第39卷第4期　　数学的实践与认识　　Vol. 39 No. 4
2009年2月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Feb., 2009

四元数矩阵实表示的基本性质及应用

郑　福[1,2]

(1. 渤海大学 数学系，辽宁 锦州　121013)
(2. 北京信息控制研究所，北京　100037)

摘要： 在四元数实矩阵表示的基础上，给出了四元数矩阵的相同表示，利用友向量的概念，给出了这种实表示的性质，并进一步研究了四元数力学中的系列数值计算问题.

关键词： 四元数；实矩阵表示；友向量

近年来，四元数矩阵在量子力学、控制理论和陀螺技术的应用中日趋重要和广泛[1-2]，对四元数的研究越来越多. 但要研究四元数，首先要选择合适的方式表示一个四元数，因问题的不同而选择不同的表示方式，在文[3]中，作者给出了两种表示方式：向量表示与矩阵表示，但此文中给出的矩阵表示与本文的矩阵表示均不同. 在文[4]中，作者通过四元数的复表示方法，即：一个四元数与一个2×2复矩阵一一对应，在此种方式表示下，研究了四元数矩阵的QR算法. 文[5]均给出了四元数的实表示方法，即：一个四元数与一个4×4实矩阵一一对应. 文[6]通过巧妙地引入友向量的概念，研究了四元数体上矩阵的系列数值计算性质，从而建立了一套四元数力学的简单数学代数方法. 本文利用四元数的实矩阵表示，建立与[6]中相似的四元数体上矩阵的系列数值计算性质.

下面给出本文出现的记号：

令 R 表示实数域，Q 是四元数体，$R^{m\times n}$ 是实数域上的 m 行 n 列矩阵，I_n 表示 n 阶单位矩阵. 若 $A,B\in R^{m\times n}$，A^{T} 代表 A 的转置矩阵，$r(A)$ 代表 A 的秩，$A\otimes B$ 代表Kronecker乘积. 若 A 为方阵，A^{-1}、$|A|$ 和 A^* 分别代表 A 的逆矩阵、A 的行列式和 A 的伴随矩阵.

四元数通常形式如下：$q=q_0e_0+q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3$，$q_0,q_1,q_2,q_3\in R$，$e_0,e_1,e_2,e_3$ 是四元数基向量并服从如下的乘法法则

$$e_0^2=1,e_1^2=e_2^2=e_3^2=-1,e_0e_j=e_j(j=1,2,3)$$
$$e_1e_2=-e_2e_1=e_3,e_3e_1=-e_1e_3=-e_2,e_2e_3=-e_3e_2=e_1$$

关于四元数相加、相乘和实数与四元数相乘可见文[3]. 令 $Q^{m\times n}$ 是四元数体上的 m 行 n 列矩阵，$A=(a_{ij})\in Q^{m\times n}$，其中 $a_{ij}=a_{ij}^0e_0+a_{ij}^1e_1+a_{ij}^2e_2+a_{ij}^3e_3$，令 $A_k=(a_{ij}^k)$ 则 $A_k\in R^{m\times n}(k=0,1,2,3)$，且 $A=\sum\limits_{k=0}^{3}A_ke_k$.

对于任一四元数 $q=q_0e_0+q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3$，我们能用如下的实4×4矩阵 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ 和 φ_3 给出 q 的矩阵表示，此处：

收稿日期：2008-10-15

$$\varphi_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \varphi_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\varphi_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad \varphi_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

并且 $\varphi_{0,1,2,3}$ 与 $e_{0,1,2,3}$ 有类似的的乘法法则：

$$\varphi_0^2=I_4,\varphi_1^2=\varphi_2^2=\varphi_3^2=-I_4,\varphi_0\varphi_j=\varphi_j(j=1,2,3)$$

$$\varphi_1\varphi_2=-\varphi_2\varphi_1=\varphi_3,\varphi_3\varphi_1=-\varphi_1\varphi_3=-\varphi_2,\varphi_2\varphi_3=-\varphi_3\varphi_2=\varphi_1$$

这样，对任意实四元数 $q\in Q$ 以及四元数矩阵 $A=(q_{ij})\in Q^{m\times n}$，定义矩阵表示 f：

$$f(q)=q_0\varphi_0+q_1\varphi_1+q_2\varphi_2+q_3\varphi_3=\begin{pmatrix}q_0&q_1&q_2&q_3\\-q_1&q_0&-q_3&q_2\\-q_2&q_3&q_0&-q_1\\-q_3&-q_2&q_1&q_0\end{pmatrix}\in R^{4\times 4}$$

$$f(A)=(f(q_{ij}))\in R^{4m\times 4n}$$

对于矩阵表示，我们有如下的性质和定理：

性质1　$\forall A\in Q^{m\times n},f(A)=\sum_{k=0}^{3}A_k\otimes\varphi_k$

性质2　$\forall x,y\in Q,\lambda\in R,\forall A\in Q^{m\times n},B\in Q^{n\times s}$

1) $f(x+y)=f(x)+f(y),f(\lambda x)=\lambda f(x)$；

2) $f(xy)=f(x)f(y)$；

3) $f(AB)=f(A)f(B),f(A+B)=f(A)+f(B)$

证明　由四元数的加法与乘法可见(1)、(2)显然成立；由(1)、(2)可知：$f(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)=\sum_{i=1}^{n}f(x_iy_i)$，再由矩阵的加法与乘法可知(3)也成立.

根据四元数实矩阵表示的特点我们引入如下的友向量的概念.

定义1　若 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,\cdots,x_{4n-3},x_{4n-2},x_{4n-1},x_{4n})^{\mathrm{T}}$，分别称

$$x^a=(-x_2,x_1,-x_4,x_3,-x_6,x_5,-x_8,x_7,\cdots,-x_{4n-2},x_{4n-3},-x_{4n},-x_{4n-1})^{\mathrm{T}}$$

$$x^b=(-x_3,x_4,x_1,-x_2,-x_7,x_8,x_5,-x_6,\cdots,-x_{4n-1},x_{4n},x_{4n-3},-x_{4n-2})^{\mathrm{T}}$$

$$x^c=(-x_4,-x_3,x_2,x_1,-x_8,-x_7,x_6,x_5,\cdots,-x_{4n},-x_{4n-1},x_{4n-2},x_{4n-3})^{\mathrm{T}}$$

为 x 的 a,b,c 类友向量.

性质3　设 $x,y\in R^{4n\times 1},\lambda\in R,A\in Q^{m\times n}$，则：

1) $(x^a)^a=(x^b)^b=(x^c)^c=-x$；

2) $(x^a)^b=-(x^b)^a=-(x^c),(x^c)^a=-(x^a)^c=-(x^b),(x^b)^c=-(x^c)^b=-(x^a)$；

3) $(x+y)^i=x^i+y^i(i=a,b,c)$；

4) $(\lambda x)^i=\lambda x^i(i=a,b,c)$；

5) $(xy)^i = x^i y^i (i = a,b,c)$;

6) $(f(A)x)^i = f(A)x^i (i = a,b,c)$;

7) 若 $x \neq 0$, 则 x, x^a, x^b, x^c 线性无关;

8) $x^{\mathrm{T}}x = (x^a)^{\mathrm{T}}x^a = (x^b)^{\mathrm{T}}x^b = (x^c)^{\mathrm{T}}x^c = \sum_{i=1}^{4n} x_i^2$

9) $x^{\mathrm{T}}x^i = (x^i)^{\mathrm{T}}x^j = 0, i,j = a,b,c, i \neq j$

证明 1),2),3),4),8),9)显然成立;至于5),由四元数的乘积经简单计算不难得到;6)可由矩阵的乘法与友向量的定义易得;至于7),由线性无关的定义以及对于 $0 \neq q \in Q$,行列式 $|f(q)|$ 非零可得.

定理1 若 $A \in Q^{m\times n}$, 则

1) 4 整除实矩阵 $f(A)$ 的秩.

2) $|f(A)|$ 只能是非负值;且若 λ 为 $f(A)$ 的特征值,则 λ 至少为 $f(A)$ 的四重根.

证明 1) 设 $i = 1,2,\cdots m$, X_{4i} 代表实矩阵 $f(A)$ 的第 $4i$ 行,则由实矩阵 $f(A)$ 的特点可知, $X_{4i-3}^a = X_{4i-2}, X_{4i-3}^b = X_{4i-1}, X_{4i-3}^c = X_{4i}$ 由性质3.1 7)可知1)正确.

2) 可考察 $|f(A)f^{\mathrm{T}}(A)|$, 由 $|AA^{\mathrm{T}}| = |A|^2$、性质3.1 的8)9)以及上面1)所述的矩阵 $f(A)$ 的特点可得前半部分;至于后半部分,由特征值的定义及性质3.1 的7)可得.

定义2 若 $A \in Q^{n\times k}$,则四元数矩阵 A 的秩定义为 $r(A) = \frac{1}{4}r(f(A))$

定理2 若 $A \in Q^{m\times n}, x, b \in Q^{n\times 1}$, 四元数方程 $Ax = b$ 有解当且仅当 $r(A) = r(A,b)$,四元数方程存在惟一解 $Ax = b$ 当且仅当 $r(A) = r(A,b) = n$.

证明 四元数方程 $Ax = b$ 有解当且仅当 $f(A)f(x) = f(b)$ 有解, $f(A)f(x) = f(b)$ 有解当且仅当 $r(f(A)) = r(f(A),f(b))$, $r(f(A)) = r(f(A),f(b))$ 当且仅当 $r(A) = r(A,b)$. 对于存在惟一解同样可证.

定义3 若 $A \in Q^{n\times n}$,则四元数矩阵 A 的行列式定义为 $|A|_Q = |f(A)|$.

定义4 若 $A \in Q^{n\times n}$,若存在四元数矩阵 B 使得 $AB = BA = |A|_Q I_n$,则称 B 为 A 的共轭矩阵,记为: $B = A^*$.

定理3 若 $A \in Q^{n\times n}$,则 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|_Q \neq 0$,且当 A 可逆时, $A^{-1} = \frac{1}{|A|_Q}A^*$, $f(A^*) = f(A)^*$.

证明 定理的前半部分显然成立,下证后半部分. 因 $f(A)f(A^*) = f(AA^*) = f(|A|_Q I_n) = |A|_Q I_{4n} = |f(A)| I_{4n} = f(A)f(A)^*$, 从而可知 $f(A^*) = f(A)^*$.

此定理给出了一种判断四元数矩阵是否可逆和求相应逆矩阵的简单理论方法.

参考文献:

[1] 肖尚斌. 四元数体上的乘法及其可易性[J]. 力学学报,1984,16(2):159-166.

[2] Adler SL. Quaternionic Meachanics and Quantum Fields[M]. New York: Oxford U. Pr,1994.

[3] Shen Y Z, Chen Y, Zheng D H. A Quaternion-based geodetic datum transformation algorithm[J]. J Geod,2006, 80:233-239.

[4] Angelike Bunse-Gerstner. A Quaternion QR algorithm[J]. Numer Math,1989,55:83-95.

[5] Süleyman Demir. Matrix realization of dual quaternaionic electromagnetism[J]. CEJP,2007,5(4):159-166.

[6] 姜同松. 四元数的一种新的代数结构[J]. 力学学报,2002,34(1):117-122.

The Principle Property and Application of Real Presentation of Quaternion Matrix

ZHENG Fu[1,2]

(1. Department of Mathematics, Bohai University, Jinzhou Liaoning 121013, China)
(2. Beijing Institute of Information and Control, Beijing 100037, China)

Abstract: This paper gives the same presentation of quaternion matrix on the basis of the real matrix presentation of quaternion, gives the principle property of this presentation by utilizing the concept of companion and further discusses a series of numerical calculation problems of quaternion mechanics.

Keywords: quaternion; real matrix presentation; companion vector