矩阵分解大作业说明文档

姓名：李一鸣　学号:201928014628002

任务描述

程序实现矩阵的 LU 分解、QR 分解 (Gram-Schmidt)、正交约减 (Householder reduction 和 Givens reduction)。要求编写一个综合程序，根据选择参数的不同，实现不同的矩阵分解，并附上具体实例。

实现细节

所使用的语言及其依赖库如下：

- **Python 3.6**: 编程语言
- **Numpy 1.15.4**：Python 科学计算框架，作为本题中所有数据操作的底层实现

任务关联的提交包文件如下：

- **mat_decomp.py**：矩阵分解任务的 python 实现源代码文件

实现功能的函数如下：

```python
def mat_decomp(A, type ='LU'):
```

- **A**: 必要参数，输入矩阵
- **type**: 可选参数，‘LU’实现矩阵的 LU 分解，‘GramSchmidt’实现矩阵的 Gram-Schmidt 正交化，‘Householder’实现矩阵的 Householder 约减，‘Givens’实现矩阵的 Givens 约减，默认参数为‘LU’。

每一种分解的结果均保留三位有效数字。

LU 分解

LU 分解的实现函数为

```python
def LU(A):
```

- 输入 **A**： 输入矩阵，要求是一个方阵。
- 输出 **P,L,U**： LU 分解的结果，P 是 A 矩阵经初等行变换的矩阵表示，L 是一个主对角元素均为 1 的下三角矩阵，U 是一个上三角矩阵，PA=LU。

首先需要判断矩阵 A 是否可逆，如果 A 是一个奇异矩阵，则无法进行 LU 分解。其次还需要判断 A 的各阶子矩阵 A_{sub} 是否可逆，如果 A_{sub} 均可逆，则可直接对 A 进行 LU 分解，此时 P 等于单位阵，即 $A = LU$；如果存在有不可逆的 A_{sub}，则需要对矩阵 A 进行行变换，使其子矩阵 A_{sub} 变为可逆矩阵，再对行变换后得到的矩阵 PA 进行 LU 分解，即 $PA = LU$，P 为初等行变换矩阵。

实现原理：

由 $A = LU$，知对于矩阵 A 中的每个元素

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + u_{ij}, j = i, i+1, \ldots, n$$

即

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, j = i, i+1, \ldots, n$$

又

$$a_{ji} = \sum_{k=1}^{i} l_{jk}u_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} + l_{ji}u_{ii}, j = i+1, i+2, \ldots, n$$

则

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right) / u_{ii}, j = i+1, i+2, \ldots, n$$

由于 L 矩阵的第一列和 U 矩阵的第一行都比较容易计算，故可以通过迭代的方式计算出 u_{ij} 和 l_{ji}, 从而得到 U 矩阵和 L 矩阵。

Gram-Schmidt 正交化

Gram-Schmidt 正交化的实现函数为

```python
def GramSchmidt(A):
```

- 输入 **A**: 输入矩阵，要求是一个方阵。
- 输出 **Q,R**: Gram-Schmidt 正交化的结果，Q 为一个正交矩阵，R 为一个上三角矩阵,A=QR。

实现原理:

对于矩阵 A, 其每一个列向量为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则 Gram-Schmidt 正交化得到的正交矩阵 Q 的每一个列向量为:

$$q_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$$

$$q_k = \frac{a_k - \sum_{i=1}^{k-1} < q_i|a_k > q_i}{||a_k - \sum_{i=1}^{k-1} < q_i|a_k > q_i||}$$

即 A 中每个列向量减去它在前面所有正交向量上投影的分量，再归一化得到 Q 矩阵的列向量。由于 $Q^{-1} = Q^T$,$A = QR$，则通过 $R = Q^T A$ 可以计算出 R 矩阵。

Householder 约减

Householder 约减的实现函数为

```python
def Householder(A):
```

- 输入 **A**: 输入矩阵，要求是一个方阵。
- 输出 **Q,R**: Householder 约减的结果，Q 为一个正交矩阵，R 为一个上三角矩阵,A=QR。

实现原理:

对于矩阵 A, 其每一个列向量为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 计算反射矩阵:

$$R = I - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

其中，

$$u = a - ||a||e_1$$

R 是一个正交矩阵。多次迭代，得到 $R_{m-1}\cdots R_2R_1A_{m\times m} = T$，其中 T 是一个上三角矩阵。记 P=$R_{m-1}\cdots R_2R_1$,T=R, 则有 $PA = T$。故得到 QR 分解的结果为 $Q = P^T$,R=T。

Givens 约减

Givens 约减的实现函数为

```
def Givens(A):
```

- 输入 **A**: 输入矩阵，要求是一个方阵。
- 输出 **Q,R**: Givens 约减的结果，Q 为一个正交矩阵，R 为一个上三角矩阵,A=QR。

实现原理：
对于矩阵 A, 其每一个列向量为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 存在旋转矩阵 P 使 $Px = ||a||e_i$，其中

$$P = P_{in}\cdots P_{i,i+1}P_{i,i-1}P_{i1}$$

P 是一个正交阵。有 $PA = T$,T 是一个上三角阵，故可得 QR 分解的结果为 $Q = P^T$,R=T。

实例演示

LU 分解

输入矩阵为：

```
A1 =[[2,2,2],
[4,7,7],
[6,18,22]]
```

LU 分解结果为:

```
LU分 解
L: [[1. 0. 0.]
[2. 1. 0.]
[3. 4. 1.]]
U: [[2. 2. 2.]
[0. 3. 3.]
[0. 0. 4.]]
```

输入矩阵为:

```
A2 = [[1, 4, 5, 6],
    [1, 4, 6, 7],
    [1, 4, 6, 8],
    [5, 1, 5, 12]])
```

LU 分解结果为:

```
A的 子 矩 阵 为 奇 异 矩 阵 , 需 要 对A行 变 换 , 使 其 变 为 非 奇 异 矩 阵 , 即 采 用PLU分 解 。
PLU分 解
P: [[1. 0. 0. 0.]
    [0. 0. 0. 1.]
    [0. 1. 0. 0.]
    [0. 0. 1. 0.]]
L: [[ 1.  0.  0.  0.]
    [ 5.  1.  0.  0.]
    [ 1. -0.  1.  0.]
    [ 1. -0.  1.  1.]]
U: [[  1.   4.   5.   6.]
    [  0. -19. -20. -18.]
    [  0.   0.   1.   1.]
    [  0.   0.   0.   1.]]
```

QR 分解

输入矩阵为:

```
A3=[[0,-20,-14],
    [3,27,-4],
    [4,11,-2]]
```

Gram-Schmidt 正交化结果为:

```
GramSchmidt:
Q: [[ 0.    -0.8   -0.6 ]
    [ 0.6    0.48 -0.64]
    [ 0.8   -0.36  0.48]]
R: [[ 5. 25. -4.]
    [ 0. 25. 10.]
    [ 0. -0. 10.]]
```

Householder 约减结果为:

```
Householder:
Q: [[ 0.    -0.8   -0.6 ]
    [ 0.6    0.48 -0.64]
    [ 0.8   -0.36  0.48]]
R: [[ 5. 25. -4.]
    [ 0. 25. 10.]
    [ 0. -0. 10.]]
:
```

Givens 约减结果为:

```
Givens:
Q: [[ 0.    -0.8   -0.6 ]
    [ 0.6    0.48 -0.64]
    [ 0.8   -0.36  0.48]]
R: [[ 5. 25. -4.]
    [ 0. 25. 10.]
    [-0. -0. 10.]]
```