高级人工智能

沈华伟

shenhuawei@ict.ac.cn

中国科学院计算技术研究所

2019.12.17

大纲

- 策略学习
  - 动态规划方法
  - 蒙特卡洛方法
  - 时序差分方法
  - 参数近似方法

贝尔曼最优性方程

- 给定策略π，状态估值函数的贝尔曼方程

$$v_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_\pi(s')\Big], \quad \text{for all } s \in \mathcal{S}$$

- 状态估值函数的贝尔曼最优性方程

$$\begin{aligned} v_*(s) &= \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_*(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\ &= \max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_*(s')\Big] \end{aligned}$$

动态规划

- 给定策略下状态估值函数的更新规则

$$v_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_\pi(s')\Big], \quad \text{for all } s \in \mathcal{S}$$

- 最优状态估值函数的更新规则

$$\begin{aligned} v_*(s) &= \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_*(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\ &= \max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_*(s')\Big] \end{aligned}$$

注意：这里红色圆圈里的等号表示“赋值”，而不是贝尔曼方程里的“相等”

策略估值

- 给定策略π，该策略下的状态估值函数满足

$$
\begin{aligned}
v_\pi(s) &\doteq \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s] \\
&= \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] \\
&= \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s] \\
&= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s', r | s, a)\Big[r + \gamma v_\pi(s')\Big]
\end{aligned}
$$

- 假如环境$p(s',r|s,a)$已知，状态估值函数的求解方式有
  - 求解线性方程组
    - 计算开销大
  - 寻找不动点——迭代策略估值

迭代策略估值

- 迭代策略估值的更新规则

$$
\begin{aligned}
v_{k+1}(s) &\doteq \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma v_k(S_{t+1}) \mid S_t = s] \\
&= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_k(s')\Big]
\end{aligned}
$$

又被称为“期望更新”

状态s新一轮的估值是基于s所有可能的下一状态s'的期望计算得到的（注意：不是基于某一次采样）

迭代策略估值的实现

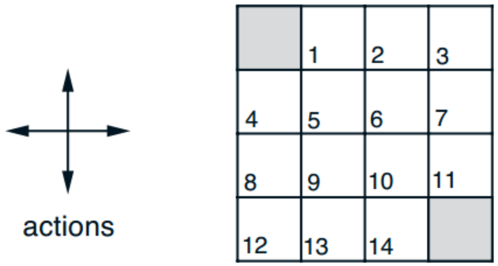
- 两种实现方式
  - 同步更新：两个数组存放“新”和“旧”的状态估值
  - 异步更新：收敛速度快一些，尽早利用了新信息
    - 仅使用一个数据组，“就地”更新（算法如下）

Iterative policy evaluation

Input π, the policy to be evaluated
Initialize an array $V(s) = 0$, for all $s \in \mathcal{S}^+$
Repeat
  $\Delta \leftarrow 0$
  For each $s \in \mathcal{S}$:
    $v \leftarrow V(s)$
    $V(s) \leftarrow \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\big[r + \gamma V(s')\big]$
    $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
until $\boxed{\Delta < \theta}$ (a small positive number)
Output $V \approx v_\pi$

连续两轮中同一状态估值的最大差

迭代策略估值的例子



$R_t = -1$
on all transitions

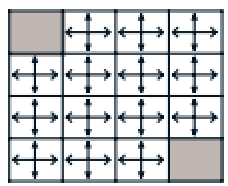
- ✓ 每个状态下，等概率选择四个候选行动
- ✓ 出界时，移动后回到原位置（相当于撞墙）
- ✓ 每次行动获得奖励为-1

迭代策略估值过程

状态估值函数　　对应的贪心策略

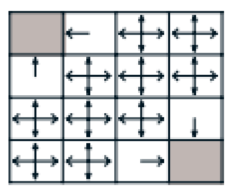
$k = 0$

0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0



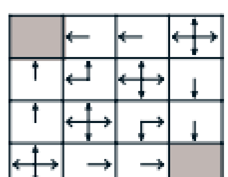
$k = 1$

0.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	0.0



$k = 2$

0.0	-1.7	-2.0	-2.0
-1.7	-2.0	-2.0	-2.0
-2.0	-2.0	-2.0	-1.7
-2.0	-2.0	-1.7	0.0



状态估值函数　　对应的贪心策略

$k = 3$

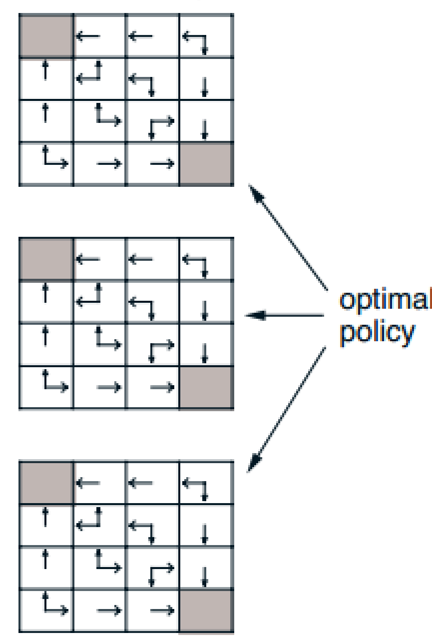
0.0	-2.4	-2.9	-3.0
-2.4	-2.9	-3.0	-2.9
-2.9	-3.0	-2.9	-2.4
-3.0	-2.9	-2.4	0.0

$k = 10$

0.0	-6.1	-8.4	-9.0
-6.1	-7.7	-8.4	-8.4
-8.4	-8.4	-7.7	-6.1
-9.0	-8.4	-6.1	0.0

$k = \infty$

0.0	-14.	-20.	-22.
-14.	-18.	-20.	-20.
-20.	-20.	-18.	-14.
-22.	-20.	-14.	0.0



策略提升

- 策略估值的目标是为了寻找更优的策略（策略提升）
  - 策略估值根据策略π计算其估值函数v_π

- 策略提升
  - 根据当前策略的估值函数，寻找更优的策略（如果存在），逐步寻找到最优策略
    - 根据策略π的估值函数v寻找更优策略π'
  - 提升方法
    - 给定一个确定策略π，在状态s下选择行为a，后续按照策略π行动所得的估值$q_\pi(s,a)$是否高于完全按照策略π行动得到的估值$v_\pi(s)$

$$
\begin{aligned}
q_\pi(s,a) &\doteq \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\
&= \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_\pi(s')\Big]
\end{aligned}
$$

策略提升定理

- 对于两个确定式策略π和π'，如果对于所有状态s均满足

$$q_\pi(s, \pi'(s)) \geq v_\pi(s)$$

则策略π'优于策略π，即

$$v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s)$$

注意：上一页的策略提升方法是策略提升定理的一个特例

策略提升

- 给定策略π，按照贪心方式得到更优策略π'

$$\begin{aligned}
\pi'(s) &\doteq \arg\max_a q_\pi(s,a) \\
&= \arg\max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\
&= \arg\max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_\pi(s')\Big]
\end{aligned}$$

- 对于策略π'，进行策略估值

$$\begin{aligned}
v_{\pi'}(s) &= \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_{\pi'}(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\
&= \max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big[r + \gamma v_{\pi'}(s')\Big].
\end{aligned}$$

策略迭代

- 从初始策略π_0开始，迭代进行“策略估值(E)”和“策略提升(I)”，最终得到最优策略π_*

$$\pi_0 \xrightarrow{\text{E}} v_{\pi_0} \xrightarrow{\text{I}} \pi_1 \xrightarrow{\text{E}} v_{\pi_1} \xrightarrow{\text{I}} \pi_2 \xrightarrow{\text{E}} \cdots \xrightarrow{\text{I}} \pi_* \xrightarrow{\text{E}} v_*$$

Policy iteration (using iterative policy evaluation)

1. Initialization
   $V(s) \in \mathbb{R}$ and $\pi(s) \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily for all $s \in \mathcal{S}$

2. Policy Evaluation
   Repeat
   $\quad \Delta \leftarrow 0$
   $\quad$ For each $s \in \mathcal{S}$:
   $\quad\quad v \leftarrow V(s)$
   $\quad\quad V(s) \leftarrow \sum_{s',r} p(s',r|s,\pi(s))\big[r + \gamma V(s')\big]$
   $\quad\quad \Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
   until $\Delta < \theta$ (a small positive number)

3. Policy Improvement
   policy-stable $\leftarrow$ *true*
   For each $s \in \mathcal{S}$:
   $\quad$ *old-action* $\leftarrow \pi(s)$
   $\quad \pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\big[r + \gamma V(s')\big]$
   $\quad$ If *old-action* $\neq \pi(s)$, then *policy-stable* $\leftarrow$ *false*
   If *policy-stable*, then stop and return $V \approx v_*$ and $\pi \approx \pi_*$; else go to 2

策略迭代分析

- 策略迭代过程中，策略估值需要多次扫描更新状态估值，精确估计出当前策略的状态估值，耗费了大量计算时间

- 是否可以在不精确的状态估值下，进行策略提升呢？
  - 譬如：状态估值进行一轮扫描更新后，便进行策略提升

$$
\begin{aligned}
v_{k+1}(s) &\doteq \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_k(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\
&= \max_a \sum_{s',r} p(s', r \mid s, a)\Big[r + \gamma v_k(s')\Big],
\end{aligned}
$$

不显式给出当前的策略，而是直接根据当前估值按照贪心策略估计下一轮的值

估值迭代

- 从初始策略 v_0 开始，进行估值迭代，找到最优状态估值 v_*，进而根据v_*按照贪心方式得到最优策略π_*

Value iteration

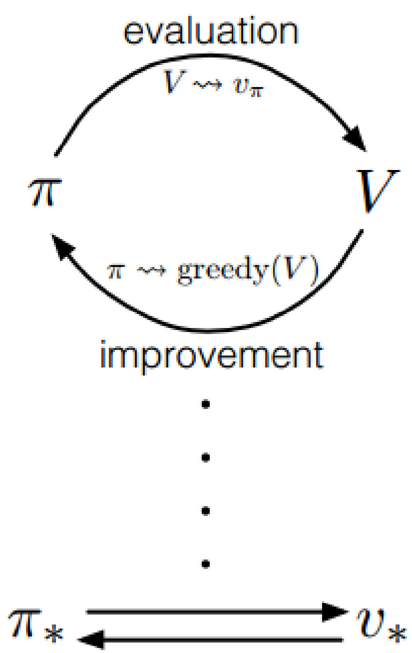
Initialize array V arbitrarily (e.g., $V(s) = 0$ for all $s \in \mathcal{S}^+$)

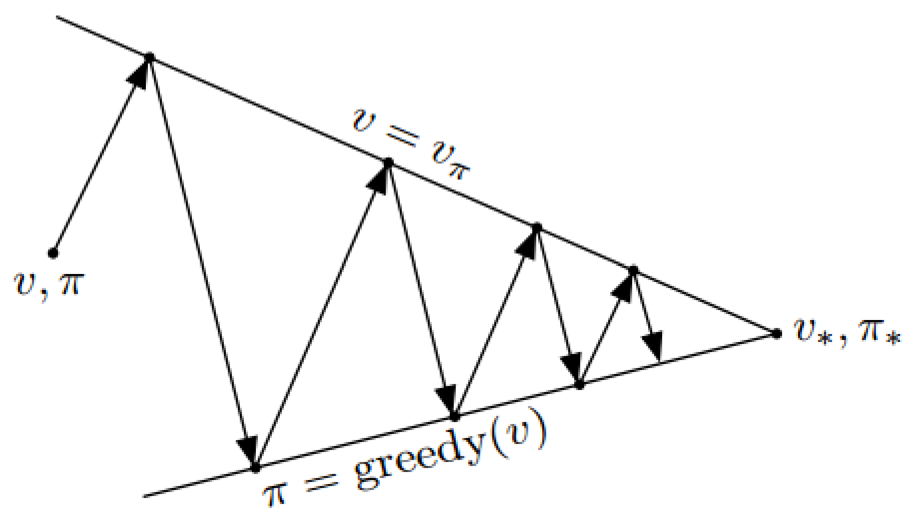
Repeat
  $\Delta \leftarrow 0$
  For each $s \in \mathcal{S}$:
    $v \leftarrow V(s)$
    $V(s) \leftarrow \max_a \sum_{s',r} p(s', r | s, a)\big[r + \gamma V(s')\big]$
    $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
until $\Delta < \theta$ (a small positive number)

Output a deterministic policy, $\pi \approx \pi_*$, such that
  $\pi(s) = \arg\max_a \sum_{s',r} p(s', r | s, a)\big[r + \gamma V(s')\big]$

广义策略迭代

- 迭代进行两个阶段：
  - 策略估值：让新的估值和当前的策略保持一致
  - 策略提升：根据当前估值，得到相应的贪心策略





动态规划方法小结

- 动态规划方法只不过是把贝尔曼方程转变为更新规则
  - 四个贝尔曼方程对应着四个更新规则（v_π，v_*，q_π，q_*）
- 动态规划方法是一种“自举”(bootstrapping)方法
- 优势：
  - 动态规划方法计算效率高
- 缺点：
  - 动态规划方法需要知道关于环境的完整模型

大纲

- 策略学习
  - 动态规划方法
  - 蒙特卡洛方法
  - 时序差分方法
  - 参数近似方法

蒙特卡洛方法的动机

- 动态规划方法需要知道关于环境的完整模型
- 大部分情况下没有关于环境的完整模型，或模型过于复杂
- 蒙特卡洛方法
  - 从真实或者模拟的经验(experience)中计算状态（行动）估值函数
  - 不需要关于环境的完整模型

蒙特卡洛方法

- 状态估值
  - 从某个状态s出发，使用当前策略π通过蒙特卡洛模拟的方式生成多个episode，使用这些episode的平均收益（return）近似状态估值函数$v_\pi(s)$

First-visit MC prediction, for estimating $V \approx v_\pi$

Initialize:
  $\pi \leftarrow$ policy to be evaluated
  $V \leftarrow$ an arbitrary state-value function
  $Returns(s) \leftarrow$ an empty list, for all $s \in \mathcal{S}$

Repeat forever:
  Generate an episode using π
  For each state s appearing in the episode:
    $G \leftarrow$ the return that follows the first occurrence of s
    Append G to $Returns(s)$
    $V(s) \leftarrow$ average$(Returns(s))$

收敛速度大约为：$1/\sqrt{n}$（n表示蒙特卡洛模拟次数）

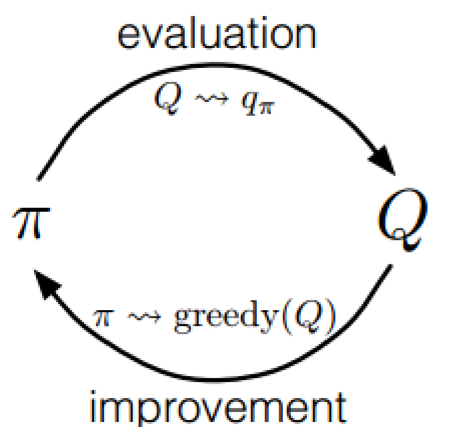
蒙特卡洛方法的优势

- 直接根据真实经验或模拟经验计算状态估值函数
- 不同状态的估值在计算时是独立的
  - 不依赖于“自举”方法

基于蒙特卡洛方法的策略迭代

- 在完整的环境模型未知时，仅有状态估值$v_\pi(s)$无法得出策略π

- 大多数情况下，直接使用蒙特卡洛方法计算行为估值函数$q_\pi(s,a)$，进而采用贪心方法得到策略π



$$\pi(s) \doteq \arg\max_a q(s,a)$$

$$\pi_0 \xrightarrow{\text{E}} q_{\pi_0} \xrightarrow{\text{I}} \pi_1 \xrightarrow{\text{E}} q_{\pi_1} \xrightarrow{\text{I}} \pi_2 \xrightarrow{\text{E}} \cdots \xrightarrow{\text{I}} \pi_* \xrightarrow{\text{E}} q_*$$

蒙特卡洛方法面临的问题

- 部分“状态-行为”在蒙特卡洛模拟中可能不出现

- 解决方法
  - Exploring Start：每个“状态-行为”对都以一定的概率作为蒙特卡洛模拟的起始点

Monte Carlo ES (Exploring Starts), for estimating $\pi \approx \pi_*$

Initialize, for all $s \in \mathcal{S}$, $a \in \mathcal{A}(s)$:
  $Q(s,a) \leftarrow$ arbitrary
  $\pi(s) \leftarrow$ arbitrary
  $Returns(s,a) \leftarrow$ empty list

Repeat forever:
  Choose $S_0 \in \mathcal{S}$ and $A_0 \in \mathcal{A}(S_0)$ s.t. all pairs have probability > 0
  Generate an episode starting from S_0, A_0, following π
  For each pair s, a appearing in the episode:
    $G \leftarrow$ the return that follows the first occurrence of s, a
    Append G to $Returns(s,a)$
    $Q(s,a) \leftarrow \text{average}(Returns(s,a))$
  For each s in the episode:
    $\pi(s) \leftarrow \arg\max_a Q(s,a)$

Exploring Start

摒弃Exploring Start

- 两种方法
  - On-policy方法：
    - 在每个状态s下保持对所有行为$\mathcal{A}(s)$进行探索的可能性，譬如采用ε贪心策略
      - 以$1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{|\mathcal{A}(s)|}$选择贪心行为，以$\frac{\varepsilon}{|\mathcal{A}(s)|}$的概率选择任意非贪心行为
    - 缺点
      - 最终得到的最优策略仅仅是ε最优策略（ε-soft policy）
  - Off-policy方法
    - 使用两个策略：目标策略π和行为策略b
    - 目标策略是待优化的策略，以贪心方式进行
    - 行为策略保证在每个状态下对所有行为进行探索的可能性

On-policy蒙特卡洛方法

- Soft-policy：

On-policy first-visit MC control (for ε-soft policies), estimates $\pi \approx \pi_*$

Initialize, for all $s \in \mathcal{S}$, $a \in \mathcal{A}(s)$:
    $Q(s,a) \leftarrow$ arbitrary
    $Returns(s,a) \leftarrow$ empty list
    $\pi(a|s) \leftarrow$ an arbitrary ε-soft policy

Repeat forever:
    (a) Generate an episode using π
    (b) For each pair s, a appearing in the episode:
        $G \leftarrow$ the return that follows the first occurrence of s, a
        Append G to $Returns(s,a)$
        $Q(s,a) \leftarrow \text{average}(Returns(s,a))$
    (c) For each s in the episode:
        $A^* \leftarrow \arg\max_a Q(s,a)$ (with ties broken arbitrarily)
        For all $a \in \mathcal{A}(s)$:

$$\pi(a|s) \leftarrow \begin{cases} 1 - \varepsilon + \varepsilon/|\mathcal{A}(s)| & \text{if } a = A^* \\ \varepsilon/|\mathcal{A}(s)| & \text{if } a \neq A^* \end{cases}$$

On-policy exploration

On-policy方式部分放弃了最优性来换取对策略的探索

Off-policy蒙特卡洛方法

- 保证寻找最优策略，在优化目标策略π时，用行为策略b进行策略探索
  - 行为策略需要确保对行为的覆盖度（coverage）
    - 对于所有$\pi(a|s) > 0$，需要有$b(a|s) > 0$
  - 缺点：方差比较大，收敛慢
  - 行为策略的选择影响收敛速度和方差
    - 通过重要度采样方式对蒙特卡洛模拟结果进行加权

样本重要度

$$\rho_{t:T-1} \doteq \frac{\prod_{k=t}^{T-1} \pi(A_k|S_k)p(S_{k+1}|S_k, A_k)}{\prod_{k=t}^{T-1} b(A_k|S_k)p(S_{k+1}|S_k, A_k)} = \prod_{k=t}^{T-1} \frac{\pi(A_k|S_k)}{b(A_k|S_k)}$$

一般的重要度采样

$$V(s) \doteq \frac{\sum_{t\in\mathfrak{T}(s)} \rho_{t:T(t)-1} G_t}{|\mathfrak{T}(s)|}$$

加权的重要度采样

$$V(s) \doteq \frac{\sum_{t\in\mathfrak{T}(s)} \rho_{t:T(t)-1} G_t}{\sum_{t\in\mathfrak{T}(s)} \rho_{t:T(t)-1}}$$

蒙特卡洛方法小结

- 从经验中学习，不需要知道完整的环境模型
- 适用于环境模型未知或者环境模型复杂的情形
- 收敛性由大数定理保证
- On-policy和off-policy两种实现
  - 平衡exploitation和exploration

课间休息

大纲

- 策略学习
  - 动态规划方法
  - 蒙特卡洛方法
  - 时序差分方法
  - 参数近似方法

时序差分方法

- 非平稳情形下的蒙特卡洛方法（恒定步长）

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\Big[G_t - V(S_t)\Big]$$

G_t表示第t轮蒙特卡洛模拟的收益

$V(S_t)$表示第t轮对状态S_t的估值

- 时序差分方法（Temporal Difference: TD）

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\Big[R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)\Big]$$

不需要根据完整的episode计算G_t，只需要模拟几步（这里是1步）之后更新状态估值

时序差分方法的实现

- 一步时序差分方法TD(0)的实现

Tabular TD(0) for estimating v_π

Input: the policy π to be evaluated
Initialize $V(s)$ arbitrarily (e.g., $V(s) = 0$, for all $s \in \mathcal{S}^+$)
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Repeat (for each step of episode):
    $A \leftarrow$ action given by π for S
    Take action A, observe R, S'
    $\boxed{V(S) \leftarrow V(S) + \alpha\big[R + \gamma V(S') - V(S)\big]}$
    $S \leftarrow S'$
  until S is terminal

一种误差更新（参考：多臂赌博机）

$$\delta_t \doteq R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)$$

注意：
这里的更新规则基于"样本"的更新，而不是"期望"更新（参考：动态规划方法）

时序差分方法分析

- 时序差分方法是强化学习中最核心的策略学习方法
- TD和蒙特卡洛方法的联系和区别
  - 联系：都是从经验中学习
    - 非平稳情形下的蒙特卡洛方法是TD的特例
  - 区别：蒙特卡洛方法需要episode完整的信息，TD只需要episode的部分信息
- TD和动态规划方法的联系和区别
  - 联系：TD和动态规划方法都采用自举的方法
  - 区别：动态规划方法依赖于完整的环境模型进行估计，TD依赖于经验进行估计

时序差分方法分析

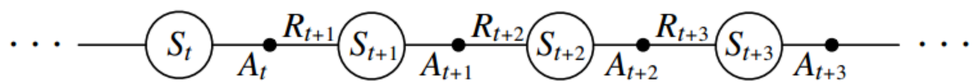
- 时序差分方法是“learn a guess from a guess”

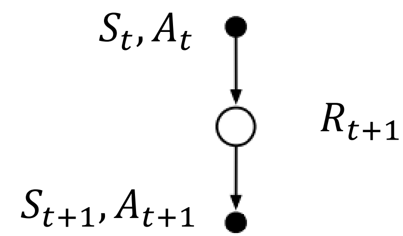
- 时序差分方法收敛吗？
  - 收敛

- 时序差分方法和蒙特卡洛方法收敛速度哪个快？

基于时序差分方法的On-policy策略优化

- SARSA：估计行为估值函数
  - TD所需的episode片段





Sarsa

  - 行为估值函数的更新规则

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left[R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A_{t+1}) - Q(S_t, A_t)\right]$$

  - 五元组

$$(S_t, A_t, R_{t+1}, S_{t+1}, A_{t+1})$$

Sarsa (on-policy TD control) for estimating $Q \approx q_*$

Initialize $Q(s, a)$, for all $s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily, and $Q(\textit{terminal-state}, \cdot) = 0$
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ϵ-greedy)
  Repeat (for each step of episode):
    Take action A, observe R, S'
    Choose A' from S' using policy derived from Q (e.g., ϵ-greedy)
    $\boxed{Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha\left[R + \gamma Q(S', A') - Q(S, A)\right]}$
    $S \leftarrow S'$; $A \leftarrow A'$;
  until S is terminal

基于时序差分方法的Off-policy策略优化

- Q-learning (Watkins, 1989)
  - 更新规则

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\Big[R_{t+1} + \gamma \max_a Q(S_{t+1}, a) - Q(S_t, A_t)\Big]$$

  - Q-learning的实现

行为策略是ε贪心策略

Q-learning (off-policy TD control) for estimating $\pi \approx \pi_*$

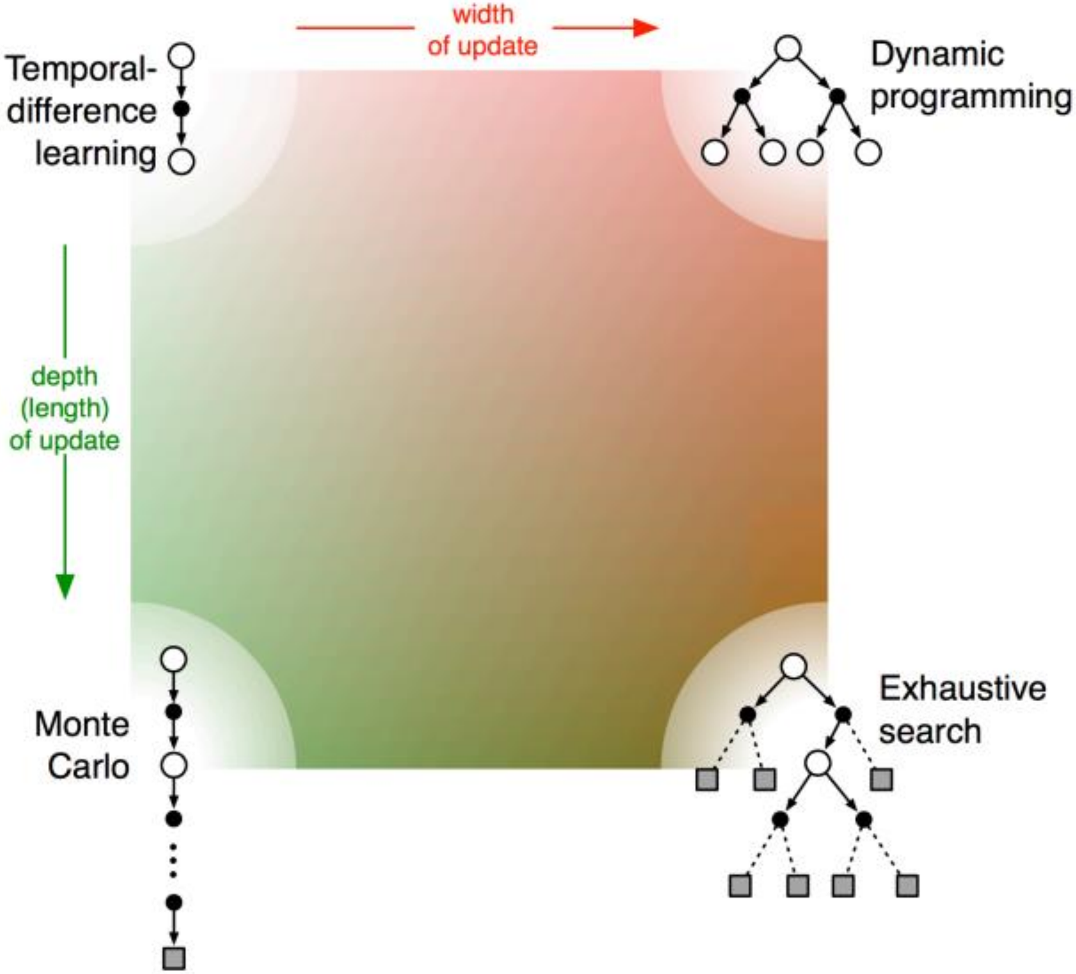
Initialize $Q(s,a)$, for all $s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily, and $Q(\textit{terminal-state}, \cdot) = 0$
Repeat (for each episode):
    Initialize S
    Repeat (for each step of episode):
        Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ϵ-greedy)
        Take action A, observe R, S'
        $Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha[R + \gamma \max_a Q(S',a) - Q(S,A)]$
        $S \leftarrow S'$
    until S is terminal

目标策略是贪心策略

时序差分方法小结

- 一种在线的从经验中进行策略学习的方法
- 一般直接学习行为估值函数完成策略学习
- 适用于状态和行为空间比较小的问题

动态规划/蒙特卡洛/时序差分对比

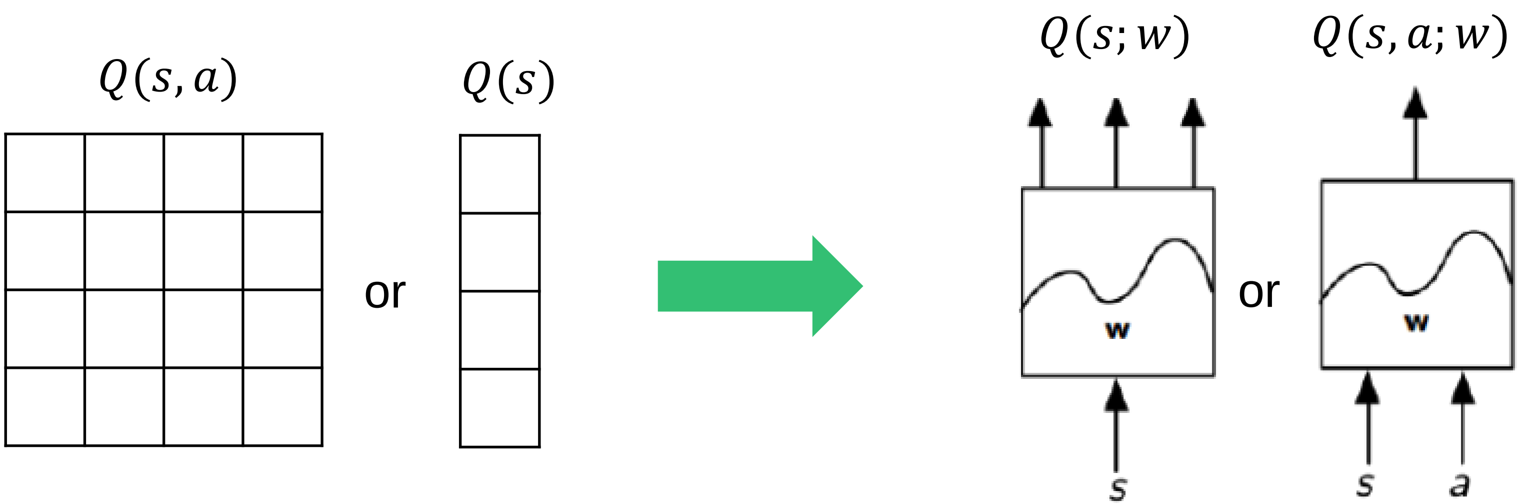


大纲

- 策略学习
  - 动态规划方法
  - 蒙特卡洛方法
  - 时序差分方法
  - 参数近似方法

参数化近似方法

- 当状态空间或行为空间比较大时，采用表格方式存放状态估值或行为估值不可行
  - 需要对状态估值或行为估值进行参数化近似（parametrized approximation）



表格化表示

参数化的函数式表示（w是参数）

参数化近似方法

- 参数化的函数形式
  - 广义线性模型
    - 参数是特征的权重
  - 决策树
    - 参数是叶子节点的取值，和树节点分裂的阈值
  - 神经网络
    - 每层的连接权重
- 一般要求
  - 参数个数要小于状态（或状态-行为）的个数

参数化近似方法的参数学习

- 训练样本形式
  - 动态规划方法

    $$s \mapsto \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma\hat{v}(S_{t+1},\mathbf{w}_t) \mid S_t = s]$$

  - 蒙特卡洛方法

    $$S_t \mapsto G_t$$

  - 时序差分方法

    $$S_t \mapsto R_{t+1} + \gamma\hat{v}(S_{t+1},\mathbf{w}_t)$$

- 哪些监督学习方法适合于强化学习的参数学习呢？
  - 能够进行在线训练，应对目标函数的不平稳或训练样本标注的不平稳
  - 不能依赖于对训练样本的多次扫描

参数近似方法的损失函数

- 平均平方估值误差（Mean Squared Value Error）

$$\overline{\mathrm{VE}}(\mathbf{w}) \doteq \sum_{s\in\mathcal{S}} \mu(s)\Big[v_\pi(s) - \hat{v}(s,\mathbf{w})\Big]^2$$

$\mu(s)$刻画状态s的重要程度（譬如状态被访问到的次数）

✓ 强化学习的目标是寻找最优策略
✓ 合适的损失函数是什么？VE损失函数？

模型训练

- 随机梯度下降（Stochastic Gradient Descent）

$$\mathbf{w}_{t+1} \doteq \mathbf{w}_t - \frac{1}{2}\alpha\nabla\Big[v_\pi(S_t) - \hat{v}(S_t,\mathbf{w}_t)\Big]^2$$
$$= \mathbf{w}_t + \alpha\Big[v_\pi(S_t) - \hat{v}(S_t,\mathbf{w}_t)\Big]\nabla\hat{v}(S_t,\mathbf{w}_t)$$

α是学习步长

- 为何不完全利用梯度呢？步长α对收敛性的影响如何？

- 当目标值$v_\pi(S_t)$观测不到、只观测到其近似值 U_t时

$$\mathbf{w}_{t+1} \doteq \mathbf{w}_t + \alpha\Big[U_t - \hat{v}(S_t,\mathbf{w}_t)\Big]\nabla\hat{v}(S_t,\mathbf{w}_t)$$

随机梯度下降进行模型训练的例子

- 蒙特卡洛方法下的随机梯度下降

Gradient Monte Carlo Algorithm for Estimating $\hat{v} \approx v_\pi$

Input: the policy π to be evaluated
Input: a differentiable function $\hat{v} : \mathcal{S} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Initialize value-function weights $\mathbf{w}$ as appropriate (e.g., $\mathbf{w} = \mathbf{0}$)
Repeat forever:
  Generate an episode $S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, \ldots, R_T, S_T$ using π
  For $t = 0, 1, \ldots, T-1$:
    $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \alpha \boxed{\big[G_t - \hat{v}(S_t,\mathbf{w})\big] \nabla \hat{v}(S_t,\mathbf{w})}$

蒙特卡洛方法下的随机梯度度，观测是G_t

✓ G_t是对$v_\pi(S_t)$的无偏估计，因此具有收敛的保障

✓ 如果是一种“自举”方式的观测值？

  - 动态规划、时序差分

“半”随机梯度下降

- 在“自举”式观测值情况下
  - 以时序差分方法TD(0)为例，此时的观测值为

$$U_t \doteq R_{t+1} + \gamma \hat{v}(S_{t+1}, \mathbf{w})$$

此时观测值也是关于参数*w*的函数

Semi-gradient TD(0) for estimating $\hat{v} \approx v_\pi$

Input: the policy π to be evaluated
Input: a differentiable function $\hat{v} : \mathcal{S}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ such that $\hat{v}(\text{terminal}, \cdot) = 0$

Initialize value-function weights $\mathbf{w}$ arbitrarily (e.g., $\mathbf{w} = \mathbf{0}$)
Repeat (for each episode):
    Initialize S
    Repeat (for each step of episode):
        Choose $A \sim \pi(\cdot|S)$
        Take action A, observe R, S'
        $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \alpha\big[R + \gamma \hat{v}(S', \mathbf{w}) - \hat{v}(S, \mathbf{w})\big] \nabla \hat{v}(S, \mathbf{w})$
        $S \leftarrow S'$
    until S' is terminal

半随机梯度下降不保障收敛，在线性函数下收敛性尚好

参数近似Q

- 半梯度Sarsa：一种on-policy的TD(0)
  - 目标：

$$\hat{q}(s, a, \mathbf{w}) \approx q_*(s, a)$$

  - 参数学习过程

$$\mathbf{w}_{t+1} \doteq \mathbf{w}_t + \alpha \Big[U_t - \hat{q}(S_t, A_t, \mathbf{w}_t) \Big] \nabla \hat{q}(S_t, A_t, \mathbf{w}_t)$$

$$\doteq \mathbf{w}_t + \alpha \Big[R_{t+1} + \gamma \hat{q}(S_{t+1}, A_{t+1}, \mathbf{w}_t) - \hat{q}(S_t, A_t, \mathbf{w}_t) \Big] \nabla \hat{q}(S_t, A_t, \mathbf{w}_t)$$

策略梯度

- 策略梯度（policy gradient）

$$\pi(a|s,\boldsymbol{\theta}) = \Pr\{A_t = a \mid S_t = s, \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}\}$$

- 一般情况下目标函数$J(\theta)$定义为策略的表现性能
  - 采用随机梯度上升法进行优化

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t + \alpha \widehat{\nabla J(\boldsymbol{\theta}_t)}$$

- Actor-Critic方法
  - 同时学习参数化的状态估值函数$v(s,w)$和策略$\pi(a|s,\theta)$

案例：AlphaGo Zero

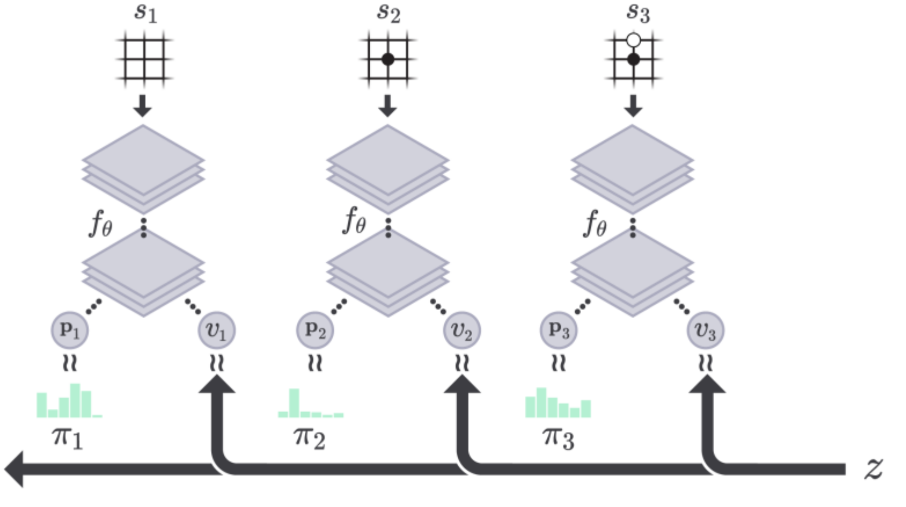
- 参数近似
  - Policy gradient

$$(\mathbf{p}, v) = f_\theta(s)$$

  - 损失函数

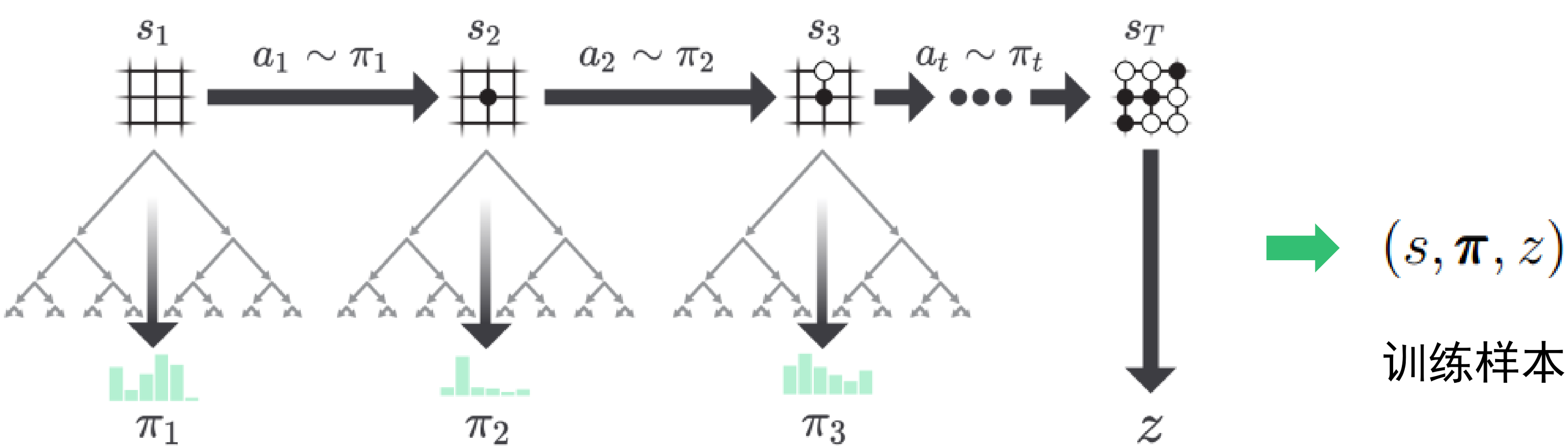
$$l = (z - v)^2 - \boldsymbol{\pi}^\top \log \mathbf{p} + c||\theta||^2$$

  - 学习过程



案例：AlphaGo Zero

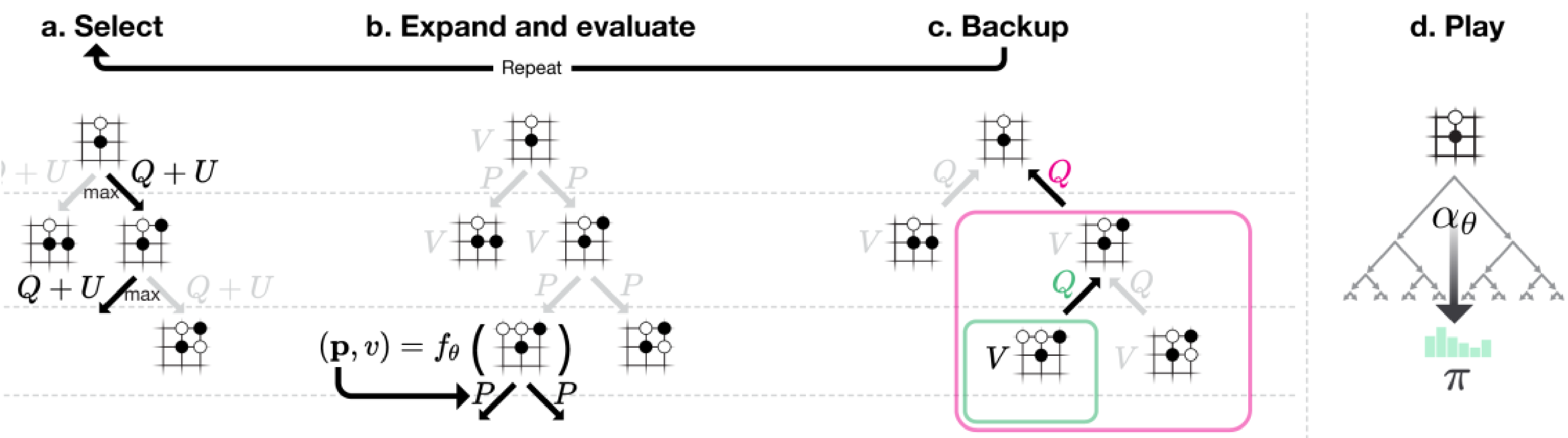
- 蒙特卡洛方法获得模拟经验
  - Self-play



  - 用蒙特卡洛树搜索（MCTS）进行策略提升
    - $p \rightarrow \pi$
  - 用蒙特卡洛模拟的结果进行策略估值
    - $v \rightarrow z$

案例：AlphaGo Zero

- 蒙特卡洛树搜索



$$Q(s,a) + U(s,a) = Q(s,a) + \frac{P(s,a)}{1 + N(s,a)}$$

下课