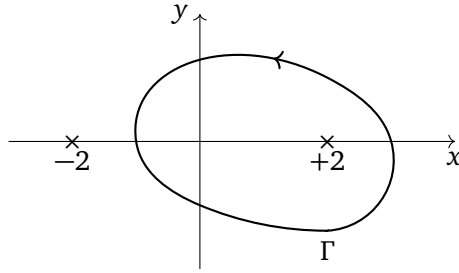


Figura 3.11: Contorno de integración para el ejemplo 3.11.

Consideremos otra vez la fórmula integral de Cauchy [cf. ec. (3.36)]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (3.39)$$

Derivando con respecto a z bajo el signo de integral, hallamos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad (3.40)$$

Iterando hasta obtener la n -ésima derivada, encontramos

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.41)$$

donde z está dentro del contorno Γ . Esta ecuación es conocida como *fórmula integral de Cauchy generalizada*.

Este cálculo sirve esencialmente como demostración del siguiente Teorema.

Teorema 3.9. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , entonces todas sus derivadas, $f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z), \dots$, existen y son analíticas en D .

Aunque su importancia es principalmente conceptual, la fórmula integral de Cauchy generalizada también puede utilizarse para el cálculo de integrales.

Ejemplo 3.12. Determine el valor de la integral

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz, \quad (3.42)$$

donde Γ es el contorno en forma de ∞ que se muestra en la figura 3.12.

Llamando

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-1)^2}, \quad (3.43)$$

$$g(z) = \frac{2z+1}{z}, \quad (3.44)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{g(z)}{(z-1)^2} dz \\ &= -2\pi i f(0) + 2\pi i g'(1) \\ &= -4\pi i, \end{aligned}$$

donde es crucial notar que C_0 tiene orientación *negativa*.

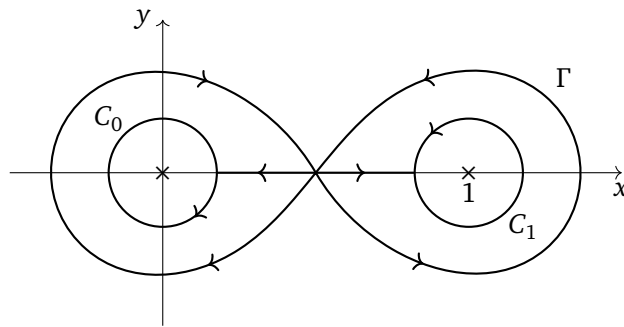


Figura 3.12: Contornos de integración para el ejemplo 3.12.

3.7. Cotas para funciones analíticas

En la sección 3.3 aprendimos cómo acotar integrales de funciones acotadas [cf. ec. (3.14)]. Como la fórmula integral de Cauchy generalizada (3.41) nos entrega una expresión para las derivadas de una función en términos de una integral de contorno, podemos acotar los valores de las derivadas combinando ambas ideas.

Teorema 3.10. *Sea $f(z)$ una función analítica sobre y dentro de un círculo C_R de radio R y centrado en z_0 . Si $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in C_R$, entonces*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.45)$$

Demostración. De la fórmula integral de Cauchy generalizada [cf. ec. (3.41)],

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Usando la ec. (3.14) para acotar esta integral, obtenemos (con $|\xi - z_0| = R$)

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{n!M}{R^n}. \quad \square$$

La condición de analiticidad impone límites estrictos a lo que puede y no puede hacer una función de variable compleja.

Teorema 3.11 (Teorema de Liouville). *Las únicas funciones enteras y acotadas son las funciones constantes.*

Demostración. Sea $f(z)$ una función analítica y acotada en todo el plano complejo, i.e.,

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Entonces, la ec. (3.45) asegura que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y para cualquier $R > 0$, tenemos

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

La única manera en que esto puede ocurrir es que $f'(z) = 0$ en todo el plano complejo, es decir, $f(z) = \text{const.}$ \square

Armados con estas herramientas podemos intentar una demostración (no particularmente rigurosa) del Teorema Fundamental del Álgebra.

Teorema 3.12 (Teorema Fundamental del Álgebra). *Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos un cero en \mathbb{C} .*

Demostración. Asumamos que el polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, con $a_0 \neq 0$, no tiene ninguna raíz*.

Cuando $|z| \gg 1$, el comportamiento de $p(z)$ está dominado por el término a_nz^n . Como $|a_nz^n|$ crece sin límite cuando $z \rightarrow \infty$, lo mismo ocurrirá con $|p(z)|$.

Sea D un disco de radio r , centrado en el origen, tal que $|p(z)| > |a_0|$ cuando $|z| > r$. La función $1/p(z)$ es acotada fuera de D , ya que $|1/p(z)| < 1/|a_0|$ cuando $|z| > r$. Como $p(z)$ es una función continua, existe un punto $z_0 \in D$ donde $|p(z)|$ alcanza su valor mínimo, i.e., $|p(z)| > |p(z_0)|$, $\forall z \in D$. Como hemos asumido que $p(z)$ no tiene ninguna raíz, $p(z_0) \neq 0$. Esto significa que la función $1/p(z)$ es acotada dentro de D , pues $|1/p(z)| < 1/|p(z_0)|$, $\forall z \in D$.

Luego, la función $1/p(z)$ es analítica y acotada en todo \mathbb{C} . Por el teorema 3.11, $1/p(z)$ debe ser constante, lo cual, a su vez, implica que $p(z)$ debe ser constante, contradiciendo nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, $p(z)$ debe tener a lo menos un cero. \square

A pesar de su nombre, el teorema fundamental del álgebra no es un teorema fundamental del álgebra moderna; su nombre viene de la época en que el álgebra se ocupaba principalmente de encontrar soluciones a ecuaciones polinómicas con coeficientes reales o complejos. Tampoco existe una demostración puramente algebraica del teorema; la que hemos dado aquí hace uso de herramientas del análisis de funciones de variable compleja. En otras palabras, el teorema fundamental del álgebra no es fundamental ni tampoco es un teorema del álgebra.

Consideremos ahora nuevamente la fórmula integral de Cauchy (3.36) para una función $f(z)$ analítica sobre y dentro del círculo C_R de radio R y centrado en z_0 . Parametrizando el círculo en la forma $z = z_0 + Re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenemos

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (3.46)$$

* Si $a_0 = 0$, entonces $z = 0$ es una raíz del polinomio.

La ec. (3.46), conocida como la *propiedad del valor medio*, permite interpretar $f(z_0)$ como el promedio de $f(z)$ sobre un círculo centrado en z_0 .

Lema 3.13. *Suponga que $f(z)$ es analítica en un disco centrado en z_0 y que el valor máximo de $|f(z)|$ sobre este disco es $|f(z_0)|$. Entonces $|f(z)|$ es constante en el disco.*

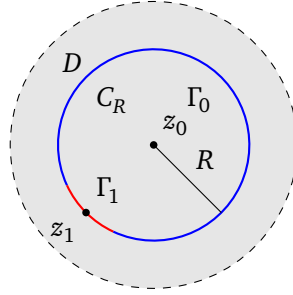


Figura 3.13: Demostración del lema 3.13. En Γ_0 (la porción azul de C_R) se cumple la desigualdad $|f(z_0)| \geq |f(z)|$; en Γ_1 (la porción roja) se cumple la desigualdad estricta $|f(z_0)| > |f(z)|$.

Demostración. Suponga, por el contrario, que $|f(z)|$ no es constante. Entonces debe existir un punto z_1 en el disco tal que $|f(z_0)| > |f(z_1)|$. Sea C_R el círculo centrado en z_0 que pasa por z_1 . Por hipótesis, $|f(z_0)| \geq |f(z)|$, $\forall z \in C_R$. Como $f(z)$ es continua, existe una porción del círculo en torno a z_1 (Γ_1 , en rojo en la figura 3.13) donde se cumple la desigualdad estricta $|f(z_0)| > |f(z)|$. Llamando Γ_0 al resto del círculo (en azul en la figura 3.13), podemos escribir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right].$$

Luego,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \\ &< \frac{1}{2\pi} \left[\frac{|f(z_0)|}{R} l(\Gamma_0) + \frac{|f(z_0)|}{R} l(\Gamma_1) \right], \end{aligned}$$

lo cual produce una contradicción:

$$|f(z_0)| < |f(z_0)|.$$

Por lo tanto, $|f(z)|$ debe ser constante en D , como queríamos demostrar. \square

Observe que el lema dice que el módulo de una función analítica no puede alcanzar su máximo en el centro del disco a menos que $|f(z)|$ sea constante. Esta idea se extiende en el *Principio del módulo máximo*.

Teorema 3.14 (Principio del módulo máximo). *Si $f(z)$ es analítica en un dominio D y $|f(z)|$ alcanza su valor máximo en un punto $z_0 \in D$, entonces $f(z)$ es constante en D .*

Demostración. Omitida (por ahora). \square

Una versión alternativa del principio del módulo máximo se da en el siguiente teorema.

Teorema 3.15. *Una función analítica en un dominio acotado, continua incluso en su frontera, alcanza su módulo máximo sobre la frontera.*

Demostración. Omitida (por ahora). \square

3.8. Aplicaciones a funciones armónicas

En la sección 2.4 establecimos algunas conexiones entre funciones armónicas $\phi(x, y)$ y funciones analíticas $f(z)$. En esta sección agregamos resultados adicionales sobre funciones armónicas.

Teorema 3.16. *Sea $\phi(x, y)$ una función armónica en un dominio simplemente conexo D . Entonces, existe una función analítica $f(z)$ tal que $\phi(x, y) = \Re[f(z)]$ en D .*

Con este teorema podemos explorar las propiedades de las funciones armónicas en dominios simplemente conexos, usando la teoría de las funciones analíticas.

Sea $\phi(x, y)$ una función armónica y sea $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ la función analítica asociada en el dominio simplemente conexo D . Dado que

$$|e^{f(z)}| = |e^{\phi(x,y) + i\psi(x,y)}| = |e^{\phi(x,y)}| |e^{i\psi(x,y)}| = e^{\phi(x,y)}, \quad (3.47)$$

los puntos máximos de $\phi(x, y)$ coinciden con los puntos máximos del módulo de la función analítica $e^{f(z)}$. Además, como los puntos mínimos de $\phi(x, y)$ son los puntos máximos de $-\phi(x, y)$, entonces podemos enunciar las siguientes versiones del principio máximo-mínimo para funciones armónicas.

Teorema 3.17. Si $\phi(x, y)$ es armónica en un dominio simplemente conexo D y alcanza su valor máximo o mínimo en un punto en D , entonces $\phi(x, y)$ es constante en D .

Teorema 3.18. Una función armónica en un dominio simplemente conexo acotado, continua incluso en la frontera, alcanza su máximo y su mínimo en la frontera.

Estos principios pueden generalizarse fácilmente a dominios múltiplemente conexos; en lo que sigue, utilizaremos estas versiones generalizadas.

Un problema importante que surge en electromagnetismo, mecánica de fluidos, y transferencia de calor es el siguiente.

Problema de Dirichlet Encuentre una función $\phi(x, y)$, continua en un dominio D y en su frontera, armónica en D , y que tome valores especificados sobre la frontera de D .

La función $\phi(x, y)$ puede ser interpretada como potencial eléctrico, potencial de velocidad, o temperatura de estado estacionario. Al estudiar el problema de Dirichlet, nos preocupan dos preguntas principales: ¿Existe una solución, y si es así, queda ésta unívocamente determinada por las condiciones de borde? Para el caso de dominios acotados, la pregunta sobre la unicidad queda respondida en el siguiente teorema.

Teorema 3.19. Sean $\phi_1(x, y)$ y $\phi_2(x, y)$ dos funciones armónicas en un dominio acotado D y continuas incluso en su frontera. Suponga que $\phi_1 = \phi_2$ sobre la frontera de D . Entonces, $\phi_1 = \phi_2$ también en el interior de D .

Demostración. Considere la función armónica $\phi = \phi_1 - \phi_2$. De acuerdo al principio máximo-mínimo para funciones armónicas, ϕ debe alcanzar su valor máximo y su valor mínimo sobre la frontera de D . Sin embargo $\phi = 0$ en D . Esto significa que $\phi = 0$ también en el interior de D . \square

La fórmula integral de Cauchy expresa una función analítica f dentro de un dominio D en términos de sus valores en la frontera de D . Escribiendo $f = \phi + i\psi$, podemos resolver el problema de Dirichlet si logramos “desacoplar” las partes real e imaginaria de f en la fórmula integral de Cauchy.

Por simplicidad, consideremos el disco acotado por el círculo orientado positivamente $C_R : |z| = R$. La fórmula integral de Cauchy toma la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (|z| < R), \quad (3.48)$$

donde asumimos que el dominio de analiticidad de f incluye C_R y su interior. Resulta conveniente definir la función

$$g(\xi) = \frac{z^* f(\xi)}{R^2 - z^* \xi}, \quad (3.49)$$

donde z juega el rol de un parámetro fijo. Cuando $|z| < R$, $g(\xi)$ es una función analítica de ξ sobre y dentro de C_R (note que el denominador nunca se anula). Luego, por el teorema integral de Cauchy, la integral de $g(\xi)$ sobre C_R se anula:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{z^* f(\xi)}{R^2 - z^* \xi} d\xi = 0. \quad (3.50)$$

Sumando las ecs. (3.48) y (3.50), hallamos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \left(\frac{1}{\xi - z} + \frac{z^*}{R^2 - z^* \xi} \right) f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{R^2 - |z|^2}{(\xi - z)(R^2 - z^* \xi)} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Parametrizando C_R en la forma $\xi = Re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{(Re^{it} - z)(R^2 - z^* Re^{it})} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \\ &= \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{(Re^{it} - z)(Re^{-it} - z^*)} dt \\ &= \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{|Re^{it} - z|^2} dt \end{aligned}$$

Tomando la parte real de esta ecuación, identificando $\Re(f)$ con la función armónica ϕ , y escribiendo $z = re^{i\theta}$ (ver figura 3.14), encontramos la *fórmula integral de Poisson*:

Teorema 3.20. *Sea ϕ una función armónica en un dominio que contiene el disco $|z| \leq R$. Entonces, para $0 \leq r < R$, tenemos*

$$\phi(re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(Re^{it})}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(t - \theta)} dt. \quad (3.51)$$

En realidad, es posible demostrar la fórmula integral de Poisson bajo condiciones más generales que las que hemos considerado aquí.

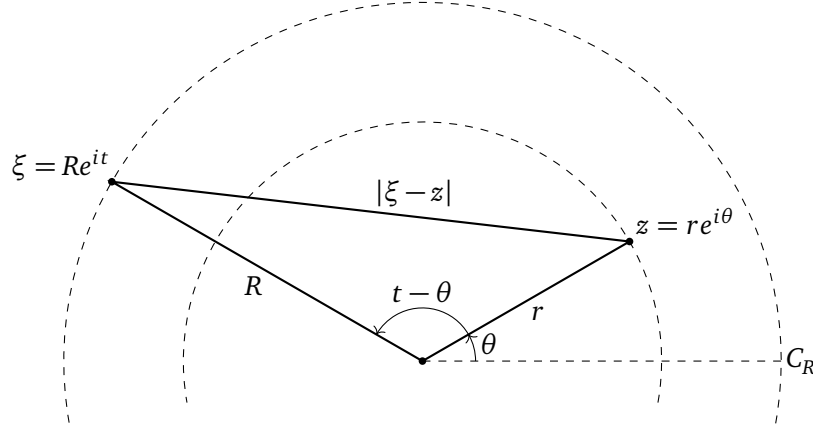


Figura 3.14: Teorema del coseno, versión números complejos: $|Re^{it} - re^{i\theta}|^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos(t - \theta)$.

Teorema 3.21. Sea U una función que toma valores reales definida sobre el círculo $C_R : |z| = R$ y continua allí excepto por un número finito de singularidades de salto. Entonces, la función

$$u(re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U(Re^{it})}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(t - \theta)} dt. \quad (3.52)$$

es armónica dentro de C_R , y a medida que $re^{i\theta}$ se acerca a cualquier punto sobre C_R donde U es continua, $u(re^{i\theta})$ se acerca al valor de U en ese punto.

Naturalmente, el comportamiento es más complicado en los puntos de discontinuidad de U .

La fórmula integral de Poisson resuelve el problema de Dirichlet para el disco bajo circunstancias muy generales. Es usual escribirla en la forma

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) U(Re^{it}) dt, \quad (3.53)$$

donde $P_r(\theta)$ es conocido como *kernel de Poisson* (para el disco):

$$P_r(\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta} = \Re \left(\frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} \right). \quad (3.54)$$

Ejemplo 3.13. Encuentre la temperatura de estado estacionario T dentro del disco unitario si la temperatura en el borde debe ser +1 en el primer cuadrante y cero en los demás puntos.

Usando la ec. (3.52), hallamos

$$T(re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)} dt. \quad (3.55)$$

Por ejemplo, en el centro del disco,

$$T(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{4}, \quad (3.56)$$

que es justamente el promedio de los valores sobre el borde.

Ejemplo 3.14 (Potencial eléctrico de una carga puntual). El espacio físico es tridimensional*, mientras que el plano complejo es bidimensional. Esto significa que los problemas que podemos resolver apelando a la variable compleja son aquellos que son esencialmente bidimensionales; por ejemplo, cuando el potencial eléctrico depende de sólo *dos* de las tres coordenadas cartesianas. Un caso sencillo donde esta condición no se cumple es el potencial generado por una carga puntual, $\phi = 1/r$ (por simplicidad, ignoramos el factor constante $1/4\pi\epsilon_0$). Este potencial es una función armónica en tres dimensiones, dado que satisface $\nabla^2\phi = 0$ para todo $r \neq 0$. Sin embargo, la función $u = 1/r$ no es armónica, ni tiene, por lo tanto, una función armónica conjugada en el plano complejo. En efecto, de las ecuaciones de Cauchy–Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (3.58)$$

encontramos que la conjugada armónica de $u = 1/r$ debería satisfacer simultáneamente las condiciones

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (3.60)$$

lo cual no es posible. Usando coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n , la función $\phi = 1/r = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}$ resulta ser armónica sólo cuando $n = 3$. En efec-

* Minkowski y Einstein nos enseñaron que el espacio-tiempo, de cuatro dimensiones, tiene aún más realidad física que el espacio tridimensional usual. Actualmente se especula con la idea de que el espacio-tiempo pueda tener incluso más dimensiones que cuatro, como diez u once.

to, sus derivadas son

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = -x_k (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-3/2}, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = -\delta_{jk} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-3/2} + 3x_j x_k (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-5/2}, \quad (3.62)$$

de manera que, poniendo $j = k$ y sumando, obtenemos

$$\nabla^2 \phi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2} = -(n-3) (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-3/2}, \quad (3.63)$$

que se anula (para $r \neq 0$) sólo cuando $n = 3$.

Capítulo 4

Series

4.1. Motivación

En los números reales, una serie de potencias (centrada en $x_0 = 0$) tiene la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots, \quad (4.1)$$

donde los c_k son coeficientes constantes (reales). En general, la ec. (4.1) sólo tiene sentido en algún intervalo de la forma $|x| < R$, donde R es llamado el *radio de convergencia*.

Por ejemplo, la función $G(x) = (1 - x^2)^{-1}$ puede ser expresada como la serie de potencias

$$G(x) = \frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots, \quad (4.2)$$

que converge para $|x| < 1$. En este caso, resulta claro que la serie no puede converger fuera de este intervalo, dado que la función misma es singular cuando $x = \pm 1$. Consideremos ahora la función

$$H(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots. \quad (4.3)$$

El radio de convergencia de esta serie es idéntico al anterior, $|x| < 1$, pero en este caso no es evidente por qué. La función $H(x)$ es perfectamente regular para todo x real, y sin embargo la expansión en serie (4.3) converge sólo en un intervalo reducido (ver figura 4.1).

¿Qué está pasando aquí?

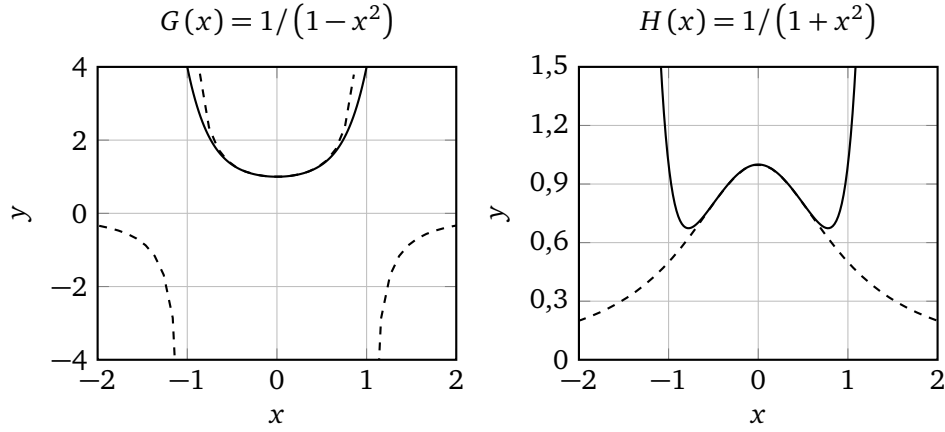


Figura 4.1: En línea punteada, las funciones $G(x)$ (izquierda) y $H(x)$ (derecha). En línea sólida, la suma de los primeros términos de sus expansiones en serie.

Para entender por qué la serie (4.3) converge sólo cuando $|x| < 1$, en circunstancias que la función que representa es regular para todo x real, debemos pasarnos al dominio de los números complejos.

Para todo z en \mathbb{C} , consideremos la expresión

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad (4.4)$$

La función $h(z)$ tiene dos singularidades, en $z = \pm i$. Estas singularidades actúan como barreras para la convergencia de la serie, que está garantizada sólo dentro del círculo unitario, $|z| < 1$. El radio de convergencia de la serie, que esta vez sí puede interpretarse como el radio de un círculo en el plano complejo, es la distancia desde $z = 0$ hasta la singularidad más cercana de la función $h(z)$, como se sugiere en la figura 4.2.

Las series que hemos usado como ejemplos son casos particulares de la que, probablemente, es la más importante de todas: la *serie geométrica*.

Sea c un número complejo. La suma *finita*

$$S_n = 1 + c + c^2 + \dots + c^n \quad (4.5)$$

puede calcularse en forma exacta recurriendo al siguiente truco. Multipliquemos S_n por c y restemos S_n :

$$cS_n - S_n = c + c^2 + c^3 + \dots + c^{n+1} - (1 + c + c^2 + \dots + c^n) = c^{n+1} - 1.$$

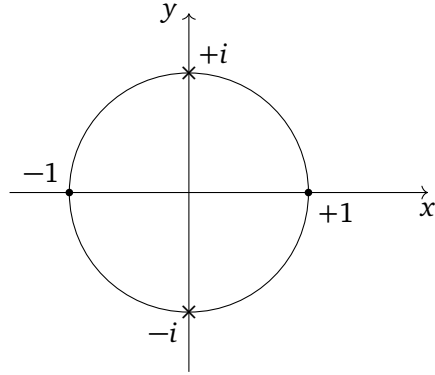


Figura 4.2: La función $h(z) = 1/(1+z^2)$ tiene dos singularidades en el plano complejo, en $z = \pm i$. La expansión en serie, centrada en $z = 0$, $h(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$ converge sólo dentro del disco limitado por estas singularidades.

Despejando S_n , hallamos

$$S_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}. \quad (4.6)$$

Esta es la suma de un número finito de términos de la serie geométrica. Cuando $|c| < 1$, el límite de c^{n+1} cuando $n \rightarrow \infty$ es cero, y encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + c + c^2 + \dots = \frac{1}{1 - c}. \quad (4.7)$$

4.2. Series de potencias

Muchos de los resultados del análisis real para series infinitas siguen siendo válidos en el ámbito de los números complejos. Por ejemplo, los criterios de comparación y del cociente pueden ser utilizados para determinar la convergencia (o divergencia) de una serie.

En particular, vamos a estar interesados en la representación de funciones analíticas a través de series infinitas.

Definición 4.1 (Serie de Taylor). Si $f(z)$ es analítica en z_0 , entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \quad (4.8)$$

es llamada la *serie de Taylor* para $f(z)$ en torno a z_0 . Cuando $z_0 = 0$, la serie (4.8) es llamada a veces *serie de Maclaurin* para $f(z)$.

Teorema 4.1. Si $f(z)$ es analítica en el disco $|z - z_0| < R$, entonces la serie de Taylor (4.8) converge a $f(z)$ para todo z dentro del disco.

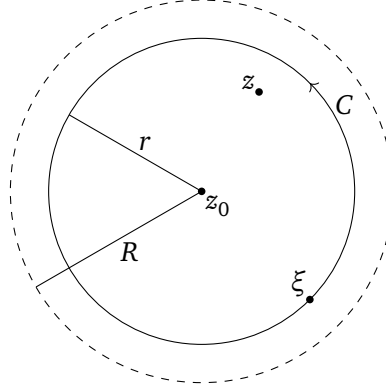


Figura 4.3: Construcción geométrica para la demostración del teorema 4.1.

Demostración. Para cualquier z en el disco $|z - z_0| < R$, siempre es posible encontrar un círculo C , de radio $r < R$ y centrado en z_0 , tal que z está en el interior de C (ver figura 4.3). Si C está orientado positivamente, la fórmula integral de Cauchy [cf. ec. (3.36)] garantiza que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (4.9)$$

Consideremos ahora la identidad

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \times \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\xi - z_0)}.$$

Dado que (ver figura 4.3)

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1, \quad (4.10)$$

podemos utilizar la serie geométrica (4.7) para escribir

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n. \quad (4.11)$$

Esta serie converge para todo z en el interior de C . Utilizando este resultado en la ec. (4.9), obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula integral de Cauchy generalizada [cf. ec. (3.41)] para identificar la cantidad entre paréntesis cuadrados con la n -ésima derivada de $f(z)$ en z_0 . Esto concluye la demostración. \square

Note que el teorema 4.1 implica que la serie de Taylor convergerá a $f(z)$ dentro del mayor disco abierto, centrado en z_0 , sobre el cual $f(z)$ es analítica.

Dos series de Taylor centradas en el mismo punto pueden sumarse y multiplicarse directamente. El disco de convergencia de la serie resultante es por lo menos tan grande como el más pequeño de los discos de convergencia de las series originales. También es posible derivar e integrar término a término una serie de Taylor. La serie resultante converge en el mismo disco que la serie original.

Ejemplo 4.1. Determinemos la serie de Taylor para $f(z) = \text{Log}(1 + z)$ en torno a $z = 0$.

Las primeras derivadas de $f(z)$ son

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{1+z}, \\ f''(z) &= -\frac{1}{(1+z)^2}, \\ f'''(z) &= \frac{2}{(1+z)^3}. \end{aligned}$$

El caso general es

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} (n-1)! \frac{1}{(1+z)^n}, \quad (4.12)$$

de donde obtenemos

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)! \quad (4.13)$$

Notando también que $f(0) = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots.\end{aligned}$$

Esta serie converge para $|z| < 1$. Derivando término a término, hallamos

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, \quad (4.14)$$

que no es otra cosa que la serie geométrica.

La serie de Taylor es un caso particular de una *serie de potencias*, que tiene la forma general $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, donde los c_k son coeficientes complejos constantes (independientes de z). Es posible demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.2. Si la serie de potencias $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ converge para $z = a$, entonces converge también para $|z - z_0| < |a - z_0|$.

Demostración. Use el criterio de comparación. □

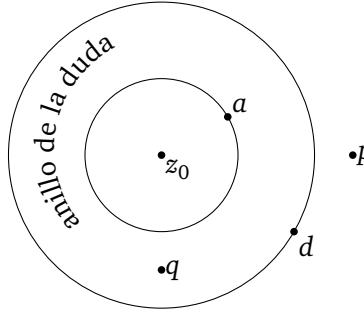


Figura 4.4: La serie de potencias $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ converge para todo z en $|z - z_0| < |a - z_0|$, y diverge para todo z en $|z - z_0| > |d - z_0|$. ¿Qué pasa en $z = q$?

Si la serie de potencias $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ no converge en todo el plano complejo, entonces debe existir un punto d donde *diverge* (ver figura 4.4).

Supongamos que $P(z)$ converge en un punto p , con $|p - z_0| > |d - z_0|$. Entonces, el teorema 4.2 asegura que $P(z)$ debe converger para todo z en $|z - z_0| < |p - z_0|$, lo cual incluye a d : ¡contradicción! Luego, si $P(z)$ diverge en $z = d$, entonces diverge también para todo z en $|z - z_0| > |d - z_0|$.

Este procedimiento nos deja con un “anillo de la duda”, $|a - z_0| < |z - z_0| < |d - z_0|$, donde no sabemos si $P(z)$ converge o diverge (ver figura 4.4). Consideremos un punto q dentro de este anillo. Una vez que determinemos si $P(z)$ converge o diverge en $z = q$, habremos reducido el ancho del “anillo de la duda”. Iterando este procedimiento, encontraremos eventualmente un círculo $|z - z_0| = R$ tal que $P(z)$ converge dentro del disco y diverge fuera. De esta manera, hemos establecido el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Para cualquier serie de potencias $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ existe un número real positivo R (que incluso puede ser infinito), que depende sólo de los coeficientes c_k , tal que*

- la serie converge para $|z - z_0| < R$,
- la serie diverge para $|z - z_0| > R$.

El número R es llamado el radio de convergencia de la serie.

El teorema 4.3 no dice nada acerca del comportamiento de la serie sobre el círculo $|z - z_0| = R$. Aquí, cualquier cosa puede pasar.

Es posible demostrar que si una serie de potencias converge dentro de un disco, entonces ella es la serie de Taylor de una función que es analítica dentro del disco, y que deja de ser analítica en por lo menos un punto sobre el disco.

La representación en serie de potencias de una función analítica es única, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.4 (Teorema de Identidad). *Si $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots = d_0 + d_1(z - z_0) + d_2(z - z_0)^2 + \cdots$ para todo z en una vecindad de z_0 , entonces $c_k = d_k$.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que la igualdad

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)(z - z_0) + (c_2 - d_2)(z - z_0)^2 + \cdots = 0 \quad (4.15)$$

se cumple para todo z en una vecindad V de z_0 . En particular, poniendo $z = z_0$, hallamos $c_0 = d_0$. Usando este resultado en la ec. (4.15), encontramos

$$(z - z_0) [(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)(z - z_0) + (c_3 - d_3)(z - z_0)^2 + \cdots] = 0. \quad (4.16)$$

Como esta ecuación también debe cumplirse para todo z en V , hallamos que la cantidad dentro del paréntesis cuadrado debe anularse en todo V , con la posible excepción de z_0 . Sin embargo, esta expresión define una función *continua*, de modo que, si se anula en una vecindad de z_0 , debe anularse también en z_0 mismo. Luego, concluimos que

$$(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)(z - z_0) + (c_3 - d_3)(z - z_0)^2 + \cdots = 0 \quad (4.17)$$

para todo z en V . Poniendo $z = z_0$, encontramos $c_1 = d_1$. Iterando este proceso indefinidamente, eventualmente encontramos que $c_k = d_k$ para $k = 1, 2, \dots$ \square

El teorema 4.4 puede hacerse bastante más fuerte. Si dos series de potencias coinciden en un segmento de curva que pasa por z_0 , o si coinciden en todos los puntos de una secuencia infinita que converge a z_0 , entonces las series son idénticas.

Una manera de entender el teorema 4.4 es como la generalización de la afirmación que existe un único polinomio de grado n que mapea un conjunto de $n + 1$ puntos en un conjunto dado de $n + 1$ puntos imágenes.

Una consecuencia del teorema 4.4 es la siguiente. Supongamos que tenemos una función de variable real $F(x)$, que puede ser expresada como una serie de potencias (centrada en $x = 0$), $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Entonces, la serie compleja $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, con los mismos coeficientes, puede ser usada para definir la *única* función de variable compleja $f(z)$ tal que (i) coincide con $F(x)$ sobre el eje real, y (ii) puede ser expresada como una serie de potencias. En particular, esto significa que la función definida por

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (4.18)$$

es la única función de variable compleja que coincide con e^x sobre el eje real y que puede ser expresada como una serie de potencias. En otras palabras, $\exp(z)$ es la única función *analítica* de variable compleja que coincide con e^x sobre el eje real.

Ejemplo 4.2. La función $1/(a - z)$ puede expresarse como una serie de Taylor en torno a un punto z_0 arbitrario ($z_0 \neq a$), con radio de convergencia igual a $R = |z_0 - a|$.

Tal como hicimos en la demostración del teorema 4.1, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-z} &= \frac{1}{(a-z_0)-(z-z_0)} \\
&= \frac{1}{a-z_0} \times \frac{1}{1-(z-z_0)/(a-z_0)} \\
&= \frac{1}{a-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{a-z_0} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}},
\end{aligned}$$

la cual converge para todo z en el disco $|z-z_0| < |z_0-a|$.

Ejemplo 4.3. La función $1/(1+z^2)$ puede expresarse como una serie de Taylor en torno a un punto z_0 arbitrario ($z_0 \neq \pm i$), con radio de convergencia igual a $R = \min\{|z_0-i|, |z_0+i|\}$.

Usando fracciones parciales, podemos escribir

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{-i-z} - \frac{1}{i-z} \right). \quad (4.19)$$

Cada uno de estos términos puede expandirse como en el ejemplo 4.2, para obtener

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z-z_0)^n}{(-i-z_0)^{n+1}} - \frac{(z-z_0)^n}{(i-z_0)^{n+1}} \right], \quad (4.20)$$

donde la serie para $1/(\pm i - z)$ converge en el disco $|z-z_0| < |\pm i - z_0|$, de manera que la suma de ambas converge en el menor de ellos.

Cuando $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, con $x_0 > 0$, podemos obtener una expansión en serie de Taylor para $1/(1+x^2)$ que no es fácil deducir de otra manera (ver figura 4.5). Poniendo $R = |\pm i - x_0| = \sqrt{1+x_0^2}$, y $\pm i - x_0 = -Re^{\mp i\phi}$, donde $\phi = \tan^{-1}(1/x_0)$, encontramos, luego de un poco de álgebra,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin[(n+1)\phi]}{(1+x_0^2)^{(n+1)/2}} (x-x_0)^n. \quad (4.21)$$

4.3. Serie de Laurent

La serie de Taylor nos permite expresar una función analítica dentro de un disco como una serie de potencias infinita. Sin embargo, las funciones de variable compleja tienen a menudo singularidades. En esta sección investigamos

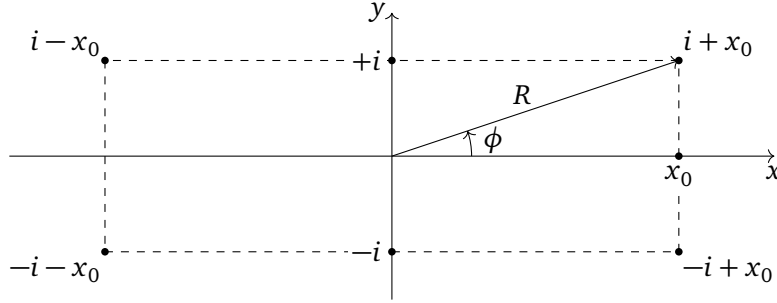


Figura 4.5: Geometría para el ejemplo 4.3, con $x_0 > 0$. Note que $\pm i + x_0 = Re^{\pm i\phi}$, $\pm i - x_0 = -Re^{\mp i\phi}$, donde $R = |\pm i - x_0| = \sqrt{1 + x_0^2}$, y $\phi = \tan^{-1}(1/x_0)$.

la posibilidad de una representación en serie para una función $f(z)$ en torno a una singularidad.

Teorema 4.5 (Serie de Laurent). *Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo abierto $r < |z - z_0| < R$. Entonces, $f(z)$ puede ser expresada mediante la serie*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.22)$$

que incluye tanto potencias positivas como negativas de $z - z_0$, y converge para todo z dentro del anillo. Los coeficientes a_k están dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.23)$$

donde C es cualquier contorno simple cerrado, orientado positivamente, completamente contenido en el anillo, y que tiene a z_0 en su interior.

Note que, si $f(z)$ es analítica en todo el disco $|z - z_0| < R$, entonces los coeficientes (4.23) con $k = -1, -2, \dots$ se anulan (en virtud del Teorema integral de Cauchy), mientras que los coeficientes con $k = 0, 1, 2, \dots$ reproducen la serie de Taylor para $f(z)$.

Demostración. Sea Γ_0 un contorno simple, cerrado, orientado positivamente, completamente inmerso en el anillo $r < |z - z_0| < R$, y que contiene un punto z en su interior (ver figura 4.6). La fórmula integral de Cauchy [cf. ec. (3.36)] nos permite escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (4.24)$$

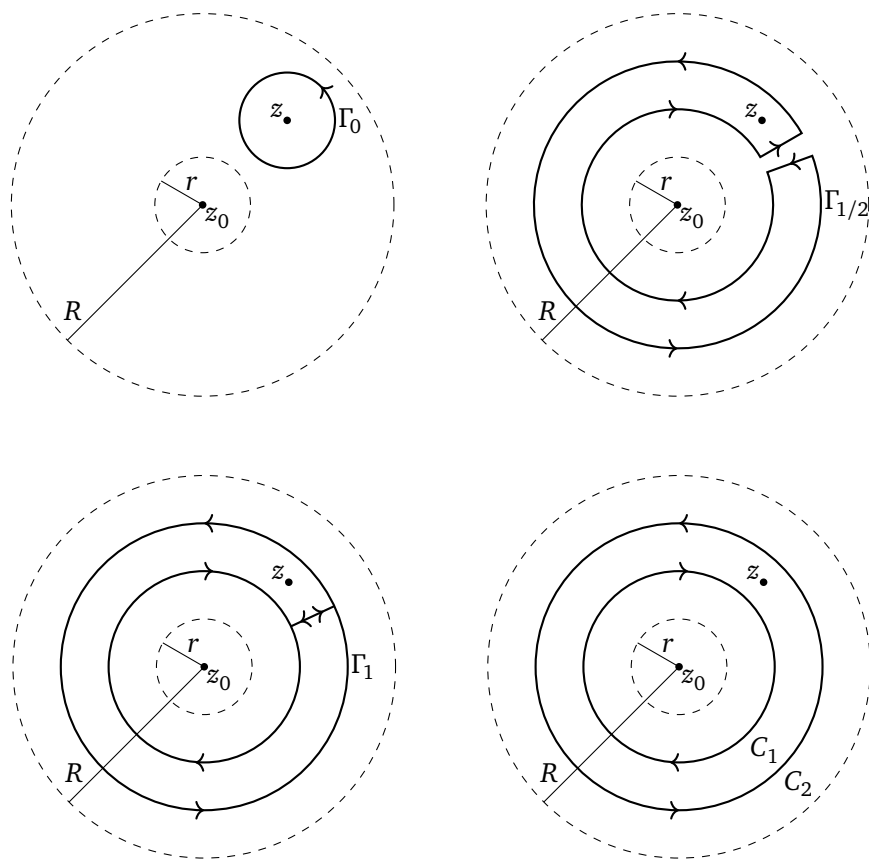


Figura 4.6: Deformación de contornos usada en la demostración del teorema 4.5.

Sin nunca salir del anillo, el contorno Γ_0 puede ser deformado en el contorno Γ_1 (en la figura 4.6 se muestra también un contorno intermedio, $\Gamma_{1/2}$), de manera que la integral sobre Γ_0 resulta ser equivalente a la suma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (4.25)$$

donde C_1 tiene orientación *negativa* y C_2 tiene orientación *positiva*.

Para la integral sobre C_2 procedemos de la misma manera que en la demostración del teorema 4.1; obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.26)$$

donde los coeficientes a_k están dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.27)$$

Dos diferencias importantes nos separan, sin embargo, del teorema 4.1. En primer lugar, la integral sobre C_2 no es igual a $f(z)$, pues es necesario considerar también la contribución hecha por la integral sobre C_1 . En segundo lugar, no podemos interpretar a_k como la k -ésima derivada de $f(z)$ en z_0 ; de hecho, si z_0 es una singularidad de la función f (como es probable, dado que f es analítica en un dominio anular), esa derivada podría no existir.

Para la integral sobre C_1 notamos que, como z está fuera de C_1 , tenemos que $|\xi - z_0| < |z - z_0|$ (ver figura 4.6). Luego, buscamos expandir $1/(\xi - z)$ en potencias de $(\xi - z_0)/(z - z_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \times \frac{1}{1 - (\xi - z_0)/(z - z_0)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^k. \end{aligned}$$

Usando este resultado en la integral sobre C_1 , hallamos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^k d\xi. \quad (4.28)$$

Absorbiendo el signo menos mediante una inversión en la orientación en la integral, y haciendo el reemplazo $k \rightarrow -(k+1)$, podemos escribir

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.29)$$

donde hemos definido (la orientación de C_1 es *positiva* en esta ecuación)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \quad (k = -1, -2, -3, \dots). \quad (4.30)$$

Note que los coeficientes a_k con $k \geq 0$ se calculan mediante integración sobre C_2 , mientras que los coeficientes con $k < 0$ se calculan mediante integración sobre C_1 . Sin embargo, como el integrando es en ambos casos analítico sobre todo el anillo, podemos deformar ambos contornos en un único contorno simple cerrado C , orientado positivamente, que esté completamente contenido en el anillo y que incluya el punto z_0 en su interior. Esto concluye la demostración. \square

El siguiente teorema asegura que toda serie convergente de la forma (4.22) corresponde a la serie de Laurent de alguna función $f(z)$.

Teorema 4.6. Sean $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}$ dos series cualesquiera con las siguientes propiedades:

- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ converge para $|z - z_0| < R$
- $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}$ converge para $|z - z_0| > r$
- $r < R$

Entonces existe una función $f(z)$, analítica en el anillo $r < |z - z_0| < R$, cuya serie de Laurent en este anillo está dada por

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (4.31)$$

Demostración. Omitida. \square

Una consecuencia del teorema 4.6 es que, sin importar el método que utilizemos para encontrarla, una vez que hemos hallado una serie con potencias positivas y negativas que representa una cierta función, entonces sabemos que ella debe ser la serie de Laurent para esa función. Para determinar la serie de Laurent de una función conocida, recurra al siguiente *mantra*.

Mantra 4.1. Use la serie geométrica.

Ejemplo 4.4. Encuentre la serie de Laurent para la función

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} \quad (4.32)$$

en la región $|z - 1| > 1$.

Para el denominador, escribimos

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{(z - 1) - 1} = \frac{1}{z - 1} \times \frac{1}{1 - 1/(z - 1)}. \quad (4.33)$$

Cuando $|1/(z - 1)| < 1$, esto es igual a

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z - 1)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - 1)^k}. \quad (4.34)$$

Para el numerador, en cambio, escribimos

$$z^2 - 2z + 3 = 2 + (z - 1)^2. \quad (4.35)$$

Juntándolo todo, hallamos

$$\begin{aligned} f(z) &= [2 + (z - 1)^2] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - 1)^k} \\ &= (z - 1) + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(z - 1)^k}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Encuentre la serie de Laurent para la función

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)} \quad (4.36)$$

en cada una de las siguientes regiones:

- I. $|z| < 1$
- II. $1 < |z| < 2$
- III. $2 < |z|$

Las regiones I, II, y III cubren todo el plano complejo (con la excepción de los círculos $|z| = 1$ y $|z| = 2$), como se muestra en la figura 4.7.

Usando fracciones parciales, podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \quad (4.37)$$

Cada uno de estos términos puede escribirse como una serie geométrica.

Cuando $|z/2| < 1$ (i.e., en las regiones I y II), podemos escribir

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}. \quad (4.38)$$

En cambio, cuando $|z/2| > 1$ (i.e., en la región III), la serie convergente para $1/(z-2)$ es

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}. \quad (4.39)$$

Para $1/(z-1)$, tenemos que, cuando $|z| < 1$ (i.e., en la región I)

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k. \quad (4.40)$$

En cambio, cuando $|z| > 1$ (i.e., en las regiones II y III), hallamos

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}. \quad (4.41)$$

Luego, en la región I podemos escribir [cf. ecs. (4.38) y (4.40)]

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \dots. \quad (4.42)$$

En cambio, en la región II encontramos [cf. ecs. (4.38) y (4.41)]

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \dots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \dots. \quad (4.43)$$

Finalmente, en la región III hallamos [cf. ecs. (4.39) y (4.41)]

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1} - 1}{z^k} = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \dots. \quad (4.44)$$

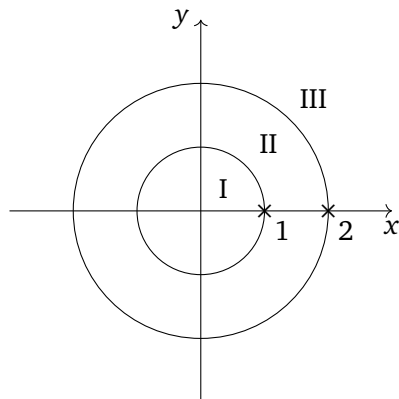


Figura 4.7: Regiones para el ejemplo 4.5.

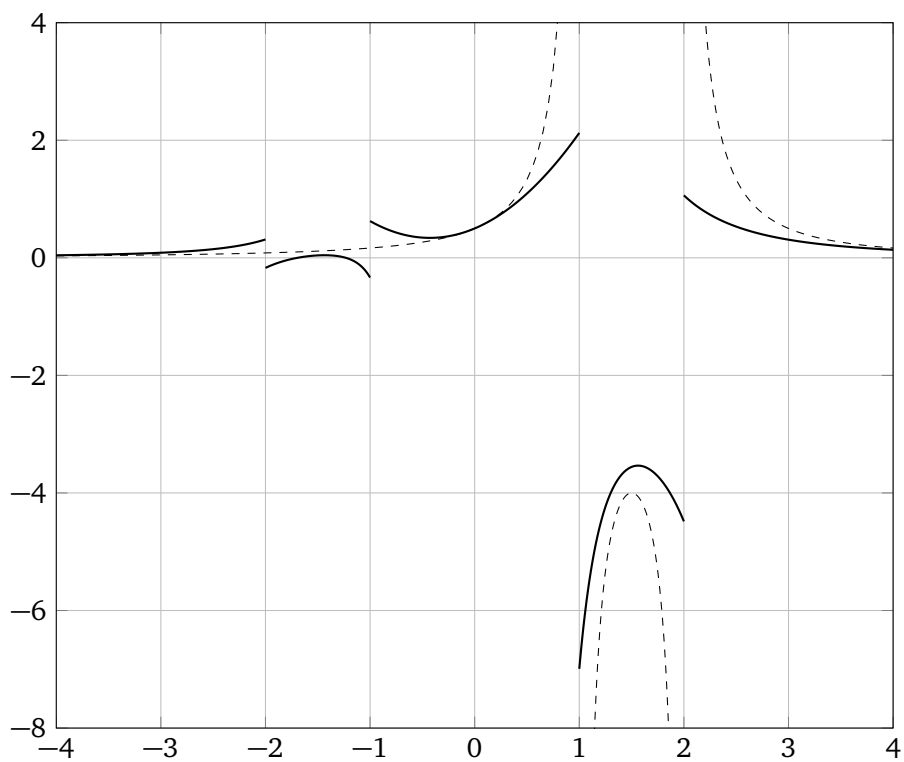


Figura 4.8: Gráfico de la función $f(x) = 1/(x-1)(x-2)$ (restringida a la recta real) y de los primeros términos de sus expansiones en serie de Laurent centradas en $x = 0$ [cf. ecs. (4.42)–(4.44)].

4.4. Ceros y singularidades

Usamos la expansión de Laurent para clasificar el comportamiento de una función $f(z)$ cerca de sus ceros (raíces) y sus singularidades.

Definición 4.2. Un punto z_0 es llamado un *cero de orden m* de una función $f(z)$ si $f(z)$ es analítica en z_0 y

$$\begin{aligned} f(z_0) &= 0, \\ f'(z_0) &= 0, \\ &\vdots \\ f^{(m-1)}(z_0) &= 0, \\ f^{(m)}(z_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Un cero de orden 1 es llamado un *cero simple*.

Ejemplo 4.6. La función $f(z) = \sin z$ tiene ceros simples en $z = m\pi$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Los ceros son simples porque $f'(m\pi) = \cos(m\pi) = (-1)^m \neq 0$.

Si z_0 es un cero de orden m para una función $f(z)$, entonces la serie de Taylor de $f(z)$ en torno de z_0 tiene la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + \dots \\ &= (z-z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 \dots], \end{aligned}$$

donde $a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$.

Teorema 4.7. Sea $f(z)$ analítica en z_0 . Entonces $f(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 si y sólo si $f(z)$ puede ser escrita en la forma

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z), \quad (4.45)$$

donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Corolario. Si $f(z)$ es analítica y tiene un cero en z_0 , entonces (i) $f(z)$ es idénticamente cero en una vecindad de z_0 o (ii) existe un disco perforado en z_0 en el cual $f(z)$ nunca se anula.

Definición 4.3. Una *singularidad aislada* de $f(z)$ es un punto z_0 tal que $f(z)$ es analítica en el disco perforado $0 < |z-z_0| < R$, para algún $R > 0$, pero $f(z)$ no es analítica en z_0 .

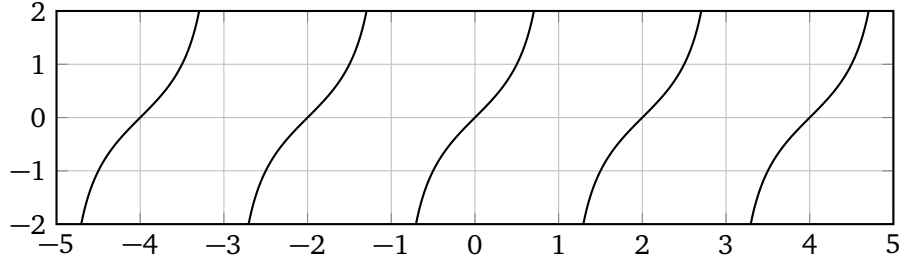


Figura 4.9: Gráfico de la función $f(z) = \tan(\pi z/2)$ (restringida a la recta real). Las singularidades son todas aisladas. En los puntos donde la función se anula, la recta tangente tiene pendiente positiva, por lo que los ceros son todos simples.

Ejemplo 4.7. Sea $f(z) = \tan(\pi z/2)$. Los puntos $z = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ son ceros simples de $f(z)$, en tanto que los puntos $z = \pm 1, \pm 3, \dots$ son singularidades aisladas (ver figura 4.9).

Definición 4.4. Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$, y sea

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (4.46)$$

la expansión de Laurent de $f(z)$ en el disco perforado $0 < |z - z_0| < R$, para algún $R > 0$. Entonces:

- Si $a_k = 0$ para $k = -1, -2, -3, \dots$, decimos que z_0 es una *singularidad removible* de $f(z)$.
- Si $a_{-m} \neq 0$ para algún entero positivo m , pero $a_k = 0$ para $k = -m - 1, -m - 2, -m - 3, \dots$, decimos que z_0 es un *polo de orden m* de $f(z)$.
- Si $a_k \neq 0$ para un número infinito de valores negativos de k , decimos que z_0 es una *singularidad esencial* de $f(z)$.

Ejemplo 4.8. Las funciones $\sin z/z$ y $(\cos z - 1)/z^2$ tienen singularidades removibles en $z = 0$. En efecto, para $|z| > 0$, tenemos:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots, \quad (4.47)$$

$$\frac{\cos z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) - 1 \right] = -\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \dots \quad (4.48)$$

Lema 4.8. Si $f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 , entonces:

- $f(z)$ es acotada en alguna vecindad perforada de z_0 (e.g., $0 < |z - z_0| < R$);
- el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe; y
- $f(z)$ puede ser redefinida en z_0 de manera que sea analítica en z_0 .

La serie de Laurent para una función con un polo de orden m en z_0 tiene la forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots, \quad (4.49)$$

la cual converge en alguna vecindad perforada de z_0 (e.g., $0 < |z - z_0| < R$).

Ejemplo 4.9. La función e^z/z^2 tiene un polo de orden 2 en $z = 0$:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots. \quad (4.50)$$

Ejemplo 4.10. La función $\sin z/z^5$ tiene un polo de orden 4 en $z = 0$:

$$\frac{\sin z}{z^5} = \frac{1}{z^5} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \cdots. \quad (4.51)$$

Definición 4.5. Un polo de orden 1 es llamado un *polo simple*.

Ejemplo 4.11. $z = 0$ es un polo simple de la función $\sin z/z^2$.

Lema 4.9. Si una función $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^l f(z)| = \infty \quad (4.52)$$

para todos los enteros $l < m$, mientras que $(z - z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 . En particular (cuando $l = 0$), $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando z tiende a un polo.

Lema 4.10. Una función $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si, en alguna vecindad perforada de z_0 ,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (4.53)$$

donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Ejemplo 4.12. Clasifique la singularidad en $z = 1$ de la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 - 1)^2}. \quad (4.54)$$

De acuerdo al lema 4.9, la función $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, porque

$$(z - 1)^l f(z) = \frac{(z - 1)^{l-2}}{(z + 1)^2} \sin z \quad (4.55)$$

tiene una singularidad removible cuando $l = 2$, mientras que su módulo tiende a infinito si $l = 1, 0, -1, \dots$. Además, $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow 1$.

Alternativamente, dado que $f(z)$ puede escribirse en la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - 1)^2}, \quad (4.56)$$

con

$$g(z) = \frac{\sin z}{(z + 1)^2}, \quad (4.57)$$

y $g(z)$ es analítica en $z = 1$, con $g(1) \neq 0$, el lema 4.10 garantiza que $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$.

Lema 4.11. Si $f(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 , entonces $1/f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 . Recíprocamente, si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 , entonces $1/f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 ; si definimos $1/f(z_0) = 0$, entonces (la nueva función) $1/f(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 .

Cuidado: no es cierto que $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando z se acerca a una singularidad esencial.

Teorema 4.12 (Teorema de Picard). Si una función analítica $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 , entonces, en cualquier vecindad perforada de z_0 , $f(z)$ asume todos los valores complejos posibles, con a lo más una excepción, infinitamente a menudo.

Demostración. Omitida. □

Ejemplo 4.13. La función $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Si bien $e^{1/z}$ es siempre distinto de cero, no es difícil ver que asume todos los demás valores complejos a medida que $z \rightarrow 0$. En efecto, podemos escribir $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, con

$$u = e^{\cos \theta / r} \cos \left(\frac{\sin \theta}{r} \right), \quad (4.58)$$

$$v = e^{\cos \theta / r} \sin \left(\frac{\sin \theta}{r} \right). \quad (4.59)$$

Si nos acercamos a $z = 0$ siguiendo una espiral, tanto u como v barren en forma continua todos los números reales, positivos y negativos.

Note también que

$$|f(z)| = e^{\cos \theta / r}. \quad (4.60)$$

En particular, esto significa que:

- Si $\cos \theta > 0$, entonces $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$
- Si $\cos \theta < 0$, entonces $|f(z)| \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$

Luego, no existe el límite $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)|$.

Ejemplo 4.14. Clasifique todos los ceros y todas las singularidades de la función

$$f(z) = \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right). \quad (4.61)$$

Los ceros de $f(z)$ ocurren cuando $1 - 1/z = n\pi$, es decir, en la secuencia infinita de puntos

$$z_n = \frac{1}{1 - n\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.62)$$

Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

La derivada de $f(z)$ es

$$f'(z) = \frac{1}{z^2} \cos\left(1 - \frac{1}{z}\right), \quad (4.63)$$

de donde

$$f'(z_n) = (-1)^n (1 - n\pi)^2 \neq 0. \quad (4.64)$$

Esto significa que todos los ceros son simples.

La única singularidad de $f(z)$ ocurre en $z = 0$. En una vecindad perforada de la forma $|z| < \epsilon$, con $\epsilon > 0$, siempre encontramos infinitos puntos de la secuencia z_n , donde $f(z_n) = 0$. Luego, no es cierto que $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \infty$, por lo que la singularidad en $z = 0$ no puede ser un polo. Tampoco es una singularidad removible, porque $f(z)$ no tiende a cero cuando $z \rightarrow 0$. De hecho, $f(z) = 1$ en todos los puntos de la secuencia

$$w_n = \frac{1}{1 - 2n\pi - \pi/2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.65)$$

que tiende sin embargo a cero: $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. Por eliminación, $z = 0$ debe ser una singularidad esencial.

El siguiente teorema da un resumen de la situación.

Teorema 4.13. *Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- I. z_0 es una singularidad removible si y sólo si
 - $|f(z)|$ es acotada cerca de z_0
 - existe el límite de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$
 - $f(z)$ puede ser redefinida en z_0 de manera que sea analítica en z_0
- II. z_0 es un polo si y sólo si
 - $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$
 - $f(z) = g(z) / (z - z_0)^m$ para algún entero positivo m y alguna función analítica $g(z)$, con $g(z_0) \neq 0$.
- III. z_0 es una singularidad esencial si y sólo si
 - no existe el límite de $|f(z)|$ cuando $z \rightarrow z_0$ (i.e., no es acotada, no tiende a infinito)
 - $f(z)$ asume todos los valores complejos, con a lo más una excepción, en cualquier vecindad de z_0

4.5. El punto en el infinito

La recta real tiene dos infinitos, uno positivo y otro negativo. ¿Cuántos infinitos tiene el plano complejo?

Usando una proyección estereográfica, cada punto del plano complejo puede ser mapeado a un punto sobre la *esfera de Riemann* (ver figura 4.10):

- El origen ($z = 0$) es mapeado al polo sur
- El interior del círculo unitario es mapeado al hemisferio sur
- El círculo unitario es mapeado al ecuador
- El exterior del círculo unitario es mapeado al hemisferio norte

Sin embargo, *ningún punto sobre el plano complejo es mapeado al polo norte de la esfera de Riemann.*

La esfera de Riemann, incluyendo el polo norte, es un modelo para el “plano complejo extendido”, i.e., el plano complejo más el punto en el infinito, ∞ .

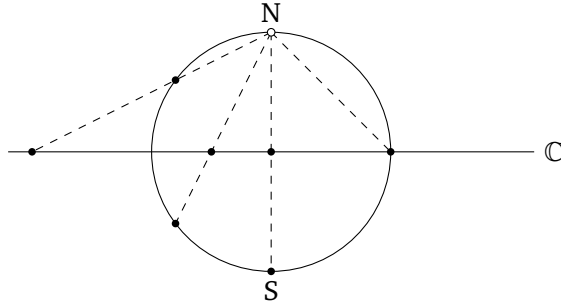


Figura 4.10: La esfera de Riemann.

Una vecindad de ∞ es cualquier conjunto de la forma $|z| > M$, con $M > 0$. Escribimos $f(z_0) = \infty$ si, para cualquier $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z)| > M$. Escribimos $f(\infty) = w_0$ cuando $f(z) \rightarrow w_0$ si $z \rightarrow \infty$.

Ejemplo 4.15. Para la función

$$f(z) = \frac{2z+1}{z-1}, \quad (4.66)$$

tenemos $f(1) = \infty$ y $f(\infty) = 2$.

Podemos incluso hablar de funciones que son analíticas en $z = \infty$, en el siguiente sentido:

- $f(z)$ es analítica en ∞ si $f(1/w)$ es analítica (o tiene una singularidad removible) en $w = 0$.
- $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = \infty$ si $f(1/w)$ tiene un polo de orden m en $w = 0$.
- $f(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = \infty$ si $f(1/w)$ tiene una singularidad esencial en $w = 0$.

Ejemplo 4.16. La función $f(z) = z^2 + 2$ tiene un polo en ∞ . Como $f(1/w) = 1/w^2 + 2$, el polo es de orden 2.

Ejemplo 4.17. La función

$$f(z) = \frac{iz+1}{z-1} \quad (4.67)$$

es analítica en $z = \infty$, porque

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{i/w+1}{1/w-1} \quad (4.68)$$

tiene una singularidad removible en $w = 0$. En efecto, como $\lim_{w \rightarrow 0} f(1/w) = i$, tenemos $f(\infty) = i$.

Ejemplo 4.18. La función $f(z) = \sin z$ tiene una singularidad esencial en $z = \infty$, ya que $f(1/w) = \sin(1/w)$ tiene una singularidad esencial en $w = 0$.

Ejemplo 4.19. Sea $f(z)$ analítica en todo el plano complejo extendido (i.e., en toda la esfera de Riemann). Como $f(z)$ es analítica en ∞ , debe ser acotada para $|z| > M$. Por continuidad, $f(z)$ también debe ser acotada para $|z| \leq M$. Luego, $f(z)$ es una función entera y acotada; por el teorema 3.11, $f(z)$ debe ser constante. Esto quiere decir que las únicas funciones analíticas sobre toda la esfera de Riemann son las funciones constantes.

Ejemplo 4.20. Clasifique todas las funciones que son analíticas en todas partes excepto en un punto z_0 , donde tienen un polo.

Si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 , con $z_0 \neq \infty$, podemos escribir

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.69)$$

la cual converge para todo $z \neq z_0$. La serie de potencias con $m \geq 0$, $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$, define una función entera y acotada, por lo que debe ser igual a una constante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0. \quad (4.70)$$

Luego, la forma más general para $f(z)$ es

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0. \quad (4.71)$$

Si el polo ocurre en $z_0 = \infty$, entonces $f(1/w)$ tiene un polo en $w = 0$. Por lo tanto, $f(1/w)$ tiene la forma

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_{-m}}{w^m} + \frac{a_{-m+1}}{w^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{w} + a_0. \quad (4.72)$$

Esto significa que $f(z)$ está dada por

$$f(z) = a_0 + a_{-1}z + \dots + a_{-m}z^m, \quad (4.73)$$

es decir, un polinomio.

Capítulo 5

El método de los residuos

5.1. El teorema del residuo

Queremos evaluar $I = \oint_{\Gamma} f(z) dz$, donde Γ es un contorno simple, cerrado, orientado positivamente, y $f(z)$ es una función analítica sobre y dentro de Γ , *excepto* por una única singularidad aislada z_0 , que yace en el interior de Γ . Con estas condiciones, $f(z)$ puede ser expresada como una serie de Laurent centrada en z_0 ,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (5.1)$$

Si C es un círculo centrado en z_0 , completamente contenido dentro del interior de Γ (ver figura 5.1), entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} I &= \oint_C f(z) dz \\ &= \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_C (z - z_0)^k dz \\ &= 2\pi i a_{-1}, \end{aligned}$$

donde hemos usado el resultado del ejemplo 3.2. La importancia crucial del coeficiente a_{-1} en el cálculo de I motiva la siguiente definición.

Definición 5.1. Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 , entonces el coeficiente a_{-1} de $1/(z - z_0)$ en la expansión de Laurent para $f(z)$ en torno a

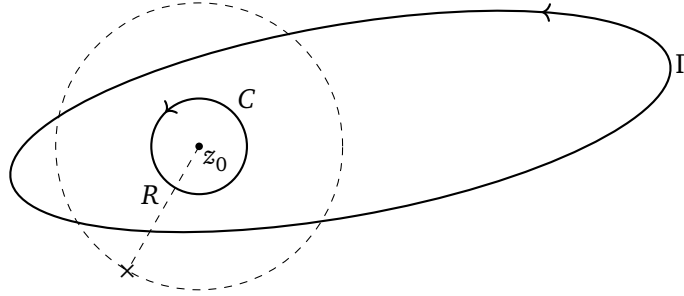


Figura 5.1: La expansión de Laurent para $f(z)$ en torno a z_0 converge en el disco perforado $0 < |z - z_0| < R$, donde R es la distancia a la singularidad más cercana, indicada con \times , que se encuentra en el exterior de Γ . Esto quiere decir que, en particular, converge sobre un círculo C centrado en z_0 y completamente contenido dentro de Γ .

z_0 , que converge en el disco perforado $0 < |z - z_0| < R$, para algún $R > 0$, es llamado el *residuo* de $f(z)$ en z_0 , y es denotado como $a_{-1} = \text{Res}(f; z_0)$ o, si no es imprescindible especificar la función, simplemente como $a_{-1} = \text{Res}(z_0)$.

Ejemplo 5.1. Encuentre el residuo en $z = 0$ de la función $f(z) = ze^{3/z}$ y calcule $I = \oint_C f(z) dz$, donde C es el círculo de radio 4 centrado en el origen.

Usando la expansión $e^w = \sum_{k=0}^{\infty} w^k/k!$, encontramos

$$\begin{aligned} ze^{3/z} &= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{z}\right)^k \\ &= z \left[1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{2!} \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \cdots \right] \\ &= z + 3 + \frac{9}{2z} + \frac{27}{6z^2} + \cdots, \end{aligned}$$

de donde hallamos $\text{Res}(0) = 9/2$. Luego,

$$\oint_{|z|=4} ze^{3/z} dz = \frac{9}{2} 2\pi i = 9\pi i. \quad (5.2)$$

Note que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z)$.

Dada la importancia del residuo, resulta conveniente tener formas de calcularlo que no involucren determinar toda la serie de Laurent para la función.

Si $f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 , entonces $\text{Res}(f; z_0) = 0$.

Si $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , entonces podemos escribir

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots. \quad (5.3)$$

Para aislar a_{-1} , multiplicamos por $(z - z_0)$ y tomamos el límite cuando $z \rightarrow z_0$:

$$\begin{aligned} (z - z_0)f(z) &= a_{-1} + (z - z_0)[a_1 + a_2(z - z_0) + \cdots] \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) &= a_{-1}. \end{aligned}$$

Luego, si z_0 es un polo simple de $f(z)$, entonces

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (5.4)$$

Ejemplo 5.2. La función

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)} \quad (5.5)$$

tiene polos simples en $z = 0$ y $z = -1$. Usando la ec. (5.4), podemos determinar los residuos:

$$\text{Res}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z+1} = 1, \quad (5.6)$$

$$\text{Res}(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{z} = -\frac{1}{e}. \quad (5.7)$$

Ejemplo 5.3. Considere la función $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son analíticas en z_0 , $Q(z)$ tiene un cero simple en z_0 , y $P(z_0) \neq 0$. En estas circunstancias, $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , por lo que podemos calcular su residuo recurriendo a la ec. (5.4):

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (5.8)$$

Recordando que $Q(z_0) = 0$, podemos escribir

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) \left[\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0} \right]^{-1} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (5.9)$$

Ejemplo 5.4. Calcule los residuos en todas las singularidades de la función

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (5.10)$$

Las singularidades de $f(z)$ corresponden a los ceros de $\sin z$, $z = n\pi$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Todos estos ceros son simples. Como además $\cos(n\pi) \neq 0$, podemos aplicar el resultado del ejemplo 5.3:

$$\text{Res}(\cot z; n\pi) = \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=n\pi} = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1. \quad (5.11)$$

¿Cómo obtenemos una fórmula para $\text{Res}(f; z_0)$ cuando z_0 es un polo de orden m de $f(z)$? En este caso, la serie de Laurent para $f(z)$ en torno a z_0 toma la forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad (5.12)$$

Multiplicando por $(z-z_0)^m$, hallamos

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots \quad (5.13)$$

Para aislar a_{-1} , derivamos $m-1$ veces:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-z_0) + \cdots. \quad (5.14)$$

Tomando el límite cuando $z \rightarrow z_0$, obtenemos

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (5.15)$$

La ec. (5.4) puede considerarse como un caso particular de la ec. (5.15) cuando $m=1$.

Ejemplo 5.5. Determine los residuos en todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}. \quad (5.16)$$

Esta función tiene dos singularidades; un polo de orden 2 en $z=0$, y un polo de orden 3 en $z=\pi$. Calculamos los residuos respectivos usando la ec. (5.15). En $z=0$:

$$\begin{aligned} \text{Res}(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{\cos z}{(z-\pi)^3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin z}{(z-\pi)^3} - \frac{3 \cos z}{(z-\pi)^4} \right] \\ &= -\frac{3}{\pi^4}. \end{aligned}$$

En $z = \pi$:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(\pi) &= \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\cos z}{z^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d}{dz} \left(-\frac{\sin z}{z^2} - \frac{2 \cos z}{z^3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \pi} \left(-\frac{\cos z}{z^2} + \frac{2 \sin z}{z^3} + \frac{2 \sin z}{z^3} + \frac{6 \cos z}{z^4} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^4} \right).
 \end{aligned}$$

¿Qué pasa si dentro de un contorno Γ hay *varias* singularidades de la función $f(z)$? En este caso, podemos deformar Γ de manera que la integral $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ se reduzca a una suma de integrales sobre círculos C_k que rodean cada uno a una sola singularidad de $f(z)$ (ver figura 5.2). Encontramos

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \text{Res}(f; z_k). \quad (5.17)$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5.1 (Teorema del residuo de Cauchy). *Sea $f(z)$ una función analítica sobre y dentro del contorno simple cerrado, orientado positivamente, Γ , excepto por las singularidades aisladas z_1, z_2, \dots, z_n , que yacen todas en el interior de Γ . Entonces*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k). \quad (5.18)$$

Ejemplo 5.6. Calcular

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz. \quad (5.19)$$

La función a integrar tiene tres singularidades, todas polos simples, en $z = 0$, $z = 1$ y $z = 3$. De estas tres, sólo las dos primeras están en el interior del contorno de integración (ver figura 5.3). Luego, podemos calcular

$$I = 2\pi i [\text{Res}(0) + \text{Res}(1)], \quad (5.20)$$

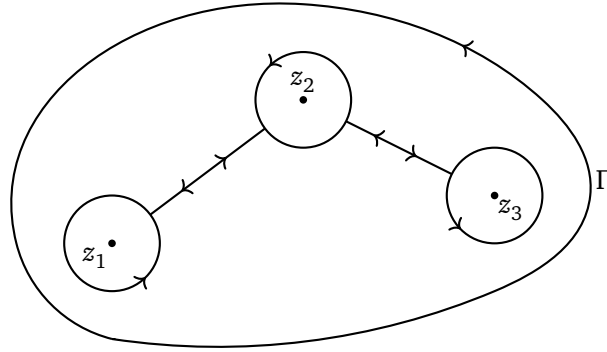


Figura 5.2: Deformación de contornos para la demostración del teorema 5.1. Se ilustra el caso $n = 3$.

donde los residuos están dados por [cf. ec. (5.4)]

$$\text{Res}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2z}{(z - 1)(z - 3)} = \frac{1}{3}, \quad (5.21)$$

$$\text{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - 2z}{z(z - 3)} = \frac{1}{2}. \quad (5.22)$$

Sumando, hallamos $I = 5\pi i/3$.

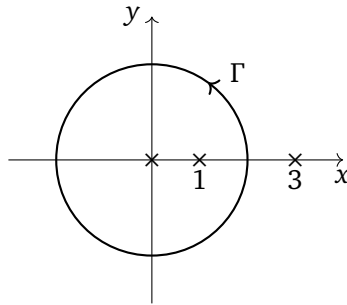


Figura 5.3: Contorno de integración y singularidades para el ejemplo 5.6.

5.2. Integrales trigonométricas

Vamos a usar el teorema del residuo para evaluar integrales reales de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (5.23)$$

donde U es una función racional (con coeficientes reales) de $\cos \theta$ y $\sin \theta$. La idea es transformar I en la integral de una función de variable compleja sobre el círculo unitario C , y calcular esta integral usando el teorema 5.1.

Parametrizando C en la forma $z = e^{i\theta}$, podemos escribir

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad (5.24)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (5.25)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad (5.26)$$

de manera que I queda dada por

$$I = \oint_C U \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz}. \quad (5.27)$$

Como U es una función racional, el integrando en (5.27) tendrá a lo más singularidades removibles y polos, por lo que puede ser evaluada usando el teorema del residuo.

Ejemplo 5.7. Evaluar

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta. \quad (5.28)$$

Haciendo las sustituciones (5.24)–(5.26), podemos escribir

$$I = \oint_C \frac{\left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^2}{5 + 2 \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{8i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 \left(z + \frac{1}{2} \right) (z + 2)} dz. \quad (5.29)$$

El integrando tiene singularidades en $z = 0$ (polo de orden 2), $z = -1/2$, y $z = -2$ (ambas polos simples). De estas tres, sólo $z = 0$ y $z = -1/2$ se encuentran en el interior del círculo unitario (ver figura 5.4). Luego, podemos calcular la integral en la forma

$$I = 2\pi i \left[\text{Res}(0) + \text{Res}\left(-\frac{1}{2}\right) \right], \quad (5.30)$$

donde los residuos están dados por

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(0) &= -\frac{1}{8i} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z^2 - 1)^2}{(z + \frac{1}{2})(z + 2)} \right] \\
 &= -\frac{1}{8i} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4z(z^2 - 1)(z + \frac{1}{2})(z + 2) - (z^2 - 1)^2(z + \frac{1}{2} + z + 2)}{(z + \frac{1}{2})^2(z + 2)^2} \\
 &= \frac{5}{16i}, \\
 \text{Res}\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{8i} \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z + 2)} = -\frac{3}{16i}.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Sumando, hallamos

$$I = 2\pi i \left(\frac{5}{16i} - \frac{3}{16i} \right) = \frac{\pi}{4}. \tag{5.32}$$

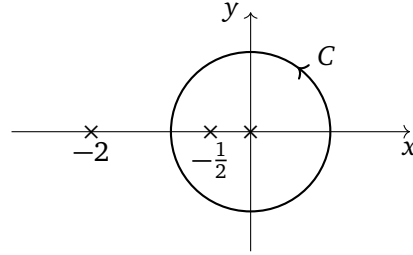


Figura 5.4: Contorno de integración y singularidades para el ejemplo 5.7.

5.3. Integrales impropias

¿Cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$? Para responder a esta pregunta, consideremos las siguientes definiciones.

Definición 5.2. Para una variable real x , definimos

- $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{\rho} f(x) dx$
- $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^0 f(x) dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$

cuando los límites respectivos existen.

Cuando está definida, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ puede calcularse a través del límite $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(x) dx$ (porque, cuando todos los límites involucrados existen, el límite de la suma es la suma de los límites). Sin embargo, puede ocurrir que este límite exista incluso cuando la integral sobre $(-\infty, \infty)$ no está definida. Esta situación motiva la siguiente definición.

Definición 5.3 (Valor principal de Cauchy). Llamamos *valor principal de Cauchy* al límite

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(x) dx. \quad (5.33)$$

Ejemplo 5.8. Dado que

$$\int_{-\infty}^0 x dx = -\infty, \quad (5.34)$$

$$\int_0^{\infty} x dx = \infty, \quad (5.35)$$

la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ no está definida. Sin embargo, como $\int_{-\rho}^{\rho} x dx = 0$ para cualquier $\rho \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} x dx = 0. \quad (5.36)$$

El siguiente ejemplo describe una técnica para evaluar valores principales de integrales impropias usando el método de los residuos.

Ejemplo 5.9. Evaluar

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 4}. \quad (5.37)$$

Llamando

$$I_{\rho} = \int_{\gamma_{\rho}} \frac{dz}{z^4 + 4}, \quad (5.38)$$

donde γ_{ρ} es el segmento dirigido de la recta real que va desde $-\rho$ hasta $+\rho$, podemos escribir $I = \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_{\rho}$. Como γ_{ρ} no es un contorno cerrado, no es posible aplicar directamente el teorema del residuo. Sin embargo, podemos construir un contorno simple, cerrado, orientado positivamente $\Gamma_{\rho} = \gamma_{\rho} + C_{\rho}^+$, de manera tal que la integral sobre C_{ρ}^+ resulte fácil de calcular (o, por lo menos,

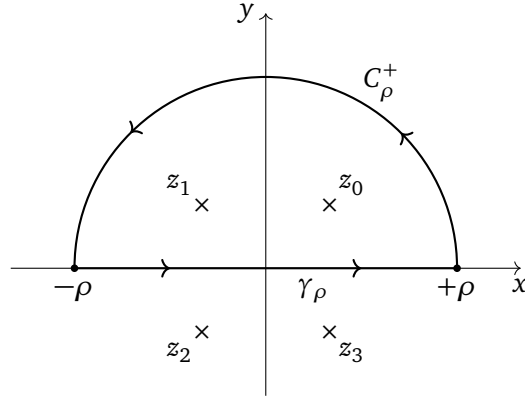


Figura 5.5: Para calcular V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, cerramos el contorno de integración usando la semicircunferencia C_{ρ}^{+} en el semiplano superior. Las \times marcan las singularidades de $f(z)$ en el plano complejo.

su límite cuando $\rho \rightarrow \infty$). Para cerrar γ_{ρ} , escogemos C_{ρ}^{+} como la semicircunferencia de radio ρ , centrada en el origen, que se muestra en la figura 5.5.

Sobre C_{ρ}^{+} , $|z| = \rho$. Usando la identidad triangular en la forma $|u - v| \geq ||u| - |v||$ [cf. ec. (1.16)], con $u = z^4$, $v = -4$, encontramos $|z^4 + 4| \geq \rho^4 - 4$ (asumiendo $\rho^4 > 4$). Esto quiere decir que podemos acotar la integral sobre C_{ρ}^{+} en la forma

$$\left| \int_{C_{\rho}^{+}} \frac{dz}{z^4 + 4} \right| \leq \frac{\pi \rho}{\rho^4 - 4}. \quad (5.39)$$

Como esta cota tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_{\rho}^{+}} \frac{dz}{z^4 + 4} = 0. \quad (5.40)$$

Por lo tanto, la integral original puede calcularse directamente como

$$I = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{\rho}} \frac{dz}{z^4 + 4}. \quad (5.41)$$

El integrando tiene singularidades cuando $z^4 + 4 = 0$, i.e., en los puntos (ver

figura 5.5)

$$z_0 = 1 + i, \quad (5.42)$$

$$z_1 = -1 + i, \quad (5.43)$$

$$z_2 = -1 - i, \quad (5.44)$$

$$z_3 = 1 - i. \quad (5.45)$$

De estos cuatro, sólo z_0 y z_1 están en el interior de Γ_ρ , por lo que podemos escribir

$$\oint_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z^4 + 4} = 2\pi i [\text{Res}(z_0) + \text{Res}(z_1)]. \quad (5.46)$$

Como todas las singularidades son polos simples, los residuos son fáciles de calcular:

$$\text{Res}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z^4 + 4} \quad (5.47)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} \quad (5.48)$$

$$= \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} \quad (5.49)$$

$$= \frac{1}{8i(1 + i)}, \quad (5.50)$$

$$\text{Res}(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{z^4 + 4} \quad (5.51)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{(z - z_0)(z - z_2)(z - z_3)} \quad (5.52)$$

$$= \frac{1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \quad (5.53)$$

$$= \frac{1}{8i(1 - i)}. \quad (5.54)$$

Sumando, hallamos

$$\oint_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z^4 + 4} = 2\pi i \left[\frac{1}{8i(1 + i)} + \frac{1}{8i(1 - i)} \right] = \frac{\pi}{4}. \quad (5.55)$$

Como este resultado es independiente de ρ (para ρ suficientemente grande, de modo que Γ_ρ encierre ambas singularidades), obtenemos $I = \pi/4$.

El éxito del método descrito en el ejemplo 5.9 depende de las siguientes condiciones:

I. $f(z)$ es analítica sobre el eje real y en el semiplano superior, excepto por un número finito de singularidades cuando $\Im(z) > 0$.

II. $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho^+} f(z) dz = 0$.

Para garantizar el cumplimiento de la condición II, es suficiente que $f(z)$ tenga la forma $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son dos polinomios, con grado de $Q \geq 2 + \text{grado de } P$. Cuando éste es el caso, tenemos que, para $|z|$ suficientemente grande,

$$|f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{K}{|z|^2}, \quad (5.56)$$

donde $K > 0$ es una constante. Esto nos permite asegurar que

$$\left| \int_{C_\rho^+} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi K}{\rho}. \quad (5.57)$$

Como esta cota tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho^+} f(z) dz = 0. \quad (5.58)$$

El siguiente ejemplo muestra un caso donde la condición I falla debido a que la función a integrar tiene infinitas singularidades en el semiplano superior.

Ejemplo 5.10. Calcular

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx, \quad (5.59)$$

donde $0 < a < 1$.

La condición $0 < a < 1$ es necesaria para garantizar la convergencia de la integral. Cuando $x \rightarrow \infty$, el integrando se comporta como $e^{(a-1)x}$, el cual tiende a cero gracias a que $a - 1 < 0$. Cuando $x \rightarrow -\infty$, en cambio, el integrando se comporta como e^{ax} , el cual tiende a cero gracias a que $a > 0$.

La función

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z} \quad (5.60)$$

tiene singularidades cuando $1 + e^z = 0$, i.e., para $z = (2n + 1)\pi i$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si cerramos el contorno usando una semicircunferencia en el semiplano superior, como en el ejemplo 5.9, incluimos infinitas singularidades

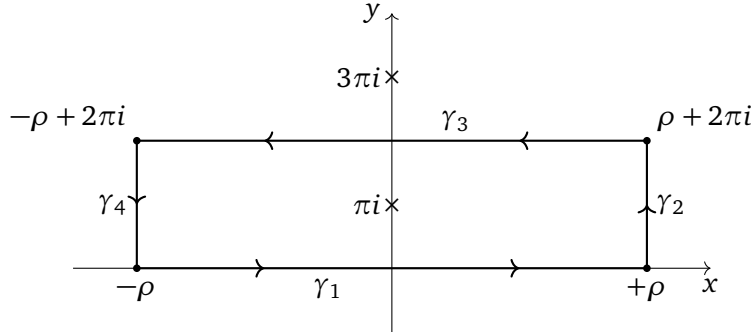


Figura 5.6: Contorno de integración para el ejemplo 5.10.

de $f(z)$ dentro del contorno, lo que significa que tenemos que calcular infinitos residuos. Para evitar esta situación, usamos el contorno rectangular que se muestra en la figura 5.6.

Llamamos $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ a cada uno de los lados del rectángulo, $\Gamma_\rho = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$. Las integrales respectivas son $I_\rho = I_1 + \dots + I_4$. De éstas, la que nos interesa es I_1 , ya que $I = \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_1$. Nuestro trabajo ahora es determinar qué ocurre con las otras tres.

Podemos parametrizar γ_2 en la forma $z = \rho + it$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando esta parametrización en I_2 , podemos acotar la integral en la forma*

$$|I_2| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(\rho+it)}}{1 + e^{\rho+it}} i dt \right| \leq \frac{2\pi e^{a\rho}}{e^\rho - 1} = \frac{2\pi e^{(a-1)\rho}}{1 - e^{-\rho}}. \quad (5.61)$$

Como esta cota tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$ (gracias a que $a < 1$), tenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_2 = 0. \quad (5.62)$$

Algo similar ocurre en γ_4 . Poniendo $z = -\rho + i(2\pi - t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos

$$|I_4| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a[-\rho+i(2\pi-t)]}}{1 + e^{-\rho+i(2\pi-t)}} (-i) dt \right| \leq \frac{2\pi e^{-a\rho}}{1 - e^{-\rho}}. \quad (5.63)$$

Como esta cota también tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$ (gracias a que $a > 0$), encontramos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_4 = 0. \quad (5.64)$$

* Aquí ocupamos la desigualdad triangular, ec. (1.16).

Parametrizando γ_3 en la forma $z = -t + 2\pi i$, con $-\rho \leq t \leq \rho$, podemos escribir

$$I_3 = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{a(-t+2\pi i)}}{1 + e^{-t+2\pi i}} (-dt) = -e^{2\pi ai} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{-at}}{1 + e^{-t}} dt. \quad (5.65)$$

Sustituyendo $u = -t$, hallamos

$$I_3 = -e^{2\pi ai} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{au}}{1 + e^u} du = -e^{2\pi ai} I_1. \quad (5.66)$$

Por lo tanto, en el límite cuando $\rho \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_\rho = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = (1 - e^{2\pi ai}) \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_1, \quad (5.67)$$

de donde

$$I = \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_1 = \frac{1}{1 - e^{2\pi ai}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_\rho. \quad (5.68)$$

Para calcular I_ρ , recurrimos al método de los residuos. La única singularidad de $f(z)$ que está en el interior de Γ_ρ es $z = \pi i$. Luego,

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ai}} \text{Res}(f; \pi i). \quad (5.69)$$

(Como este resultado es independiente de ρ , resulta automático tomar el límite cuando $\rho \rightarrow \infty$). Para calcular el residuo, notamos que $f(z)$ tiene la forma P/Q , donde $P(z) = e^{az}$ y $Q(z) = 1 + e^z$ son funciones analíticas en πi , con $P(\pi i) = e^{\pi ai} \neq 0$. Además, $Q(z)$ tiene un cero simple en πi [ya que $Q'(\pi i) = e^{\pi i} = -1 \neq 0$]. Esto significa que πi es un polo simple de $f(z)$, y podemos calcular el residuo en la forma (ver ejemplo 5.3)

$$\text{Res}(f; \pi i) = \frac{P(\pi i)}{Q'(\pi i)} = -e^{\pi ai}. \quad (5.70)$$

Finalmente,

$$I = -\frac{2\pi i e^{\pi ai}}{1 - e^{2\pi ai}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \quad (5.71)$$

La figura 5.7 muestra este resultado como función de a .

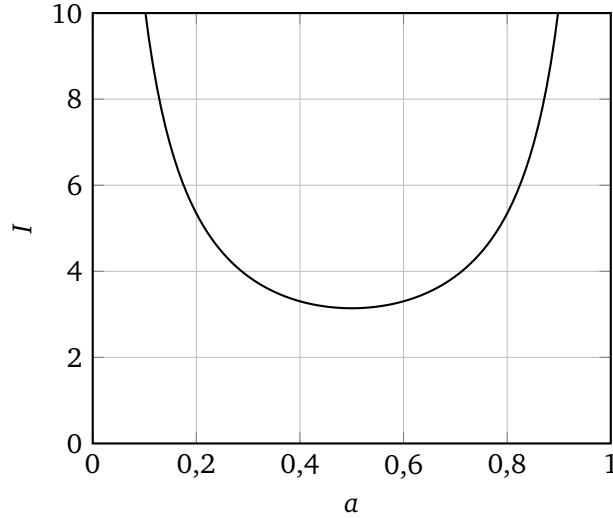


Figura 5.7: La integral $I = \pi / \sin(\pi a)$ diverge para $a = 0$ y para $a = 1$.

5.4. Integrales impropias que involucran funciones trigonométricas

En esta sección desarrollamos una técnica para evaluar integrales de la forma

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx, \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx, \quad (5.72)$$

donde m es real y P/Q es una función racional, continua sobre el eje real. Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 5.11. Calcular

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + 4} dx. \quad (5.73)$$

Al igual que en el ejemplo 5.9, buscamos cerrar el contorno y aplicar el teorema del residuo. Sin embargo, la función $\cos z$ no está acotada sobre la semicircunferencia C_ρ^+ cuando $\rho \rightarrow \infty$, por lo que no podemos simplemente reemplazar $\cos x$ con $\cos z$ e integrar. En vez de eso, consideramos

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2 + 4}, \quad (5.74)$$

de manera que I queda dada por la expresión

$$I = \Re \left[\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(z) dz \right]. \quad (5.75)$$

La ventaja de utilizar e^{i3z} en vez de $\cos z$ radica en que la primera está *acotada* en el semiplano superior. En efecto, cuando $y \geq 0$, tenemos que

$$|e^{i3z}| = |e^{i3x} e^{-3y}| = e^{-3y} \leq 1. \quad (5.76)$$

Luego, para $\rho \geq 2$, podemos acotar

$$\left| \int_{C_\rho^+} \frac{e^{i3z}}{z^2 + 4} dz \right| \leq \frac{\pi \rho}{\rho^2 - 4}. \quad (5.77)$$

Como esta cota tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho^+} f(z) dz = 0. \quad (5.78)$$

Con estas consideraciones, podemos escribir $I = \Re \left(\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_\rho \right)$, donde

$$I_\rho = \oint_{\Gamma_\rho} f(z) dz. \quad (5.79)$$

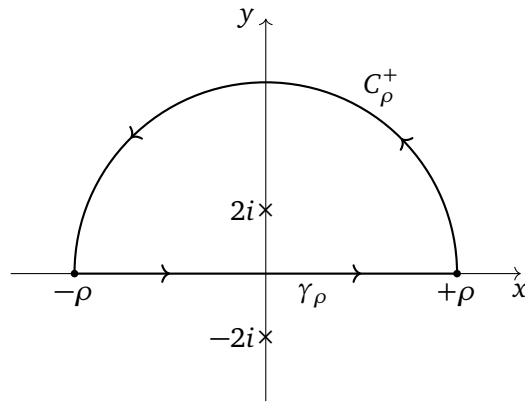


Figura 5.8: Contorno de integración y polos para el ejemplo 5.11.

La única singularidad de $f(z)$ en el interior de Γ_ρ es un polo simple en $z = 2i$. El residuo correspondiente es

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{i3z}}{z + 2i} \\ &= \frac{e^{-6}}{4i}.\end{aligned}$$

Del teorema del residuo, hallamos $I_\rho = 2\pi i e^{-6}/4i$; luego,

$$I = \frac{\pi}{2e^6}. \quad (5.80)$$

La técnica del ejemplo 5.11 puede usarse para evaluar cualquier integral de la forma

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (m > 0), \quad (5.81)$$

donde P y Q son polinomios, Q no tiene ceros en el eje real, y el grado de Q excede el grado de P en por lo menos 2. Con estas condiciones, la integral de $e^{imz} P(z)/Q(z)$ sobre C_ρ^+ está acotada por $\pi K/\rho$, la cual tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$. Si $m < 0$, entonces es necesario usar C_ρ^- y cerrar el contorno en el semiplano inferior.

Siendo mucho más cuidadosos en acotar la función, es posible demostrar que basta con que el grado de Q sea superior en 1 al grado de P para que la integral sobre C_ρ^+ tienda a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$. Esta afirmación es el contenido del siguiente lema, que no demostramos.

Lema 5.2 (Lema de Jordan). *Si $m > 0$ y P/Q es el cociente entre dos polinomios tales que*

$$\text{grado de } Q \geq 1 + \text{grado de } P, \quad (5.82)$$

entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho^+} e^{imz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0, \quad (5.83)$$

donde C_ρ^+ es la semicircunferencia superior de radio ρ .

Ejemplo 5.12. Calcular

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx. \quad (5.84)$$

Del lema 5.2, con $m = 1$, $P(z) = z$, y $Q(z) = 1 + z^2$, concluimos que

$$I = \Im \left(\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_\rho \right), \quad (5.85)$$

$$I_\rho = \oint_{\Gamma_\rho} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} dz, \quad (5.86)$$

donde $\Gamma_\rho = [-\rho, \rho] + C_\rho^+$, ya que la integral sobre C_ρ^+ tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$. Como la única singularidad de $e^{imz}P(z)/Q(z)$ dentro de Γ_ρ es el polo simple en $z = i$, podemos escribir $I_\rho = 2\pi i \operatorname{Res}(i)$, donde

$$\operatorname{Res}(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{1}{2e}. \quad (5.87)$$

Luego, $I_\rho = i\pi/e$, y hallamos

$$I = \frac{\pi}{e}. \quad (5.88)$$

5.5. Integrales impropias con singularidades en el eje real

En las secciones anteriores hemos asumido siempre que la función a integrar es continua en todo el eje real. En esta sección consideramos el caso en que $|f(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Definición 5.4. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, excepto por un punto c , con $a < c < b$. Las integrales impropias de $f(x)$ en los intervalos $[a, c]$, $[c, b]$, y $[a, b]$ se definen de la siguiente manera (cuando los respectivos límites existen):

- $\int_a^c f(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_a^{c-r} f(x) dx$
- $\int_c^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{c+r}^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

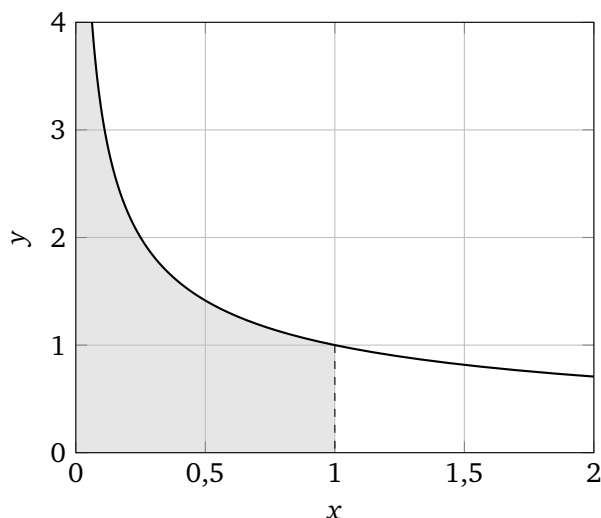


Figura 5.9: El área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es finita, a pesar de la asíntota vertical en $x = 0$.

Ejemplo 5.13. Calcule

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (5.89)$$

De acuerdo a la definición 5.4, tenemos (ver figura 5.9)

$$I = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_r^1 = 2 \lim_{r \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{r}) = 2. \quad (5.90)$$

Ejemplo 5.14. Calcule

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{x-2}. \quad (5.91)$$

En la figura 5.10 se muestra la gráfica de $y = 1/(x-2)$, destacando el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 4$. Las áreas a cada lado de la asíntota vertical en $x = 2$ son divergentes:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_1^{2-r} \frac{dx}{x-2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \ln r \rightarrow -\infty \quad (5.92)$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{2+r}^4 \frac{dx}{x-2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \ln \frac{2}{r} \rightarrow +\infty. \quad (5.93)$$

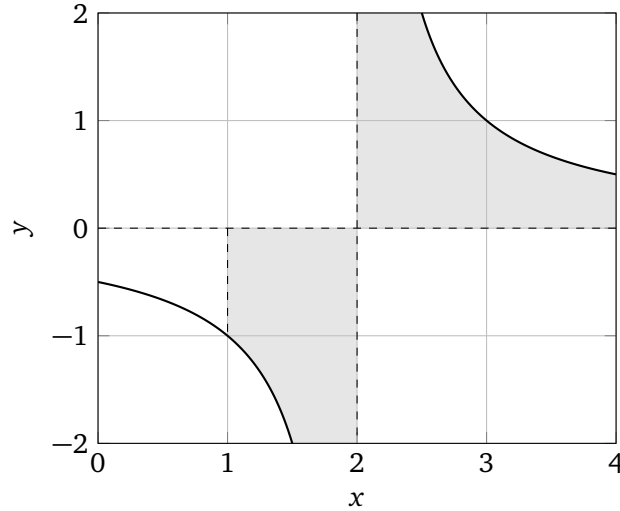


Figura 5.10: La gráfica de $y = 1/(x-2)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$. ¿Cuánto vale el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 4$?

Luego, el área bajo la curva $y = 1/(x-2)$ entre $x = 1$ y $x = 4$ no está definida.

Sin embargo, si nos acercamos a la asíntota de manera simétrica desde la izquierda y desde la derecha, encontramos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_1^{2-r} \frac{dx}{x-2} + \int_{2+r}^4 \frac{dx}{x-2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\ln r + \ln \frac{2}{r} \right) = \ln 2. \quad (5.94)$$

Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 5.5. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, excepto por un punto c , con $a < c < b$. El *valor principal* de la integral de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$ está definido como

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-r} f(x) dx + \int_{c+r}^b f(x) dx \right]. \quad (5.95)$$

Con esta definición, podemos escribir, por ejemplo,

$$\text{V.P.} \int_1^4 \frac{dx}{x-2} = \ln 2. \quad (5.96)$$

La definición 5.4 se extiende naturalmente al caso de una integración sobre todo el eje real.

Definición 5.6. Sea $f(x)$ una función continua sobre todo el eje real, excepto por un punto $c \in \mathbb{R}$. El *valor principal* de la integral de $f(x)$ sobre toda la recta real está definido como

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0^+}} \left[\int_{-\rho}^{c-r} f(x) dx + \int_{c+r}^{\rho} f(x) dx \right]. \quad (5.97)$$

Para aplicar el teorema del residuo en el cálculo de integrales impropias de este tipo, necesitamos construir un contorno cerrado. En particular, esto quiere decir que, cerca de una singularidad en $x = c$, debemos unir el punto $c - r$ con el punto $c + r$ a través de, e.g., una semicircunferencia de radio r que rodee la singularidad, como se sugiere en la figura 5.11.

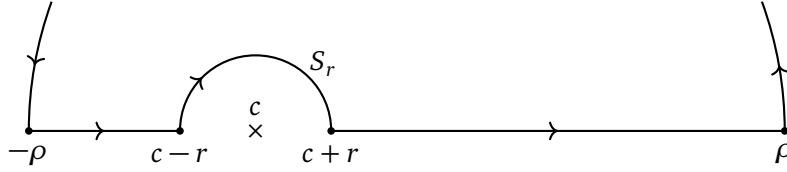


Figura 5.11: Al acercarse a la singularidad en c , tome el desvío por S_r .

Esto significa que vamos a tener que ser capaces de calcular la integral sobre S_r , o por lo menos su límite cuando $r \rightarrow 0^+$. El siguiente lema se hace cargo de esta situación, si bien sólo cuando c es un polo simple.

Lema 5.3. Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = c$, y T_r es el arco circular de la figura 5.12, definido por $T_r : z = c + re^{i\theta}$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f; c). \quad (5.98)$$

En particular, para la semicircunferencia S_r , orientada negativamente, de la figura 5.11, tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{S_r} f(z) dz = -i\pi \text{Res}(f; c). \quad (5.99)$$

Demostración. Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = c$, su expansión de Laurent en un disco perforado centrado en c , $0 < |z - c| < R$, tiene la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - c} + a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \dots \quad (5.100)$$

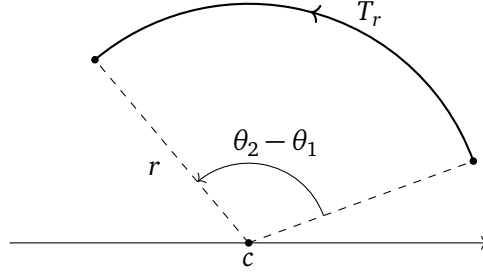


Figura 5.12: Arco circular para el lema 5.3.

Por lo tanto, si $r < R$ podemos integrar (5.100) sobre T_r término a término:

$$\int_{T_r} f(z) dz = a_{-1} \int_{T_r} \frac{dz}{z-c} + \int_{T_r} g(z) dz, \quad (5.101)$$

donde $g(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots$ es la parte positiva de la serie de Laurent para $f(z)$. Como $g(z)$ es analítica en c , debe ser acotada, $|g(z)| \leq M$, en el disco $|z-c| < R$. En particular, $g(z)$ debe ser acotada sobre T_r . Luego,

$$\left| \int_{T_r} g(z) dz \right| \leq M(\theta_2 - \theta_1)r. \quad (5.102)$$

Como esta cota tiende a cero cuando $r \rightarrow 0^+$, concluimos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} g(z) dz = 0. \quad (5.103)$$

Para calcular la integral de $1/(z-c)$, utilizamos la parametrización de T_r :

$$\int_{T_r} \frac{dz}{z-c} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = i(\theta_2 - \theta_1). \quad (5.104)$$

Note que este resultado es independiente de r . Sumando, hallamos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)a_{-1} = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f; c). \quad (5.105)$$

En particular, para una semicircunferencia S_r , con $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$ (ver figura 5.11), obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{S_r} f(z) dz = -i\pi \text{Res}(f; c), \quad (5.106)$$

como queríamos demostrar. \square

Ejemplo 5.15. Calcular

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (5.107)$$

El integrando tiene una única discontinuidad, en $x = 0$. Usando la definición 5.6, tenemos

$$I = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0^+}} \left[\int_{-\rho}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]. \quad (5.108)$$

Llamemos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \quad (5.109)$$

Esta función es analítica en todo el plano complejo, excepto en el punto $z = 0$, donde tiene un polo simple. Construimos ahora el contorno cerrado (ver figura 5.13) $\Gamma_\rho = [-\rho, -r] + S_r + [r, \rho] + C_\rho^+$. Resulta claro entonces que

$$I = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0^+}} \left[\oint_{\Gamma_\rho} f(z) dz - \int_{S_r} f(z) dz - \int_{C_\rho^+} f(z) dz \right]. \quad (5.110)$$

Como $f(z)$ es analítica sobre y en el interior de Γ_ρ , la primera integral es cero. Además, el lema de Jordan garantiza que, en el límite cuando $\rho \rightarrow \infty$, la integral sobre C_ρ^+ tiende a cero. La integral sobre S_r (o, más bien, su límite cuando $r \rightarrow 0^+$) está dada por [cf. ec. (5.99)]

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{S_r} f(z) dz = -i\pi \text{Res}(f; 0). \quad (5.111)$$

El residuo en $z = 0$ es

$$\text{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1. \quad (5.112)$$

Luego, hallamos $I = i\pi$. En particular, esto significa que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \Im(I) = \frac{\pi}{2}. \quad (5.113)$$

Ejemplo 5.16. Calcular

$$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i2x}}{x^2 - 1} dx. \quad (5.114)$$

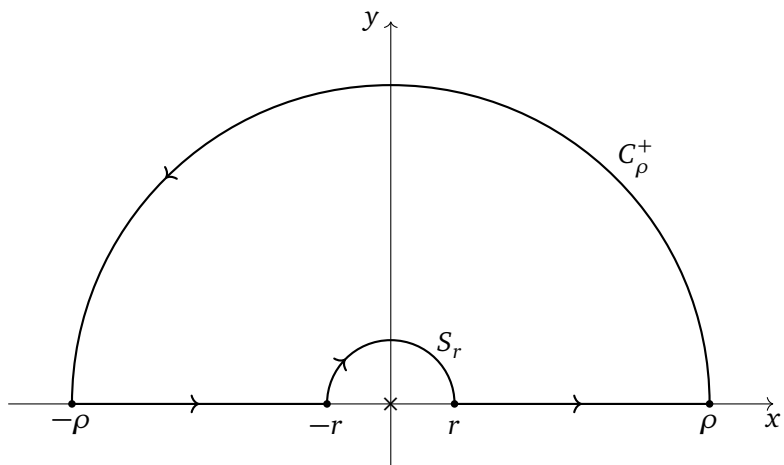


Figura 5.13: Contorno de integración para el ejemplo 5.15.

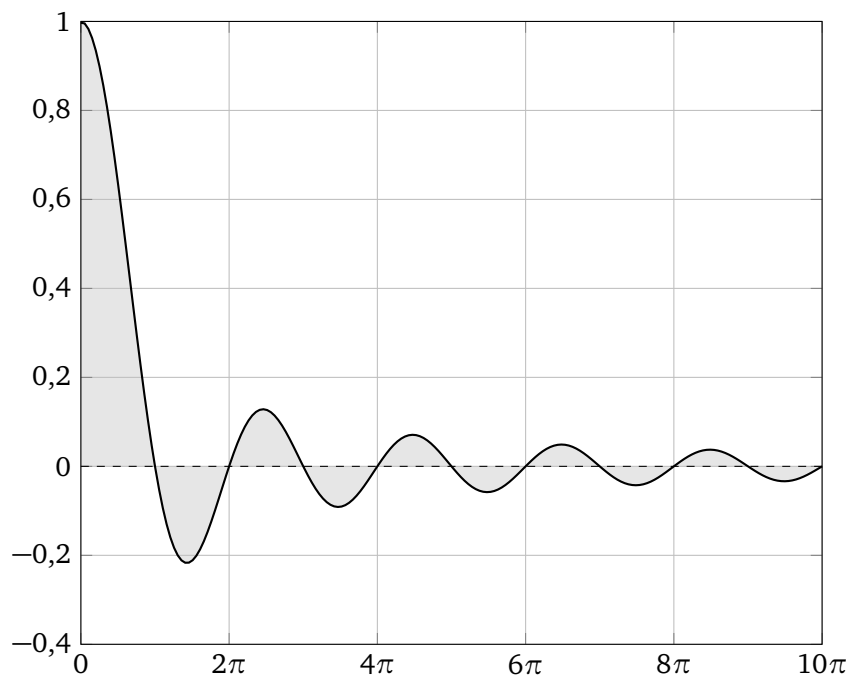


Figura 5.14: El área bajo la curva $y = \sin x / x$ entre $x = 0$ y $x = \infty$ es $\pi/2$.

Este es un ejemplo con dos singularidades en el eje real, en $x = \pm 1$. La definición 5.6 se adapta trivialmente para este caso:

$$I = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ r_1, r_2 \rightarrow 0^+}} \left(\int_{-\rho}^{-1-r_1} + \int_{-1+r_1}^{1-r_2} + \int_{1+r_2}^{\rho} \right) \frac{x e^{i2x}}{x^2 - 1} dx. \quad (5.115)$$

Llamamos

$$f(z) = \frac{z e^{i2z}}{z^2 - 1} \quad (5.116)$$

y cerramos el contorno como se sugiere en la figura 5.15:

$$\Gamma_\rho = [-\rho, -1-r_1] + S_{r_1} + [-1+r_1, 1-r_2] + S_{r_2} + [1+r_2, \rho] + C_\rho^+. \quad (5.117)$$

Podemos escribir

$$I = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ r_1, r_2 \rightarrow 0^+}} \left(\oint_{\Gamma_\rho} - \int_{S_{r_1}} - \int_{S_{r_2}} - \int_{C_\rho^+} \right) f(z) dz. \quad (5.118)$$

Como $f(z)$ no tiene ninguna singularidad al interior de Γ_ρ , la primera integral es cero. Además, el lema de Jordan asegura que, en el límite cuando $\rho \rightarrow \infty$, la integral sobre C_ρ^+ tiende a cero. Las integrales sobre S_{r_1} y S_{r_2} pueden calcularse usando el lema 5.3. Para ello, primero necesitamos los residuos en los polos simples $z = -1$ y $z = +1$:

$$\text{Res}(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z e^{i2z}}{z-1} = \frac{1}{2} e^{-2i}, \quad (5.119)$$

$$\text{Res}(+1) = \lim_{z \rightarrow +1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow +1} \frac{z e^{i2z}}{z+1} = \frac{1}{2} e^{2i}. \quad (5.120)$$

Luego,

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0^+} \int_{S_{r_1}} f(z) dz = -\frac{i\pi}{2} e^{-2i}, \quad (5.121)$$

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0^+} \int_{S_{r_2}} f(z) dz = -\frac{i\pi}{2} e^{2i}, \quad (5.122)$$

de donde obtenemos

$$I = i\pi \cos 2. \quad (5.123)$$

En particular (ver figura 5.16),

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(2x)}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \Im(I) = \frac{\pi}{2} \cos 2. \quad (5.124)$$

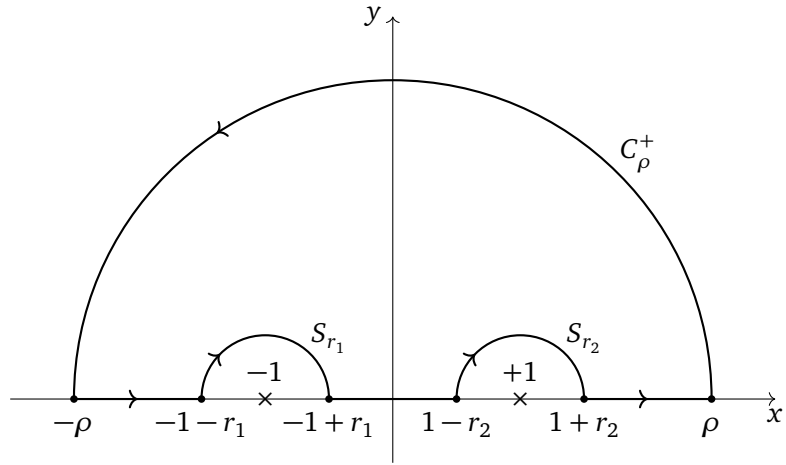


Figura 5.15: Contorno de integración para el ejemplo 5.16.

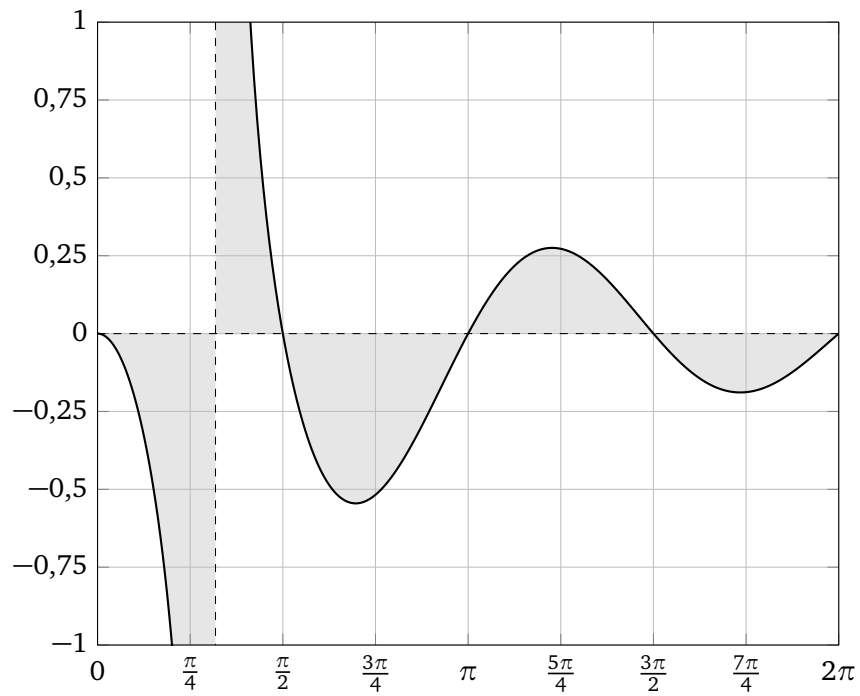


Figura 5.16: El área bajo la curva $y = x \sin(2x) / (x^2 - 1)$ entre $x = 0$ y $x = \infty$ es $(\pi/2) \cos 2$.

Bibliografía

- [1] E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
- [2] T. Needham, *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, Inc., New York (2000).
- [3] J. W. Brown, R. V. Churchill, *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw-Hill/Interamericana de España (2004).
- [4] R. A. Silverman, *Complex Analysis with Applications*. Dover Publications, Inc., New York (1984).
- [5] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, Boston, Amsterdam (2005).
- [6] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. Wiley, Hoboken, NJ (2006).
- [7] R. Penrose, *The Road to Reality*. Alfred A. Knopf, New York (2006).