

全轮转向式小车

一、坐标系与位置表示

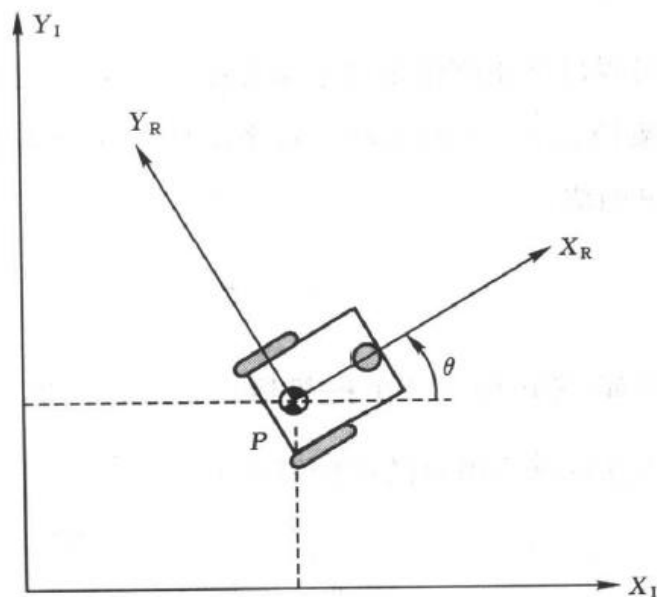


图 1 地理坐标系与体坐标系

定义如图所示的坐标系，地理坐标系 $\{X_I, Y_I\}$ ，体坐标系 $\{X_R, Y_R\}$ ，坐标之间夹角为 θ ，P 点位置描述为

$$\varepsilon_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

由地理坐标转为体坐标的映射由正交旋转矩阵完成

$$\varepsilon_R = R(\theta)\varepsilon_I = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

反方向变换矩阵如下

$$R(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二、运动学模型与控制律

2.1 全向轮直角坐标运动学方程

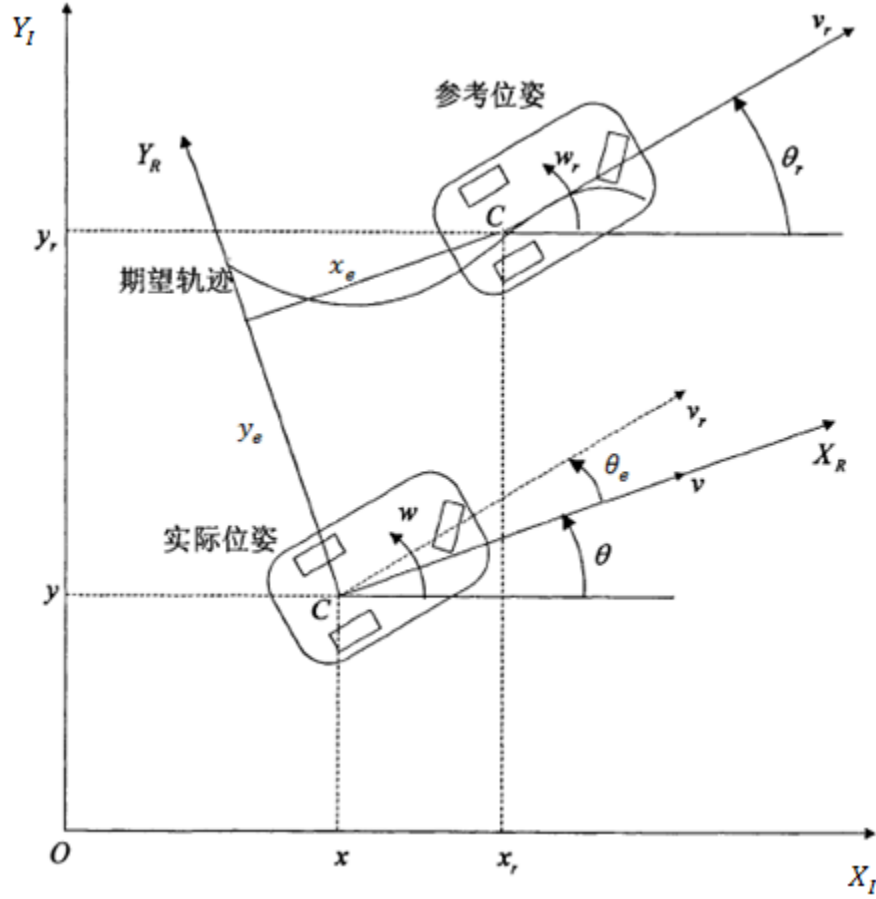


图 2 轨迹跟踪示意图

坐标系参照图 2，对于地理坐标中的位置指令 $p_I = (x_r \ y_r \ \theta_r)$ 和速度指令 $q_I = (v_r \ \omega_r)$ 将对应的误差在体坐标系中表示出来

$$p_R = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{pmatrix}$$

对上式求导的到^[1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\dot{x}_r - \dot{x})\cos\theta - (x_r - x)\sin\theta\dot{\theta} + (\dot{y}_r - \dot{y})\sin\theta + (y_r - y)\cos\theta\dot{\theta} \\ &= y_e\omega - (\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) + v_r\cos\theta_r\cos\theta + v_r\sin\theta_r\sin\theta \\ &= y_e\omega - v_x + v_r\cos(\theta_r - \theta) \\ &= y_e\omega - v_x + v_r\cos\theta_e \\ \dot{y}_e &= -(\dot{x}_r - \dot{x})\sin\theta - (x_r - x)\cos\theta\dot{\theta} + (\dot{y}_r - \dot{y})\cos\theta - (y_r - y)\sin\theta\dot{\theta} \\ &= -x_e\omega + (\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta) - v_r\cos\theta_r\sin\theta + v_r\sin\theta_r\cos\theta \\ &= -x_e\omega - v_y + v_r\sin\theta_e \end{aligned}$$

将上式合并写出得到位置误差微分方程

$$\dot{p}_R = \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_e\omega - v_x + v_r\cos\theta_e \\ -x_e\omega - v_y + v_r\sin\theta_e \\ \omega_r - \omega \end{pmatrix}$$

2.1.1 全向轮直角坐标下控制律设计

设李雅普诺夫函数为

$$V_1 = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2 + \theta_e^2)$$

求其导数如下，当渐进稳定时导数小于 0；

$$\dot{V}_1 = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \theta_e \dot{\theta}_e$$

$$\dot{x}_e = -k_x x_e, \dot{y}_e = -k_y y_e, \dot{\theta}_e = -k_\theta \theta_e$$

上式系数为正时，李雅普诺夫函数的导数小于零，系统渐进稳定
代入微分方程得到控制律如下：

$$\begin{aligned} v_x &= y_e \omega + v_r \cos \theta_e + k_x x_e \\ v_y &= -x_e \omega + v_r \sin \theta_e + k_y y_e \\ \omega &= \omega_r + k_\theta \theta_e \end{aligned}$$

2.2 差动轮直角坐标运动学方程

差动轮与全向轮的区别是，全向轮小车速度方向与四个轮子的共同朝向相同
可为任意方向，而差动轮小车的切向速度方向与 X 轴重合，故方程中 $v_y=0$ ，微分
方程如下：

$$\dot{p}_R = \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_e \omega - v + v_r \cos \theta_e \\ -x_e \omega + v_r \sin \theta_e \\ \omega_r - \omega \end{pmatrix}$$

2.2.1 差动轮直角坐标下控制律设计

选择 Lyapunov 函数如下：

$$V_2 = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) + \frac{1}{k}(1 - \cos \theta_e)$$

对上式沿求导：

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \frac{1}{k} \dot{\theta}_e \sin \theta_e \\ &= x_e (y_e \omega - v + v_r \cos \theta_e) + y_e (-x_e \omega + v_r \sin \theta_e) \\ &\quad + \frac{1}{k} (\omega_r - \omega) \sin \theta_e \\ &= -x_e v + x_e v_r \cos \theta_e + y_e v_r \sin \theta_e + \frac{1}{k} \omega_r \sin \theta_e - \frac{1}{k} \omega \sin \theta_e \\ &= -x_e v + x_e v_r \cos \theta_e + y_e v_r \sin \theta_e + \frac{1}{k} \omega_r \sin \theta_e - \frac{1}{k} \omega \sin \theta_e \end{aligned}$$

选择如下速度控制输入：

$$\begin{aligned} v &= v_r \cos \theta_e + k_x x_e \\ \omega &= \omega_r + v_r (k_y y_e + k_\theta \sin \theta_e) \end{aligned}$$

将上式代入 Lyapunov 函数导数得到：

$$\dot{V}_2 = -k_x x_e^2 - \frac{k_\theta}{k} v_r \sin^2 \theta_e$$

当上式系数为正时， $\dot{V}_2 \leq 0$ ，故以上 Lyapunov 函数选择正确。

由此得到基于运动学模型的轨迹跟踪速度控制律为^[2]：

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos \theta_e + k_x x_e \\ \omega_r + v_r(ky_e + k_\theta \sin \theta_e) \end{bmatrix}$$

其中， k ， k_x ， k_θ 为控制器参数。

2.2.2 控制器参数选取

将控制律代入微分方程得下式：

$$\dot{p}_R = \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_e(\omega_r + v_r(ky_e + k_\theta \sin \theta_e)) - k_x x_e \\ -x_e(\omega_r + v_r(ky_e + k_\theta \sin \theta_e)) + v_r \sin \theta_e \\ -v_r(ky_e + k_\theta \sin \theta_e) \end{pmatrix}$$

上式在零点附近线性化，忽略高次项得

$$\dot{p}_R = A p_R$$

$$A = \begin{pmatrix} -k_x & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & v_r \\ 0 & -v_r k_y & -v_r k_\theta \end{pmatrix}$$

系数值与角速度和速度指令值共同决定系统根，当系数为正是所有根为负数。

2.3 对比仿真与结果

仿真系统结果图如下：

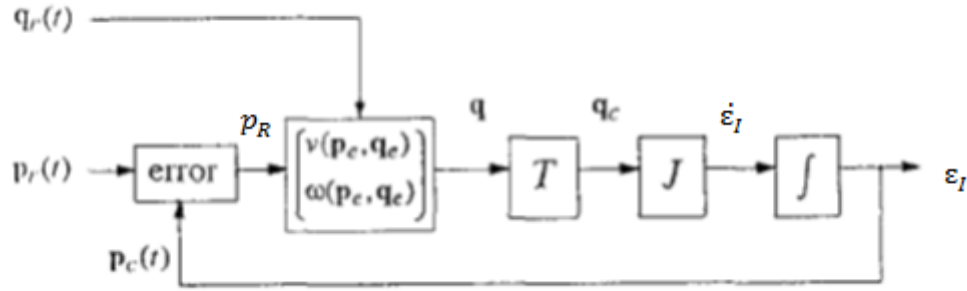


图 3 轨迹跟踪结构图

图中 $q=(v \ \omega)^T$ ， v 、 ω 分别为移动机器人的线速度和角速度， $\epsilon_I=(x \ y \ \theta)^T$ ，对于差动机器人运动学方程可表示为：

$$\dot{\epsilon}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J q_c$$

图中 $J = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ； $p_R = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix}$ ； $q_c = q$ ；

对于全向轮机器人运动学方程可表示为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = R(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix}$$

对角速度为 0.2 和线速度为 5 的圆形轨迹进行跟踪，仿真结果如下图：

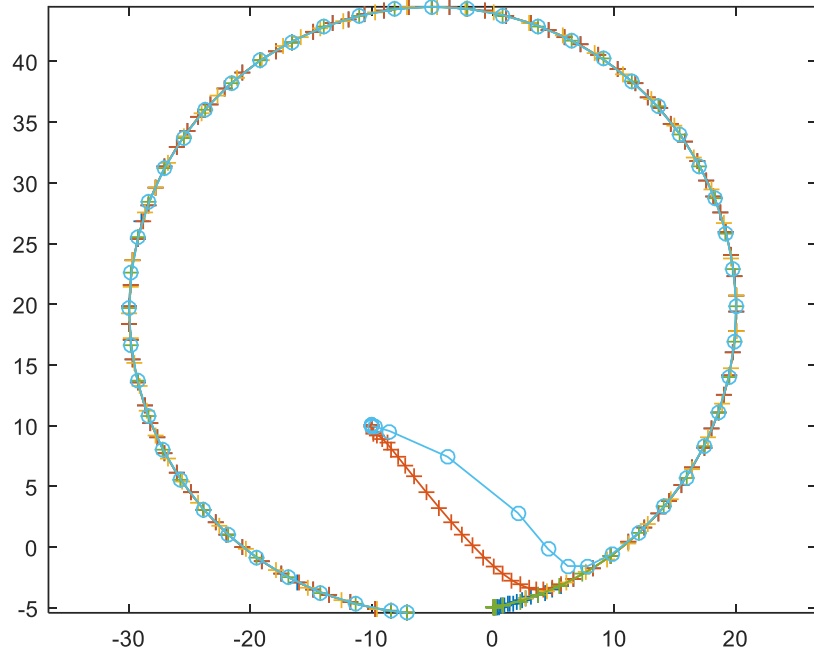


图 4 圆形轨迹跟踪仿真图

图中×点线为差动轮跟踪轨迹，○点线为全向轮跟踪轨迹。

三、全向轮平台的设计

对全向轮采用如下图所示的结构时，进行系统分析与设计



图 5 互补型全向轮(omni wheels)

3.1 运动学模型

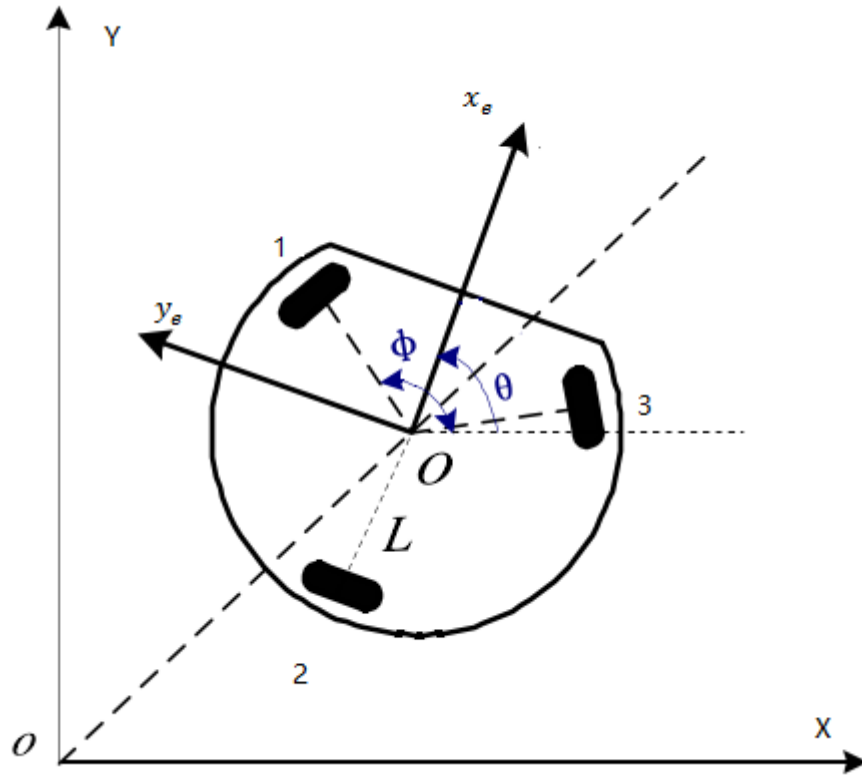


图 6 全向轮式移动机器人运动学模型

移动坐标 $X_e - Y_e$ 固定在机器人重心上，而质心正好位于几何中心上。机器人 P 点在全局坐标系的位置坐标为： (x, y, θ) ，三个全向轮以 3 号轮中心转动轴反方向所机器人的 X 轴。假设三个全向轮完全相同，三个全向轮中心到车体中心位置的距离 L。在移动坐标 $X_e - Y_e$ 的速度用 $v_{xe} v_{ye}$ 表示。

由文献[3]可得三个全向轮的速度与其在移动坐标和全局坐标系下的速度分量之间的关系分别为以下二式：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(60) & \cos(60) & L \\ -\sin(60) & \cos(60) & L \\ 0 & -1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & L \\ 0 & -1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= T_{a_{3 \times 3}} \begin{pmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ \omega \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(60 - \theta) & \cos(60 - \theta) & L \\ -\sin(60 + \theta) & \cos(60 + \theta) & L \\ \sin\theta & -\cos\theta & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 动力学模型

在移动坐标 $X_e - Y_e$ 中，设机器人在沿轴 X_e 和 Y_e 方向上收到的力分别为 F_{xe} 和

F_{Ye} 第 1、2、3 号驱动轮提供给机器人的驱动力分别为 f_1 、 f_2 、 f_3 ，机器人惯性转矩为 M ，根据牛顿第二定律可得到如下的动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_e \\ m\ddot{y}_e \\ I\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) & -\cos(30) & 0 \\ \sin(30) & \sin(30) & -1 \\ L & L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{2}{L} & \frac{2}{L} & L \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{Tb}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

在地理坐标系 X—Y 下的方程如下：

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ I\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30 + \theta) & -\cos(30 - \theta) & \sin\theta \\ \sin(30 + \theta) & \sin(30 - \theta) & -\cos\theta \\ L & L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

3.3 基于动力学模型的控制器设计

如上式所示，基于机器人动力学模型的控制方案，直接根据机器人的动力学模型设计运动控制器，控制器的输出为机器人上驱动电机的驱动电压。基于动力学模型的控制方案，不需对驱动电机进行底层的速度控制，消除了底层速度控制带来的延时。

由动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_e \\ m\ddot{y}_e \\ I\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{2}{L} & \frac{2}{L} & L \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

可知在体坐标系中各个方向上的控制输入输出是独立的并且相互之间无耦合；于是可在体坐标中对各个控制量分别进行控制。

当以各个电机电压作为控制量 U 时，对控制量 U 进行矩阵变换 $\mathbf{Tb}_{3 \times 3}U$ 后可得到各个方向控制量 $Fu = \mathbf{Tb}_{3 \times 3}U$ 。先对系统参数 $[m \quad I]$ 进行辨识，得到由控制量 Fu 到速度 V 的传递函数；然后设计 Fu 的控制器，经过变换 $\mathbf{Ta}_{3 \times 3}Fu$ 后得到各个电机的控制量 $U = \mathbf{Ta}_{3 \times 3}Fu$ 。速度控制指令 $v_{xe} v_{ye} \omega$ 由第 2 节控制律求得。

3.4 基于编码器的位姿推算

圆弧模型在文献[4]中介绍机器人里程计圆弧模型是把移动机器人在运动过程中的实际轨迹通过圆弧去逼近。

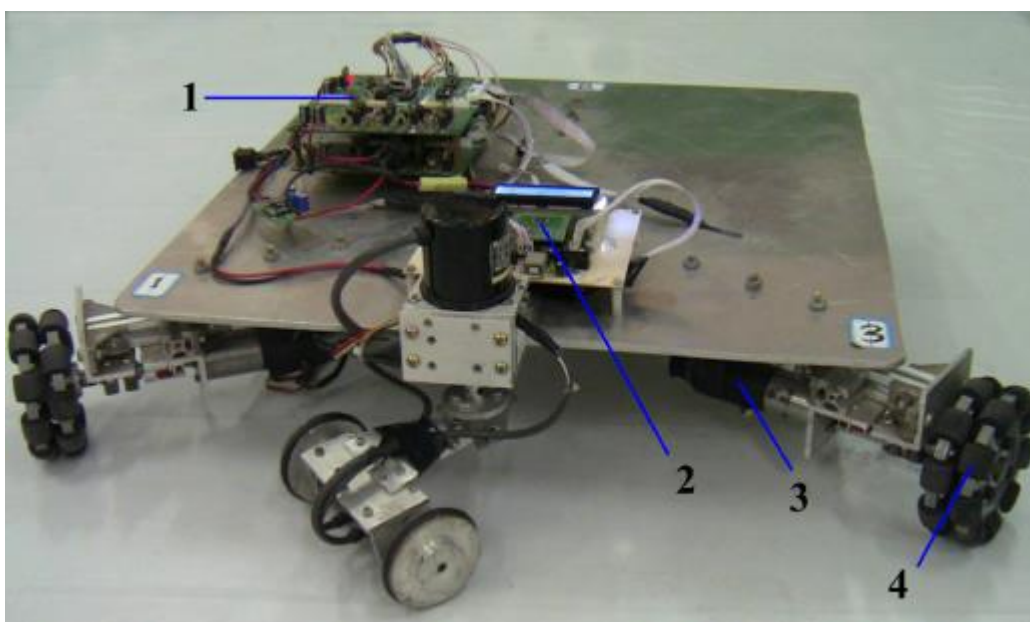


图 7 平台样品示意图^[5]

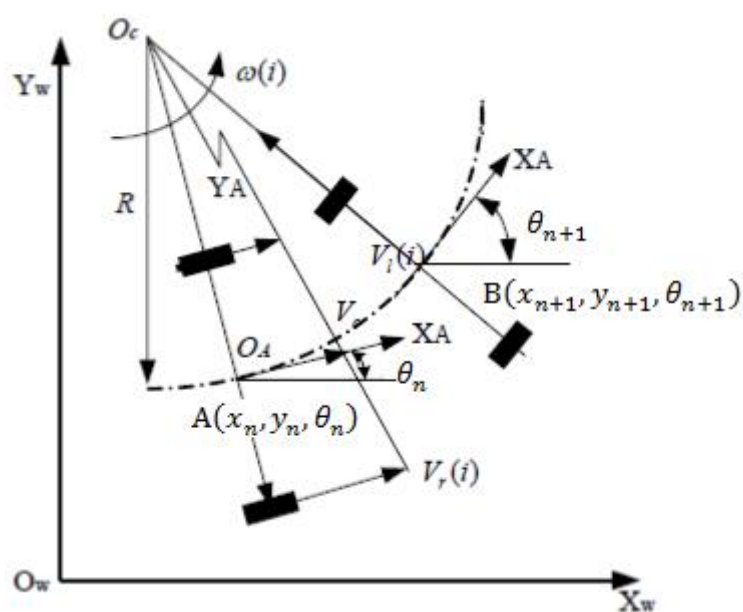


图 8 采样期间的圆弧运动轨迹

图中 $A(x_n, y_n, \theta_n)$ 和 $B(x_{n+1}, y_{n+1}, \theta_{n+1})$ 分别为在采样时间间隔内起始点与终点的位姿坐标，AB 为采样期间的圆弧轨迹，利用图中几何关系可以得到运动轨迹为圆弧时的推算公式如下：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{L(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2(\Delta S_R - \Delta S_L)} \left[\sin \left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L} \right) - \sin \theta_n \right] \\ y_{n+1} = y_n - \frac{L(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2(\Delta S_R - \Delta S_L)} \left[\cos \left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L} \right) - \cos \theta_n \right] \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L} \end{cases}$$

当 $\Delta S_R - \Delta S_L$ 较小时可采用直线模型

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2} \cos\left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L}\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2} \sin\left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L}\right) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L} \end{cases}$$

随着移动距离的增加，误差逐渐加大，其误差的来源主要包括系统误差和非系统误差。系统误差跟实际采用的器件的精度和测量上的误差等方面产生的；非系统误差是在移动过程中随机发生的误差，主要包括：测位轮子的打滑、路况等。

由于非系统误差不容易消除，因此，这里将通过实验的方法来校准机构的安装精度，减小因系统误差对定位精度产生较大影响。

影响测量误差的主要参数是编码器输出一个脉冲对应轮子运动的距离 r 和两个定位轮之间的距离 L ， r 和 L 精度校正的具体方法和实现步骤如下：

编码器一个脉冲代表定位轮运行的距离 r 校正方法：使两个定位轮在室内平面上沿着一条 5 米长度的直线运行，编写软件程序，对与定位轮同轴相连的两个自由编码器的输出脉冲进行计数，将该数值记录左右自由编码器输出脉冲个数 N_L 和 N_R ，根据公式

$$r = \frac{5000}{(N_L + N_R)/2} mm$$

求出每次测量计算得到 r 的值，再取平均值即可。经过多次测试实验结果列表。

定位轮之间的距离 L 校正方法：在平地上，使测位装置从某一起始位置出发，顺时针或逆时针旋转 n 周后再回到该出发位置，记下在该过程与左右定位轮相连的编码器输出的脉冲数分别为 N_L ， N_R ，根据公式

$$L = \frac{(N_L - N_R) * r}{2\pi n}$$

求出每次测量计算得到 L 的值，再取平均值即可。经过多次测试两定位轮之间距离 L 校正实验列表。

四、Mecanum 轮平台的设计

Mecanum 轮采用滚轮与轴线成 45° 夹角的结构，如下图所示：

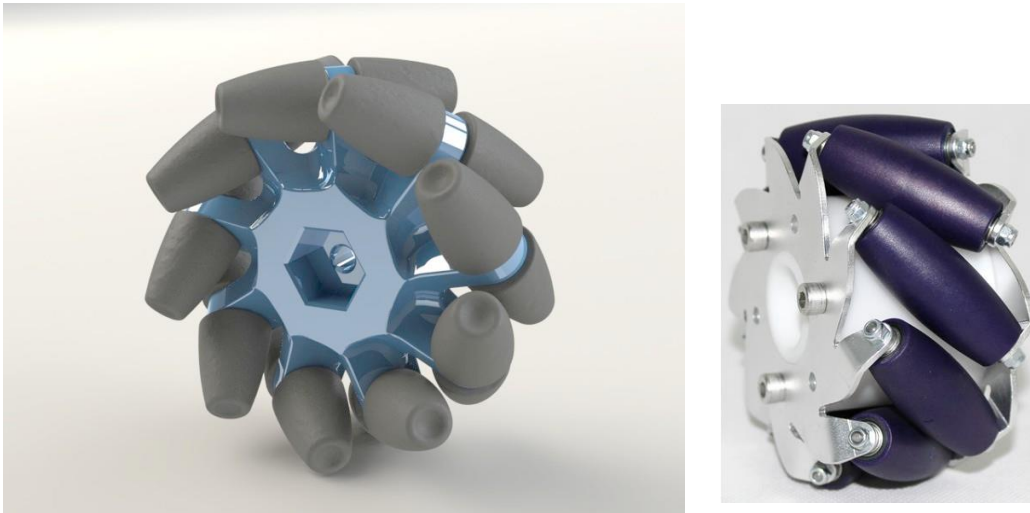


图 9 麦克纳姆轮(Mecanum wheels)
假设图中小辊子可沿径向自由滚动，而沿轴向与地面无滑动。

4.1 运动学模型

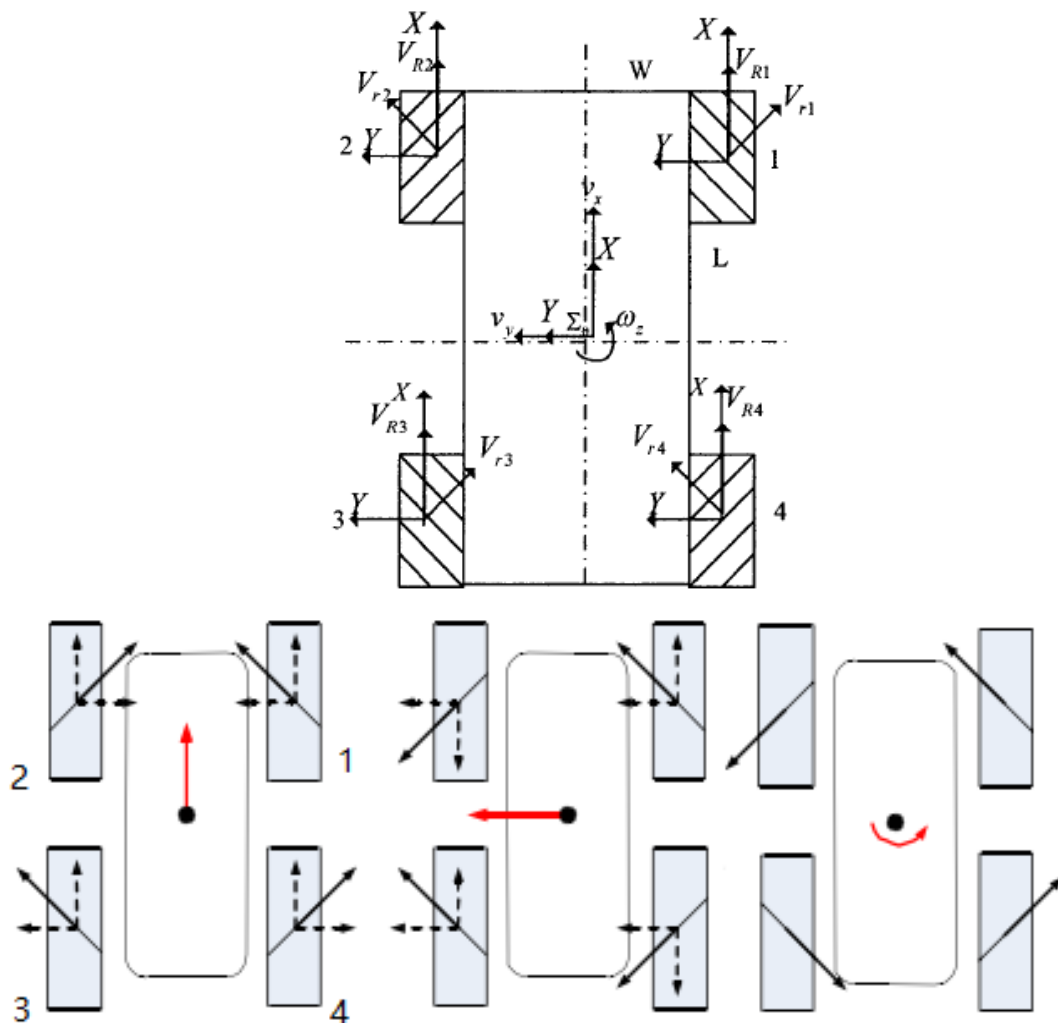


图 10 麦克纳姆轮移动机器人运动学原理图

由文献[6]可得四个轮的速度与其在移动坐标系下的速度分量之间的关系为以下式，其中W为车半宽，L为车半长：

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & L+W \\ 1 & -1 & -L-W \\ 1 & 1 & -L-W \\ 1 & -1 & L+W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ \omega \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{a4 \times 3} \begin{pmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ \omega \end{pmatrix}$$

其逆变换如下：

$$\begin{pmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{b3 \times 4} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{b3 \times 4} \times \mathbf{T}_{a4 \times 3} = \mathbf{I}$$

4.2 动力学模型

在移动坐标 $X_e - Y_e$ 中，设机器人在沿轴 X_e 和 Y_e 方向上收到的力分别为 F_{Xe} 和 F_{Ye} 第1、2、3和4号驱动轮提供给机器人的驱动力分别为 f_1 、 f_2 、 f_3 和 f_4 ，机器人惯性转矩为 M ，根据牛顿第二定律可得到如下的动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_e \\ m\ddot{y}_e \\ I\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{b3 \times 4} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

上式驱动力逆变换为

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & L+W \\ 1 & -1 & -L-W \\ 1 & 1 & -L-W \\ 1 & -1 & L+W \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{a4 \times 3} \begin{bmatrix} F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M \end{bmatrix}$$

4.3 基于动力学模型的控制器设计

如上式所示，基于机器人动力学模型的控制方案，直接根据机器人的动力学模型设计运动控制器，控制器的输出为机器人上驱动电机的驱动电压。基于动力学模型的控制方案，不需对驱动电机进行底层的速度控制，消除了底层速度控制带来的延时。

由动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_e \\ m\ddot{y}_e \\ I\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Xe} \\ F_{Ye} \\ M \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} & \frac{1}{L+W} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

可知在体坐标系中各个方向上的控制输入输出是独立的并且相互之间无耦合；于是可在体坐标中对各个控制量分别进行控制。

当以各个电机电压作为控制量 U 时，对控制量 U 进行矩阵变换 $\mathbf{T}_{b3 \times 4}U$ 后可

得到在体坐标系中的各个方向控制量 $F_u = T_{b_{3 \times 4}} U$ 。先对系统参数 $[m \quad I]$ 进行辨识，得到由控制量 F_u 到体坐标速度 V 的传递函数；然后设计 F_u 的控制器，经过变换 $T_{a_{4 \times 3}} F_u$ 后得到各个电机的控制量 $U = T_{a_{4 \times 3}} F_u$ 。速度控制指令 $v_{xe} v_{ye} \omega$ 由第 2 节控制律求得。

4.4 基于三全向轮编码器的位姿推算

圆弧模型在文献[5]中介绍机器人里程计圆弧模型是把移动机器人在运动过程中的实际轨迹通过圆弧去逼近。

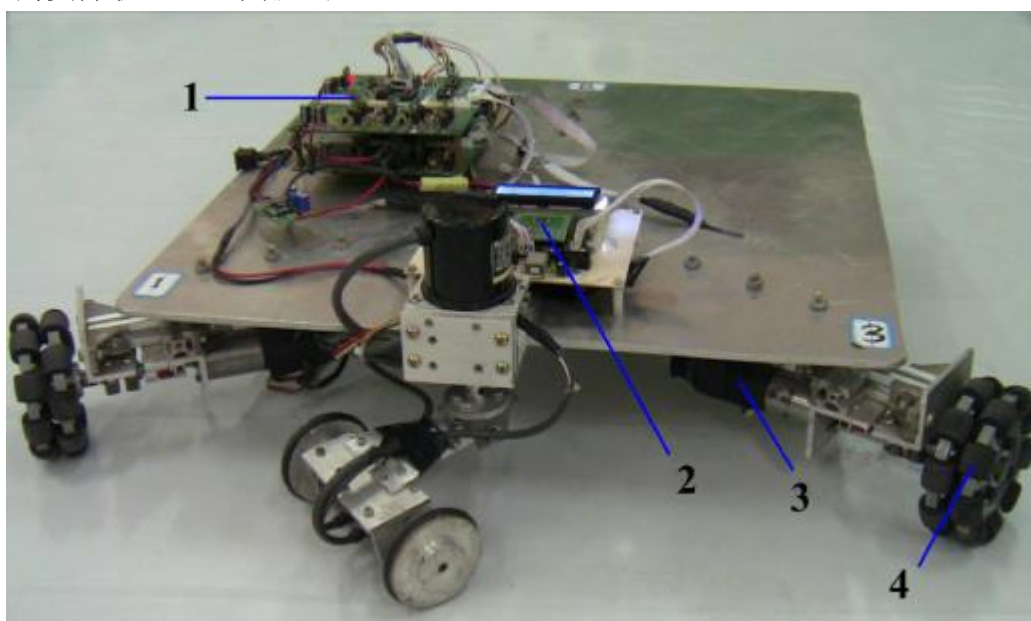


图 7 平台样品示意图^[6]

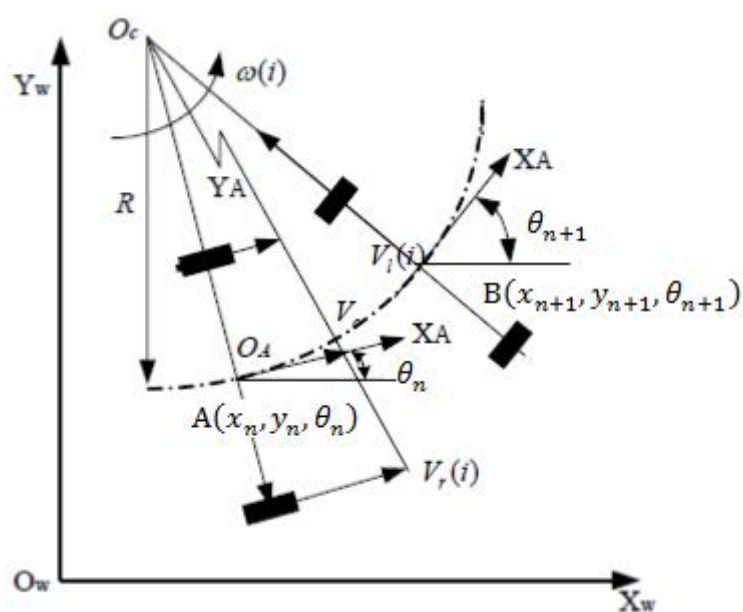


图 8 采样期间的圆弧运动轨迹

由于三轮全向机器人具有完整约束动力学特性[23-25]，因此采用三个编码器才可以得到机器人平面运动的三自由

度信息，即机器人的坐标信息 (PocoocyA)。

图中 $A(x_n, y_n, \theta_n)$ 和 $B(x_{n+1}, y_{n+1}, \theta_{n+1})$ 分别为在采样时间间隔内起始点与终点的位姿坐标，AB 为采样期间的圆弧轨迹，利用图中几何关系可以得到运动轨迹为圆弧时的推算公式如下：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{L(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2(\Delta S_R - \Delta S_L)} \left[\sin\left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L}\right) - \sin\theta_n \right] \\ y_{n+1} = y_n - \frac{L(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2(\Delta S_R - \Delta S_L)} \left[\cos\left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L}\right) - \cos\theta_n \right] \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L} \end{cases}$$

当 $\Delta S_R - \Delta S_L$ 较小时可采用直线模型

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2} \cos\left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L}\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{(\Delta S_R + \Delta S_L)}{2} \sin\left(\theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L}\right) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{L} \end{cases}$$

随着移动距离的增加，误差逐渐加大，其误差的来源主要包括系统误差和非系统误差。系统误差跟实际采用的器件的精度和测量上的误差等方面产生的；非系统误差是在移动过程中随机发生的误差，主要包括：测位轮子的打滑、路况等。

由于非系统误差不容易消除，因此，这里将通过实验的方法来校准机构的安装精度，减小因系统误差对定位精度产生较大影响。

影响测量误差的主要参数是编码器输出一个脉冲对应轮子运动的距离 r 和两个定位轮之间的距离 L ， r 和 L 精度校正的具体方法和实现步骤如下：

编码器一个脉冲代表定位轮运行的距离 r 校正方法：使两个定位轮在室内平面上沿着一条 5 米长度的直线运行，编写软件程序，对与定位轮同轴相连的两个自由编码器的输出脉冲进行计数，将该数值记录左右自由编码器输出脉冲个数 N_L 和 N_R ，根据公式

$$r = \frac{5000}{(N_L + N_R)/2} mm$$

求出每次测量计算得到 r 的值，再取平均值即可。经过多次测试实验结果列表。

定位轮之间的距离 L 校正方法：在平地上，使测位装置从某一起始位置出发，顺时针或逆时针旋转 n 周后再回到该出发位置，记下在该过程与左右定位轮相连的编码器输出的脉冲数分别为 N_L ， N_R ，根据公式

$$L = \frac{(N_L - N_R) * r}{2\pi n}$$

求出每次测量计算得到 L 的值，再取平均值即可。经过多次测试两定位轮之间距离 L 校正实验列表。

参考文献:

- [1]刘金琨.滑模变结构控制 MATLAB 仿真[M].北京:清华大学出版社,2005.
- [2] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, T. Noguchi. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot[C]. Proceedings 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Cincinnati, OH, 1990, 384-389.
- [3]谢志诚.三轮全向移动机器人运动控制研究[D].长沙:长沙理工大学,2010.
- [4]于金霞,王璐,蔡自兴.未知环境中移动机器人自定位技术[M].北京:电子工业出版社,2011.
- [5]李向誉.基于码盘定位的全向移动机器人运动控制系统研究与设计[D].赣州市:江西理工大学,2014.
- [6]杨文军.Mecanum 轮移动机器人循迹控制及其调度研究[D].南京市:东南大学,2014.