

# Automática y Máquinas Eléctricas

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

FACULTAD DE INGENIERÍA - UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

## PROYECTO INTEGRADOR: CONTROL DE ACCIONAMIENTO DE CA CON MOTOR SINCRÓNICO DE IMANES PERMANENTES

Gino Avanzini, Emiliano Cabrino

Septiembre de 2020, Mendoza, Argentina

## Resumen

En este trabajo se realiza el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un sistema de control automático de posición y movimiento para el accionamiento de una articulación de un robot SCARA. Cabe destacar que no es parte de este trabajo modelar o simular la dinámica no lineal (NL) acoplada del robot, solo se considera la dinámica “vista” desde dicha articulación. Se obtuvo un sistema de control robusto y con un buen seguimiento de las consignas de posición provistas por el usuario.

## 1. Introducción

El objetivo de este trabajo es integrar los conocimientos y competencias de la asignatura Automática y Máquinas Eléctricas en el control de 1 eje (desacoplado) para articulación “hombro” de un robot SCARA, referido a una base inercial (1 grado de libertad rotacional de eje vertical, con parámetros equivalentes variables según sea la posición angular instantánea de la articulación “codo”). Dicho accionamiento va a realizarse con una máquina eléctrica de corriente alterna trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes alimentada por un inversor trifásico desde una fuente de corriente continua, un reductor de velocidad planetario, un sensor de posición en el eje del motor y tres sensores de corriente instantánea en la salida del inversor.

En la primera parte de este trabajo, se realiza el modelado, análisis y simulación dinámica a lazo abierto. Primero se definen los modelos matemáticos equivalentes de los distintos subsistemas, posterior a esta etapa se trabaja sobre dos modelos equivalentes LTI y LPV. Luego se realiza una simulación a lazo abierto verificando la validez de nuestro modelo, finalizando con un análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad del mismo.

En la segunda, se realiza el diseño, análisis y simulación de Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial), en el cual se define un controlador PID y un observador de estado parcial. Una vez definido, se analiza el rendimiento de dicho control, realizando simulaciones a cómo responde el sistema a seguimiento de consignas, ya sea de posición o de velocidad, y el análisis de rechazo a perturbaciones. De acuerdo a esto, se finaliza realizando algunas modificaciones sobre el sistema y definiendo restricciones sobre las entradas al mismo.

## 2. Parte A: Modelado, Análisis y Simulación dinámica a Lazo Abierto (sin control realimentado)

### 2.1. Modelo matemático equivalente (1 gdl) del subsistema mecánico del motor + transmisión rígida + carga, referido al eje del motor.

El modelo matemático lo obtenemos a partir de un modelo físico simplificado, en el cual suponemos como simplificación que:

- El estator y rotor están vinculados entre si por la fricción de los rodamientos y por torque electromagnético del entrehierro.
- Entrehierro constante.
- Transmisión rígida en el cual la caja reductora de engranajes planetarios a la cual está adosada el eje del motor no tiene juego mecánico o "backlash", ni elasticidad torsional, ni pérdidas energéticas, es decir rendimiento mecánico 100 %, pero sí es reversible.
- Todos los parámetros del sistema se concentran y se obtienen parámetros concentrados (equivalentes) en el eje del motor.

Habiendo nombrado las simplificaciones, empezamos modelando la carga mecánica en el eje de salida del tren de transmisión:

$$J_l \cdot \ddot{q}(t) = T_q(t) - b_l \cdot \dot{q}(t) - T_l(t) \quad (1)$$

Donde  $q(t)$  es la posición angular instantánea del eje de la salida del tren de transmisión,  $T_q(t)$  es el torque de salida del tren de transmisión,  $b_l$  es el amortiguamiento viscoso o fricción viscosa rotacional de la carga,  $T_l(t)$  es el torque de carga, perturbación o resistente y  $J_l$  es el momento de inercia equivalente de la primera articulación junto con la variación que representa el movimiento de la segunda articulación.

Como la fricción, torque de carga/perturbación/resistente y la inercia varían según la posición de las articulaciones, vamos a considerar un valor nominal de cada parámetro más sus posibles variaciones:

$$b_l \approx (0 \pm 0,0630) \quad \frac{N \cdot m}{rad/s}$$

$$T_l(t) \approx (0 \pm 1,57) \quad N \cdot m$$

$$J_l \approx (0,2520 \pm 0,1260) \quad Kg \cdot m^2$$

Ahora bien, el modelo que vincula el eje de salida del tren de transmisión con el eje de la máquina eléctrica, teniendo en cuenta las consideraciones del tren de transmisión anteriormente dichas, queda de la siguiente manera:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (2)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (3)$$

Donde  $\dot{q}(t)$  es la velocidad angular instantánea de la salida del tren de transmisión,  $r$  es la relación de reducción,  $\omega_m(t)$  es la velocidad angular del eje del motor,  $T_q(t)$  es el torque en el eje de salida del tren de transmisión y  $T_d(t)$  es el torque ejercido en el eje del motor. La reducción total del tren de transmisión es de  $r = 314,3008 : 1$ .

Por último, en el modelo del subsistema mecánico del motor, consideramos el estator estacionario, siendo este el sistema inercial de referencia, quedando:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d \quad (4)$$

$$\dot{\theta}_m(t) \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (5)$$

Donde se vinculan la posición y velocidad angulares  $\theta_m(t)$  y  $\omega_m(t)$  del motor respecto del estator con el torque electromecánico  $T_m(t)$  que entrega el motor y el torque  $T_l(t)$  que es el torque de carga/resistente/perturbación del brazo robótico reflejado en el eje del motor.

A su vez  $J_m$  y  $b_m$  son el momento de inercia y coeficiente de fricción viscosa del motor y la caja cuyos valores son:

$$J_m \approx 3,1 \cdot 10^{-6} \quad Kg \cdot m^2$$

$$b_m \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \quad \frac{N \cdot m}{rad/s}$$

Para obtener el modelo equivalente referido al eje del motor, la ecuación2 se reemplaza en 1 y de ahí se despeja  $T_q$ , obteniendo:

$$T_q(t) = \frac{J_l}{r} \cdot \dot{\omega}_m(t) + \frac{b_l}{r} \cdot \omega_m(t) + T_l(t)$$

Después reemplazando la ecuación3 en la ecuación4 y despejando nuevamente  $T_q$  se obtiene:

$$T_q(t) = r \cdot (T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - J_m \cdot \dot{\omega}_m(t))$$

Ahora igualamos estas ecuaciones halladas recientemente y se llega a:

$$\left( J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - \left( b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \quad (6)$$

Si definimos ciertos parámetros equivalentes como:

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2} \quad ; \quad b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2}$$

Y los reemplazamos en la ecuación6 nos queda:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \quad (7)$$

Ahora con esta última ecuación 7 y la ecuación 5 podemos definir el sistema de ecuaciones que modelan nuestro sistema mecánico completo referido al eje del motor, que expresado matricialmente queda:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \underline{x(t)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \underline{u(t)} \quad ; \quad \underline{x(t_0)} = \begin{bmatrix} \theta_m(t_0) \\ \omega_m(t_0) \end{bmatrix} \\ \underline{y(t)} = [1 \quad 0] \cdot \underline{x(t)} \end{cases} \quad (8)$$

Donde vemos que los vectores quedan definidos como:

$$\underline{x(t)} = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}(t)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{u(t)} = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{y(t)} = [\theta_m(t)]$$

Donde  $\underline{x(t)}$  es el vector de estados,  $\underline{u(t)}$  es el vector de entrada e  $\underline{y(t)}$  el vector de salida.

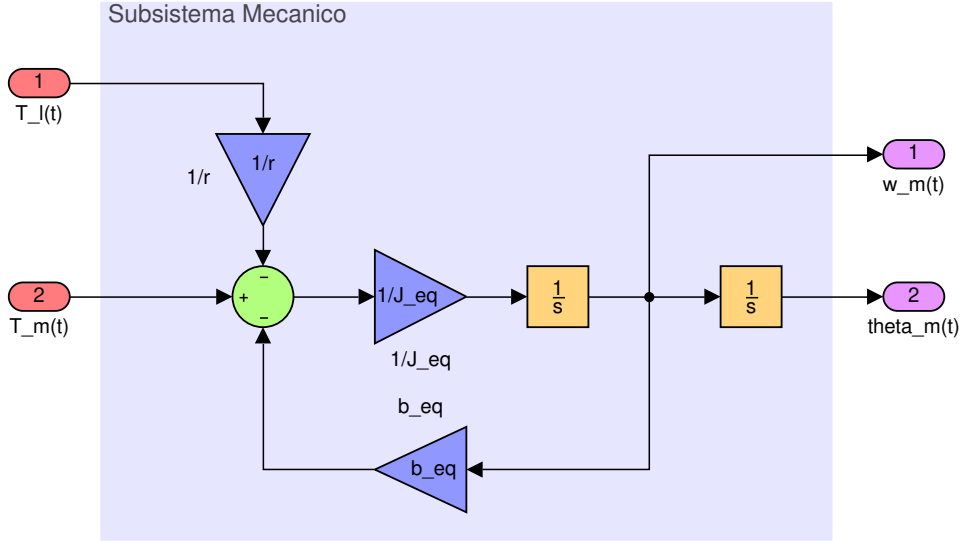


Figura 1: Subsistema mecánico

## 2.2. Modelo dinámico del sistema físico completo, incorporando el subsistema electromagnético y térmico

### 2.2.1. Modelo global no lineal (NL), para $i_{ds}^r(t)$ genérica

Para obtener el modelo del sistema físico del sistema completo es necesario desarrollar el subsistema electromagnético y térmico, que se incorporarán al subsistema mecánico previamente elaborado.

El desarrollo del subsistema electromagnético se realiza a partir de la transformación de Park, la cual convierte las componentes  $abc$  del sistema trifásico a otro sistema de referencia  $qd0$ . El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos variables sinusoidalmente en el tiempo  $abc$ , a valores constantes  $qd0$  en régimen permanente. Las inductancias en los bornes del estator no son constantes dado que dependen de la posición instantánea del rotor. Por lo tanto, se utiliza la transformación de Park para poder trabajar en coordenadas rotóricas  $qd0$  fijas al rotor con inductancias conocidas y constantes.

La transformación directa para pasar desde las coordenadas trifásicas del estator  $abc$  a las coordenadas fijas al rotor  $qd0$  está dada por:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

La transformación inversa para pasar desde las coordenadas fijas al rotor  $qd0$  a las coordenadas trifásicas del estator  $abc$  está dada por:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t)) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Donde  $f_x(t)$  puede representar tensión, corriente, flujo concatenado, entre otros.

Al sistema de ecuaciones 8 que componen el modelo matemático del subsistema mecánico, le añadimos las ecuaciones correspondientes al subsistema electromagnético, luego operamos y alcanzamos un modelo matemático del sistema global. Las expresiones de las coordenadas eléctricas del entrehierro  $qd0$  fijas al rotor (marco de referencia sincrónico) y del torque electromagnético son las siguientes:

$$\dot{\theta}(t) \equiv \omega_r(t) \quad (11)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \cdot \theta_m(t) \quad ; \quad \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (12)$$

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (13)$$

Donde la ecuación 11 y 12 vinculan la posición y velocidad mecánicas con sus correspondientes eléctricas. En la ecuación 13,  $i_{ds}^r(t)$  es la componente de la corriente paralela al flujo,  $i_{qs}^r$  es la componente de la corriente perpendicular al flujo 90° eléctricos,  $P_p$  en el numero de pares de polos magnéticos,  $\lambda_m^r$  es el flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado del estator observado desde el rotor,  $L_d$  es la inductancia de estator en el eje directo y  $L_q$  es la inductancia de estator en el eje en cuadratura. En máquinas síncronas de polos salientes el camino magnético del flujo resultante no es constante debido a la variación del espacio del entrehierro, en este tipo de máquinas  $L_d$  es mayor a  $L_q$ . Estos parámetros tienen los siguientes valores:

- Numero de pares de polos:  $P_p = 3$
- Flujo magnético equivalente:  $\lambda_m^r \approx 0,01546 \quad Wb$
- Inductancia de estator, eje en cuadratura:  $L_q \approx 5,8 \quad mH$
- Inductancia de estator, eje directo:  $L_d \approx 6,6 \quad mH$
- Inductancia de dispersión de estator:  $L_{ls} \approx 0,8 \quad mH$

El balance de tensiones eléctricas equivalentes del estator, referido a coordenadas  $qd0$  fijas en el rotor, está dado por:

$$v_{qs}^r(t) = R_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \quad (14)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (15)$$

$$v_{0s}(t) = R_s \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}(t)}{dt} \quad (16)$$

Donde  $v_{qs}^r(t)$ ,  $v_{ds}^r(t)$ , y  $v_{0s}(t)$  son las tensiones;  $i_{qs}^r(t)$ ,  $i_{ds}^r(t)$  y  $i_{0s}^r$  son las corrientes de fase;  $R_s$  es la resistencia de estator por fase, la cual depende de la temperatura;  $L_{ls}$  es la inductancia de dispersión de estator. La tensión  $v_{0s}(t)$  y la corriente  $i_{0s}(t)$  representan cualquier desequilibrio que exista en el sistema.

Con las ecuaciones 14, 15 y 16, se obtienen las ecuaciones del modelo de estados del subsistema electromagnético. La figura 2 muestra el diagrama de bloques de dicho sistema. Ahora reemplazando la ecuación 13 en la ecuación 7 y combinando el subsistema mecánico con el subsistema electromagnético, obtenemos las siguientes ecuaciones de estado del modelo global no lineal (sin el subsistema térmico):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left\{ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot i_{qs}^r(t) \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l}{r} \right\} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot i_{0s}(t) + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \end{array} \right. \quad (17)$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{x}}(t) = & \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ -\frac{b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} + \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t)}{2 \cdot J_{eq}} + \frac{3 \cdot P_p \cdot (L_d - L_q)}{2 \cdot J_{eq}} \cdot \underbrace{i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t)} \\ -\frac{R_s}{L_q} \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{\lambda_m^r \cdot P_p}{L_q} \cdot \omega_m(t) - \frac{L_d \cdot P_p}{L_q} \cdot \underbrace{i_{ds}^r(t) \cdot \omega_m(t)} \\ -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r + \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot \underbrace{i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t)} \\ -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{0s} \end{bmatrix} + \dots \\
+ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{d}(t)
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\underline{y}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \underline{x}(t)$$

Siendo el vector de estado  $\underline{x}(t)$  y la condición inicial  $\underline{x}(t_0)$ :

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \dot{i}_{0s}(t) \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_m(t_0) \\ \omega_m(t_0) \\ i_{qs}^r(t_0) \\ i_{ds}^r(t_0) \\ i_{0s}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \end{bmatrix}$$

Y los vectores de entrada  $\underline{u}(t)$ , perturbación,  $\underline{d}(t)$ , y salida,  $\underline{y}(t)$ , respectivamente:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} ; \quad \underline{d}(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ r \end{bmatrix} ; \quad \underline{y}(t) = [\theta_m]$$

Si prestamos atención a los términos resaltados de la ecuación matricial 18, podemos observar que hay multiplicaciones entre dos variables de estado, esto hace que el sistema sea no lineal.

Ahora desarrollamos el subsistema térmico, y para ello, tomamos un modelo simplificado donde se consideran solo las pérdidas resistivas por efecto Joule en el bobinado del estator, despreciando las pérdidas magnéticas y las pérdidas por fricción en los rodamientos. Consideramos la transferencia de calor por conducción y convección natural, sin ventilador. Cabe aclarar que este subsistema se utilizará únicamente para el monitoreo de la temperatura, que no debe superar la temperatura máxima del bobinado del estator, por eso no es agregada.

La potencia de pérdidas esté dada por la siguiente ecuación:

$$P_{perd}(t) = R_s \cdot \left( i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t) \right) \tag{19}$$

El balance térmico del estator esta dado por:

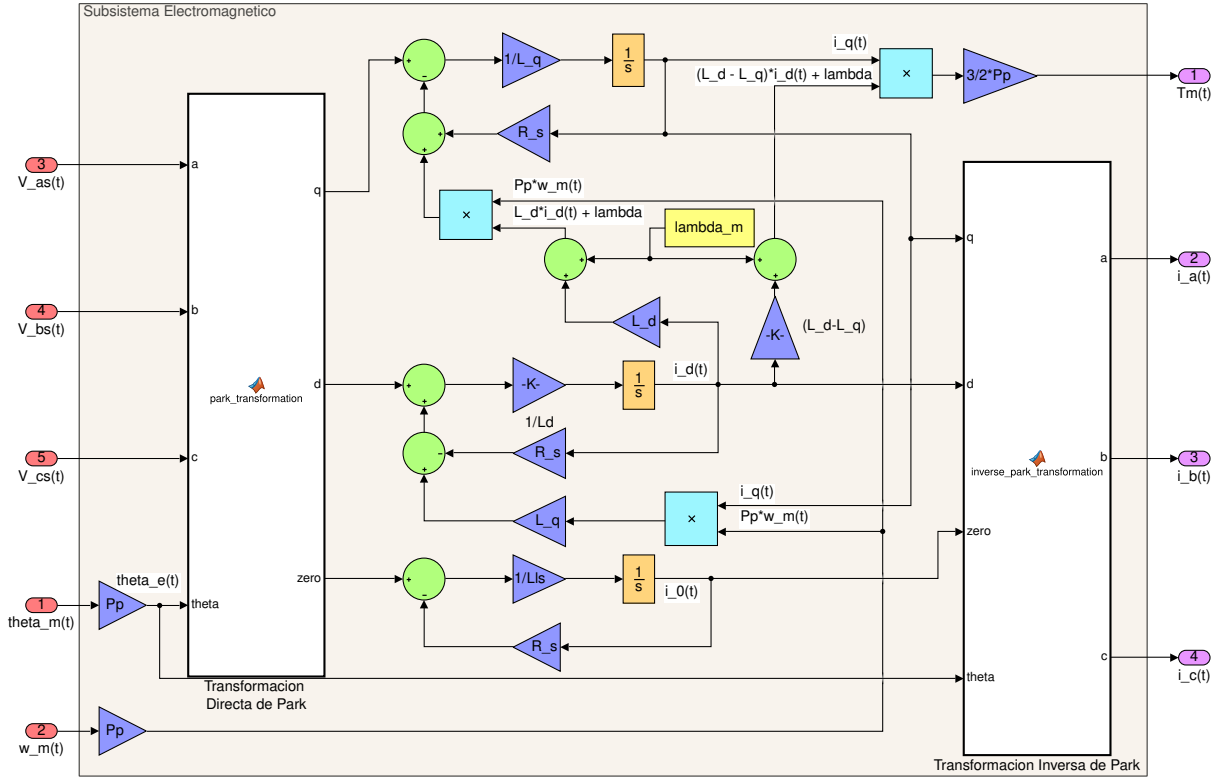


Figura 2: Subsistema Electromagnético

$$P_{perd}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s(t) - T_{amb}(t)) \quad (20)$$

Si igualamos la ecuación 19 con la ecuación 20 nos queda:

$$R_s \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s(t) - T_{amb}(t))$$

Donde:  $R_s$ : resistencia de los devanados estatóricos.  $T_{amb}(t)$ : temperatura ambiente.  $R_{ts-amb}$ : resistencia térmica estator-ambiente.  $C_{ts}$ : capacitancia térmica del estator.

Pero a su vez la resistencia del devanado estatórico depende de la temperatura:

$$R_s = R_{sREF} \cdot [1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s(t) - T_{sREF})] \quad ; \quad \alpha_{Cu} = 3,9 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ C} \quad (21)$$

Si bien la variación de la temperatura provocaría una variación de la resistencia del estator, lo que produciría, a su vez, una variación de las corrientes que modificaría el comportamiento global del sistema, dicho análisis excede los alcances del proyecto por lo que se asume que la variación de dicha resistencia es despreciable, es decir, se permite considerar que  $R_s$  sería constante en ciertos rangos de temperatura. De esta manera, no se realimenta a ningún otro subsistema y se utilizaría únicamente para el monitoreo de la temperatura, la cual no debe superar la temperatura máxima del bobinado del estator. Los valores de los parámetros se muestran a continuación:

- Resistencia de estator por fase:  $R_s \approx 1,02\Omega(@40^\circ C) \Rightarrow 1,32\Omega(@115^\circ C)$
- Capacitancia termica de estator:  $C_{ts} \approx 1,091W/(^\circ C/s)$
- Resistencia térmica estator-ambiente:  $R_{ts-amb} \approx 55^\circ C/W$



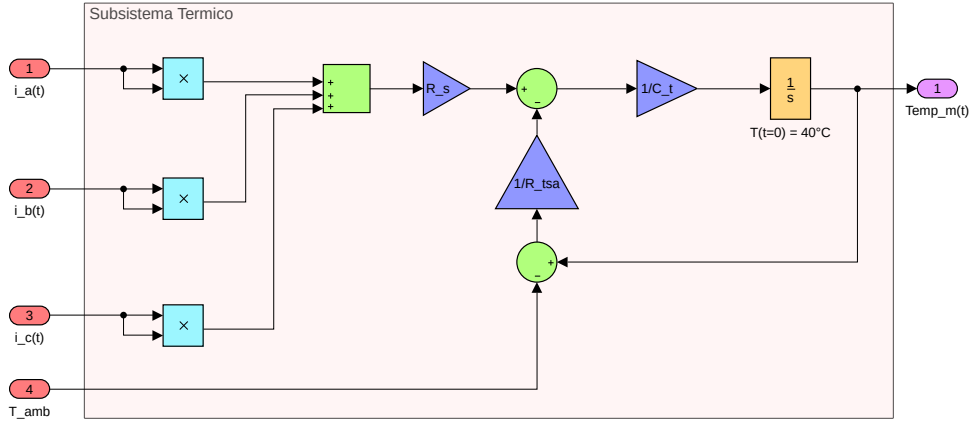


Figura 3: Subsistema térmico

Si combinamos los subsistemas desarrollados hasta acá (mecánico, electromagnético y térmico) obtenemos un modelo dinámico del sistema físico completo, el cual podemos ver en la figura 4.

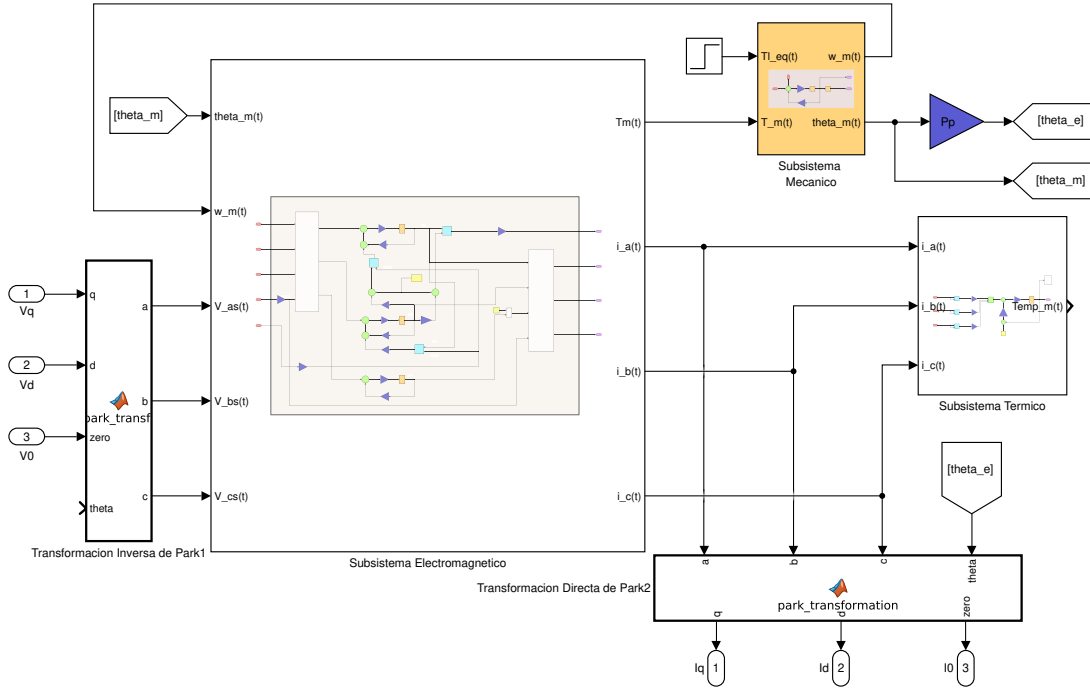


Figura 4: Sistema físico completo

### 2.2.2. Modelo simplificado lineal invariante en el tiempo (LTI), para corriente de eje directo nula

Se desea obtener un sistema de ecuaciones en donde no haya multiplicación de variables de estado, es decir, un sistema lineal. Para convertir el sistema global no lineal descrito anteriormente, se imponen algunas restricciones y simplificaciones. Consideramos que:

- $i_{ds}^r \equiv 0$ . Para lograrlo deberemos forzar una restricción sobre la tensión  $v_{ds}^r(t)$ , como se verá más adelante.
- La temperatura de los bobinados no es variable de estado. De esta forma consideramos que  $R_s$  toma un valor constante y la temperatura no tendrá efecto sobre el resto de las variables de estado.
- La máquina eléctrica forma un sistema simétrico y equilibrado y como está conectada en estrella con neutro flotante,  $i_{0s} = 0$  y  $\frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow v_{0s}(t) = 0$ .

Esto último puede justificarse mediante la ley de los nodos de Kirchoff, aplicando la transformación de Park descrita en la ecuación 9 y la ecuación 16, de  $v_{0s}$ .

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0$$

$$i_{0s}(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) = \frac{1}{3} \cdot (0) = 0$$

Si con alguna técnica de control logramos que la corriente de eje directo sea cero, obtenemos un sistema que es lineal invariante en el tiempo. Si forzamos que:

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0s}(t) = 0$$

Entonces obtendremos el siguiente sistema, el cual se asemeja al modelo de una máquina de corriente continua con escobillas.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l}{r} \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot \left[ v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \right] \end{cases} \quad (22)$$

Y de forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot [v_{qs}^r(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [T_l(t)] \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

Además, la ecuación del torque electromagnético será:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t)$$

A diferencia del sistema global no lineal expresado en la ecuación 18, el modelo de la ecuación 23 no posee productos entre variables de estado, por lo que las matrices de coeficientes no varían en el tiempo. Por ende, estamos en presencia de un sistema lineal, invariante en el tiempo (LTI).

Al imponer que la corriente de eje directo sea nula, su ecuación eléctrica correspondiente queda:

$$0 = v_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)$$

Lo que genera la siguiente restricción sobre la variable manipulada  $v_{ds}^r(t)$ :

$$v_{ds}^r(t) = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)$$

Esta es una ecuación algebraica con una relación no lineal debido al producto de variables de estado y es una restricción que se debe imponer a la tensión en el eje directo para que la corriente  $i_d(t)$  sea nula. Es una realimentación directa no lineal parcial de dos de las variables estado que es impuesta al modelo no lineal.

Al aplicar la transformación inversa de Park, teniendo en cuenta que las corrientes en los ejes directo y cero son nulas, las corrientes en el sistema  $abc$  nos quedan de la siguiente forma:

$$i_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot i_{qs}^r(t)$$

$$i_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot i_{qs}^r(t)$$

$$i_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot i_{qs}^r(t)$$

Se puede observar que las corrientes de fase tendrán la misma amplitud pero estarán desfasadas 120 grados eléctricos una de otra. Para las tensiones, tenemos:

$$v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \sin(\theta_r(t))$$

$$v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3})$$

$$v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3})$$

El modelo en bloques resultante es el que se observa en la figura 5.

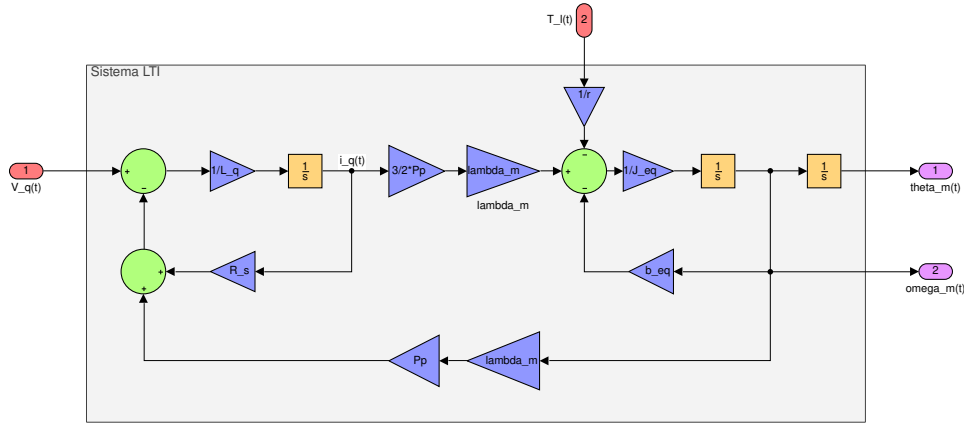


Figura 5: Sistema LTI

### 2.2.3. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV), para corriente de eje directo genérica, a partir de modelo NL mediante aproximación de Taylor de 1° orden en punto genérico de operación

El sistema analizado en este proyecto resulta no lineal, debido a que hay diferentes multiplicaciones entre variables de estado. Para analizar dicho sistema se utiliza la metodología de linealización de sistemas no lineales, que permite utilizar herramientas de control lineal.

Emplearemos una aproximación lineal, donde se asume que para todas las variables de estado del modelo tenemos una parte cuasi-estacionaria en el tiempo de dicha variable que es no lineal y otra parte con dependencia rápida del tiempo y lineal pero de muy pequeña amplitud.

$$z(t) = Z_0^{(t)} + \Delta z(t) \quad (24)$$

Donde  $\mathbf{z}(t)$  representa la variable de estado,  $\mathbf{Z}_0^{(t)}$  representa una parte cuasi-estacionaria de la variable de estado y  $\Delta \mathbf{z}(t)$  representa la parte dependiente del tiempo lineal de pequeña amplitud.

Entonces lo que hacemos es observar en puntos de operación cuasi-estacionarios las pequeñas variaciones generadas por los  $\Delta$  y para ello se aplica una expansión por serie de Taylor de 1° orden y se llega a la separación del problema en dos modelos.

El primero de ellos, es un modelo no lineal cuasi-estacionario de “equilibrio” dinámico:

$$\begin{cases}
\dot{\theta}_{m_0} = \omega_{m_0} \\
\dot{\omega}_{m_0} = \frac{1}{J_{eq}} \left\{ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left[ \lambda'_m + (L_d - L_q) \cdot i_{ds_0}^r \right] \cdot i_{qs_0}^r - b_{eq} \cdot \omega_{m_0} - \frac{1}{r} \cdot T_{l_0} \right\} \\
\dot{i}_{qs_0}^r = \frac{1}{L_q} \cdot \left[ v_{qs_0}^r - R_s \cdot i_{qs_0}^r - (\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds_0}^r) \cdot P_p \cdot \omega_{m_0} \right] \\
\dot{i}_{ds_0}^r = \frac{1}{L_d} \cdot \left[ v_{ds_0}^r - R_s \cdot i_{ds_0}^r + L_q \cdot i_{qs_0}^r \cdot P_p \cdot \omega_{m_0} \right] \\
\dot{i}_{0s_0} = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot i_{0s_0} + \frac{1}{L_{ls}} \cdot v_{0s_0} \\
\dot{T}_{s_0}^\circ = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs_0}^r{}^2 + i_{ds_0}^r{}^2 + i_{0s_0}^2) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_{s_0}^\circ - T_{amb_0}^\circ) \right]
\end{cases} \quad (25)$$

Como es un problema cuasi-estacionario, es valido realizar la siguiente suposicion para pequeñas variaciones alrededor de dichos puntos:

$$\frac{dX_0}{dt} \approx 0$$

Es decir que las variaciones en el punto de operacion de las variables de estado son cercanas a cero o practicamente iguales a cero, salvo para la variable de estado  $\dot{\theta}_{m_0} = cte$  ya que si fuera cero estaríamos en un estado quieto, y nos interesa el estudio del caso de la maquina en movimiento. El segundo es un modelo dinámico lineal con parámetros variables (LPV) de pequeñas variaciones:

$$\begin{cases}
\Delta \dot{\theta}_m(t) = \Delta \omega_m(t) \\
\Delta \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left\{ -b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) - \frac{1}{r} \Delta T_l(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left\{ \left[ \lambda'_m + (L_d - L_q) \cdot i_{ds_0}^r \right] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs_0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \right\} \right\} \\
\Delta \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} \cdot \left[ \Delta v_{qs}^r(t) - R_s \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot (\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds_0}^r) \cdot \Delta \omega_m(t) - P_p \cdot L_d \cdot \omega_{m_0} \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \right] \\
\Delta \dot{i}_{ds}^r(t) = \frac{1}{L_d} \cdot \left[ \Delta v_{ds}^r(t) - R_s \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot P_p \cdot (i_{qs_0}^r \cdot \Delta \omega_m(t) + \omega_{m_0} \cdot \Delta i_{qs}^r(t)) \right] \\
\Delta \dot{i}_{0s}(t) = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot \Delta i_{0s}(t) + \frac{1}{L_{ls}} \cdot \Delta v_{0s}(t) \\
\Delta \dot{T}_s^\circ(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[ 3 \cdot R_s \cdot (i_{qs_0}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + i_{ds_0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{0s_0}) \cdot \Delta i_{0s}(t) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (\Delta T_s^\circ(t) - \Delta T_{amb}^\circ(t)) \right]
\end{cases} \quad (26)$$

En forma matricial el modelo dinámico global LPV queda:

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}^\circ_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r]}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r)}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{P_p \cdot L_d \cdot \omega_{m0}}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot i_{qs0}^r & \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot \omega_{m0} & -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{qs0}^r & \frac{3 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{ds0}^r & \frac{6 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{0s0} & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta t i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T^\circ_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T^\circ_{amb}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Considerando la restricción  $i_{ds}^r(t) = 0$  y dado que  $i_{0s}^r(t) = 0$  se obtiene el siguiente sistema (sin considerar el subsistema térmico):

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \\ & [\Delta \theta_m(t)] = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

Comparando dichas ecuaciones con el modelos LTI, ecuaciones 23, se puede observar que se obtiene el mismo resultado, es decir, los modelos coinciden. En cualquier otro caso donde  $i_{ds}^r(t) \neq 0$ , el modelo global LPV es el que representa en forma completa al sistema.

Dado que la corriente directa  $i_{ds}^r(t)$  esta orientada en el mismo sentido que el campo principal de la maquina, encontramos las siguientes situaciones:

- Con  $i_{ds}^r = 0$ : solo esta el flujo concatenado por imanes ( $\lambda_m^r$ ).
- Con  $i_{ds}^r > 0$ : tenemos reforzamiento de campo (mayor torque, menor velocidad).
- Con  $i_{ds}^r < 0$  tenemos debilitamiento de campo (menor torque, mayor velocidad).

Este comportamiento se puede describir con la ecuación 13:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t)$$

Sabiendo que  $L_d - L_q > 0$  para este tipo de maquinas eléctricas, al aumentar  $i_{ds}^r(t)$ , aumentara  $T_m(t)$ , y si disminuye la corriente, disminuye el torque. Si de la ecuación 17, se considera un valor de  $i_{ds}^r(t)$  constante y despejamos la velocidad angular, nos queda:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] = 0$$

$$\omega_m(t) = \frac{-v_{ds}^r(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t)}{L_q \cdot P_p \cdot i_{qs}^r(t)}$$

Pudiendo observar que una  $i_{ds}^r(t)$  positiva producirá una disminución del modulo de la velocidad angular y una negativa producirá el aumento del módulo. Dado que la transmisión es a potencia constante un aumento de torque producirá una disminución de velocidad y viceversa.

#### 2.2.4. Funciones de Transferencia para el caso simplificado lineal (LTI) considerando $i_{ds}^r \equiv 0$

Para encontrar las funciones de transferencia en lazo abierto de las entradas  $v_{qs}^r(t)$  y  $T_l(t)$  con la salida  $\theta_m(t)$ , se parte del sistema de ecuaciones 23 del modelo LTI, y se le aplica la transformada de Laplace, quedando:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{1}{r} \cdot T_l(s) \right] \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \left[ V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \Omega_m(s) \right] \end{cases} \quad (28)$$

Despejando las ecuaciones y operando algebraicamente llegamos a:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} \cdot (L_q \cdot s + R_s) \cdot T_l(s)}{[L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}) \cdot s]} \quad (29)$$

De donde se pueden obtener ambas funciones de transferencia:

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{[L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}) \cdot s]} \quad (30)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{(L_q \cdot s + R_s)}{[L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}) \cdot s]} \quad (31)$$

Podríamos llegar al mismo resultado si la buscamos a partir de la ecuación general de la función de transferencia en forma matricial:

$$G(s) = C \cdot [sI - A]^{-1} \cdot B$$

### 2.3. Análisis de estabilidad a lazo abierto (para corriente de eje directo nula)

#### 2.3.1. Determinación de polos y ceros del sistema

Un sistema LTI de orden  $n$  es estable si, para toda excitación  $u(t)$  acotada en  $t > t_0$  (respuesta forzada), todos sus estados  $x_i(t)$  toman valores acotados. Si desaparece la excitación (respuesta natural), el sistema tiende al origen del espacio de estados ( $x = 0$ ). Matemáticamente, se dice que un sistema lineal es estable si todos los autovalores de la matriz de coeficientes  $A$  tienen parte real negativa. Estos autovalores son los polos del sistema.

Trabajando sobre el polinomio característico de las funciones de transferencia previamente calculadas, obtenemos los polos del sistema, los cuales dan información sobre el comportamiento dinámico del sistema:

$$s \cdot \left[ J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}) \right] = 0 \quad (32)$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = \frac{-(R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \pm \sqrt{(R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q)^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{cases} \quad (33)$$

Los polos del sistema, calculados a 40°C y para valores nominales de parámetros, son los siguientes:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -89,26 + 301,27i \\ s_3 = -89,26 - 301,27i \end{cases}$$

Dado que la parte real de los polos es negativa (y el otro polo es cero), podemos determinar que el sistema es estable. Al tener parte imaginaria también nos dice qué tipo de amortiguamiento tiene el sistema (subamortiguado), y su coeficiente de amortiguamiento será calculado en el próximo inciso.

Podríamos pensar que debido a que un polo es cero estaríamos en el borde de estabilidad del sistema, y que ante incertidumbres en los parámetros de la planta esta podría volverse inestable; pero en realidad ese polo de valor cero es debido al integrador a la salida de la planta, por eso estamos seguros que no va a cambiar su valor y eso nos quita la posibilidad de que llegue a ser un valor positivo.

Al cero del sistema lo aporta la entrada de perturbación  $T_i$ :

$$-(R_s + L_q \cdot s) = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{R_s}{L_q} = -175,862$$

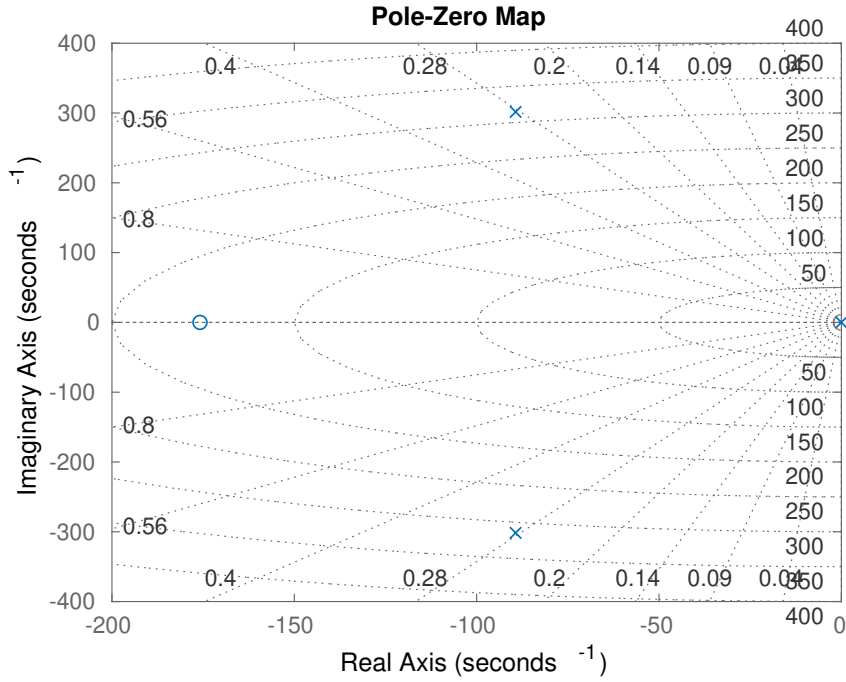


Figura 6: Mapa de polos y ceros del sistema

### 2.3.2. Evaluación de estabilidad. Determinación de frecuencia natural y amortiguamiento

Para evaluar la frecuencia natural y el amortiguamiento se plantea lo siguiente:

$$s^2 + \left(\frac{r_s}{L_q} + \frac{b_{eq}}{J_{eq}}\right) \cdot s + \frac{1}{L_q \cdot J_{eq}} \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2) = 0 \quad (34)$$

Comparando con la forma estándar para sistemas de segundo orden:

$$s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

Obtenemos las siguientes expresiones:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{L_q \cdot J_{eq}} \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)} \quad (35)$$

$$\zeta = \frac{\left(\frac{R_s}{L_q} + \frac{b_{eq}}{J_{eq}}\right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{L_q \cdot J_{eq}} \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)}} \quad (36)$$

Para 40°C y tomando los valores nominales de los coeficientes, estos valores son:

$$\omega_n = 314,5047 \quad \frac{rad}{s} \quad ; \quad \zeta = 0,2838$$

A partir de lo cual, se puede decir que el sistema es subamortiguado, con una respuesta rápida ya que  $\zeta$  es menor a 1.

## 2.4. Respuesta dinámica en el dominio del tiempo para sistema LTI

Evaluamos la respuesta del vector de estado  $\theta(t); \omega(t); i_{qs}^r(t)$  y de  $v_{ds}^r(t)$ . Al sistema LTI con  $i_{ds}^r(t) = 0$  le aplicamos un escalón de tensión en  $t = 0,1s$ . Posteriormente se aplica un escalón de torque de carga en  $t = 0,3s$ :

$$v_{qs}^r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,1s \\ 19,596V & t \geq 0,1s \end{cases}$$

$$T_l(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,3s \\ 1,57Nm & t \geq 0,3s \end{cases}$$

En la figura 8 se observa la respuesta en el dominio del tiempo ante un escalón de tensión en el eje en cuadratura. Se observa un sobrepico en la velocidad que llega a casi a 600rad/s, lo cual está dentro de las especificaciones. Sin embargo las corrientes  $i_{as}(t)$ ,  $i_{bs}(t)$  y  $i_{cs}(t)$  llegan a más de 5A en el transitorio, lo cual viola las especificaciones máximas. Esto se debe a que el sobrepico en la corriente  $i_{qs}^r(t)$  es muy grande.

Se puede observar en la figura 7 el modelo en bloques de Simulink utilizado para encontrar la respuesta dinámica en el dominio del tiempo a lazo abierto.

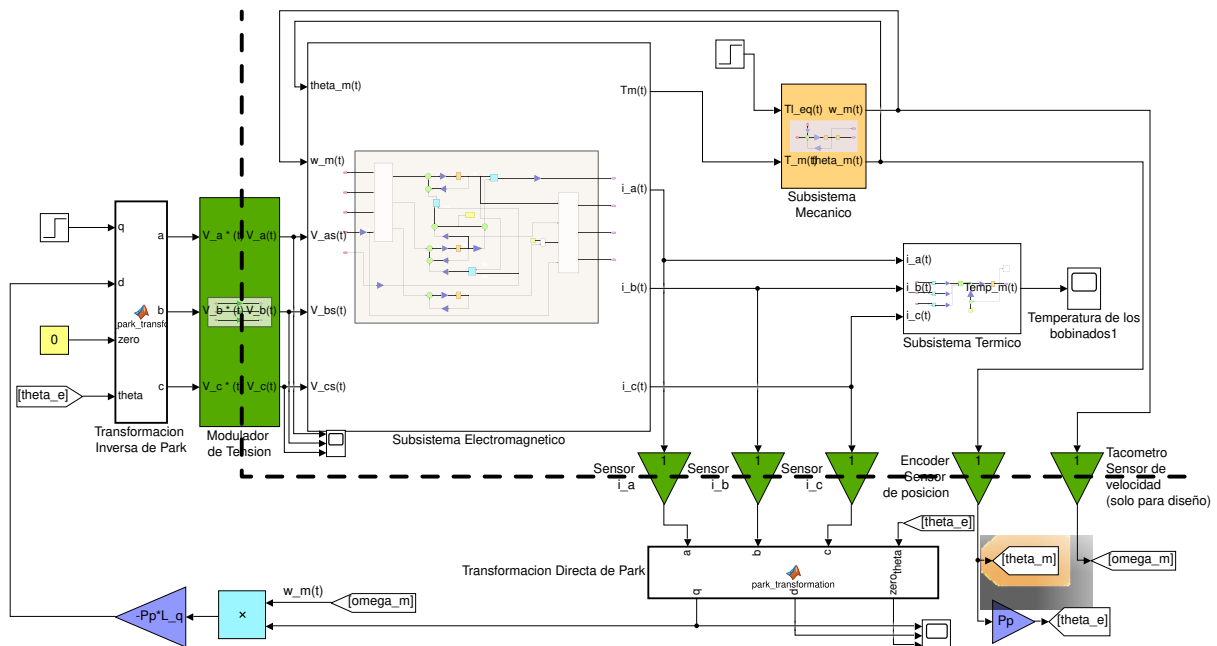


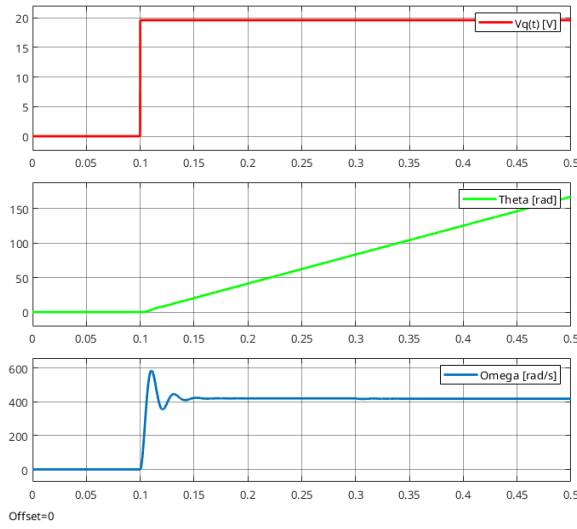
Figura 7: Modelo utilizado para encontrar la respuesta dinámica a lazo abierto. La línea punteada representa la interfaz entre la planta y el controlador.

La aplicación del torque de carga no tiene mucha incidencia en el sistema debido a su pequeño valor relativo, y al efecto de la elevada reducción dada por la caja planetaria de engranajes.

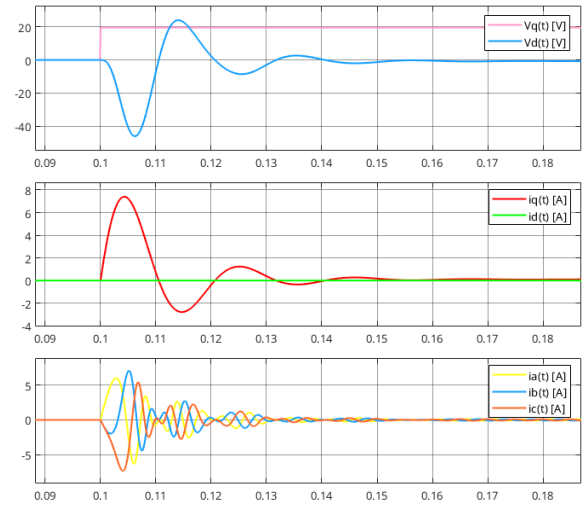
**2.5. Análisis de Controlabilidad completa de estado (para  $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ ) desde entrada manipulada  $v_{qs}^r(t)$ , sin considerar la perturbación de la carga mecánica**

Se dice que un sistema **LTI** es controlable en  $t_0$  si se puede transferir desde cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control  $u(t)$  no restringido, en un intervalo de tiempo





(a) Respuesta de  $\theta(t)$  y  $\omega(t)$  ante escalón de  $v_{qs}^r(t)$ . En  $t = 0,3s$  se acopla el torque de carga y se observa una pequeña caída en la velocidad. Ver el acercamiento en la figura 10



(b) Respuesta de la tensión  $v_{ds}^r(t)$  y las corrientes en eje directo y en cuadratura ante escalón de  $v_{qs}^r(t)$ . Abajo se observan las corrientes en el marco  $abc$ .

Figura 8: Respuesta de las variables de estado ante escalón de  $v_{qs}^r(t)$ .

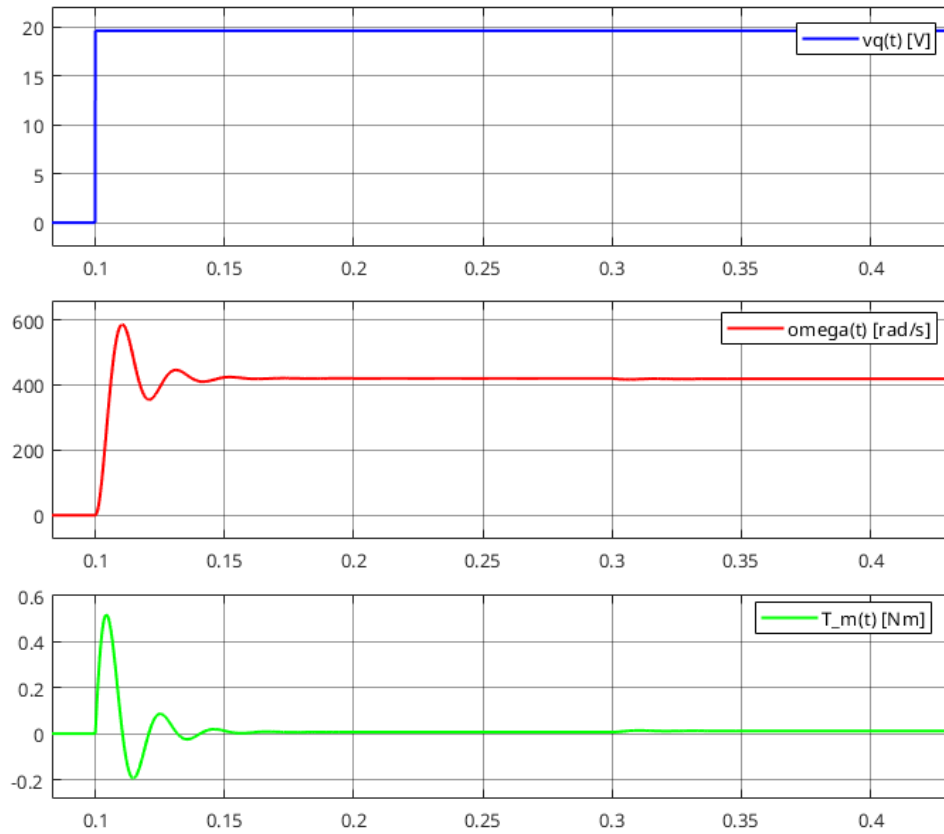
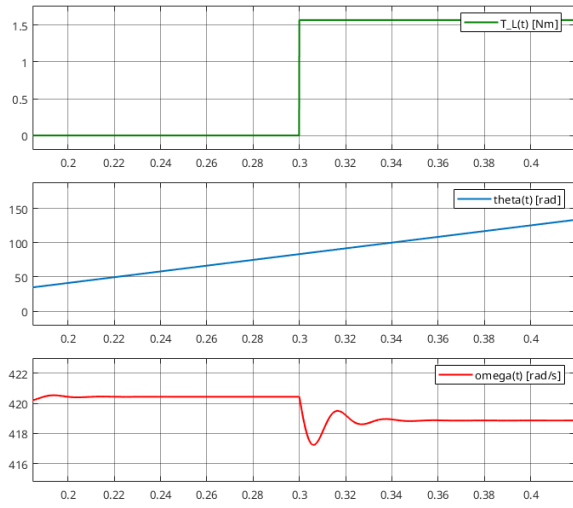
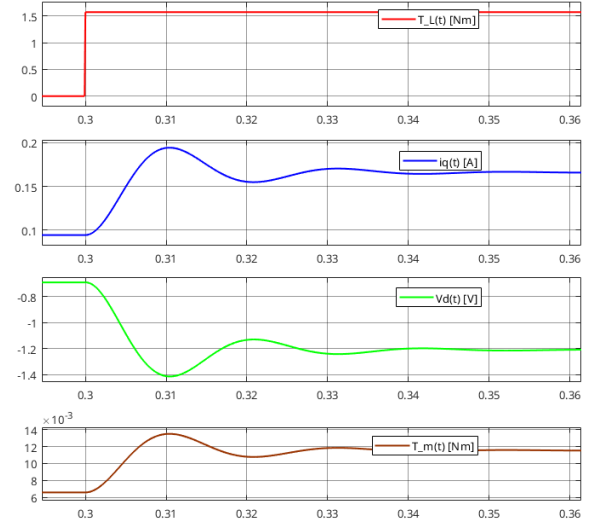


Figura 9: Variación del torque motor al efectuar un escalón en la tensión en el eje en cuadratura  $v_{qs}^r(t)$

finito. En otras palabras, es posible con entradas admisibles cambiar los estados de cualquier valor inicial a cualquier otro valor final en un intervalo de tiempo dado. Si todos los estados son controlables se dice que el sistema es de estado completamente controlable.



(a)



(b)

Figura 10: Respuesta de las variables de estado ante escalón de  $T_l(t)$  en  $t = 0,3s$ .

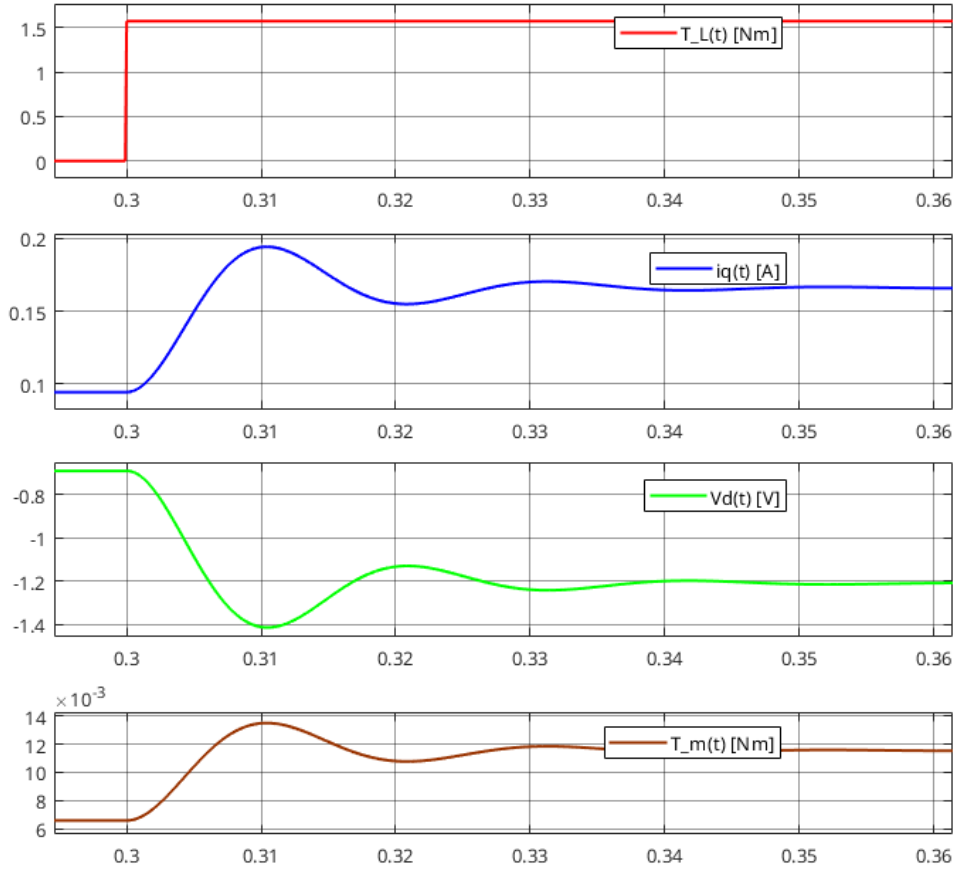


Figura 11: Respuesta de  $i_{qs}^r(t)$  al escalón de  $T_l(t)$ . Se observa también la evolución de la restricción sobre la variable  $v_{ds}^r(t)$  y del torque motor.

El criterio de controlabilidad completa de estado en el espacio de estados requiere que los vectores  $[B, A \cdot B, \dots, A^{n-1} \cdot B]$  sean linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz de controlabilidad debe tener un rango  $n$ , siendo  $n$  la cantidad de variables de estado.

	$\omega_m$	$i_{qs}^r$
Valor final de establecimiento	420,51 rad/s	0,162 A
Tiempo de establecimiento	0,1508 s	0,036 s
Tiempo de crecimiento	0,0042 s	0,0041s
Sobrepico	586,32 rad/s (139 %)	0,1927 A (118 %)

Cuadro 1: Características de desempeño de respuesta transitoria a escalón

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & \mathbb{A}\mathbb{B} & \dots & \mathbb{A}^{n-1}\mathbb{B} \end{bmatrix}$$

Segun las matrices de la ecuación 23, calculamos la matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq} \cdot L_q} \\ 0 & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2 \cdot L_q} - \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m'^r{}^2}{J_{eq} \cdot L_q^2} + \frac{R_s^2}{L_q^3} \end{bmatrix}$$

La cual tiene rango 3, verificando que el sistema es controlable por lo que existirá alguna ley de control en el espacio de estados que permita ubicar los polos de forma arbitraria.

## 2.6. Análisis de Observabilidad completa de estado (para $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ ) desde salida medida $\theta_m(t)$

Se dice que un sistema **LTI** es observable en  $t_0$  si, con el sistema en el estado inicial  $x(t_0)$ , es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito. En otras palabras, nos dice que un sistema será observable si cada cambio en una variable de estado afecta a cada elemento del vector de salida. Si es completamente observable existirá la forma de reconstruir el estado a partir de la salida.

El criterio de observabilidad en el espacio de estado requiere que los vectores  $[C, C \cdot A, \dots, C \cdot A^{n-1}]$  sean linealmente independientes.

Por lo tanto, la matriz de observabilidad debe tener rango  $n$ , siendo  $n$  la cantidad de variables estado.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C}\mathbb{A} \\ \dots \\ \mathbb{C}\mathbb{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Según las matrices de la ecuación 23, calculamos la matriz de observabilidad para la salida  $\theta_m(t)$ . Su rango es igual al numero de variables de estado (3), verificando que el sistema es observable a partir de dicha salida, es decir que es posible reconstruir el estado mediante el estudio de esta.

$$\mathcal{O}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}{2 \cdot J_{eq}} \end{bmatrix}$$

Ahora, si suponemos que la salida medida va a ser  $\omega_m(t)$ , es decir que no se mide posición con un encoder sino velocidad con un tacogenerador, vemos que el rango de dicha matriz  $\mathcal{O}_\omega$  es 2. Esto nos indica que no se podría reconstruir el estado a partir de la velocidad del motor.

$$\mathcal{O}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{b_{eq}^2}{J_{eq}} - \frac{3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^r{}^2}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot b_{eq}}{2 \cdot J_{eq}} - \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot R_s}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{bmatrix}$$

### 3. Parte B: Diseño, análisis y simulación de Controlador de Movimiento en cascada con modulador de torque equivalente (control vectorial)

En esta parte del proyecto presentamos una estrategia de control a lazo cerrado denominada control en cascada. Consiste en implementar dos lazos de control, uno interno y otro externo. El primero es un lazo rápido de control de corriente y torque y el segundo es un lazo de movimiento. Se propone este tipo de controlador en contraposición al control por realimentación completa de estado.

El controlador posee varias partes: un modulador de torque, que transforma las consignas de torque en consignas de tensión; un modulador de tensión, que transforma las consignas (señales) de tensión en tensiones efectivas en los bornes de la máquina; un controlador de movimiento PID que recibe un perfil de posición o velocidad y genera las correspondientes consignas de torque; y un observador de estado de orden reducido. El modulador de torque se obtendrá al compensar las realimentaciones naturales del modelo físico y plantear un lazo interno de corriente.

Al modelar un sistema real estamos realizando ciertas simplificaciones y aproximaciones y al hacerlo habrá imprecisiones e incertidumbre en el modelo y sus parámetros. El controlador externo de movimiento es realimentado con velocidad y permite solucionar en cierta medida este problema. Finalmente, el observador de estado se agrega debido a la carencia de sensor de velocidad; sólo se realimenta la posición medida mediante un *encoder*.

Las especificaciones para el diseño del controlador son:

- Corriente nula en el eje directo:  $i_{ds}^r(t) \equiv 0$
- Diseño en tiempo continuo
- Acceso a todas las variables de estado para realimentación. Posteriormente se implementará un observador de estado reducido para estimar la velocidad.
- Valores nominales de inercia y amortiguamiento de la carga mecánica.

#### 3.1. Modulador de torque equivalente (controlador interno de corriente)

El modulador de torque se plantea para poder ingresar una consigna o señal de control de torque proveniente del lazo externo de control y obtener a la salida tres señales de tensión. Estas señales o consignas de tensión luego son llevadas a la realidad mediante un modulador de tensión, un inversor trifásico. Posteriormente, en la sección 3.2 se verá cómo generar las consignas que ingresan al modulador de torque.

Nos basaremos en los siguientes lineamientos:

- Desacoplamiento de todas las realimentaciones naturales de estado hacia la entrada.
- Diseño de lazos internos de control vectorial de corrientes desacoplados de la velocidad (donde  $i_{ds}^r(t) = 0$ ), con control proporcional únicamente; con polos en  $p_i = -5000\text{rad/s}$
- Incorporación adecuada de consigna de torque (nueva variable manipulada)

De las ecuaciones del modelo global no lineal descriptas en las ecuaciones 17 recordamos las ecuaciones eléctricas:

$$\begin{aligned}
 L_q \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &= v_{qs}^r(t) - \underbrace{R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t)[L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r]} \\
 L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &= v_{ds}^r(t) - \underbrace{R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)} \\
 L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} &= v_{0s}^r(t) - \underbrace{R_s \cdot i_{0s}^r(t)}
 \end{aligned} \tag{37}$$

En las cuales se han resaltado los términos a compensar. Suponemos que el modelo del sistema físico es suficientemente bueno así como las salidas de los sensores. Debido a las incertidumbres del modelo, se compensa el efecto mayoritario de las realimentaciones pero en la realidad no se anularán

completamente. El resto se ajustará mediante la realimentación de la variable de salida al controlador externo de movimiento.

Mediante estas compensaciones, se tiene un acceso directo para manipular el torque electromagnético, sin los efectos de las realimentaciones físicas. Se observa que los términos correspondientes a las tensiones inducidas poseen productos de variables de estado y por lo tanto, son términos no lineales. Al sustraer los términos no lineales de las ecuaciones dinámicas y agregarlos al control estamos realizando una técnica denominada linealización por realimentación (*feedback linearization*). Si el sistema de cómputo del controlador puede calcular los términos no lineales lo suficientemente rápido y la acción de control resultante no causa la saturación del actuador, el resultado de esta técnica es un sistema lineal. En el caso de la implementación digital de este accionamiento, hay que tener en cuenta la frecuencia de muestreo de los sensores de corriente, el tiempo que toman los cálculos internos (especialmente las operaciones como seno o coseno en las transformaciones de Park) y los límites operativos del modulador de tensión.

Asumimos que la relación entre la entrada y la salida del modulador de tensión es unitaria (inversor trifásico, suficientemente rápido) y es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [v_{qs}^r(t), v_{ds}^r(t), v_{0s}^r(t)] &= 1 \cdot [v_{qs}^{r*}(t), v_{ds}^{r*}(t), v_{0s}^{r*}(t)] \\ [v_{as}(t), v_{bs}(t), v_{cs}(t)] &= 1 \cdot [v_{as}^{*}(t), v_{bs}^{*}(t), v_{cs}^{*}(t)] \end{aligned} \quad (38)$$

De esta forma, las consignas de las tensiones que compensan las realimentaciones, serán:

$$\begin{aligned} v_{qs}^{r*}(t) &= v_{qs}^{r*'}(t) + R_s \cdot i_{qs}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r] \\ v_{ds}^{r*}(t) &= v_{ds}^{r*'}(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}^{r*}(t) &= v_{0s}^{r*'}(t) + R_s \cdot i_{0s}^r(t) \end{aligned} \quad (39)$$

Reemplazamos lo obtenido en las ecuaciones 38 y 39 en la ecuación 37. Si las estimaciones de los parámetros de la máquina son buenos y el modulador de tensión es lo suficientemente bueno y rápido, entonces las compensaciones que agregamos a las consignas de tensión anularán los efectos de las realimentaciones naturales.

$$\begin{aligned} L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} &\approx v_{qs}^{r*'}(t) \\ L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &\approx v_{ds}^{r*'}(t) \\ L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} &\approx v_{0s}^{r*'}(t) \end{aligned} \quad (40)$$

Para el lazo interno de corriente, o regulador de corriente, proponemos un control proporcional. El siguiente desarrollo se realiza para el eje  $q$ , pero es análogo para los ejes  $d$  y  $0$ .

$$L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^{r*'}(t) = R'_q \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \quad (41)$$

Operando y aplicando Transformada de Laplace, llegamos a la función de transferencia del regulador de corriente que pone en evidencia los polos que agrega el modulador.

$$\frac{I_q(s)}{I_q^*(s)} = \frac{1}{1 + \frac{L_q}{R'_q} \cdot s} \quad (42)$$

Esta función de transferencia contiene un solo polo y ningún cero. Observamos que es la forma típica de un filtro pasa bajos, de la forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Donde  $\tau$  es la inversa de la frecuencia de corte del filtro. En nuestro caso, vemos que  $\tau = L_q/R'_q$ . De esta forma, el filtro posee su polo en  $p_i = -1/\tau = R'_q/L_q$ . Este lazo de control debe ser lo suficientemente bueno (gran ancho de banda comparado con el control externo) para brindar un buen desempeño. Para determinar la respuesta a lazo cerrado, elegiremos las ganancias del regulador de corriente  $R'_q$ . Si lo que se busca es la mejor performance posible, ingenuamente se podrían ubicar los polos lo más negativos que se pueda, lo que significaría ganancias  $R'_q$  muy grandes. Sin embargo esto no es práctico ya que un ancho

de banda demasiado grande determinaría ganancias de gran valor, lo que exigiría esfuerzos de control también muy grandes, como se ve en la ecuación 41.

Ubicamos los polos en  $p_i = -5000\text{rad/s}$ , por lo que las ganancias serán  $R'_i = -p_i \cdot L_i$ :

$$R'_q = 29\Omega$$

$$R'_d = 33\Omega$$

$$R'_0 = 4\Omega$$

$$BW = |p| = 2\pi \cdot f_{co} \Rightarrow f_{co} = 796\text{Hz}$$

El siguiente paso es incorporar la consigna de torque. Escribimos la ecuación para la consigna de torque para corriente de eje directo genérica.

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^*(t)] \cdot i_{qs}^*(t) \quad (43)$$

Y despejamos la consigna de corriente en el eje q:

$$i_{qs}^*(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^*(t)]} \quad (44)$$

La estrategia de control empleada es  $i_{ds}^r(t) = 0$ , pero al dejar la ecuación anterior para corriente en el eje d genérica, se pueden realizar las técnicas de debilitamiento o reforzamiento de campo (*field weakening/forcing*) simplemente cambiando la consigna de  $i_{ds}^r(t)$ .

Si además realizamos el desacople del término de fricción del subsistema mecánico:

$$T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) \quad (45)$$

El diagrama de bloques del modulador de torque con el desacoplamiento de las realimentaciones físicas naturales se puede observar en la figura 12.

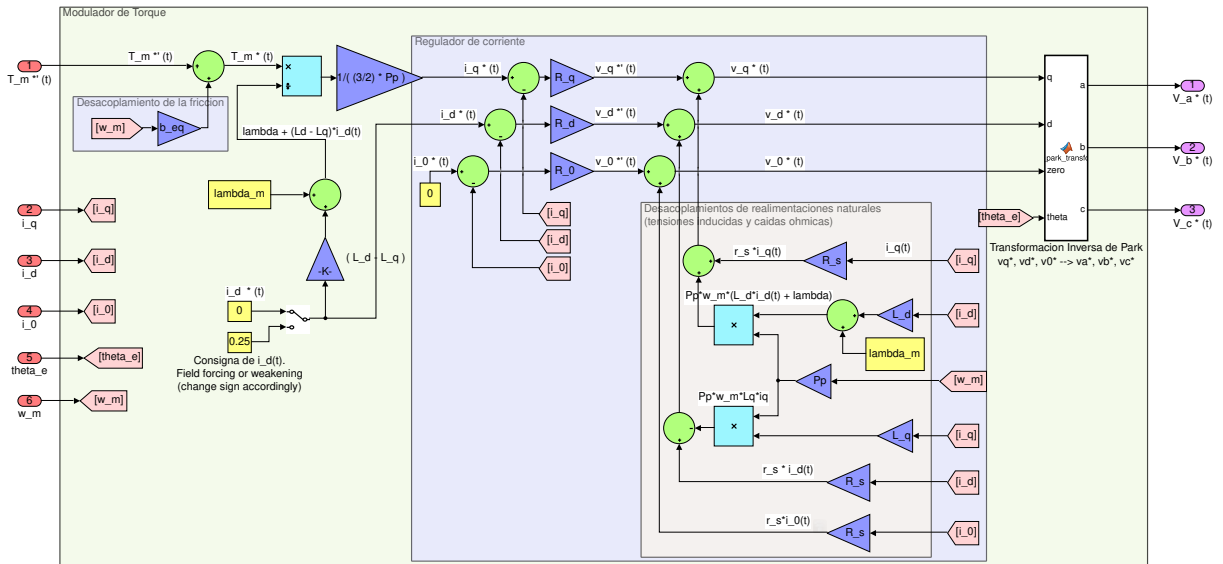


Figura 12: Modulador de torque

### 3.2. Controlador externo de movimiento: posición/velocidad

En un primer análisis, se optó por trabajar con el clásico sistema de control PID con su derivador y su integrador, pero se podría presentar un problema con la derivada del error, la cual podría tender a valores muy grandes y podría generar un sistema inestable. Se optó por trabajar con un modelo que no tenga derivador, el cual ahora tiene como entrada consignas de velocidad, ya que es conveniente integrar la consigna de velocidad en vez de derivar la consigna de posición. Esto se eligió así, debido a que

el integrador funciona como un filtro pasa bajos, el cual ayuda a la eliminación de ruidos provenientes del error de posición o velocidad, dado que estos suelen generarse a alta frecuencia. El controlador PID mejorará la dinámica del sistema y corregirá los errores de estado estacionario producidos por cargas perturbadoras.

Se ubicarán todos los polos a una distancia radial  $\omega_n$ . Se utilizará el método de sintonía serie con acción integral para el PID, con  $n = 2,5$  y  $w = 800 \text{ rad/s}$ , considerando valores nominales de inercia y amortiguamiento, a temperatura ambiente.

Se buscará dar consignas de posición y velocidad. La figura 13 muestra el controlador implementado.

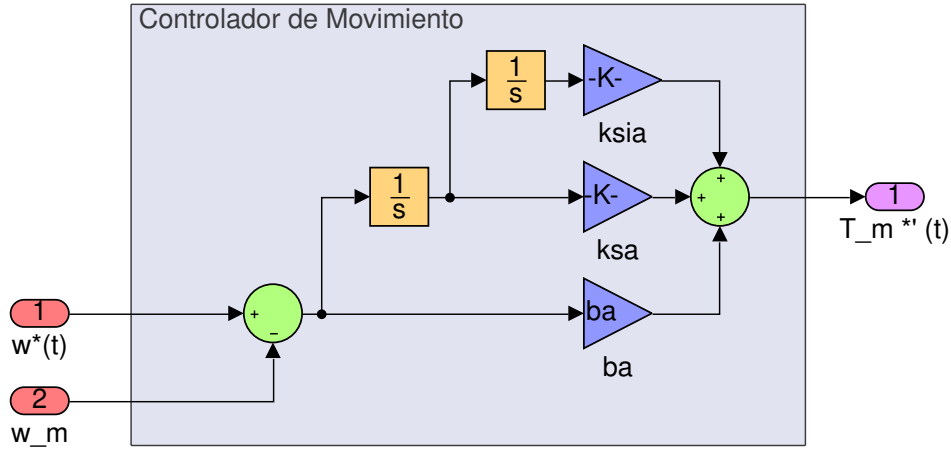


Figura 13: Diagrama en bloques del controlador externo de movimiento PID

Proponemos que  $T_m^{*'}(t)$  tenga un control PID de la forma:

$$T_m^{*'}(s) = G_T(s) \left[ b_A + K_{sa} \cdot \frac{1}{s} + K_{sia} \cdot \frac{1}{s^2} \right] \cdot [\omega^*(t) - \omega(t)]$$

Siendo  $G_T(s)$  la función de transferencia del modulador de torque, la cual consideramos con ganancia unitaria y ancho de banda infinito.

Para hallar la matriz de transferencia, la cual relaciona la posición real con la posición consigna y con el torque de carga, partimos del modelo físico equivalente que se observa en la figura 14:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m = T_m(t) - T_{l_{eq}}(t)$$

$$J_{eq} \cdot s \cdot \Omega_m(s) = T_m(s) - T_{l_{eq}}(s)$$

Reemplazamos la expresión de  $T_m(s)$ , operamos y obtenemos la función de transferencia:

$$G_{\theta^*m}(s) = \frac{b_a \cdot s^2 + k_{sa} \cdot s + k_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + k_{sa} \cdot s + k_{sia}}$$

$$G_{Tl/r}(s) = -\frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + k_{sa} \cdot s + k_{sia}}$$

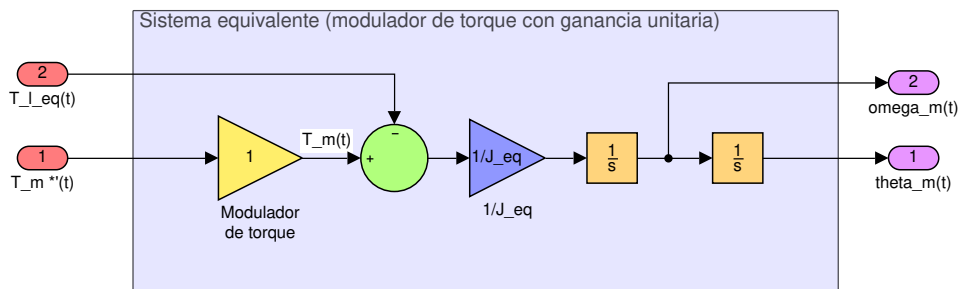


Figura 14: Sistema equivalente considerando al modulador de torque con ganancia unitaria

Al analizar la función de transferencia en régimen estacionario para una entrada escalón unitario:

- Si  $k_{sia} \neq 0 \Rightarrow G_{\theta^*m}(s) = 1$  y  $G_{T_{l/r}}(s) = 0$  (rechazo total a perturbaciones)
- Si  $k_{sia} = 0 \Rightarrow G_{\theta^*m}(s) = 1$  y  $G_{T_{l/r}}(s) = -1/k_{sa}$  (sin rechazo a perturbaciones)

Se puede observar que la acción integral compensa las perturbaciones de carga constante en estado estacionario.

Para encontrar los valores de las constantes de nuestro PID, proponemos un polinomio de la siguiente forma:

$$p(s) = J \cdot (s + \omega_{pos}) \cdot (s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_{pos} \cdot s + \omega_{pos}^2) \quad (46)$$

Al ubicar los tres polos a la misma distancia radial estamos planteando un filtro de Butterworth de tercer orden. Al realizar el método de asignación de polos, cuando comparamos los coeficientes encontramos las relaciones que se ven en las ecuaciones siguientes. Este método también se denomina método de sintonía serie. Calculamos las constantes del PID, donde  $n = (2 \cdot \zeta + 1)$ , con  $n = 2,5$  y  $\omega_{pos} = 800 \text{ rad/s}$ :

$$b_a = J_{eq} \cdot \omega_{pos} \cdot n = 0,0113 \quad \frac{N \cdot m}{rad/s}$$

$$k_{sa} = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^2 \cdot n = 9,04 \quad \frac{N \cdot m}{rad}$$

$$k_{sia} = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^3 = 2893 \quad \frac{N \cdot m}{rad \cdot s}$$

A estos los podemos encontrar analizando el denominador de la matriz de Transferencia.

$$J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + k_{sa} \cdot s + k_{sia} = 0$$

$$s_1 = -800 \quad \frac{rad}{s} \quad ; \quad s_{2,3} = -600 \pm i529,15 \quad \frac{rad}{s}$$

Ahora se ubican los polos en el plano de Laplace y se comparan con los polos originales de la planta y con el polo del modulador de corriente:

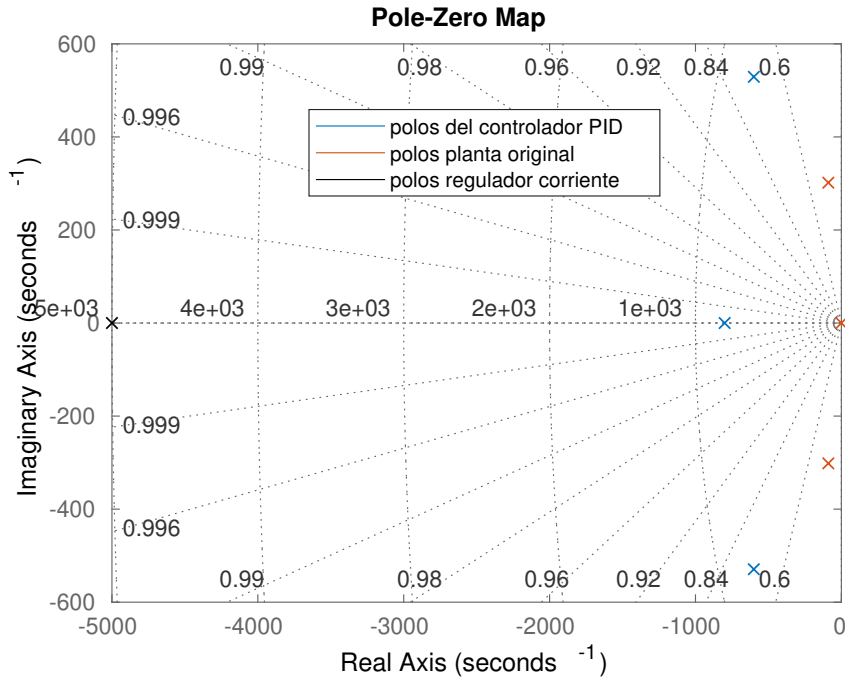


Figura 15: Comparación de la ubicación de los polos.



### 3.3. Incorporación y diseño de observador de estado de orden reducido

Un observador de estado es un sistema que estima el estado interno de un sistema a partir de las mediciones de la entrada y la salida. Realizaremos un observador de estado reducido para poder realimentar la velocidad angular del motor, ya que no se cuenta con un sensor de velocidad, sino únicamente con un encoder, el cual mide la posición del eje. Se incorpora al observador únicamente el subsistema mecánico ya que se cuenta con sensores de corriente. Consideramos que el modulador de torque tiene un ancho de banda grande y ganancia unitaria. La entrada del observador será la consigna de torque  $T_m^{*'}(t)$ , la cual se toma a la salida del controlador de movimiento PID.

Trabajamos con un observador de Luenberger, de la forma:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_e[y(t) - \tilde{y}(t)] \\ y(t) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Donde la matriz  $\mathbf{K}_e$  es la matriz que contiene las ganancias del observador,  $K_{e\theta}$  y  $K_{e\omega}$ . La dinámica del observador está dada por los autovalores de  $[\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}]$ . Si el sistema es completamente observable, (ver sección 2.6), se puede demostrar que es posible elegir la matriz  $\mathbf{K}_e$  para ubicar arbitrariamente los polos del observador. Para nuestro caso particular, el observador se expresa con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} T_m(t) + \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} (\theta(t) - \tilde{\theta}(t))$$

O en forma escalar desagregada:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}(t) = \tilde{\omega}(t) + K_{e\theta} \cdot [\theta(t) - \tilde{\theta}(t)] \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m^{*'}(t) + K_{e\omega} \cdot [\theta(t) - \tilde{\theta}(t)] \end{cases}$$

En un observador de estado se utiliza el modelo de la planta para poder estimar las variables de estado. Como en el modulador de torque se hizo el desacople del término de fricción  $-b_m \cdot \omega_m(t)$  y la entrada del observador es la consigna de torque  $T_m^{*'}(t)$ , entonces en el modelo del observador no tenemos en cuenta el término de fricción ya que está compensado. Si la entrada del observador fuera  $T_m^*(t)$ , entonces sí habría que agregar el término de fricción.

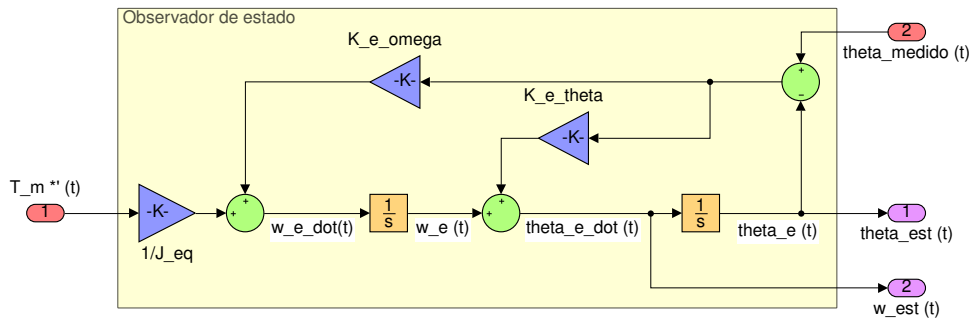


Figura 16: Diagrama de bloques del observador de estado parcial. La notación  $_{e}$  implica que la variable es *estimada*.

Deseamos que el observador tenga un comportamiento rápido, por lo que ubicamos sus polos 4 a 5 veces más alejados que los polos del controlador externo de movimiento. Tomamos  $p_i = -3200\text{rad/s}$ . Utilizamos el método de asignación de polos a partir del polinomio característico del observador:

$$\det(s \cdot \mathbf{I} - [\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}]) = s^2 + K_{e\theta} \cdot s + K_{e\omega}$$

$$K_{e\theta} = -2 \cdot p_i \Rightarrow K_{e\theta} = 6400\text{rad/s}$$

$$K_{e\omega} = p_i^2 \Rightarrow K_{e\omega} = 1,024 \cdot 10^7\text{rad/s}^2$$

El modelo en bloques resultante se puede ver en la figura 16.

Se plantean dos opciones para realimentar la velocidad al controlador externo:  $\dot{\hat{\theta}}(t)$  y  $\tilde{\omega}(t)$ . Tomamos  $\dot{\hat{\theta}}(t)$  ya que este término cuenta con la corrección del término de  $k_{e\theta}$  y presenta un mejor desempeño.

### 3.4. Simulación en tiempo continuo con modelo completo no lineal

Para realizar una simulación del sistema en tiempo continuo, realizamos una integración de todos los bloques presentados anteriormente. El modelo de Simulink obtenido se observa en la figura 17. Entre los bloques empleados podemos distinguir aquellos que son parte de la planta: el subsistema electromagnético, el subsistema mecánico y el subsistema térmico; y los bloques que son parte del control: controlador de movimiento PID, modulador de torque y el observador de estado parcial. La interfaz entre la planta y el control está dada por los elementos sensores, representados con ganancias de color verde en la figura 17 y por el elemento actuador: el modulador de tensión, el cual toma las consignas de tensión y las convierte en tensiones en los bornes de la máquina. Se observa la presencia de un tacómetro o sensor de velocidad aunque en la aplicación final este no se utiliza. Se incorporó al modelo para evaluar el rendimiento en cuando a la velocidad angular.

También se hace uso de bloques que realizan la transformación de Park, tanto directa como inversa, para pasar de coordenadas  $abc$  a  $qd0$  y viceversa, respectivamente.

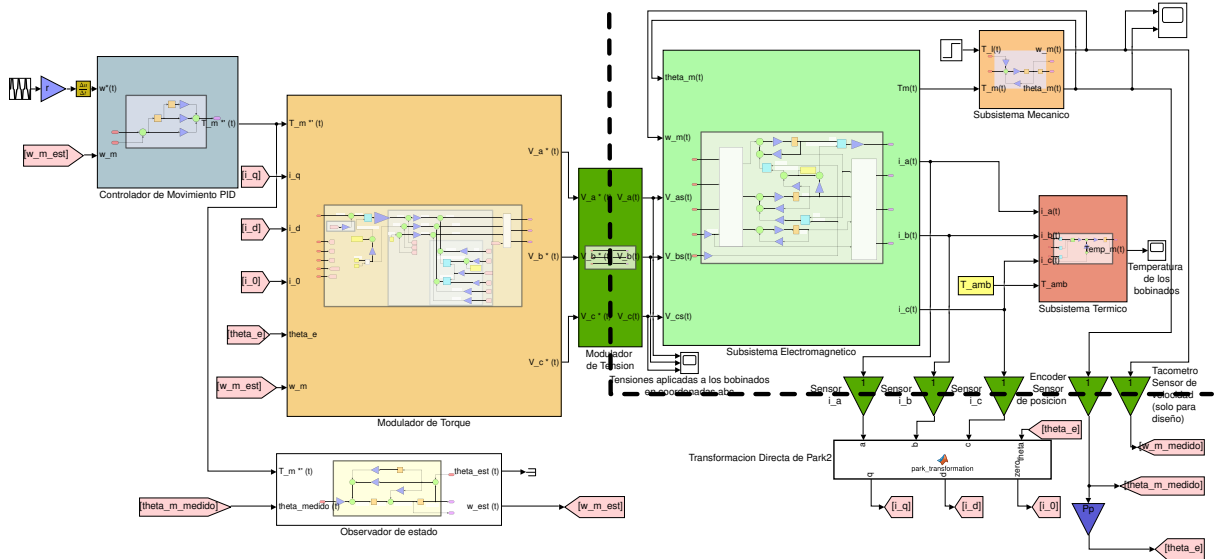
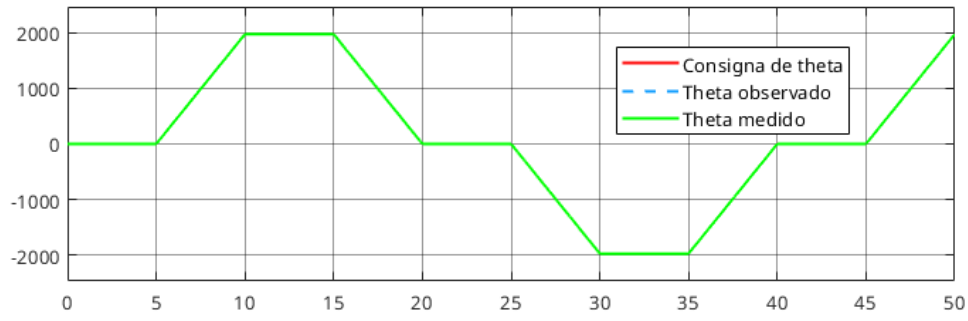


Figura 17: Modelo de bloques global utilizado para la simulación. La línea de trazos indica la interfaz entre el sistema de control y la planta. Todo lo que se encuentra a la izquierda y por debajo (modulador de torque, controlador de movimiento, observador de estado y transformaciones de Park) corresponden al controlador. Los subsistemas electromagnético, mecánico y térmico corresponden a la planta. Las interfaces son aquellos bloques de color verde oscuro, correspondientes al modulador de torque y los sensores. Estos permiten convertir señales de control en magnitudes físicas y viceversa; respectivamente.

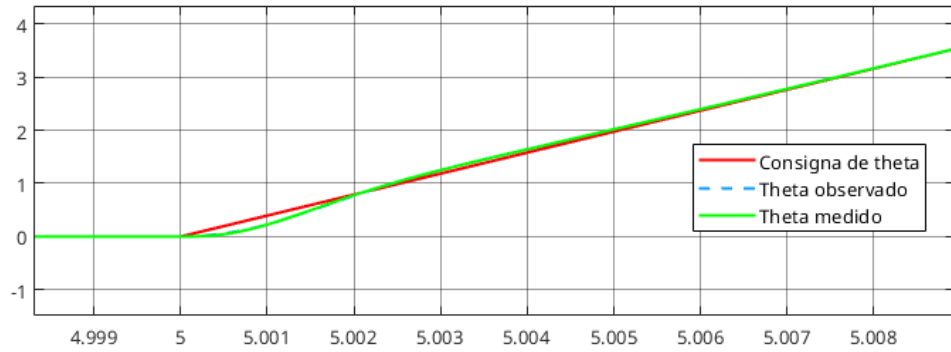
#### 3.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento

La entrada del sistema es un perfil de posición  $q^*(t)$  de la posición articular del hombro del robot. Estas consignas se transforman a consignas de posición del eje del motor  $\theta^*(t)$  mediante la relación de reducción  $r$ . Como se planteó anteriormente, la consigna que ingresa al controlador externo de movimiento es de velocidad y no de posición.

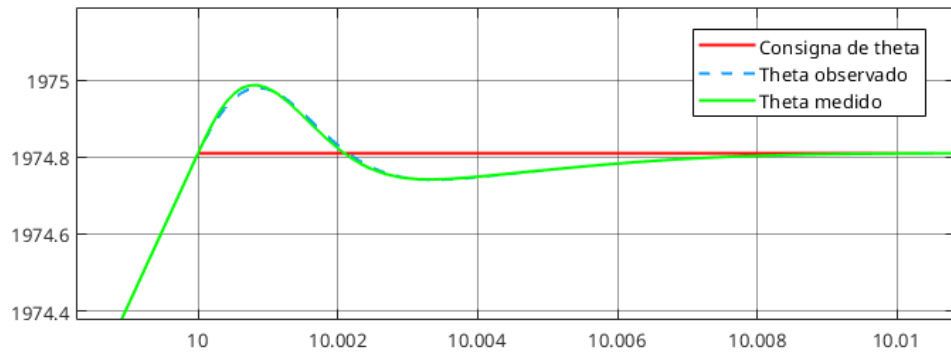
Se plantea dar una revolución completa de la articulación, ida y vuelta, con rampas de 5 segundos. Esto se puede observar en la figura 18. También se muestran acercamientos en los transitorios.



(a) Perfil de posición



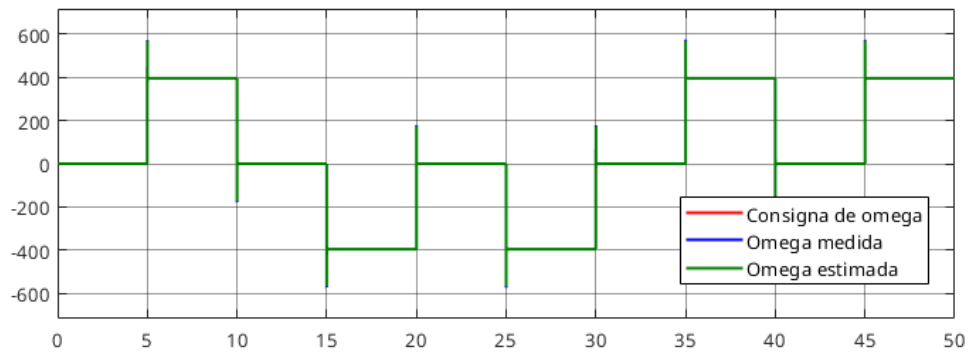
(b) Acercamiento en el perfil de posición en  $t = 5s$



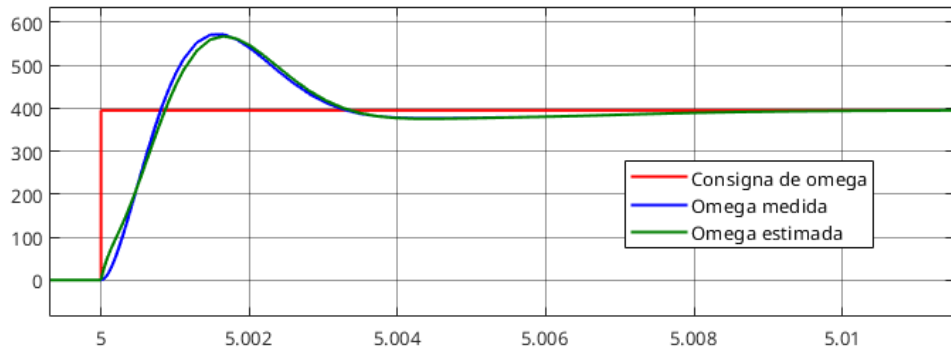
(c) Acercamiento en el perfil de posición en  $t = 10s$

Figura 18: Respuesta en el tiempo de la posición del eje del motor. Todos los gráficos en unidades de [rad]

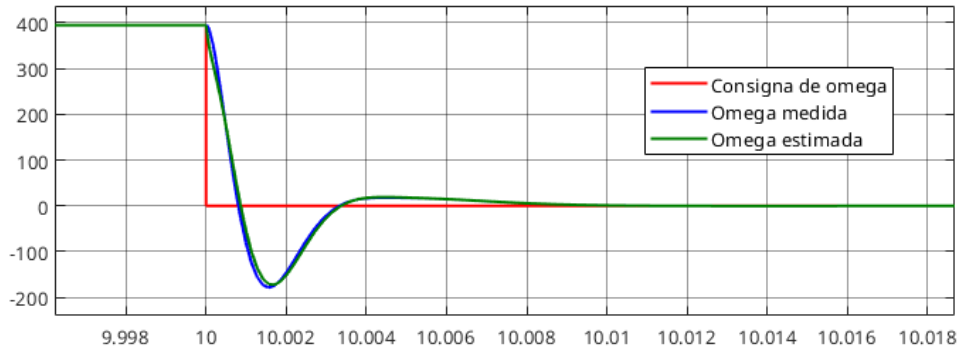
El comportamiento en velocidad se puede observar en la figura 19. El perfil trapezoidal de posición genera que en velocidad se exijan perfiles rectangulares, lo que implica una consigna de cambio inmediato de velocidad. Ese cambio inmediato implica que se está dando una consigna de aceleración impulsiva. Las consecuencias de dar estas consignas tan estrictas se ven en las gráficas 20 y 21. Esto se ha planteado teniendo un modulador de tensión sin límites, por lo que los valores de tensiones y corrientes superan los máximos nominales. En la realidad, el modulador de tensión llegará a la saturación y no podrá entregar tensiones tan elevadas como las que se ven en la figura. Sin embargo, se están dando consignas demasiado exigentes y que el sistema no puede cumplir, por lo que se debe realizar alguna mejora para evitarlo.



(a) Perfil de velocidad angular del eje del motor



(b) Acercamiento en el perfil de velocidad en  $t = 5s$



(c) Acercamiento en el perfil de velocidad en  $t = 10s$

Figura 19: Respuesta en el tiempo de la velocidad angular del motor. Todos los gráficos en unidades de [rad/s]

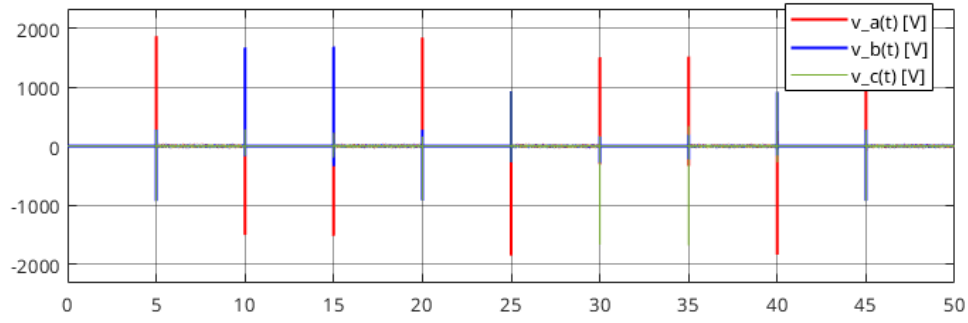
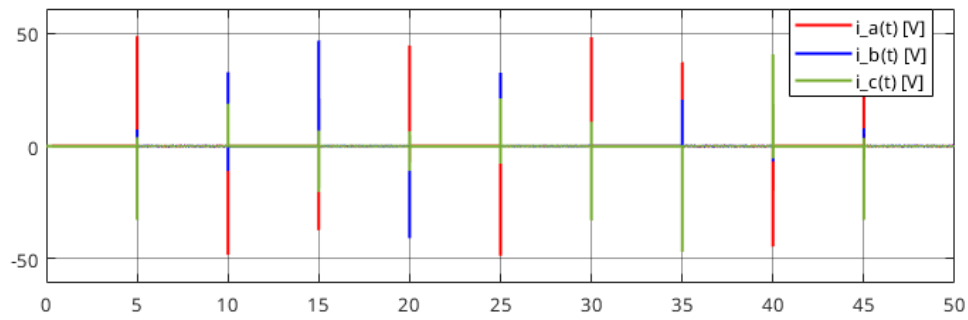
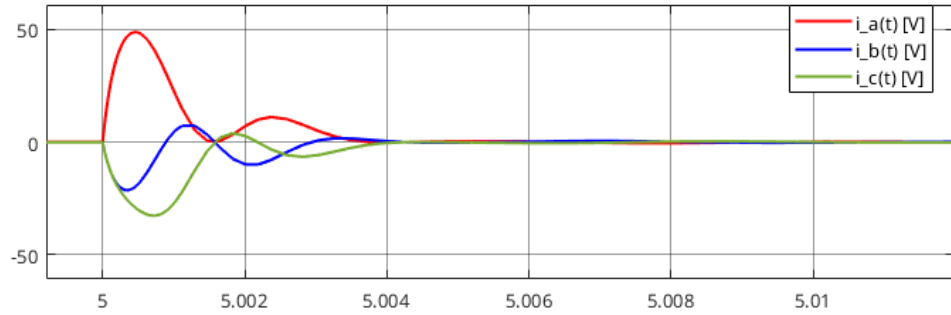


Figura 20: Tensiones aplicadas en los bornes en coordenadas  $abc$



(a) Corrientes aplicadas en coordenadas  $abc$

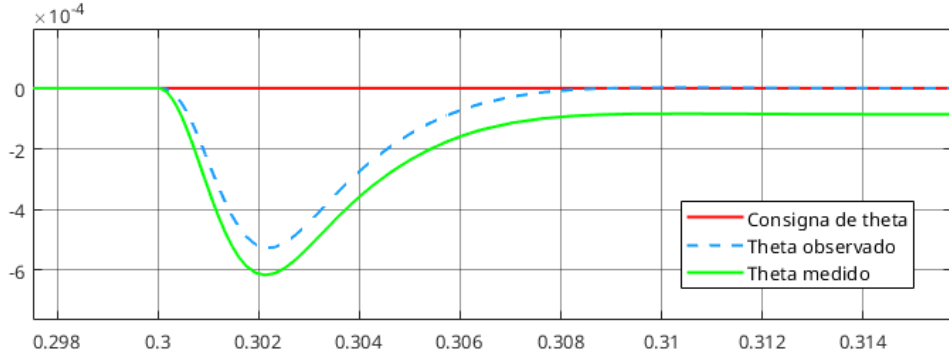


(b) Acercamiento en  $t = 5s$ .

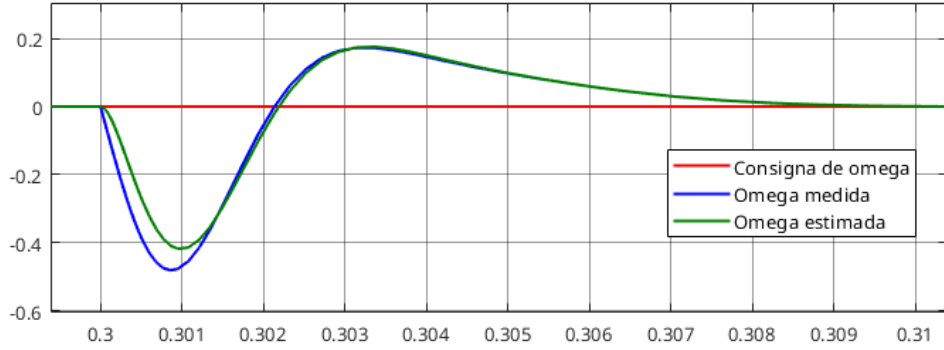
Figura 21: Comportamiento de las corriente en coordenadas  $abc$ . Ambos gráficos con unidades en [A]

### 3.4.2. Rechazo de perturbaciones

En el instante  $t = 0,3s$  se agrega un torque de carga  $T_l(t) = 1,57N$ . Esta perturbación genera un error de estado estacionario en la posición angular del motor. El error es muy pequeño ya que la magnitud del torque de carga es pequeña, al ser este afectado por la caja reductora. Esto se observa en la figura 22.



(a) Acercamiento en el perfil de posición en  $t = 0,3s$ . Se observa error de estado estable.



(b) Acercamiento en el perfil de velocidad en  $t = 0,3s$ .

Figura 22: Respuesta del sistema a torque de carga constante.

### 3.5. Verificación de desempeño y mejoras

#### 3.5.1. Especificaciones de operación

Analizando los gráficos obtenidos en la sección anterior, vemos que hay parámetros que exceden los máximos operativos.

El mayor problema que se ve es que los perfiles resultantes de posición son rectangulares, por lo que se están exigiendo cambios instantáneos de velocidad. La alternativa que proponemos es plantear perfiles trapezoidales de velocidad.

Este perfil de velocidad está compuesto por una rampa inicial de aceleración, una meseta de velocidad angular constante y finalmente una rampa de desaceleración. Para poder llegar en 5s a la misma posición angular, el perfil trapezoidal debe tener un área bajo la curva igual a la del perfil rectangular. Como se debe llegar a  $2\pi$ , el área bajo la curva de cada perfil trapezoidal de velocidad será igual a  $2\pi \cdot r$ . Proponemos tiempos de subida y bajada idénticos, e iguales a  $t_{rise} = t_{fall} = 0,5s$ , por lo que el tiempo en alto será igual a  $t_{high} = 4s$ , ya que se exige llegar en 5s.

$$\frac{t_{rise} \cdot \omega_{high}}{2} + t_{high} \cdot \omega_{high} + \frac{t_{fall} \cdot \omega_{high}}{2} = 2\pi \cdot r$$

$$\omega_{high} = \frac{2\pi \cdot r}{\frac{t_{rise}}{2} + t_{high} + \frac{t_{fall}}{2}}$$

$$\omega_{high} = 438,8467 \text{ rad/s}$$

Los nuevos perfiles de posición y velocidad se pueden observar en la figura 23:

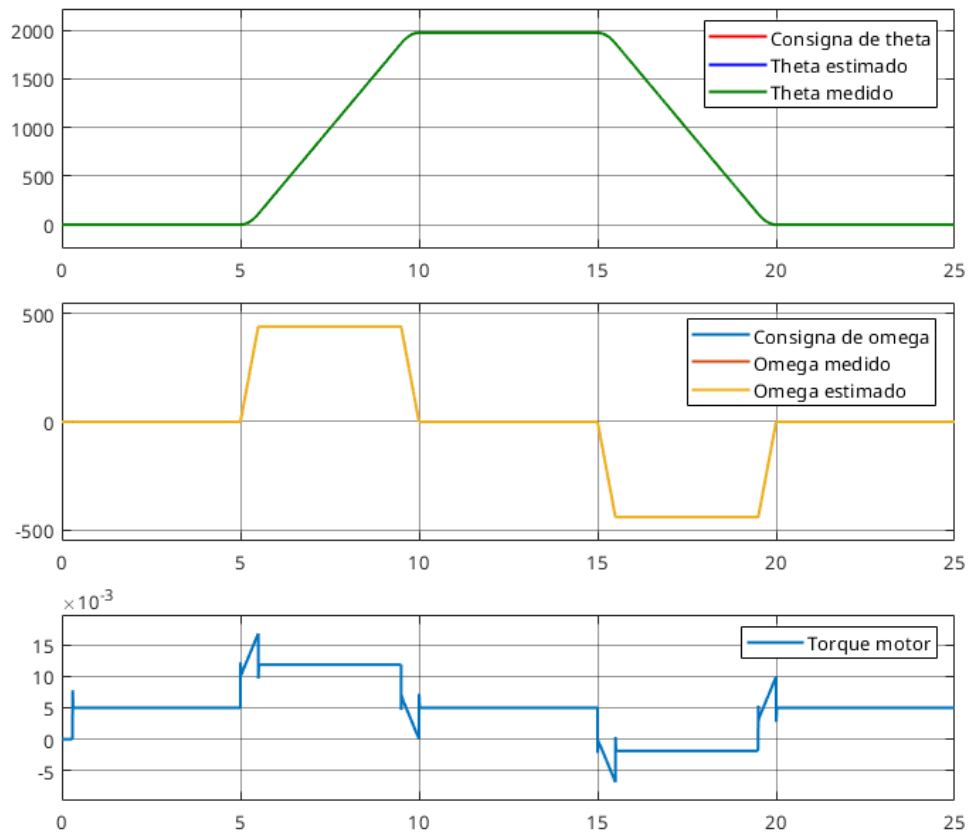


Figura 23: Perfiles mejorados de posición y velocidad. Además se observa el torque motor generado. Los gráficos tienen unidades de  $[rad]$ ,  $[rad/s]$  y  $[N.m]$  respectivamente.

El objetivo del presente trabajo no es la optimización ni la generación de perfiles de trayectoria por lo que la solución planteada, aunque válida, es solo una primera aproximación. El motor se desempeña con holgura dentro de los límites de operación por lo que se podrían exigir más las rampas de velocidad, por ejemplo.

En la figura 24 se verifica que las tensiones y las corrientes están dentro de los valores operativos.

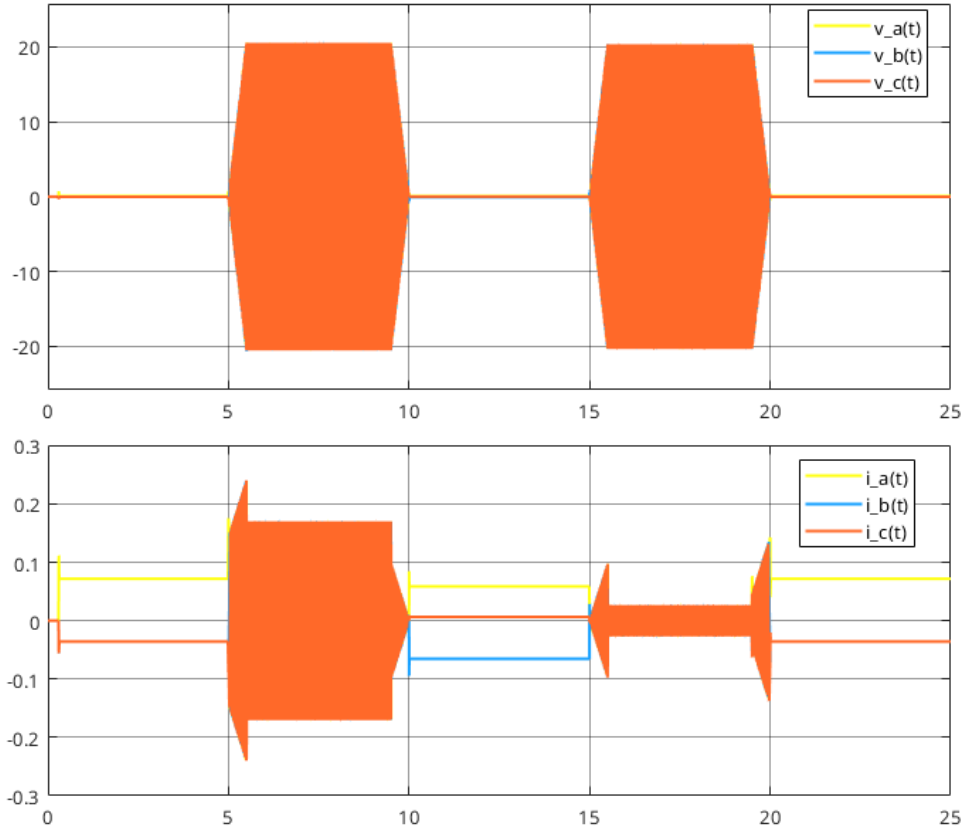


Figura 24: Corrientes y tensiones en coordenadas  $abc$ . Todas se mantienen dentro de los límites de operación.

### 3.5.2. Mejoras del observador de estado

Como se observa en la figura 22, en el sistema hay presente un error de estado estacionario debido a la aplicación del torque de carga  $T_l(t)$ . Esto se debe a que al observador no se le realimenta la entrada de perturbación. Una opción sería tener un sensor de torque para poder realimentar la perturbación. Sin embargo esta opción es cara y poco efectiva, ya que si el sensor no es muy bueno, seguirá existiendo un error de estado estacionario. La solución es agregar una acción integral al observador. Con este enfoque no es necesario más hardware ya que únicamente se agregan algunas líneas de código al controlador.

El observador de estado parcial, tal como se diseñó en la sección 3.3, es equivalente a un controlador proporcional-derivativo. Esto se pone en evidencia al reordenar los bloques de la figura 16. Si movemos el término  $k_{e\theta} \cdot [\theta_m(t) - \tilde{\theta}(t)]$  a la izquierda del primer integrador, para anular el efecto del mismo, hay que agregar un bloque que calcule la derivada del error. De esta forma, en el sumador de la izquierda tendremos un término proporcional al error y otro proporcional a la derivada del error. Como buscamos evitar el problema que suponen los cálculos de derivadas numéricas, nos quedamos con la forma desarrollada en la sección 3.3. Al observador que presenta un sistema equivalente a un control proporcional-derivativo le agregamos una acción integral para eliminar el error de estado estacionario.

Se introduce una nueva variable de forma de aumentar el vector de estados del observador con la acción integral. Las nuevas ecuaciones del observador serán:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}(t) = \tilde{\omega}(t) + k_{e\theta} \cdot [\theta(t) - \tilde{\theta}(t)] \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m^{*'}(t) + k_{e\omega} \cdot [\theta(t) - \tilde{\theta}(t)] \\ \dot{z}(t) = k_{ei} \cdot [\theta(t) - \tilde{\theta}(t)] \end{cases}$$

Así como se realizó en la sección 16, utilizamos el método de asignación de polos para determinar las tres ganancias del observador. Ubicamos los tres polos en  $-3200\text{rad/s}$ .



$$\det(s \cdot \mathbf{I} - [\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{C}]) = \begin{bmatrix} s + k_{e\theta} & -1 & 0 \\ k_{e\omega} & s & -1 \\ k_{ei} & 0 & s \end{bmatrix} = s^3 + k_{e\theta} \cdot s^2 + k_{e\omega} \cdot s + k_{ei}$$

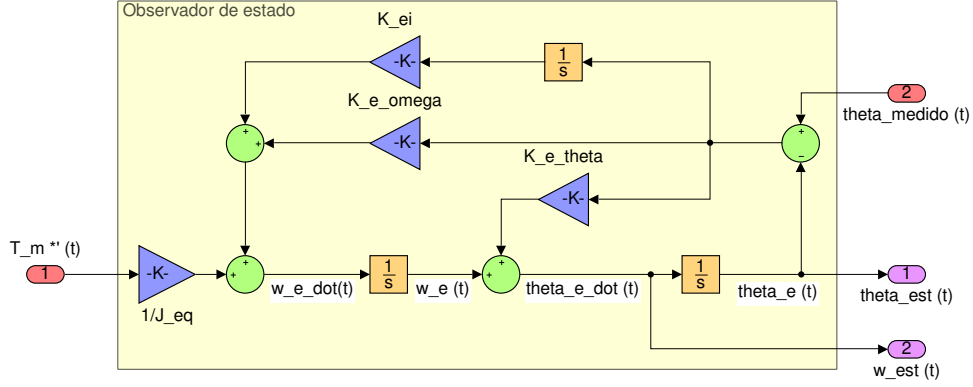


Figura 25: Diagrama de bloques del observador ampliado con la acción integral.

Comparando con el polinomio formado al expandir  $p(s) = (s + 3200)^3$ , obtenemos los siguientes valores:

$$k_{e\theta} = 9600 \text{ rad/s}$$

$$k_{e\omega} = 30,72 \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2$$

$$k_{ei} = 3,2768 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}^3$$

El nuevo modelo de bloques del observador se muestra en la figura 25.

Vemos que al agregar la acción integral al observador, eliminamos el error de estado estacionario en  $\theta(t)$ , como se muestra en la figura 26.

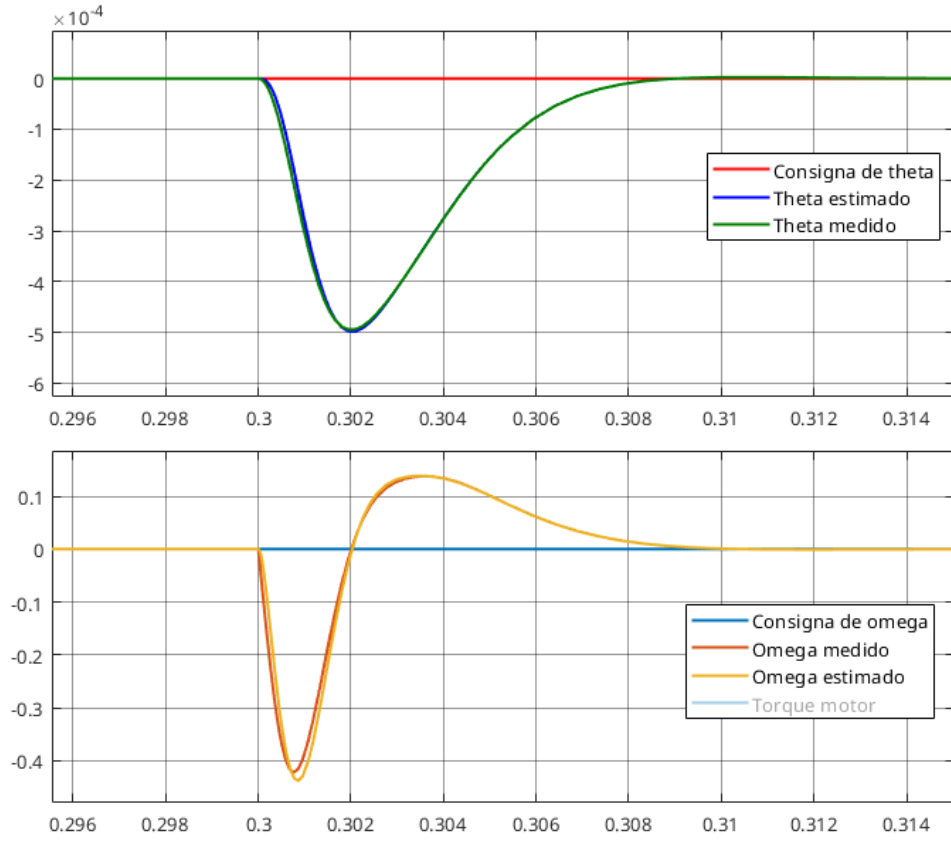


Figura 26: Respuesta del sistema ante el escalón de torque de carga. Ya no se presenta error de estado estacionario en la posición angular del motor  $\theta(t)$ . Unidades en [rad] y [rad/s] respectivamente.

### 3.5.3. Comportamiento térmico

En esta sección se pone a prueba la evolución térmica del motor. Simulamos la ejecución continua de las consignas tales como se ven en la figura 23, durante 60 minutos. Vemos que la temperatura converge a  $41^\circ C$ , a partir de una temperatura ambiente de  $40^\circ C$ . Es decir, el motor no se encuentra para nada exigido térmicamente. Esto se muestra en la figura 27.

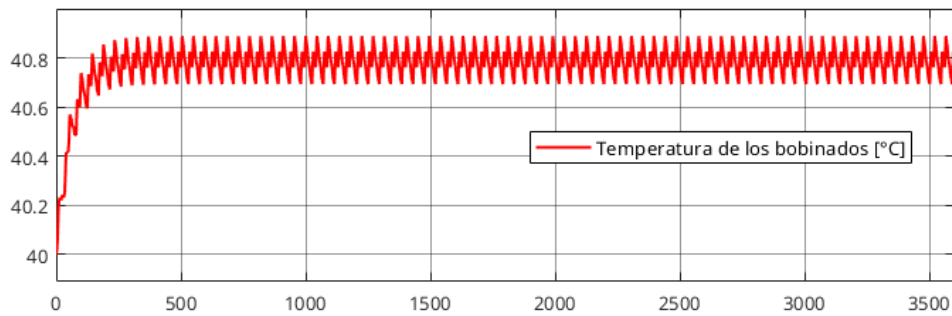


Figura 27: Evaluación de la temperatura de los bobinados del motor. Eje de tiempo en segundos.

## 4. Conclusión

En el presente trabajo se diseñó, analizó y modeló exitosamente el control de la primera articulación de un robot SCARA, sirviendo de buena forma como método de aprendizaje englobando varios contenidos de la cátedra. A partir de las simulaciones obtenidas se puede apreciar que el sistema sigue correctamente las consignas de posición definidas.

Se pudieron satisfacer las especificaciones de operación a partir de consignas con perfiles más suaves evitando de esta forma picos de corriente y tensión. La acción integral en el observador de estados permitió reducir el error de estimación en régimen permanente a cero.

Se obtiene, por tanto, un sistema de control robusto y con buen seguimiento de las consignas de movimiento. Se destaca que la simulación es un factor importante del proyecto ya que permite visualizar de una manera más cercana a la realidad el funcionamiento del sistema. Se pueden variar todos los parámetros del sistema y estudiar su comportamiento, sin riesgos para el equipo real.

## 5. Referencias y bibliografía

Para la realización del presente trabajo utilizamos como punto de partida la guía de trabajo del proyecto global integrador de la cátedra Automática y Máquinas Eléctricas, a cargo del Ing. Gabriel Julián. Además, se utilizó la bibliografía nombrada como apoyo y referencia.

- Julián, Gabriel. *Guía de proyecto global integrador de la cátedra “Automática y Máquinas Eléctricas”*, 2019
- Ogata, K. *Modern Control Engineering*, 2010
- Franklin, G.; *Feedback Control of Dynamic Systems*, 2015
- Krishnan, R. *Electric Motor Drives: Modeling, Analysis and Control*, 2001.
- Krishnan, R. *Permanent Magnet Synchronous and Brushless DC Motor Drives*, 2010.