高级人工智能

沈华伟

shenhuawei@ict.ac.cn

中国科学院计算技术研究所

2019.12.24

课程内容

- 博弈
  - 基本概念
  - 纳什均衡
  - 机制设计
- 两个经济学的应用
  - 拍卖
  - 讨价

一般意义的博弈

- 日常生活中随处可见“博弈”
  - 赌博
  - 棋类游戏：象棋、围棋
  - 田径运动
  - 篮球运动
  - ……
- 如何在这样的“博弈”中获胜呢？
  - 博弈一般包含运气、技术和策略
  - 策略是为了获胜所需要的一种智力技巧
    - 是对于如何最好地利用身体、工具等技巧的一种算计
      - 篮球的挡拆战术、犯规战术

策略博弈

- 策略本质上涉及与他人的相互影响
  - 其他人在同一时间、对同一情形也在进行类似的思考
- 博弈论就是分析这样的交互式决策，是关于相互作用情况下的理性行为的科学
- 理性行为
  - 明白自己的目的和偏好，同时了解自己行动的限制和约束，以精心策划的方式选择自己的最佳行为
  - 博弈论对理性行为赋予的新含义：与其他同样具有理性的决策者进行相互作用
- 在博弈中真的总能获胜吗？有必胜策略吗？
  - 注意：对手和你一样聪明的

博弈的类型

- 静态博弈 vs. 动态博弈
  - 静态博弈：所有局中人同时进行策略选择，譬如剪刀-石头-布
  - 动态博弈：局中人按照顺序进行策略选择，譬如下棋

- 竞争博弈 vs. 合作博弈
  - 竞争博弈：炒股
  - 合作博弈：结盟

- 完全信息博弈 vs. 不完全信息博弈
  - 完全信息博弈：每个局中人对于所有局中人的策略及其效用充分了解；反之，称之为不完全信息博弈

博弈案例

- 二人分配
  - 两个人分一个东西（譬如分蛋糕），设计什么样的机制以保证尽可能等分

  - 一个人切，另一个人选

博弈案例

- 田忌赛马
  - （田）忌数与齐诸公子驰逐重射。孙子见其马足不甚相远，马有上、中、下辈。于是孙子谓田忌曰：“君弟重射，臣能令君胜。”田忌信然之，与王及诸公子逐射千金。及临质，孙子曰：“今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君中驷与彼下驷。”既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金。

	第一场	第二场	第三场	获胜方
齐王	上	中	下	
田忌1	上	中	下	齐王
田忌2	上	下	中	齐王
田忌3	中	上	下	齐王
田忌4	中	下	上	齐王
田忌5	下	上	中	田忌
田忌6	下	中	上	齐王

博弈的要素

- 局中人（Player）
  - 在博弈中有权决定自己行动方案的博弈参加者
  - 局中人不一定是具体的人
    - 如球队、军队、企业
  - 博弈中利益完全一致的参与者只能看成一个局中人
    - 如桥牌中的南北方和东西方
- 重要假设：局中人是自私的理性人
  - 不存在侥幸心理
  - 不可能利用其它局中人的失误来扩大自己的利益
  - 以最大化个人利益为目的

博弈的要素

- 策略集合(Strategy Set)
  - 策略：博弈中可供局中人选择的行动方案
  - 参加博弈的局中人i的策略集合记为A_i
  - 所有局中人的策略形成的策略组，称为局势，记作S
  - 多人博弈中假定有 n个局中人，每个局中人从自己的策略集合中选择一个策略s_i， $s_i \in A_i$ ，这样就形成了一个局势$S = \{s_1, s_1, \cdots, s_n\}$

- 田忌赛马中田忌的策略集合
  - {上中下、上下中、中上下、中下上、下上中、下中上}

博弈的要素

- 效用函数(Payoff)
  - 通常用U来表示
  - 对每个参与博弈的局中人，都有一个相应的效用函数
  - 效用函数在静态博弈中一般是局势的函数
  - 在动态博弈中效用函数可能是局势的函数，也可能还有其它因素，比如时间
  - 每个局中人的目的都是最大化自己的效用函数

囚徒困境

- 局中人
  - 两个囚徒
- 策略
  - 抗拒
  - 坦白
- 效用函数矩阵

囚徒B

囚徒A		抗拒	坦白
	抗拒	-1,-1	-10,0
	坦白	0,-10	-3,-3

性别之战

- 局中人
  - 夫妻双方
- 策略
  - 看韩剧、看体育

- 效用函数矩阵

妻子

丈夫

	韩剧	体育
韩剧	1,2	0,0
体育	0,0	2,1

剪刀-石头-布(Rock-paper-scissors)

- 局中人
  - 两个玩家
- 策略
  - 剪刀、石头、布
- 效用函数矩阵

玩家二

玩家一

	剪刀	石头	布
剪刀	0,0	-1,1	1,-1
石头	1,-1	0,0	-1,1
布	-1,1	1,-1	0,0

纳什均衡

- 最佳应对
  - 假设s是局中人1的一个选择策略， t是局中人2的一个选择策略； $U_1(s,t)$ 是局中人1从这组决策中获得的收益，$U_2(s,t)$ 是局中人2从这组决策中获得的收益
  - 针对局中人2的策略t，若局中人1用策略s产生的收益大于或等于其任何其他策略，则称策略s是局中人1对局中人2的策略t的最佳应对
    - $U_1(s,t) \geq U_1(s',t)$，s'是局中人1除s外的其它策略
  - 如果一个局中人的某个策略对其它局中人的任何策略都是最佳应对，那么这个策略就是该局中人的占优策略

纳什均衡

- 纳什均衡
  - 定义：如果一个局势下，每个局中人的策略都是相对其他局中人当前策略的最佳应对，则称该局势是一个纳什均衡
- 纳什均衡就是博弈的一个均衡解
- 是一个僵局
  - 即给定其他人不动，没有人有动的积极性
  - 谁动谁吃亏

纳什均衡

- 例子：囚徒困境
  - 纳什均衡：双方都坦白
    - 一方保持策略不变（坦白），另一方如果改变策略（抗拒），其效用会降低（从-3变成-10）

囚徒B

囚徒A		抗拒	坦白
	抗拒	-1,-1	-10,0
	坦白	0,-10	-3,-3

纳什均衡

- 例子：性别之战
  - 纳什均衡1：夫妻双方都同意看韩剧
    - 妻子保持策略不变（看韩剧），丈夫如果改变策略（看体育），其效用会降低（从1变成0）
    - 丈夫保持策略不变（看韩剧），妻子如果改变策略（看体育），其效用会降低（从2变成0）
  - 纳什均衡2：夫妻双方都同意看体育

妻子

		韩剧	体育
丈夫	韩剧	1,2	0,0
	体育	0,0	2,1

纳什均衡

- 例子：剪刀-石头-布
  - 不存在纯策略的纳什均衡

玩家二

玩家一

	剪刀	石头	布
剪刀	0,0	-1,1	1,-1
石头	1,-1	0,0	-1,1
布	-1,1	1,-1	0,0

混合策略纳什均衡

- 混合策略
  - 每个局中人以某个概率分布在其策略集合中选择策略

- 混合策略下的纳什均衡
  - 定义和纯策略纳什均衡一致：基于最佳应对定义
  - 必要条件：给定其他局中人的策略选择概率分布的情况下，当前局中人选择任意一个（纯）策略获得的期望效用相等

混合策略纳什均衡

- 例子：剪刀-石头-布
  - 玩家一的策略选择分布记为$p=\{p_1,p_2,1-p_1-p_2\}$，玩家二的策略选择分布记为$q=\{q_1,q_2,1-q_1-q_2\}$
  - 假设玩家一的策略分布不变，玩家二策略选择的效用为
    - 剪刀：$0*p_1+(-1)*p_2+1*(1-p_1-p_2)=1-p_1-2p_2$
    - 石头：$1*p_1+0*p_2+(-1)*(1-p_1-p_2)=2p_1+p_2-1$
    - 布：$(-1)*p_1+1*p_2+0*(1-p_1-p_2)=p_2-p_1$
  - 令玩家二的各个策略的效用相等，得到$p_1=p_2=\frac{1}{3}$
  - 同理可得$q_1=q_2=\frac{1}{3}$
- 剪刀-石头-布的混合纳什均衡态
  - 每个玩家各以1/3的概率选择剪刀、石头和布
  - 期望收益为0

玩家二

玩家一

	剪刀	石头	布
剪刀	0,0	-1,1	1,-1
石头	1,-1	0,0	-1,1
布	-1,1	1,-1	0,0

纳什定理

- 任何有限博弈都至少存在一个纳什均衡
  - 不一定是纯策略纳什均衡，例如剪刀-石头-布
- 寻找博弈的纳什均衡是困难的
  - 至少从算法角度来讲是这样

社会最优

- 帕累托最优
  - 以意大利经济学家维尔弗雷多·帕累托的名字命名
  - 对于一组策略选择（局势），若不存在其他策略选择使所有参与者得到至少和目前一样高的回报，且至少一个参与者会得到严格较高的回报，则这组策略选择为帕累托最优
- 社会最优
  - 使参与者的回报之和最大的策略选择（局势）
  - 社会最优的结果一定也是帕累托最优的结果
  - 帕累托最优不一定是社会最优

社会最优示例

- 囚徒困境案例

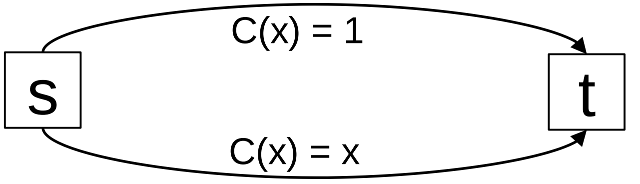
囚徒B

囚徒A	抗拒	坦白
抗拒	-1,-1	-10,0
坦白	0,-10	-3,-3

帕累托最优的决策组合一共有3个，分别是（坦白，抗拒），（抗拒，坦白）和（抗拒，抗拒），纳什均衡策略组合（坦白，坦白）不是帕累托最优，社会最优策略组合是（抗拒，抗拒）

社会最优示例

- 案例
  - 从源点s到目标点t有两条通路，第一条的代价恒为1，第二条的代价和选择该路径的人数呈正比



  - 纯策略
    - 所有人选择第一条路径：总代价为1
    - 所有人选择第二条路径：总代价为1
  - 混合策略
    - 以概率x选择第一条路，以概率$1-x$选择第二条
    - 期望代价：$x+(1-x)^2=x^2-x+1$
  - 最优策略是：$x=1/2$

机制设计

- 如何设计一个博弈，使其到达到预期结果（譬如，实现社会最优）？
  - 设计游戏规则
    - 次价密封报价拍卖
  - 设计效用函数
    - 诉讼费用、股票印花税
  - 确定哪些信息是私有信息（不完全信息博弈）
    - 密封报价拍卖、公开拍卖
    - 多人协同给图片打标签
  - 静态博弈，还是动态博弈

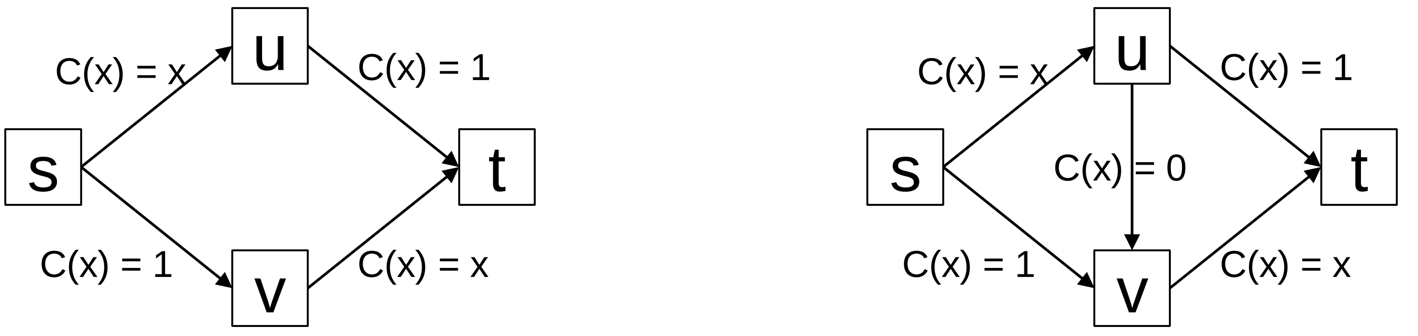
机制设计

- 案例1
  - 二人博弈游戏：轮流从1-4中选择一个数，哪个人选择一个数字后使得之前的所有数字之和等于50则获胜
  - 后手必胜策略
    - 无论对方选什么，都凑够5的倍数
    - 后手报数后的数字总和为5, 10, 15, …., 45, 50

- 案例2
  - 二人分蛋糕

机制设计的失败案例

- 案例3



- 左图的情形
  - 期望代价是：1/2+1
- 在u和v之间修一条代价为0的高速路，会提高社会效用吗？
  - 社会最优解：以概率1/2走路径s→u→t，以概率1/2走路径s→v→t，以概率0走路径s→u→v→t，此时的期望代价为1/2+1
  - 纳什均衡解：以概率1走路径s→u→v→t，此时的期望代价为2

课间休息

课程内容

- 博弈
  - 基本概念
  - 纳什均衡
  - 机制设计
- 应用案例
  - 拍卖
  - 讨价

经济市场

- 解决稀有资源的分配问题

- 一般市场
  - 多个卖家、多个买家
- 讨价（Bargaining）
  - 多个卖家、一个买家
- 拍卖（Auction）
  - 一个卖家、多个买家

拍卖

- 拍卖活动
  - 一个卖家向一群买家拍卖一件商品的活动
  - 拍卖的基本假设
    - 每个竞争者对被拍卖的商品有各自的估值
    - 这个估值是竞拍者对商品实际所值的估计
    - 如果商品售价不高于这个估值，竞拍者会购买，否则不会购买

拍卖

- 拍卖类型
  - 增价拍卖，又称英式拍卖
    - 拍卖者逐渐提高售价，竞拍者不断退出，直到只剩一位竞拍者，该竞拍者以最后的报价赢得商品
  - 减价拍卖，又称荷式拍卖
    - 拍卖者逐渐降低售价，直到有竞拍者出价购买
  - 首价密封报价拍卖
    - 竞拍者同时向拍卖者提交密封报价，拍卖者同时打开这些报价，出价最高的竞拍者以其出价购买该商品
  - 次价密封报价拍卖
    - 竞拍者同时向拍卖者提交密封报价，出价最高的竞拍者赢得商品但以第二高出价购买该商品
  - 双方出价
    - 股票市场

首价密封报价拍卖

- 纳什均衡
  - 每个竞拍者的报价低于其对商品的估价
- 解读
  - 共有n个竞拍者，竞拍者i的估价记为v_i，报价记为b_i，其他竞拍者的估价服从$[a,b]$区间上的均匀分布，且诚实出价
  - $b_i < a$时，竞标失败，收益为0
  - 竞拍者i赢得竞拍的概率为 $\left(\frac{b_i - a}{b - a}\right)^{n-1}$
  - 竞拍者的期望收益是 $f(b_i) = (v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{b - a}\right)^{n-1}$

首价密封报价拍卖

- 解读（续）
  - 期望收益

$$f(b_i) = (v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{b - a}\right)^{n-1}$$

  - 期望收益关于报价b_i的梯度为

$$f'(b_i) = -\left(\frac{b_i - a}{b - a}\right)^{n-1} + (n-1)(v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{b - a}\right)^{n-2}\frac{1}{b - a}$$

$$= \left(\frac{b_i - a}{b - a}\right)^{n-2}\left(\frac{-nb_i + a + (n-1)v_i}{b - a}\right)$$

  - 最优报价为

$$b_i^* = \frac{a + (n-1)v_i}{n}$$

✓ 最优报价低于估价
✓ 竞拍者越多，报价越接近于估价

次价密封报价拍卖

- 纳什均衡
  - 每个竞拍者会倾向于采用其对商品的估价进行报价
- 解读
  - 给定一个竞拍者，其估价记为v，报价记为b，其他竞拍者的最高报价记为b^*
  - 理性行为假设下，报价不会高于估价，即$b \leq v$
  - 此时，根据b^*的取值有三种情形
    - $b^* > v$：收益为0；将报价从b提高到v，收益不变
    - $b^* < b$：收益为$v - b^*$；将报价从b提高到v，收益不变
    - $b \leq b^* \leq v$：收益为0；将报价从b提高到v，收益变为$v - b^*$

课程内容

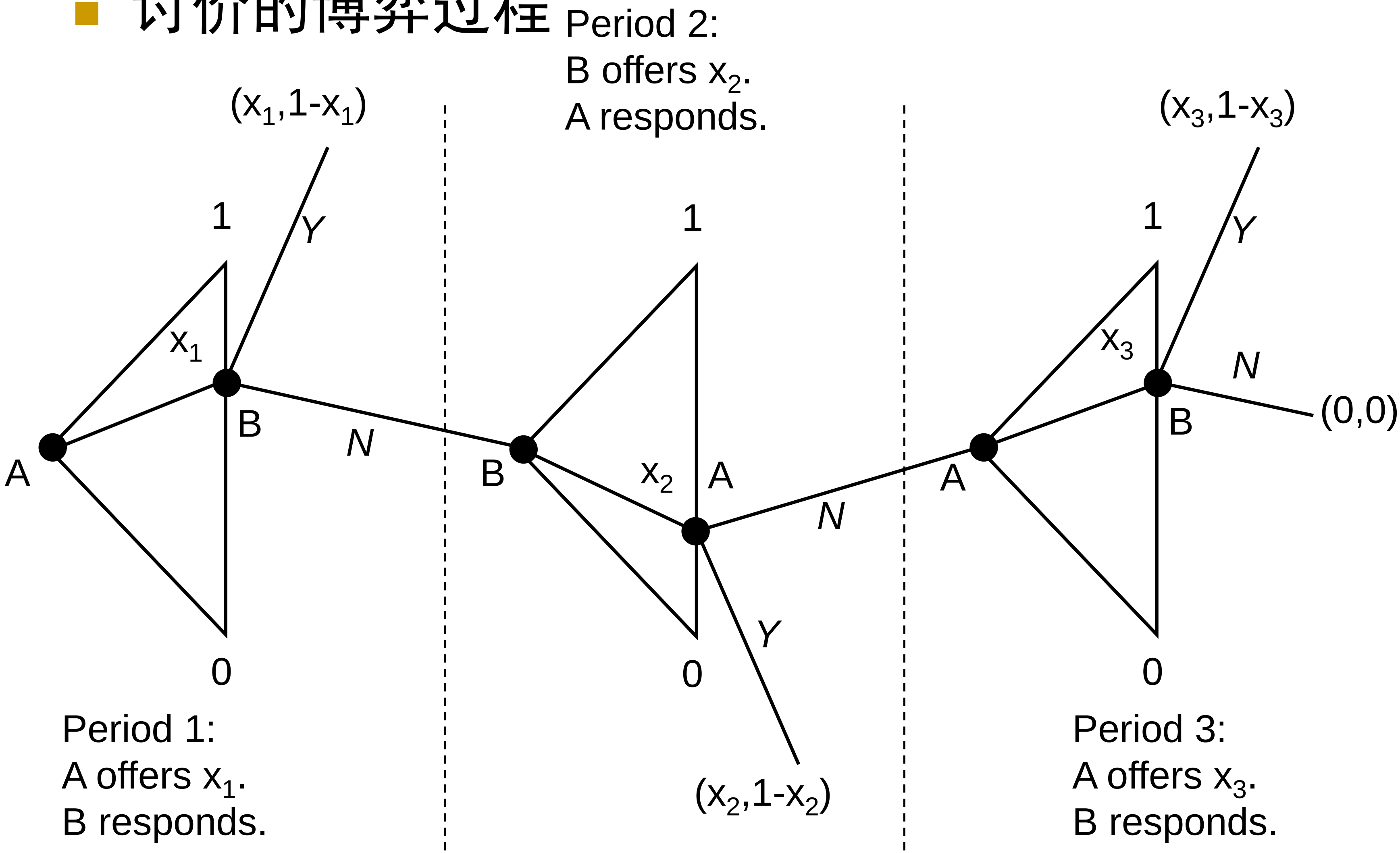
- 博弈
  - 基本概念
  - 纳什均衡
  - 机制设计
- 应用案例
  - 拍卖
  - 讨价

讨价

- 卖家和买家之间的博弈
- 讨价的对象是双方对商品估价之差
  - 假设所有因素都体现在估价中
    - 时间、情感、眼缘等
  - 例子：
    - 衣服进价80，标价200
    - 卖家对衣服的估价在80和200之间，譬如120
    - 买家的估价假如为160
    - 讨价的对象是双方的估价之差，即160-120=40
- 后续的讨论中，将讨价对象视为整体1
  - 卖家的估价为0，买家的估价为1

讨价

- 讨价的博弈过程

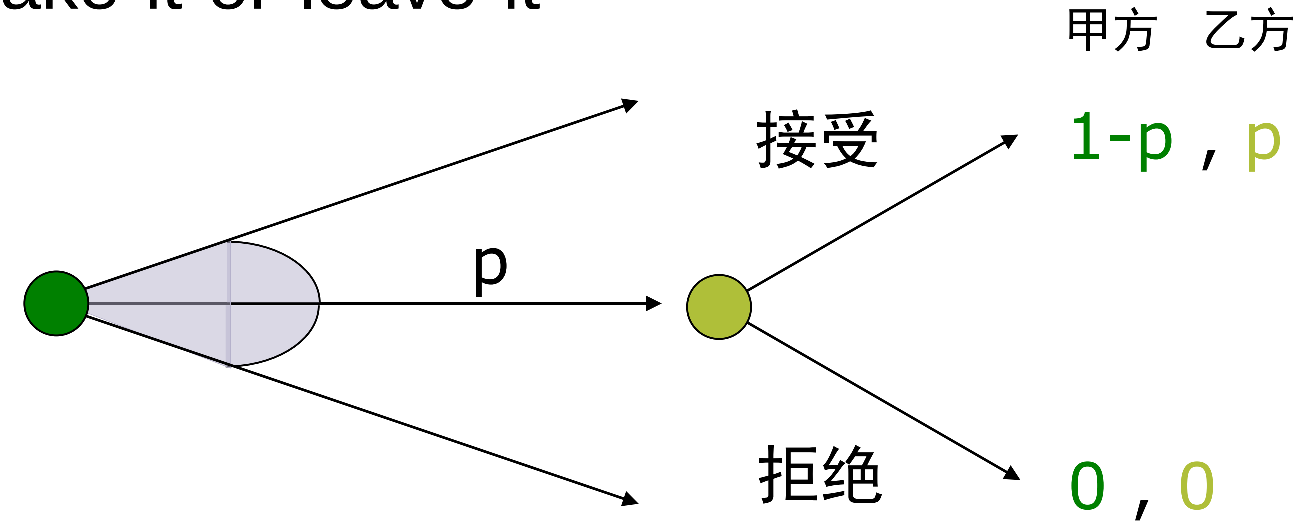

Period 2:
B offers x_2.
A responds.
$(x_1,1-x_1)$
$(x_3,1-x_3)$
1
Y
1
1
Y
x_1
x_3
N
(0,0)
B
B
A
N
B
x_2
A
A
N
Y
0
0
0
$(x_2,1-x_2)$
Period 1:
A offers x_1.
B responds.
Period 3:
A offers x_3.
B responds.

讨价

- 场景1
  - Take-it-or-leave-it：无商谈余地
  - 一方报价，另一方要么接受报价达成交易，要么交易失败
    - 两个人商量吃蛋糕，一方提出切分比例，另一方如果不同意，双方就都不吃
    - 美国参议院：民主党提出增加财政预算到某个值，共和党要么同意，要么拒绝（但不能提新的方案）
  - 通过回滚(rollback)求解纳什均衡

讨价

- Take-it-or-leave-it



- 过程
  - 阶段1：甲方提出，按照1-p和p的比例进行分配
  - 阶段2：只要p大于0，乙方则会接受

甲方（分配方案提出者）得到几乎所有收益

讨价

- 常见的讨价情形
  - Take-it-or-counteroffer：要么接受，要么还价
- 过程
  - 第一阶段：甲方报价：1-p, p
  - 第二阶段：乙方要么接受报价，要么还价$\delta * (1-q)$，$\delta * q$
  - 第三阶段：甲方决定要么接受乙方的还价，要么交易失败
- 约束条件
  - 时间成本：δ刻画可用于分配的总收益随时间衰减（$0 \le \delta \le 1$）
- 例子：NBA劳工谈判，分配一个会融化的蛋糕

讨价

- Take-it-or-counteroffer过程推演
  - 第一阶段之后等同于take-it-or-leave-it讨价
  - 假如第一阶段乙方没有接受甲方的报价，那么在接下来的take-it-or-leave-it过程中，甲方的收益将趋近于0
  - 因此，甲方在第一阶段报价时，分配给乙方的收益不少于乙方拒绝报价后所得到的收益

$$\boxed{p} \geq \delta * (1 - q) \approx \boxed{\delta}$$

甲方第一轮报价中，乙方获得的收益

甲方第一轮报价被拒绝后，乙方报价时将获得的收益

讨价

- Take-it-or-counteroffer过程推演的启示
  - 在时间成本约束下，甲乙双方会尽可能在第一轮达成交易，以使共同分割的收益总和最大
  - 甲方在第一轮报价时，需根据时间成本来决定报价
  - 乙方获得收益依赖于对时间成本的容忍度
  - 最终的分配比例是

甲方：$1-\delta$

乙方：δ

蛋糕融化得越慢，乙方分的越多

讨价

- 先发优势，还是后发制人？

- 当时间成本较高（即δ较小）时，甲方有先发优势
  - 例如：炎热的夏天，蛋糕融化得快

- 当时间成本较低（即δ较大）时，乙方可后发制人
  - 例如：寒冷的冬天，蛋糕融化得慢

启示：博弈规则决定最终的结果

讨价

- 打官司
  - 原告诉讼被告，要求赔偿100万
  - 诉讼费原告和被告各支付10万
- 情形1
  - 双方各自认为自己胜诉的概率为1/2
  - 开启诉讼
    - 原告收益：50万-10万=40万；被告收益：-50万-10万=-60万
  - 可以达成庭外和解：譬如被告支付50万给原告
    - 原告能接受的最低价是：40万
    - 被告能提供的最高价是：60万
    - 讨价分配的“蛋糕”大小为20万

讨价

- 情形2
  - 双方各自认为自己胜诉的概率为3/4
  - 开启诉讼
    - 原告预期收益：75万-10万=65万；
    - 被告预期收益：-25万-10万=-35万
  - 无法达成和解
    - 原告能接受的最低价是：65万
    - 被告能提供的最高价是：35万
  - 讨价分配的蛋糕大小是：-30万
- 假如诉讼费是30万呢？

讨价

- 小结
  - 博弈规则决定博弈结果
  - 各自的“底牌”是对方报价的依据
  - 讨价的蛋糕大小由双方的底牌决定

课后作业

- 海盗分金币
  - 问题描述：有5个海盗抢到了100个金币，经过激烈争论，就如何分配达成以下协议：
    - 抽签决定每个人提分配方案的顺序
    - 抽到1号签的海盗首先提出自己的分配方案，然后所有人表决（包括方案提出者），当且仅当半数或超过半数以上的人同意的时候，才按照他提出的方案执行，否则他会被扔进海里
    - 1号海盗的方案如果未被通过，那么2号海盗提自己的方案，规则和上述一样，直到某个方案通过
- 给出最终的分配方案
  - 提示：从后往前回滚

下课