

第十一讲 图像处理中的滤波器设计

图像处理中的滤波器设计

- 一维滤波器设计
- 二维低通滤波器法
- 二维高通滤波器法
- 二维带通和带阻滤波器法
- 同态滤波

基本概念

- 滤波器: 一个序列 $h=\{h(n)\}$
- 滤波: 对信号做卷积 $y=h*x$, 其中 $*$ 是卷积运算

$$y(n) = \sum_k h(k)x(n-k)$$

- **FIR** (Finite Impulse Response) 有限脉冲响应滤波器=有限长滤波器
- **IIR** (Infinite Impulse Response) 无限脉冲响应滤波器=无限长滤波器

Z-变换和 DTFT (discrete time Fourier Transform)

给定信号或者滤波器 $s(n)$, Z 变换定义如下:

$$S(z) = \sum s(n)z^{-n}$$

当 $|z|=1$ 时就是Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

$$S(\omega) = \sum s(n)e^{-jn\omega}; \quad j = \sqrt{-1}$$

$S(\omega)$ 也称为 $s(n)$ 的频率响应

$$S(\omega) = |S(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

$|S(\omega)|$: 幅频响应, $\varphi(\omega)$: 相频响应, $\omega=0$ 低频, $\omega=\pi$ 最高频

$$y = x * h \Leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| * |H(\omega)|$$

$$\varphi_y(\omega) = \varphi_x(\omega) + \varphi_h(\omega)$$

- 低通滤波器=通过低频信息=移动平均

- $h=\{h(n)\}$, $H(\omega)|_{\omega=0} = c > 0 \text{ or } 1, H(\omega)|_{\omega=\pm\pi} = 0$

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| * |H(\omega)|$$

- 例子:

- 两点平均滤波器: $\{1,1\}/2$

- 样条滤波器: $\{1,2,1\}/4$

- 一般情况: $\sum h(n) = c, \quad c > 0$

- 高通滤波器=通过高频信息=移动差分

– $h=\{h(n)\}$, $H(z)|_{z=1}=0, H(z)|_{z=-1}=c \neq 0$ or $c=1$,
 $|Y(\omega)|=|X(\omega)|*|H(\omega)|$

– 例子:

- 最简单的高通: $h=\{1 -1\}/2$, 差分滤波器
- 二阶差分: $\{-1 2 -1\}/4$;

- **bandpass Filter** (带通滤波器)
- 通过 0 and π 中间的某个部分频率
- **All-pass filter** (全通滤波器) : 通过所有频率

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\Phi(\omega)}$$

- **Phase (相位) , Magnitude (幅度)**
 - $|H(\omega)|$ 称为H的幅频响应.
 - $\Phi(\omega)$ 称为H的相位或者相频响应
 - 如果 $\Phi(\omega) = a\omega + b$, 称H具有线性相位
 - H 具有线性相位当且仅当H是中心对称或者反对称

filters with linear phase

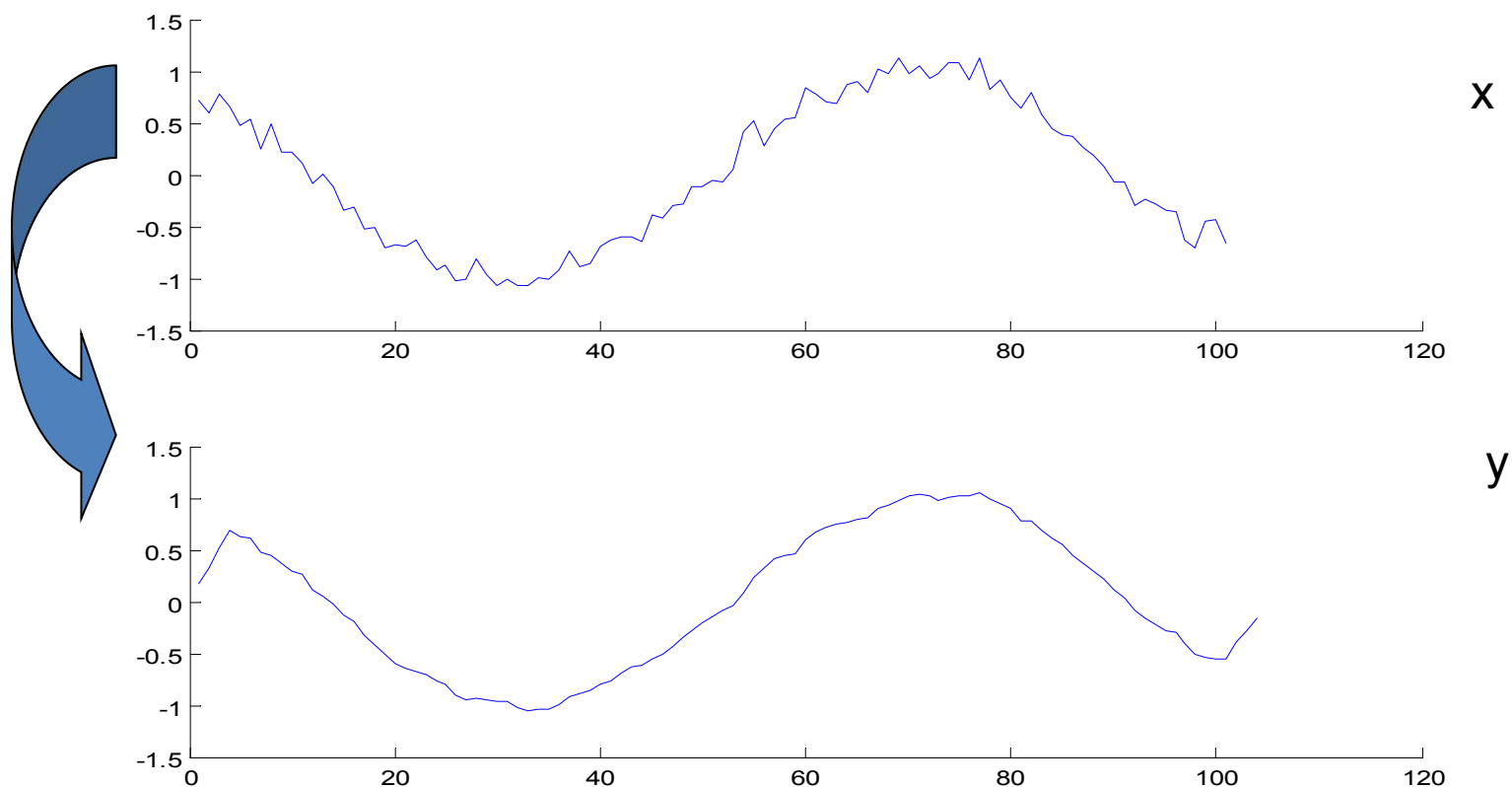
$$(1 + e^{-j\omega}) / 2 = e^{-j\omega/2} \cos(\omega / 2) \quad \leftrightarrow \quad (1 - e^{-j\omega}) / 2 = e^{-j\omega/2 - \pi/2} \sin(\omega / 2)$$

$$(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) / 4 = e^{-j\omega} (1 + \cos(\omega)) / 2$$

$$(1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) / 4 = e^{-j\omega} (1 - \cos(\omega)) / 2$$

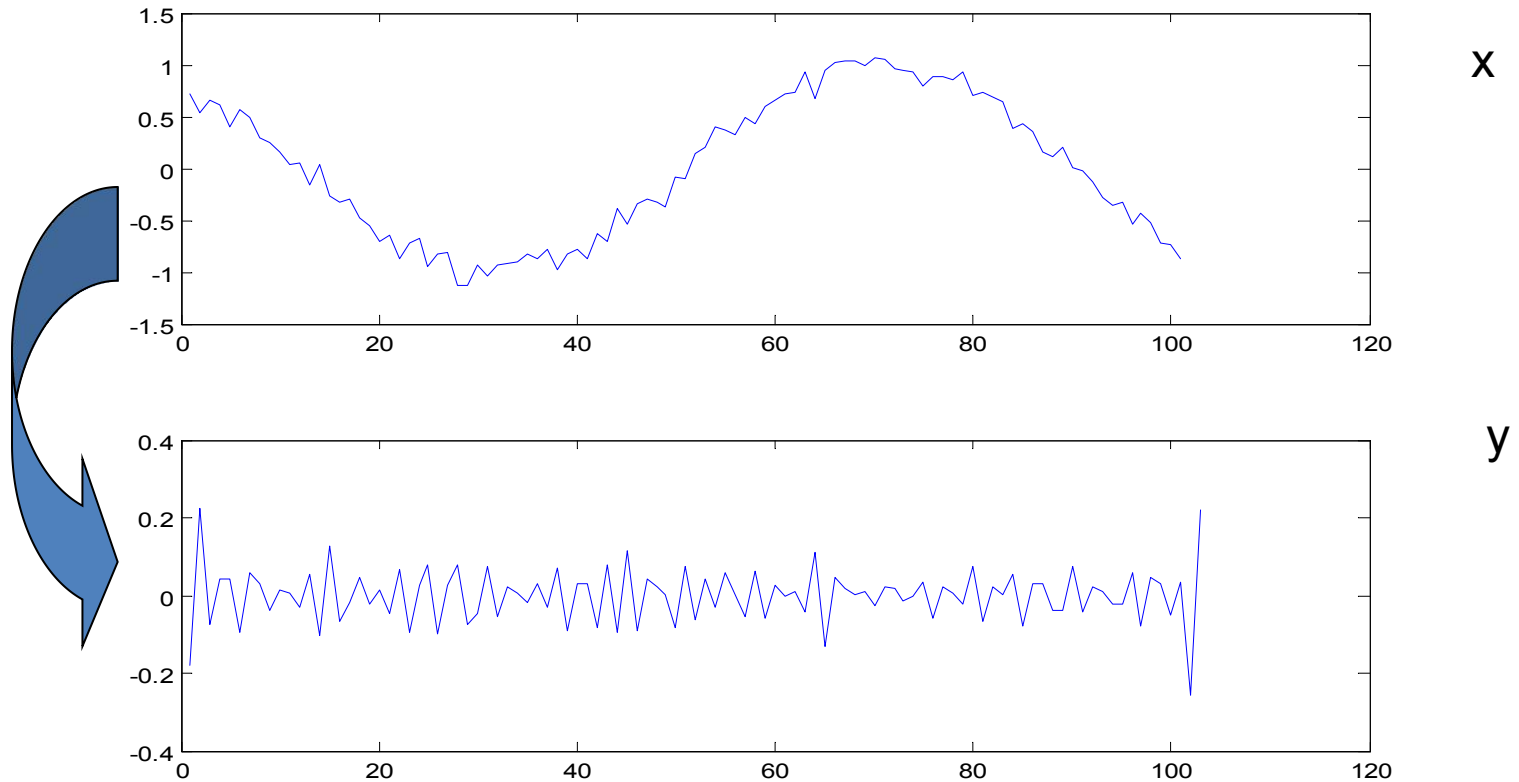
低通滤波器滤波示意:

```
x=sin(t)+0.1*randn(1,101);  
h=[1 1 1 1]/4;    y=x*h
```

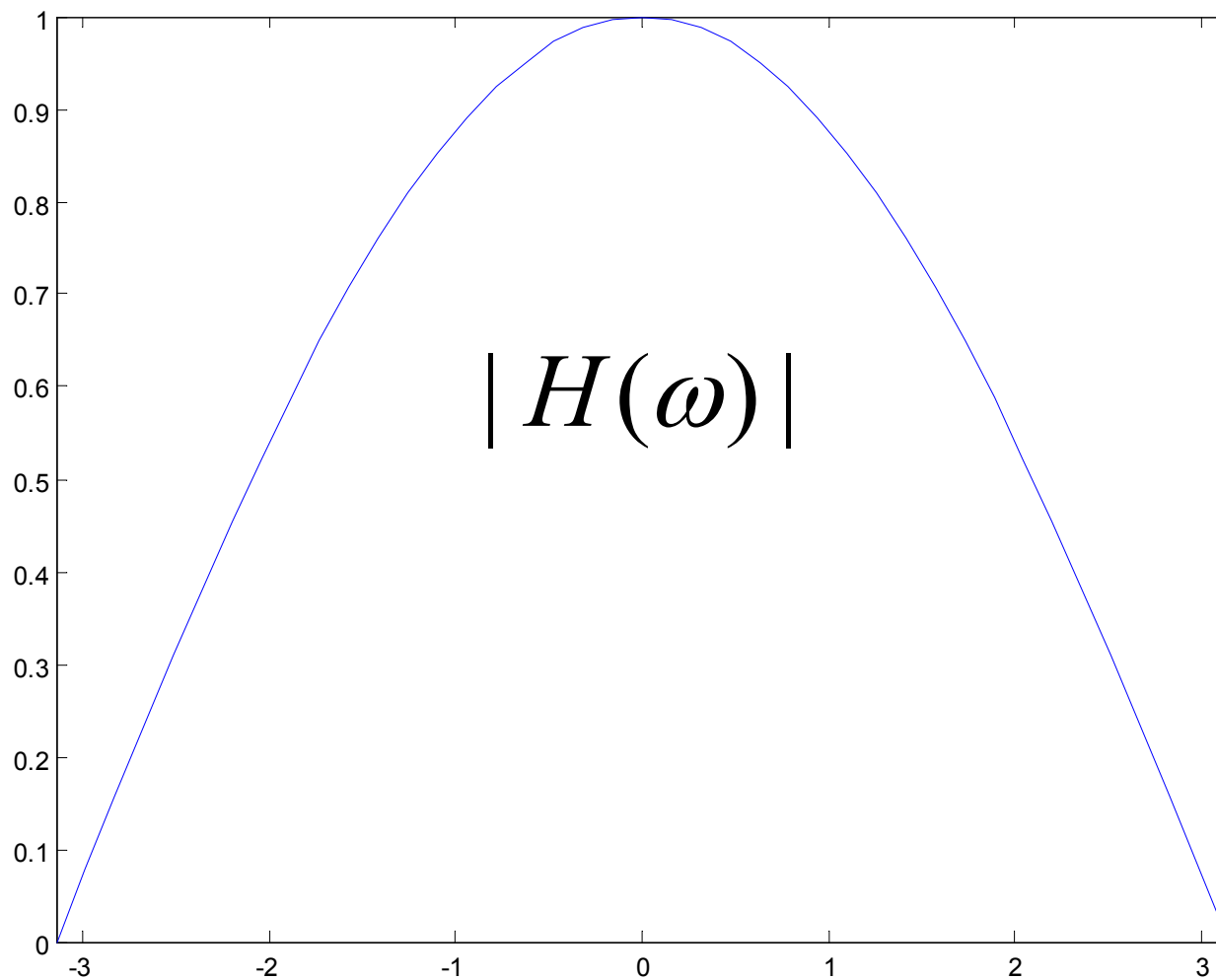


高通滤波器示意:

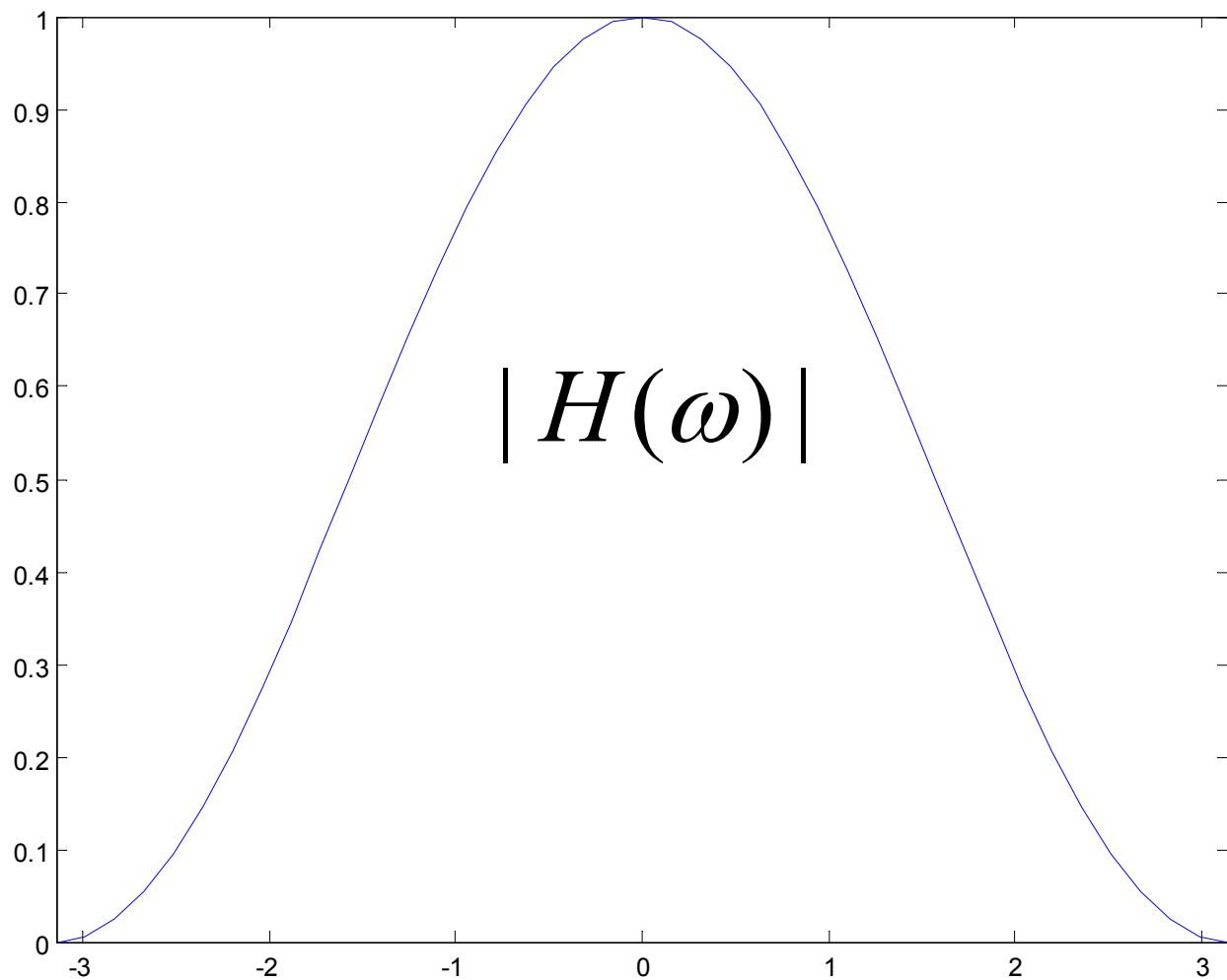
```
x=sin(t)+0.1*randn(1,101);  
h={-1 2 -1}/4;    y=x*h
```



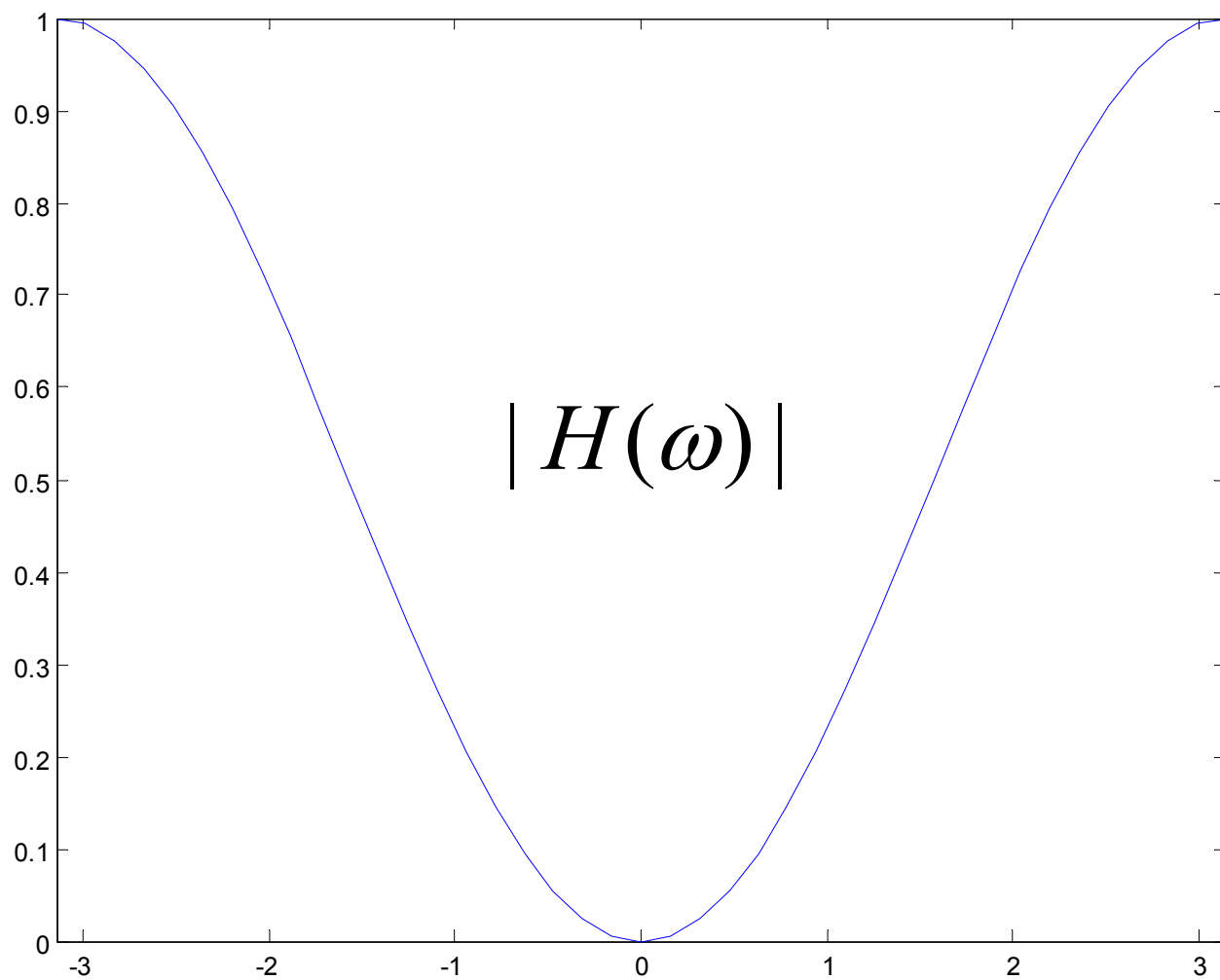
{0.5 0.5} 幅频响应



$\{1\ 2\ 1\}/4$ 的幅频响应



$\{-1 \ 2 \ -1\}/4$ 的幅频响应



- 理想滤波器

- 理想低通滤波器:

$$H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\omega} = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- 理想高通滤波器:

$$H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\omega} = \begin{cases} 0, & 0 < |\omega| < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- 对于理想低通滤波器:

$$h(k) = \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\pi k}$$

- 无限长，衰减慢，只能截断

窗口法

理想频响 $H_d(e^{j\omega})$ 是分段常数，在边界频率处有突变点，所以，这样得到的理想单位脉冲响应 $h_d(n)$ 往往都是无限长序列，而且是非因果的。但 **FIR** 的 $h(n)$ 是有限长的，问题是怎样用一个有限长的序列去近似无限长的 $h_d(n)$ 。最简单的办法是直接截取一段 $h_d(n)$ 代替 $h(n)$ 。这种截取可以形象地想象为 $h(n)$ 是通过一个“窗口”所看到的一段 $h_d(n)$ ，因此， $h(n)$ 也可表达为 $h_d(n)$ 和一个“窗函数”的乘积，即

$$h(n) = w(n) h_d(n)$$

矩形窗口法

以一个截止频率为 ω_c 的线性相位理想低通滤波器为例,讨论FIR的设计问题。

a. 对于给定的理想低通滤波器 $H_d(e^{j\omega})$, 计算 $h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad \alpha: \text{低通滤波器的延时}$$

则

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \end{aligned}$$

理想特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$

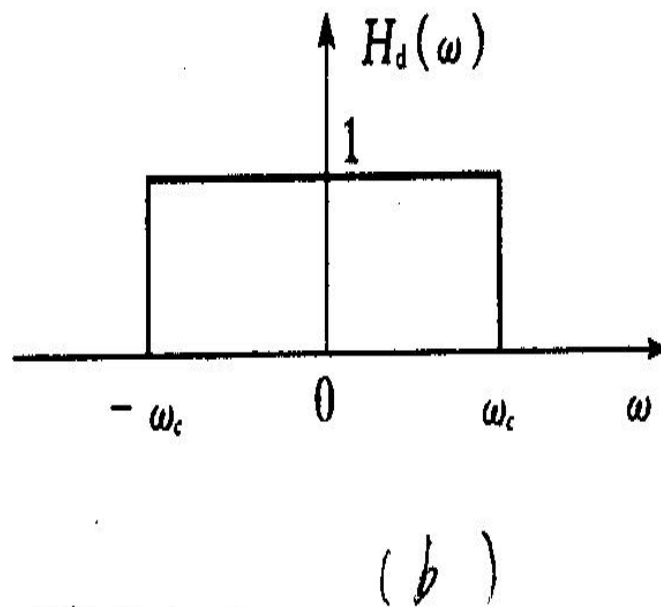
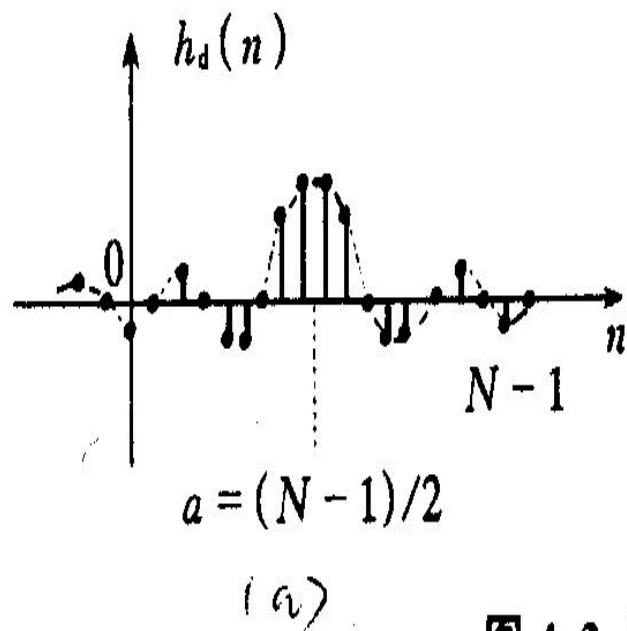


图 4.3 理想特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$

这是一个以为 α 中心的偶对称的无限长非因果序列，如果截取一段 $n=0 \sim N-1$ 的 $h_d(n)$ 作为 $h(n)$ ，则为保证所得到的是线性相位FIR滤波器，延时 α 应为 $h(n)$ 长度 N 的一半，即

$$\alpha = (N - 1) / 2$$

b. 计算 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)w_R(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ 为其它值} \end{cases}$$

其中 $w_R(n) = R_N(n)$

c. 计算 $H(e^{j\omega})$ 。 $H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$

设 $W(e^{j\omega})$ 为窗口函数的频谱:

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2} \right)} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \end{aligned}$$

用幅度函数和相位函数来表示, 则有

$$W(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\omega\alpha}$$

其线性相位部分

则是表示延时 α (即 $(N-1)/2$ 长度

,

对频率响应起作用的是它的幅度函数

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$

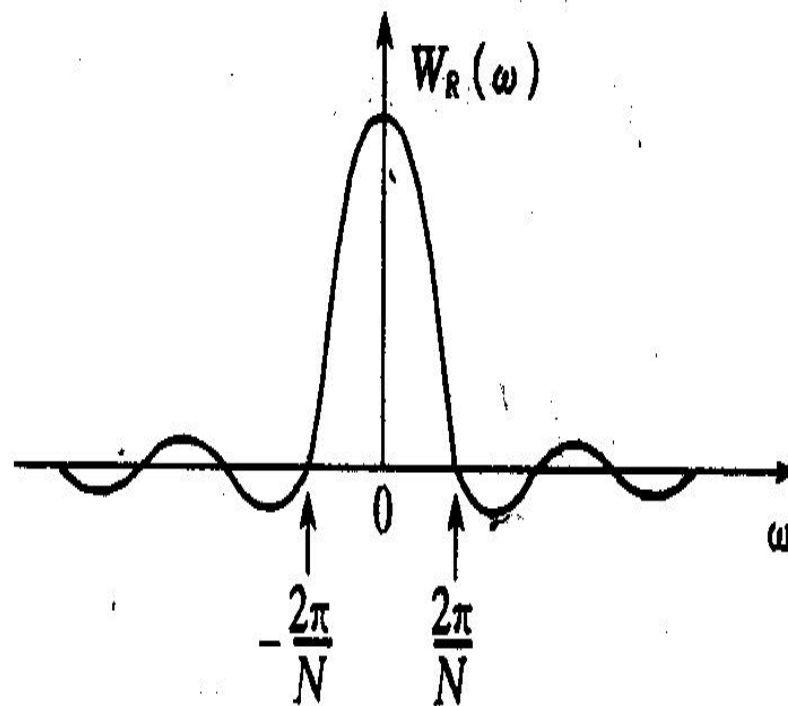
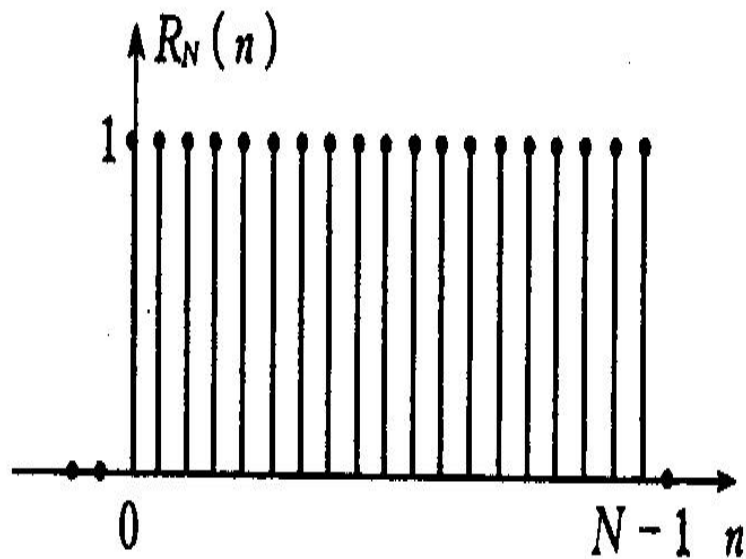


图 4.4 矩形窗序列 $\omega(n) = R_N(n)$ 及 $W_R(\omega)$

理想频响也可以写成幅度函数和相位函数的表示形式

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

其中幅度函数为

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

两个信号时域的乘积对应于频域卷积，所以有

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\theta\alpha} W_R(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta \\
 &= e^{-j\omega\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \right]
 \end{aligned}$$

如果也以幅度函数 $H(\omega)$ 和相位函数来表示 $H(e^{j\omega})$,

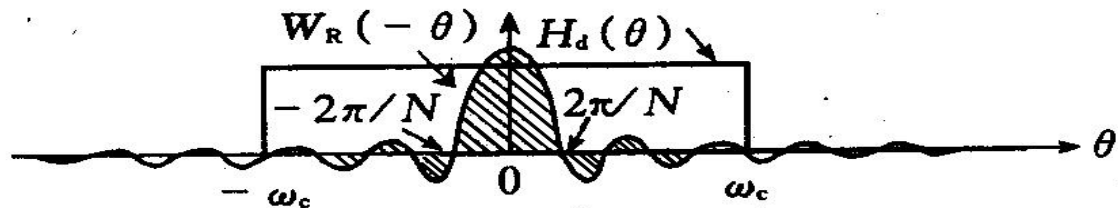
$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\omega\alpha}$$

则实际FIR滤波器的幅度函数 $H(\omega)$ 为

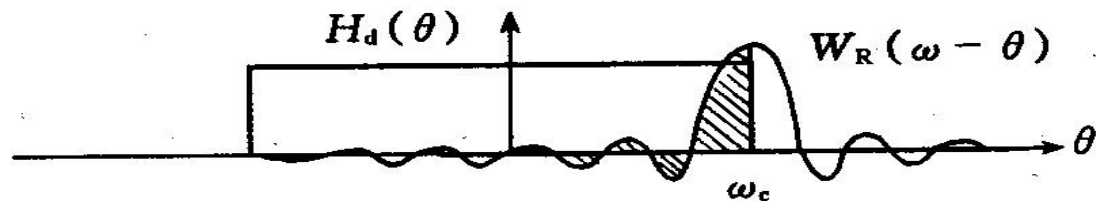
$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$

正好是理想滤波器幅度函数与窗函数幅度函数的卷积。

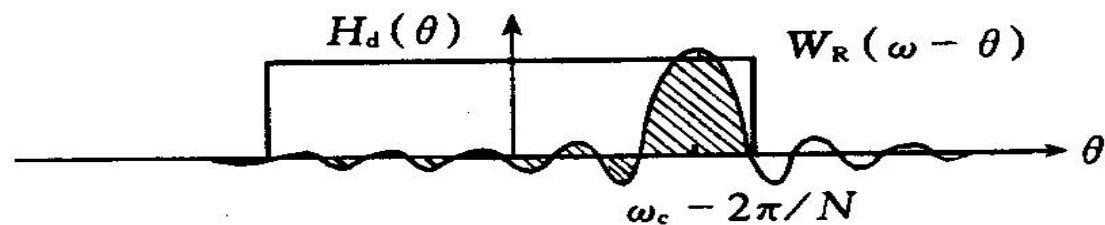
(a) $\omega = 0$



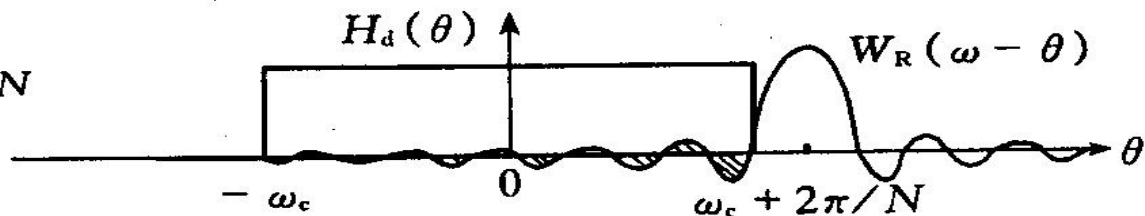
(b) $\omega = \omega_c$



(c) $\omega = \omega_c - 2\pi/N$



(d) $\omega = \omega_c + 2\pi/N$



(e) $H(\omega)$ 的特性

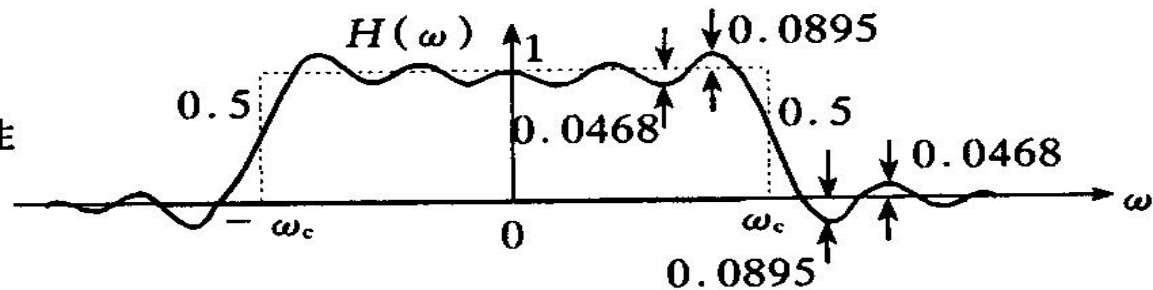


图 4.5 矩形窗的卷积过程

加矩形窗处理后，对理想频率响应产生了两点影响：

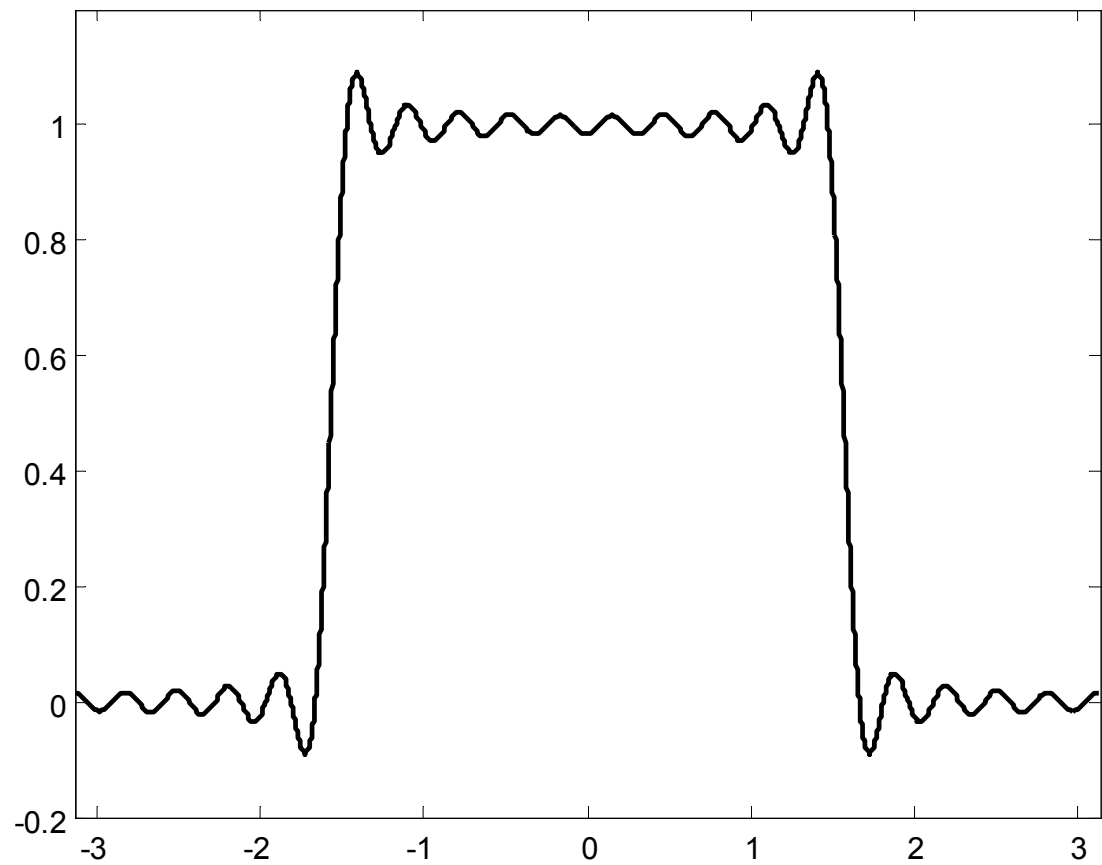
- 1) 使理想频率特性不连续点 $\omega = \omega_c$ 处，形成了一个过渡带，过渡带的宽度等于矩形窗的频率响应 $W_R(\omega)$ 的主瓣宽度 $\Delta\omega = 4\pi/N$ ；
- 2) 在截止频率 ω_c 的两边 $\omega = \omega_c \pm 2\pi/N$ 处(即过渡带的两边)， $H(\omega)$ 出现最大的肩峰值，肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，而振荡的快慢，则取决于 $W_R(\omega)$ 波动的快慢。

若增加截取长度N，则在主瓣附近的窗的频率响应为

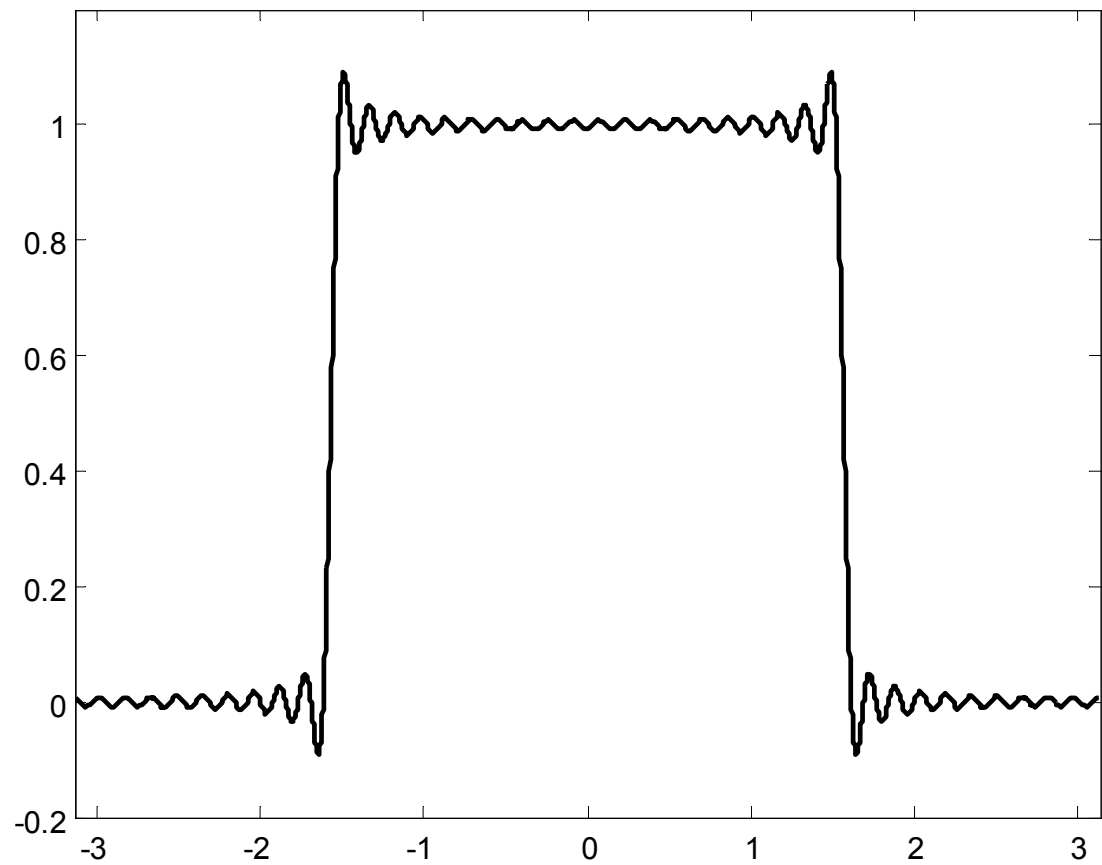
$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega / 2)}{\sin(\omega / 2)} \approx \frac{\sin(N\omega / 2)}{\omega / 2} = N \frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质：随着x加大（即N加大），函数曲线波动的频率加快，主瓣幅度加高，旁瓣幅度也同样加高，主瓣与旁瓣的相对比例保持不变。

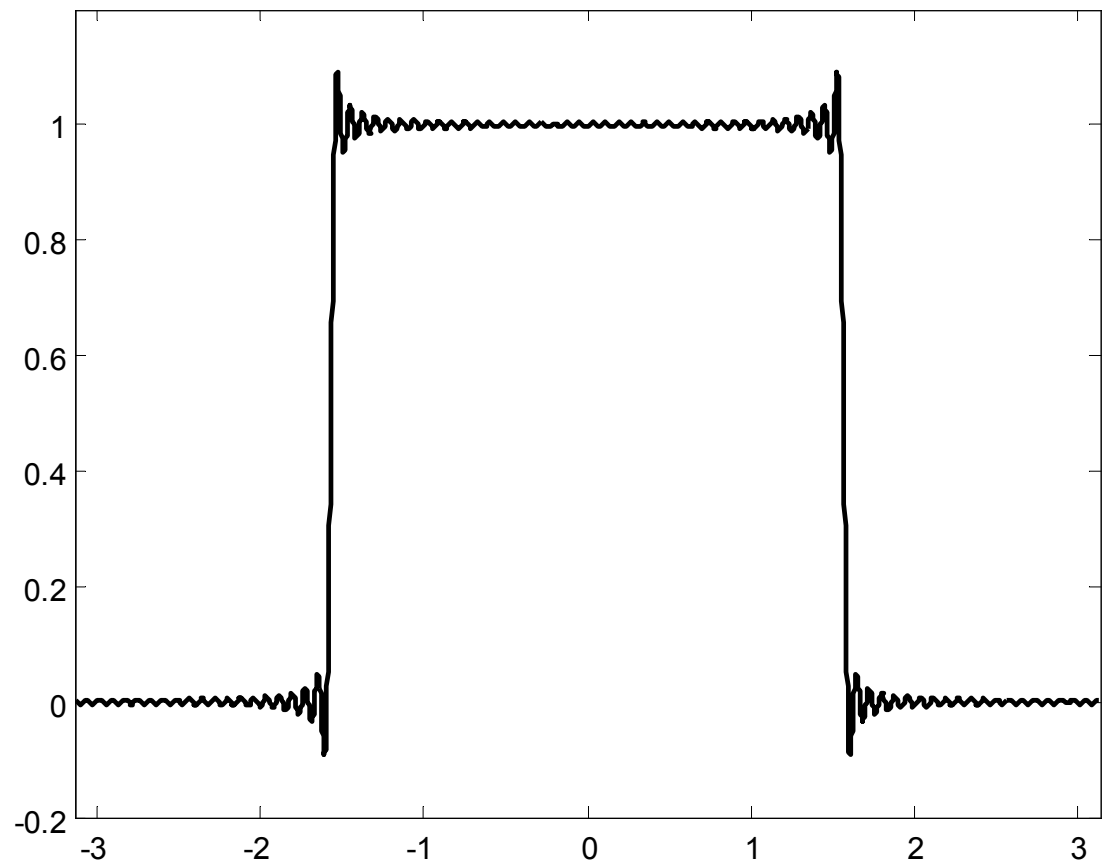
这个相对比例是由 $\sin x/x$ 决定的，也就是说是由矩形窗函数的形状决定的。



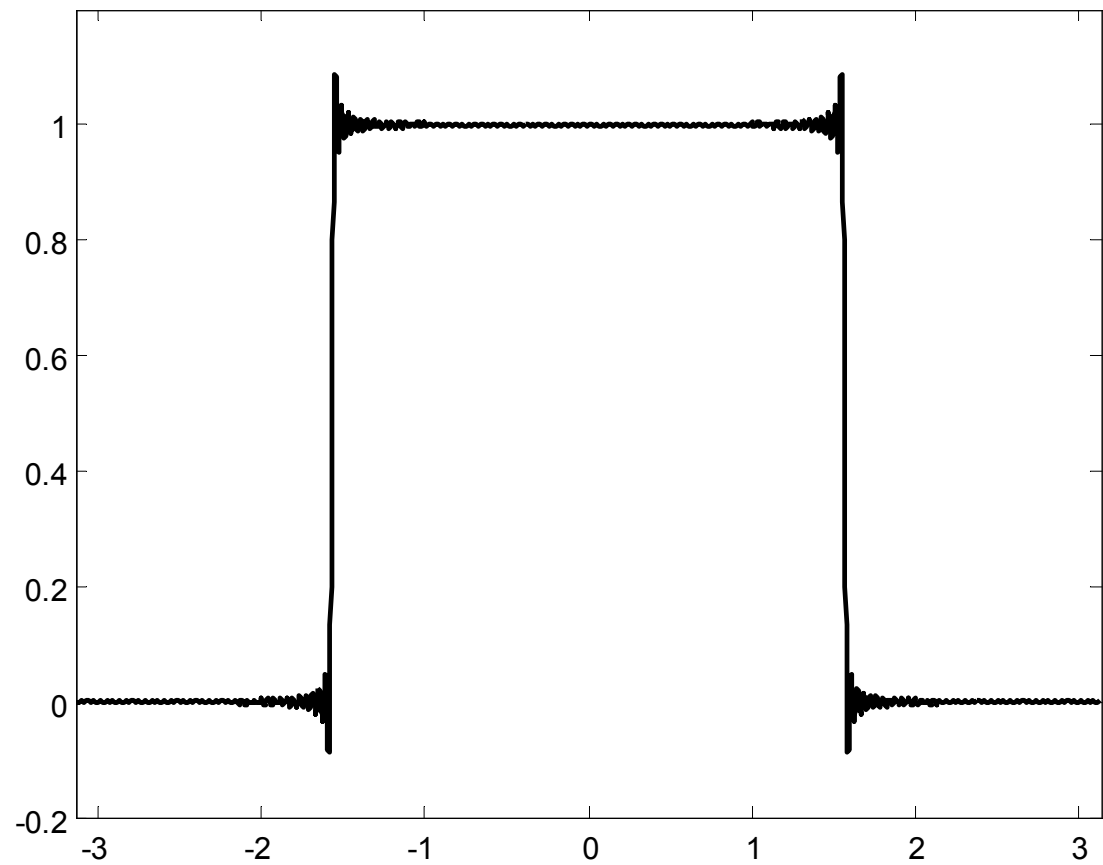
$-11 < k < 11$



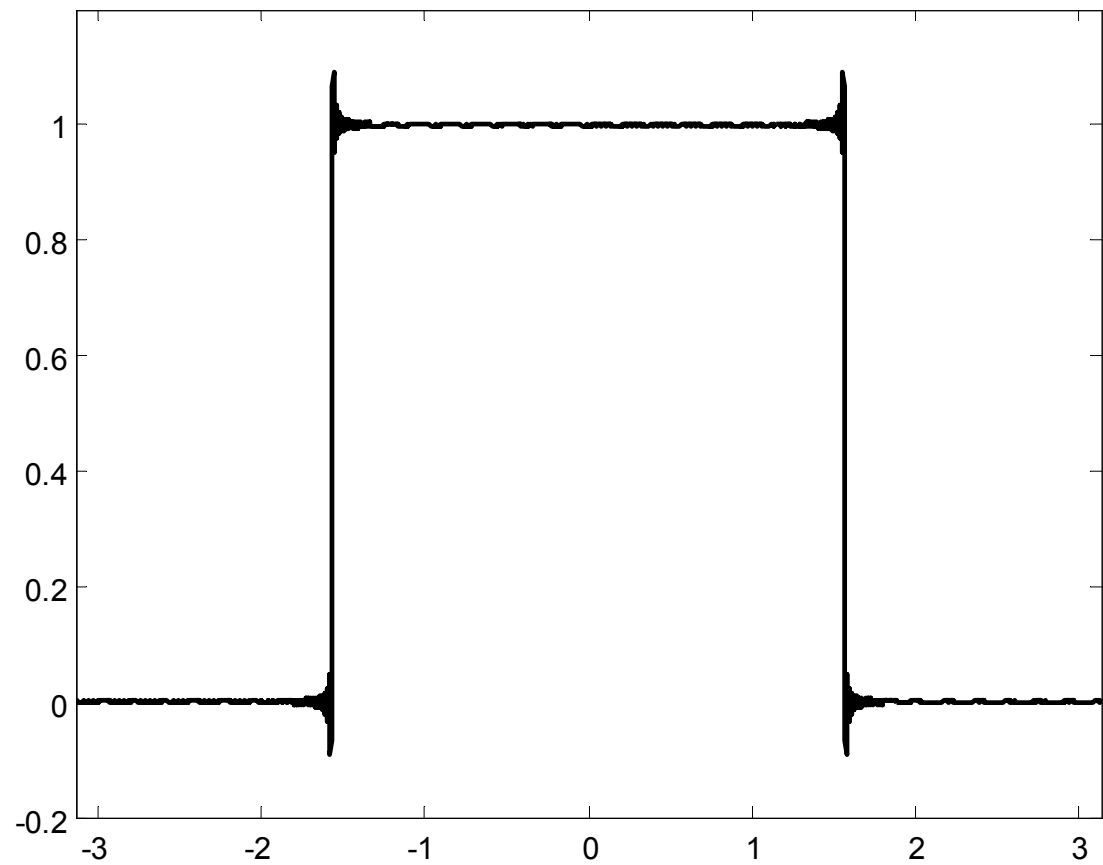
$-21 < k < 21$



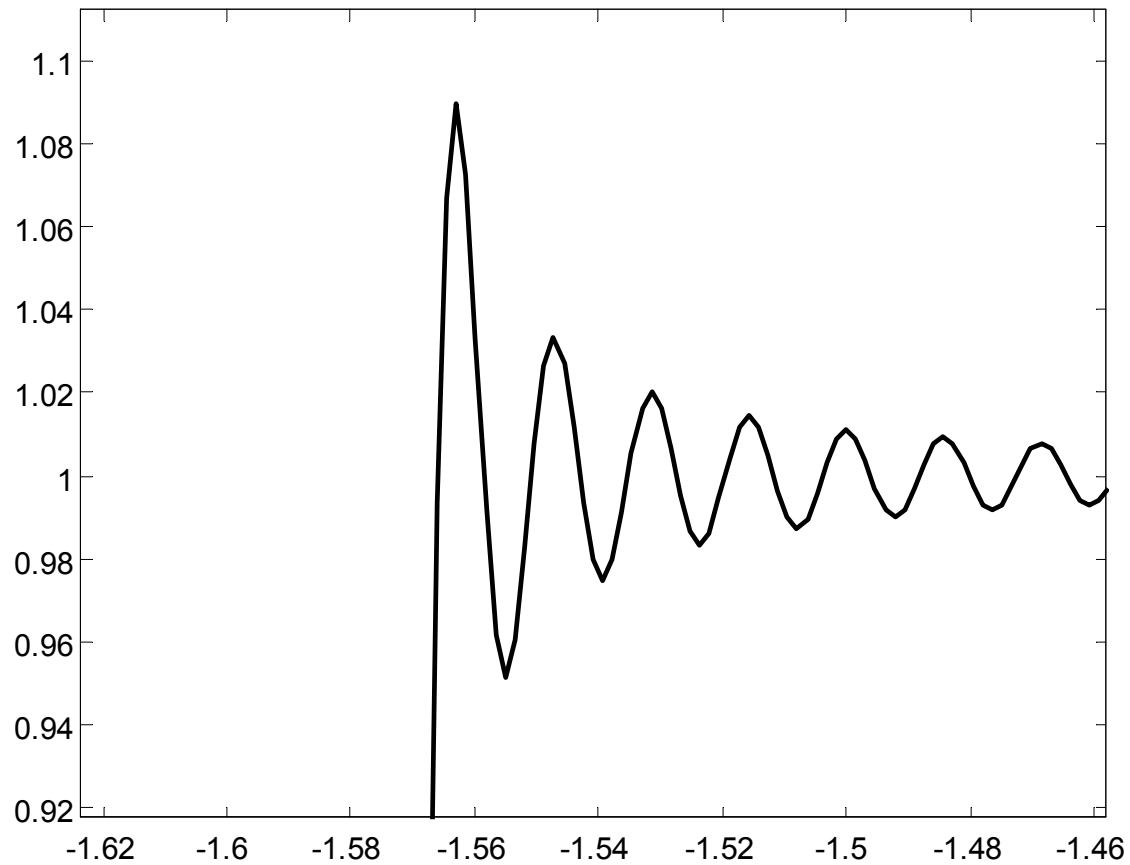
$-41 < k < 41$



$-81 < k < 81$



$-201 < k < 201$



Overshot: 0.089490....

--Gibbs, J. Willard, "*Fourier Series*". Nature 59, 200 (1898) and 606 (1899).

由于窗谱肩峰的存在，影响到 $H(\omega)$ 通带的平坦和阻带的衰减，使阻带最小衰减只有21dB左右，因此在实际中，矩形窗很少采用。

为了消除吉布斯效应，取得较好频率特性，一般采用其他类型的窗函数 $w(n)$ ，对 $h_d(n)$ 进行加窗处理。

改变窗函数的形状，可改善滤波器的特性，窗函数有许多种，但要满足以下两点要求：

- ①窗谱主瓣宽度要窄，以获得较陡的过渡带；
- ②相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使能量尽量集中在主瓣中，这样就可以减小肩峰和余振，以提高阻带衰减和通带平稳性。

但实际上这两点不能兼得，一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。

几种常用的窗函数：

1. 矩形窗，上面已讲过，不再细述

2. 汉宁窗（升余弦窗）

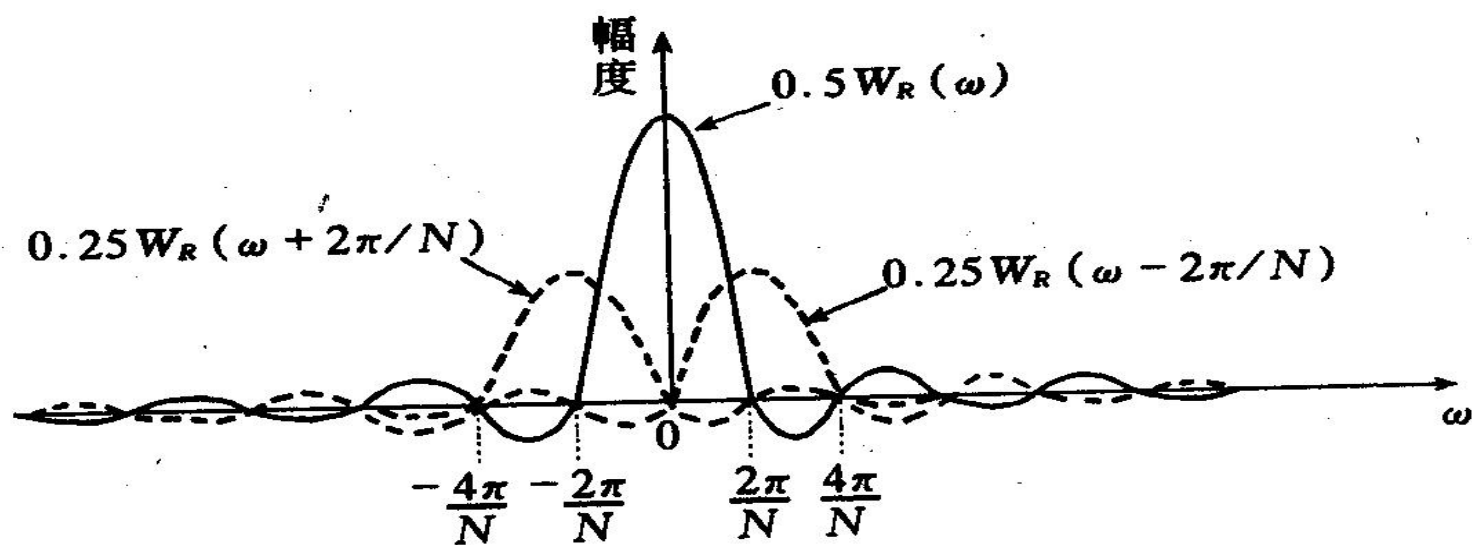
$$\begin{aligned}w(n) &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n) \\&= 0.5 R_N(n) - 0.25 \left(e^{j \frac{2\pi n}{N-1}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N-1}} \right) R_N(n)\end{aligned}$$

利用付氏变换的移位特性，汉宁窗频谱的幅度函数 $W(\omega)$ 可用矩形窗的幅度函数表示为：

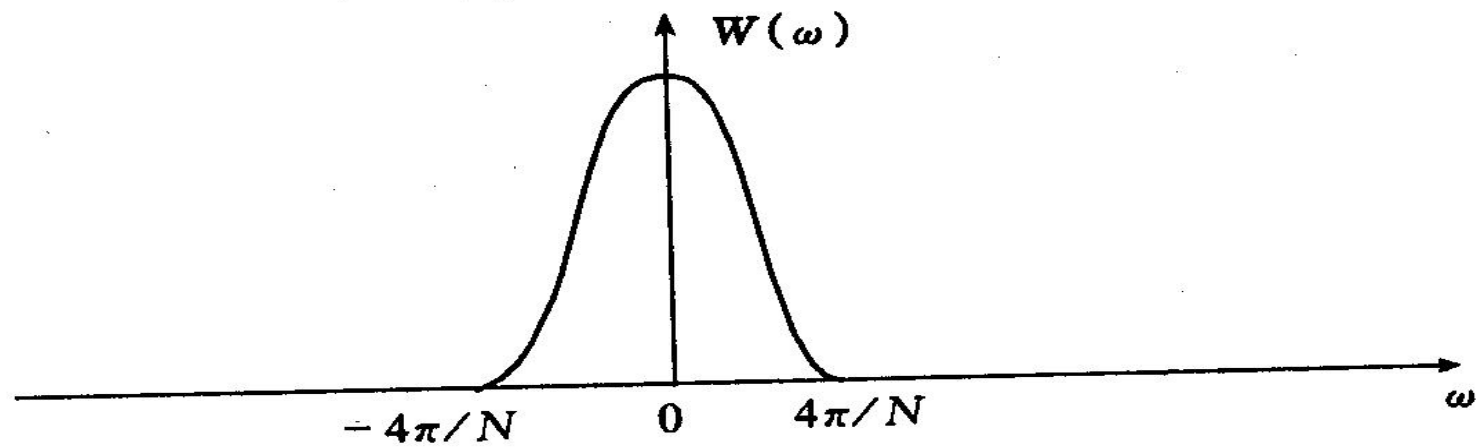
$$\begin{aligned}W(e^{j\omega}) &= 0.5 W_R(\omega) e^{-j \left(\frac{N-1}{2} \right) \omega} - 0.25 \left[W_R \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) e^{-j \left(\frac{N-1}{2} \right) \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right)} \right. \\&\quad \left. + W_R \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) e^{-j \left(\frac{N-1}{2} \right) \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right)} \right] \\&= \left\{ 0.5 W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_R \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] \right\} e^{-j \left(\frac{N-1}{2} \right) \omega}\end{aligned}$$

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right]$$

三部分矩形窗频谱相加，使旁瓣互相抵消，能量集中在主瓣，旁瓣大大减小，主瓣宽度增加1倍，为 $\frac{8\pi}{N}$ 。



(a) 三部分频谱相加



(b) 相加结果

图 4.6 汉宁窗频谱

3. 汉明窗（改进的升余弦窗）

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

它是对汉宁窗的改进，在主瓣宽度（对应第一零点的宽度）相同的情况下，旁瓣进一步减小，可使**99.96%**的能量集中在窗谱的主瓣内。

4. 布莱克曼窗（三阶升余弦窗）

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

增加一个二次谐波余弦分量，可进一步降低旁瓣，但主瓣宽度进一步增加，为 $\frac{12\pi}{N}$ 。增加**N**可减少过渡带。

频谱的幅度函数为：

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \\ + 0.04 \left[W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right]$$

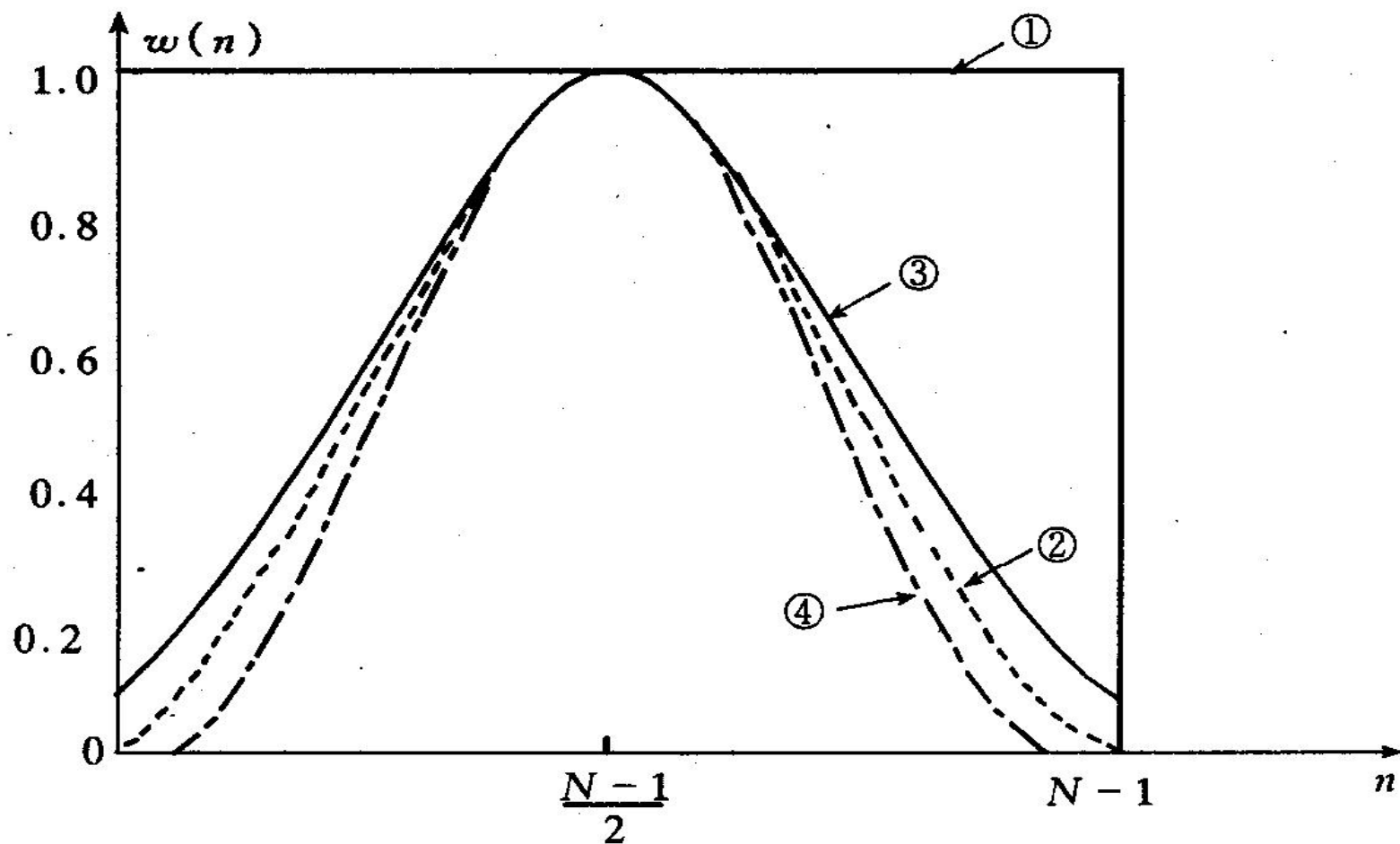
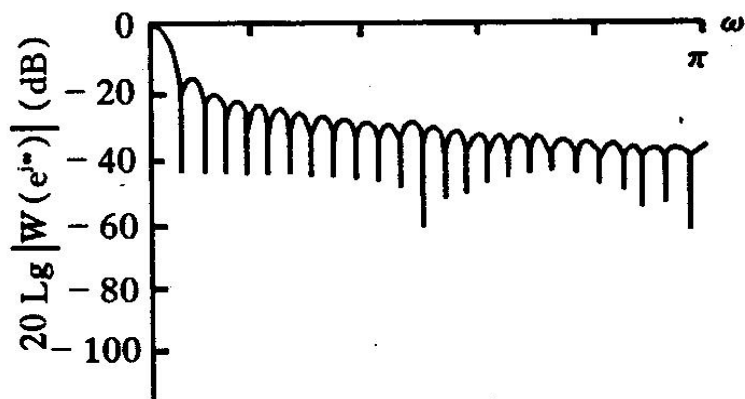
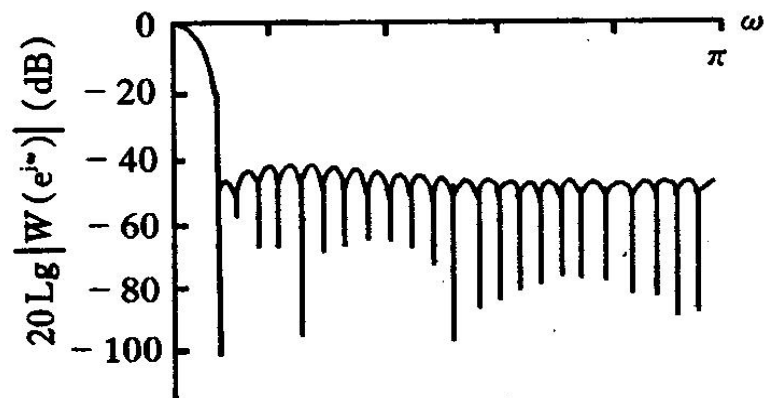


图 4.7 四种常用的窗口函数

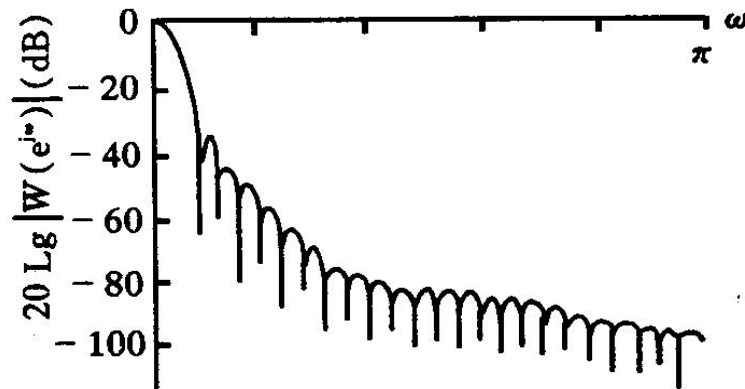
(1)矩形窗； (2)汉宁窗； (3)汉明窗； (4)布莱克曼窗



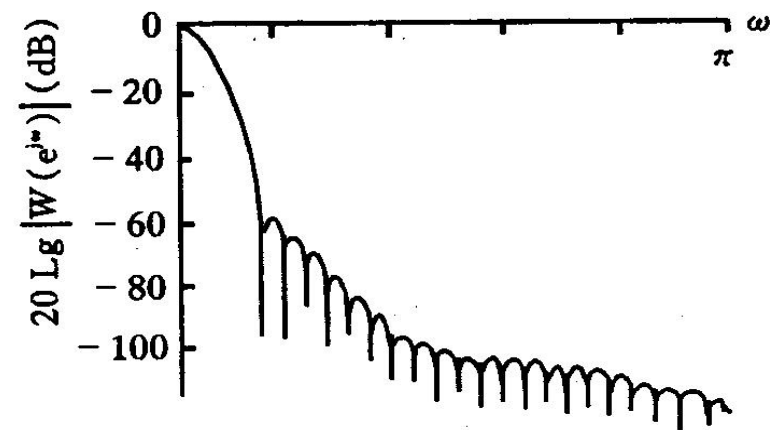
(a) 矩形窗



(c) 汉明窗



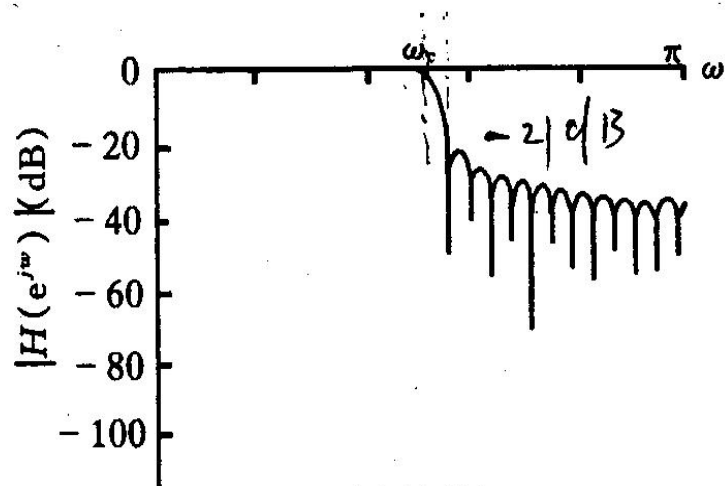
(b) 汉宁窗



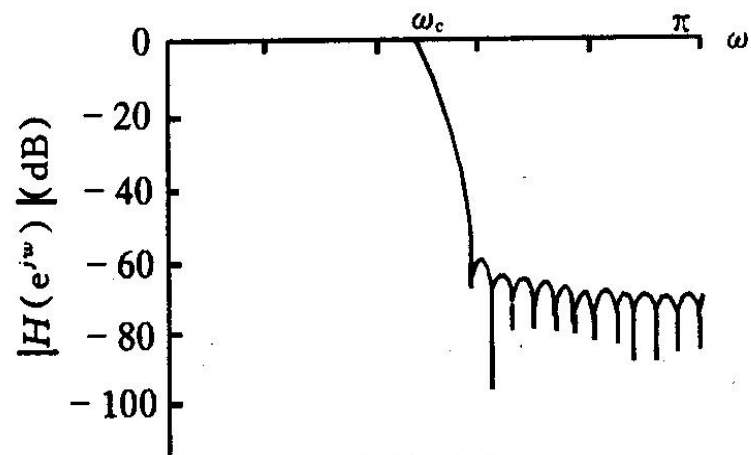
(d) 布莱克曼窗

图 4.8 四种窗函数的频谱 ($N = 51$)

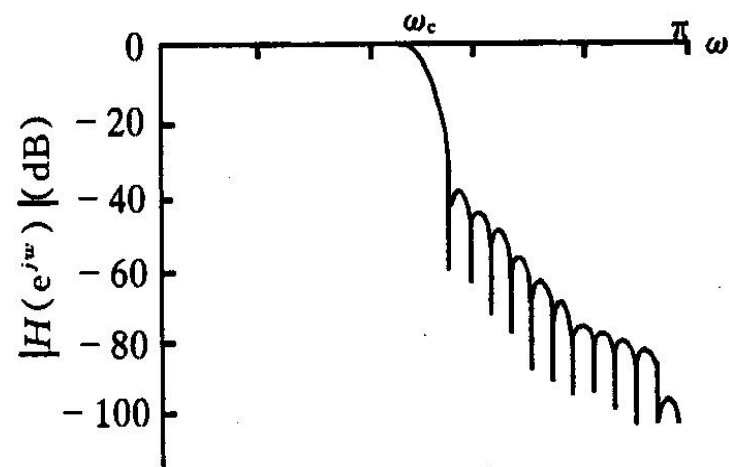
窗口函数的频谱 $N=51$, $A=20\lg|W(\omega)/W(0)|$



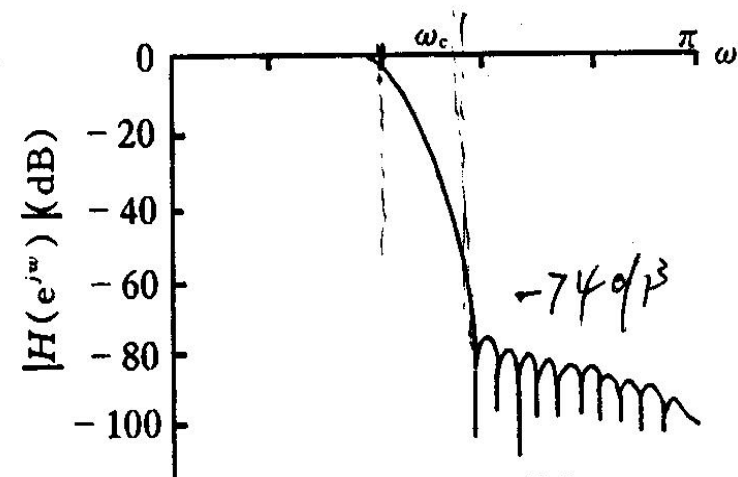
(a) 矩形窗



(c) 汉明窗



(b) 汉宁窗



(d) 布莱克曼窗

图 4.9 四种窗口在同一指标下设计的滤波器的频率特性

$$N = 51 \quad \omega_c = 0.5\pi$$

窗函数	主瓣宽度	过渡带宽	旁瓣峰值衰减 (dB)	阻带最小衰减 (dB)
矩形	$4\pi / N$	$1.8\pi / N$	-13	-21
汉宁	$8\pi / N$	$6.2\pi / N$	-31	-44
汉明	$8\pi / N$	$6.6\pi / N$	-41	-53
布莱克曼	$12\pi / N$	$11\pi / N$	-57	-74

5. 凯塞窗

以上四种窗函数，都是以增加主瓣宽度为代价来降低旁瓣。凯塞窗则可自由选择主瓣宽度和旁瓣衰减。

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - [1 - 2n/(N-1)]^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$I_0(x)$ 是零阶修正贝塞尔函数，参数 β 可自由选择，决定主瓣宽度与旁瓣衰减。 β 越大， $w(n)$ 窗越窄，其频谱的主瓣变宽，旁瓣变小。一般取 $4 < \beta < 9$ 。

$\beta=5.44$ 接近汉明

$\beta=8.5$ 接近布莱克曼

$\beta=0$ 为矩形

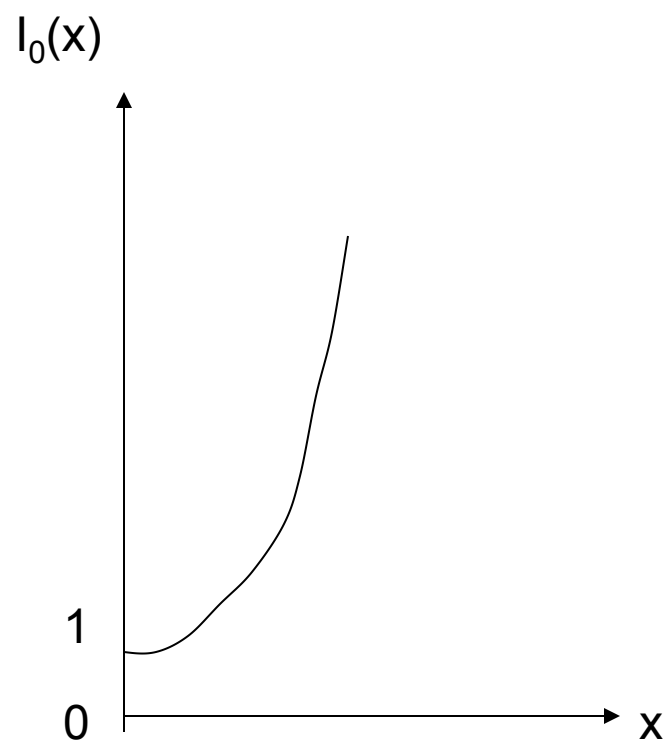


图1 零阶修正贝塞尔函数

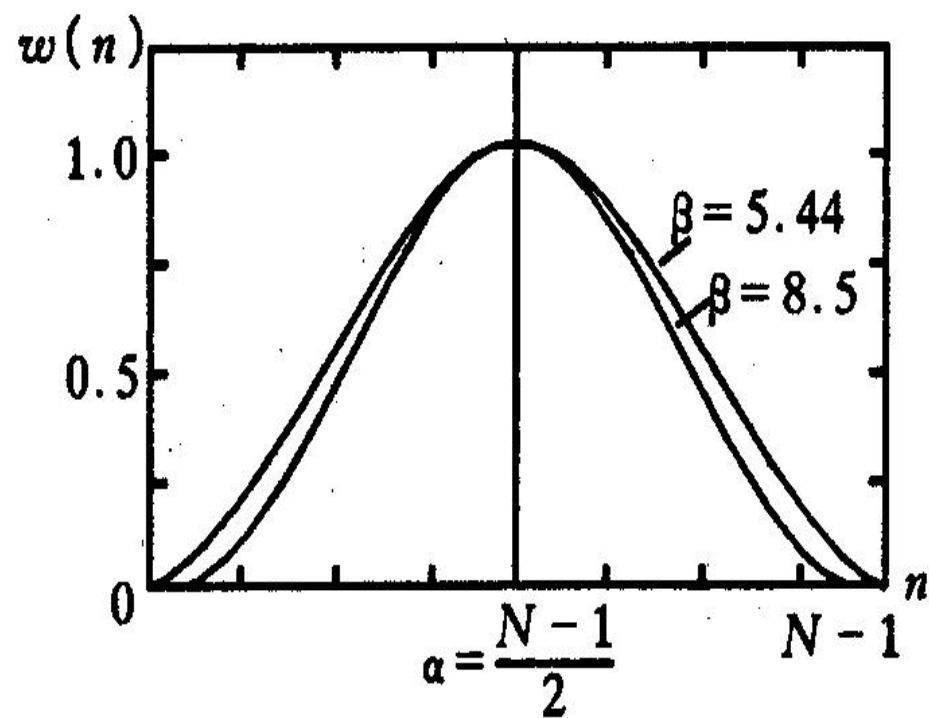


图 4.10 凯塞窗函数

图2 凯塞窗函数

- Equiripple method（等纹波方法）：
 - 这种滤波器在通带和阻带都有最小最大偏差，也就是说，在通带和阻带有波动，但是波动的幅度是相同的。
 - 采用了Remez exchange algorithm

- 加权最小二乘法 (也称eigenfilters（特征滤波器）)

- 该方法最小化如下能量函数:

$$E = \int |D(\omega) - H(e^{j\omega})|^2 (\text{weight}) d\omega$$

其中 $D(\omega)$ 是想要的频率响应，比如理想低通等。

纹波减弱，
或者控制
在特定形
式下，但
永在。

二维数字滤波器设计

二维数字信号的基本变换

Z变换:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

离散时间
傅立叶变
换:

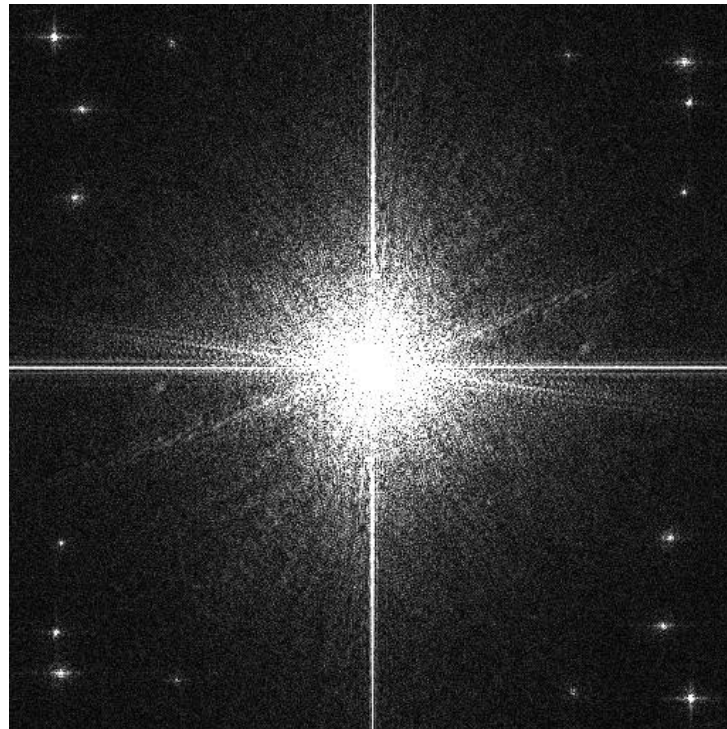
$$X(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) e^{-j(m\omega_1 + n\omega_2)}$$

离散时间傅立叶变换性质：
序列的傅氏变换是 ω_1 和 ω_2 的周期函数，周期为
 2π 。

二维数字滤波器设计



原图像



图像的频谱

二维数字滤波器设计

二维Z变换:

$$H(z_1, z_2) = \sum \sum h(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

典型的二维IIR滤波器的传递函数:

$$H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{nm} z_1^{-m} z_2^{-n}}{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{nm} z_1^{-m} z_2^{-n}}$$

典型的二维FIR滤波器的传递函数:

$$H(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

二维数字滤波器设计

典型的二维IIR滤波器的频率特性：

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \frac{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{nm} e^{-jm\omega_1} e^{-jn\omega_2}}{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{nm} e^{-jm\omega_1} e^{-jn\omega_2}}$$

典型的二维FIR滤波器的频率特性：

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h(m, n) e^{-jm\omega_1} e^{-jn\omega_2}$$

1 低通滤波器

- 1) 原理
- 2) 理想低通滤波器
- 3) 巴特沃思低通滤波器
- 4) 指数低通滤波器

1 低通滤波器

- 1) 原理

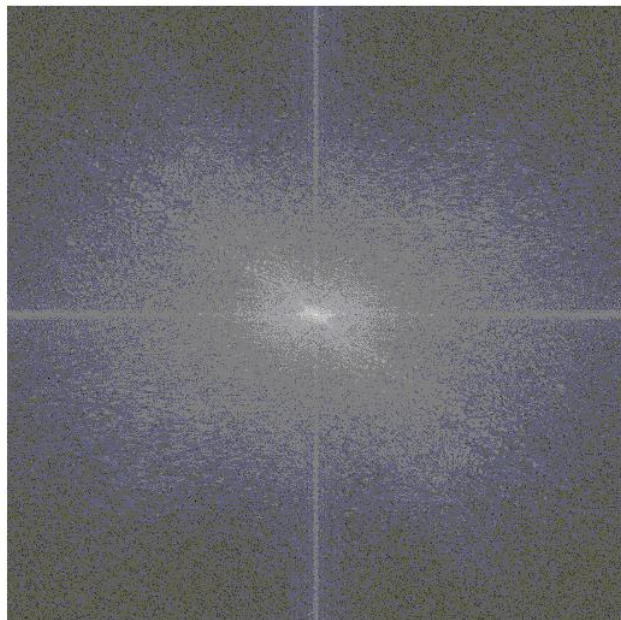


Lenna



加入高斯噪声的Lenna

1 低通滤波器



Lenna的谱图像



有高斯噪声Lenna的谱图像

1 低通滤波器

- 结论：图像的边缘和其他尖锐跳跃（如噪声）对傅立叶变换的高频分量有很大贡献；
- 方法：通过一个线性系统，频域上对一定范围高频分量进行衰减能够达到平滑化；
- 这种线性系统称为低通滤波器法。

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v)$$

$F(u,v)$ 是输入， $G(u,v)$ 是输出

$H(u,v)$ 是线性系统的传递函数

1 低通滤波器

- 2) 理想低通滤波器 (ILPF)

- 定义: 以 D_0 为半径的圆内所有频率分量无损的通过, 圆外的所有频率分量完全衰减。

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

- D_0 又称为截止频率。

注意 D_0 的物理意义

1 低通滤波器

如何确定 D_0 ?

- 信号能量 E_T : 将 $u, v=0, 1, N-1$ 的每一点 (u, v) 的能量相加起来得到傅立叶信号能量 E_T 。

$$E_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} E(u, v) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} [R^2(u, v) + I^2(u, v)]$$

1 低通滤波器

- 举例：观察有高斯噪声Lenna图像的傅立叶谱和不同半径下的谱图像的信号能量。



$$E_T = 1.5387 \times 10^{15}$$

$$E_5 = 1.3886 \times 10^{15}$$

$$E_5/E_T = 0.9025$$

$$E_10 = 1.4191 \times 10^{15}$$

$$E_10/E_T = 0.9223$$

$$E_20 = 1.4346 \times 10^{15}$$

$$E_20/E_T = 0.9323$$

$$E_50 = 1.4483 \times 10^{15}$$

$$E_50/E_T = 0.9412$$

1 低通滤波器



有高斯噪声的Lenna图像



$D_0=5$

1 低通滤波器



$D_0=10$



$D_0=20$

1 低通滤波器



$D_0=50$



有高斯噪声的原Lenna图像

1 低通滤波器

— 问题:

- (1) 模糊
- 对于半径为**5**，包含了全部**90%**的能量。但严重的模糊表明了图片的大部分边缘信息包含在滤波器滤去的**10%**能量之中。随着滤波器半径增加，模糊的程度就减少。
- 模糊产生的原理：根据卷积定理

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

- 相当于空间域中图像的互相混合

1 低通滤波器

- (2) 振铃 (与一维相似)
- ILPF空域上冲激响应卷积产生两个现象:
- 一是边缘渐变部分的对比度;
- 二是边缘部分增加了波纹 (ringing)。
- 其原因是冲激响应函数的多个过零点, 是Gibbs现象的二维表现。

二维线性相位FIR滤波器设计

最小二乘设计方法:

步骤1: 把区间 $[0 \ \pi] \times [0 \ \pi]$ 离散化

$$\Pi = \{(\omega_{1i}, \omega_{2j}) \mid i = 1, 2, \dots, M_1; j = 1, 2, \dots, M_2\}$$

步骤2: 求解如下问题:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} |H(\omega_{1i}, \omega_{2j}) - D(\omega_{1i}, \omega_{2j})|^2$$

典型低通滤波器

- 3) 巴特沃思低通滤波器 (BLPF)

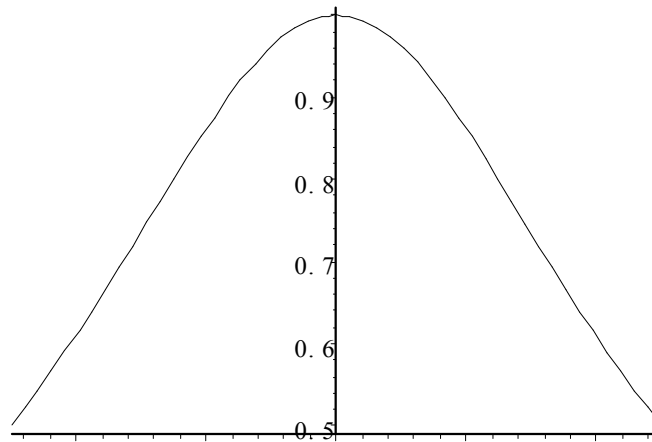
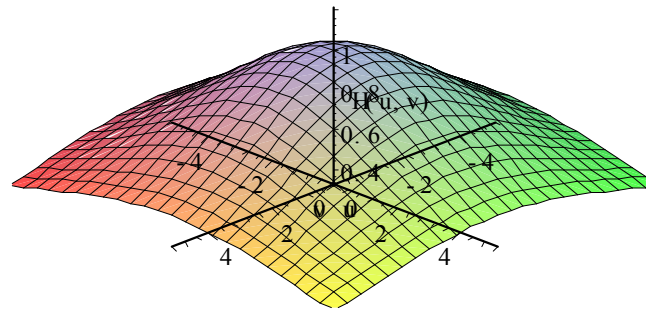
n 阶巴特沃思 (Butterworth) 滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0} \right)^{2n}}$$

$n = 1$, 1阶巴特沃思滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{(u^2 + v^2)}{D_0^2}}$$

1 低通滤波器



1 低通滤波器



$D_0=10$

1 低通滤波器



$D_0=20$



$D_0=50$

1 低通滤波器

- 巴特沃斯低通滤波器的优点是：
- 一、模糊大大减少。因为包含了许多高频分量；
- 二、没有振铃现象。因为滤波器是平滑连续的。

1 低通滤波器

- 4) 指数低通滤波器 (elpf)

指数低通滤波器

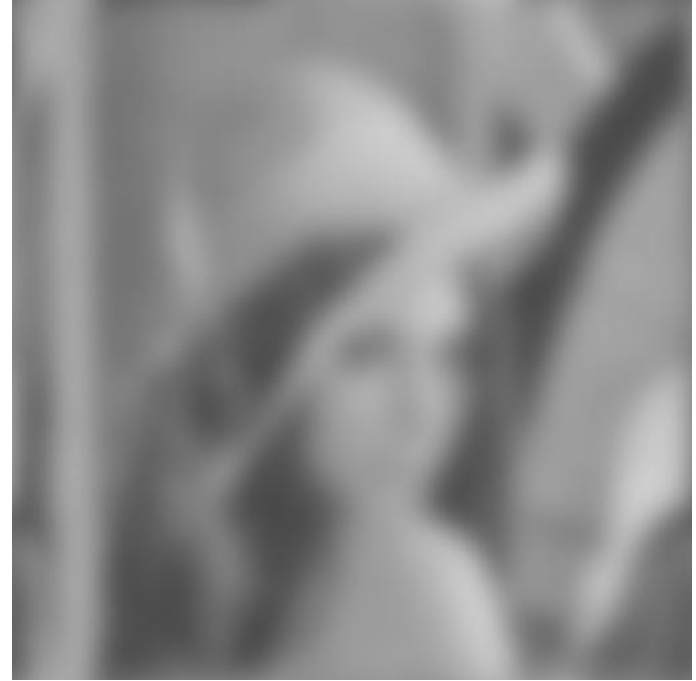
$$H(u, v) = e^{-[\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0}]^{2n}}$$

$n = 1$ 的指数低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-[\frac{u^2 + v^2}{D_0^2}]}$$

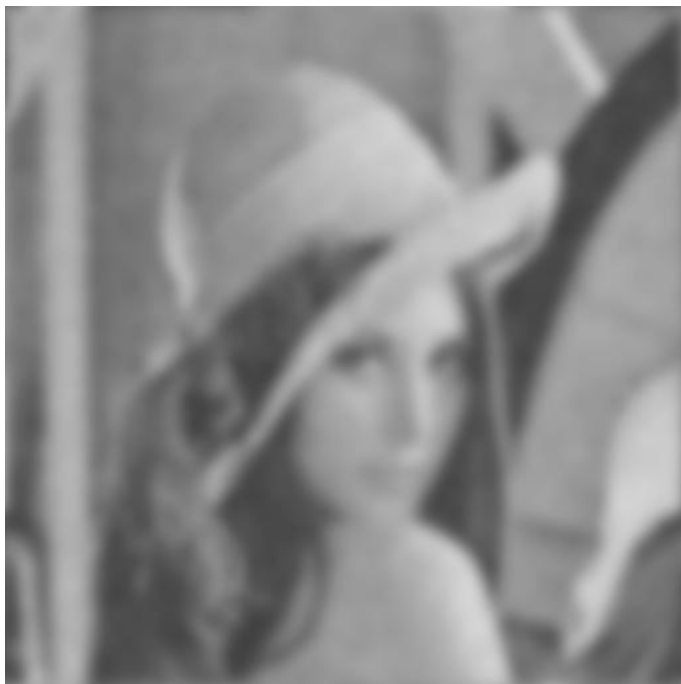
性质：比相应的巴特沃思滤波器要稍微模糊，但没有振铃现象。

1 低通滤波器



$D_0=10$

1 低通滤波器



$D_0=20$



$D_0=50$

2 高通滤波器

- 1) 原理
- 2) 理想高通滤波器
- 3) 巴特沃思高通滤波器
- 4) 指数高通滤波器
- 5) 高斯差分滤波器

2 高通滤波器

- 1) 原理

- 图像锐化处理的目的是使模糊图像变得清晰。
- 通常图像模糊是由于图像受到平均或积分运算，因此图像锐化采用微分运算。
- 在频域处理上，即采用高通滤波器。
- 注意：进行处理的图像必须有较高的信噪比，否则图像锐化后，图像信噪比会更低。

2 高通滤波器

- 2) 理想高通滤波器 (**IHPF**)

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

2 高通滤波器

- 3) 巴特沃思高通滤波器 (BHPF)

n 阶巴特沃思 (Butterworth) 高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^{2n}}$$

$n = 1$, 1阶巴特沃思高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{D_0^2}{(u^2 + v^2)}}$$

2 高通滤波器

- 4) 指数高通滤波器 (EHPF)

指数高通滤波器

$$H(u, v) = e^{-[\frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}}]^2}$$

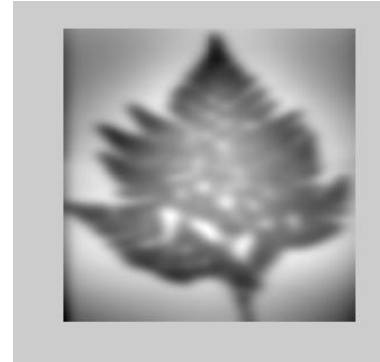
$n = 2$ 的指数高通滤波器

$$H(u, v) = e^{-[\frac{D_0^2}{u^2 + v^2}]}$$

2 高通滤波器



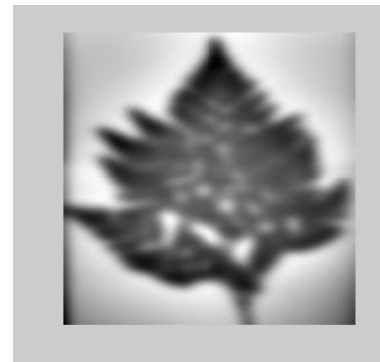
原图



IHPF

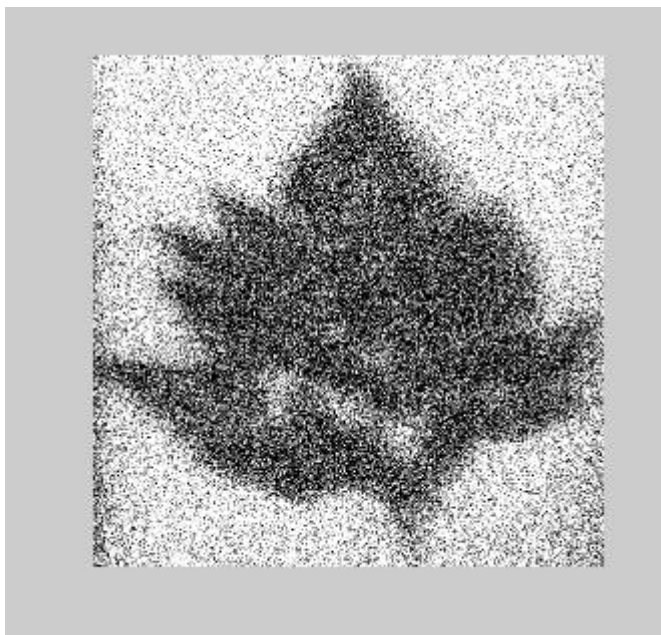


BHPF

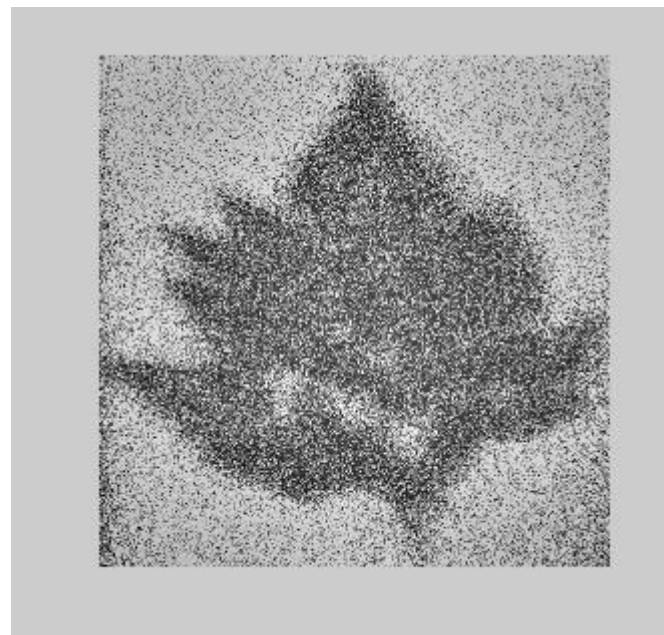


EHPF

2 高通滤波器



有噪声的图



采用**BHPF**高通滤波后，
信噪比变小。

2 高通滤波器

- 5) 高斯差分滤波器 (DoG, Difference of Gaussian)

高斯差分滤波器的传递函数定义为:

两个不同宽度高斯函数之差。

$$G(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad A \geq B, \sigma_1 \geq \sigma_2$$

$$g(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-t^2/2\sigma_1^2} - \frac{B}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

3 带通和带阻滤波器

- 1) 理想的带通滤波器

$$H(u) = \begin{cases} 1 & f_1 \leq |u| \leq f_2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \Delta u = f_2 - f_1$$

理想带通滤波器的传递函数可写为

$$H(u) = \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

理想带通函数的冲激响应为

$$h(t) = 2\Delta u \frac{\sin(\pi\Delta u t)}{\pi\Delta u t} \cos(2\pi u_0 t)$$

3 带通和带阻滤波器

- 2) 理想的带阻滤波器

$$H(u) = \begin{cases} 0 & f_1 \leq |u| \leq f_2 \\ 1 & \text{others} \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \Delta u = f_2 - f_1$$

理想带阻滤波器的传递函数可写为

$$H(u) = 1 - \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

理想带阻函数的冲激响应为

$$h(t) = \delta(t) - 2\Delta u \frac{\sin(\pi\Delta u t)}{\pi\Delta u t} \cos(2\pi u_0 t)$$

3 带通和带阻滤波器

- 3) 通用带通滤波器

选取非负单峰函数 $K(u)$, 与冲激偶做卷积

$$H(u) = K(u) * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

其冲激响应为

$$h(t) = 2k(t) \cos(2\pi u_0 t)$$

若 $K(u)$ 为高斯函数

$$H(u) = A e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

$$h(t) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \cos(2\pi u_0 t)$$

3 带通和带阻滤波器

- 4) 巴特沃斯带通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

其中 W 为带宽, D_0 为带的中心。

4 同态滤波

- 目的：正常图象是在均匀光强度情况下获得的图象，实际上光照射是不均匀，或光强范围动态太大。
- 方法：为解决光照不均匀的影响，可用同态滤波来解决。
- 原理：
- 光照下景物图象的模型
 - $f(x,y)=f_i(x,y)f_r(x,y)$
 - $f_i(x,y)$:随空间位置不同的光强分量
 - $f_r(x,y)$:景物反射到眼睛的图象
 - $f(x,y)$:最终获得的图象

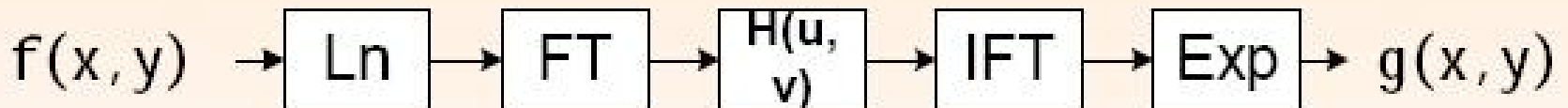
4 同态滤波

- 分析
 - $f_i(x,y)$: 缓慢变化, 频率集中在低频部分
 - $f_r(x,y)$: 包含景物各种信息, 高频分量丰富
- 处理

$$\ln f(x,y) = \ln f_i(x,y) + \ln f_r(x,y)$$

$$FFT[\ln f(x,y)] = FFT[\ln f_i(x,y)] + FFT[\ln f_r(x,y)]$$

- 选择一低通滤波函数 $H(u,v)$ 在频域空间处理



4 同态滤波

