第十一讲 图像处理中的滤波器设计

图像处理中的滤波器设计

- 一维滤波器设计
- 二维低通滤波器法
- 二维高通滤波器法
- 二维带通和带阻滤波器法
- 同态滤波

基本概念

- **滤波器**: 一个序列 h={h(n)}
- **滤波：对信号做卷积** y=h*x, 其中 *是卷积运算

$$y(n)=\sum_k h(k)x(n-k)$$

- **FIR**（Finite Impulse Response） 有限脉冲响应滤波器=有限长滤波器
- **IIR** （Infinite Impulse Response）无限脉冲响应滤波器=无限长滤波器

Z-变换和 DTFT（discrete time Fourier Transform）

给定信号或者滤波器$s(n)$, Z 变换定义如下：

$S(z)=\sum s(n)z^{-n}$

当$|z|=1$时就是Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

$S(\omega)=\sum s(n)e^{-jn\omega}$;　　$j=\sqrt{-1}$

$S(\omega)$ 也称为$s(n)$的频率响应

$S(\omega)=|S(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, $\omega\in[-\pi,\pi]$

$|S(\omega)|$: 幅频响应, $\varphi(\omega)$: 相频响应, ω=0低频， $\omega=\pi$最高频

$y=x*h\Leftrightarrow Y(z)=X(z)H(z)\Leftrightarrow Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$

$|Y(\omega)|=|X(\omega)|*|H(\omega)|$

$\varphi_y(\omega)=\varphi_x(\omega)+\varphi_h(\omega)$

- 低通滤波器=通过低频信息=移动平均
  - h={h(n)}, $H(\omega)|_{\omega=0}=c>0 \text{ or } 1, H(\omega)|_{\omega=\pm\pi}=0$

    $|Y(\omega)|=|X(\omega)|*|H(\omega)|$
  - 例子：
    - 两点平均滤波器：{1,1}/2
    - 样条滤波器：{1,2,1}/4
    - 一般情况：$\sum h(n)=c, \quad c>0$
- 高通滤波器=通过高频信息=移动差分

  - h={h(n)}, $H(z)|_{z=1}=0, H(z)|_{z=-1}=c \ \neq 0 \text{ or } c=1,$

    $|Y(\omega)|=|X(\omega)|*|H(\omega)|$
  - 例子:
    - 最简单的高通: h={1 −1}/2, 差分滤波器
    - 二阶差分: {-1 2 −1}/4;

- **bandpass Filter（带通滤波器）**
- 通过 0 and π 中间的某个部分频率
- **All-pass filter（全通滤波器）：** 通过所有频率

$$H(\varpi)=|H(\varpi)|e^{j\Phi(\varpi)}$$

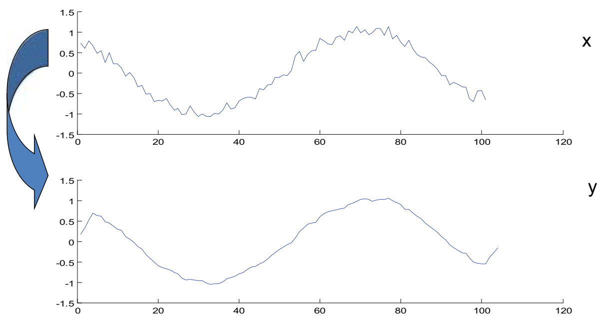
- **Phase（相位），Magnitude（幅度）**
  - $|H(\varpi)|$ 称为H的幅频响应.
  - $\Phi(\varpi)$ 称为H的相位或者相频响应
  - 如果 $\Phi(\varpi)=a\varpi+b$, 称H具有线性相位
  - H 具有线性相位当且仅当H是中心对称或者反对称

filters with linear phase

$$(1+e^{-j\omega})/2=e^{-j\omega/2}\cos(\omega/2) \quad \leftrightarrow (1-e^{-j\omega})/2=e^{-j\omega/2-\pi/2}\sin(\omega/2)$$
$$(1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})/4=e^{-j\omega}(1+\cos(\omega))/2$$
$$(1-2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})/4=e^{-j\omega}(1-\cos(\omega))/2$$

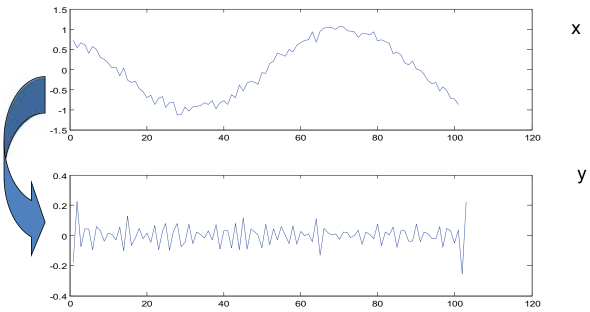
低通滤波器滤波示意:

x=sin(t)+0.1*randn(1,101);
h=[1 1 1 1]/4;   y=x*h

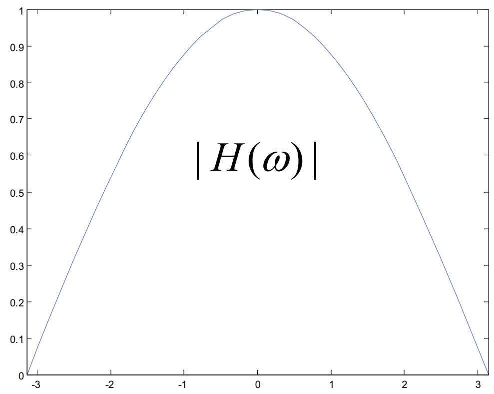


高通滤波器示意:

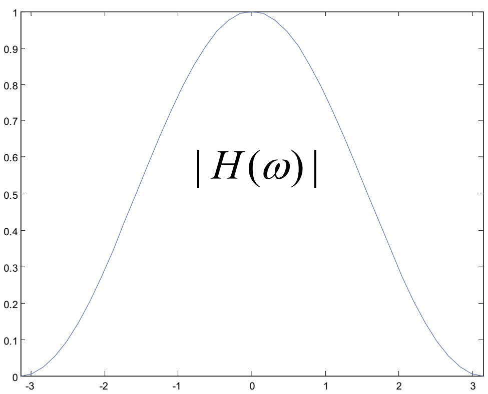
x=sin(t)+0.1*randn(1,101);
h={-1 2 –1}/4;   y=x*h



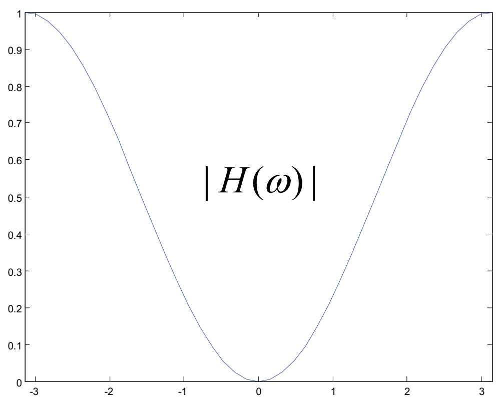
{0.5 0.5} 幅频响应



{1 2 1}/4的幅频响应



{-1 2 -1}/4的幅频响应



- 理想滤波器
  - **理想低通滤波器:**

$$H(\varpi)=\sum_{k\in Z}h(k)\,e^{-ik\varpi}=\begin{cases}1, & 0<|\varpi|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\varpi|<\pi\end{cases}$$

  - **理想高通滤波器:**

$$H(\varpi)=\sum_{k\in Z}h(k)\,e^{-ik\varpi}=\begin{cases}0, & 0<|\varpi|<\pi/2\\ 1, & \pi/2<|\varpi|<\pi\end{cases}$$

  - 对于理想低通滤波器:

$$h(k)=\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\pi k}$$

  - **无限长，衰减慢，只能截断**

窗口法

理想频响 $H_d(e^{j\omega})$ 是分段常数，在边界频率处有突变点，所以，这样得到的理想单位脉冲响应 $h_d(n)$往往都是无限长序列，而且是非因果的。但FIR的h(n)是有限长的，问题是怎样用一个有限长的序列去近似无限长的$h_d(n)$。最简单的办法是直接截取一段 $h_d(n)$ 代替 h(n) 。这种截取可以形象地想象为h(n)是通过一个“窗口”所看到的一段$h_d(n)$，因此，h(n)也可表达为h(n)和一个“窗函数”的乘积，即

$$h(n)=w(n)\,h_d(n)$$

矩形窗口法

以一个截止频率为 ω_c的线性相位理想低通滤波器为例,讨论FIR的设计问题。

a. 对于给定的理想低通滤波器 $H_d(e^{j\omega})$，计算 $h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega\alpha} & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}\qquad \alpha：低通滤波器的延时$$

则

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

理想特性的$h_d(n)$和$H_d(\omega)$

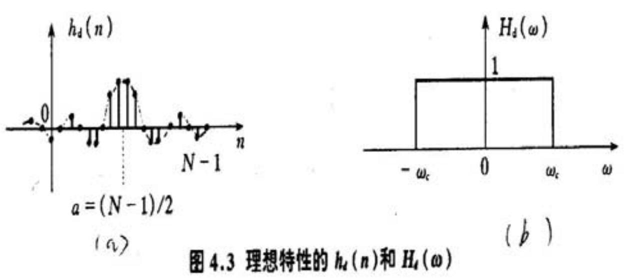


图 4.3 理想特性的 $h_d(n)$和 $H_d(\omega)$

这是一个以为α 中心的偶对称的无限长非因果序列，如果截取一段n=0～N-1的$h_d(n)$作为h(n)，则为保证所得到的是线性相位FIR滤波器，延时α 应为h(n)长度N的一半,即

$$\alpha=(N-1)/2$$

b.计算 $h(n)$

$$h(n)=h_d(n)w_R(n)=\begin{cases} h_d(n) & o\le n\le N-1 \\ 0 & n\text{为其它值} \end{cases}$$

其中 $w_R(n)=R_N(n)$

c.计算 $H(e^{j\omega})$。$H(e^{j\omega})=H_d(e^{j\omega})*W_R(e^{j\omega})$

设$W(e^{j\omega})$ 为窗口函数的频谱:

$$W(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_R(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

用幅度函数和相位函数来表示，则有

$$W(e^{j\omega})=W_R(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

其 线 性 相 位 部 分 $e^{-j\omega\alpha}$ 则 是 表 示 延 时 $(N-1)/2$ 一 半 长 度，

对频率响应起作用的是它的幅度函数

$$W_R(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

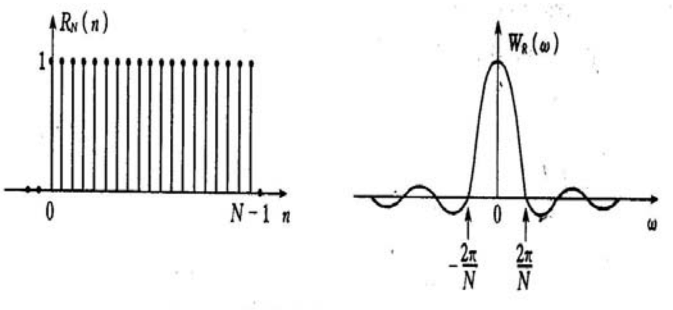


图 4.4 矩形窗序列 $\omega(n)=R_N(n)$及$W_R(\omega)$

理想频响也可以写成幅度函数和相位函数的表示形式

$$H_d(e^{j\omega})=H_d(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

其中幅度函数为

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_c \\ 0 & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

两个信号时域的乘积对应于频域卷积，所以有

$$H(e^{j\omega})=H_d(e^{j\omega})*W_R(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})W_R[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\theta\alpha}W_R(\omega-\theta)e^{-j(\omega-\theta)\alpha}d\theta$$

$$= e^{-j\omega\alpha}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta\right]$$

如果也以幅度函数 $H(\omega)$ 和相位函数来表示 H（$e^{j\omega}$），

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

则实际FIR滤波器的幅度函数H（ω）为

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$$

正好是理想滤波器幅度函数与窗函数幅度函数的卷积。

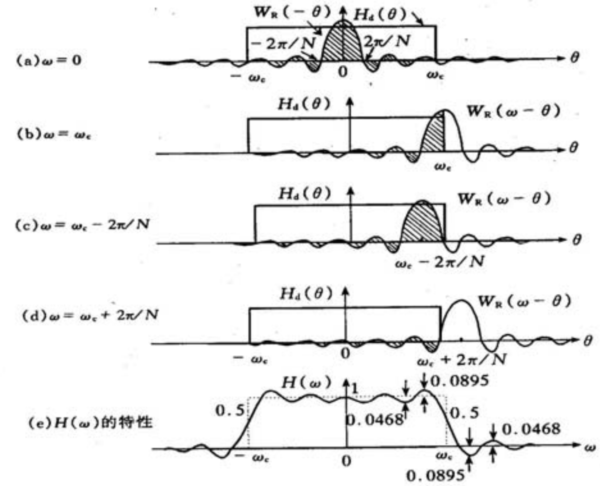


图 4.5 矩形窗的卷积过程

加矩形窗处理后，对理想频率响应产生了两点影响：

1）使理想频率特性不连续点ω=ωc处，形成了一个过渡带，过渡带的宽度等于矩形窗的频率响应$W_R(\omega)$的主瓣宽度△ω=4π/N；

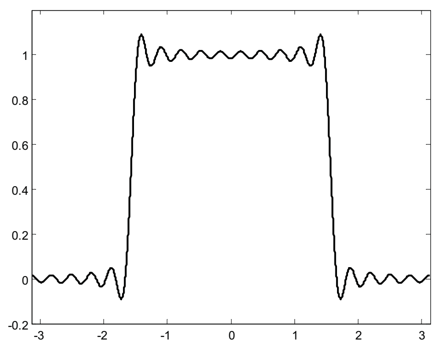
2) 在截止频率ωc的两边ω=ωc ±2π/N 处(即过渡带的两边)，H(ω)出现最大的肩峰值，肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，而振荡的快慢，则取决于$W_R(\omega)$波动的快慢。

若增加截取长度N，则在主瓣附近的窗的频率响应为

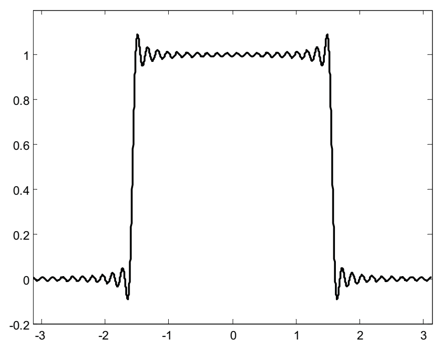
$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \approx \frac{\sin(N\omega/2)}{\omega/2} = N\frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质：随着x加大（即N加大），函数曲线波动的频率加快，主瓣幅度加高，旁瓣幅度也同样加高，主瓣与旁瓣的相对比例保持不变。

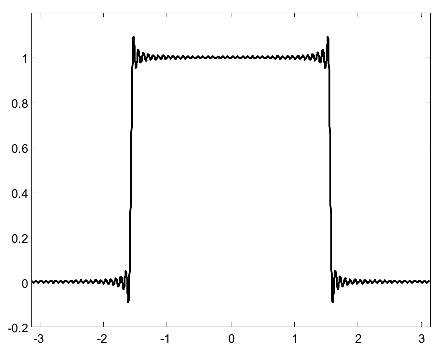
这个相对比例是由$\sin x/x$决定的, 也就是说是由矩形窗函数的形状决定的。



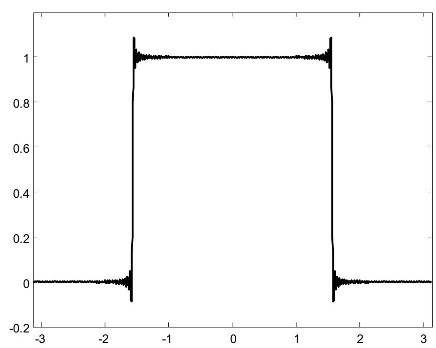
-11<k<11



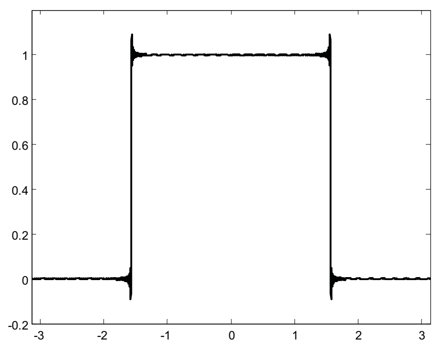
-21<k<21



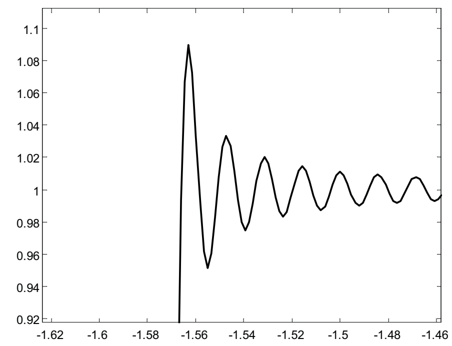
-41<k<41



-81<k<81



-201<k<201



Overshot: 0.089490….

--Gibbs, J. Willard, "*Fourier Series*". Nature 59, 200 (1898) and 606 (1899).

由于窗谱肩峰的存在，影响到H(ω)通带的平坦和阻带的衰减，使阻带最小衰减只有21dB左右，因此在实际中，矩形窗很少采用。

为了消除吉布斯效应，取得较好频率特性，一般采用其他类型的窗函数$w(n)$，对$h_d(n)$ 进行加窗处理。

改变窗函数的形状，可改善滤波器的特性，窗函数有许多种，但要满足以下两点要求：

①窗谱主瓣宽度要窄，以获得较陡的过渡带；

②相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使能量尽量集中在主瓣中，这样就 可以减小肩峰和余振，以提高阻带衰减和通带平稳性。

但实际上这两点不能兼得，一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。

几种常用的窗函数：

1. 矩形窗，上面已讲过，不再细述

2. 汉宁窗（升余弦窗）

$$w(n)=\frac{1}{2}[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)]R_N(n)$$

$$=0.5R_N(n)-0.25\left(e^{j\frac{2\pi n}{N-1}}+e^{-j\frac{2\pi n}{N-1}}\right)R_N(n)$$

利用付氏变换的移位特性，汉宁窗频谱的幅度函数W（ω）可用矩形窗的幅度函数表示为：

$$W\left(e^{j\omega}\right)=0.5W_R(\omega)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}-0.25[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)}$$

$$+W_R\left(\omega+\frac{\pi}{N-1}\right)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)}]$$

$$=\left\{0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]\right\}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$W(\omega)=0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})\right]$$

三部分矩形窗频谱相加，使旁瓣互相抵消，能量集中在主瓣，旁瓣大大减小，主瓣宽度增加1倍，为 $\frac{8\pi}{N}$ 。

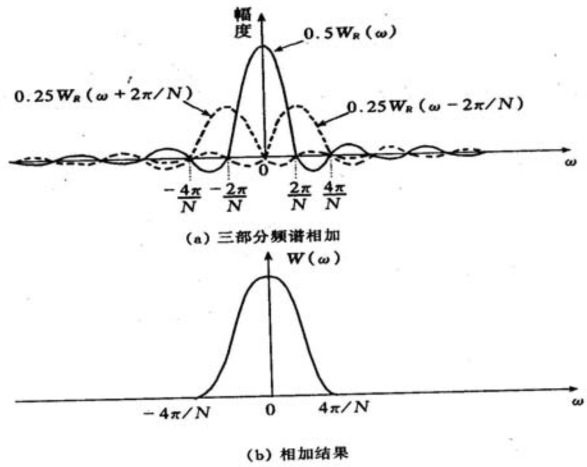


图 4.6 汉宁窗频谱

3. 汉明窗（改进的升余弦窗）

$$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

它是对汉宁窗的改进，在主瓣宽度（对应第一零点的宽度）相同的情况下，旁瓣进一步减小，可使99.96%的能量集中在窗谱的主瓣内。

4. 布莱克曼窗（三阶升余弦窗）

$$w(n)=\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

增加一个二次谐波余弦分量，可进一步降低旁瓣，但主瓣宽度进一步增加，为 $\frac{12\pi}{N}$ 。增加N可减少过渡带。

频谱的幅度函数为：

$$W(\omega)=0.42W_R(\omega)+0.25\left[W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})\right]$$
$$+0.04\left[W_R(\omega-\frac{4\pi}{N-1})+W_R(\omega+\frac{4\pi}{N-1})\right]$$

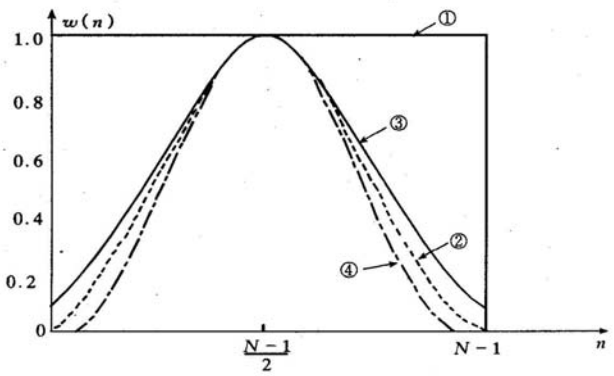


图 4.7 四种常用的窗口函数

(1)矩形窗；(2)汉宁窗；(3)汉明窗；(4)布莱克曼窗

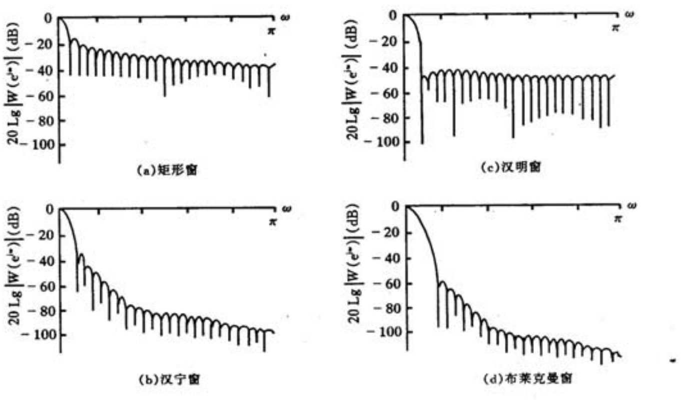


图 4.8 四种窗函数的频谱（$N = 51$）

窗口函数的频谱 N=51，A=20lg|W(ω)/W(0)|

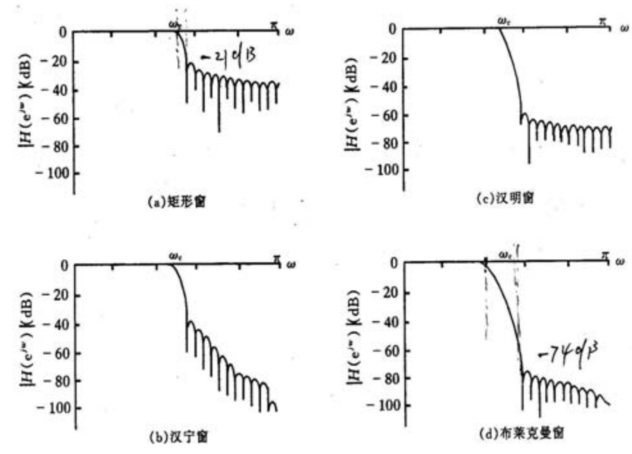


图 4.9 四种窗口在同一指标下设计的滤波器的频率特性

$N = 51 \qquad \omega_c = 0.5\pi$

窗函数	主瓣宽度	过渡带宽	旁瓣峰值衰减 (dB)	阻带最小衰减 (dB)
矩形	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-13	-21
汉宁	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-31	-44
汉明	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-41	-53
布莱克曼	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-57	-74

5.凯塞窗

以上四种窗函数，都是以增加主瓣宽度为代价来降低旁瓣。凯塞窗则可自由选择主瓣宽度和旁瓣衰减。

$$w(n) = \frac{I_o\left(\beta\sqrt{1-\left[1-2n/(N-1)\right]^2}\right)}{I_o(\beta)} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$I_0(x)$是零阶修正贝塞尔函数，参数β可自由选择，决定主瓣宽度与 旁瓣衰减。β越大，w(n)窗越窄，其频谱的主瓣变宽，旁瓣变小。一般取 4<β<9。

β=5.44 接近汉明

β=8.5 接近布莱克曼

β=0 为矩形

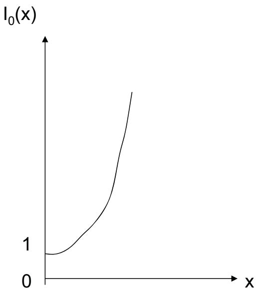


图1 零阶修正贝塞尔函数

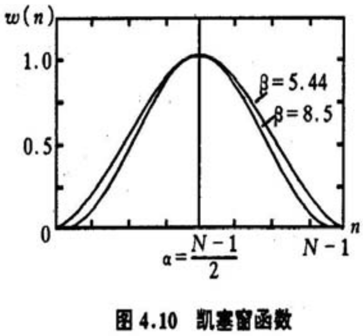


图2 凯塞窗函数

- Equiripple method（等纹波方法）:
  - 这种滤波器在通带和阻带都有最小最大偏差，也就是说，在通带和阻带有波动，但是波动的幅度是相同的。
  - 采用了Remez exchange algorithm
- 加权最小二乘法 (也称eigenfilters（特征滤波器）)
  - 该方法最小化如下能量函数:

$$E = \int |D(\varpi) - H(e^{j\varpi})|^2 \, (\text{weight}) \, d\varpi$$

其中 $D(\varpi)$ 是想要的频率响应，比如理想低通等。

纹波减弱，或者控制在特定形式下，但永在。

二维数字滤波器设计

二维数字信号的基本变换

Z变换：

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

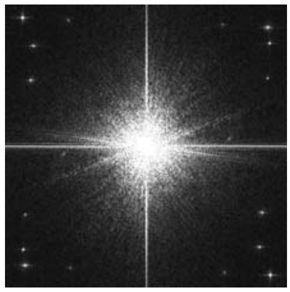
离散时间傅立叶变换：

$$X(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) e^{-j(m\omega_1 + n\omega_2)}$$

离散时间傅立叶变换性质：
序列的傅氏变换是ω_1和ω_2的周期函数，周期为2π。

二维数字滤波器设计

原图像



图像的频谱

二维数字滤波器设计

二维Z变换：

$$H(z_1,z_2)=\sum\sum h(m,n)z_1^{-m}z_2^{-n}$$

典型的二维IIR滤波器的传递函数：

$$H(z_1,z_2)=\frac{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}b_{nm}z_1^{-m}z_2^{-n}}{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}a_{nm}z_1^{-m}z_2^{-n}}$$

典型的二维FIR滤波器的传递函数：

$$H(z_1,z_2)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}h(m,n)z_1^{-m}z_2^{-n}$$

二维数字滤波器设计

典型的二维IIR滤波器的频率特性：

$$H(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2})=\frac{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}b_{nm}e^{-jm\omega_1}e^{-jn\omega_2}}{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}a_{nm}e^{-jm\omega_1}e^{-jn\omega_2}}$$

典型的二维FIR滤波器的频率特性：

$$H(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2})=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}h(m,n)e^{-jm\omega_1}e^{-jn\omega_2}$$

www.themegallery.com

1 低通滤波器

- 1）原理
- 2）理想低通滤波器
- 3）巴特沃思低通滤波器
- 4）指数低通滤波器

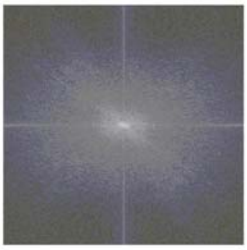
1 低通滤波器

- 1）原理

Lenna

加入高斯噪声的**Lenna**

1 低通滤波器



Lenna的谱图像

有高斯噪声Lenna的谱图像

1 低通滤波器

– 结论：图像的边缘和其他尖锐跳跃（如噪声）对傅立叶变换的高频分量有很大贡献；

– 方法：通过一个线性系统，频域上对一定范围高频分量进行衰减能够达到平滑化；

– 这种线性系统称为低通滤波器法。

$G(u,v)=F(u,v)H(u,v)$

$F(u,v)$是输入，$G(u,v)$是输出

$H(u,v)$是线性系统的传递函数

1 低通滤波器

- 2）理想低通滤波器（ILPF）
  – 定义：以D_0为半径的圆内所有频率分量无损的通过，圆外的所有频率分量完全衰减。

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & D(u,v)\le D_0\\ 0 & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

其中$D(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$

  – D_0又称为截止频率。

注意D_0的物理意义

1 低通滤波器

如何确定D_0?

– 信号能量E_T：将u,v=0，1，N-1的每一点（u,v）的能量相加起来得到傅立叶信号能量E_T。

$$E_T=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}E(u,v)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]$$

1 低通滤波器

– 举例：观察有高斯噪声Lenna图像的傅立叶谱和不同半径下的谱图像的信号能量。

$E\_T = 1.5387\times10^{15}$

$E\_5 = 1.3886\times10^{15}$

$E\_5/E\_T = 0.9025$

$E\_10 = 1.4191\times10^{15}$

$E\_10/E\_T = 0.9223$

$E\_20 = 1.4346\times10^{15}$

$E\_20/E\_T = 0.9323$

$E\_50 = 1.4483\times10^{15}$

$E\_50/E\_T = 0.9412$

1 低通滤波器

有高斯噪声的Lenna图像

$D_0=5$

1 低通滤波器

$D_0=10$

$D_0=20$

1 低通滤波器

$D_0=50$

有高斯噪声的原Lenna图像

1 低通滤波器

– 问题：

- （1）模糊
- 对于半径为5，包含了全部90%的能量。但严重的模糊表明了图片的大部分边缘信息包含在滤波器滤去的10%能量之中。随着滤波器半径增加，模糊的程度就减少。
- 模糊产生的原理：根据卷积定理

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)$$

- 相当于空间域中图像的互相混合

1 低通滤波器

- （2）振铃（与一维相似）
- ILPF空域上冲激响应卷积产生两个现象：
- 一是边缘渐变部分的对比度；
- 二是边缘部分增加了波纹（ringing）。
- 其原因是冲激响应函数的多个过零点，是Gibbs现象的二维表现。

二维线性相位FIR滤波器设计

最小二乘设计方法：

步骤1：把区间[0 π]×[0 π]离散化

$$\Pi=\{(\omega_{1i},\omega_{2j})\,|\,i=1,2,\ldots,M_1;\ j=1,2,\ldots,M_2\}$$

步骤2：求解如下问题：

$$\min\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}|H(\omega_{1i},\omega_{2j})-D(\omega_{1i},\omega_{2j})|^2$$

典型低通滤波器

- 3）巴特沃思低通滤波器（BLPF）

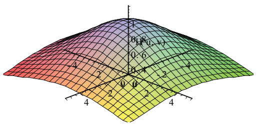
n阶巴特沃思（Butterworth）滤波器

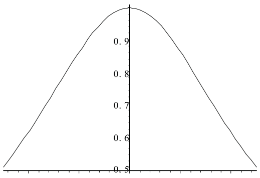
$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}\right)^{2n}}$$

$n=1$，1阶巴特沃思滤波器

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\frac{(u^2+v^2)}{D_0^{\,2}}}$$

1 低通滤波器





1 低通滤波器

$D_0=10$

1 低通滤波器

$D_0=20$

$D_0=50$

1 低通滤波器

- 巴特沃斯低通滤波器的优点是：
- 一、模糊大大减少。因为包含了许多高频分量；
- 二、没有振铃现象。因为滤波器是平滑连续的。

1 低通滤波器

- 4）指数低通滤波器（elpf）

指数低通滤波器

$$H(u,v)=e^{-[\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}]^{2n}}$$

$n=1$的指数低通滤波器

$$H(u,v)=e^{-[\frac{u^2+v^2}{D_0^2}]}$$

性质：比相应的巴特沃思滤波器要稍微模糊，但没有振铃现象。

1 低通滤波器

$D_0=10$

1 低通滤波器

$D_0=20$

$D_0=50$

2 高通滤波器

- 1）原理
- 2）理想高通滤波器
- 3）巴特沃思高通滤波器
- 4）指数高通滤波器
- 5）高斯差分滤波器

2 高通滤波器

- 1）原理
  - 图像锐化处理的目的是使模糊图像变得清晰。
  - 通常图像模糊是由于图像受到平均或积分运算，因此图像锐化采用微分运算。
  - 在频域处理上，即采用高通滤波器。
  - 注意：进行处理的图像必须有较高的信噪比，否则图像锐化后，图像信噪比会更低。

2 高通滤波器

- 2）理想高通滤波器（IHPF）

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & D(u,v)\le D_0\\ 1 & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

其中$D(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$

2 高通滤波器

- 3）巴特沃思高通滤波器（BHPF）

n阶巴特沃思（Butterworth）高通滤波器

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{D_0}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^{2n}}$$

$n=1$，1阶巴特沃思高通滤波器

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\frac{D_0^2}{(u^2+v^2)}}$$

2 高通滤波器

- 4）指数高通滤波器（EHPF）

指数高通滤波器

$$H(u,v)=e^{-[\frac{D_0}{\sqrt{u^2+v^2}}]^2}$$

$n=2$的指数高通滤波器

$$H(u,v)=e^{-[\frac{D_0^2}{u^2+v^2}]}$$

2 高通滤波器

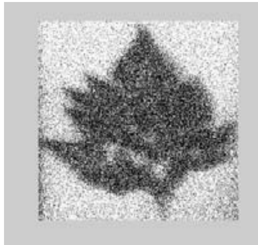
原图

IHPF

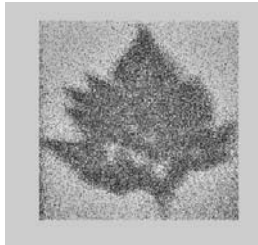
BHPF

EHPF

2 高通滤波器



有噪声的图



采用BHPF高通滤波后，
信噪比变小。

2 高通滤波器

- 5）高斯差分滤波器（DoG,Difference of Gaussian）

高斯差分滤波器的传递函数定义为：
两个不同宽度高斯函数之差。

$$G(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad A \ge B, \sigma_1 \ge \sigma_2$$

$$g(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-t^2/2\sigma_1^2} - \frac{B}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

3 带通和带阻滤波器

- 1）理想的带通滤波器

$$H(u) = \begin{cases} 1 & f_1 \le |u| \le f_2 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \Delta u = f_2 - f_1$$

理想带通滤波器的传递函数可写为

$$H(u) = \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * \left[\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)\right]$$

理想带通函数的冲激响应为

$$h(t) = 2\Delta u \frac{\sin(\pi\Delta ut)}{\pi\Delta ut}\cos(2\pi u_0 t)$$

3 带通和带阻滤波器

- 2）理想的带阻滤波器

$$H(u)=\begin{cases}0 & f_1\le|u|\le f_2\\ 1 & others\end{cases}$$

$$u_0=\frac{1}{2}(f_1+f_2),\Delta u=f_2-f_1$$

理想带阻滤波器的传递函数可写为

$$H(u)=1-\Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right)*\left[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)\right]$$

理想带阻函数的冲激响应为

$$h(t)=\delta(t)-2\Delta u\frac{\sin(\pi\Delta ut)}{\pi\Delta ut}\cos(2\pi u_0t)$$

3 带通和带阻滤波器

- 3）通用带通滤波器

选取非负单峰函数$K(u)$，与冲激偶做卷积

$$H(u)=K(u)*\left[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)\right]$$

其冲激响应为

$$h(t)=2k(t)\cos(2\pi u_0t)$$

若$K(u)$为高斯函数

$$H(u)=Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}*\left[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)\right]$$

$$h(t)=\frac{2A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\cos(2\pi u_0t)$$

3 带通和带阻滤波器

- 4）巴特沃斯带通滤波器

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-D_0^{\ 2}}\right]^{2n}}$$

其中W为带宽，D_0为带的中心。

4 同态滤波

- 目的：正常图象是在均匀光强度情况下获得的图象，实际上光照射是不均匀，或光强范围动态太大。
- 方法：为解决光照不均匀的影响，可用同态滤波来解决。
- 原理：
- 光照下景物图象的模型
  - $f(x,y)=f_i(x,y)f_r(x,y)$
  - $f_i(x,y)$:随空间位置不同的光强分量
  - $f_r(x,y)$:景物反射到眼睛的图象
  - $f(x,y)$:最终获得的图象

4 同态滤波

- 分析
  - $f_i(x,y)$: 缓慢变化，频率集中在低频部分
  - $f_r(x,y)$: 包含景物各种信息，高频分量丰富
- 处理

$$\ln f(x,y)=\ln f_i(x,y)+\ln f_r(x,y)$$

$$FFT\left[\ln f(x,y)\right]=FFT\left[\ln f_i(x,y)\right]+FFT\left[\ln f_r(x,y)\right]$$

  - 选择一低通滤波函数H(u,v)在频域空间处理

$f(x,y) \rightarrow \boxed{\text{Ln}} \rightarrow \boxed{\text{FT}} \rightarrow \boxed{H(u,v)} \rightarrow \boxed{\text{IFT}} \rightarrow \boxed{\text{Exp}} \rightarrow g(x,y)$

4 同态滤波