Mirage Project

Study Notes Collection

C^*-Algebras, K-Theory and Other Topics

Academic Year 2021 / 22

July, 2024

个人主页: edmundwhis.github.io

最后编译日期: 2024-07-12

目录

参考文献和阅读清单 — 2021/22 学年

书籍

第 1–2 章:

[Xu] 许全华. *算子代数和非交换 L_p 空间引论*. 科学出版社.

[WY] Rufus Willett, Guoliang Yu. *Higher Index Theory*. American Mathematical Society.

[D] Kenneth R. Davidson. *C*–Algebras by Example*. American Mathematical Society.

[P] Gert K. Pedersen. *C*–Algebras and Their Automorphism Groups*. Academic Press.

第 3 章:

[HeR] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis I & II*. Springer.

[BdlHV] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette. *Kazhdan's Property (T)*, New Mathematical Monographs, vol.11, Cambridge University Press.

[CCJ] P. A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg and A. Valette. *Groups with the Haagerup property: Gromov's a-T-menability*. Springer Science & Business Media, 2001.

[NY] P. W. Nowak, Guoliang Yu. *Large scale geometry*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society.

第 4 章:

[Li-WW] 李文威. *代数学方法: 卷二 — 线性代数*. 网络版, `https://www.wwli.asia/downloads/books/Al-jabr-2.pdf`.

[J] Nathan Jacobson. *Basic algebra II*. Courier Corporation.

第 5 章:

[W] N .E. Wegge-Olsen. *K–Theory and C*–Algebras, A Friendly Approach*. Oxford University Press.

[RLL] M. Rørdam, F. Larsen, N. Laustsen. *An Introduction to K-Theory for C*-Algebras*. Cambridge University Press.

[HR] Nigel Higson, John Roe. *Analytic K-Homology*. Oxford University Press.

[Li-JH] 黎景辉. *代数 K-理论*. 科学出版社.

论文

第 1 章:

[Ter] Gardner L T. *An elementary proof of the Russo-Dye theorem*[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1984, 90(1): 171.

[BO] Brown N P, Ozawa N. *C*–Algebras and Finite-Dimensional Approximations*[M]. American Mathematical Society, 2008.

第 3 章:

[Gl] Gleason J. *Existence and uniqueness of Haar measure*[J]. preprint, 2010.

[Ch] Christopher Lance. *On Nuclear C*–Algebras*[J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 12: 157–176.

第 5 章:

[Dieu] J.Dieudonné. *Sur les Homomorphismes d'Espaces Normés*[J]. Bull. Sci. Math, 1943, 72–84.

[EHS] E.G.Effros, D.E.Handelman, and C.-L.Shen. *Dimension groups and their affine representations.* American Journal of Mathematics, 1980, 102(2): 385-407.

1 抽象 C^* 代数的基本理论

从定义上看, C^* 代数无非是 Banach 代数加上一种对合运算, 但多出来的对合结构和 C^* 条件却导致了以下被称作 C^* **奇迹**的结论, 它们对 C^* 代数是正确的, 但绝大多数对一般的 Banach 代数都是错的.

(1) *–代数上的完备 C^* 范数是唯一的;

(2) 任何 C^* 代数之间的 *–同态都是压缩的;

(3) C^* 代数中元素的谱与它的底 C^* 代数无关;

(4) 任何 C^* 代数之间的单同态都是等距;

(5) 对 C^* 代数中的正规元可以做连续函数演算, 而不仅仅是全纯函数演算;

(6) 对 C^* 代数的正元可以通过谱来定义;

(7) 任何 C^* 代数都具有逼近单位元.

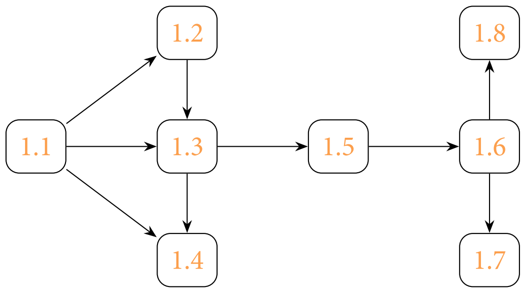
本章主要对 C^* 代数的基本理论进行归纳和总结, 并不严格循逻辑顺序.

- 第 1 节从基础概念出发, C^* 代数的定义有具体的和抽象的两种定义方式, 本章所作的讨论绝大多数针对抽象 C^* 代数. 这给了我们良好的代数结构, 从而允许我们构造直和, 直积, 商代数这样的基本结构. 但具体的定义并非一无是处, 尽管在讨论像商代数这样的结构比较困难, 但当我们讨论 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 上的 C^* 结构时具体的 C^* 代数构造变得非常容易, 这是因为若 $A \subset \mathcal{B}(H)$, 那么 $a_n \in \mathrm{Mat}_n(A)$ 自然可以看作是 $\mathcal{B}(H^{\oplus n})$ 上的元素. 在第 6 节介绍的 GNS 构造说明这两种定义方式是相同的.
- 第 2 节我们考虑交换 C^* 代数, 这其中最重要的定理是 Gelfand–Naimark 定理, 它将交换 C^* 代数与局部紧的 Hausdorff 空间建立起一一对应, 进而允许我们通过讨论 C^* 代数的性质来讨论拓扑空间的性质, 而前者往往是更容易的. 另外这也给我们一种类比的方式, 非交换的 C^* 代数是否在某种意义上对应 "非交换拓扑空间"? 20 世纪 70 年代 Connes 发展的非交换几何便以此为动机. 更进一步地, 由于正规元生成的 C^* 代数是交换的, 交换 C^* 代数允许我们对正规元做连续函数演算而不仅仅是全纯函数演算, 由此我们可以对正元定义任意次幂.
- 第 3 节我们讨论 C^* 代数的单位化. 由于 C^* 条件的加入, 不同于 Banach 代数的单位化, 仅仅添上一个单位的 C^* 代数单位化在范数的意义下是唯一的. 而第 2 节讨论的代数与拓扑空间的一一对应关系在单位化的意义下也有更深刻的意义: C^* 代数的单位化便对应着拓扑空间的单点紧化. 因此代价 "最小" 的紧化对应代价 "最小" 的单位化. 这种对应关系在第 7 节还会再看到.
- 第 4 节着重讨论 C^* 代数的理想与商代数. 这带来 C^* 代数版本的同构定理, 进一步我们说明所有的理想都具有遗传性, 也即正锥在序关系下被保持.
- 第 5 节是对 C^* 代数表示理论的准备, 我们引入态和准态的概念, 并讨论自伴泛函的 Jordan 分解. 在后续章节 (1.6 节, 2.3 节) 还会看到态如何与表示建立联系.
- 第 6 节是著名的 Gelfand–Naimark–Segal 构造, 这一构造给任何 C^* 代数提供了非退化的表示, 进

一步, 它还对每一个 C^* 代数提供了忠实表示. 这说明任何抽象 C^* 代数都可以通过非退化表示看作某个 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数. 因此我们总是可以将 C^* 代数嵌入到一个 Hilbert 空间的有界算子代数中, 这为许多操作提供了便利.

- 第 7 节延续第 6 节的想法, 有时 $\mathcal{B}(H)$ 对 A 来说是一个过于大的代数, 我们希望找到一个尽量大, 使得我们可以对一些操作封闭, 但又不至于太大的代数作为 A 的底代数, 于是此时乘子代数作为以 A 为本质理想的 A 的 "最大" 单位化出现了. 类似于第 3 节的讨论, 这样代价 "最大" 的单位化对应到拓扑空间上就是代价 "最大" 的 Stone–Čech 紧化. 我们进一步还讨论了 Calkin 代数和从此出发的 Corona 代数.
- 第 8 节是 C^* 代数张量积的讨论. 注意到在没有范数结构的时候, 纯代数的张量积可以通过泛性质唯一地确定. 但由于拓扑结构的存在, 选取的范数不同会导致完备化之后得到的空间不同. 我们讨论两种典型的范数: 极小范数和极大范数, 并给出一些张量积的结论.

阅读顺序



1.1 C^* 代数的基础概念

定义 1.1.1 (Banach*–代数, C^* 代数) 设 A 是一个 Banach 代数, 称 A 上的运算 $*$ 是一个**对合**, 若它满足

(1) $(x^*)^* = x$;

(2) $(x+y)^* = x^* + y^*$;

(3) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$;

(4) $(xy)^* = y^* x^*$;

对任何 $x, y \in A$ 和任何 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都成立. 并称 x^* 是 x 的**伴随**. 称一个具有对合的 Banach 代数是一个 **Banach*–代数**. 若这一对合还满足

$$\forall x \in A\,(\|xx^*\| = \|x\|^2), \tag{1.1.1}$$

则称 A 是一个 C^* **代数**.

在之后验证一个 Banach*–代数是否是 C^* 代数是往往需要验证 Banach 空间上的范数是否满足 (1.1.1), 为了行文方便, 之后称 (1.1.1) 为 C^* **条件**. C^* 条件保证了我们之前在 Banach 代数中讨论元素的谱时所做的假定 $\|1\| = 1$ 总是成立的.

上面给出的定义是所谓**抽象** C^* **代数**的定义, 我们直接通过 Banach 代数上的对合和 C^* 条件来定义 C^* 代数. 但更具体的看待 C^* 代数的方法是将其看作某个 $\mathcal{B}(H)$ 的自伴闭子代数, 如此定义的 C^* 代数称作是**具体** C^* **代数**. 本质上它们没有区别, 我们将在 1.6 节看到这两种定义等价.

但由于我们现在还在讨论抽象 C^* 代数, 因此自伴等概念都需要通过对合运算来定义.

命题 1.1.2　对合 $*$ 是 C^* 代数 A 的等距自同构.

证明　对合是自同构由定义验证即可, 这里只验证等距. 因对任何 $x \in A$ 都有

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| \leqslant \|x\|\,\|x^*\| \quad \Longrightarrow \quad \|x\| \leqslant \|x^*\|$$

和

$$\|x^*\|^2 = \|x^*x\| \leqslant \|x^*\|\,\|x\| \quad \Longrightarrow \quad \|x^*\| \leqslant \|x\|$$

成立. □

我们一并给出 C^* 代数上满足特定条件元素的定义, 这些定义几乎完全可以与 $\mathcal{B}(H)$ 中的情形对应.

定义 1.1.3　设 A 是 C^* 代数, 称 $a \in A$ 是

(1)　**自伴元**, 若 $a^* = a$, 其全体记作 A_{sa};

(2)　**正规元**, 若 $a^*a = aa^*$;

(3)　**正元**, 若存在 $b \in A$ 使得 $a = b^*b$, 其全体记作 A_+;

(4)　**压缩**, 若 $\|a\| \leqslant 1$;

(5)　**幂等元**, 若 $a^2 = a$;

(6)　**投影**, 若 a 既是自伴的又是幂等的, 其全体记作 $\mathcal{P}(A)$.

再设 $a \in A$ 是单位 C^* 代数, 称 $a \in A$ 是

(7)　**可逆元**, 若存在 $b \in A$ 使得 $ab = ba = 1$, 其全体记作 $\mathrm{GL}(A)$;

(8)　**酉元**, 若 $aa^* = a^*a = 1$, 其全体记作 $\mathcal{U}(A)$;

(9)　**等距**, 若 $a^*a = 1$.

命题 1.1.4　设 A 是 Banach*–代数, 则

(1)　A_{sa} 是 A 的一个实子空间, 且任意 $x \in A$ 都可以分解成两个自伴元的线性组合;

(2)　若 A 还是单位的, $x \in A_{\mathrm{sa}}$. 则 x 可逆当且仅当 x^{-1} 也可逆, 并且此时 $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. 由此可得 $\lambda \in \sigma(x)$ 当且仅当 $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$;

(3)　若 A 还是 C^* 代数, 则 $\mathcal{U}(A)$ 是 $\mathrm{GL}(A)$ 的一个子群;

证明　(1) A_{sa} 是 A 的一个子空间是容易验证的, 要证明 A_{sa} 是一个实子空间, 只需注意到对任意 $x \in A$, 记

$$\operatorname{Re} x = \frac{x + x^*}{2}, \qquad \operatorname{Im} x = \frac{x - x^*}{2\mathrm{i}},$$

则 $x = \operatorname{Re} x + \mathrm{i}\operatorname{Im} x$ 成立 (此时 $\operatorname{Re} x$ 称作是 x 的实部而 $\operatorname{Im} x$ 称作是 x 的虚部), 而 $\operatorname{Re} x$ 和 $\operatorname{Im} x$ 都是自伴元.

(2) 注意到 1 总是自伴的, 于是由

$$(xx^{-1})^* = 1^* = 1 = (x^{-1})^* x^*$$

可知. 将上述过程中的 x 全部替换为 $\lambda 1 - x$ 可得后一断言.

(3) 由酉元的定义显然. □

由于 C^* 代数都是 Banach 代数, 因此同样可以对 C^* 代数中的元素定义谱. 在 C^* 代数中正规元, 酉元和自伴元具有以下的谱性质:

命题 1.1.5　设 A 是一个单位 C^* 代数, $x \in A$. 则

(1) 若 x 是正规元, 则 $r(x) = \|x\|$;

(2) 若 x 是酉元, 则 $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$;

(3) 若 x 是自伴元, 则 $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

证明 (1) 由

$$\|x\|^4 = \|x^*x\|^2 = \left\|(x^*x)^2\right\| = \left\|(x^*)^2x^2\right\|$$

和归纳法可知对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 都有

$$\|x\|^{2^n} = \|(x^*)^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}\| \leqslant \|(x^*)^{2^{n-1}}\|\|x^{2^{n-1}}\| = \|x^{2^{n-1}}\|^2,$$

于是由谱半径定理可知

$$\|x\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x^{2^{n-1}}\|^{2^{-(n-1)}} = r(x).$$

再结合 $r(x) \leqslant \|x\|$ 即证.

(2) 由 $x \in \mathcal{U}(A)$ 可知

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|1\| = 1.$$

于是 $\|x\| = 1$. 而酉元都是正规元, $r(x) = 1$, 从而 $\sigma(x) \subset \bar{\mathbb{B}}$. 再由

$$\lambda^{-1} - x^{-1} = \lambda^{-1}(x-\lambda)x^{-1}$$

和 $x^{-1} = x^*$ 可知 $\overline{\sigma(x)} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}$, 从而 $|\lambda| = 1$. 这即 $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$.

(3) 设 $x \in A_{\mathrm{sa}}$, 则对任何 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 成立 $(-\mathrm{i}x)^n = ((\mathrm{i}x)^n)^*$. 由 $x \mapsto x^*$ 连续可知

$$(\exp(\mathrm{i}x))^{-1} = \exp(-\mathrm{i}x) = (\exp(\mathrm{i}x))^*,$$

因此 $\exp(\mathrm{i}x) \in \mathcal{U}(A)$. 由 (2) 可知 $\sigma(\exp(\mathrm{i}x)) \subset \mathbb{T}$. 那么对 $\lambda \in \sigma(x)$, 由

$$\exp(\mathrm{i}\lambda) - \exp(\mathrm{i}x) = (\lambda - x)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}),$$

于是 $\exp(\mathrm{i}\lambda) - \exp(\mathrm{i}x)$ 不可逆. 从而 $\exp(\mathrm{i}\lambda) \in \sigma(\exp(\mathrm{i}x))$, 这说明 $|\exp(\mathrm{i}\lambda)| = 1$, 于是只能 $\lambda \in \mathbb{R}$. □

例 1.1.6 我们已经见过一些 C^* 代数的具体例子.

(1) 所有 $\mathcal{B}(H)$ 的自伴闭子代数依定义都是 C^* 代数. 特别地, 紧算子 $\mathcal{K}(H)$, 有界算子 $\mathcal{B}(H)$ 都是 C^* 代数.

(2) 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, 定义

$$C_0(X) := \left\{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ 连续}, f \text{ 在无穷远点消失}\right\},$$

其中 "在无穷远点消失 (vanish at infinity)" 指的对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧子集 $K \subset X$ 使得当 $x \in X \setminus K$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$. 形象地说, f 的 "不平凡" 的部分都落在某一个紧子集中.

若 (X, μ) 还是测度空间, 可以将 $C_0(X)$ 中的函数看作是 $L^2(X, \mu)$ 上的乘法算子, 对 $f \in C_0(X)$ 可以定义 $M_f : g \mapsto fg$.

下面我们要开始通过一些 C^* 代数构造新的 C^* 代数, 最简单的结构是直和与直积.

定义 1.1.7 (直和, 直积) 设 $(A_i)_{i\in I}$ 是一族 C^* 代数.

(1) 记

$$\bigoplus_{i\in I} A_i := \{(a_i)_{i\in I} : a_i \in A\, \forall \varepsilon > 0\, \exists F \subset \operatorname{fin} I\, \forall i \in I \setminus F\, (\|a_i\| < \varepsilon)\}.$$

在 $\bigoplus_{i\in I} A_i$ 上赋予逐分量的加法, 纯量乘法和对合, 并赋予 $\|(a_i)_{i\in I}\| = \sup_{i\in I} \|a_i\|$, 由此得到一个 C^* 代数, 称作是 $(A_i)_{i\in I}$ 的**直和**.

(2) 记

$$\prod_{i\in I} A_i := \left\{(a_i)_{i\in I} : a_i \in A_i, \sup_{i\in I} \|a_i\| < +\infty\right\},$$

在 $\prod_{i\in I} A_i$ 上赋予逐分量的加法, 纯量乘法和对合, 并赋予 $\|(a_i)_{i\in I}\| = \sup_{i\in I} \|a_i\|$, 由此得到一个 C^* 代数, 称作是 $(A_i)_{i\in I}$ 的**直积**.

有定义可知当 I 是有限集时, 直和与直积是一码事. 但 I 是无限集时直积要比直和大一些. 它们的关系类似于 c_0 和 ℓ^∞.

例 1.1.8　对局部紧 Hausdorff 空间 X, Y, 考虑 $C_0(X) \oplus C_0(Y)$, 注意到

$$C_0(X) \oplus C_0(Y) \to C_0(X \sqcup Y), \qquad (f(x), g(y)) \mapsto f(x) + g(y)$$

是一个 C^* 代数同构, 于是 $C_0(X) \oplus C_0(Y) \cong C_0(X \sqcup Y)$.

1.2　交换 C^* 代数, 连续函数演算

我们考虑 C^* 代数上的可乘线性泛函:

命题 1.2.1　设 φ 是 A 上的可乘线性泛函, 则

(1) 对 $x \in A_{\text{sa}}$ 成立 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$;

(2) $\varphi(x)^* = \overline{\varphi(x)}$, $\varphi(x^*x) \geqslant 0$.

证明　(1) 对 $t \in \mathbb{R}$, 注意到 $\exp(\mathrm{i}tx)$ 是全纯的, 于是 Riesz 函数演算保证了 $u_t = \exp(\mathrm{i}tx)$ 可以定义, 并且此时 $u_t^* = u_t$. 由此,

$$\varphi(u_t) = \varphi\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} \varphi(x)^n = \exp(\mathrm{i}t\varphi(x)),$$

那么注意到 $|\varphi(u_t)| \leqslant 1$, $|\varphi(u_t^*)| \leqslant 1$ 和

$$1 = \varphi(u_t u_t^*) = \varphi(u_t)\varphi(u_t^*) = 1$$

可以得到 $|\varphi(u_t)| = |\exp(\mathrm{i}t\varphi(x))| = 1$, 这即 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.

(2) 将 x 分解为 $x = \operatorname{Re} x + \mathrm{i} \operatorname{Im} x$ 得到

$$\begin{aligned}\varphi(x^*) &= \varphi(\operatorname{Re} x - \mathrm{i}\operatorname{Im} x) = \varphi(\operatorname{Re} x) - \mathrm{i}\varphi(\operatorname{Im} x)\\ &= \overline{\varphi(\operatorname{Re} x) + \mathrm{i}\varphi(\operatorname{Im} x)} = \overline{\varphi(\operatorname{Re} x + \mathrm{i}\operatorname{Im} x)} = \overline{\varphi(x)}\end{aligned}$$

而

$$\varphi(x^*x) = \varphi(x^*)\varphi(x) = |\varphi(x)|^2 \geqslant 0$$

就自然成立了. □

不同于 Banach 代数的情形, C^* 代数中元素的谱并不随着代数的缩小而扩大.

命题 1.2.2 设 A 是 C^* 代数, $B \subset A$ 是 A 的 C^* 子代数, 且 $1 \in B$. 那么对 $x \in B$ 成立 $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

证明 对 Banach 代数总有 $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$, 只需证明 $x \in \mathrm{GL}(A)$ 可以导出 $x \in \mathrm{GL}(B)$ 即可. 由 $\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x)$ 可知

$$\sigma_B(x^*x) = \partial\sigma_B(x^*x) \subset \sigma_A(x^*x),$$

那么 $0 \notin \sigma_A(x^*x)$ 导出 $0 \notin \sigma_B(x^*x)$. 这说明 $x^*x \in \mathrm{GL}(B)$, 从而 $(x^*x)^{-1}x \in B$. 为此我们只需要考虑

$$(x^*x)^{-1}x^*x = x^{-1}x$$

就可以得到 $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^* \in B$, 也即 $x \in \mathrm{GL}(B)$. □

这一命题的成立说明计算 C^* 代数中元素的谱时完全可以把它放到由 1, x 生成的子代数 $C^*(x)$ 上进行计算. 而 $C^*(x)$ 是一个交换的 C^* 代数. 首先推广 Banach 代数的 Gelfand 定理和 Riesz 函数演算.

定理 1.2.3 (Gelfand–Naimark) 设 A 是交换 C^* 代数, $\mathfrak{M}$ 是 A 的极大理想空间, 则 A 上的 Gelfand 变换 $\Lambda : A \to C(\mathfrak{M})$ 是一个等距的*-同构, 即

$$\forall x \in A\,(\|\hat{x}\|_\infty = \|x\| \wedge \hat{x^*} = \bar{\hat{x}}).$$

证明 由 $\forall \varphi \in \mathfrak{M}$ 成立

$$\hat{x^*}(\varphi) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\hat{x}(\varphi)}$$

可知 $\hat{x^*} = \bar{\hat{x}}$, 因此 Λ 是一个*-同态.

要证明它是等距, 由 Gelfand 定理只需验证 $\|x^2\| = \|x\|^2$ 即可. 由 C^* 条件可知 $\forall x \in A$ 有 $\|x\|^2 = \|x^*x\|$, 因此

$$\|x\|^4 = \|x^*x\|^2 = \|(x^*x)^*(x^*x)\| = \left\|(x^*)^2x^2\right\| = \left\|x^2\right\|^2,$$

这即 $\|x\|^2 = \|x^2\|$.

再证 Λ 是同构, 因 $\Lambda(A)$ 是 $C(\mathfrak{M})$ 的自伴子代数, 由 $1 \in A$ 可知 $\hat{1} = 1 \in \Lambda(A)$, 且对 $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}$, 由

$$\exists x \in A\,(\hat{x}(\varphi_1) = \varphi_1(x) \neq \varphi_2 = \hat{x}(\varphi_2))$$

可知 $\Lambda(A)$ 分离 $\mathfrak{M}$. 于是由 Stone–Weierstrass 定理可知 $\Lambda(A) = C(\mathfrak{M})$, 即 Λ 是满的. 从而等距和满射推出 Λ 是同构. □

Gelfand–Naimark 定理说明了交换 C^* 代数在同构意义下可以看作是局部紧 Hausdorff 空间上的在无穷远消失的连续函数代数, 而后者是我们更加熟悉的结构. 记以交换 C^* 代数全体为对象, C^* 代数同态为态射的范畴为 C*–CommAlg, 以局部紧 Hausdorff 空间全体为对象, 连续映射为态射的范畴为 LCHaus, 那么 Gelfand 变换对应的函子实际上给出了范畴 C*–CommAlg 到 LCHaus 的一个范畴等价.

定理 1.2.4 (连续函数演算) 对单位 C^* 代数 A 和 A 中的正规元 x, 存在等距的代数同态

$$\Phi : C(\sigma(x)) \to A, \qquad f \mapsto f(x),$$

称作是 A 上的连续函数演算. 特别地,

$$\Phi_0 : C(\sigma(x)) \to \langle 1, x\rangle, \qquad f \mapsto f(x)$$

是一个等距的代数同构.

证明　因 x 是正规元, 于是 $1, x$ 生成的 C^* 代数 B 是交换的, 其闭包 $\mathbf{clos}(B)$ 也是交换的. 于是 Gelfand–Naimark 定理说明 Gelfand 变换是一个等距同构.

剩余的证明与全纯函数演算几乎完全一致. □

于是对单位 C^* 代数中的正规元 x , 我们可以对连续函数 f 定义 $f(x)$. 连续函数演算是 Riesz 函数演算的延拓, 这意味着对 $f \in \mathrm{Hol}(x)$, $\Phi(f) = f(x)$ 和从 Riesz 函数演算得到的 $f(x)$ 是一致的. 这因对任意的 $\varphi \in \mathfrak{M}$ 和任意的 $z \in \rho(x)$, 注意到 $\varphi(1/(z-x)) = 1/(z-\varphi(x))$ 和 Cauchy 积分公式导出

$$\varphi\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\varphi(x)}\,\mathrm{d}z = f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)).$$

命题 1.2.5　对 $f \in C(\sigma(x)), g \in C(f(\sigma(x)))$ 成立:

(1)　$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$;

(2)　$g(f(x)) = (g \circ f)(x)$;

(3)　$f(x)^* = \bar{f}(x)$.

其中前两条无非是 Riesz 函数演算相应结论的推广, 而第三条由 $\mathbb{C}$ 上的复共轭即为自然的对合运算得到. 由于幂函数总是对正数有定义, 我们理所当然地考虑正元的连续函数演算.

命题 1.2.6 (正平方根)　设 A 是单位的 C^* 代数, $x \in A_+$, 则以下叙述等价.

(1)　$xx^* = x^*x$ 且 $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$;

(2)　$\exists y \in A_{\mathrm{sa}}\,(x = y^2)$;

(3)　$x \in A_{\mathrm{sa}}$ 且 $\forall t\,(t \geqslant \|x\| \Longrightarrow \|t-x\| \leqslant t)$;

(4)　$x \in A_{\mathrm{sa}}$ 且 $\exists t\,(t \geqslant \|x\| \Longrightarrow \|t-x\| \leqslant t)$.

在 (2) 中若 $y \in A_+$, 称 y 是 x 的**正平方根**.

证明　采用轮转证法.

(1) ⇒ (2): 当 x 是正规元时, 作连续函数演算 $f(z) = \sqrt{z}$ 得到的 $y = f(x)$ 即为所求, 此时

$$y^* = \bar{f}(x) = f(x) = y,$$

从而 $y^2 = f(x)^2 = x$.

(2) ⇒ (3): 设 $t \geqslant \|x\|, x = y^2$, 那么 $y \in A_{\mathrm{sa}}$ 导出 $x \in A_{\mathrm{sa}}$, 进一步导出 $t - x \in A_{\mathrm{sa}}$. 那么

$$\|t-x\| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |t-\lambda|$$

由 x 是正元可知 $\sigma(x) \subset [0, \|x\|]$, 这即 $|\lambda| \leqslant \|x\|$, 从而 $|t-\lambda| = t-\lambda \leqslant t$.

(3) ⇒ (4): 显然.

(4) ⇒ (1): 对 $x \in A_{\mathrm{sa}}$, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$, 设 $t \geqslant \|x\|$ 是的 $\|t-x\| \leqslant t$, 那么对任意 $\lambda \in \sigma(x)$ 都有 $t \geqslant \|x\| \geqslant \lambda$, 于是

$$t \geqslant \|t-x\| \geqslant t-\lambda \Longrightarrow \lambda \geqslant 0 \Longrightarrow \sigma(x) \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0},$$

这就证明了结论. □

那么 C^* 代数上的连续函数演算说明下面的元素都可以被良好地定义:

定义 1.2.7　下面的算子可以良好定义:

(1)　**幂**, 对任意 $x \in A_+, \alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, 可以定义 x^α, 并且仍然满足 $x^\alpha x^\beta = x^\beta x^\alpha = x^{\alpha+\beta}$;

(2) **绝对值**, 对 $x \in A_{\text{sa}}$ 可定义 $|x| = (x^2)^{1/2}$, 并且 $|x| \in A_+$. 当 x 是正规元是仍然可以定义 $|x| = (x^*x)^{1/2}$, 仍有 $|x| \in A_+$;

(3) 对 $x \in A_{\text{sa}}$, 可定义算子的**正部** $x_+ = (|x|+x)/2$ 和**负部** $x_- = (|x|-x)/2$, 有 $x_+, x_- \in A_+$, 并且它们满足

$$|x| = x_+ + x_-, \qquad x = x_+ - x_-, \qquad x_+x_- = x_-x_+ = 0.$$

命题 1.2.8　若 $x_1, x_2 \in A_+$ 满足 $x = x_1 - x_2$ 且 $x_1x_2 = x_2x_1 = 0$, 则 $x_1 = x_+, x_2 = x_-$.

证明　$x_1 + x_2 \in A_+$ 是显然的, 并且注意到

$$(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1-x_2)^2 = x^2,$$

于是 $|x| = x_1 + x_2, x = x_1 - x_2$. 这恰是正部与负部的定义. □

命题 1.2.9 (Russo–Dye)　设 A 是单位 C^* 代数, 则 A 的单位球 $\mathbb{B}_A = \overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A))$.

证明　这一证明来源于 **[Ter]**, 它甚至给出了一个更强的结论, 即 $\mathbb{B}_A - \mathcal{U}(A) \subset \mathcal{U}(A) + \mathcal{U}(A)$.

我们只需证明对任意 $u \in \mathcal{U}(A)$, 都有 $y = (x+u)/2 \in \overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A))$, 这即证明 $\mathcal{U}(A) \subset 2\overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A)) - x$. 考虑到前者是闭的, 并且是凸的, 于是归结于证明

$$\overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A)) \subset 2\overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A)) - x \Longrightarrow \frac{x + \overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A))}{2} \subset \overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A)).$$

对 $x_0 \in \mathcal{U}(A)$, 归纳地定义 $x_{n+1} = (x + x_n)/2$, 那么 $x_n \in \overline{\text{co}}(\mathcal{U}(A))$ 且 $x_n \to x$.

注意到 $\|xu^{-1}\| = \|x\| < 1$, 于是对 $y = ((xu^{-1}+1)/2)u$ 有 $\|y\| < 1$, 并且 y 是可逆的, 于是有 $y = v\,|y|$, 这里

$$(y^*y)^{1/2} = |y| = (w + w^*)/2,$$

其中 $w = |y| + \mathrm{i}(1-|y|^2)^{1/2}$ 仍是酉元, 这就完成了证明. □

定理 1.2.10　A_+ 是一个闭锥, 且 $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.

证明　(1) 先证明 A_+ 是闭的. 取 $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset A_+$ 范数收敛到 $x \in A$, 那么 $\sup_{n\geqslant 1}\|x_n\| \geqslant \|x\|$. 取 $t \geqslant \sup_{n\geqslant 1}\|x_n\|$ 得到

$$\forall n \geqslant 1\,(t \geqslant \|t - x_n\|) \Longrightarrow t \geqslant \|t - x\|,$$

由引理可知 $x \in A_+$, 于是 A_+ 是闭的.

(2) 再证明 A_+ 是一个锥. 其中 $\lambda \geqslant 0$ 时 $\lambda x \in A_+$ 是显然的, 只需证明 $x + y \in A_+$ 即可. 由引理可知

$$\|x\| \geqslant \|\|x\|1 - x\|, \qquad \|y\| \geqslant \|\|y\|1 - y\|,$$

那么

$$\|x\| + \|y\| \geqslant \|(\|x\| + \|y\|) - (x+y)\|,$$

这即 $x + y \in A_+$. □

命题 1.2.11　$x \in A_+$ 当且仅当 $\exists y \in A\,(x = y^*y)$.

证明　*必要性*. 取 $y = \sqrt{x}$ 即可.

充分性. 对 $y \in A$ 使得 $x = y^*y$, 有 $x \in A_{\text{sa}}$. 考虑其正负分解 $x = x_+ - x_-$, 只需证明 $x_- = 0$ 即可. 为此取 $u = yx_-$, 考虑 u^*u:

$$u^*u = x_-y^*yx_- = x_-(x_+ - x_-)x_- = x_-^3,$$

对 $u = a + \mathrm{i}b$, 这里 $a, b \in A_{\text{sa}}$, 有

$$uu^* = 2(a^2 + b^2) - u^*u = 2(a^2 + b^2) + x_-^3 \in A_+,$$

从而 $\sigma(uu^*) \subset \mathbb{R}_{\leqslant 0}, \sigma(u^*u) \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, 而由 $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$ 可知

$$\sigma(u^*u) = \sigma(uu^*) = \{0\},$$

考虑到 $u^*u = -x_-^3$ 本身是 $-A_+$ 中的元素, 于是 $x_- = 0$. □

正锥自然地在 A_{sa} 上定义了一个偏序关系: $x \geqslant y \iff x - y \in A_+$, 这自然地导向 A_{sa} 与 $\mathbb{R}$ 在某种程度上的相似性.

命题 1.2.12　设 A 是单位的 C^* 代数, 则

(1)　对 $x \leqslant y$, 有 $\forall a \in A\,(a^*xa \leqslant a^*ya)$;

(2)　对 $x, y \in \mathcal{G}(A)$, 若 $0 \leqslant x \leqslant y$, 则 $y^{-1} \leqslant x^{-1}$.

证明　(1) $y - x \geqslant 0$ 说明存在 $h \in A_{\text{sa}}$ 使得 $y - x = h^2$, 那么

$$a^*(y - x)a = a^*h^2a = (ha)^*(ha) \geqslant 0$$

得证.

(2) $x \leqslant y$ 导出 $y^{-1/2}xy^{-1/2} \leqslant y^{-1/2}yy^{-1/2} = 1$, 而

$$\left\|x^{1/2}y^{-1}x^{1/2}\right\| = \left\|x^{1/2}y^{-1/2}\right\|^2 = \left\|y^{-1/2}xy^{-1/2}\right\| \leqslant 1,$$

于是 $x^{1/2}y^{-1}x^{1/2} \leqslant 1$, 这即 $y^{-1} \leqslant x^{-1}$. □

但其他类比实数的性质就未必那么容易证明了. 下面我们证明对正算子 $x \leqslant y$ 和实数 $0 < \alpha < 1$, 有 $x^\alpha \leqslant y^\alpha$. (注意当 $\alpha > 1$ 时这一性质成立当且仅当 A 是交换的.)

定理 1.2.13　设 A 是一个单位 C^* 代数, $x, y \in A$ 满足 $0 \leqslant x \leqslant y$, 实数 α 满足 $0 < \alpha < 1$. 则 $x^\alpha \leqslant y^\alpha$.

证明　我们定义这样一个函数

$$f_\lambda : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \qquad t \mapsto \frac{t}{1 + \lambda t},$$

那么注意到 $f_\lambda(0) = 0$, 于是 $f_\lambda(x) \in A$. 再注意到

$$f_\lambda(t) = \frac{t}{1 + \lambda t} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{1 + \lambda t}\right) < \min\left\{\frac{1}{\lambda}, t\right\},$$

当 $\lambda \to 0$ 时, 由上式可知 $\lim_{\lambda \to 0} f_\lambda(t) = t$ 在 $[0, \infty)$ 的任何紧子集上一致收敛. 它当 $\lambda > 0$ 时是关于 t 递增的, 于是 $x \in A_+$ 时 $f_\lambda(x) \in A_+$, 并且 $x \leqslant y$ 时 $f_\lambda(x) \leqslant f_\lambda(y)$.

下面考虑积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t}{1 + \lambda t}\lambda^\alpha \,\mathrm{d}\lambda &= \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\alpha}}{1 + \lambda t}\,\mathrm{d}(\lambda t) \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{-\alpha}}{1 + u}t^\alpha \,\mathrm{d}u = t^\alpha \int_0^\infty \frac{u^{-\alpha}}{1 + u}\,\mathrm{d}u = t^\alpha \cdot \pi \csc(\alpha\pi).\end{aligned}$$

于是

$$t^\alpha = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty \frac{t}{1 + \lambda t}\lambda^\alpha \,\mathrm{d}\lambda$$

在任何 $[0,\infty)$ 的紧子集上一致收敛. 这即对任何 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 δ 和 $[0,\delta]$ 的分划 $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m=\delta$, 使得

$$\left|t^{\alpha}-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{i=0}^{m}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\frac{t}{1+\lambda_i t}\lambda_i^{-\alpha}\right|<\varepsilon,$$

那么简单的放缩得到

$$x^{\alpha}\leqslant y^{\alpha}+2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 即可. □

再重申一次, 这一命题在 $\alpha>1$ 时并不成立. 一个简单的反例在 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ 上就可以找到. 令

$$x=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\qquad y=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix},$$

那么 $0\leqslant x\leqslant y$, 但 $x^2\leqslant y^2$ 并不成立.

1.3 单位化与单点紧化

定义 1.3.1 (单位化) 称嵌入 $\iota:A\to A_1$ 是一个**单位化**, 若 A_1 是单位的, 并且 A 是 A_1 的一个本质理想 (即 $A^{\perp}=\{0\}$).

需要注意的是, C^* 代数中因为范数需要满足 C^* 条件, 因此不能像 Banach 代数那样简单粗暴地在原代数上加上一维. 这样造成的问题我们在证明完下面的单位化定理后再详细说明.

定理 1.3.2 (C^* 代数的单位化) 设 A 是一个非单位的 C^* 代数, 存在 A 的 "最小" 的单位化 $\tilde{A}$, 满足 $\tilde{A}/A\simeq\mathbb{C}$.

证明 证明分三步进行.

第 1 步. 说明 $\tilde{A}$ 是一个 C^* 代数.

称下面的映射是 A 的左正则表示:

$$L:A\to\mathcal{B}(A),\qquad a\mapsto[x\mapsto ax],$$

这里 L 显然是一个 Banach*-代数同态, 并且由

$$\|L(a)\|\leqslant\|a\|,\qquad \|L(a)\|\geqslant\left\|L(a)\frac{a^*}{\|a^*\|}\right\|=\|a\|$$

可知 L 还是一个等距同态. 下面定义

$$\tilde{A}=L(A)+\mathbb{C}\mathrm{id}\subset\mathcal{B}(A),$$

这里 id 是 $\mathcal{B}(A)$ 中的单位, $\tilde{A}$ 继承 $\mathcal{B}(A)$ 中的范数成为一个 Banach 代数. 注意到 $\tilde{A}$ 作为线性空间就是 $L(A)\oplus\mathbb{C}$, 此时

$$\varphi:\tilde{A}/L(A)\to\mathbb{C},\qquad L(a)\oplus\lambda\mathrm{id}\mapsto\lambda$$

是一个同构, 于是 $\tilde{A}/L(A)\simeq\mathbb{C}$.

定义 $\tilde{A}$ 上的对合

$$(L(a)+\lambda\mathrm{id})^*:=L(a^*)+\bar{\lambda}\mathrm{id},$$

对 $x = L(a) + \lambda\mathrm{id} \in \tilde{A}$, $\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\|$ 是自然地, 而另一侧需要注意到对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 ξ 使得

$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \|L(a) + \lambda\mathrm{id}\|^2 &\leqslant \|(L(a) + \lambda\mathrm{id})\xi\|^2 + \varepsilon \\ &= \|(a\xi + \lambda\xi)^*(a\xi + \lambda\xi)\| + \varepsilon \\ &\leqslant \|\xi^*\| \, \|(L(a) + \lambda\mathrm{id})^*(L(a) + \lambda\mathrm{id})\xi\| + \varepsilon \\ &\leqslant \|x^*x\| + \varepsilon,\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\|x\|^2 = \|x^*x\|$, 这说明 $\tilde{A}$ 是一个 C^* 代数.

第 2 步. $\tilde{A}$ 是 A 的单位化.

对 $b \in A$ 使得

$$(L(a) + \lambda\mathrm{id})L(b) = 0,$$

取 A 中的逼近单位元 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$(这里提前用到了逼近单位元, 见下面的讨论.), 对 $x \in A$, 由

$$\lim_{i\uparrow\alpha} \|x - e_i x\| = 0 \Longrightarrow \lim_{i\uparrow\alpha} \|abx - e_i\lambda bx\| = 0$$

可知 λe_i 依范数收敛到 $L(a)$. 若 $\lambda \neq 0$, 这就说明 $L(\lambda^{-1}a) = \mathrm{id}$, 但 A 不是单位的, 矛盾. 于是只能 $\lambda = 0$, 这就说明了

$$b \in A\,(L(a)L(b) = 0 \Longrightarrow a = 0) \Longrightarrow A^{\perp} = \{0\},$$

即 A 是 $\tilde{A}$ 的本质理想. 于是 $\tilde{A}$ 的确是 A 的单位化.

第 3 步. $\tilde{A}$ 是 A 的 “最小” 的单位化.

任取 A 的单位化 A_1, 只需证明 $\tilde{A} \subset A_1$ 即可. 注意到 A_1 的单位元 1 嵌入 $\mathcal{B}(A)$ 中就是 id, 于是

$$\tilde{A} = L(A) + \mathbb{C}\mathrm{id} \subset L(A_1) \subset \mathcal{B}(A),$$

这就证明了结论. □

这里之所以不能直接作 $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ 是因为此时直和自然导出的范数 $\|(x,\lambda)\|_0 = \|x\| + |\lambda|$ 只能使得 $(\tilde{A}, \|\cdot\|_0)$ 是一个 Banach*–代数, 而非一个 C^* 代数. 这里乘法定义为

$$(x,\lambda)(y,\mu) := (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu).$$

但 $\|\cdot\|_0$ 与

$$\|(x,\lambda)\| := \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|(x + \lambda\mathrm{id})u\|$$

是等价的, 而这一范数就是之前证明中定义的范数. 此时 $A \simeq A \oplus \{0\}$ 和 $\mathbb{C} \simeq \{0\} \oplus \mathbb{C}$ 都是 $\tilde{A}$ 的闭子空间, 并且

$$\varphi : \tilde{A} \to \mathbb{C}, \qquad (x,\lambda) \mapsto \lambda$$

是连续的, 这因 $\ker\varphi = A$ 是闭的, 于是 $\|\varphi\| < \infty$. 那么

$$\begin{aligned}\|(x,\lambda)\|_0 &:= \|x\| + |\lambda| \\ &\leqslant \|(x,\lambda)\| + \|(0,-\lambda)\| + \|\varphi\| \, \|(x,\lambda)\| \\ &\leqslant (1 + 2\|\varphi\|) \, \|(x,\lambda)\|\end{aligned}$$

成立.

如果我们记 $A^+ = A \times \mathbb{C}$, 那么当 A 不是单位代数时, $A^+ \simeq \tilde{A}$, 但当 A 是单位代数时 $A^+ \simeq A \oplus \mathbb{C}$. 这因此时

$$\varphi : A^+ \to \tilde{A}, \qquad (a,\lambda) \mapsto L(a) + \lambda\mathrm{id}$$

是一个*–同构, 并且 $A \simeq \varphi^{-1}(L(A))$.

命题 1.3.3 $A \lhd A^+$, $A^+/A \simeq \mathbb{C}$. 并且对任何同态 $\Phi : A \to B$, 它诱导

$$\Phi^+ : A^+ \to B^+, \qquad L(a) + \lambda \mathrm{id} =: a + \lambda \mapsto \Phi(a) + \lambda,$$

则 Φ^+ 还是同态, 并且它是单/满同态当且仅当 Φ 是单/满同态.

例 1.3.4 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, X^+ 是它的单点紧化. 则 $C_0(X)^+ \cong C(X^+)$. 这是因为 $\infty \in X^+$ 的邻域均形如 $X^+ \setminus K$, 其中 $K \subset X$ 是紧集. 于是任何 $f \in C_0(X)$ 可以通过补充定义 $f(\infty) = 0$ 延拓为 $\tilde{f} \in C(X^+)$. 而 X^+ 是紧空间, 于是 $C(X^+)$ 是单位 C^* 代数, 记 $1 \in C(X^+)$ 是常值函数, 则

$$C_0(X)^+ = C_0(X) \oplus \mathbb{C} \to C(X^+), \qquad (f, \lambda) \mapsto f + \lambda 1$$

给出 C^* 代数之间的同构 (验证同构是平凡的).

若记 C*–CommAlg$_1$ 是单位 C^* 代数构成的范畴 (这是C*–CommAlg 的全子范畴), 那么有以下的交换图.

$$\begin{array}{ccc} \text{C*-CommAlg} & \xrightarrow{\mathsf{Spec}} & \text{LCHaus} \\ \big\downarrow{\scriptstyle u} & & \big\downarrow{\scriptstyle c} \\ \text{C*-CommAlg}_1 & \xrightarrow{\mathsf{Spec}} & \text{CHaus} \end{array}$$

其中 Spec 是 Gelfand 变换对应的反变函子, u 表示单位化函子而 c 是单点紧化函子. 因此有交换 C^* 代数与拓扑空间的一一对应.

定义 1.3.5 (逼近单位元) 称网 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是 A 的**逼近单位元**, 若

(1) $\forall i \in \alpha \, (e_i \in A_+)$;

(2) $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 递增, 即 $i \leqslant j$ 导出 $e_i \leqslant e_j$;

(3) $\forall x \in A$ 有 $\lim_{i\uparrow\alpha} \|x - xe_i\| = 0$.

这里最后一条的条件也可以换成 $\lim_{i\uparrow\alpha} \|x - e_i x\| = 0$, 无非是取对合.

逼近单位元是一个可以近似当作单位元使用的网, 即使 C^* 代数是非单位的, 也可以找到逼近单位元. 在证明这一断言之前, 我们需要一个技术性的引理:

引理 1.3.6 对 $\varepsilon > 0$, 定义 $\alpha_\varepsilon(t) = t/(\varepsilon + t)$, 其中 $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. 那么

(1) 对任意 $x \in A_+$, 有 $\alpha_\varepsilon(x) \in A_+$ 且 $\|\alpha_\varepsilon(x)\| \leqslant 1$;

(2) 对任意 $x, y \in A_+$, $x \leqslant y$ 导出 $\alpha_\varepsilon(x) \leqslant \alpha_\varepsilon(y)$.

证明 (1) 注意到 $\alpha_\varepsilon(0) = 0$, 断言 $\alpha_\varepsilon(x) \in A$. 若不然, 存在 $\varphi \in \mathfrak{M}_{\tilde{A}}$ 使得 $\varphi|_A = 0$, 但 $\varphi(\alpha_\varepsilon(x)) \neq 0$. 不妨设 $\varphi(0, 1) = 1$. 那么对 $(x, \lambda) \in \tilde{A}$, 有

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi(x, 0) + \lambda\varphi(0, 1) = \lambda,$$

即 $\varphi|_A = 0$ 在 $\tilde{A}$ 上的延拓是一个 $\tilde{A} \to \mathbb{C}$ 的同态. 但这与

$$\varphi(\alpha_\varepsilon(x)) = \alpha_\varepsilon(\varphi(x)) = 0$$

矛盾.

(2) 若 A 是单位的, 只需要注意到

$$\varphi_\varepsilon(x) = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + x}$$

关于 ε 是递增的, 那么 $x \in A_+$ 导出 $\alpha_\varepsilon(x) \in A_+$. 这就意味着 $y - x \geqslant 0$ 导出 $\alpha_\varepsilon(y - x) \geqslant 0$. $\square$

定理 1.3.7 任何 C^* 代数都存在逼近单位元.

证明 若 A 是单位的, 容易得到 $(1)_{i\uparrow\alpha}$ 就是一个逼近单位元, 因此不妨假设 A 不是单位的, $\tilde{A}$ 是 A 的最小单位化, 1 是 $\tilde{A}$ 中的单位元. 提及可逆性时均指在 $\tilde{A}$ 中的可逆性. 考虑

$$\mathbb{B}_+ := \{x \in A_+ : \|x\| \leqslant 1\},$$

那么 $(\mathbb{B}_+, \leqslant)$ 是一个偏序集. 下证 $\mathbb{B}_+$ 是一个定向集: 任取 $u, v \in \mathbb{B}_+$, 取

$$u_0 = (1-u)^{-1}u, \qquad v_0 = (1-v)^{-1}v,$$

因 $A \triangleleft \tilde{A}$ 且 $u_0, v_0 \in A_+$, 记

$$w = (1 + u_0 + v_0)^{-1}(u_0 + v_0) = \alpha_1(u_0 + v_0).$$

后者是 A_+ 中的元素, 且 $\|w\| \leqslant 1$, 这就说明 $w \in \mathbb{B}_+$. 并且由于 α_1 是保持偏序关系, 于是

$$w = \alpha_1(u_0 + v_0) \geqslant \alpha_1(u_0) = u,$$

同理 $w \geqslant v$, 故 $\mathbb{B}_+$ 是一个定向集.

对 $x \in \mathbb{B}_+$, 总可以定义类似的 x_0 使得 $x = \alpha_1(x_0)$, 则任取 $x \in A$ 使得

$$\lim_{e\uparrow\mathbb{B}_+} \|x - xe\| = 0,$$

记 $y = x^*x$ 后有

$$\begin{aligned}\left\|x(1-\alpha_\varepsilon(y))^{1/2}\right\|^2 &= \left\|(1-\alpha_\varepsilon(y))^{1/2}x^*x(1-\alpha_\varepsilon(y))^{1/2}\right\| \\ &= \|(1-\alpha_\varepsilon(y))\| \\ &= \left\|\frac{\varepsilon}{\varepsilon + y}y\right\| \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

于是

$$\|x(1-\alpha_\varepsilon(y))\| \leqslant \left\|x(1-\alpha_\varepsilon(y))^{1/2}\right\| \left\|(1-\alpha_\varepsilon(y))^{1/2}\right\| \leqslant \varepsilon^{1/2}.$$

这就说明

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|x(1-\alpha_\varepsilon(y))\| = 0,$$

进而

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|x(1-\alpha_\varepsilon(y))x^*\| = 0,$$

而每个 $e \in \mathbb{B}_+$ 都可以写成某个 $\alpha_\varepsilon(y)$ 的形式, 于是

$$\lim_{e\uparrow\mathbb{B}_+} \|x - ex\|^2 = \lim_{e\uparrow\mathbb{B}_+} \left\|x^*(1-e)^2x\right\| \leqslant \lim_{e\uparrow\mathbb{B}_+} \|x^*(1-e)x\| \to 0,$$

这就说明 $(e)_{e\uparrow\mathbb{B}_+}$ 是 A 中的逼近单位元. □

推论 1.3.8 C^* 代数的每个闭理想 I 都有逼近单位元.

证明 在上述证明中将 $\mathbb{B}_+$ 替换成 $\mathbb{B}_+ \cap I$ 即可. □

例 1.3.9 ($L_1(\mathbb{R})$ 上的逼近单位元) 考虑 $L_1(\mathbb{R})$, 之前讨论过它是一个无单位元的 Banach 代数, 将对合自然地看作函数值取共轭可知 $L_1(\mathbb{R})$ 也是一个无单位元的交换 C^* 代数. 对 $r > 0$, 我们构造一个函数 k_r 满足

(1) $k_r \geqslant 0$;

(2) $\operatorname{supp} k_r \subset (-r, r)$;

(3) $\int_{\mathbb{R}} k_r(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

那么当 $r \to 0$ 时考虑定向集 $(k_r)_{r>0}$, 我们来证明这是 $L_1(\mathbb{R})$ 的逼近单位元.

计算

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)k_r(y)\,\mathrm{d}y, \qquad f * k_r(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)k_r(y)\,\mathrm{d}y,$$

那么

$$\begin{aligned}\|f * k_r - f\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}x k_r(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{(-r,r)}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}x k_r(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因 $f \in L_1(\mathbb{R})$, 故

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists r_0 > 0\, (|h| < r_0 \Longrightarrow \|T_h f - f\|_1 < \varepsilon),$$

这里 $(T_n f)(x) = f(x-h)$ 是函数的平移. 那么对 $\varepsilon > 0$, 若 $r < r_0$, 就有

$$\begin{aligned}\|f * k_r - f\|_1 &\leqslant \int_{(-r,r)}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}x k_r(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_{(-r,r)} \|T_y f - f\|_1\, k_r(y)\,\mathrm{d}y \\ &< \varepsilon \int_{(-r,r)} k_r(y)\,\mathrm{d}y \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

于是 $\lim_{r\to 0} \|f * k_r - f\|_1 = 0$, 这就说明了 $(k_r)_{r>0}$ 是 $L_1(\mathbb{R})$ 的逼近单位元.

在 A 可分的情形, 可以把逼近单位元中的网替换成序列.

命题 1.3.10 可分的 C^* 代数具有由序列构成的逼近单位元.

证明 由 A 可分, 取它的一个稠密子集 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 和它的一个逼近单位元 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$. 在其中如下地取一列 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 满足

$$\forall k \leqslant n\, \left(\|x_k\|\,(1 - e_n) \leqslant \frac{1}{n}\right),$$

那么容易验证 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 A 的一个逼近单位元. □

1.4 理想与商映射

首先作出约定: 当我们谈论理想时, 总是认为在谈论范数闭的双边理想.

命题 1.4.1 C^* 代数之间的同态总是**压缩**的, 即对任何 $x \in A$, $\rho : A \to B$ 是一个 C^* 代数同态, 总有

$$\|\rho(x)\| \leqslant \|x\|$$

证明 我们不妨假设 A 是单位的, 否则同态 ρ 可以被延拓到单位化 C^* 代数之间的同态 ρ_1. 考虑 $\rho(1)$, 它是 $B_0 := \mathbf{clos}(\rho(A))$ 的单位元, 于是 ρ 诱导同态 $\rho_0 : A \to B_0$ 使得 ρ_0 是保持单位元的. 同态保证了

$$\sigma_{B_0}(\rho_0(x)) = \sigma_{B_0}(\rho(x)) \subset \sigma_A(x),$$

并且注意到对任意 $x \in A$, x^*x 总是正规元, 那么

$$\|\rho_0(x)\|^2 = \|\rho_0(x^*x)\| = r(\rho_0(x^*x)) \leqslant r(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$$

成立, 这也就是 $\|\rho(x)\| \leqslant \|x\|$. □

定理 1.4.2 设 $\rho : A \to B$ 是一个单同态, 则 ρ 是等距. 这意味着使得一个 Banach 空间成为 C^* 代数的范数是唯一的.

证明 先对 $h \in A_{\text{sa}}$ 证明 $\|\rho(h)\| = \|h\|$. 在命题 1.4.1 中已经证明了 $\sigma_B(\rho(h)) \subset \sigma_A(h)$, 断言 $\sigma_B(\rho(h)) = \sigma_A(h)$. 否则, 因 $\sigma_B(\rho(h))$ 是 $\sigma_A(h)$ 的闭子集, 存在 $f \neq 0$ 但 $f|_{\sigma_B(\rho(h))} = 0$.

由 $f \neq 0$ 和连续函数演算可知 $f(h) \neq 0$, 但

$$\rho(f(h)) = f(\rho(h)) = 0.$$

故由 ρ 是单的可知 $f(h) = 0$, 矛盾. 这即 $\sigma_B(\rho(h)) = \sigma_A(h)$. 而 h 与 $\rho(h)$ 皆自伴, 故

$$\|\rho(h)\| = r(\rho(h)) = r(h) = \|h\|\,.$$

再注意到对任何 $x \in A$, 都有 $h = x^*x \in A_{\text{sa}}$, 于是

$$\|\rho(x)\|^2 = \|\rho(x^*x)\| = \|x^*x\| = \left\|x^2\right\|,$$

这即 $\|\rho(x)\| = \|x\|$ 成立. 至于范数的唯一性, 若 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都使得 $(A, \|\cdot\|_i)$ 成为 C^* 代数, 那么考虑单同态

$$i : (A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_2), \qquad x \mapsto x$$

即可说明 $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. □

一个代数作为 Banach 代数可以赋以很多不同的范数, 但作为 C^* 代数的范数却是唯一的. 一个经典的例子是 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, 它作为 Banach 代数可以赋 Euclid 范数 (此时将 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 视作 $\mathbb{C}^{n^2}$.), 但作为 C^* 代数只能

$$\|A\| := \sup_{\|h\| \leqslant 1} \|Ah\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \|A\|_{\text{Euclid}}\,,$$

这里最后的不等号由 Cauchy–Schwarz 不等式得到.

我们之前对 C^* 代数作单位化时,

$$\|(x,\lambda)\|_0 := \|x\| + |\lambda|\,, \qquad \|(x,\lambda)\| = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \|x\xi + \lambda\xi\|$$

都使得 $A \oplus \mathbb{C}$ 成为 Banach 代数, 但只有后者使得其成为 C^* 代数.

引理 1.4.3 任何 C^* 代数的理想均自伴.

证明 设 $I \subset A$ 是理想, 考虑 $I \cap I^* =: B$, 这是 A 的一个 C^* 子代数, 并且 $II^* \subset B$. 任取 B 中的一个逼近单位元 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$, 则对任意 $x \in I$,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\uparrow\alpha} \|x^* - x^*e_i\|^2 &= \lim_{i\uparrow\alpha} \|(x^* - x^*e_i)^*(x^* - x^*e_i)\| \\
&= \lim_{i\uparrow\alpha} \|(1 - e_i)(xx^* - xx^*e_i)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因 $e_i \in I$, 由 I 是理想有 $x^*e_i \in I$. 而 I 又是范数闭的, 于是以上的范数估计表明 $x^* \in I$. 这就说明了 $I = I^*$, 进一步 $I \subset A$ 是 A 的一个 C^* 子代数. □

命题 1.4.4 设 I 是 A 的理想, 在 Banach 商代数 A/I 上赋予范数

$$\|\tilde{x}\| := \inf_{y\in I}\|x+y\|$$

后 A/I 成为一个 C^* 代数. 这里 $\tilde{x}$ 表示 x 所在的等价类.

证明 只需要验证范数的 C^* 条件即可. 设 A 的逼近单位元为 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$, 则因 $e_i\in I$, 对任意 $y\in I$ 都有 $\lim_{i\uparrow\alpha}\|y=ye_i\|=0$. 于是对 $\tilde{x}\in A/I$, 有

$$\begin{aligned}\limsup_{i\uparrow\alpha}\|x-xe_i\| &= \limsup_{i\uparrow\alpha}\|x+y-xe_i-ye_i\| \\ &= \limsup_{i\uparrow\alpha}\|(x+y)-(x+y)e_i\| \leqslant \|x+y\|\,.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}\| \geqslant \|x+y\| &\geqslant \limsup_{i\uparrow\alpha}\|x-xe_i\| \\ &\geqslant \liminf_{i\uparrow\alpha}\|x-xe_i\| \geqslant \inf_{y\in I}\|x+y\| = \|\tilde{x}\|\,,\end{aligned}$$

即 $\lim_{i\uparrow\alpha}\|x-xe_i\|$ 存在, 并且与 $\|\tilde{x}\|$ 相等. 此时

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}\|^2 &= \lim_{i\uparrow\alpha}\|(x-xe_i)^*(x-xe_i)\| \\ &= \lim_{i\uparrow\alpha}\|(1-e_i)x^*x(1-e_i)\| \\ &= \lim_{i\uparrow\alpha}\|(1-e_i)(x^*x+y)(1-e_i)\| \\ &\leqslant \|x^*x+y\|\,.\end{aligned}$$

对 $y\in I$ 取下确界就得到 $\|\tilde{x}\|^2\leqslant\|\tilde{x}^*\tilde{x}\|$. 而另一侧由 I 自伴得到. □

推论 1.4.5 设 $\pi:A\to B$ 是一个非零 C^* 代数同态, 则 $\pi(A)$ 是 B 的 C^* 代数, 由此 π 可以做分解

$$\pi=\tilde{\pi}q,$$

其中 $q:A\twoheadrightarrow A/\ker\pi$, $\tilde{\pi}$ 是 π 诱导出的等距同构.

证明 由 π 连续可知 $\ker\pi$ 是一个闭理想, 又因为 π 非零, 于是

$$\tilde{\pi}:A/\ker\pi\to B,\qquad \tilde{x}\mapsto\pi(x)$$

是一个单同态. 由定理 1.4.2 可知 $\tilde{\pi}$ 是一个等距同构, 因此 $\pi(A)$ 也是闭的. 这说明 $\pi(A)$ 是 B 的一个 C^* 子代数. □

推论 1.4.6 (C^* 代数的第二同构定理) 设 I 是 A 的理想, B 是 A 的 C^* 子代数, 则 $\mathcal{B}+I$ 也是 C^* 代数, 并且

$$\frac{B}{B\cap I}\cong\frac{B+I}{I}.$$

证明 由推论 1.4.5 可知同态

$$\pi:B\to A/I,\qquad x\mapsto x+I$$

可以被分解成 $\pi=\tilde{\pi}q$. 这里 $\ker\pi=B\cap I$, $q:B\to B/(B\cap I)$ 是商映射. 而 B 又是 A 的 C^* 子代数, 于是 π 又可以分解成 $\pi=q'i$, 这里 $i:B\to A$ 是自然的嵌入, $q':A\to A/I$ 是商映射. 它们使得图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"] & B/(B\cap I) \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ A \arrow[r, "q'"] & A/I \end{tikzcd}$$

交换. $B+I$ 是一个 C^* 代数, 其上的范数可以由 A/I 上的范数诱导.

注意到 $q'^{-1}(\pi(B))=B+I$, 考虑 q' 在 $B+I$ 上的限制, 有 $\ker q'|_{B+I}=I$. 于是

$$\frac{B}{B\cap I}\cong\pi(B)\cong\frac{B+I}{I},$$

其中前者是对 π 应用推论 1.4.5 得到的, 后者是对 $q'|_{B+I}$ 应用推论 1.4.5 得到的. □

定义 1.4.7 (遗传锥)　设 $\mathcal{P}\subset A_+$ 是一个锥, 称 $\mathcal{P}$ 是**遗传**的, 若

$$\forall y\in\mathcal{P}\,\forall x\in A_+\,(x\leqslant y\Longrightarrow x\in\mathcal{P}).$$

若 B 是 A 的 C^* 子代数, 称 B 是**遗传**的, 若 B_+ 在 A_+ 中是遗传的.

引理 1.4.8　设 A 是 C^* 代数, B 是 A 的 C^* 子代数, $\mathcal{P}$ 是 A 中的遗传锥. 记

$$L(\mathcal{P}):=\{x\in A:x^*x\in\mathcal{P}\},$$

则映射 $B\mapsto B_+$ 给出遗传 C^* 子代数到遗传锥的双射, $\mathcal{P}\mapsto L(\mathcal{P})$ 给出遗传锥到闭左理想的双射.

证明　前者由定义可知是显然的, 下面证明后者. 因 $\mathcal{P}$ 是遗传的, 于是 $L(\mathcal{P})$ 在 A 中是闭的, 对 $x\in L(\mathcal{P})$ 和 $y\in A$ 有

$$(yx)^*(yx)=x^*y^*yx\leqslant\|y\|^2\,x^*x\in\mathcal{P},$$

这即 $L(\mathcal{P})$ 还是左理想. □

幸运的是 C^* 代数的理想都是其遗传子代数, 不幸的是为了证明它, 我们不得不花费一些时间在下面有关分解的技术性引理上.

引理 1.4.9　设 A 是 C^* 代数, $x,y\in A$, $a\in A_+$, 对 $\alpha+\beta>1$ 满足

$$x^*x\leqslant a^\alpha,\qquad yy^*\leqslant a^\beta.$$

取定这样一列

$$u_n=x\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-1/2}y,$$

则存在 $u\in A$ 满足 $\|u\|\leqslant\left\|a^{(\alpha+\beta-1)/2}\right\|$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|=0$.

证明　对 $m,n\in\mathbb{Z}_{\geqslant1}$, 定义

$$d_{n,m}:=\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-1/2}-\left(\frac{1}{m}+a\right)^{-1/2},$$

则 $d_{n,m}^*=d_{n,m}$. 计算

$$\begin{aligned}\|u_n-u_m\|^2=\|xd_{n,m}y\|^2&=\|y^*d_{n,m}x^*xd_{n,m}y\|\\&\leqslant\|y^*d_{n,m}a^\alpha d_{n,m}y\|=\left\|a^{\alpha/2}d_{n,m}y\right\|^2.\end{aligned}$$

而 $d_{n,m}$ 与 a 是可交换的, 于是

$$\begin{aligned}\left\|a^{\alpha/2}d_{n,m}y\right\|^2&=\left\|a^{\alpha/2}d_{n,m}yy^*d_{n,m}a^{\alpha/2}\right\|\\&\leqslant\left\|a^{\alpha/2}d_{n,m}a^\beta d_{n,m}a^{\alpha/2}\right\|=\left\|d_{n,m}a^{(\alpha+\beta)/2}\right\|^2.\end{aligned}$$

考虑 $(1/n+a)^{-1/2}a^{(\alpha+\beta)/2}$, 当 $n\to\infty$ 时它一致收敛到 $a^{(\alpha+\beta-1)/2}$, 由此可知

$$\|u_n-u_m\|^2\leqslant\left\|d_{n,m}a^{(\alpha+\beta)/2}\right\|^2\to0,$$

这即 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列, 于是 u_n 依范数收敛, 记其极限为 u. 那么 u 满足

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty}\left\|x\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-1/2}y\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left\|a^{\alpha/2}\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-1/2}a^{\beta/2}\right\| = \|a\|^{(\alpha+\beta-1)/2},$$

即证. □

引理 1.4.10 设 $x\in A, a\in A_+$ 满足 $x^*x\leqslant a$, 那么对 $0<\alpha<1/2$, 存在 $u\in A$ 使得

$$x = ua^{\alpha}, \qquad \|u\| \leqslant \left\|a^{1/2-\alpha}\right\|.$$

证明 在前一引理中取 $y=a^{1/2-\alpha}$, 则 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 收敛到 u, 满足

$$\|u\| \leqslant \left\|a^{(1+1-2\alpha-1)/2}\right\| = \left\|a^{1/2-\alpha}\right\|.$$

并且

$$ua^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} u_n a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-1/2}a^{1/2} = x.$$

这即 $x=ua^{\alpha}$. □

这是一个弱化的极分解定理, 我们当然希望可以将它写成 $x=u\,|x|$, 但此处 $\alpha<1/2$, 并不能取到 $1/2$. 这来源于我们做连续函数演算时若 $\alpha=1/2$, 得到的函数中含有 t^0 这一项, 而它在 $t=0$ 处不连续. 同样地, 如果有 $u=xa^{-\alpha}$ 自然是最好的, 但 a 未必可逆, 于是我们用 $(1/n+a)^{-1/2}a^{1/2-\alpha}$ 来代替 $a^{-\alpha}$. 这里实际上是通过 $1/n$ 稍稍把 $\sigma(a)$ 向远离 0 的方向推了一点点.

命题 1.4.11 C^* 代数的理想都是其遗传子代数.

证明 我们只需证明, 对 I 是 A 的理想, 若 $a\in I_+, x\in A$ 满足 $x^*x\leqslant a$, 则 $x\in I$ 即可.

在前一引理中取 $\alpha=1/4$, 则存在 $u\in A$ 使得 $x=ua^{1/4}$. 注意到 $a^{1/4}$ 落在 a 生成的 C^* 代数中, 从而 $a^{1/4}\in I$, 而 I 是理想, 于是 $x\in I$. □

1.5 正泛函与 Jordan 分解

定义–命题 1.5.1 (自伴泛函) 以 A^* 记 A 的对偶空间, 称 $\varphi\in A^*$ 是**自伴**的, 若

$$\forall x\in A\,(\varphi(x^*)=\overline{\varphi(x)}),$$

则 A 上的自伴泛函全体为 $(A^*)_{\text{sa}}$, 它与 $(A_{\text{sa}})^*$ 等距同构, 于是此后不加区分地将其记作 A^*_{sa}.

证明 断言

$$(A^*)_{\text{sa}} \to (A_{\text{sa}})^*, \qquad \varphi\mapsto \varphi|_{A_{\text{sa}}} =: f$$

给出了一个等距同构.

对 $f\in(A_{\text{sa}})^*$, 可以如下定义 $\varphi\in(A^*)_{\text{sa}}$. 取 $x\in A$ 的实复分解 $x=\operatorname{Re}x+\mathrm{i}\operatorname{Im}x$, 定义

$$\varphi_f : A\to\mathbb{C}, \qquad x\mapsto f(\operatorname{Re}x)+\mathrm{i}f(\operatorname{Im}x),$$

这样定义的 φ_f 是连续的, 这因 f 是连续的, 并且 $x\mapsto\operatorname{Re}x$ 和 $x\mapsto\operatorname{Im}x$ 都是连续的. 那么 $f\mapsto\varphi_f$ 是 $\varphi\mapsto f$ 的逆. 因此 $\varphi\mapsto\varphi_{A_{\text{sa}}}$ 的确是一个同构.

首先 $\|f\|\mapsto\|\varphi\|$ 是显然的. 记 A 的单位球面为 $\mathbb{S}(A)$, 取 $x\in\mathbb{S}(A)$, 总可以取 $\lambda\in\mathbb{S}^1$ 使得 $\lambda\varphi(x)>0$. 则此时由 $\varphi(A_{\text{sa}})\subset\mathbb{R}$ 可知

$$\lambda\varphi(x)=\varphi(\lambda x)=f(\lambda\operatorname{Re}x)+\mathrm{i}f(\lambda\operatorname{Im}x)\in\mathbb{R},$$

这即 $f(\lambda\mathrm{Im}\,x) = 0$. 于是

$$|\varphi(x)| = |\varphi(\lambda x)| = |f(\lambda\mathrm{Re}\,x)| \leqslant \|f\|.$$

对 x 取上确界就有 $\|\varphi\| \leqslant \|f\|$. □

定义–命题 1.5.2 (正泛函) 称线性泛函 $\varphi : A \to \mathbb{C}$ 是一个**正泛函**, 若 $\varphi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$. (注意这里并不要求 φ 是连续的) 以 A_+^* 记 A 上正泛函全体, 则 $A_+^* \subset A_{\mathrm{sa}}^*$.

证明 先证明存在常数 $C \geqslant 0$ 使得

$$\forall x \in A_+ \,(\varphi(x) \leqslant C\,\|x\|),$$

否则可以找到一列 $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset A_+$, 满足 $\varphi(x_n) > 4^n$. 则对 $x = \sum_{n\geqslant 1}(x_n/2^n) \in A_+$, 有

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{x_n}{2^n}\right) \geqslant \varphi\left(\frac{x_n}{2^n}\right) > 2^n$$

对任何 $n \geqslant 1$ 成立, 矛盾.

因此, 对任意 $x \in A$, 记 $\mathrm{Re}\,x = a,\ \mathrm{Im}\,x = b$, 那么 x 可以分解成 4 个正元的线性组合

$$x = a_+ - a_- + \mathrm{i}b_+ - \mathrm{i}b_-.$$

于是

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &\leqslant \varphi(a_+ + a_-) + \varphi(b_+ + b_-)\\ &\leqslant C\,\|a_+ + a_-\| + C\,\|b_+ + b_-\| \leqslant 2C\,\|x\|,\end{aligned}$$

这即 $\|\varphi\| \leqslant 2C < \infty$, 于是 φ 是连续的.

因 $\varphi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$, 于是对任意 $x \in A_{\mathrm{sa}}$, 考虑其正负分解 $x = x_+ - x_-$, 由

$$\varphi(x) = \varphi(x_+) - \varphi(x_-) \in \mathbb{R},$$

即 $\varphi(A_{\mathrm{sa}}) \subset \mathbb{R}$, 故 $\varphi \in A_{\mathrm{sa}}^*$. □

容易验证 A_+^* 是一个锥, 于是它在 A_{sa}^* 上诱导一个序

$$\varphi - \psi \Longleftrightarrow \varphi - \psi \in A_+^*.$$

这即 $\varphi \in A_+^* \Longleftrightarrow \varphi \geqslant 0$. 正泛函同样也给出了 Cauchy–Schwarz 不等式, 这联系了一般的 C^* 代数与第 2 章我们主要讨论的 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数.

定理 1.5.3 (Cauchy–Schwarz) 设 $\varphi \in A_+^*$, $\forall x, y \in A$ 成立

$$|\varphi(x^*y)|^2 \leqslant \varphi(x^*x)\varphi(y^*y).$$

证明 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有

$$0 \leqslant \varphi((x+\lambda y)^*(x+\lambda y)) = \varphi(x^*x) + 2\mathrm{Re}\,(\lambda\varphi(x^*y)) + |\lambda|^2\,\varphi(y^*y).$$

取 $\lambda = -\varphi(y^*x)/\varphi(y^*y) \in \mathbb{C}$ 即证. □

命题 1.5.4 设 A 是 C^* 代数, 则 $\varphi \in A_+^*$ 当且仅当对 A 的逼近单位元 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$, 有 $\lim_{i\uparrow\alpha}\varphi(e_i) = \|\varphi\|$.

证明 *必要性.* 因 $(e_i)_{i\in\alpha}$ 是递增的, φ 是正泛函, 于是 $(\varphi(e_i))_{i\in\alpha}$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的递增网, 且有上界 $\|\varphi\|$. 于是单调收敛定理保证了 $\lim_{i\uparrow\alpha}\varphi(e_i)=\lambda$ 存在. 由 Cauchy–Schwarz 不等式, 对任意 $x\in\bar{\mathbb{B}}(A)$, 有

$$|\varphi(e_i x)|^2 \leqslant \varphi(e_i^2)\varphi(x^*x) \leqslant \varphi(e_i)\,\|\varphi\| \leqslant \lambda\,\|\varphi\|\,.$$

令 $i\uparrow\alpha$, 就有 $|\varphi(x)|^2\leqslant\lambda\,\|\varphi\|$. 由 x 的任意性, 可以对 x 取上确界, 从而得到

$$\|\varphi\|^2 \leqslant \lambda\,\|\varphi\| \Longrightarrow \|\varphi\| \leqslant \lambda.$$

这即 $\lambda=\|\varphi\|$.

充分性. 取 $x\in\bar{\mathbb{B}}(A_{\text{sa}})$, 设 $\varphi(x)=a+\mathrm{i}b$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$, 可以调整 x 前面的符号使得 $b\geqslant 0$. 因 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是逼近单位元, 于是

$$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}\,\exists i\in\alpha\left(\|xe_i-e_ix\|\leqslant\frac{1}{n}\right),$$

则

$$\begin{aligned}
\|ne_i-\mathrm{i}x\|^2 &= \|(ne_i+\mathrm{i}x)(ne_i-\mathrm{i}x)\| \\
&= \left\|n^2e_i^2+\mathrm{i}nxe_i-\mathrm{i}ne_ix+x^2\right\| \\
&\leqslant \left\|n^2e_i^2\right\|+\left\|x^2\right\|+\|\mathrm{i}n(e_ix-xe_i)\| \\
&\leqslant n^2+2.
\end{aligned}$$

而

$$\lim_{i\uparrow\alpha}|\varphi(ne_i-\mathrm{i}x)|^2=|\varphi(n-\mathrm{i}x)|^2=(n\,\|\varphi\|+b)^2+a^2,$$

于是考虑到 φ 是连续的, 有

$$(n\,\|\varphi\|+b)^2+a^2\leqslant(n^2+2)\,\|\varphi\|^2\,,$$

这即 $2nb\,\|\varphi\|+b^2+a^2\leqslant 2\,\|\varphi\|^2$ 对任意 $n\geqslant 1$ 都成立. 这只能 $b=0$, 即 $\varphi\in A_{\text{sa}}^*$.

而当 $x\in\bar{\mathbb{B}}(A_+)$ 时, 有 $e_i-x\in\bar{\mathbb{B}}(A_{\text{sa}})$, 从而

$$\lim_{i\uparrow\alpha}\varphi(e_i-x)=\lim_{i\uparrow\alpha}\varphi(e_i)-\varphi(x)=\|\varphi\|-\varphi(x)\leqslant\|\varphi\|\,,$$

这即 $\varphi(x)\geqslant 0$. 从而 $\varphi\geqslant 0$. □

命题 1.5.5 设 B 是 A 的 C^* 子代数, 则 $\varphi\in B_+^*$ 总可以保范地延拓到 A_+^* 上. 若 B 还是遗传的, 那么这一保范延拓是唯一的.

证明 若 A 不是单位的, 设 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是 A 的逼近单位元, $\tilde{A}$ 是依定理 1.3.2 对 A 的单位化. 则对 $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\uparrow\alpha}\|\lambda u_i+x\|^2 &= \limsup_{i\uparrow\alpha}\left\||\lambda|^2u_i^2+\bar{\lambda}u_ix+\lambda x^*u_i+x^*x\right\| \\
&\leqslant \limsup_{i\uparrow\alpha}\left\||\lambda|^2+\bar{\lambda}u_ix+\lambda x^*u_i+x^*x\right\|=\|\lambda+x\|^2\,.
\end{aligned}$$

于是对 $\varphi\in A_+^*$, 可以定义 $\tilde{\varphi}\in\tilde{A}^*$ 满足 $\tilde{\varphi}(1)=\|\varphi\|$, 则由

$$|\tilde{\varphi}(\lambda+x)|=\lim_{i\uparrow\alpha}|\varphi(\lambda u_i+x)|\leqslant\|\lambda+x\|\,\|\varphi\|$$

可知 $\|\tilde{\varphi}\|=\|\varphi\|$. 而 $\tilde{\varphi}(1)=\|\varphi\|>0$ 保证了 $\tilde{\varphi}\in\tilde{A}_+^*$.

因此, 若 A 不是单位的, 总可以像上面这样将 φ 从 B 延拓到 $\tilde{B}$ 上, 从而我们可以假设 B 是单位的. 此时对 $\varphi\in B_+^*$, 由 Hahn–Banach 定理可知存在 φ 在 A 上的延拓 ψ 使得

$$\|\psi\|=\|\varphi\|\,,\qquad \psi(1)=\|\psi\|\,,$$

这即 $\psi \geqslant 0$, 得到所求的延拓.

如果 B 是遗传的, 那么由之前的讨论可知 $\|\psi\| = \lim_{i\uparrow\alpha} \varphi(e_i)$, 这即

$$\psi(1) = \|\psi\| = \lim_{i\uparrow\alpha} \varphi(e_i) \Longrightarrow \lim_{i\uparrow\alpha} \psi(1-e_i) = 0.$$

而 $e_i \in B$, 于是 $e_iAe_i \subset B$. 因此对任意 $x \in A$, 有

$$\psi(x) = \lim_{i\uparrow\alpha} \psi(xe_i) = \lim_{i\uparrow\alpha} \psi(e_ixe_i) = \lim_{i\uparrow\alpha} \varphi(e_ixe_i),$$

其唯一性由极限的唯一性可知. □

定义 1.5.6 (态) 称 $Q(A) := \bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*) \cap A_+^*$ 中的元素是一个**准态**, 它赋予弱*拓扑后是凸的, 并且是弱*闭的. 称

$$S(A) := \left\{\varphi \in A_+^* : \|\varphi\| = 1\right\}$$

中的元素是一个**态**.

若 A 是单位的, 则由 $\varphi \in A_+^*$ 当且仅当 $\varphi(1) = \|\varphi\|$ 可知

$$S(A) = \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| \leqslant 1,\ \varphi(1) = 1\}$$

则 $S(A)$ 在 $Q(A)$ 中弱*闭, 这说明 $S(A)$ 是弱*紧的.

引理 1.5.7 $\bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*)$ 是 $S(A)$ 与 $-S(A)$ 的凸组合.

证明 记 K 是 $Q(A)$ 与 $-Q(A)$ 的凸组合, 由定义可知 $Q(A)$ 是 $S(A)$ 与 0 的凸组合, 于是 K 也是 $S(A)$ 与 $-S(A)$ 的凸组合. 因此

$$K = \{(1-\lambda)\varphi_1 - \lambda\varphi_2 : \varphi_1, \varphi_2 \in S(A), 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

对任何 $\varphi = (1-\lambda)\varphi_1 - \lambda\varphi_2 \in K$, 计算其范数

$$\|\varphi\| = \|(1-\lambda)\varphi_1 - \lambda\varphi_2\| \leqslant (1-\lambda)\|\varphi_1\| + \lambda\|\varphi_2\| \leqslant 1,$$

即 $K \subset \bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*)$.

因为 $S(A)$ 是弱*紧的, 于是 K 也是弱*紧的. 若 $K \neq \bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*)$, 可以取 $\varphi \in \bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*) \setminus K$. 由 Hahn–Banach 定理, 存在 $x \in A_{\mathrm{sa}}$ 使得

$$\sup_{\psi\in K} \psi(x) < \varphi(x).$$

而由 K 的定义可知 $K = -K$, 于是左侧的 $\sup_{\psi\in K}\psi(x)$ 可以用 $\sup_{\psi\in K}|\psi(x)|$ 替换. $S(A) \subset K$, 于是

$$\sup_{\psi\in S(A)} |\psi(x)| \leqslant \sup_{\psi\in K} |\psi(x)| < \varphi(x),$$

而正泛函的保范延拓总是正的, 于是

$$\|x\| = r(x) = \sup_{\psi\in\mathfrak{M}_A} |\psi(x)| = \sup_{\psi\in S(A)} |\psi(x)| < \varphi(x),$$

这即 $\|x\| < \varphi(x)$. 而这与 $\varphi \in \bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*)$ 矛盾. 于是 $K = \bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*)$. □

定义–命题 1.5.8 称两个正泛函 φ, ψ 是**正交**的, 若它们满足以下等价条件之一:

(1) $\|\varphi - \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$;

(2) $\forall\varepsilon > 0\, \exists z \in \bar{\mathbb{B}}(A_+)\, (\varphi(1-z) < \varepsilon \wedge \psi(z) < \varepsilon)$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) : 由 $\varphi,\psi\in A_+^*$ 可知 $\varphi-\psi\in A_{\mathrm{sa}}^*$. 于是存在 $x\in\bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}})$ 使得

$$\varphi(x)-\psi(x)+\varepsilon\geqslant\|\varphi-\psi\|.$$

而

$$\varphi(x)-\psi(x)+\varepsilon\geqslant\|\varphi-\psi\|=\|\varphi\|+\|\psi\|=\varphi(1)+\psi(1).$$

这即 $\varphi(1-x)+\psi(1+x)<\varepsilon$. 而 $x\in\bar{\mathbb{B}}(A_+)$, 于是

$$0\leqslant 1-x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant 1+x\leqslant 2.$$

取 $z=(1+x)/2\in\bar{\mathbb{B}}(A_+)$ 即可.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : $\|\varphi-\psi\|\leqslant\|\varphi\|+\|\psi\|$ 是显然的. 要证明另一侧, 由

$$\begin{aligned}\|\varphi\|+\|\psi\|=\varphi(1)+\psi(1)&\leqslant\varphi(2z-1)+\psi(1-2z)+4\varepsilon\\&=(\varphi-\psi)(2z-1)+4\varepsilon\\&\leqslant\|\varphi-\psi\|+4\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即可. □

定理 1.5.9 (Jordan 分解) 对 $\varphi\in A_{\mathrm{sa}}^*$, 存在唯一的正交正泛函对 (φ_+,φ_-) 使得

$$\varphi=\varphi_+-\varphi_-,$$

并称 φ_+ 为 φ 的**正部**, φ_- 为 φ 的**负部**.

证明 因 $\bar{\mathbb{B}}(A_{\mathrm{sa}}^*)$ 由 $S(A)$ 与 $-S(A)$ 凸组合, 存在 $\varphi_1,\varphi_2\in A_+^*$ 使得 $\|\varphi_1\|\leqslant\|\varphi\|$, $\|\varphi_2\|\leqslant\|\varphi\|$, 且存在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 使得

$$\varphi=(1-\alpha)\varphi_1-\alpha\varphi_2.$$

于是令 $\varphi_+=(1-\alpha)\varphi_1$, $\varphi_-=\alpha\varphi_2$, 就有 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$. 并且

$$\|\varphi_+\|+\|\varphi_-\|\leqslant(1-\alpha)\|\varphi_1\|+\alpha\|\varphi_2\|\leqslant\|\varphi\|,$$

而 $\|\varphi\|\leqslant\|\varphi_+\|+\|\varphi_-\|$ 显然, 于是这是一个正交的正泛函对.

再证唯一性, 为此设 (φ_1,ψ_1) 和 (φ_2,ψ_2) 都是满足条件的正交正泛函对, 于是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $z\in A_+$, $0\leqslant z\leqslant 1$ 满足

$$\varphi_1(1-z)<\varepsilon,\qquad \psi_1(z)<\varepsilon.$$

则

$$\varphi_2(z)\geqslant\varphi_2(z)-\psi_2(z)=\varphi(z)=\varphi_1(z)-\psi_1(z)>\varphi_1(1)-2\varepsilon.$$

同理 $\psi_2(1-z)>\psi_1(1)-2\varepsilon$, 因此有

$$\varphi_2(z)+\psi_2(1-z)>\|\varphi_1\|+\|\psi_1\|-4\varepsilon=\|\varphi_2\|+\|\psi_2\|-4\varepsilon,$$

这即 $\varphi_2(1-z)+\psi_2(z)<4\varepsilon$.

下证 $\varphi_1=\varphi_2$, $\psi_1=\psi_2$. 由假设可知 $\varphi_1-\varphi_2=\psi_1-\psi_2$, 于是只证明 $\varphi_1=\varphi_2$ 就足够了. 对任意 $x\in A$, 有

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)-\varphi_2(x)&=\varphi_1(xz)+\varphi_1(x(1-z))-\varphi_2(xz)-\varphi_2(x(1-z))\\&=\psi_1(xz)-\psi_2(xz)+\varphi_1(x(1-z))-\varphi_2(x(1-z)),\end{aligned}$$

在该式的四项中分别估计. 由 Cauchy–Schwarz 不等式

$$|\psi_1(xz)|^2 \leqslant \psi(xx^*)\psi(z^2) \leqslant \|x\|^2 \|\psi_1\| \psi_1(z) \leqslant \|x\|^2 \|\varphi_1 - \psi_1\| \psi_1(z).$$

这即 $|\psi_1(xz)| \leqslant \|x\| \|\varphi\|^{1/2} \varepsilon^{1/2}$. 类似地对其他三项做同样的估计, 得到

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| &\leqslant \|x\| \|\varphi\|^{1/2} (\varepsilon^{1/2} + (4\varepsilon)^{1/2} + \varepsilon^{1/2} + (4\varepsilon)^{1/2}) \\ &\leqslant 6 \|x\| \|\varphi\|^{1/2} \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即证. □

1.6 Gelfand–Naimark–Segal 构造

定义 1.6.1 (表示)　设 A 是 C^* 代数, H 是 Hilbert 空间, $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 是一个 C^* 代数同构. 则称 (H, π) 是 A 的一个**表示**.

(1)　称 (H, π) 是**非退化**的, 若 **clos** $\{\pi(A)(H)\} = H$. 特别地, 设 A 是 $\mathcal{B}(H)$ 的一个 C^* 子代数, 称 A 是**非退化**的, 若 (H, id_A) 是非退化的.

(2)　称 (H, π) 是**循环**的, 若存在 $\xi \in H$ 使得 **clos** $\{\pi(A)\xi\} = H$, 此时称 ξ 是 (H, π) 的**循环向量**. 也将循环表示记作 (H, π, ξ).

对 C^* 代数, 我们总是可以找到一个循环表示. 这一构造方式由 Gelfand, Naimark 和 Segal 给出, 因此也称作 **Gelfand–Naimark–Segal 构造**.

定理 1.6.2 (Gelfand–Naimark–Segal)　设 A 是 C^* 代数, $\varphi \in A_+^*$. 存在 A 的循环表示 (H, π, ξ) 使得

$$\varphi(x) = \langle \xi, \pi(x)\xi \rangle, \qquad \forall x \in A,$$

若另有 (H', π', ξ') 满足条件, 则 (H', π', ξ') 与 (H, π, ξ) 酉等价. 即存在酉算子 $u : H \to H'$ 使得

$$\pi'(x) = u\pi(x)u^*, \qquad \forall x \in A.$$

证明　我们的证明分三步进行.

第 1 步. 首先构造 (H, π).

在 A 上定义半双线性型

$$\langle x, y \rangle := \varphi(x^* y),$$

它对第一个变量是共轭线性的, 对第二个变量是线性的. 且 $\varphi \geqslant 0$ 导出

$$\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle, \qquad \langle x, x \rangle \geqslant 0.$$

于是 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 定义了 A 上的一个 Hermite 型. 为了构造内积空间, 取

$$\mathcal{N} := \{x \in A : \langle x, x \rangle = 0\} = \{x \in A : \varphi(x^* x) = 0\}.$$

因 φ 是连续的, 故 $\mathcal{N}$ 是 A 的闭子空间. 且对任意 $a \in A$ 和 $x \in \mathcal{N}$, 由

$$0 \leqslant \varphi((ax)^*(ax)) = \varphi(x^* a^* a x) \leqslant \varphi(x^* \|a\|^2 x) = \|a\|^2 \varphi(x^* x) = 0$$

可知 $ax \in \mathcal{N}$, 于是 $\mathcal{N}$ 是 A 的左理想. 这时商空间 $A/\mathcal{N}$ 可以被良好地定义, 记 $[x]$ 为 x 在 $A/\mathcal{N}$ 上的等价类, 则

$$\langle [x], [y] \rangle := \langle x, y \rangle$$

是一个 $A/\mathcal{N}$ 上良好定义的内积. 记 H 为 $(A/\mathcal{N}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的完备化.

对 $a \in A$ 定义

$$\pi(a): A/\mathcal{N} \to A/\mathcal{N}, \qquad [x] \mapsto [ax],$$

它是 $A/\mathcal{N}$ 上的算子, 且由

$$\|\pi(a)[x]\|^2 = \|[ax]\|^2 = \varphi((ax)^*(ax)) \leqslant \|a\|^2 \varphi(x^*x) = \|a\|^2 \|[x]\|^2$$

可知 $\|\pi(a)\| \leqslant \|a\| < \infty$, 因此 $\pi(a)$ 可以保范延拓到 H 上, 仍将其记作 $\pi(a)$. 至此我们定义了 (H,π).

第 2 步. 说明 (H,π) 是 A 的循环表示.

由定义可知 $\pi: A \to \mathcal{B}(H)$ 是一个同态, 于是只需要证明它是循环的. 若 A 是单位的, 取 $\xi = [1]$, 则 $\|\xi\| = 1$, 并且

$$\pi(A)\xi = \{[x] : x \in A\}$$

在 H 中是稠的 (这只需注意到 H 就是由后者做完备化得到的 Hilbert 空间), 于是 ξ 是 (H,π) 的循环向量, 且

$$\varphi(a) = \langle \xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle [1], [a] \rangle = \langle 1, a \rangle,$$

即 (H,π,ξ) 是 A 的循环表示.

若 A 不是单位的, 取 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是 A 的一个逼近单位元, 对 $i \leqslant j$ 有

$$\|[e_j] - [e_i]\|^2 = \varphi((e_j - e_i)^2) \leqslant \varphi(e_j - e_i),$$

这即 $([e_i])_{i\uparrow\alpha}$ 是 H 中的一个 Cauchy 网. 由 Cauchy 收敛定理, 记 $\xi = \lim_{i\uparrow\alpha}[e_i]$, 由逼近单位元的定义可得对任意 $a \in A$ 成立

$$\|[ae_i] - [a]\| = \|[ae_i - a]\| \leqslant \|\varphi\| \|ae_i - a\| \to 0,$$

即

$$\pi(a)\xi = \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(a)[e_i] = \lim_{i\uparrow\alpha}[ae_i] = [a],$$

这即 ξ 是 $\pi(a)$ 的循环向量. 并且

$$\varphi(a) = \lim_{i\uparrow\alpha} \varphi(e_i a e_i) = \lim_{i\uparrow\alpha} \langle [e_i], [ae_i] \rangle = \langle \xi, \pi(a)\xi \rangle$$

成立.

第 3 步. 证明 (H,π,ξ) 在酉等价意义下的唯一性.

设有 (H',π',ξ') 也满足条件, 定义

$$u: A/\mathcal{N} \to H', \qquad \pi(a)\xi \mapsto \pi'(a)\xi',$$

则对任意 $a, b \in A$, 由

$$\langle u\pi(b)\xi, u\pi(a)\xi \rangle = \langle \pi'(a)\xi', \pi'(b)\xi' \rangle = \varphi(b^*a) = \langle \pi(b)\xi, \pi(a)\xi \rangle$$

可知 u 是保持内积的, 从而是一个等距. 而 (H,π,ξ) 是非退化的, 于是 u 可以延拓为 $H \to H'$ 的算子, 仍将其记作 u. 此时因 (H',π',ξ') 也是非退化的, 故 u 是满的, 从而 u 是酉算子.

又因为 $\forall x \in A$ 成立

$$u\pi(a)\pi(x)\xi = u\pi(ax)\xi = \pi'(ax)\xi' = \pi'(a)\pi'(x)\xi' = \pi'(a)u\pi(x)\xi,$$

这即对任意 $a \in A$ 成立 $\pi'(a) = u\pi(a)u^*$. $\square$

对 C^* 代数 A, 由 Gelfand–Naimark–Segal 构造 (下文简称 *GNS* 构造) 得到的循环表示 (下文简称 *GNS* 表示) 总是非退化的.

定义 1.6.3 (表示的直和)　若有若干个表示 $\pi_i : A \to \mathcal{B}(H_i)$, 考虑 H_i 的 Hilbert 和

$$H = \bigoplus_{i\in\alpha} H_i = \left\{ (\xi_i)_{i\in\alpha} : \xi_i \in H,\ \sum_{i\in\alpha} \|\xi_i\|^2 < \infty \right\},$$

可以定义 $(\pi_i)_{i\in\alpha}$ 的**直和**为

$$\pi : A \to \mathcal{B}(H), \qquad x \mapsto \bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(x) =: \pi(x).$$

记如此定义的 π 为 $\pi = \bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i$

定理 1.6.4 (泛表示)　每个 C^* 代数都有忠实表示, 因此任何 C^* 代数 A 都可以在同构意义下看作 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数.

证明　对 $\varphi \in S(A)$, 记对应的 GNS 表示为 $(H_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$. 令

$$H = \bigoplus_{\varphi\in S(A)} H_\varphi, \qquad \pi = \bigoplus_{\varphi\in S(A)} \pi_\varphi,$$

则 (H, π) 是 A 的表示.

设 $x \in A, x \neq 0$, 那么存在态 ψ 使得 $\psi(x^*x) > 0$. 此时

$$\|\pi_\psi(x)\xi_\psi\|^2 = \langle \pi_\psi(x)\xi_\psi, \pi_\psi(x)\xi_\psi \rangle = \langle \xi_\psi, \pi_\psi(x^*x)\xi_\psi \rangle = \psi(x^*x) > 0,$$

因此 $\pi_\psi(x) \neq 0$. 这即 (H, π) 是忠实的. 这样的 (H, π) 称作是 A 的**泛表示**. □

因此我们可以将目光转向 $\mathcal{B}(H)$, 来讨论其上的拓扑结构和代数结构, 这将是第 2 章的主线内容. 但 $\mathcal{B}(H)$ 对我们来说实在是有些太大了, 因此我们不妨把目光放到下一节讨论的, 能够保持原来 C^* 代数作为理想的, 不至于过大的代数.

1.7　乘子代数与 Stone–Čech 紧化

定义 1.7.1 (理想化子)　设 H 是 Hilbert 空间, $A \subset \mathcal{B}(H)$, 称

$$\mathsf{ID}\,(A) := \{x \in \mathcal{B}(H) : xA \subset A,\ Ax \subset A\}$$

是 A 的**理想化子**.

之所以要引入理想化子, 是因为它是以 A 作为其理想的最大的代数. 如果 $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是非退化的, 我们还会证明其理想化子就是其 "最大" 的一个单位化.

引理 1.7.2　设 A 是 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数, 则 $\mathsf{ID}\,(A)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的单位 C^* 子代数, 且使得 $A \triangleleft \mathsf{ID}\,(A)$. 特别地, 若 A 非退化, 则 $A \triangleleft_{\mathrm{ess}} \mathsf{ID}\,(A)$.

证明　证明 $\mathsf{ID}\,(A)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数是容易的, 这因 $xA \subset A$, $Ax \subset A$ 对任何 $x \in \mathsf{ID}\,(A)$ 成立. 它是单位的, 因 $\mathrm{id}_H \in \mathsf{ID}\,(A)$, 而 $A \triangleleft \mathsf{ID}\,(A)$ 无非是例行公事的验证.

下面设 A 是非退化的, $x \in \mathsf{ID}\,(A)$ 使得对任意 $a \in A$, $xa = 0$. 那么

$$\forall \xi \in H\ \forall a \in A\ (xa\xi = 0).$$

由 A 非退化可知 $\mathbf{clos}\,\{a\xi : a \in A,\ \xi \in H\} = H$, 这说明

$$\forall \eta \in H\ (x\eta = 0),$$

于是 $x = 0$. 这就说明 $A \lhd_{\text{ess}} \mathrm{ID}\,(A)$. □

这说明 $\mathrm{ID}\,(A)$ 的确是 A 的单位化. 下一步, 我们试图将 A 的表示延拓到 $\mathrm{ID}\,(A)$ 中.

引理 1.7.3 设 $I \lhd A$, $\pi : I \to \mathcal{B}(H)$ 是非退化表示, 则存在唯一的 $*$–同态 $\tilde{\pi} : A \to \mathcal{B}(H)$, 使得 $\tilde{\pi}|_I = \pi$, 且 $\tilde{\pi}(A) \subset \mathrm{ID}\,(\pi(I))$. 特别地, 若 π 是忠实的, 则 $\tilde{\pi}$ 也是忠实的当且仅当 $I \lhd_{\text{ess}} A$.

证明 我们的证明分三步进行.

第 1 步. 先定义一个 $\tilde{\pi}$ 使得它是 π 的延拓.

设 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是 I 的一个逼近单位元, 对 $a \in A$, 定义

$$\tilde{\pi}_0(a) : \pi(I)H \to \pi(I)H, \qquad \pi(b)\xi \mapsto \pi(ab)\xi.$$

若有 b_1, b_2, ξ_1, ξ_2 使得 $\pi(b_1)\xi_1 = \pi(b_2)\xi_2$, 由

$$\begin{aligned}\pi(ab_1)\xi_1 &= \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(ae_ib_1)\xi_1 = \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(ae_i)\pi(b_1)\xi_1 \\ &= \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(ae_i)\pi(b_2)\xi_2 = \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(ae_ib_2)\xi_2 = \pi(ab_2)\xi_2.\end{aligned}$$

可知 $\tilde{\pi}_0(a)$ 是良定义的.

下面把 $\tilde{\pi}_0(a)$ 延拓到 H 上. 注意到

$$\begin{aligned}\|\tilde{\pi}_0(a)(\pi(b_1)\xi - \pi(b_2)\xi)\| &= \|\pi(ab_1 - ab_2)\xi\| \\ &= \lim_{i\uparrow\alpha} \|\pi(ae_ib_1 - ae_ib_2)\xi\| \\ &\leqslant \lim_{i\uparrow\alpha} \|\pi(ae_i)\|\, \|\pi(b_1 - b_2)\xi\| \\ &\leqslant \limsup_{i\uparrow\alpha} \|ae_i\|\, \|\pi(b_1 - b_2)\xi\| \\ &\leqslant \|a\|\, \|\pi(b_1 - b_2)\xi\|\,.\end{aligned}$$

于是由 $\lim_{i\uparrow\alpha} \pi(e_i)\xi = \xi$ 可知 $(\tilde{\pi}_0(a)\pi(e_i)\xi)_{i\uparrow\alpha}$ 是一个 Cauchy 列. 如下定义

$$\tilde{\pi}(a) : H \to H, \qquad \xi \mapsto \lim_{i\uparrow\alpha} \tilde{\pi}_0(a)\pi(e_i)\xi,$$

容易看到 $\tilde{\pi}(a)$ 仍是线性算子, 且 $\|\tilde{\pi}(a)\| \leqslant \|a\| < \infty$, 于是 $\tilde{\pi}(a) \in \mathcal{B}(H)$.

若 $a \in I$, 那么由

$$\tilde{\pi}(a)\xi = \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(ae_i)\xi = \pi(a)\xi$$

可知 $\tilde{\pi}|_I = \pi$. $\tilde{\pi}$ 由定义已经是线性的, 要说明它还是 $*$–同态, 只需要它保持乘法和对合.

$$\tilde{\pi}(ab)\xi = \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(abe_i)\xi = \lim_{i\uparrow\alpha} \lim_{j\uparrow\alpha} \pi(ae_jbe_i)\xi = \lim_{i\uparrow\alpha} \tilde{\pi}(a)\pi(be_i)\xi = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)\xi.$$

$$\langle \pi(a^*)\xi, \eta\rangle = \lim_{i\uparrow} \langle \pi(a^*e_i)\xi, \pi(e_i)\eta\rangle = \lim_{i\uparrow\alpha} \langle \xi, \pi(e_iae_i)\eta\rangle = \lim_{i\uparrow\alpha} \langle \pi(e_i)\xi, \pi(e_i)\eta\rangle = \langle \xi, \pi(a)\eta\rangle\,.$$

于是 $\tilde{\pi}$ 的确是一个 $*$–同态.

第 2 步. 这样的延拓是唯一的.

若另有 $\rho : A \to \mathcal{B}(H)$ 满足条件, 那么由 $\pi(I)H$ 的稠密性可知, $\forall a \in A, \forall b \in I, \forall \xi \in H$,

$$\rho(a)\pi(b)\xi = \rho(a)\rho(b)\xi = \rho(ab)\xi = \pi(ab)\xi$$

就可以导出 $\rho(a) = \tilde{\pi}(a)$.

再说明 $\tilde{\pi} \subset \mathrm{ID}\,(\pi(I))$, 这因

$$\tilde{\pi}(a)\pi(b) = \tilde{\pi}(ab) = \pi(ab) \in \pi(I)$$

$$\pi(b)\tilde{\pi}(a) = \tilde{\pi}(ba) = \pi(ba) \in \pi(I)$$

成立.

第 3 步. 说明有关忠实表示的性质.

必要性. 若 $\tilde{\pi}$ 是忠实的, 则对使得 $\forall b \in I\ (ab = 0)$ 的 $a \in A$, 由

$$\tilde{\pi}(a)\xi = \lim_{i\uparrow\alpha} \pi(ae_i)\xi = 0, \qquad \forall \xi \in H$$

可知 $\tilde{\pi}(a) = 0$, 而 $\tilde{\pi}$ 忠实, 于是 $a = 0$, 这即 $I \lhd_{\text{ess}} A$.

充分性. 若 $I \lhd_{\text{ess}} A$, 则对 $a \in A$ 使得 $\tilde{\pi}(a) = 0$, 对任意 $b \in I$ 和 $\xi \in H$

$$0 = \tilde{\pi}(a)\pi(b)\xi = \pi(ab)\xi,$$

即 $\pi(ab) = 0$. 由 π 忠实可知 $ab = 0$, 而 $I \lhd_{\text{ess}} A$, 于是只能 $a = 0$, 这即 $\tilde{\pi}$ 忠实. □

定理 1.7.4　设 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 是忠实的非退化表示, 则 $\mathrm{ID}\,(\pi(A))$ 满足

(1)　当通过 π 将 A 与 $\pi(A)$ 等同起来时, $A \lhd_{\text{ess}} \mathrm{ID}\,(\pi(A))$;

(2)　若另有 C^* 代数 B 使得 $A \lhd_{\text{ess}} B$, 则存在 π 的延拓 $\tilde{\pi} : B \to \mathrm{ID}\,(\pi(A))$, 使得 $\tilde{\pi}$ 是忠实的.

证明　(1) 由引理 1.7.2 可知 $\mathrm{ID}\,(\pi(A))$ 是 C^* 代数, $\pi(A) \lhd_{\text{ess}} \mathrm{ID}\,(\pi(A))$. 因为 π 是忠实的, 于是 $\pi(A) \simeq A$, 可将 A 视作 $\mathrm{ID}\,(\pi(A))$ 的本质理想.

(2) 由引理 1.7.3 立刻得到. □

由以上定理可知 $\mathrm{ID}\,(\pi(A))$ 在某种意义上就是 A "最大" 的一个单位化.

定义 1.7.5 (乘子代数)　设 A 是一个 C^* 代数, 称满足以下条件的 C^* 代数是 A 的**乘子代数**, 记作 $\mathcal{M}(A)$.

(1)　$A \lhd_{\text{ess}} \mathcal{M}(A)$;

(2)　若 $A \lhd_{\text{ess}} B$, 则存在唯一的 $*$–同态 $\pi : B \to \mathcal{M}(A)$ 使得 $\pi|_A = \mathrm{id}_A$.

由此, $\mathrm{ID}\,(\pi(A))$ 就是 A 的乘子代数. 而它作为 A 最大的单位化, 自然也有单位化应该有的性质.

推论 1.7.6　若 A 是单位的, 则 $\mathcal{M}(A) = A$.

证明　设 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 是忠实的非退化表示, 由 A 是单位的, 有

$$\pi(1_A)\xi = \xi, \qquad \forall \xi \in H,$$

于是 $\mathrm{id}_H \in \pi(A)$. 而由理想化子的定义, 若 $\mathrm{id}_H \in \pi(A)$, 则 $\mathrm{ID}\,(\pi(A)) \subset A$, 于是 $A = \mathrm{ID}\,(\pi(A))$. □

定理 1.7.7　设 $(A_i)_{i\in\alpha}$ 是一族 C^* 代数, 则

$$\mathcal{M}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} A_i\right) \simeq \prod_{i\in\alpha} \mathcal{M}(A_i), \qquad \mathcal{M}\left(\prod_{i\in\alpha} A_i\right) \simeq \prod_{i\in\alpha} \mathcal{M}(A_i).$$

证明　只证明 Hilbert 和的情形, 对直积, 只需要将上述讨论中所有的 Hilbert 和全部替换成直积即可.

对 A_i, 取忠实的非退化表示 $\pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i)$, 则 $\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i$ 是 $\bigoplus_{i\in\alpha} A_i$ 的忠实非退化表示. 因此

$$\mathcal{M}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} A_i\right) = \mathsf{ID}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)\right) \subset \mathcal{B}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} H_i\right).$$

定义

$$\Psi : \prod_{i\in\alpha} \mathsf{ID}\left(\pi_i(A_i)\right) \to \mathsf{ID}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)\right) \subset \mathcal{B}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} H_i\right), \qquad (x_i)_{i\in\alpha} \mapsto \bigoplus_{i\in\alpha} x_i,$$

则 Ψ 自然是一个有界线性算子, 且 Ψ 是单的.

我们首先说明 Ψ 的值域的确是 $\mathsf{ID}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)\right)$. 对 $(a_i)_{i\in\alpha} \in \bigoplus_{i\in\alpha} A_i$, 有

$$x_i\pi_i(a_i) \in \pi_i(A_i), \qquad \pi_i(a_i)x_i \in \pi_i(A_i).$$

并且对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限多个 $i \in \alpha$ 使得 $\|a_i\| > \varepsilon$, 因此也只存在有限多个 $j \in \alpha$ 使得

$$\|x_j\pi_j(a_j)\| > \|(x_i)_{i\in\alpha}\|\,\varepsilon, \qquad \|\pi_j(a_j)x_j\| > \|(x_i)_{i\in\alpha}\|\,\varepsilon.$$

因此

$$\left(\bigoplus_{i\in\alpha} x_i\right)\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(a_i)\right) \in \bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i), \quad \left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(a_i)\right)\left(\bigoplus_{i\in\alpha} x_i\right) \in \bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i).$$

这就说明了 Ψ 的值域是 $\mathsf{ID}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)\right)$. 下面证明 Ψ 是满的.

任取 $x \in \mathsf{ID}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)\right)$, $i, j \in \alpha$, 将 x 在定义域上限制到 H_j, 在值域上限制到 H_i, 得到算子

$$x_{i,j} : H_j \to H_i, \qquad \xi \mapsto \begin{cases} x\xi, & x\xi \in H_i \\ 0, & x\xi \notin H_i \end{cases}$$

断言对任何 $i \neq j$, $x_{i,j} = 0$. 为此, 取 $(a_i)_{i\in\alpha}$ 满足 $i \neq j$ 时 $a_i = 0$, 那么由 $x \in \mathsf{ID}\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)\right)$ 可知 $x\left(\bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(a_i)\right) \in \bigoplus_{i\in\alpha} \pi_i(A_i)$. 由此, $i \neq j$ 时

$$x_{i,j}\pi_j(a_j) = 0.$$

因 π_j 非退化, 故 $\mathbf{clos}\,\{\pi_j(a_j)\xi : a_j \in A_j,\ \xi \in H_j\} = H_j$, 于是 $x_{i,j} = 0$.

再断言 $x_{k,k} \in \mathsf{ID}\left(\pi_k(A_k)\right)$. 同样地, 取 $(a_i)_{i\in\alpha}$ 满足 $i \neq j$ 时 $a_i = 0$, 则

$$x_{k,k}\pi_k(a_k) \in \pi_k(A_k), \qquad \pi_k(a_k)x_{k,k} \in \pi_k(A_k)$$

对任何 $a_k \in A_k$ 都成立. 这就得证, 并且 $\|x_{k,k}\| \leqslant \|x\|$. 因此, 令 $x_k = x_{k,k}$, 则 $(x_i)_{i\in\alpha} \in \prod_{i\in\alpha} \mathsf{ID}\left(\pi_i(A_i)\right)$, 且 $\Psi((x_i)_{i\in\alpha}) = x$. 这即 Ψ 是满的. □

下面来考虑 $C_0(X)$ 的乘子代数. 先来回顾对 $C_0(X)$ 作 GNS 构造得到的循环表示. 因 $C_0(X)^* \simeq M(X)$, 故 $C_0(X)$ 上的态是一个正则 Borel 概率测度 μ, 在 GNS 构造中得到的左理想为

$$\mathcal{N} = \left\{f \in C_0(X) : \int_X |f|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0\right\} = \{f \in C_0(X) : f = 0 \text{ a.e.}\}.$$

因此在 GNS 构造中得到的表示为 $(L_2(X,\mu), \pi)$, 其中

$$\pi : C_0(X) \to \mathcal{B}(L_2(X,\mu)), \qquad f \mapsto M_f,$$

这里 M_f 是 $L_2(X,\mu)$ 上的乘法算子 $g \mapsto fg$.

命题 1.7.8 $\mathcal{M}(C_0(X)) = C_b(X)$.

证明　容易验证 $C_0(X) \lhd_{\text{ess}} C_b(X)$. 注意到 $\mathcal{M}(C_0(X))$ 是以 $C_0(X)$ 为本质理想最大的一个, 于是 $C_b(X) \subset \mathcal{M}(C_0(X))$.

再证明反向包含关系. 取 $g \in C_0(X)$, 使得对 X 的紧子集 Y 有 $g|_Y = 1$. 则对 $f \in \mathcal{M}(C_0(X))$, 有 $fg \in C_0(X)$. 这说明 f 在 Y 上是连续的. 令 Y 取遍所有 X 的紧子集, 有 f 在 X 上连续, 从而 $f \in C_b(X)$. 至此就证明了 $\mathcal{M}(C_0(X)) = C_b(X)$. □

注意到 $C_b(X)$ 是一个交换的单位 C^* 代数, 由 Gelfand–Naimark 定理可知它同构于某个 $C(Y)$, Y 是一个紧 Hausdorff 空间. 称 $Y = \beta X$ 是 X 的 **Stone–Čech 紧化**, Gelfand–Naimark 定理使得我们可以把 βX 写出来, 它就是 $C_b(X)$ 的极大理想空间

$$\beta X := \big\{\gamma : C_b(X) \to \mathbb{C} : \gamma \text{ 是可乘线性泛函}\big\}$$

定理 1.7.9　βX 是 X 最大的紧化.

证明　先来说明 βX 是 X 的紧化. 考虑嵌入 $\iota : X \hookrightarrow \beta X,\ x \mapsto \delta_x$. 我们需要证明 $\iota(X)$ 在 βX 中稠密. 用反证法, 否则若有 $a \in \beta X \setminus \mathbf{clos}\,\{\iota(X)\}$, 由 Urysohn 引理可知存在连续函数 $f : \beta X \to [0,1]$ 使得

$$f|_{\mathbf{clos}\{\iota(X)\}} = 0, \qquad f(a) \neq 0.$$

这样的 f 不可能存在, 因 $f \in C(\beta X) = C_b(X)$, 于是 $f|_{\mathbf{clos}\{\iota(X)\}} = 0$ 推出 $f = 0$.

任取 X 的紧化 K, 相应的嵌入为 $\psi : X \hookrightarrow K$, 则

$$j : C(K) \to C_b(X), \qquad f \mapsto f\psi$$

给出了一个 $C(K)$ 到 $C_b(X)$ 的嵌入. 因 $\psi(K)$ 在 K 中稠密, 于是 $j : C(K) \to \operatorname{im} j$ 是一个*–等距同构. 由 Gelfand–Naimark 定理, $\mathfrak{M}(C(K)) \cong K$, 因此 $\tilde{\psi} : k \mapsto \delta_{\psi(k)}$ 可以看作是 X 到 $\mathfrak{M}(C(K))$ 的嵌入, 此时 $\mathfrak{M}(C(K))$ 也是 X 的紧化. 视 $C(K)$ 是 $C_b(X) = C(\beta X)$ 的一个子空间, 定义

$$\Psi_0 : \beta X \to \mathfrak{M}(C(K)), \qquad \gamma \mapsto \gamma|_{C(K)},$$

由 $1 \in C(K) \subset C_b(X)$ 可知 Ψ_0 是良定义的. 因此 $\Psi_0 \iota = \tilde{\psi}$ 成立.

若记 $\mathfrak{M}(C(K))$ 到 K 的同构为 Λ^{-1}, 令 $\Psi = \Lambda^{-1}\Psi_0$, 它即是 βX 到 K 的连续满射, 使得 $\Psi|_X = \mathrm{id}_X$. □

再来考虑紧算子 $\mathcal{K}(H)$ 的乘子代数.

命题 1.7.10　$\mathcal{K}(H)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 最小的非零理想, 且 H 可分时, 它就是唯一的真理想.

证明　首先, 容易验证 $\mathcal{K}(H) \lhd \mathcal{B}(H)$.

任取 $I \lhd \mathcal{B}(H)$, 任取 $T \in I, T \neq 0$. 则存在 $x, y \in H$ 使得 $Tx = y$. 那么任何将 a 映到 b 的秩 1 算子 $S_{a,b}$ 都可以写成

$$S_{a,b} = S_{y,b} T S_{a,x} \in I.$$

这里 $S_{y,b}$ 是将 y 映到 b 的秩 1 算子, $S_{a,x}$ 是将 a 映到 x 的秩 1 算子. 于是

$$\big\{\text{秩 1 算子}\big\} \subset I \Longrightarrow \mathcal{F}(H) \subset I \Longrightarrow \mathcal{K}(H) \subset I,$$

这即对任何 $\mathcal{B}(H)$ 的理想, 总有 $\mathcal{K}(H) \subset I$.

下面假设 H 是可分的, 对 $T \in \mathcal{B}(H)$, 做极分解可得 $T = V|T|$, 于是 $|T| = V^*T \in I$. 下面设 $T \in I_+, T \notin \mathcal{K}(H)$, 需要证明 $I = \mathcal{B}(H)$. 设 E 是 T 对应的谱测度, 对 $\varepsilon > 0$, 考虑 $T_\varepsilon = TE[\varepsilon, \infty)$. 断言存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\dim \operatorname{im} T_\varepsilon = \aleph_0$. 否则, 对任何 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 都有 $T_{1/n} \in \mathcal{F}(H)$, 由单调收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty} T_{1/n} = \lim_{n\to\infty} TE[1/n, \infty) = T,$$

即 T 是一列有限秩算子的极限, 这与 $T \notin \mathcal{K}(H)$ 矛盾. 记 $M = \operatorname{im} T$, 取 $U : M \to H$ 是一个等距同构 (在这里用到了 H 的可分性). 将 U 延拓到 H 上, 它在 $M^\perp$ 上的取值均为零, 记作 $\tilde{U}$. 再取 $V : H \to H$ 是 $U^{-1} : H \to M$ 和自然嵌入 $M \hookrightarrow H$ 的复合, 那么

$$UTV = \mathrm{id}_H \in I,$$

这就说明 $I = \mathcal{B}(H)$. □

定理 1.7.11 $\mathcal{M}(\mathcal{K}(H)) = \mathcal{B}(H)$.

证明 在命题 1.7.10 中我们证明了 $\mathcal{K}(H) \lhd \mathcal{B}(H)$, 并且注意到 $(\mathcal{B}(H), \mathrm{id}_{\mathcal{K}(H)})$ 是一个忠实的非退化表示, 因此

$$\mathrm{ID}\,(\mathcal{K}(H)) = \{T \in \mathcal{B}(H) : T\mathcal{K}(H) \subset \mathcal{K}(H),\ \mathcal{K}(H)T \subset \mathcal{K}(H)\} = \mathcal{B}(H),$$

得证. □

考虑 **Calkin 代数**

$$\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H) = \mathcal{M}(\mathcal{K}(H))/\mathcal{K}(H),$$

我们希望把 $\mathcal{K}(H)$ 换成一些其他的 C^* 代数, 从而推广 Calkin 代数.

定义 1.7.12 (Corona 代数) 设 A 是 C^* 代数, 称

$$\mathrm{Corona}(A) = \mathcal{M}(A)/A$$

是 A 诱导的 **Corona 代数**.

那么由定义可知 Calkin 代数是 $\mathcal{K}(H)$ 的 Corona 代数; 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, $C_0(X)$ 的 Corona 代数为

$$\mathrm{Corona}(C_0(X)) = C(\beta X)/C_0(X) = C(\beta X - X),$$

此时也称 $\beta X - X$ 是 X 诱导的 **Corona 空间**.

由 Corona 代数的定义, 序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \mathcal{M}(A) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Corona}(A) \longrightarrow 0$$

是正合的. 类似地可以做扩张.

定理 1.7.13 (小扩张定理) 对任意 C^* 代数 A, B 和 $f : A \twoheadrightarrow B$, 存在 $\mathcal{M}(f) : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$ 和它诱导的 $\mathrm{Corona}(f) : \mathrm{Corona}(A) \to \mathrm{Corona}(B)$ 使得图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{M}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{M}(f)"] & \mathrm{Corona}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Corona}(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & \mathcal{M}(B) \arrow[r] & \mathrm{Corona}(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

交换.

证明 我们需要先叙述一个等价定义, 即通过**双中心化子**的定义. 设 A 可以通过忠实表示看作 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数, 乘子代数也可以由

$$\mathsf{DC}(A) := \{(L,R) \in \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) : aL(b) = R(a)b\}$$

定义, 注意到它也满足乘子代数的泛性质.

此时 A 通过 $a \mapsto (L_a, R_a)$ 嵌入 $\mathsf{DC}(A)$, 这里

$$L_a : b \mapsto ab, \qquad R_a(b) : b \mapsto ba$$

因此 A 也可以通过这一嵌入作为 $\mathsf{DC}(A)$ 的理想, 可以验证它是本质理想.

对 $(L,R) \in \mathcal{M}(A)$, 由 $f : A \twoheadrightarrow B$ 是满同态可知对任意 $b \in B$, 存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 于是可以定义

$$\hat{L}(b) := f(L(a)), \qquad \hat{R}(b) := f(R(a)).$$

这里的 $\hat{L}, \hat{R} \in \mathcal{B}(B)$ 都是良定义的, 以 $\hat{L}$ 为例说明. 若 $L(a) = L(a') = B$, 设 $(e_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是 A 的一个逼近单位元, 则

$$f(L(a) - L(a')) = \lim_{i\uparrow\alpha} f(e_i(L(a-a'))) = \lim_{i\uparrow\alpha} f(R(e_i)(a-a')) = \lim_{i\uparrow} f(R(e_i))f(a-a') = 0,$$

同理可证 $\hat{R}$ 也是良定义的.

于是对 $f(a) = b, f(a') = b'$, 有

$$b\hat{L}(b') = f(a)f(L(a')) = f(aL(a')) = f(R(a)a') = \hat{R}(b)b',$$

即 $(\hat{L}, \hat{R}) \in \mathcal{M}(B)$. 因此, 映射

$$\mathcal{M}(f) : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B), \qquad (L,R) \mapsto (\hat{L}, \hat{R})$$

及其诱导出的 Corona(f) 使得图表交换. 并且当 f 是同构时, 由 $\hat{L} = fLf^{-1}$ 和 $\hat{R} = fRf^{-1}$ 知 $\mathcal{M}(f)$ 和 Corona(f) 也是同构. □

1.8 C^* 代数的张量积

本节的主要目的是引入两个 C^* 代数之间的张量积. 下设 A, B 是两个 C^* 代数. 首先在纯代数的意义下可以做张量积, 得到的结果仍然为*-代数. 记为 $A \odot B$. 其上的代数结构和*结构分别由

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1a_2 \otimes b_1b_2), \qquad (a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$$

确定. 现在 $A \odot B$ 现在上面还没有拓扑结构 (范数), 如果 $A \odot B$ 上可以找到 C^* 范数 $\|\cdot\|_1$, 则在该范数下的完备化自然地构成 C^* 代数, 记作 $A \otimes_{\|\cdot\|_1} B$.

例行公事地, 这样的范数是否存在? 如果存在是否唯一? 下面将通过两种特殊的范数构造来说明存在性, 但唯一性一般并不成立, 因此 $A \otimes_{\|\cdot\|} B$ 会根据范数选取的不同而有不同的结构. 幸运的是, $A \odot B$ 上存在两种特殊的范数, 可以控制 $A \odot B$ 上所有不同的 C^* 范数, 分别记作 $\|\cdot\|_{\min}$ 以及 $\|\cdot\|_{\max}$. 如果这两种范数相同, $A \otimes B$ 唯一地被定义. 这就是我们后来引入的**核 C^* 代数**的定义, 并且这一概念与**顺从性**有着一定的内在联系.

定义 1.8.1 (Hilbert 空间的张量积) 设 H_1, H_2 为两个 Hilbert 空间, 以 $H_1 \odot H_2$ 记其代数张量积, 赋予如下内积:

$$\langle g_1 \otimes h_1, g_2 \otimes h_2 \rangle_{H_1 \odot H_2} = \langle g_1, g_2 \rangle_{H_1} \langle g_2, h_2 \rangle_{H_2}.$$

称 $H_1 \odot H_2$ 在这一内积下的完备化为 H_1 与 H_2 的 **(Hilbert 空间) 张量积**, 记作 $H_1 \otimes H_2$.

推论 1.8.2 设 $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$, $\|h_1 \otimes h_2\|_{H_1 \otimes H_2} = \|h_1\|_{H_1} \|h_2\|_{H_2}$.

如我们所愿, Hilbert 空间张量积的 Hilbert 基就是两个空间分别的 Hilbert 基作张量积.

命题 1.8.3 设 $(e_i)_{i \in I}$ 是 H_1 的 Hilbert 基, $(f_j)_{j \in J}$ 是 H_2 的 Hilbert 基, 那么 $(e_i \otimes f_j)$ 是 $H_1 \otimes H_2$ 的一个 Hilbert 基.

证明 根据张量积空间中内积的定义, 容易验证 $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ 线性无关. 注意到 $H_1 \otimes H_2$ 为 $H_1 \odot H_2$ 在以上内积下的完备化, 只需证明 $(e_i \otimes f_j)$ 是 $H_1 \odot H_2$ 的 Hilbert 基. 由代数张量积的相关性质可知 $H_1 \odot H_2$ 中元素均可以写成单项元素 $h_1 \otimes h_2$ 的有限和, 因此只需证明对任意 $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, h_1 \otimes h_2$ 总可以被 $e_i \otimes f_j$ 线性表出即可.

将 h_1, h_2 分别按给定的 Hilbert 基展开:

$$h_1 = \sum_{i \in I} \langle h_1, e_i \rangle e_i, \qquad h_2 = \sum_{j \in J} \langle h_2, f_j \rangle f_j$$

作张量积即得

$$h_1 \otimes h_2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \langle h_1, e_i \rangle \langle h_2, f_j \rangle e_i \otimes f_j$$

这即 $(e_i \otimes f_j)$ 是 $H_1 \otimes H_2$ 的 Hilbert 基. □

若线性空间上没有任何拓扑结构, 仍然有类似的结果, 但此时并无 Hilbert 基的概念, 需要用 Hamel 基来代替 Hilbert 基进行讨论.

命题 1.8.4 设 E, F 为两个线性空间, $\{e_i\}_{i \in I}$, $\{f_j\}_{j \in J}$ 分别是 E 和 F 的 Hamel 基, 则 $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I,\, j \in J}$ 为 $E \odot F$ 的 Hamel 基.

证明 由张量积的定义可知 $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I,\, j \in J}$ 可以表出 $E \odot F$ 中的所有元素, 下证 $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I,\, j \in J}$ 线性无关.

对 $i_0 \in I, j_0 \in J$, 定义

$$\psi_{i_0} : E \to \mathbb{C}, \qquad e_{i_0} \mapsto 1, \quad e_i \mapsto 0,\ i \neq i_0$$

和

$$\phi_{j_0} : F \to \mathbb{C}, \qquad f_{j_0} \mapsto 1, \quad f_j \mapsto 0,\ j \neq j_0.$$

则

$$\psi_i \times \phi_j : E \times F \to \mathbb{C}, \qquad (e, f) \mapsto \psi_i(e) \phi_j(f)$$

是双线性映射. 由此 $\varphi_{ij} = \psi_i \odot \phi_j$ 是 $E \odot F$ 上良定义的线性映射, 且 $\varphi_{ij}(e_i \otimes f_j) = 1, \varphi_{ij}(e_{i'} \otimes f_{j'}) = 0$ 对任意 $(i, j) \neq (i', j')$ 成立. 则 φ_{ij} 的存在性立刻导出 $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I,\, j \in J}$ 线性无关. □

命题 1.8.5 设 $H_1,\ H_2$ 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H_1), T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$, 则

$$T_1 \otimes T_2 : H_1 \otimes H_2 \to H_1 \otimes H_2, \qquad h_1 \otimes h_2 \mapsto T_1 h_1 \otimes T_2 h_2.$$

良定义, 且 $\|T_1 \otimes T_2\| = \|T_1\| \|T_2\|$.

证明　注意到

$$\varphi: H_1 \times H_2 \to H_1 \otimes H_2, \qquad \varphi(h_1, h_2) = T_1 h_1 \otimes T_2 h_2$$

是双线性的, 由张量积的泛性质易知 $T_1 \otimes T_2$ 在 $H_1 \odot H_2$ 上良定义. 特别地, $T_1 \otimes \mathrm{id}$ 和 $\mathrm{id} \otimes T_2$ 均在 $H_1 \odot H_2$ 上良定义.

任取 $h = \sum_{k=1}^N x_k \otimes y_k \in H_1 \odot H_2$, 其中 $x_k \in H_1, y_k \in H_2$. 因 h 是 $x_k \otimes y_k$ 的有限和, 无妨设 y_k 互相正交 (否则对 y_k 作 *Gram-Schmidt* 正交化.). 此时

$$\begin{aligned}\|(T_1 \otimes I)h\|^2 &\leqslant \left\|\sum_{k=1}^N T_1 x_k \otimes y_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^N \|T_1 x_k \otimes y_k\|^2 = \sum_{k=1}^N \|T_1 x_k\|^2 \|y_k\|^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^N \|T_1\|^2 \|x_k\|^2 \|y_k\|^2 = \|T_1\|^2 \sum_{k=1}^N \|x_k \otimes y_k\|^2 = \|T_1\|^2 \left\|\sum_{k=1}^N x_k \otimes y_k\right\|^2 = \|T_1\|^2 \|h\|^2 .\end{aligned}$$

因此 $T_1 \otimes \mathrm{id}$ 在 $H_1 \odot H_2$ 上有界. 同理 $\mathrm{id} \otimes T_2$ 也有界. 因此对任意 $h \in H_1 \odot H_2$,

$$\|(T_1 \otimes T_2)h\| = \|(T_1 \otimes I)(I \otimes T_2)h\| \leqslant \|T_1\| \|T_2\| \|h\| ,$$

即 $T_1 \otimes T_2$ 在 $H_1 \odot H_2$ 上有界. 于是 $T_1 \otimes T_2$ 就可以被延拓到 $H_1 \otimes H_2$ 上, 并且有 $\|T_1 \otimes T_2\| \leqslant \|T_1\| \|T_2\|$.

再证反向不等式. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \|h_1\| = \|h_2\| = 1$ 使得

$$\|T_1 h_1\| \geqslant \|T_1\| - \varepsilon, \qquad \|T_2 h_2\| \geqslant \|T_2\| - \varepsilon.$$

则 $\|h_1 \otimes h_2\| = 1$, 且

$$\|(T_1 \otimes T_2)(h_1 \otimes h_2)\| \geqslant (\|T_1\| - \varepsilon)(\|T_2\| - \varepsilon)$$

由 ε 的任意性即得 $\|T_1 \otimes T_2\| \geqslant \|T_1\| \|T_2\|$.

因此 $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ 良定义并且 $\|T_1 \otimes T_2\| = \|T_1\| \|T_2\|$. □

下面列举几个代数中关于张量积的结果.

命题 1.8.6　设 E, F, G, H 是四个线性空间, $\psi_E : E \to G, \psi_F : F \to H$ 是线性映射, 则

$$\psi_E \odot \psi_F : E \odot F \to G \odot H, \qquad e \otimes f \mapsto \psi_E(e) \otimes \psi_F(f)$$

是良定义的线性映射. 若 E, F, G, H 是 (*-) 代数 (线性空间上带一个乘法运算), 且 ψ_E, ψ_F 是 (*-) 代数同态, 则 $\psi_E \odot \psi_F$ 也是 (*-) 代数同态.

命题 1.8.7　设 E, F 为两个线性空间, G 为一个代数, $\psi_E : E \to G, \psi_F : F \to G$ 为两个线性映射, 则

$$\psi_E \odot \psi_F : E \odot F \to G \odot H, \qquad e \otimes f \mapsto \psi_E(e)\psi_F(f)$$

是良定义的线性映射, 特别地, 若 E 和 F 均为 (*-) 代数, ψ_E, ψ_F 均为 (*-) 代数同态, 并且 $\psi_E(e)\psi_F(f) = \psi_F(f)\psi_E(e)$ 对所有的 $e \in E$ 和 $f \in F$ 均成立, 则 $\psi_E \odot \psi_F$ 为一个 (*-) 代数同态.

以上命题的证明无非是使用张量积的泛性质而无本质困难, 故证明在此略去. 唯一需要指出的是在命题 1.8.6 中并不要求任何意义的交换性, 但命题 1.8.7 要求 ψ_E 与 ψ_F 交换. 这是因为在命题 1.8.7 中希望张量积结构与 G 上的代数结构相容. 更具体地, 在验证 $\psi_E \times \psi_F : E \times F \to G$ 是代数同态时需要这一交换性它保证 $\psi_E \odot \psi_F$ 为代数同态. 但在命题 1.8.6 中无此牵绊, 可以直接验证 $\psi_E \times \psi_F : E \times F \to G \odot H$ 为代数同态.

设 H,K 是 Hilbert 空间, A, B 是 C^* 代数. 因 $\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}(K)$ 此时也是线性空间, 设 $\rho_1: A\to\mathcal{B}(H)$, $\rho_2: B\to\mathcal{B}(K)$ 是两个 (*-) 代数同态, 则 $\rho_1\odot\rho_2: A\odot B\to B(H)\odot B(K)$ 也是 (*-) 代数同态. 另一方面, 若考虑

$$\begin{aligned}\psi_1: B(H)\to B(H\otimes K), &\qquad S\mapsto S\otimes I,\\ \psi_2: B(K)\to B(H\otimes K), &\qquad T\mapsto I\otimes T,\end{aligned}$$

则 ψ_1 与 ψ_2 均为*-代数同态, 且 $\psi_1(S)\psi_2(T)=S\otimes T=\psi_2(T)\psi_1(S)$. 由命题 1.8.7 可知

$$\tau:\mathcal{B}(H)\odot\mathcal{B}(K)\to\mathcal{B}(H\otimes K),\qquad S\odot T\mapsto S\otimes T$$

是良定义的 *-代数同态. 实际上这样的 τ 是一个单同态.

引理 1.8.8 设 E,F 是线性空间, $f_1,\dots,f_N\in F$ 线性无关. 若 $e_1,\dots e_N\in E$ 满足 $\sum_{i=1}^N e_i\otimes f_i=0$, 则对 $i=1,2,\dots,n$ 有 $e_i=0$. 特别地, 若 $\{f_i\}_{i\in I}$ 为 F 的一组 Hamel 基 (*这里考虑 Hamel 基是因为 E, F 上没有拓扑结构.*). 则对任意 $t\in E\odot F$, 它可以唯一地被表示成 $t=\sum_{i=1}^N e_i\otimes f_i$ 的形式.

证明 设 $X=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_N\}$, $Y=\mathrm{span}\{f_1,\dots,f_N\}$, 再设 X 的一组基为 $\{x_1,\dots,x_n\}$, 其中 $n\leqslant N$. 将 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 延拓成 E 的一组基 $\{x_1,\dots,x_n,\dots,x_\lambda\}$, 将 $\{f_1,\dots,f_N\}$ 延拓成 F 的一组基 $\{f_1,\dots,f_N,\dots,f_\lambda\}$. 则

$$0=\sum_{i=1}^N\Big(\sum_{j=1}^n\lambda_{j,i}x_j\Big)\otimes f_i=\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n\lambda_{j,i}(x_j\otimes f_i).$$

这是因为 $\sum_{i=1}^N e_i\otimes f_i=0$.

由命题 1.8.4 可知 $\{x_j\otimes f_i\}_{i,j}$ 线性无关, 因此 $\lambda_{j,i}=0$ 对任何 i, j 成立, 故 $e_i=0$ 对 $i=1,\dots,N$ 成立. 特别地, 对任意 $t\in E\odot F$, 它可以写成 $t=\sum_{i=1}^N u_i\otimes v_i$. 因 $\{f_i\}_{i\in I}$ 为 F 的一组 Hamel 基, 故 v_i 可被 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的一个有限子集线性表出. 再由 v_i 的有限性不妨设 $t=\sum_{i=1}^M g_i\otimes h_i$, 其中 h_i 为 $\{f_i\}_{i\in I}$ 中某个子集的重排, 表示的存在性由此可得. 若这样的表示不唯一, 将两种表示作差, 根据之前证明的结果即可得到矛盾. □

命题 1.8.9 设 H, K 是 Hilbert 空间,

$$\tau:\mathcal{B}(H)\odot\mathcal{B}(K)\to\mathcal{B}(H\otimes K),\qquad S\odot T\mapsto S\otimes T$$

是单*-代数同态.

证明 τ 是*-代数同态已经证明, 下证它是单的. 取 $\{T_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{B}(K)$ 的一组 Hamel 基, 设 $\tau(x)=0$, 由引理 1.8.8 不妨设 $x=\sum_{i=1}^N S_i\odot T_i$. 因 $\sum_{i=1}^N S_i\otimes T_i=0$, 任取 $v,w\in H,\xi,\eta\in K$, 有

$$\begin{aligned}\left\langle\sum_{i=1}^N(S_i\otimes T_i)(v\otimes\xi),w\otimes\eta\right\rangle&=\left\langle\sum_{i=1}^N S_iv\otimes T_i\xi,w\otimes\eta\right\rangle\\&=\sum_{i=1}^N\langle S_iv,w\rangle\langle T_i\xi,\eta\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^N\langle S_iv,w\rangle T_i\xi,\eta\right\rangle=0.\end{aligned}$$

这对所有的 $\xi,\eta\in K$ 成立, 因此 $\sum_{i=1}^N\langle S_iv,w\rangle T_i\xi=0$ 对所有的 $\xi\in K$ 成立, 因此 $\sum_{i=1}^N\langle S_iv,w\rangle T_i=0$. 再根据 T_i 线性无关可知 $\langle S_iv,w\rangle=0$ 对所有的 $v,w\in H$ 均成立, 因此 $S_i=0$. 那么 $x=0$, 即 τ 为单射. □

利用之前的讨论可以定义 C^* 代数张量积中的极小范数.

定义 1.8.10 (极小范数)　设 A, B 是 C^* 代数, $\rho_1 : A \to \mathcal{B}(H_1)$, $\rho_2 : B \to \mathcal{B}(H_2)$ 是忠实表示, 在 $A \odot B$ 上定义**空间范数** (或**极小范数**) 如下.

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} (a_i \otimes b_i) \right\|_{\min} := \left\| \sum_{i=1}^{N} \rho_1(a_i) \otimes \rho_2(b_i) \right\|_{\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)}$$

由命题 1.8.6 可知*-代数同态 $\rho_1 \odot \rho_2 : A \odot B \to \mathcal{B}(H_1) \odot \mathcal{B}(H_2)$ 良定义. 由命题 1.8.9 可知 $\mathcal{B}(H_1) \odot \mathcal{B}(H_2)$ 可以自然地嵌入到 $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ 中. 因此

$$\tau \circ (\rho_1 \odot \rho_2) : A \odot B \to \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$$

是良定义的*-代数同态, 通常记 $\rho = \tau \circ (\rho_1 \odot \rho_2)$. 由此极小范数的定义可以重述为: 对任意 $x \in A \odot B$, $\|x\|_{\min} = \|\rho(x)\|_{\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)}$.

引理 1.8.11　$\|\cdot\|_{\min}$ 为一个代数半范数, 且满足 C^* 条件.

证明　由空间范数的定义, 任取 $x \in A \odot B$, 由 $\|x\|_{\min} = \|\rho(x)\|_{\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)}$ 容易验证 $\|\cdot\|_{\min}$ 为一个代数半范数并且满足 C^* 条件. □

引理 1.8.12　设 E, F, G, H 是线性空间, $\psi_E : E \to G$, $\psi_F : F \to H$ 是单线性映射, 则

$$\psi_E \odot \psi_F : E \odot F \to G \odot H, \qquad e \otimes f \mapsto \psi_E(e) \otimes \psi_F(f)$$

也是单线性映射.

证明　由命题 1.8.6 可知 $\psi_E \odot \psi_F$ 良定义, 只需证明它是单的. 设 F 的 Hamel 基为 $\{f_i\}_{i \in I}$, $x \neq 0$ 使得 $\psi_E \odot \psi_F(x) = 0$, 由引理 1.8.8 知 $x = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes f_i$. 而 ψ_F 为单射, 故 $\{\psi_F(f_i)\}_{i \in I}$ 是 H 中的线性无关集. 又因为 $\psi_E \odot \psi_F(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi_E(e_i) \otimes \psi_F(f_i) = 0$, 根据引理 1.8.8 得到 $\psi_E(e_i) = 0$ 对任何 $i = 1, \ldots, N$ 成立. 从而 ψ_E 的单性导出 $e_i = 0$ 对 $i = 1, \ldots, N$ 成立. 这即 $x = 0$. 所以 $\psi_E \odot \psi_F$ 为单射. □

命题 1.8.13　$\|\cdot\|_{\min}$ 是一个 C^* 范数.

证明　因 ρ_1 和 ρ_2 均忠实, $\rho = \tau \circ (\rho_1 \odot \rho_2)$ 是单的. 它满足 C^* 条件在引理 1.8.11 已证. □

至此, 我们说明了极小范数 $\|\cdot\|_{\min}$ 的确是 $A \odot B$ 上的范数, 且满足 C^* 条件. 因此 $A \odot B$ 在 $\|\cdot\|_{\min}$ 下的完备化也是 C^* 代数, 记作 $A \otimes_{\min} B$. 这样的记号是良定义的: 下面说明极小范数不依赖于忠实表示的选取.

引理 1.8.14　设 A 是 C^* 代数, 则 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A \cong \mathrm{Mat}_n(A)$. $\mathrm{Mat}_n(A)$ 上的 C^* 范数在 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 上诱导出一个 C^* 范数, 且 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 在这个诱导 C^* 范数下完备. 特别地, 这一诱导范数是 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 上唯一的 C^* 范数 (换句话说, $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 是核 C^* 代数.), 因此可以使用记号 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \otimes A$ 表示 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 在诱导范数下完备化得到的 C^* 代数.

证明　取忠实的 GNS 表示后不妨设 $A \subset \mathcal{B}(H)$. 记 $H^{(n)} = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$, 则 $\mathrm{Mat}_n(A) \subset \mathcal{B}(H^{(n)})$, 其上赋予算子范数. 这一范数满足 C^* 条件, 且 A 的完备性导出 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 的完备性. 令

$$\rho : \mathrm{Mat}_n(A) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A, \qquad [a_{i,j}] \mapsto \sum_{i.j=1}^{n} E_{i,j} \odot a_{i,j},$$

容易验证 ρ 给出 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 到 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 的代数同构. 于是 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 上自然有 C^* 范数 $\|\rho([a_{i,j}])\|_1 = \|[a_{i,j}]\|$, 由 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 完备可知 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \odot A$ 也完备.

再证 C^* 范数的唯一性. 若 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\odot A$ 上还有一个 C^* 范数 $\|\cdot\|_2$, 令 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\otimes_2 A$ 为 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\odot A$ 在 $\|\cdot\|_2$ 下的完备化. 考虑嵌入映射

$$i:(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\odot A,\|\cdot\|_1)\to(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\otimes_2 A,\|\cdot\|_2).$$

它是单的 C^* 代数同构, 从而是等距. 因此对任意 $x\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\odot A$ 成立 $\|x\|_1=\|x\|_2$. □

命题 1.8.15 $\|\cdot\|_{\min}$ 与忠实表示的选取无关. 设 A, B 是 C^* 代数, $\rho_1:A\to\mathcal{B}(H_1)$, $\rho_2:B\to\mathcal{B}(H_2)$, $\rho_1':A\to\mathcal{B}(H_1')$, $\rho_2':B\to\mathcal{B}(H_2')$ 是忠实表示. 则 $\rho=\tau\circ(\rho_1\odot\rho_2)$ 诱导出的空间范数 $\|\cdot\|_\rho$ 与 $\rho'=\tau\circ(\rho_1'\odot\rho_2')$ 诱导出的空间范数 $\|\cdot\|_{\rho'}$ 相同, 记作 $(\rho_1,\rho_2)\sim(\rho_1',\rho_2')$.

证明 由对称性不妨设 $\rho_1=\rho_1'$, $H_1=H_1'$. 如果可以证明 $(\rho_1,\rho_2)\sim(\rho_1,\rho_2')$, 类似地也可证 $(\rho_1,\rho_2')\sim(\rho_1',\rho_2')$, 从而得到 $(\rho_1,\rho_2)\sim(\rho_1',\rho_2')$.

考虑 $A=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 的情形: $\|\cdot\|_\rho$ 与 $\|\cdot\|_{\rho'}$ 均为 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\odot B$ 上的 C^* 范数, 故引理 1.8.14 说明它们与引理中 $\mathrm{Mat}_n(B)$ 诱导的算子范数相同, 故 $\|\cdot\|_\rho=\|\cdot\|_{\rho'}$.

若 A, B 均可分, 不妨 H_1 可分, 可得一列有限秩投影 $(P_n)_{n\geqslant1}$ 满足

$$n\leqslant m\implies P_n\leqslant P_m,\qquad \operatorname{rank}P_n=n,\qquad \mathop{\text{SOT–lim}}_{n\to\infty}P_n=\mathrm{id}_{H_1}.$$

而 $\|P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2}\|=\|P_n\|\,\|\mathrm{id}_{H_2}\|=1$, 由有界性易证 $\text{SOT–lim}_{n\to\infty}P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2}=\mathrm{id}_{H_1}\otimes\mathrm{id}_{H_2}$. 则对任意 $T\in\mathcal{B}(H_1\otimes H_2)$, 由有界性可知

$$\mathop{\text{SOT–lim}}_{n\to\infty}(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})=T.$$

断言 $\|T\|=\sup_n\|(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})\|$. 首先由

$$\|(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})\|\leqslant\|P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2}\|\,\|T\|\,\|P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2}\|=\|T\|$$

可知 $\sup_n\|(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})\|\leqslant\|T\|$. 再由

$$\mathop{\text{SOT–lim}}_{n\to\infty}(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})=T$$

知

$$\|T\|\leqslant\limsup_n\|(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})\|\leqslant\sup_n\|(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})\|.$$

于是 $\|T\|=\sup_n\|(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})T(P_n\otimes\mathrm{id}_{H_2})\|$.

任取 $x\in\sum_{i=1}^m a_i\odot b_i$, 有

$$\|x\|_\rho=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^m P_n\rho_1(a_i)P_n\otimes\rho_2(b_i)\right\|,\qquad \|x\|_{\rho'}=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^m P_n\rho_1'(a_i)P_n\otimes\rho_2'(b_i)\right\|.$$

注意到 $P_n\mathcal{B}(H_1)P_n=\mathcal{B}(P_nH_1)$, $\dim P_nH_1=n$, 因此 $\mathcal{B}(P_nH_1)\cong\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. 由第一种情形可知对任意固定的 n 有

$$\left\|\sum_{i=1}^m P_n\rho_1(a_i)P_n\otimes\rho_2(b_i)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^m P_n\rho_1(a_i)P_n\otimes\rho_2'(b_i)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^m P_n\rho_1'(a_i)P_n\otimes\rho_2'(b_i)\right\|,$$

故 $\|x\|_\rho=\|x\|_{\rho'}$.

若 A, B 不可分, 令 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 H_1 的一组基, 其中 I 不可数. 考虑 I 的可数子集全体 $\operatorname{fin}I$, 它依包含关系自然构成偏序集 $(\operatorname{fin}I,\subset)$. 定义网

$$P:\operatorname{fin}I\to\mathcal{B}(H_1),S\mapsto P_S,$$

其中 P_S 是到 $\operatorname{span}\{e_i\}_{i\in S}$ 的正交投影算子, 则 $\operatorname{rank} P_S = |S|$. 此时 $\text{SOT–}\lim_S P_S = I$, 后面的证明与第二种情形类似. □

至此我们说明了空间范数是一个良定义的 C^* 范数, 它不依赖忠实表示的选取. 另一个结论是空间范数是所有 C^* 范数中最小的. 这一结论的证明非常复杂, 它由竹崎正道给出.

定理 1.8.16 (竹崎正道)　设 A, B 是 C^* 代数. 对 $A \odot B$ 上的任何 C^* 范数 γ, 总有

$$\|x\|_{\min} \leqslant \gamma(x), \qquad \forall x \in A \odot B.$$

证明　过于复杂此处略去, 请雅好此道者参考 [**BO, 3.4 节**]. □

下面给出一个对极小范数的等价刻画, 这对之后讨论代数同态间张量积时起到重要作用.

命题 1.8.17　设 A, B 是 C^* 代数, 记

$$\mathcal{R} = \left\{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1 : A \to \mathcal{B}(H_1),\ \rho_2 : B \to \mathcal{B}(H_2)\ \text{是表示}\right\}.$$

对 $x = \sum_{j=1}^n a_j \odot b_j \in A \odot B$, 有

$$\|x\|_{\min} = \sup_{\mathcal{R}} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_1(a_j) \otimes \rho_2(b_j) \right\|.$$

也即

$$\|x\|_{\min} = \sup_{\mathcal{R}} \left\{\|\rho(x)\| : \rho = \rho_1 \odot \rho_2\right\}.$$

证明　对固定的 $x \in A \odot B$, 设 $M = \sup_{\mathcal{R}} \left\|\sum_{j=1}^n \rho_1(a_j) \otimes \rho_2(b_j)\right\|$. 任取忠实表示 $\rho_1,\ \rho_2$, 显然 $M \geqslant \|x\|_{\min}$, 下证反向不等式.

任取表示 $\rho_1 : A \to \mathcal{B}(H_1)$, $\rho_2 : B \to \mathcal{B}(H_2)$, 再取忠实表示 $\rho_1' : A \to \mathcal{B}(H_1')$, $\rho_2' : B \to \mathcal{B}(H_2')$. 则

$$\rho_1 \oplus \rho_1' : A \to \mathcal{B}(H_1 \oplus H_1'), \quad \rho_2 \oplus \rho_2' : B \to \mathcal{B}(H_2 \oplus H_2')$$

均为忠实表示. 记 P_i 是从 $H_i \oplus H_i'$ 到 H_i 的投影, T_i 是从 H_i 到 $H_i \oplus H_i'$ 的嵌入. 则

$$P_i \in \mathcal{B}(H_i \oplus H_i', H_i), \quad T_i \in \mathcal{B}(H_i, H_i \oplus H_i'), \quad \|T_i\| = \|P_i\| = 1, \quad P_i(\rho_i \oplus \rho_i')T_i = \rho_i.$$

此时容易验证

$$P_1 \otimes P_2 \in \mathcal{B}((H_1 \oplus H_1') \otimes (H_2 \oplus H_2'), H_1 \otimes H_2)$$
$$T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2, (H_1 \oplus H_1') \otimes (H_2 \oplus H_2'))$$

类似于命题 1.8.5 中的做法, 可以证明 $\|P_1 \otimes P_2\| = \|T_1 \otimes T_2\| = 1$. (注意到此时无法取恒同映射 id, 但证明中本质的条件是算子可以把标准正交基映成标准正交集, 而对 T_i 和 P_i 来说这一性质总是满足的, 因此可以完成证明). 又因为

$$(P_1 \otimes P_2) \sum_{j=1}^n (\rho_1 \oplus \rho_1')(a_j) \otimes (\rho_2 \oplus \rho_2')(b_j)(T_1 \otimes T_2) = \sum_{j=1}^n \rho_1(a_j) \otimes \rho_2(b_j)$$

故

$$\left\| \sum_{j=1}^n \rho_1(a_j) \otimes \rho_2(b_j) \right\| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^n (\rho_1 \oplus \rho_1')(a_j) \otimes (\rho_2 \oplus \rho_2')(b_j) \right\| = \|x\|_{\min}$$

即 $M \leqslant \|x\|_{\min}$. □

定义 1.8.18 (极大范数) 设 A, B 是 C^* 代数, 记

$$C := \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1 : A \to \mathcal{B}(H), \rho_2 : B \to \mathcal{B}(H), \rho_1(a)\rho_2(b) = \rho_2(b)\rho_1(a)\}$$

对 $x \in A \odot B$, 定义

$$\|x\|_{\max} = \sup_C \{\|\rho(x)\| : \rho = \rho_1 \odot \rho_2\}.$$

称作是 $A \odot B$ 上的**极大范数**.

以上给出的定义是良好的: 其中 ρ 良定义由命题 1.8.7 得到, 而

$$\|\rho(a \otimes b)\| = \|\rho_1(a) \otimes \rho_2(b)\| = \|\rho_1(a)\| \|\rho_2(b)\| \leqslant \|a\| \|b\|$$

因此取到的上确界总是有限的.

注 若表示 $\rho_1 : A \to \mathcal{B}(H)$ 与 $\rho_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ 有交换的像, 那么 $\rho = \rho_1 \odot \rho_2 : A \odot B \to \mathcal{B}(H)$ 良定义, 反之如何? 换句话说, 如果 ρ 是 $A \odot B$ 到 $\mathcal{B}(H)$ 的非退化表示, 是否一定存在 $\rho_1 : A \to \mathcal{B}(H)$ 以及 $\rho_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ 使得其有交换的像, 且 $\rho = \rho_1 \odot \rho_2$?

当 $A, \mathcal{B}$ 都是单位 C^* 代数时令 $\rho_1(a) = \rho(a \otimes 1), \rho_2(b) = \rho(1 \otimes b)$ 即可. 不含幺的情形比较复杂, [BO, **定理** 3.2.6] 证明了这一结论, 现叙述如下: 对任意的非退化表示 $\rho : A \odot B \to B(H)$, 存在非退化的 $\rho_1 : A \to \mathcal{B}(H), \rho_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ 使得 ρ_1 与 ρ_2 有交换的像, 且 $\rho = \rho_1 \odot \rho_2$. 此时称 ρ_1 为 ρ 在 A 上的**限制**, 记作 $\rho_1 = \rho|_A$, ρ_2 为 ρ 在 $\mathcal{B}$ 上的**限制**, 记作 $\rho_2 = \rho|_{\mathcal{B}}$. 于是极大范数的定义可以重述为:

$$\|x\|_{\max} = \sup_\rho \{\|\rho(x)\| : \rho : A \odot B \to B(H) \text{ 为一个表示}\}.$$

回顾空间范数的定义, 取 $\rho_1 : A \to \mathcal{B}(H_1), \rho_2 : B \to \mathcal{B}(H_2)$ 是忠实表示, 则

$$\|x\|_{\min} = \{\|\rho(x)\| : \rho = \rho_1 \odot \rho_2 : A \odot B \to \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)\}.$$

由此立刻得到 $\|x\|_{\min} \leqslant \|x\|_{\max}$. 因此若 $\|x\|_{\max} = 0$ 则 $\|x\|_{\min} = 0$, 即 $x = 0$. 结合 $\|x\|_{\max}$ 的定义容易验证它是一个 C^* 范数.

下面给出 $\|\cdot\|_{\max}$ 的等价定义, 这即课堂上给出的定义.

命题 1.8.19 设 A, B 是 C^* 代数, 另外任取 C 是 C^* 代数, 记

$$C'(C) := \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1 : A \to C, \rho_2 : B \to C, \rho_1(a)\rho_2(b) = \rho_2(b)\rho_1(a)\}$$

对 $x \in A \odot B$, 定义

$$\|x\|_{\max'} = \sup_{C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C^*\text{–}Alg})} \sup_{C'(C)} \{\|\rho(x)\| : \rho = \rho_1 \odot \rho_2\}.$$

则 $\|x\|_{\max} = \|x\|_{\max'}$.

证明 由命题 1.8.7 可知 ρ 是良定义的*-代数同态. 因 $\mathcal{B}(H)$ 是 C^* 代数, 于是 $\|x\|_{\max} \leqslant \|x\|_{\max'}$.

另一方面, 任取 C^* 代数 C, 考虑其忠实表示 $\rho : C \to \mathcal{B}(H)$. 由 ρ 忠实可知 ρ 是等距. 此时 $(\rho \circ \rho_1, \rho \circ \rho_2) \in C'(\mathcal{B}(H))$, 且

$$\|(\rho_1 \odot \rho_2)(x)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\rho \circ (\rho_1 \odot \rho_2)(x)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\rho_1 \odot \rho_2(x)\|_C$$

因此 $\|x\|_{\max'} \leqslant \|x\|_{\max}$. □

推论 1.8.20　设 $A, \mathcal{B}$ 是 C^* 代数, 另外任取 C 是 C^* 代数, 记

$$C''(C) := \left\{\rho : \rho : A \odot B \to C \text{ 是}^*\text{-代数同态}\right\}.$$

对 $x \in A \odot B$ 定义

$$\|x\|_{\max'} = \sup_{C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C^*\text{–}Alg})} \sup_{\rho \in C''(C)} \|\rho(x)\|.$$

则 $\|x\|_{\max} = \|x\|_{\max''}$.

证明　因 $\mathcal{B}(H)$ 也是 C^* 代数, 故 $\|x\|_{\max} \leqslant \|x\|_{\max''}$.

另一方面, 任取 C^* 代数 C, 考虑其忠实表示 $\rho' : C \to \mathcal{B}(H)$. 由 ρ' 忠实可知 ρ' 是等距. 此时 $\rho' \circ \rho : A \odot B \to \mathcal{B}(H) \in C''(\mathcal{B}(H))$, 且

$$\|\rho' \circ \rho(x)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\rho(x)\|_C$$

因此 $\|x\|_{\max''} \leqslant \|x\|_{\max}$. □

下面证明 $\|\cdot\|_{\max}$ 的确是 $A \odot B$ 上所有 C^* 范数中最大的一个. 为此, 从描述它的泛性质开始.

命题 1.8.21 (极大范数的泛性质)　设 A, B 是 C^* 代数, 对任意 C^* 代数 C , *-代数同态 $\varphi : A \odot B \to C$ 总可以唯一地延拓成 $A \otimes_{\max} B$ 到 C 上的连续*-代数同态 ψ.

证明　因 $\varphi : A \odot B \to C$ 是*-代数同态, 由推论 1.8.20 可知 $\|\varphi(x)\|_C \leqslant \|x\|_{\max}$. 再根据 $A \odot B$ 在 $A \otimes_{\max} B$ 下的稠密性和 C 的完备性可将 φ 唯一延拓成一个*-代数同态 $\psi : A \otimes_{\max} B \to C$. □

推论 1.8.22　设 $A,\ B$ 是 C^* 代数. 对 $A \odot B$ 上的任何 C^* 范数 α, 总有

$$\alpha(x) \leqslant \|x\|_{\max}, \qquad \forall x \in A \odot B.$$

证明　若 $A \odot B$ 上存在范数 $\|\cdot\|_\alpha$, 考虑在 α 范数下的完备化 C^* 代数 $A \otimes_\alpha B$ 和嵌入映射 $i : A \odot B \to A \otimes_\alpha B$. 这里 i 是一个*-代数同态, 由命题 1.8.21 可知 i 可被唯一延拓成 $A \otimes_{\max} B$ 到 C 的*-代数同态, 记作 j. 此时 j 作为 C^* 代数之间的同态自然是压缩的, 即 $\|j(x)\|_\alpha \leqslant \|x\|_{\max}$. 当 $x \in A \odot B$ 时 $j(x) = i(x) = x$, 故 $\|x\|_\alpha \leqslant \|x\|_{\max}$. □

至此, 定理 1.8.16 说明 $\|\cdot\|_{\min}$ 是 $A \odot B$ 上的最小 C^* 范数, 推论 1.8.22 说明 $\|\cdot\|_{\max}$ 是 $A \odot B$ 上的最大 C^* 范数.

命题 1.8.23　设 A, B 是 C^* 代数, $A \odot B$ 上有 C^* 范数 $\|\cdot\|_\alpha$, 则:

(1)　对任意 $x \in A \odot B$ 成立 $\|x\|_{\min} \leqslant \|x\|_\alpha \leqslant \|x\|_{\max}$;

(2)　存在满*-代数同态 $A \otimes_{\max} B \to A \otimes_\alpha B \to A \otimes_{\min} B$ 唯一地延拓恒等映射 $A \odot B \to A \odot B \to A \odot B$.

证明　(1) 由定理 1.8.16 和推论 1.8.22 得到.

(2) 由 (1) 可知存在唯一*-代数同态 $A \otimes_{\max} B \to A \otimes_\alpha B \to A \otimes_{\min} B$ 延拓恒等映射 $A \odot B \to A \odot B \to A \odot B$, 只需证明它是满的. 这因 C^* 代数间同态的像一定是闭的, 且包含 $A \odot B$. 而 $A \odot B$ 在三种范数意义下的完备化中依照各自范数均稠密, 因此像是稠密闭集, 即全集, 因此得到的延拓是满射. □

2 具体 C^* 代数和 von Neumann 代数

本章我们将目光放在具体的 C^* 代数上, 也即那些 $\mathcal{B}(H)$ 的自伴闭子代数. 由于 GNS 构造说明了任何抽象 C^* 代数都可以通过忠实表示看作 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数, 于是研究 $\mathcal{B}(H)$ 的结构便重要起来. 本章的主题大体有三:

(1) von Neumann 代数的定义与基本性质;

(2) C^* 代数的表示理论, 进一步讨论;

(3) 正规算子的分类定理.

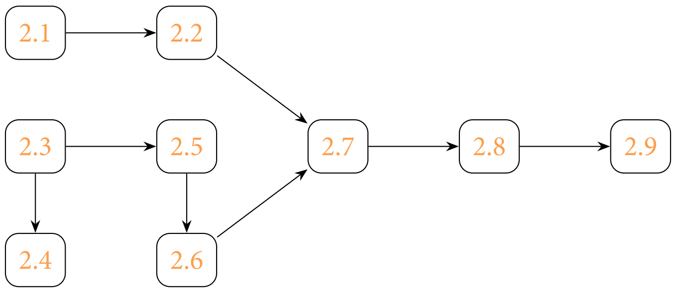
其中前两个主题相互独立, 但正规算子的分类需要同时用到前两个主题讨论的内容.

- 第 1 节先来处理 $\mathcal{B}(H)$ 上的局部凸拓扑. 之前定义过范数拓扑, sot, wot, 它们都是 $\mathcal{B}(H)$ 上的局部凸拓扑. 但对 von Neumann 代数的讨论来说仅有这三种局部凸拓扑仍然不够精细, 通过伴随作用和将有限和改为级数, 我们得到 $\mathcal{B}(H)$ 上的 7 种不同的局部凸拓扑.
- 第 2 节讨论 von Neumann 代数的稠密性定理, 核心的结论是二次交换子定理和 Kaplansky 稠密性定理. 它说明 C^* 子代数上有界集 sot 闭包就是二次交换子上的有界集.
- 第 3 节接续 1.5 节的讨论, 回到 C^* 代数表示的主题. 之前已经说明通过态可以构造一个表示, 这是 GNS 构造给出的结果. 而本节的核心结果是说明纯态, 也即态空间的端点与不可约表示可以建立一一对应的关系.
- 第 4 节讨论有限维 C^* 代数的结构. 通过表示的不可约分解, 说明任何有限维 C^* 代数都同构于若干矩阵代数的直和. 于是今后讨论有限维代数时均可以化归到讨论矩阵代数的情形.
- 第 5 节我们在 von Neumann 代数上建立谱测度和谱积分. 在研究 C^* 代数的表示之后, $C(X)$ 作为交换 C^* 代数自然可以表示到 $\mathcal{B}(H)$ 上, 并且保持单位. 而 $C(X)$ 作为 Banach 空间的对偶是 $M(X)$, 于是在这样的对偶下能否将表示 π 也对偶到某种意义下的测度成为本节的讨论目标. 我们将建立 $\mathcal{B}(H)$ 上元素的谱测度, 并由此可以给出正规算子的谱分解.
- 第 6 节讨论循环表示和有界 Borel 函数演算. von Neumann 代数不同于 C^* 代数的一个方面是它容许非常多的投影算子, 这通过有界 Borel 函数演算做到, 对任何 Borel 集 Δ 总可以通过对 1_Δ 做 Borel 函数演算得到一个投影算子. 而循环表示的存在说明任何的交换 von Neumann 代数都可以看作是某个空间 (X,μ) 上的函数代数 $L^\infty(X,\mu)$.
- 第 7–9 节的目标是讨论正规算子的分类, 第 7 节的分类是指在酉等价下的分类. 正如特征值本身具有重数, 正规算子的谱点不同的空间实现导致酉等价不再成立, 而朴素的观点是将不同的空间实现看作是谱点的不同重数. 由此引出了一致重数的概念, 并说明正规算子酉等价当且仅当它们的谱测度和重数完全相同.
- 在有限维情形通过酉等价总可以将正规算子做对角化, 但无限维的情况下不再成立. 于是第 8 节弱化酉等价的条件, 并尝试在近似酉等价的意义下将正规算子进行对角化. 这实际上是在将具有有限重数的谱点去掉, 它们作为谱中的 “平凡” 部分不再被考虑, 而只将具有无限重数的部分

单独拿出来, 称作是本质谱. 从而无限维情形下可对角化的算子都可以在模掉紧算子的意义下近似酉等价于某个对角算子.

- 前面对正规算子的对角化依赖于 $C(X)$ 的表示, 而 $C(X)$ 作为交换的 C^* 代数, ev_x 自然地成为一个特征. 第 9 节的目标是将其推广到非交换的情形下, 这依赖于完全正映射这一工具. 而 Voiculescu 定理本质上是在说任何的可分 C^* 代数都可以在模掉紧算子意义下近似酉等价于若干不可约表示的直和.

阅读顺序



2.1 $\mathcal{B}(H)$ 上的局部凸拓扑

我们已经在 $\mathcal{B}(H)$ 上定义过通常的范数拓扑, SOT 和 WOT. 一般来说, 范数拓扑强于 SOT, 而 SOT 强于 WOT.

命题 2.1.1 考虑 $\mathcal{B}(H)$ 上的运算:

(1) 伴随运算 $x \mapsto x^*$ 是 WOT–连续的, 但不是 SOT–连续的, 除非 $\dim H < \infty$;

(2) 左乘运算 $a \mapsto xa$ 和右乘运算 $a \mapsto ax$ 同时是 WOT–连续和 SOT–连续的;

(3) 乘法 $M : \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H), (x, y) \mapsto xy$ 既不是 WOT–联合连续的, 也不是 SOT–联合连续的; 但将任何一个分量限制到 $\mathcal{B}(H)$ 上的有界集时, 它 SOT–联合连续;

(4) $\mathcal{B}(H)_1 := \mathbb{B}(\mathcal{B}(H))$ 是 WOT–紧的, 但不是 SOT–紧的.

证明 (1) 首先, 设 $x_i \xrightarrow{\text{WOT}} x$, 那么由 $\langle x_i\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x_i^*\eta\rangle$ 可知 $x_i^* \xrightarrow{\text{WOT}} x^*$, 于是伴随是 WOT–连续的. 为了说明它不是 SOT–连续的, 考虑 ℓ^2 上的单向移位算子

$$S : \ell^2 \to \ell^2, \qquad e_n \mapsto e_{n+1},$$

其中 $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 ℓ^2 的一个 Hilbert 基. 则 $S^{*n} \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, 但 S^n 总是等距算子, 于是不可能 SOT–收敛到 0, 这就说明了伴随不是 SOT–连续的.

(2) 只证明左乘的情形, 右乘类似可证. 设 $x_i \xrightarrow{\text{WOT}} x$, 由

$$\langle x_i a\xi, \eta\rangle = \langle a\xi, x_i^*\eta\rangle \to \langle a\xi, x^*\eta\rangle = \langle xa\xi, \eta\rangle$$

可知 $x_i a \xrightarrow{\text{WOT}} xa$, 从而它 WOT–连续. 再设 $x_i \xrightarrow{\text{SOT}} x$, 由 $\eta = a\xi \in H$ 可知 $x_i a\xi \to xa\xi$, 于是 $x_i a \xrightarrow{\text{SOT}} xa$, 从而它 SOT–连续.

(3) 考虑 H 上这样的二元组全体 $\Lambda = \{(M, \xi)\}$, 其中 M 是 H 的有限维子空间, 单位向量 ξ 与 M 正交. 在 Λ 上可以定义偏序关系

$$(M, \xi) < (N, \eta) \Longleftrightarrow M \subset N,\ \xi \in N$$

使得 Λ 成为一个定向集. 设 $\zeta \in H$, $\|\zeta\| = 1$, 定义这样的两个算子

$$x_{(M,\xi)} := \dim M \cdot \zeta\xi^*, \qquad y_{(M,\xi)} := \frac{1}{\dim M} \cdot \xi\zeta^*,$$

这里 $\zeta\xi^* : \eta \mapsto \langle \eta, \xi \rangle \zeta$ 是一个秩 1 算子. 则由

$$\lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} x_{(M,\xi)}\eta = \lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} \dim M \cdot \langle \eta, \xi \rangle \zeta = 0$$

(这因 ξ 总是与 M 正交) 和

$$\lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} y_{(M,\xi)}\eta = \lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} \frac{1}{\dim M} \cdot \langle \eta, \zeta \rangle \xi = 0,$$

(这因 $\langle \eta, \zeta \rangle$ 是有界的) 可知

$$\text{SOT–}\lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} x_{(M,\xi)} = \text{SOT–}\lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} y_{(M,\xi)} = 0.$$

但

$$\lim_{(M,\xi)\uparrow\Lambda} x_{(M,\xi)}y_{(M,\xi)}\eta = \langle \eta, \zeta \rangle \langle \xi, \xi \rangle \zeta$$

当 $\langle \eta, \zeta \rangle \neq 0$ 时不可能收敛到 0, 于是乘法运算并不是 SOT–联合连续的.

但当一个分量限制到 $\mathcal{B}(H)$ 的有界集时, 不妨考虑

$$M_1 : \mathcal{B}(H)_1 \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H), \qquad (x, y) \mapsto xy,$$

取 $x_i \xrightarrow{\text{SOT}} x, y_i \xrightarrow{\text{SOT}} y, \|x_i\| \leqslant 1$. 因对任意 $\xi \in H$ 成立

$$\|(x_iy_i - xy)\xi\| \leqslant \|(x - x_i)y\xi\| + \|x_i\| \, \|(y - y_i)\xi\| \to 0$$

可知 SOT–$\lim_{i\uparrow\alpha} x_iy_i = xy$.

(4) 注意到 $\mathcal{B}(H)$ 是自反的, 于是 $\mathcal{B}(H)_1$ 是弱紧的. 考虑 $K = (\mathcal{B}(H)_1, \mathrm{wk})^{\mathcal{B}(H)_1}$, 由 Tychonoff 定理可知 K 是紧的, 并且 $(\mathcal{B}(H)_1, \text{WOT})$ 可以自然地嵌入到 K 中. 由于范数是弱下半连续的, 于是 $(\mathcal{B}(H)_1, \text{WOT})$ 在 K 中是闭的, 从而也是紧的. 但它并不是 SOT–紧的, 我们仍然考虑 (1) 中的单向移位算子即可. □

但有时我们也的确需要伴随运算在更强一些的拓扑上连续, 因此我们考虑在强算子拓扑上添加一些开集, 使得伴随运算也是连续的.

定义 2.1.2 (*强算子拓扑)　在 $\mathcal{B}(H)$ 上考虑半范数族

$$\left\{ x \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} (\|x\xi_i\|^2 + \|x^*\xi_i\|^2) \right)^{1/2} : \xi_i \in H \right\}$$

诱导出的拓扑, 称作是 $\mathcal{B}(H)$ 上的 ***强算子拓扑**, 记作*SOT.

那么此时我们知道: 范数拓扑, *SOT, SOT, WOT 是依次减弱的四种拓扑. 下面我们考虑后三种拓扑下的连续线性泛函. 为此, 引入以下的概念:

定义 2.1.3 (半双线性泛函)　称 $f : H \times H \to \mathbb{C}$ 是一个**半双线性泛函**, 若对任何 $\xi, \eta, \zeta \in H$ 和 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, 有

$$f(\lambda\xi + \mu\eta, \zeta) = \bar{\lambda} f(\xi, \zeta) + \bar{\mu} f(\eta, \zeta), \qquad f(\zeta, \lambda\xi + \mu\eta) = \lambda f(\zeta, \xi) + \mu(\zeta, \eta).$$

称 f 是自伴的, 若 $f(\xi, \eta) = \overline{f(\eta, \xi)}$, 称 f 是正的, 若 $f(\xi, \xi) \geqslant 0$.

半双线性泛函的范数可以如下定义:

$$\|f\| := \sup_{\|\xi\|\leqslant 1, \|\eta\|\leqslant 1} |f(\xi,\eta)|\,,$$

称 f 是**有界**的, 若 $\|f\| < \infty$. 因此类似地, 半双线性泛函仍有有界性与连续性的等价.

命题 2.1.4 设 f 是 H 上的半双线性泛函, 以下条件等价:

(1) f 是有界的;

(2) f 在 $H \times H$ 上连续;

(3) f 在 0 处连续.

其证明与线性泛函的情形是类似的, 并且半双线性泛函仍然有**极化恒等式**, 即对任意 $\xi, \eta \in H$, 成立

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k f(\mathrm{i}^k\xi + \eta, \mathrm{i}^k\xi + \eta).$$

这一结论只需代入验证即可.

定理 2.1.5 设 $x \in \mathcal{B}(H)$, 则 $f_x : (\xi,\eta) \mapsto \langle \xi, x\eta\rangle$ 是 H 上的有界半双线性泛函, $\|f_x\| = \|x\|$. 并且 H 上的有界半双线性泛函都具有 f_x 的形式.

证明 由定义可知 f_x 是半双线性泛函, 它有界因

$$\|f_x\| = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1, \|\eta\|\leqslant 1} |f_x(\xi,\eta)| \leqslant \sup_{\|\xi\|\leqslant 1, \|\eta\|\leqslant 1} \|\xi\|\,\|x\|\,\|\eta\| = \|x\|\,.$$

下面固定 $\eta \in H$, f 是 H 上的有界半双线性泛函. 此时映射 $\xi \mapsto f(\xi,\eta)$ 是共轭线性泛函, 由 Riesz 表示定理可知存在唯一的 $x(\eta) \in H$ 使得

$$\langle \xi, x(\eta)\rangle = f(\xi,\eta), \qquad \forall \xi \in H.$$

而 $f(\cdot,\eta)$ 对 η 是线性的, 由 $x(\eta)$ 的唯一性可知映射 $\eta \mapsto x(\eta)$ 是良定义的线性映射. 又因为

$$\|x(\eta)\| = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} |\langle \xi, x(\eta)\rangle| \leqslant \|f\|\,\|\eta\|\,,$$

于是 $\|x\| \leqslant \|f\|$. 从而 $x \in \mathcal{B}(H)$, 并且此时 $f = f_x$. □

推论 2.1.6 f_x 是自伴的当且仅当 x 是自伴的, f_x 是正的当且仅当 x 是正的.

这一推论的证明是显然的.

当 ξ, η 被固定下来后, H 上的半双线性泛函 $f(\xi,\eta) = \langle \xi, x\eta\rangle$ 又可以看作是 x 的线性泛函, 记

$$f_{\xi,\eta}(x) := \langle \xi, x\eta\rangle\,.$$

下面说明 $\mathcal{B}(H)$ 上这三种拓扑下的连续线性泛函都恰是 $f_{\xi,\eta}$ 的有限线性组合.

定理 2.1.7 设 f 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的线性泛函, 以下条件等价:

(1) 存在 H 的有限子集 $\{\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n\}$ 使得 $f = \sum_{i=1}^n f_{\xi_i,\eta_i}$;

(2) f 是 WOT–连续的;

(3) f 是 SOT–连续的;

(4) f 是*SOT–连续的.

证明 (1) $\implies$ (2) : 这由 f_{ξ_i,η_i} 的定义立刻得到.

(2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) : 这因 WOT 比 SOT 弱, 而 SOT 比*SOT 弱.

(4) $\implies$ (1) : 设 f 是*SOT–连续的, 那么 $f^{-1}(\mathbb{B}(\mathcal{B}(H)))$ 是开集, 于是存在 H 的有限子集 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 使得

$$f^{-1}(\mathbb{B}(\mathcal{B}(H))) \supset \left\{ x \in \mathcal{B}(H) : \left(\sum_{i=1}^n (\|x\xi_i\|^2 + \|x^*\xi_i\|^2) \right)^{1/2} < 1 \right\},$$

即

$$|f(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (\|x\xi_i\|^2 + \|x^*\xi_i\|^2) \right)^{1/2}.$$

用 $\bar{H}$ 记这样的 Hilbert 空间, 它的元素, 加法和乘法都与 H 完全一致, 只有数乘变成了 $\lambda \cdot x := \bar{\lambda}x$. 令

$$K = \{((x^*\xi_i)_{i=1}^n, (x\xi_i)_{i=1}^n) : x \in \mathcal{B}(H)\} \subset \bar{H}^{\oplus n} \oplus H^{\oplus n} =: H_0,$$

则 K 是 H_0 的一个闭子空间. 在 K 上定义线性泛函如下:

$$F : K \to \mathbb{C}, \qquad \tilde{x} := ((x^*\xi_i)_{i=1}^n, (x\xi_i)_{i=1}^n) \mapsto f(x),$$

那么 $\|F\| \leqslant 1$. 由 Hahn–Banach 定理, 它可以保范延拓到 H_0 上, 记作 $\tilde{F}$. 那么由 Riesz 表示定理可知存在 $((\eta_i)_{i=1}^n, (\zeta_i)_{i=1}^n) \in H_0$ 使得对任意 $x \in \mathcal{B}(H)$, 有

$$f(x) = \tilde{F}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n (\langle \eta_i, x^*\xi_i \rangle_{\bar{H}} + \langle \zeta_i, x\xi_i \rangle_H) = \sum_{i=1}^n (\langle \eta_i, x\xi_i \rangle_H + \langle \zeta_i, x\xi_i \rangle_H),$$

得证. □

命题 2.1.8 设 H 是可分的 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(H)_1$ 在 WOT 和 SOT 下都是可度量化的.

证明 因 H 可分, 取 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 是 $\bar{\mathbb{B}}(H) \setminus \mathbb{B}(H)$ 的一个稠密子集.

(1) 在 $\mathcal{B}(H)_1$ 上定义度量

$$d_W(x,y) := \sum_{i,j \geqslant 1} \frac{1}{2^{i+j}} \left| \langle (x-y)\xi_i, \xi_j \rangle \right|.$$

只需说明 $\mathcal{B}(H)_1$ 中的网 $(x_i)_{i\uparrow\alpha} \xrightarrow{\text{WOT}} x$ 当且仅当 $(x_i)_{i\uparrow\alpha}$ 在 d_W 下收敛到 x 即可.

设 $x_i \xrightarrow{\text{WOT}} x$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $\exists k_0 \in \alpha$ 使得

$$\sum_{i,j \geqslant n_0} \frac{1}{2^{i+j}} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge (i,j \leqslant n_0,\ k \geqslant k_0 \implies |\langle (x_k - x)\xi_i, \xi_j \rangle| < \varepsilon).$$

则 $k \geqslant k_0$ 时

$$\begin{aligned} d_W(x_k, x) &= \sum_{i,j \geqslant 1} \frac{1}{2^{i+j}} |\langle (x_k - x)\xi_i, \xi_j \rangle| \\ &< \sum_{i,j < n_0} \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} + \sum_{i,j \geqslant n_0} \frac{1}{2^{i+j}} \|x_k - x\| \|\xi_i\| \|\xi_j\| \\ &< M\varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

其中 $M = \sum_{i,j<n_0} 2^{-(i+j)}$, 故 $d_W(x_k, x) \to 0$.

反之, 设 $d_W(x_k, x) \to 0$, 则对 $i, j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, 总有 $\lim_{k\uparrow\alpha} \langle (x_k - x)\xi_i, \xi_j \rangle = 0$. 取 $\xi, \eta \in H$, $\varepsilon > 0$, 由稠密性可知存在 ξ_i, ξ_j 使得

$$\| \|\xi\| \xi_i - \xi \| < \varepsilon, \qquad \| \|\eta\| \xi_j - \eta \| < \varepsilon.$$

此时

$$\begin{aligned}\langle(x_k-x)\xi,\eta\rangle &= \langle(x_k-x)(\xi_i-\|\xi\|\,\xi_i),\eta\rangle+\langle(x_k-x)\,\|\xi\|\,\xi_i,\eta-\|\eta\|\,\xi_j\rangle+\langle(x_k-x)\,\|\xi\|\,\xi_i,\|\eta\|\,\xi_j\rangle\\ &\leqslant 2\varepsilon\,\|\eta\|+2\varepsilon\,\|\xi\|+\|\xi\|\,\|\eta\|\,\langle(x_k-x)\xi_i,\xi_j\rangle\\ &\to 2\varepsilon(\|\eta\|+\|\xi\|).\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\lim_{k\uparrow\alpha}\langle(x_k-x)\xi,\eta\rangle=0$.

(2) 在 $\mathcal{B}(H)_1$ 上定义度量

$$d_S(x,y):=\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{2^i}\,\|(x-y)\xi_i\|\,,$$

其余的讨论与 (1) 是类似的. □

当然这一讨论也可以类似地套到 *SOT 上, 实际上 $\mathcal{B}(H)_1$ 在 *SOT 上也是可度量化的.

命题 2.1.9 (单调收敛定理) 设 $(x_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是 $\mathcal{B}(H)_{\mathrm{sa}}$ 中的递增网, 且存在 $m\in\mathcal{B}(H)_{\mathrm{sa}}$ 使得 $\forall i\in\alpha(x_i\leqslant m)$. 则 SOT–$\lim_{i\uparrow\alpha}x_i$ 存在, 且

$$x=\text{SOT–}\lim_{i\uparrow\alpha}x_i=\sup_{i\in\alpha}x_i.$$

证明 取定 $\xi\in H$, 则 $(\langle\xi,x_i\xi\rangle)_{i\uparrow\alpha}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的递增网, 它有上界 $\langle\xi,m\xi\rangle$. 由 $\mathbb{R}$ 上的单调收敛定理可知 $\lim_{i\uparrow\alpha}\langle\xi,x_i\xi\rangle=\Lambda(\xi)$ 存在, 因此

$$\langle\xi,x\eta\rangle:=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k\Lambda(\xi+\mathrm{i}^k\eta)$$

是一个半双线性泛函, 因此 $\langle\xi,x\eta\rangle=\lim_{i\uparrow\alpha}\langle\xi,x_i\eta\rangle$. 这就说明了 $x=\text{WOT–}\lim_{i\uparrow\alpha}x_i$.

考虑到

$$\langle\xi,x\xi\rangle=\lim_{i\uparrow\alpha}\langle\xi,x_i\xi\rangle=\sup_{i\in\alpha}\langle\xi,x_i\xi\rangle\,,$$

那么对任意 $\forall i\in\alpha$ 成立 $x\geqslant x_i$. 且对任意 $y\leqslant x$, 存在 $\xi\in H$ 使得存在 $i_0\in\alpha$, 当 $i\geqslant i_0$ 时

$$\langle\xi,x_i\xi\rangle+\varepsilon\geqslant\langle\xi,y\xi\rangle\,,$$

于是 $x=\sup_{i\uparrow\alpha}x_i$.

下证 x 是 $(x_i)_{i\uparrow\alpha}$ 在 SOT 下的极限. 注意到 $\forall i\in\alpha\,(x-x_i\geqslant 0)$, 由 Cauchy–Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}\|(x-x_i)\xi\|^2 &\leqslant \langle\xi,(x-x_i)\xi\rangle^{1/2}\left\langle\xi,(x-x_i)^3\xi\right\rangle^{1/2}\\ &\leqslant \|x-x_i\|^3\,\|\xi\|^2\,\langle\xi,(x-x_i)\xi\rangle^{1/2}\\ &\to 0,\end{aligned}$$

这因后面的内积趋于 0, 而前面的范数是有限的. 于是 $x=\text{SOT–}\lim_{i\uparrow\alpha}x_i$. □

推论 2.1.10 设 $(p_i)_{i\uparrow\alpha}$ 是一列递增的投影, 则 $p=\text{SOT–}\lim_{i\uparrow\alpha}p_i=\sup_{i\in\alpha}p_i$ 是一个投影, 其值域为 $\mathbf{clos}\left\{\bigcup_{i\in\alpha}p_i\right\}$.

证明 我们只需要注意到 p 是投影当且仅当 $2p-1$ 是自伴等距. 而自伴算子全体是 SOT–闭的, 等距算子全体也是 SOT–闭的, 从而投影算子也是 SOT–闭的, 这就说明 p 是投影. 特别地, 由

$$px=\begin{cases}x, & x\in\bigcup_{i\in\alpha}\operatorname{im}p_i\\ 0, & x\in\bigcap_{i\in\alpha}\ker p_i\end{cases}$$

可知 $\operatorname{im}p=\mathbf{clos}\left\{\bigcup_{i\in\alpha}p_i\right\}$. □

定义 2.1.11　设 H 是 Hilbert 空间, 在 $\mathcal{B}(H)$ 上定义

(1)　σ–**弱算子拓扑** (σ–WOT)是由半范数族

$$\left\{x \mapsto \sum_{k\geqslant 1} |\langle \xi_k, x\eta_k\rangle| : \sum_{k\geqslant 1} \|\xi_k\|\,\|\eta_k\| < \infty\right\}$$

诱导的局部凸拓扑.

(2)　σ–**强算子拓扑** (σ–SOT)是由半范数族

$$\left\{x \mapsto \left(\sum_{k\geqslant 1} \|x\xi_k\|^2\right)^{1/2} : \sum_{k\geqslant 1} \|\xi_k\|^2 < \infty\right\}$$

诱导的局部凸拓扑.

(3)　σ–*__强算子拓扑__ (σ–*SOT)是由半范数族

$$\left\{x \mapsto \left(\sum_{k\geqslant 1} \|x\xi_k\|^2 + \|x^*\xi_k\|^2\right)^{1/2} : \sum_{k\geqslant 1} \|\xi_k\|^2 < \infty\right\}$$

诱导的局部凸拓扑.

至此, 我们在 $\mathcal{B}(H)$ 上定义了 7 种局部凸拓扑. 当 $\dim H \geqslant \aleph_0$ 时, 这 7 中拓扑互不相同, 其强弱关系如下:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{范数拓扑} & < & \sigma\text{–}^*\text{SOT} & < & \sigma\text{–SOT} & < & \sigma\text{–WOT} \\
 & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\
 & & ^*\text{SOT} & < & \text{SOT} & < & \text{WOT}
\end{array}$$

其中 $\tau < \tau'$ 表示 τ 强于 τ'.

定理 2.1.12　设 f 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的线性泛函, 以下条件等价:

(1)　存在 H 的可数子集 $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots; \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ 满足 $\sum_{k\geqslant 1} \|\xi_k\|\,\|\eta_k\| < \infty$ 使得 $f = \sum_{k\geqslant 1} f_{\xi_k,\eta_k}$;

(2)　f 是 σ–WOT–连续的;

(3)　f 是 σ–SOT–连续的;

(4)　f 是 σ–*SOT–连续的.

证明　这与定理 2.1.7 的证明是类似的, 只需要将有限和改成级数, H_0 取成 $L^2(\bar{H}) \oplus L^2(H)$ 即可. 其中 $\sum_{k\geqslant 1} \|\xi_k\|\,\|\eta_k\| < \infty$ 保证了讨论过程中的每一步级数都是收敛的. □

记 $\mathcal{B}(H)$ 上 WOT–连续的线性泛函全体为 $\mathcal{F}(H)_*$, σ–WOT–连续的线性泛函全体为 $\mathcal{B}(H)_*$. 将其赋予 $\mathcal{B}(H)^*$ 上的范数之后它们成为赋范线性空间, 并且容易发现 $\mathcal{F}(H)_*$ 在 $\mathcal{B}(H)_*$ 中稠密. 使用 $\mathcal{B}(H)_*$ 记号的原因来自于下面自然的推论.

推论 2.1.13　$\mathcal{B}(H)_* \cong \mathcal{L}^1(H)$.

证明　这由定理 2.1.12 中 (1) 立刻得到. □

上面的命题意味着 $\mathcal{B}(H)$ 上的 σ–WOT 就是弱*拓扑. 我们下面说明, 限制到 $\mathcal{B}(H)$ 上的有界集时, 我们无需区分带 σ–和不带 σ–的拓扑.

命题 2.1.14　在 $\mathcal{B}(H)_1$ 上, 有

(1)　WOT 与 σ–WOT 相同;

(2) SOT 与 σ–SOT 相同;

(3) *SOT 与 σ–*SOT 相同.

证明 只证明 (1), 其余的讨论是类似的. 任取 $U \subset \mathcal{B}(H)_1$ 是一个 σ–WOT–开集, 需要证明它也是 WOT–开集.

由 σ–WOT 的定义可知对 $x_0 \in U$, 存在 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{B}(H)_*$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\mathcal{B}(H)_1 \cap \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in \mathcal{B}(H) : |\varphi_k(x - x_0)| < \varepsilon\} \subset U.$$

由 $\mathcal{F}(H)_*$ 在 $\mathcal{B}(H)_*$ 中稠密可知存在 $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}(H)_*$ 使得

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n \left(\|\varphi_k - \psi_k\| < \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

从而由

$$|\varphi_k(x - x_0)| \leqslant |\psi_k(x - x_0)| + \|\varphi_k - \psi_k\| \, \|x - x_0\| < |\psi_k(x - x_0)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

可知

$$\mathcal{B}(H)_1 \cap \bigcap_{k=1}^{n} \left\{x \in \mathcal{B}(H) : |\psi_k(x - x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \subset \mathcal{B}(H)_1 \cap \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in \mathcal{B}(H) : |\varphi_k(x - x_0)| < \varepsilon\} \subset U.$$

这意味着 U 是 WOT–开的. □

定理 2.1.15 设 M 是 $\mathcal{B}(H)$ 的 σ–WOT–闭子空间, φ 是定义在 M 上的线性泛函, K 是 M 的凸子集. 则

(1) K 是 WOT–闭的 $\Longleftrightarrow$ K 是 SOT–闭的 $\Longleftrightarrow$ K 是*SOT–闭的;

(2) K 是 σ–WOT–闭的 $\Longleftrightarrow$ K 是 σ–SOT–闭的 $\Longleftrightarrow$ K 是 σ–*SOT–闭的.

证明 (1) 由定理 2.1.7 和 Hahn–Banach 定理可得. (2) 由定理 2.1.12 和 Hahn–Banach 定理可得. □

2.2 稠密性定理

定义 2.2.1 (交换子) 设 $S \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个子集, 称

$$S' := \{x \in \mathcal{B}(H) : \forall s \in S \, (sx = xs)\}$$

是 S 的**交换子**.

可以归纳地定义 $S'' = (S')'$, $S^{(k)} = (S^{(k-1)})'$, 容易验证

$$S' = S^{(3)} = S^{(5)} = \cdots, \qquad S'' = S^{(4)} = S^{(6)} = \cdots.$$

命题 2.2.2 设 $S \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个子集, 有

(1) S' 总是 $\mathcal{B}(H)$ 的单位子代数, 且 S' 是 WOT–闭的;

(2) 若 S 关于对合封闭, 则 S' 也关于对合封闭. 此时 S' 成为 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数.

证明 (1) S' 是单位子代数由定义容易验证, 它是 WOT–闭的因 $s_i \xrightarrow{\text{WOT}} s$ 时, $\forall x \in \mathcal{B}(H)$, 有

$$s_i x \xrightarrow{\text{WOT}} sx, \qquad x s_i \xrightarrow{\text{WOT}} xs, \qquad s_i x = x s_i,$$

于是 $sx = xs$, 这即 $s \in S'$.

(2) 因 S 关于对合封闭, 有 $\forall s \in S \, \forall x \in S' \, (sx = xs)$. 两侧取对合就有 $x^* s^* = s^* x^*$, 而 s 取遍 S 时 s^* 也取遍 S, 从而 $x^* \in S'$. □

本节将会讨论两个 von Neumann 代数的基本稠密定理, 下面先说明第一个, 并且顺带将 von Neumann 代数的定义带出.

定理 2.2.3 (von Neumann 二次交换子定理)　设 A 是 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数, 且 $\bigcap_{a\in A}\ker a=\{0\}$, 则

$$A''=\overline{A}^{\text{WOT}}=\overline{A}^{\text{SOT}}=\overline{A}^{^*\text{SOT}}=\overline{A}^{\sigma\text{-WOT}}=\overline{A}^{\sigma\text{-SOT}}=\overline{A}^{\sigma\text{-}^*\text{SOT}}.$$

并称满足 $A''=A$ 的 C^* 代数为 **von Neumann 代数**.

证明　由定理 2.1.15 可知

$$\overline{A}^{\sigma\text{-WOT}}=\overline{A}^{\sigma\text{-SOT}}=\overline{A}^{\sigma\text{-}^*\text{SOT}}\subset\overline{A}^{\text{WOT}}=\overline{A}^{\text{SOT}}=\overline{A}^{^*\text{SOT}}\subset A'',$$

于是问题归结于证明 $A''\subset\overline{A}^{\sigma\text{-SOT}}$. 也即对 $a''\in A''$, $\varepsilon>0$, $(\xi_k)_{k\geqslant1}\subset H$ 满足 $\sum_{k\geqslant1}\|\xi_k\|^2<\infty$, 存在 $a\in A$ 使得

$$\Big(\sum_{k\geqslant1}\|(a''-a)\xi_k\|^2\Big)^{1/2}<\varepsilon.$$

第 1 步. 若 $(x_k)_{k\geqslant1}$ 中只有一个非零向量, 不妨设为 ξ, 设 p 是到 $\mathbf{clos}\,\{A\xi\}$ 的正交投影算子. 因 $\mathbf{clos}\,\{A\xi\}$ 是 A 的不变子空间, 故 $p\in A'$. 对 ξ 做如下的分解:

$$\xi=p\xi+(1-p)\xi=:\xi'+\xi'',$$

则 $\forall a\in A\,(a\xi'\in\mathbf{clos}\,\{A\xi\})$. 而 $\mathbf{clos}\,\{A\xi\}$ 是 a 的不变子空间, 于是 $a\xi''\in\mathbf{clos}\,\{A\xi\}$, 因此 $a^*a\xi''\in\mathbf{clos}\,\{A\xi\}$. 而 $\xi''=(1-p)\xi\in\mathbf{clos}\,\{A\xi\}^{\perp}$, 于是

$$\langle\xi'',a^*a\xi''\rangle=0\implies a\xi''=0.$$

这即 $\xi''=0$, 从而 $\xi\in\mathbf{clos}\,\{A\xi\}$, 也即 $\xi=p\xi$.

因 $p\in A'$, 于是对 $a''\in A'$, 应有 $pa''=a''p$, 那么

$$a''\xi=a''p\xi=pa''\xi\in\mathbf{clos}\,\{A\xi\},$$

于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $a\in A$ 使得 $\|a''\xi-a\xi\|=\|(a''-a)\xi\|<\varepsilon$.

第 2 步. 对 $x\in\mathcal{B}(H)$, 将其典范地对角嵌入到 $\mathcal{B}(\ell^2(H))$ 中, 并以 Δ 记这一对角嵌入. 记

$$\tilde{A}:=\Delta(A)=\Big\{\bigoplus_{n\geqslant1}a:a\in A\Big\}\subset\mathcal{B}(\ell^2(H)),$$

则 $\tilde{A}$ 是 $\mathcal{B}(\ell^2(H))$ 的 C^* 子代数. 且

$$\tilde{A}'=\left\{x=[x_{i,j}]_{i,j\geqslant1}\in\mathcal{B}(\ell^2(H)):x_{i,j}\in A'\right\},$$

故 $\widetilde{A''}\subset\tilde{A}''$, 于是 $\Delta(a'')\in\tilde{A}''$. 在每一个分量上进行第 1 步中的讨论, 视 $\xi=(\xi_k)_{k\geqslant1}\in\ell^2(H)$, 则存在 $a\in A$ 使得

$$\|(\Delta(a'')-\Delta(a))\xi\|=\Big(\sum_{k\geqslant1}\|(a''-a)\xi_k\|^2\Big)^{1/2}<\varepsilon,$$

这就说明了 $A''\subset\overline{A}^{\sigma\text{-SOT}}$. □

由此可知, 一个 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数 A 是 von Neumann 代数当且仅当它关于任何一个前一节定义的局部凸拓扑是闭的.

定理 2.2.4 (Kaplansky) 设 A 是 $\mathcal{B}(H)$ 的 C^* 子代数, 且 $\bigcap_{a\in A}\ker a=\{0\}$, 则

(1) $\overline{A_{\mathrm{sa},1}}^{\mathrm{SOT}}=(A'')_{\mathrm{sa},1}$;

(2) $\overline{A_{+,1}}^{\mathrm{SOT}}=(A'')_{+,1}$;

(3) $\overline{A_1}^{\mathrm{SOT}}=(A'')_1$.

证明 主要的困难在 (1), 为此, 我们首先说明 A_{sa} 在 $(A'')_{\mathrm{sa}}$ 中 SOT–稠. 由 $A''=\overline{A''}^{*\mathrm{SOT}}$ 可知对任意 $x\in(A'')_{\mathrm{sa}}$, 存在 $(x_i)_{i\uparrow\alpha}\subset A$ 使得

$$x_i\xrightarrow{*\mathrm{SOT}}x,\qquad x_i^*\xrightarrow{*\mathrm{SOT}}x,$$

因此 $(x_i+x_i^*)/2\in A_{\mathrm{sa}}$ 且 $(x_i+x_i^*)/2\xrightarrow{\mathrm{SOT}}x$, 这即 A_{sa} 在 $(A'')_{\mathrm{sa}}$ 中 SOT–稠.

(1) 对 $x\in(A'')_{\mathrm{sa},1}$, 有 $\sigma(x)\subset[-1,1]$, 考虑连续函数

$$f:[-1,1]\to[-1,1],\qquad t\mapsto\frac{2t}{1+t^2},$$

它严格单调递增, 于是在 $[-1,1]$ 上存在其反函数, 记作 g. 令 $y=g(x)$, 由连续函数演算可知 $y\in(A'')_{\mathrm{sa},1}$.

因 A_{sa} 在 $(A'')_{\mathrm{sa}}$ 中 SOT–稠, 于是存在 $(y_i)_{i\uparrow\alpha}\subset A_{\mathrm{sa}}$ 使得 $y_i\xrightarrow{\mathrm{SOT}}y$. 再令 $x_i=f(y_i)$, 那么由 $f(0)=0$ 和 $f[-1,1]=[-1,1]$ 可知 $x_i\in A_{\mathrm{sa},1}$. 因此由

$$\begin{aligned}x-x_i=\frac{2y}{1+y^2}-\frac{2y_i}{1+y_i^2}&=\frac{2}{1+y_i^2}((1+y_i^2)y-y_i(1+y^2))\frac{1}{1+y^2}\\&=\frac{2}{1+y_i^2}((y-y_i)+(y_i^2y-y_iy^2))\frac{1}{1+y^2}\\&=\frac{2}{1+y_i^2}((y-y_i)+y_i(y_i-y)y)\frac{1}{1+y^2}\\&=\frac{2}{1+y_i^2}(y-y_i)\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{2}x_i(y_i-y)x,\end{aligned}$$

和 $(1+y_i^2)^{-1}$, $(1+y^2)^{-1}$, x_i, x 均范数有界, 并且 $y_i-y\xrightarrow{\mathrm{SOT}}0$, 于是对任意 $\xi\in H$ 都有

$$\|(x-x_i)\xi\|\leqslant\left\|\frac{2}{1+y_i^2}(y-y_i)\frac{1}{1+y^2}\xi\right\|+\left\|\frac{1}{2}x_i(y_i-y)x\xi\right\|\to0.$$

这即 $x_i\xrightarrow{\mathrm{SOT}}x$. 从而 $A_{\mathrm{sa},1}$ 在 $(A'')_{\mathrm{sa},1}$ 中 SOT–稠.

(2) 对任意 $x\in(A'')_{+,1}$, 有 $x^{1/2}\in(A'')_{+,1}\subset(A'')_{\mathrm{sa},1}$. 由 (1) 可知存在一列 $(x_i)_{i\uparrow\alpha}\subset A_{\mathrm{sa},1}$ 使得 $x_i\xrightarrow{\mathrm{SOT}}x^{1/2}$, 那么 $x_i^2\in A_{+,1}$ 且 $x_i^2\xrightarrow{\mathrm{SOT}}x$, 得证.

(3) 对 $x\in(A'')_1$, 我们考虑

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix}0&x\\x^*&0\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}_2(A'')_{\mathrm{sa},1}$$

视 $\mathrm{Mat}_2(A)$ 和 $\mathrm{Mat}_2(A'')$ 为 $\mathcal{B}(H\oplus H)$ 的子代数, 则 $\mathrm{Mat}_2(A)$ 在 $\mathrm{Mat}_2(A'')$ 中 SOT–稠. 因此存在 $(\tilde{x}_i)_{i\uparrow\alpha}\subset\mathrm{Mat}_2(A)$ 使得 $\tilde{x}_i\xrightarrow{\mathrm{SOT}}\tilde{x}$. 此时应有任意矩阵元都 SOT–收敛到 $\tilde{x}$ 的对应矩阵元, 于是

$$[\tilde{x}_i]_{1,2}\xrightarrow{\mathrm{SOT}}x,$$

而 $[\tilde{x}_i]_{1,2}\in A_1$, 得证. □

2.3 C^* 代数的不可约表示

在明确了 $\mathcal{B}(H)$ 上面的种种局部凸拓扑之后, 我们可以回头来处理 C^* 代数的表示.

定义 2.3.1 (不可约表示)　设 (H,π) 是 A 的表示, 若 $\pi(A)$ 没有非平凡的闭不变子空间, 则称 π 是**拓扑不可约**的; 若 $\pi(A)$ 没有非平凡不变子空间, 则称 $\pi(A)$ 是**代数不可约**的.

引理 2.3.2　设 (H,π) 是 A 的表示, 则 π 拓扑不可约当且仅当 $\pi(A)'=\mathbb{C}$, 特别地, 若 A 是交换 C^* 代数, 则它的所有不可约表示都是 1 维的.

证明　若 $p\in\pi(A)'$ 是一个投影, 则 pH 是一个闭不变子空间. 由 π 拓扑不可约可知或者 $p=0$, 或者 $p=1$. 于是 $\pi(A)'=\mathbb{C}1\simeq\mathbb{C}$. 反向的断言是显然的.

若 A 是交换的, 那么 $\pi(A)'=\pi(A)$, 这就说明了 $\dim\pi=1$. □

引理 2.3.3　设 (H,π) 是 A 的拓扑不可约表示, 则对任意 $x\in\mathcal{B}(H)$, 任意的 $K\subset H, \dim K<\aleph_0$ 和任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $a\in A$ 使得

$$\|a\|\leqslant\|x|_K\|,\qquad\|(\pi(a)-x)|_K\|<\varepsilon.$$

证明　因 (H,π) 拓扑不可约, 故 $\pi(A)'=\mathbb{C}$, 从而 $\pi(A)''=\mathcal{B}(H)\ni x$. 由 von Neumann 二次换位子定理可知

$$x\in\pi(A)''=\overline{\pi(A)}^{\text{SOT}},$$

这即存在 $a\in A$ 使得对 $k=1,2,\dots,n$ 都成立 $\|(\pi(a)-x)\xi_k\|<\varepsilon$, 这里 $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ 是 K 的一组规范正交基. □

下面的 Kadison 可迁性定理可以看作是环上的 Jacobson 稠密性定理在 C^* 代数上的版本. 它帮助我们说明任何拓扑不可约表示都是代数不可约的.

定理 2.3.4 (Kadison 可迁性定理)　设 (H,π) 是 A 的拓扑不可约表示, 则对任意 $x\in\mathcal{B}(H)$, 任意的 $K\subset H, \dim K<\aleph_0$ 和任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $a\in A$ 使得

$$\|a\|\leqslant\|x\|+\varepsilon,\qquad\pi(a)|_K=x|_K.$$

证明　对 $x_0=x|_K$, 由引理 2.3.3 可知存在 $a_1\in A$ 使得

$$\|a_1\|\leqslant\|x|_K\|,\qquad\|(\pi(a_1)-x_0)|_K\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

令 $x_1=x_0-\pi(a_1)$, 重复以上的过程, 得到一列 $(a_n)_{n\geqslant1}$. 令 $a=\sum_{n\geqslant1}a_n$, 就有

$$\|a\|\leqslant\|x\|+\sum_{n\geqslant1}\frac{\varepsilon}{2^n}=\|x\|+\varepsilon.$$

且 $\pi(a)|_K=x|_K$. □

推论 2.3.5　设 (H,π) 是 A 的拓扑不可约表示, 则它代数不可约.

证明　这归结于证明对任何 $\xi,\eta\in H$, $\|\xi\|=\|\eta\|=1$, 存在 $a\in A$ 使得 $\pi(a)\xi=\eta$. 这无非是定理 2.3.4 的推论. □

这就说明了对 C^* 代数的表示, 拓扑不可约和代数不可约是一回事, 因此我们之后不再区分拓扑不可约和代数不可约, 将其统称为不可约表示.

之前讨论过对 $\pi:A\to\mathcal{B}(H), \xi\in H, \|\xi\|=1$,

$$x\mapsto\langle\pi(x)\xi,\xi\rangle$$

给出 A 的一个态. 而 GNS 构造又可以通过态来复原 C^* 的一个循环表示. 一个自然的问题是不可约表示对应的态是什么样子的:

定义 2.3.6 (纯态) 称 $S(A)$ 的端点集 $\operatorname{ext} S(A)$ 中的元素 φ 是一个 A 上的**纯态**, 这等价于任何满足 $\psi \leqslant \varphi$ 的正泛函都只能具有 $\psi = \lambda\varphi$ 的形式, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

命题 2.3.7 (H, π, ξ) 诱导的向量态是纯态当且仅当 (H, π, ξ) 不可约.

证明 *必要性.* 设 φ 是纯态, (H, π, ξ) 是 φ 通过 GNS 构造得到的循环表示. 令 $p \in \pi(A)'$, $0 < p < 1$, 且 $\lambda = \|p\xi\|^2 < 1$, 定义

$$\varphi_1(x) := \frac{1}{\lambda}\langle \pi(x)\xi, p\xi\rangle, \qquad \varphi_2(x) := \frac{1}{1-\lambda}\langle \pi(x)\xi, (1-p)\xi\rangle,$$

检验 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, 并且 φ_i 是线性泛函是容易的. 由于

$$\lambda\varphi_1(x) = \langle \pi(x)\xi, p\xi\rangle = \langle \pi(x)\xi, p^2\xi\rangle = \langle p\pi(x)\xi, p\xi\rangle = \langle \pi(x)p\xi, p\xi\rangle,$$

于是 φ_1 是正泛函. 那么

$$\varphi_1(1) = \frac{1}{\lambda}\langle \pi(1)\xi, p\xi\rangle = \frac{1}{\lambda}\|p\xi\|^2 = 1$$

推出 $\varphi_1 \in S(A)$. 类似的讨论说明 $\varphi_2 \in S(A)$, 而 φ 是纯态, 只能 $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, 这即

$$\langle \pi(x)\xi, p\xi\rangle = \lambda\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle.$$

由 $\pi(A)\xi$ 的稠密性可知 $p - \lambda 1 = 0$, 矛盾.

充分性. 设 (H, π, ξ) 是不可约表示, $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$, $0 \leqslant 1 \leqslant 1$, $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A)$. 可以如此定义一个 $\pi(A)\xi$ 上的半双线性型

$$\langle \pi(x)\xi, \pi(y)\xi\rangle := \lambda\varphi_1(y^*x),$$

那么 $\pi(A)\xi$ 的稠密性保证了这一半双线性型可以延拓到 H 上. 它有界, 因

$$\langle \pi(x)\xi, \pi(x)\xi\rangle = \lambda\varphi_1(x^*x) \leqslant \varphi_1(x^*x).$$

由 Riesz 表示定理, 存在 $T \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\langle \xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle_H$. 注意到对任意 $x, y, z \in A$ 都有

$$\begin{aligned}\lambda\varphi_1((yz)^*x) = \lambda\varphi_1(z^*y^*x) &\iff \langle \pi(x)\xi, \pi(yz)\xi\rangle = \langle \pi(y^*x)\xi, \pi(z)\xi\rangle \\ &\iff \langle \pi(x)\xi, T\pi(yz)\xi\rangle_H = \langle \pi(x)\xi, \pi(y)T\pi(z)\xi\rangle_H \\ &\iff T\pi(y) = \pi(y)T.\end{aligned}$$

那么 $T \in \pi(A)' = \mathbb{C}1$, 于是存在 $\mu \in \mathbb{C}$ 使得 $T = \mu 1$. 那么

$$\lambda\varphi_1(x) = \lambda\varphi_1(1^*x) = \langle \pi(x)\xi, \mu\xi\rangle = \mu\varphi(x).$$

将 $x = 1$ 代入上式可知 $\mu = \lambda$, 因此 $\varphi_1 = \varphi$. 相似的讨论可得 $\varphi_2 = \varphi$, 这就说明 φ 是纯态. □

由 Riesz 表示定理可知 $C_0(X)$ 上的纯态无非是点测度 δ_x, 但 $\mathcal{B}(H)$ 上的纯态要复杂得多. 容易说明 $\xi \mapsto \langle x\xi, \xi\rangle$ 是一个纯态, 但并非所有的纯态都具有这样的形式.

2.4 有限维 C^* 代数的结构

接下来我们把目光转到有限维 C^* 代数上, 本节的目的是证明所有有限维 C^* 代数都同构于若干矩阵代数的直和.

引理 2.4.1　设 $\mathcal{F}$ 是一族可分离 A 的态, 令

$$H_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{F}} H_\varphi, \qquad \pi_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{F}} \pi_\varphi,$$

则 $(H_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ 是 A 的一个忠实表示.

证明　设 x 是 $\ker \pi_{\mathcal{F}}$ 中的正元, 那么若

$$\varphi(x) = \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = 0,$$

对任意 $\varphi \in \mathcal{F}$ 都成立, 只能 $x = 0$. 这就说明 $\ker \pi_{\mathcal{F}} = 0$, 得证. □

推论 2.4.2　可分的 C^* 代数总存在可分的忠实表示, 有限维的 C^* 代数总存在有限维的忠实表示.

定义–命题 2.4.3 (交错算子)　设 A 有两个不可约表示 (H_1, π_1), (H_2, π_2), 若存在 $v \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ 且 $v \neq 0$ 使得

$$\forall x \in A\, (v\pi_1(x) = \pi_2(x)v),$$

则 π_1 与 π_2 酉等价, 并称 v 是 π_1 与 π_2 的**交错算子**.

证明　设 v 是 π_1 与 π_2 的交错算子, 两侧取对合得到

$$v^*\pi_2(x) = \pi_1(x)v^*,$$

记 v^* 是 π_2 与 π_1 的交错算子. 因此 $\forall x \in A$, 由

$$v^*v\pi_1(x) = v^*\pi_2(x)v = \pi_1(x)vv^*$$

可知 $v^*v \in \pi_1(A)'$. 由 π_1 不可约知 $\exists \lambda \in \mathbb{C}\, (v^*v = \lambda 1)$, 而 $v \neq 0$ 说明 $v^*v > 0$, 故 $\lambda > 0$. 类似的讨论说明 $vv^* \in \pi_2(A)' = \mathbb{C}1$, 于是 $\exists \lambda' \in \mathbb{C}\, (v^*v = \lambda' 1)$, 从而 $\lambda = \lambda'$.

取 $u = \lambda^{-1/2}v$, 有 $u \in \mathcal{U}(H_1, H_2)$, 且

$$u\pi_1(x) = \lambda^{-1/2}v\pi_1(x) = \lambda^{-1/2}\pi_2(x)v = \pi_2(x)u,$$

这即 π_1 与 π_2 酉等价. □

因此, 对一列不可约表示的直和, 我们可以将其中所有酉等价的不可约表示 “合并”.

定理 2.4.4　设 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 是一个表示, A 作为 C^* 代数是有限维的, 则 π 是有限多个不可约表示的直和

$$\pi = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_n,$$

设 $\{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ 是其中两两互不酉等价的不可约表示, $\{p_1, \ldots, p_m\}$ 是一族正整数, 则在酉等价的意义下

$$\pi \simeq \pi_1^{\oplus p_1} \oplus \cdots \oplus \pi_m^{\oplus p_m},$$

且 $\{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$, $\{p_1, \ldots, p_m\}$.

证明　对 $\dim H$ 使用归纳法, 若 $\dim H = 1$, 则 π 一定是不可约的. 下设 $\dim H < d$ 时结论成立, 考虑 $\dim H = d$ 的情形.

若 π 本身不可约, 命题得证. 否则, 存在 H 的真子空间 K 使得 $\pi(A)K = K, \pi(A)K^\perp = K^\perp$. 将 π 限制到 $K, K^\perp$ 上得到两个子表示

$$\pi = \pi_K \oplus \pi_{K^\perp},$$

因 $\dim K < d, \dim K^\perp < d$. 由归纳假设, 存在不可约表示 $\rho_1, \ldots, \rho_m$ 和 $\rho_{m+1}, \ldots, \rho_{m+n}$ 使得 $\pi_k = \bigoplus_{k=1}^m \rho_k, \pi_{K^\perp} = \bigoplus_{k=1}^n \rho_{m+k}$. 从而

$$\pi = \pi_K \oplus \pi_{K^\perp} = \bigoplus_{k=1}^{m+n} \rho_k,$$

也是有限多个不可约表示的直和.

对不正交的 K_1 和 K_2, 若 (H_1, π_1) 和 (H_2, π_2) 是 K_1 和 K_2 上的不可约子表示, 则 $p_{K_1}, p_{K_2} \in \pi(A)$, 将 $p_{K_2}\pi(x) = \pi(x)p_{K_2}$ 限制到 K_1 上得到

$$p_{K_2}|_{K_1}\pi_1(x) = \pi_2(x)p_{K_2}|_{K_1},$$

这即 $v = p_{K_2}|_{K_1} \neq 0$ 是 π_1 与 π_2 的交错算子, 从而 π_1 与 π_2 等价. 因此任何 π 的不可约子表示必与某个 ρ_k 同构, 因此直接将 $\{\rho_k\}$ 按同构类划分, 并设对应的等价类分别出现了 p_k 次, 就得到

$$\pi \simeq \pi_1^{\oplus p_1} \oplus \cdots \oplus \pi_m^{\oplus p_m},$$

要证它唯一, 设另有 $\{\pi_1', \ldots, \pi_{m'}'\}$ 和 $\{p_1', \ldots, p_{m'}'\}$ 也满足条件, 则 π_1' 必定同构于某个 π_k, 不失一般性, 不妨 $k = 1$. 此时 $p_1' \leqslant p_1$. 交换 π_1 与 π_1' 可知 $p_1 \leqslant p_1'$. 重复以上过程得到 $m = m'$, $\{\pi_k\} \simeq \{\pi_k'\}$, $\{p_k\} = \{p_k'\}$. □

下面考虑有限维非零子代数的不可约表示:

定义 2.4.5 (极小投影算子) 设 A 是一个 C^* 代数, $e \neq 0$ 是 A 中的投影. 称 e 是 A 的一个**极小投影算子**, 若 $eAe = \mathbb{C}e$.

当 H 有限维时, 对 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数, 极小投影算子总是存在的.

引理 2.4.6 设 H 是有限维 Hilbert 空间, $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个 C^* 子代数, 则 A 中存在极小投影算子.

证明 任取 $a \neq 0, a \in A_+$. 因 H 是有限维的, a 作为 $\mathcal{B}(H)$ 中的元素, 其点谱集 $\sigma_p(a)$ 是离散的, 且此时 $\sigma(a) = \sigma_p(a)$. 由 $a \in A_+$ 可知 $\sigma(a) \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \varnothing$, 不妨取其中的一个元素为 λ, 则此时 $1_{\{\lambda\}} \in C(\sigma(a))$, 由 $1_{\{\lambda\}} = \bar{1}_{\{\lambda\}} = 1_{\{\lambda\}}^2$ 可知 p 是 H 上的投影, 且 $p \geqslant 0$. 由此, $p \in C^*(a) \subset A$.

记 $P = \{q \in A : q = q^2 = q^*, q \leqslant p\}$. 取 $e \in P$ 使得 $\dim e(H)$ 最小, 下证 e 就是一个绩效投影算子. $eAe \supset \mathbb{C}e$ 是显然的, 若 $eAe \setminus \mathbb{C}e$ 非空, 取 $c \in (eAe)_+$, 且不存在 $\lambda > 0$ 使得 $c = \lambda e$. 则 c 在 $e(H)$ 上存在至少 2 个不同的特征值, 不妨设其中的一个是 λ_0. 由前述讨论, 作 $e' = 1_{\{\lambda_0\}}(c)$, 则

$$e' \leqslant e \leqslant p, \qquad \dim e'(H) < \dim e(H),$$

这与 $\dim e(H)$ 的最小性矛盾. 于是 $eAe = \mathbb{C}e$, 即 e 是极小投影算子. □

命题 2.4.7 设 H 是有限维 Hilbert 空间, $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个非零的 C^* 子代数, 若 $\iota : A \hookrightarrow \mathcal{B}(H)$ 不可约, 则 $A = \mathcal{B}(H)$.

证明 取 A 中的极小投影算子 e, 断言 $\dim e(H) = 1$. 否则, 存在 $\xi, \eta \in e(H)$ 使得 $\xi, \eta \neq 0$, 且 $\langle \xi, \eta \rangle = 0$, 满足 $\forall x \in A\, \exists \lambda \in \mathbb{C}\, (exe = \lambda e)$, 此时

$$\langle \eta, x\xi \rangle = \langle e\eta, xe\xi \rangle = \langle \eta, exe\xi \rangle = \lambda \langle \eta, \xi \rangle = 0,$$

这即 $A\xi$ 是 $\iota: A\hookrightarrow\mathcal{B}(H)$ 不可约可知 $A\xi=H$, 即 $\forall\xi,\eta\in H, \exists x,y\in A$, 使得 $\xi=x\xi_0$, $\eta=y\xi_0$. 由 H 有限维可知 $\forall x\in\mathcal{B}(H)$, 存在 H 的有限子集 $\{\xi_1,\dots,\xi_n;\eta_1,\dots,\eta_n\}$ 和 $\{\lambda_k\}_{k=1}^n\subset\mathbb{C}$ 使得

$$x=\sum_{k=1}^n\lambda_k\xi_k\otimes\eta_k,$$

故 $\mathcal{B}(H)\subset A$. □

定理 2.4.8 (有限维 C^* 代数的结构)　设 A 是非零有限维 C^* 代数, 则存在若干正整数 $n_1,\dots,n_m$ 使

$$A\simeq\mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\mathrm{Mat}_{n_2}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{n_m}(\mathbb{C}).$$

这即非零有限维 C^* 代数总是若干矩阵代数的直和. 由此, 有限维 C^* 代数总是单位的.

证明　因 A 有限维, 取它的有限维忠实表示 (H,π,ξ), 有 $\dim H=\dim A$, 由定理 2.4.4 可知存在 $\pi_1,\dots,\pi_m$ 和正整数 $p_1,\dots,p_m$ 使得

$$\pi\simeq\pi_1^{\oplus p_1}\oplus\pi_2^{\oplus p_2}\oplus\cdots\oplus\pi_m^{\oplus p_m}.$$

令 $\pi_0=\bigoplus_{k=1}^m\pi_k$, 则 π_0 也忠实, 且是 π 的一个子表示. 因此

$$A\simeq\pi_0(A)=\pi_1(A)\oplus\cdots\oplus\pi_m(A).$$

对每一个 k, 设 π_k 对应的 Hilbert 空间为 H_k, 则 $n_k=\dim H_k<\infty$. 由前一引理可知 $\pi_k(A)=\mathcal{B}(H_k)$, 而 $\mathcal{B}(H_k)\simeq\mathrm{Mat}_{n_k}(\mathbb{C})$, 于是

$$A\simeq\pi_1(A)\oplus\cdots\oplus\pi_m(A)\simeq\mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\mathrm{Mat}_{n_2}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}_{n_m}(\mathbb{C}),$$

得证. □

2.5　谱测度与谱积分

我们从 $C(X)$ 的表示出发. 之前讨论过 $C(X)$ 的表示 $\pi: C(X)\to\mathcal{B}(H)$ 将 1 映到 id_H, 而其对偶 $C(X)^*\cong M(X)$ 将 F 映到 μ, 使得 $F(f)=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$. 一个自然的想法是, π 能否对应一个 "算子值测度", 使得算子 $T=\int\lambda\,\mathrm{d}E$.

定义 2.5.1 (谱测度)　设 X 是集合, $\mathfrak{B}$ 是 X 上的 σ–代数, H 是 Hilbert 空间. 称可测空间 $(X,\mathfrak{B})$ 上的映射 $E:\mathfrak{B}\to\mathcal{B}(H)$ 是一个**谱测度**, 若

(1)　对任何 $\Delta\in\mathfrak{B}$, $E(\Delta)$ 是一个投影, 且 $E(\varnothing)=0$, $E(X)=\mathrm{id}$;

(2)　对任何 $\Delta_1,\Delta_2\in\mathfrak{B}$, 成立 $E(\Delta_1\cap\Delta_2)=E(\Delta_1)E(\Delta_2)$;

(3)　设 $\{\Delta_n\}_{n\geqslant1}$ 两两不交, 则有 SOT–$\sum_{n\geqslant1}E(\Delta_n)=E\left(\bigcup_{n\geqslant1}\Delta_n\right)$.

一个复 Borel 测度的**全变差**定义为

$$\|\mu\|:=\sup\left\{\sum_n|\mu(\Delta_n)|:\{\Delta_n\}\text{ 是 }X\text{ 的划分}\right\},$$

则 $(X,\mathfrak{B})$ 的一个谱测度 (E,H) 可以如下诱导出一个 X 上的复测度: 对 $\xi,\eta\in H$, 令

$$E_{\xi,\eta}(\Delta):=\langle E(\Delta)\xi,\eta\rangle,$$

它满足 $\|E_{\xi,\eta}\| \leqslant \|\xi\|\,\|\eta\|$. 这因任取 $\{\Delta_n\}$ 是 X 的划分, 都有

$$\begin{aligned}\sum_n |E_{\xi,\eta}(\Delta_n)| &= \sum_n |\langle E(\Delta_n)\xi,\eta\rangle| = \sum_n \langle E(\Delta_n)\xi, E(\Delta_n)\eta\rangle \\ &\leqslant \sum_n \|E(\Delta_n)\xi\|\,\|E(\Delta_n)\eta\| \leqslant \left(\sum_n \|E(\Delta_n)\xi\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_n \|E(\Delta_n)\eta\|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\xi\|\,\|\eta\|\,.\end{aligned}$$

在 Hilbert 空间 $L^2(X,\mu)$ 上, 对 X 的 Borel 子集 Δ, 定义 $E(\Delta) = M_{1_\Delta}$, 则 E 是 $L^2(X,\mu)$ 上的谱测度. 设 f,g 是可测函数, 若 $E(f \neq g) = 0$, 则称 $f = g$ E–a.e., 并且称 f 关于谱测度 E 的**本性值域**为

$$\operatorname{ess\,im}(f) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \forall V (f \in V,\ V \text{ 是开集}), E(f^{-1}(V) = 0)\right\},$$

容易看出 $\operatorname{ess\,im}(f)$ 是 $\mathbb{C}$ 的闭子集. 此时可以定义 f 的**本性一致范数**为 $\|f\|_{E,\infty} := \sup_{\lambda\in\operatorname{ess\,im}(f)} |\lambda|$.

类似于 Lebesgue 积分的讨论, 要讨论谱测度下的积分, 我们从简单函数出发.

命题 2.5.2 设 f 是简单函数, 有 $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{\Delta_k}$, 则

$$\int f\,\mathrm{d}E := \sum_{k=1}^n a_k E(\Delta_k)$$

是一个良好定义的积分.

证明 这归结于证明当 $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{\Delta_k} = 0$ E–a.e. 时, 有 $\int f\,\mathrm{d}E = 0$.

当 $n=1$ 时是显然成立的, 归纳假设当 $n \leqslant m$ 时命题都成立, 考虑简单函数 $f = \sum_{k=1}^{m+1} a_k 1_{\Delta_k} = 0$ E–a.e., 且 $a_k \neq 0$, $E(\Delta_k) \neq 0$.

令 $\tilde{\Delta}_k = X \setminus \Delta_k$, 则 $1_{\Delta_k}1_{\tilde{\Delta}_k} = 0$ 总是成立, 令 $f_k = f \cdot 1_{\tilde{\Delta}_k}$, 有 $f_k = 0$ E–a.e., 且 f_k 仍为简单函数. 此时 f 至多含有 m 项, 于是由归纳假设可知

$$\sum_{\ell=1}^{m+1} a_\ell E(\Delta_\ell)E(\Delta_k) = 0,$$

令 $A = \sum_{\ell=1}^{m+1} a_\ell E(\Delta_\ell)$, 则对 $k = 1,2,\dots,n+1$, 有 $A = AE(\Delta_k)$. 因 $\Delta_k \cap \bigcap_{\ell=1}^{m+1}\Delta_\ell = \bigcap_{\ell=1}^{m+1}\Delta_\ell$, 故

$$A = AE(\Delta_1)\dots E(\Delta_{m+1}) = \left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right) E\left(\bigcap_{k=1}^{m+1}\Delta_k\right) = 0,$$

命题得证. □

推论 2.5.3 对简单函数 $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{\Delta_k}$, 有 $\|f\|_{E,\infty} = \left\|\int f\,\mathrm{d}E\right\|$.

证明 这因

$$\|f\|_{E,\infty} = \sup_{\lambda\in\operatorname{ess\,im}(f)} |\lambda| = \sup_k |a_k| = \left\|\sum_k a_k E(\Delta_k)\right\| = \left\|\int f\,\mathrm{d}E\right\|,$$

这里将 $\sum_k a_k E(\Delta_k)$ 看作是对角算子即可 □

由此, 对 $f \in L^\infty(X,E)$, 可用简单函数列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 做逼近. 当 $\|f_n - f\|_{E,\infty} \to 0$ 时, 定义

$$\int f\,\mathrm{d}E = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}E,$$

其中极限是算子范数下的极限. 由推论 2.5.3 可知

$$\left\|\int (f_n - g_n)\,\mathrm{d}E\right\| = \|f_n - g_n\| \to 0,$$

即谱积分不依赖于简单函数列的选取, 于是是良定义的.

因此定义

$$\pi : L^\infty(X,E) \to \mathcal{B}(H), \qquad f \mapsto \int f\,\mathrm{d}E,$$

由积分算子的线性可知 π 是线性的, 且对任意 $\xi,\eta \in H$, 有 $\langle \pi(f)\xi,\eta\rangle = \int f\,\mathrm{d}E_{\xi,\eta}$ (这里令 $f = 1_\Delta$ 取遍所有 *Borel* 子集的示性函数即可), 并且

$$|\langle \pi(f)\xi,\eta\rangle| = \left|\int f\,\mathrm{d}E_{\xi,\eta}\right| \leqslant \|f\|_{E,\infty}\|\xi\|\|\eta\|.$$

定理 2.5.4　以上定义的 π 是一个等距的*–同态.

证明　我们只需证明对任意 $f,g \in L^\infty(X,E)$, $\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$, 并且 π 是单同态即可.

先证明前一断言, 取 $f = \sum_m a_m 1_{\Delta_m}$, $g = \sum_n b_n 1_{\Delta'_n}$, 那么

$$fg = \sum_m\sum_n a_m b_n 1_{\Delta_m}1_{\Delta'_n} = \sum_{m,n} a_m b_n 1_{\Delta_m\cap\Delta'_n},$$

于是

$$\begin{aligned}
\pi(fg) = \int fg\,\mathrm{d}E &= \sum_{m,n} a_m b_n E(\Delta_m \cap \Delta'_n)\\
&= \sum_{m,n} a_m b_n E(\Delta_m)E(\Delta'_n)\\
&= \Big(\sum_m a_m E(\Delta_m)\Big)\Big(\sum_n b_n E(\Delta_n)\Big)\\
&= \left(\int f\,\mathrm{d}E\right)\left(\int g\,\mathrm{d}E\right) = \pi(f)\pi(g),
\end{aligned}$$

那么对 $f,g \in L^\infty(X,E)$, 分别取简单函数列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 逼近 f 和 g, 由

$$\begin{aligned}
\|f_ng_n - fg\|_{E,\infty} &= \|f_ng_n - f_ng - fg_n - fg\|_{E,\infty}\\
&\leqslant \|f_n(g_n-g)\|_{E,\infty} + \|(f_n-f)g\|_{E,\infty}\\
&\leqslant \|f_n\|_{E,\infty}\|g_n-g\|_{E,\infty} + \|f_n-f\|_{E,\infty}\|g\|_{E,\infty}\\
&\to 0,
\end{aligned}$$

于是 $\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$ 对 $f,g \in L^\infty(X,E)$ 也成立. 这说明 π 是一个代数同态. 而它是*–同态由定义立刻得到.

再证明 π 是单同态. 设 $\pi(f) = 0$, 那么 $\pi(|f|^2) = \pi(f)^*\pi(f) = \int |f|^2\,\mathrm{d}E = 0$. 因此对 $\varepsilon > 0$, 由

$$\varepsilon^2 E(|f| \geqslant \varepsilon) \leqslant \int_{|f|\geqslant\varepsilon} |f|^2\,\mathrm{d}E \leqslant \int |f|^2\,\mathrm{d}E = 0,$$

于是只能 $E(|f| \geqslant \varepsilon) = 0$, 这即 $f = 0$ E–a.e., 因此 π 是单的. 而 C^* 代数之间的单同态都是等距, 于是 π 是等距.　□

对有界可测函数全体 $L^\infty(X,\mathfrak{B})$ 上定义一致范数

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}|f(x)|,$$

其对合为共轭运算. 则以上命题的证明给出一个表示 π, 但不是等距. 一般地有 $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$. 这因 $L^\infty(X,\mathfrak{B}) \subset L^\infty(X,E)$, 但包含映射不是单的, 它们相差一个 E–零集上的取值.

推论 2.5.5　$\pi : C(X) \to \mathcal{B}(H)$, $f \mapsto \int f\,\mathrm{d}E$, 给出 $C(X)$ 的一个表示.

至此, 我们建立了 $C(X)$ 的表示与谱测度之间的对应关系:

定理 2.5.6 ($C(X)$ 的表示) 设 $\pi : C(X) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个表示, $\pi(1) = \mathrm{id}_H$, 则存在 X 上唯一的谱测度 (E, H) 使得

$$\pi(f) = \int f \,\mathrm{d}E,$$

满足

(1) π 是单同态 $\Longleftrightarrow$ 对任何非空开集 $V \subset X$, $E(V) \neq 0$;

(2) s 与每个 $\pi(f)$ 可交换 $\Longleftrightarrow$ s 与每个 $E(\Delta)$ 可交换.

证明 *唯一性.* 若另有 (E', H) 满足条件, 有 $\forall \xi, \eta \in H$,

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int f \,\mathrm{d}E_{\xi,\eta} = \int f \,\mathrm{d}E'_{\xi,\eta},$$

其中 $E_{\xi,\eta}$ 和 $E'_{\xi,\eta}$ 是正则复 Borel 测度, 上式对任意 $f \in C(X)$ 成立, 故 $E_{\xi,\eta} = E'_{\xi,\eta}$. 这即对任意 X 的 Borel 子集 Δ, 总有 $\forall \xi, \eta \in H$,

$$\langle E(\Delta)\xi, \eta \rangle = \langle E'(\Delta)\xi, \eta \rangle,$$

于是 $E = E'$.

存在性. 对 $\xi, \eta \in H$, 由 Riesz 表示定理可知存在唯一正则复 Borel 测度 $\mu_{\xi,\eta}$ 使得

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int f \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta},$$

因 π 是*–同态, $\mu_{\xi,\eta}$ 关于 ξ 是线性的, 且满足

$$\mu_{\xi,\xi} \geqslant 0, \qquad \mu_{\xi,\eta} = \overline{\mu_{\eta,\xi}}, \qquad \|\mu_{\xi,\eta}\| \leqslant \|\xi\| \, \|\eta\|,$$

故对 X 上有界 Borel 可测函数 $\varphi \in \mathfrak{B}(X)$, 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的有界线性算子记作 $\tilde{\pi}(\varphi)$, 使得对任意 $\xi, \eta \in H$,

$$\int \varphi \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta} = \langle \tilde{\pi}(\varphi)\xi, \eta \rangle,$$

易见 $\tilde{\pi}$ 是 π 的延拓, 且由

$$\langle \tilde{\pi}(\varphi)^*\xi, \eta \rangle = \overline{\langle \tilde{\pi}(\varphi)\eta, \xi \rangle} = \overline{\int \varphi \,\mathrm{d}\mu_{\eta,\xi}} = \int \bar{\varphi} \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta}$$

可知 $\tilde{\pi}(\varphi)^* = \pi(\bar{\varphi})$, 故 $\tilde{\pi}$ 保持对合.

对 $f, g \in C(X)$, 由

$$\int fg \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta} = \langle \pi(fg)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(f)\pi(g)\xi, \eta \rangle = \int f \,\mathrm{d}\mu_{\pi(g)\xi,\eta},$$

可知 $\mathrm{d}\mu_{\pi(g)\xi,\eta} = g \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta}$. 任取 $\varphi \in \mathfrak{B}(X)$, 对任意 $g \in C(X)$ 有

$$\int \varphi g \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta} = \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_{\pi(g)\xi,\eta} = \langle \tilde{\pi}(\varphi)\pi(g)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(g)\xi, \tilde{\pi}(\varphi)^*\eta \rangle = \int g \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\tilde{\pi}(\varphi)\eta},$$

故 $\varphi \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta} = \mathrm{d}\mu_{\xi,\tilde{\pi}(\varphi)\eta}$. 由此, 对 $\psi \in \mathfrak{B}(X)$, 有

$$\langle \tilde{\pi}(\psi\varphi)\xi, \eta \rangle = \int \psi\varphi \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta} = \int \psi \,\mathrm{d}\mu_{\xi,\tilde{\pi}(\varphi)^*\eta} = \langle \tilde{\pi}(\psi)\xi, \tilde{\pi}(\varphi)^*\eta \rangle = \langle \tilde{\pi}(\psi)\tilde{\pi}(\varphi)\xi, \eta \rangle$$

即 $\tilde{\pi}(\psi\varphi) = \tilde{\pi}(\psi)\tilde{\pi}(\varphi)$, 这即 $\tilde{\pi}$ 是*–同态.

对 X 的 Borel 子集 Δ, 可以定义 $E(\Delta) = \tilde{\pi}(1_\Delta)$. 容易验证

$$E(\varnothing) = 0, \qquad E(X) = \mathrm{id}, \qquad E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2),$$

设 $\{\Delta_n\}_{n\geqslant 1}$ 两两不交, 记 $\Delta=\bigcup_{n\geqslant 1}\Delta_n$, 则 $\forall\xi\in H$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(E(\Delta)-\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_n)\right)\xi\right|^2=\left\langle E\left(\bigcup_{k>n}\Delta_k\right)\xi,\xi\right\rangle=\int 1_{\bigcup_{k>n}\Delta_k}\mu_{\xi,\xi}=\mu_{\xi,\xi}\Big(\bigcup_{k>n}\Delta_k\Big)\to 0,$$

即 SOT– $\sum_{n\geqslant 1}E(\Delta_n)=E(\Delta)$. 从而 (E,H) 是 X 上的谱测度, 且对任何 X 的 Borel 子集 $\Delta,\xi,\eta\in H$, 有

$$\mu_{\xi,\eta}(\Delta)=\int 1_\Delta\,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta}=\langle\tilde{\pi}(1_\Delta)\xi,\eta\rangle=\langle E(\Delta)\xi,\eta\rangle\,,$$

故 $\forall f\in C(X)$ 也有 $\langle\pi(f)\xi,\eta\rangle=\int f\,\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta}=\int f\,\mathrm{d}E_{\xi,\eta}$, 从而 $\pi(f)=\int f\,\mathrm{d}E$ 得证.

(1) *必要性*. 若 π 是单射, 假设存在开集 V 使得 $E(V)=0$, 由 Urysohn 引理, 取 $f\in C(X)$ 满足 $\operatorname{supp}f=V$, 此时 $\pi(f)=\int f\,\mathrm{d}E=0$, 但 $f\neq 0$, 矛盾.

充分性. 若任何非空开集 V, $E(V)\neq 0$, 则 $\ker\pi\triangleleft C(X)$ 是一个闭理想. 若 π 不是单射, 则 $\ker\pi$ 非平凡. 故存在 X 的非空真闭子集 S 使得

$$\ker\pi=I_S:=\{f\in C(X):f|_S=0\}\,,$$

由 Urysohn 引理可知存在 $x\in X\setminus S$ 的邻域 U 使得 $S\cap U=\varnothing$, $\exists g\in C(X)$ $(\operatorname{supp}g=U)$ 且 $g(x)=1$. 设 $g\in\ker\pi$, 但

$$0=\pi(g)=\int g\,\mathrm{d}E\neq 0,$$

矛盾.

(2) 这因

$$\begin{aligned}s\pi(f)=\pi(f)s&\iff\langle s\pi(f)\xi,\eta\rangle=\langle\pi(f)s\xi,\eta\rangle\\&\iff\int f\,\mathrm{d}E_{\xi,s^*\eta}=\int f\,\mathrm{d}E_{s\xi,\eta}\\&\iff\mathrm{d}E_{\xi,s^*\eta}=\mathrm{d}E_{s\xi,\eta}\\&\iff\langle\pi(1_\Delta)\xi,s^*\eta\rangle=\langle\pi(1_\Delta)s\xi,\eta\rangle\\&\iff\langle sE(\Delta)\xi,\eta\rangle=\langle E(\Delta)s\xi,\eta\rangle\end{aligned}$$

得证. □

在 $\mathfrak{B}(X)$ 上定义

$$\|f\|_\infty:=\sup_{x\in X}|f(x)|\,,\qquad f^*:=\bar{f},$$

则 $\mathfrak{B}(X)$ 是一个单位交换 C^* 代数, 之前将 π 延拓为 $\tilde{\pi}$, 应用上述证明立刻得到:

推论 2.5.7　算子 s 与每个 $\tilde{\pi}(f)$ 交换 $\iff$ s 与每个 $E(\Delta)$ 交换.

2.6　循环表示, Borel 函数演算

之前提到过对 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数 A, 称 $\xi\in H$ 是一个关于 A 的**循环向量**, 如果 **clos** $\{A\xi\}=H$. 下面考虑 $C(X)$ 的循环表示:

引理 2.6.1　设 $\rho:C(X)\to\mathcal{B}(H)$ 是一个循环表示, 则存在 X 上的正则 Borel 概率测度 μ 使得 ρ 与 σ_μ 酉等价, 这里

$$\sigma_\mu:C(X)\to\mathcal{B}(L^2(X,\mu)),\qquad f\mapsto M_f^\mu,$$

这里 M_f^μ 是 f 对应的乘法算子.

证明 取 ρ 的循环向量 $\xi \in H$ 满足 $\|\xi\| = 1$, 则

$$\varphi : C(X) \to \mathbb{C}, \qquad g \mapsto \langle \rho(g)\xi, \xi \rangle$$

给出一个 $C(X)$ 上的态. 由 Riesz 表示定理, 存在 X 上的正则 Borel 测度 μ 使得 $\varphi(g) = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$. 定义 $u : C(X) \to H, g \mapsto \rho(g)\xi$, 则 u 是一个等距, 这因

$$\|ug\|^2 = \langle \rho(g)\xi, \rho(g)\xi \rangle = \int_X |g|^2 \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_2^2 .$$

因 $C(X)$ 在 $L^2(X, \mu)$ 上稠密, 于是 u 可以被延拓到 $L^2(X, \mu) \to H$ 上, 于是 u 是一个酉算子, 并且由

$$\rho(f)ug = \rho(f)\rho(g)\xi = \rho(fg)\xi = u(fg) = uM_f^\mu g,$$

这就说明了 $\rho(f)u = uM_f^\mu$. □

命题 2.6.2 C^* 代数 A 的任何非退化表示都是若干循环表示的直和.

证明 对 $\xi \in H$, 令 $H_\xi = \mathbf{clos}\,\{\pi(A)\xi\}$. 由 π 非退化可知 $\xi \in H_\xi$. 记 π_ξ 是 π 限制在 H_ξ 上的子表示, 那么 (H_ξ, π_ξ, ξ) 是一个循环表示. 由 Zorn 引理可知存在一族极大的 $\{\xi_i : i \in \alpha\}$ 满足 $\xi_i \in H$, $\|\xi_i\| = 1$, 且 $\{\xi_i\}$ 两两正交. 那么

$$H = \bigoplus_{i \in \alpha} H_{\xi_i}, \qquad \pi = \bigoplus_{i \in \alpha} \pi_{\xi_i},$$

这就说明 (H, π) 是若干循环表示的直和. □

接下来我们进入本小节的主线, 我们要讨论交换 von Neumann 代数的结构. 下面总假设这个交换的 von Neumann 代数 A 含有循环向量 ξ, 我们将要证明 A 总会同构于 $L^\infty(X, \mu)$, 这里 X 是紧空间而 μ 是一个有限测度.

在此之前, 有一些准备工作需要提前做好.

定义 2.6.3 (分离向量) 设 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 是 A 的一个表示, 称 $\xi \in H$ 是 A 的一个**分离向量**, 如 $a \in A, a\xi = 0$ 可以推出 $a = 0$.

分离向量与循环向量具有深刻的联系, 这由交换子刻画:

定理 2.6.4 设 $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个子代数, ξ 是 A 的循环向量, 则它是 A' 的分离向量. 若 A 是一个单位的*–子代数, 且 ξ 是 A' 的分离向量, 则 ξ 是 A 的循环向量. 特别地, 若 A 是 von Neumann 代数, 那么 ξ 是 A 的循环向量当且仅当它是 A' 的分离向量.

证明 (1) 设 A 是一个 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数, $\xi \in H$ 是 A 的循环向量, 则对 $y \in A'$ 满足 $y\xi = 0$, 有

$$\forall x \in A \, (yx\xi = xy\xi = 0),$$

由 $A\xi$ 的稠密性可知 $y = 0$, 即 ξ 是 A' 的分离向量.

(2) 设 A 是一个单位*–子代数, $\xi \in H$ 是 A' 的分离向量. 记 $K = \mathbf{clos}\,\{A\xi\}^\perp$ 是 H 的闭子空间, p 是到 K 上的正交投影算子, 只需证明 $p = 0$ 即可. 注意到

$$\forall x_1, x_2 \in A \, \forall \eta \in K \, (\langle x_1\eta, x_2\xi \rangle = \langle \eta, x_1^* x_2 \xi \rangle = 0),$$

于是 K 是 A 的不变子空间. 而 A 关于对合封闭, 于是 K 是 A 的约化子空间, 那么 $p \in A'$. 而 A 是单位的, 于是 $\xi \in K^\perp$, 因此 $p\xi = 0$. 结合 ξ 对 A' 的分离性可知 $p = 0$. □

命题 2.6.5 设 $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个交换非退化的 C^* 子代数, H 是可分的 Hilbert 空间, 则 A' 存在循环向量, 从而 A'' 存在分离向量.

证明 由命题 2.6.2 可知 $H = \bigoplus_{n\geqslant 1} H_{\xi_n}$, 这里 H_{ξ_n} 是循环表示对应的空间. 那么对每个 $n \geqslant 1$, H_{ξ_n} 是 A' 的不变子空间. 于是记 p_n 是到 H_{ξ_n} 上的正交投影算子, 对任意 $a' \in A'$ 成立 $p_n a' = a' p_n$, 即 $p_n \in A''$.

由 von Neumann 二次交换子定理, $A'' = \overline{A}^{\mathrm{WOT}}$, 于是 A'' 仍是交换的. 从而 $A' = A^{(3)}$ 包含了 A''.(这里用到了 A 的交换性!). 取 $\xi = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\xi_n$ 后由

$$A'\xi \supset \mathbf{clos}\,\{A' 2^n p_n \xi\} = \mathbf{clos}\,\{A'\xi_n\} = H_{\xi_n}$$

对任何 $n \geqslant 1$ 成立, 于是 $\mathbf{clos}\,\{A'\xi\} = H$, 这即 ξ 是 A' 的循环向量. □

定义 2.6.6 (极大交换, masa) 设 A 是 $\mathcal{B}(H)$ 的一个交换子代数, 称

(1) A 是**极大交换**的, 若任何包含它的交换子代数与它相等;

(2) A 是**极大交换自伴**的, 或称 A 是一个 **masa**(maximal Abelian self-adjoint algebra), 若它极大交换, 并且对对合运算封闭.

由此, 一个自伴交换子代数是 masa 当且仅当 $A = A'$, 这意味着 $A'' = A$, 于是 A 是 von Neumann 代数.

命题 2.6.7 设 $\pi : C(X) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个表示, H 是可分的 Hilbert 空间, 则以下条件等价:

(1) $\pi(C(X))$ 存在循环向量;

(2) $\pi(C(X))'$ 是交换的;

(3) $\pi(C(X))''$ 是 masa;

(4) $\pi(C(X))$ 酉等价于 $L^\infty(X,\mu)$, 其中的元素看作是 $L^2(X,\mu)$ 的乘法算子, μ 是 X 上的正则 Borel 概率测度.

证明 (1) ⇒ (2, 4): 由引理 2.6.1 , 不妨设 π 就是 σ_μ. 那么取 $t \in \pi(C(X))'$, $f = t1$, 这里 1 表示常函数 1, 就有

$$\forall g \in C(X)\,(tg = tM_g^\mu 1 = M_g^\mu t1 = fg),$$

于是 $\pi(C(X))' = L^\infty(X,\mu)$ 是交换的, 这说明 (2) 成立. 此是 $\pi(C(X))'' = L^\infty(X,\mu)$, 于是 (4) 也成立.

(2) ⇒ (3): 因 $C(X)$ 是交换的, 于是 $\pi(C(X))$ 交换, 而 $\pi(C(X))'$ 也交换, 于是

$$\pi(C(X))'' = \overline{\pi(C(X))}^{\mathrm{WOT}} \subset \pi(C(X))' \subset \pi(C(X))'',$$

其中第一个包含因 $\pi(C(X))$ 交换而第二个包含因 $\pi(C(X))'$ 交换, 这就证明了 (3).

(3) ⇒ (1): 注意到此时 $\pi(C(X))''$ 是 masa, 对 $\pi(C(X))' = \pi(C(X))''$ 应用命题 2.6.5 可知 $\pi(C(X))''$ 存在循环向量 ξ , 而

$$\overline{\pi(C(X))\xi} = \overline{\pi(C(X))''\xi} = H,$$

这说明 ξ 也是 $\pi(C(X))$ 的循环向量.

(4) ⇒ (1): 此时 $\pi(C(X))$ 酉等价于 $L^\infty(X,\mu)$, 是 $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ 上的交换子代数. 于是命题 2.6.5 说明 $L^\infty(X,\mu)' = L^\infty(X,\mu)$ 存在循环向量. □

至此我们说明了 $C(X)$ 的每个循环表示都可以酉等价地看作是某个 $L^\infty(X,\mu)$, 一个自然的想法是对这样的一串 Borel 概率测度 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, 能否通过一种方法将它缝合成一个测度. 我们发现如果取

$\mu=\sum_{n\geqslant 1}2^{-n}\mu_n$, 那么对任何 Borel 可测集 Δ,

$$\mu(\Delta)=0\iff\forall n\geqslant 1\,(\mu_n(\Delta)=0).$$

于是我们可以从 $\pi:C(X)\to\mathcal{B}(H)$ 出发构造 $\tilde{\pi}:L^\infty(X,\mu)\to\mathcal{B}(H)$. 这个操作与定理 2.5.6 中我们所做的类似, 我们这里更详细地重写一遍. 注意到 $L^\infty(X,\mu)=L^1(X,\mu)^*$, 于是在 $C(X)$ 的一侧我们考虑弱*拓扑.

引理 2.6.8　设 μ 是紧度量空间 X 上的 Borel 概率测度, 则对连续函数网 $(f_i)_{i\uparrow\alpha}\subset C(X)$, 有 $f_i\xrightarrow{\text{wk}^*}f\in L^\infty(X,\mu)$ 当且仅当 $M_{f_i}^\mu\xrightarrow{\text{WOT}}M_f^\mu$; 此时 $\pi(f_i)$ 在 $\mathcal{B}(H)$ 中 WOT–收敛, 且

$$\operatorname*{WOT-lim}_{i\uparrow\alpha}\pi(f_i)=\bigoplus_{n\geqslant 1}M_f^{\mu_n}.$$

这说明 $\tilde{\pi}:f\mapsto\bigoplus_{n\geqslant 1}M_f^{\mu_n}$ 可以被具体地定义.

证明　这无非是做一些计算, 对 $g,h\in L^2(X,\mu)$ 有 $g\bar{h}\in L^1(X,\mu)$, 而 $L^1(X,\mu)$ 中的元素 g 可以被分解为 $h_1=\sqrt{|g|}\in L^2(X,\mu)$ 和 $h_2=g/\sqrt{|g|}\in L^2(X,\mu)$, 于是由

$$\lim_{i\uparrow\alpha}\langle M_{f_i}^\mu g,h\rangle=\lim_{i\uparrow\alpha}\int_X f_i g\bar{h}\,\mathrm{d}\mu=\int_X fg\bar{h}\,\mathrm{d}\mu=\langle M_f^\mu g,h\rangle$$

和

$$\lim_{i\uparrow\alpha}\int_X f_i g\,\mathrm{d}\mu=\lim_{i\uparrow\alpha}\langle M_{f_i}^\mu h_1,h_2\rangle=\langle M_f^\mu h_1,h_2\rangle=\int_X fg\,\mathrm{d}\mu$$

即可得到前一断言的等价性.

对后一断言, 设 $f_i\xrightarrow{\text{wk}^*}f$, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $\bigoplus_{n\geqslant 1}L^2(X,\mu_n)$ 中的元素, 记 $\mu=\sum_{n\geqslant 1}2^{-n}\mu_n$, r_n 是 μ_n 关于 μ 的 Radon–Nikodym 导数, 有 $\|r_n\|_1\leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned}\left\langle\pi(f_i)-\bigoplus_{n\geqslant 1}M_f^{\mu_n}(g_n)_{n\geqslant 1},(h_n)_{n\geqslant 1}\right\rangle&=\sum_{n\geqslant 1}\langle(f_i-f)g_n,h_n\rangle\\&=\sum_{n\geqslant 1}\int_X(f_i-f)g_n\bar{h}_n\,\mathrm{d}\mu_n\\&=\sum_{n\geqslant 1}\int_X(f_i-f)g_n\bar{h}_n r_n\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X(f_i-f)\sum_{n\geqslant 1}g_n\bar{h}_n r_n\,\mathrm{d}\mu\to 0,\end{aligned}$$

这因 $\sum_{n\geqslant 1}g_n\bar{h}_n r_n\in L^1(X,\mu)$. □

现在我们说明交换 von Neumann 代数的结构:

定理 2.6.9　设 H 是可分的 Hilbert 空间, $\pi:C(X)\to\mathcal{B}(H)$ 非退化, 则存在 X 上的正则 Borel 概率测度 μ 使得 $\mathcal{M}=\pi(C(X))''$ 与 $L^\infty(X,\mu)$ 存在*–同构, 并且

$$\tilde{\pi}:(L^\infty(X,\mu),\text{wk}^*)\to(\mathcal{M},\text{WOT})$$

是一个同胚.

证明　之前的引理 2.6.8 说明了 $\tilde{\pi}$ 是连续映射, 只需证它既是单态又是满态即可.

对任意 $f\in L^\infty(X,\mu)$, $f\neq 0$ 使得 $\tilde{\pi}(f)=0$, 存在 $g\in L^\infty(X,\mu)$ 和正测度的 Borel 可测集 Δ 使得 $fg=1_\Delta$, 于是

$$\bigoplus_{n\geqslant 1}M_{1_\Delta}^{\mu_n}=\tilde{\pi}(1_\Delta)=\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)=0,$$

这说明 $\forall n \geqslant 1$ 有 $\mu_n(\Delta) = 0$, 于是 $\mu(\Delta) = 0$, 这与 Δ 正测度矛盾. 于是 $\tilde{\pi}$ 是单态.

由命题 2.6.5 可知 $\mathcal{M}$ 上存在分离向量 ξ, 令 $K = \mathbf{clos}\,\{\pi(C(X))\xi\}$, 则 $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(K), a \mapsto a|_K$ 给出一个*-同构, 且 $\rho(\mathcal{M})$ 也有循环向量. 于是命题 2.6.7 说明存在 ν 是 X 上的正则 Borel 概率测度, 使得

$$\tilde{\rho} : (\mathcal{M}, \text{wot}) \to (L^\infty(X, \nu), \text{wk}^*)$$

是连续的, 此时 $\tilde{\rho}\tilde{\pi} : L^\infty(X, \mu) \to L^\infty(X, \nu)$ 是一个*-同构, 且 $\tilde{\rho}\tilde{\pi}|_{C(X)} = \mathrm{id}_{C(X)}$ 是一个弱*连续的映射, 于是 μ 和 ν 等价, 这说明 $\tilde{\rho}\tilde{\pi} = \mathrm{id}$. 从而 $\tilde{\pi}$ 是满态. 这说明 $\tilde{\pi}$ 是一个同胚. □

现在我们考虑正规元 $x \in A$ 生成的 von Neumann 代数, 记作 $W^*(x)$. (*这是一些历史上的记号, 有些材料会用 W^* 代数指代我们所说的 von Neumann 代数*) 由于 $C^*(x)$ 已经通过连续函数演算与连续函数全体一一对应, 我们考虑 $W^*(x)$ 与何种函数一一对应. 注意到

$$W^*(x) = C^*(x)'',$$

下面说明如果 $W^*(x)$ 具有循环向量 ξ, 则 $W^*(x) \simeq L^\infty(\sigma(x), \mu_{\xi,\xi})$.

注意到 $C^*(x)$ 在 $W^*(x)$ 中 sot–稠, 从 $C(\sigma(x))$ 的结构来看, 存在一个谱测度 E 使得

$$\int_{\sigma(x)} f \,\mathrm{d}E = \langle f(x)\xi, \xi\rangle$$

成立, 这就说明 $E = \mu_{\xi,\xi}$. 这时得到的

$$\wedge : W^*(x) \mapsto L^\infty(\mathfrak{M}_{C^*(x)}, \mu), \qquad \langle x\xi, \xi\rangle = \int_{\mathfrak{M}_{C^*(x)}} \wedge(x)\,\mathrm{d}E$$

无非是 Gelfand 变换的延拓, 它在此时和**有界 Borel 函数演算**是一回事. 考虑有界 Borel 函数演算

$$\Phi : L^\infty(\sigma(x), \mu_{\xi,\xi}) \to W^*(x), \qquad \varphi \mapsto \varphi(x)$$

它是良定义的, 因 $\varphi = \psi$ $|\mu_{\xi,\xi}|$–a.e. 时, 因 ξ 是 $W^*(x)$ 的分离向量, 有 $\varphi = \psi$ E–a.e., 于是 $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$. 而对任意的 $g \in C(\sigma(x)), g(x) = \wedge^{-1}(g)$, 由 $g(x)\xi$ 的稠密性与

$$\left\langle \varphi(x) - \wedge^{-1}(\varphi)\xi, g(x)\xi \right\rangle = \int_{\sigma(x)} \varphi\bar{g}\,\mathrm{d}\mu_{\xi,\xi} - \int_{\sigma(x)} \varphi\bar{g}\,\mathrm{d}E = 0$$

可知 $(\varphi(x) - \lambda^{-1}(\varphi))\xi = 0$, 由 ξ 的分离性即证.

2.7 正规算子的分类 I: 重数理论

从 2.7 节到 2.9 节, 这三节的目的是在酉等价的意义下分类正规算子.

定义 2.7.1 (酉等价)　设 $m, n \in \mathcal{B}(H)$ 是正规元, 称 m 与 n **酉等价**, 若存在 $u \in \mathcal{U}(H)$ 使得 $n = umu^*$.

$\dim H < \aleph_0$ 的情形是线性代数这门课程的内容, 此时视 $m, n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, 那么 m, n 酉等价当且仅当 m, n 的特征值 (计重数) 是相同的. 当 $\dim H \geqslant \aleph_0$ 时, 在上一节定义的谱测度就对应有限维情形下的特征值, 因此只需要找到重数的对应即可.

为了考虑更多的投影, 我们引入了有界 Borel 函数演算, 这使得形如 1_Δ 的函数可以进行函数演算. 通过 Gelfand 变换, 容易得到

定理 2.7.2 (正规算子的谱定理, I) 可分 Hilbert 空间 H 上的正规算子 $n \in \mathcal{B}(H)$ 酉等价于某个 $L^2(X,\mu)$ 上的乘法算子.

它还有一个通过谱测度的表述, 即

定理 2.7.3 (正规算子的谱定理, II) 设 $n \in \mathcal{B}(H)$ 是正规的, 在 $\sigma(n)$ 上存在唯一的谱测度 E 使得

$$n = \int_{\sigma(n)} z \,\mathrm{d}E,$$

并且

(1) $\lambda \in \sigma_p(n)$ 当且仅当 $E(\{\lambda\}) \neq 0$, 由此 $\sigma(n)$ 的孤立点总是 n 的点谱;

(2) s 与 n 交换当且仅当 s 与每个 $E(\Delta)$ 交换, 这里 Δ 是 $\sigma(n)$ 的 Borel 子集.

但是这样的构造并不能保证酉等价, 问题还是出在重数上. 容易发现

$$L^\infty(X,\mu) \to \mathcal{B}(L^2(X,\mu)), \qquad f \mapsto M_f^\mu$$

和

$$L^\infty(X,\mu) \to \mathcal{B}(L^2(X,\mu)) \oplus \mathcal{B}(L^2(X,\mu)), \qquad f \mapsto M_f^\mu \oplus M_f^\mu$$

都在代数层面上给出了同构. 但这两种 “空间实现” 并不是同构的. 从朴素的观点来看, 前者是 “1 重” 的而后者是 “2 重” 的.

定义–命题 2.7.4 (一致重数) 设 $\mathcal{M}$ 是 masa, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\aleph_0\}$, 称交换 von Neumann 代数 $\mathcal{N}$ 具有**一致重数** n, 若 $\mathcal{N}'$ 与 $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{M})$ 酉等价. 这是一个良定义的概念.

证明 若存在 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\aleph_0\}$, 且 $m \leqslant n$ 使得 $\mathcal{N}$ 既有一致重数 m, 又有一致重数 n, 则存在 masa $\mathcal{M}$ 和 $\tilde{\mathcal{M}}$ 使得

$$\mathcal{N} \simeq \mathrm{Mat}_m(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Mat}_m(\tilde{\mathcal{M}}).$$

对 $\varphi \in \mathfrak{M}_{\tilde{\mathcal{M}}}$, 考虑以下单位$\star$–同态的复合

$$\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_n(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_\varphi} \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$$

它仍然是单位$\star$–同态, 于是只能 $m = n$. □

定理 2.7.5 设 $\mathcal{N}$ 是交换 von Neumann 代数, 作用在一个可分 Hilbert 空间上, 则存在 $\mathcal{N}$ 中唯一一族两两正交的投影算子 $\{p_n : n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\aleph_0\}\}$, 满足

$$\text{SOT–}\sum_{n \geqslant 1} p_n = \mathrm{id}_H,$$

并且 $\mathcal{N}|_{p_n H}$ 具有一致重数 n.

因此如果考虑同构 $\mathcal{N} \simeq L^\infty(X,\mu)$, 则存在两两正交的测度 $\mu_n \ll \mu$ 使得 $\mathcal{N}$ 酉等价 (“空间实现”) 于

$$\bigoplus_{n \geqslant 1} L^\infty(X_n,\mu_n)^{\oplus n} \oplus L^\infty(X_{\aleph_0},\mu_{\aleph_0})^{\oplus \aleph_0},$$

它作用在 $H = \bigoplus_{n \geqslant 1} L^2(X_n,\mu_n)^{\oplus n} \oplus L^2(X_{\aleph_0},\mu_{\aleph_0})^{\oplus \aleph_0}$ 上, 后者是一个可分 Hilbert 空间.

定义 2.7.6 (重数函数) 对 $\mathcal{N} = W^*(a) \simeq L^\infty(X,\mu)$, 定义**重数函数**

$$m_a : \sigma(a) \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\aleph_0\}, \qquad x \mapsto k,$$

其中对 $z \in X_k$, $m_a(z) = k$, $1 \leqslant k \leqslant \aleph_0$.

到此为止, 我们找到了重数在 $\dim H = \aleph_0$ 下的对应, 于是最开始的问题得到解决.

推论 2.7.7　$\mathcal{B}(H)$ 中两个正规算子 m 和 n 酉等价, 当且仅当 m 和 n 有等价的谱测度和重数函数.

2.8　正规算子的分类 II: 正规算子的对角化

除开酉等价, 通过其生成的 von Neumann 代数或是 C^* 代数也可以将正规算子之间等同: 为作区分, 将酉等价写作 $\sim_u$, W^*-等价写作 $\sim_{W^*}$, C^* 等价写作 $\sim_{C^*}$. 那么

$$m \sim_u n \iff \exists u \in \mathcal{U}(H)\,(m = u^*nu) \iff \text{测度等价且重数相同}$$
$$m \sim_{W^*} n \iff W^*(m) \cong W^*(n) \iff \text{诱导出的测度等价}$$
$$m \sim_{C^*} n \iff C^*(m) \cong C^*(n) \iff \sigma(m) = \sigma(n)$$

这里酉等价和 W^*-等价都是测度味道比较重的等价关系. 由定义立刻得到这三种等价关系的强弱关系如下:

$$m \sim_u n \implies m \sim_{W^*} n \implies m \sim_{C^*} n.$$

在有限维空间上总可以做正规算子的对角化, 但在 H 上的正规算子却未必能在酉等价的意义下作对角化. 一个简单的反例是 $f(x) = x$, $f \in C[0,1] \subset \mathcal{B}(L^2[0,1])$. 但在 C^*-等价的意义下是可以的, 此时只需取 $\sigma(m)$ 的一个可数稠密子序列 $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$, 令 $n = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, 则 $\sigma(n) = \mathbf{clos}\{\lambda_k : k \geqslant 0\} = \sigma(m)$. (*若 $A \subset \ell_\infty(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, 则 A 可对角化, 非常合理!*)

对酉等价的条件还可以适当地放宽一些, 为此引入下面三种比酉等价稍弱的等价关系:

定义 2.8.1 (正规算子的近似等价)　设 $a, b \in \mathcal{B}(H)$ 是正规算子, 称 a 与 b:

(1)　**近似酉等价**, 若存在 $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 使得 $a = \lim_{n\to\infty} u_n b u_n$, 记作 $a \sim_{au} b$. 这也等价于 a 与 b 具有相同的酉等价闭轨道, 其中 $\bar{\mathcal{U}}(a) := \mathbf{clos}\{u^*au : u \in \mathcal{U}(H)\}$ 称作是 a 的酉等价闭轨道.

(2)　**相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价**, 若存在 $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 使得 $a = \lim_{n\to\infty} u_n^* b u_n$, 且 $a - u_n^* b u_n \in \mathcal{K}(H)$, 记作 $a \sim_{au,\mathcal{K}} b$.

(3)　**弱近似酉等价**, 若存在 $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 和 $(v_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 使得 $a = \textsc{sot}\text{–}\lim_{n\to\infty} u_n^* b u_n$ 且 $b = \textsc{sot}\text{–}\lim_{n\to\infty} v_n a v_n^*$, 记作 $a \sim_{wau} b$.

从定义立刻发现这三类等价关系中最强的是相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价, 其次是近似酉等价, 再其次是弱近似酉等价. 它们都比 C^*-等价要强. 那么自然有这样的问题:

(1a) 如何刻画 H 上正规算子之间的 (相对 $\mathcal{K}$, 弱) 近似酉等价?

(1b) 如何刻画交换可分的 A 的表示间的 (相对 $\mathcal{K}$, 弱) 近似酉等价?

类似地也可以定义 A 上两个表示 ρ 和 ρ' 之间的等价关系:

定义 2.8.2 (表示的近似等价)　设 ρ 和 ρ' 是 C^* 代数 A 上的表示, 称 ρ 与 ρ':

(1)　**近似酉等价**, 若存在 $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 使得对任意 $a \in A$ 都有 $\lim_{n\to\infty} \|\rho(a) - u_n\rho'(a)u_n^*\| = 0$. 记作 $\rho \sim_{au} \rho'$;

(2)　**相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价**, 若存在 $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 使得 $\forall a \in A$ 都有 $\lim_{n\to\infty} \|\rho(a) - u_n\rho'(a)u_n^*\| = 0$, 且对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 有 $\rho(a) - u_n\rho'(a)u_n^* \in \mathcal{K}(H)$. 记作 $\rho \sim_{au,\mathcal{K}} \rho'$;

(3)　**弱近似酉等价**, 若存在 $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{U}(H)$ 使得对任意 $a \in A$ 都有 $\textsc{sot}\text{–}\lim_{n\to\infty} \rho(a) - u_n\rho'(a)u_n^* = 0$. 由极化恒等式, 这等价于 $\textsc{wot}\text{–}\lim_{n\to\infty} \rho(a) - u_n\rho'(a)u_n^* = 0$. 记作 $\rho \sim_{wau} \rho'$.

因此以上的 (1a) 和 (1b) 可以通过表示转化为下面的两个问题:

(2a) 在 $\sim_{au}, \sim_{au,\mathcal{K}}, \sim_{wau}$ 的意义下是否可以对角化?

(2b) 对任意可分交换 C^* 代数的可分表示 ρ, 是否存在 $\rho' : A \to \ell_\infty(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 在 $\sim_{au}, \sim_{au,\mathcal{K}}, \sim_{wau}$ 的意义下与 ρ 等价?

例 2.8.3 下面给出一些近似等价的例子:

(1) 考虑 $a = \operatorname{diag}\{1, 2, 1, 2, \ldots, \}$ 和 $b = \operatorname{diag}\{2, 1, 2, 1, \ldots\}$. 则 $a \sim_u b$, 取

$$u = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \cdots\right\}$$

即可.

(2) 取 $a = \operatorname{diag}\{1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\}$ 和 $b = \operatorname{diag}\{0, 1, 1/2, 1/4, \ldots\}$, 则 $a \sim_{au,\mathcal{K}} b$. 这因

$$\operatorname{diag}\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} \sim_u \operatorname{diag}\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots\right\},$$

而 $a - b_n = \operatorname{diag}\{0, \ldots, 0, 1/2^{n+1}, 1/2^{n+2} - 1/2^{n+1}, \ldots\} \in \mathcal{K}(H)$.

(3) 取 $a = \operatorname{diag}\{2, 1, 1, 1, \ldots\}$ 和 $b = \operatorname{diag}\{2, 2, 1, 1, \ldots\}$, 则 a 与 b 不是弱近似酉等价的. 注意到它与 (2) 的区别仅仅在于 (2) 中的 0 是 $\sigma(b)$ 的聚点.

在相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价的意义下, 正规算子是可以对角化的. 这即 Weyl–von Neumann–Berg 定理所叙述的:

定理 2.8.4 (Weyl–von Neumann–Berg) 设 $a \in \mathcal{B}(H) = \ell_2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 是正规算子, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $d \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 和 $k \in \mathcal{K}(H)$, $\|k\| < \varepsilon$ 使得 $a \sim_u d + k$.

证明 不妨设 $0 \leqslant a \leqslant 1$. 定义 $f_n : [0, 1) \to \{0, 1\}$, $t \mapsto t_n$, 这里 t_n 是 t 在标准 2 进制下的第 n 位. 则 $p_n = f_n(a)$ 是投影, 且

$$a = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2^n} f_n(a).$$

固定 H 的一个规范正交基 $\xi_1, \xi_2, \ldots$, 取

$$H_n := \left\{\prod_{i=1}^{n} p_k^{(\varepsilon_k)} \xi_j : j = 1, 2, \ldots, n,\ \varepsilon_k = \pm 1\right\}.$$

我们约定 $p_k^{(1)} = p_k, p_k^{(-1)} = 1 - p_k$. 再记 $q_n = p_{H_n}$ 是到 H_n 的正交投影算子. 则 $n \geqslant m$ 时 $p_n H_m = H_m$, 这就说明 $[p_n, q_m] = 0$. 再取 $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 使得 $1/2^N < \varepsilon$, 定义

$$d_n = \begin{cases} p_n, & n \leqslant N \\ p_n(1 - q_n), & n > N \end{cases}$$

再取 $d = \sum_{n \geqslant 1} d_n / 2^n$. 则 $d - a = -\sum_{n \geqslant N} (q_n p_n)/2^n$, 因此

$$d - a \in \mathcal{K}(H), \qquad \|d - a\| \leqslant \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

令

$$H = \bigcup_{n \geqslant 1} H_n = \bigoplus_{n \geqslant 1} (H_{n+1} \ominus H_n),$$

则 d 在任何 $H_{n+1} \ominus H_n$ 下都是对角的, 因此 d 是对角的. □

推论 2.8.5 自伴算子可在 $\sim_{au,\mathcal{K}}$ 下对角化.

为了进一步刻画这三种更弱的等价关系, 需要引入本质谱的概念, 这即把有限重数的特征值去掉 (因这一部分可以看作是简单的对角算子), 而将剩下的部分看作是谱中更 “本质” 的部分.

定义 2.8.6 (本质谱) 对 $a \in A$, 定义其**本质谱**为

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}(a) &:= \sigma(a) \setminus \{\lambda \in \sigma_p(a) : m_a(\lambda) < \aleph_0\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(a) : \forall f \in C(\sigma(a))\, (f(\lambda) = 1 \implies \operatorname{rank} f(a) = \infty)\}.\end{aligned}$$

于是由定义可知, 若记 $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是自然射影, 则 $\sigma_{\text{ess}}(a) = \sigma(\pi(a))$.

引理 2.8.7 设 X 是紧度量空间, $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ 与 $(\zeta_k)_{k\geqslant 1}$ 是 X 上两个可数稠密子集, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 的一个排序 τ 使得

$$\forall k \geqslant 1\, (d(\xi_k, \zeta_{\tau(k)}) < \varepsilon), \qquad \lim_{k\to\infty} d(\xi_k, \zeta_{\tau(k)}) = 0.$$

证明 以 X_{ess} 记 X 的据点全体和孤立点全体构成的序列, 并约定孤立点在 X_{ess} 中出现无限次. 对 X_{ess} 中的孤立点来说, 若它们与其他 X_{ess} 中的点距离 $\geqslant \varepsilon/2$, 则将它们与自身配对, 否则与距其 $< \varepsilon/2$ 的点配对. 由此不妨设 X 中任何点都与 X_{ess} 间距离小于 $\varepsilon/2$.

递归地定义 τ 如下: 设已被定义的 $\tau(j)$ 满足

$$\left|\xi_j - \zeta_{\tau(j)}\right| < \max\left\{d(\xi_j, X_{\text{ess}}) + 2^{-j}\varepsilon, d(\zeta_{\tau(j)}, X_{\text{ess}}) + 2^{-\tau(j)}\varepsilon\right\},$$

若 $\tau(k)$ 还未被定义, 则取 $l \notin \{\tau(j)\}$ 使得

$$|\xi_k - \zeta_\ell| < d(\xi_k, X_{\text{ess}}) + 2^{-k}\varepsilon,$$

这样的 ℓ 总是可以取到的. 因 $(\zeta_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ 在 X_{ess} 中稠密且孤立点出现无限次. 因此 $\tau(k) = \ell$ 可以被定义. 反过来, 如果 $k \notin \{\tau(j)\}$, 取 $\ell \notin \{\tau^{-1}(j)\}$ 使得

$$|\xi_\ell - \zeta_k| < d(\zeta_k, X_{\text{ess}}) + 2^{-k}\varepsilon$$

即可. 因此如此定义的 τ 是一个双射, 且满足条件. □

于是对于对角化的算子, 我们可以断言这三种近似等价关系都是相同的.

命题 2.8.8 设 $a, b \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \subset \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}))$ 是对角化的算子, 则以下条件等价:

(1) $a \sim_{au,\mathcal{K}} b$;

(2) $a \sim_{au} b$;

(3) $a \sim_{wau} b$;

(4) 对任意 $f \in C(\sigma(a)) = C(\sigma(b))$, 成立 $\operatorname{rank} f(a) = \operatorname{rank} f(b)$;

(5) $\sigma_{\text{ess}}(a) = \sigma_{\text{ess}}(b)$, 且对任意 $\lambda \in \sigma(a) \setminus \sigma_{\text{ess}}(a)$ 都有 $\dim\ker(a - \lambda) = \dim\ker(b - \lambda)$.

证明 其中 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) 是显然的, (3) ⇒ (4) 由函数演算立刻得到, 而 (4) ⇒ (5) 无非是 σ_{ess} 和 rank 定义的重述. 主要的问题在于 (5) ⇒ (1).

若 a, b 都可以对角化, 设他们分别在基 $\{\xi_k\}$ 和 $\{\zeta_k\}$ 下有

$$a = \operatorname{diag}\{\mu_k\}, \qquad b = \operatorname{diag}\{\nu_k\}$$

的形式. 此时 $\{\mu_k\}$ 和 $\{\nu_k\}$ 都是 $X = \sigma(a) = \sigma(b)$ 的稠密子集, 并且由特征值的重数理论可知其中的孤立点一定是重复出现, 且出现的次数相同. 记 $X_{\text{ess}} = \sigma_{\text{ess}}(a)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 由引理 2.8.7 可知存在 $\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 的重排 τ 使得

$$\forall k \geqslant 1\, (\left|\mu_k - \nu_{\tau(k)}\right| < \varepsilon), \qquad \lim_{k\to\infty} \left|\mu_k - \nu_{\tau(k)}\right| = 0.$$

取 $u\xi_k = \zeta_{\tau(k)}$, 则 u 是酉算子, 且满足

$$a - u^*bu = \operatorname{diag}\left\{\mu_k - \nu_{\tau(k)}\right\}.$$

因此 $a - u^*bu \in \mathcal{K}(H)$, 再由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知 $a \sim_{au,\mathcal{K}} b$.

对一般的情形, 需要考虑 $a = a_0 \oplus a'$, 其中 a_0 对应 a 中有限重数特征值的部分, a' 是正规的, 且 $\sigma(a') \subset \sigma_{\text{ess}}(a)$. 由 Weyl–von Neumann–Berg 定理可知对任意 $k \geqslant 1$, 存在可对角化的算子 d_k 使得

$$a' - d_k \in \mathcal{K}(H), \qquad \|a' - d_k\| < \frac{1}{2k}.$$

特别地, d_k 的特征值与 $X_{\text{ess}} = \sigma_{\text{ess}}(a)$ 的距离至多为 $1/2k$. 因此存在 d_k 的紧扰动 d_k' 使得

$$\sigma(d_k') = X_{\text{ess}} = \sigma_{\text{ess}}(a), \qquad \|a' - d_k'\| < \frac{1}{k}.$$

取 $e_k = a_0 \oplus d_k'$, 则 e_k 可对角化. 由对角化的情形可知 $e_k \sim_{au,\mathcal{K}} e_1$, 而 $a - e_k \in \mathcal{K}(H)$ 且 $\lim_{k\to\infty} \|a - e_k\| = 0$ 可知 $a \sim_{au,\mathcal{K}} e_1$. 对 b 作同样的讨论即证. □

因此对表示作类似的讨论也可以得到类似的结论. 称 $C(X)$ 的表示是一个**对角表示**, 若其像是可对角化的.

推论 2.8.9 设 X 是紧度量空间, 则 $C(X)$ 的任何可分表示 ρ 都相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价于某个对角表示.

证明 取 $\rho(C(X))''$ 中极小有限秩投影全体 $(p_n)_{n\geqslant 1}$, 并取 $p = \bigoplus_{n\geqslant 1} p_n$, 则 $\rho_0 = p\rho|_{pH}$ 是可对角化的. 只需要讨论 $\tilde{\rho} = p^\perp \rho|_{p^\perp H}$ 即可.

断言对任意 $f \in C(X)$, 若 $\tilde{\rho}(f) \neq 0$, 则 $\tilde{\rho} \notin \mathcal{K}(H)$. 否则 $\tilde{\rho}(C(X))$ 中包含 $K = \tilde{\rho}(f) \in \mathcal{K}(H)$, 进一步包含 $C^*(K)$, 而 $C^*(K)$ 中存在极小有限秩投影. 又因为 $p \in \rho(C(X))''$, 于是

$$K^\perp = p^\perp \rho(f) p^\perp \neq 0, \qquad K' \in \mathcal{K}(H) \cap \rho(C(X))'',$$

因此 $K' \sim_u K \oplus 0$, 故存在 $p' \in \rho(C(X))''$ 使得 p' 与 p 正交, 这与 p 的定义矛盾.

因交换的 von Neumann 代数可被自伴算子生成, 此时 $C(X)$ 可分, 可取 $0 \leqslant a \leqslant 1$ 使得

$$\tilde{\rho}(C(X)) \subset C^*(a) \subset \tilde{\rho}(C(X))'' = W^*(a).$$

而 $\sigma(a) = \sigma_{\text{ess}}(a)$ (否则有限重数的特征值对应 $C^*(a)$ 中的有限秩投影), 由 Weyl–von Neumann–Berg 定理可知存在可对角化的算子 b 满足

$$\sigma(b) = \sigma_{\text{ess}}(b) = \sigma_{\text{ess}}(a) = \sigma(a),$$

使得 $a \sim_{au,\mathcal{K}} b$. 因此 $C^*(a)$ 上的表示 $\tau: f(a) \mapsto f(b)$ 与 id 相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价, 这即 $\rho_0 \oplus \tau\tilde{\rho} \sim_{au,\mathcal{K}} \rho$. □

因此对表示有:

定理 2.8.10 设 X 是紧度量空间, ρ, σ 是 $C(X)$ 的可分表示, 以下条件等价:

(1) $\rho \sim_{au,\mathcal{K}} \sigma$;

(2) $\rho \sim_{au} \sigma$;

(3) $\rho \sim_{wau} \sigma$;

(4) 对任意 $f \in C(X)$, $\operatorname{rank} \rho(f) = \operatorname{rank} \sigma(f)$.

证明　(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) 是显然的, (3) $\Longrightarrow$ (4) 因 rank 在 WOT 下是下半连续的, 主要的问题在 (4) $\Longrightarrow$ (1).

由推论 2.8.9 不妨设 ρ 和 σ 都是对角化的, 则 $\ker\rho = \ker\sigma$. 而 $\ker\rho$ 总有形式

$$I_E = \{f \in C(X) : f|_E = 0\},$$

其中 $E \subset X$ 是一个闭集, 因此不妨设 $E = X$, 即 ρ, σ 都是单的.

取 X 中的序列 $(\xi_n)_{n\geqslant 1}, (\zeta_n)_{n\geqslant 1}$ 使得在 H_ρ 和 H_σ 的某一规范正交基下具有

$$\rho(f) = \operatorname{diag}\{f(\xi_n)\}, \qquad \sigma(f) = \operatorname{diag}\{f(\zeta_n)\}$$

的形式, 因 ρ 和 σ 是单的, $\ker\rho = \ker\sigma = \{0\}$, 因此

$$X = \mathbf{clos}\{\xi_n : n \geqslant 1\} = \mathbf{clos}\{\zeta_n : n \geqslant 1\}.$$

若 $\lambda \in X$ 是孤立点, 取 $f = 1_{\{\lambda\}}$ 作函数演算可得 λ 在 $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(\zeta_n)_{n\geqslant 1}$ 中出现的次数相同. 而对非孤立的部分, 由引理 2.8.7 可知存在 $\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 的排列 τ_n 使得

$$\max_{k\geqslant 1} d(\xi_k, \zeta_{\tau_n(k)}) < \frac{1}{n}, \qquad \lim_{k\to\infty} d(\xi_k, \zeta_{\tau_n(k)}) = 0.$$

取 u_n 是对应的酉算子, 则对任意 $f \in C(X)$ 有

$$\rho(f) - u_n^*\sigma(f)u_n = \operatorname{diag}\left\{f(\xi_k) - f(\zeta_{\tau_n(k)})\right\}.$$

而 X 是紧的, 故 $f \in C(X)$ 是一致连续的. 这说明 $\rho(f) - u_n^*\sigma(f)u_n \in \mathcal{K}(H)$, 得证. □

2.9　正规算子的分类 III: 完全正映射与 Voiculescu 定理

$C(X)$ 作为一个交换的 C^* 代数, 其中 ev_x 自然地成为一个特征. 那么对非交换情形, 它对应非交换 C^* 代数上的纯态, 通过 GNS 构造又对应一个不可约表示. 从这个角度出发可以推广 Weyl–von Neumann–Berg 定理. 我们从可分 C^* 代数上的态说起:

引理 2.9.1 (Glimm)　设 $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是一个可分 C^* 代数, 它的一个态 φ 满足 $\varphi(A \cap \mathcal{K}(H)) = 0$, 则存在一列 H 中的弱收敛到 0 的单位向量 $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 使得

$$\forall a \in A\,(\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \langle a\xi_n, \xi_n\rangle).$$

这即 $\varphi_n = \langle \cdot\xi_n, \xi_n\rangle$ 是弱*收敛到 φ 的.

证明　以 $\mathcal{S}(A)$ 记 A 的态空间. 记

$$\mathcal{S}_0 := \left\{\psi \in \mathcal{S}(A) : \exists (\xi_k)_{k\geqslant 1} \subset H,\ \|\xi_k\| = 1,\ \xi_k \xrightarrow{\text{wk}} 0,\ \psi(a) = \lim_{k\to\infty} \langle a\xi_k, \xi_k\rangle\right\}$$

则由 $\mathcal{S}(A)$ 是紧集可知 $\mathcal{S}_0$ 非空.

再证 $\mathcal{S}_0$ 是凸集. 为此任取 $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$, 设 $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(\zeta_n)_{n\geqslant 1}$ 使得

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \langle \cdot\xi_n, \xi_n\rangle, \qquad \psi = \lim_{n\to\infty} \langle \cdot\zeta_n, \zeta_n\rangle,$$

若 ξ_n 与 ζ_n 是正交的, 令 $\eta_n = (\xi_n + \zeta_n)/\sqrt{2}$, 则

$$\begin{aligned}\langle a\eta_n, \eta_n\rangle &= \frac{1}{2}\langle a\xi_n + a\zeta_n, \xi_n + \zeta_n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle a\xi_n, \xi_n\rangle + \frac{1}{2}\langle a\zeta_n, \zeta_n\rangle + \frac{1}{2}\langle a\xi_n, \zeta_n\rangle + \frac{1}{2}\langle a\zeta_n, \xi_n\rangle\end{aligned}$$

若 $a\xi_n$ 与 ζ_n 正交, 则 $a^*\xi_n$ 也与 ζ_n 正交, 在这种情况下上式最后两项为零. 做出这样的假设是合理的, 这因 ξ_n 与 ζ_n 都弱收敛到 0, 因此总可以通过 Gram–Schmidt 正交化和取相应的子序列得到满足条件的序列. 因此 $(\varphi+\psi)/2 \in \mathcal{S}_0$, 这就说明 $\mathcal{S}_0$ 是凸集.

最后说明 $\mathcal{S}_0$ 是弱*闭的. 设 $\varphi \notin \mathcal{S}_0$, 由 Hahn–Banach 定理可知存在 $a \in A_{\text{sa}}$ 使得

$$\varphi(a) \notin \{\psi(a) : \psi \in \mathcal{S}_0\}.$$

而后者是某个线性映射作用于紧凸集的连续像, 从而是闭凸集. 又因为 $a \in A_{\text{sa}}$, 于是 $\{\psi(a) : \psi \in \mathcal{S}_0\} \subset \mathbb{R}$. 记 $\mathbf{clos}\{\sigma_{\text{ess}}(a)\} = [\alpha, \beta]$, 定义

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \min\{\max\{\alpha, x\}, \beta\},$$

并记 $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是自然射影. 则 $\pi f(a) = f(\pi(a)) = \pi(a)$ 导出 $f(a) - a \in \mathcal{K}(H)$. 因此 $\varphi(f(a)) = \varphi(a)$, 于是

$$\{\psi(f(a)) : \psi \in \mathcal{S}_0\} = \{\psi(a) : \psi \in \mathcal{S}_0\}.$$

而 $\alpha \leqslant a \leqslant \beta$, 故对任何 $\xi \in H$ 满足 $\|\xi\| = 1$, 都有

$$\alpha \leqslant \varphi(a) \leqslant \beta, \qquad \alpha \leqslant \langle a\xi, \xi\rangle \leqslant \beta.$$

这即 $\{\psi(a) : \psi \in \mathcal{S}_0\} \subset [\alpha, \beta]$. 而谱映射 $E_a(\beta - 1/n, \beta]$ 对任何 $n > 0$ 都不是有限秩的, 于是若 $\|\xi_n\| = 1$ 且 ξ_n 与 $E_a(\beta - 1/n, \beta]H$ 正交, 则

$$\langle a\xi_n, \xi_n\rangle > \beta - \frac{1}{n},$$

这样得到一个子序列确定 $\mathcal{S}_0$ 中的元素 ψ, 则 $\psi(a) \geqslant \beta$. 同理可证存在 $\mathcal{S}_0$ 的元素 ψ' 使得 $\psi'(a) \leqslant \alpha$. 而 $\{\psi(a) : \psi \in \mathcal{S}_0\} \subset [\alpha, \beta]$, 于是二者相等. 这与 $\varphi(a) \in [\alpha, \beta]$ 是矛盾的. □

本节的第二个中心定理, Voiculescu 定理可以看作是 Glimm 引理在完全正映射下的推广. 首先给出完全正映射的定义:

定义 2.9.2 (完全正映射) 设 A, $\mathcal{B}$ 是 C^* 代数, $\varphi : A \to \mathcal{B}$ 是一个线性映射. 对任意 $n \geqslant 1$, 它自然地诱导一个映射 $\varphi_n : \mathrm{Mat}_n(A) \to \mathrm{Mat}_n(\mathcal{B})$, 它无非是逐元素作用. 称 φ 是

(1) **正**的, 若 $\varphi(A_+) \subset \mathcal{B}_+$;

(2) n-**正**的, 若 φ_n 是正的;

(3) **完全正**的, 若对任意 $n \geqslant 1$, φ 是 n-正的.

于是任何 C^* 代数间的*-同态都是完全正的. 这因 $\rho : A \to \mathcal{B}$ 诱导出来的 ρ_n 仍然是*-同态, 从而是正的. 但常见的矩阵转置操作是正线性映射却不是完全正的, 例如 $\varphi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto A\mathsf{T}$, 注意到 φ_n 不是正的.

引理 2.9.3 设 $\varphi : A \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 是一个完全正映射, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(A \cap \mathcal{K}(H)) = 0$. 则存在一列等距 $(v_k)_{k\geqslant 1} : \mathbb{C}^n \to H$ 使得对任意 $a \in A$ 有

$$\text{WOT–}\lim_{k\to\infty} v_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \|\varphi(a) - v_k^* a v_k\| = 0.$$

证明 取 $\mathbb{C}^n$ 上的典范正交基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$, 再取 $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)\mathsf{T}/\sqrt{n} \in \mathbb{C}^{n^2}$, 则 $\|\bar{e}\| = 1$. 定义 $\omega : \mathrm{Mat}_n(A) \to \mathbb{C}$ 如下:

$$\omega([a_{ij}]) = \langle \varphi_n([a_{ij}])\bar{e}, \bar{e}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(a_{ij})e_j, e_i\rangle.$$

因 φ 是完全正的, 故 ω 是正的. 再由 $\varphi(1)=1$ 可知 $\omega(1)=1$. 由 Glimm 引理可知存在 $H^{(n)}$ 中的单位向量列 $(\bar{h}^k)_{k\geqslant 1}$ 满足 $\bar{h}^k \xrightarrow{\text{wk}} 0$, 且对任意 $\forall [a_{ij}]\in \mathrm{Mat}_n(A)$,

$$\omega([a_{ij}])=\lim_{k\to\infty}\left\langle [a_{ij}]\bar{h}^k,\bar{h}^k\right\rangle.$$

定义

$$t_k:\mathbb{C}^n\to H,\qquad e_i\mapsto \sqrt{n}h_i^k,$$

对 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$, 有

$$\left\|t_k\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right\|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\bar{\alpha}_jn\left\langle h_i^k,h_j^k\right\rangle=n\left\langle[\alpha_j\bar{\alpha}_i]\bar{h}^k,\bar{h}^k\right\rangle.$$

令 $k\to\infty$, 由

$$n\omega([\alpha_j\bar{\alpha}_i])=n\left\langle\varphi_n[\alpha_j\bar{\alpha}_i]\bar{e},\bar{e}\right\rangle_{\mathbb{C}^{n^2}}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\bar{\alpha}_j\left\langle e_j,e_i\right\rangle_{\mathbb{C}^n}=\left\|\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right\|^2$$

可知对任意 $\bar{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\lim_{k\to\infty}\|t_k\bar{\alpha}\|=\|\bar{\alpha}\|$. 因此对任意 $\bar{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ 都有

$$\lim_{k\to\infty}\langle(t_k^*t_k-1)\bar{\alpha},\alpha\rangle=0,$$

这即 $\text{WOT–}\lim_{k\to\infty}t_k^*t_k=1$. 注意到这是 $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ 中的极限, 空间是有限维的, 于是对充分大的 k 就有 t_k 是单的. 设其极分解为 $t_k=v_k\,|t_k|$, 由 $|t_k^*|=(t_k^*t_k)^{1/2}\to 1$ 可知 $\|t_k-v_k\|\to 0$.

固定 i,j, 对 $a\in A$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\langle(\varphi(a)-t_k^*at_k)e_j,e_i\rangle=\lim_{k\to\infty}n(\omega(ae_{ij})-\left\langle ah_j^k,h_i^k\right\rangle)=0,$$

其中 e_{ij} 是 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 中只有 (i,j)-元为 1, 其余均为 0 的元素. 于是

$$\lim_{k\to\infty}\|\varphi(a)-t_k^*at_k\|=0\implies\lim_{k\to\infty}\|\varphi(a)-v_k^*av_k\|=0,$$

则 v_k 满足题设条件的后者.

而 $\forall\xi\in H$, 记 p 是到 $\mathbb{C}\xi$ 上的秩 1 投影, 则由

$$\|pv_k\|^2=\|v_kpv_k-\varphi(p)\|\to 0$$

可知对任意 $\bar{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\langle v_k\bar{\alpha},\xi\rangle=\langle pv_k\bar{\alpha},\xi\rangle\to 0$. 这即 $\text{WOT–}\lim_{k\to\infty}v_k=0$. □

下面的引理和命题在 Voiculescu 定理的证明中将要用到.

引理 2.9.4　设 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 是一列满足 $\text{SOT–}\sum_{n\geqslant 1}x_n^2=1$ 的正算子, 则对任意 $z\in\mathcal{B}(H)$, 级数 $\sum_{n\geqslant 1}x_nzx_n$ 在 SOT 意义下收敛.

证明　在 $H^{(\infty)}$ 上定义

$$v:H\to H^{(\infty)},\qquad \xi\mapsto x_1\xi\oplus x_2\xi\oplus\cdots,$$

则 $\|v\xi\|^2=\sum_{n\geqslant 1}\|x_n\xi\|^2=\sum_{n\geqslant 1}\langle x_n^2\xi,\xi\rangle=\|\xi\|^2$. 因此 v 是一个等距. 设 p_n 是到前 n 个分量的投影, $v_n=p_nv$, 则

$$v_n^*(\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n)=\sum_{i=1}^n x_n\xi_n$$

且 $\text{SOT–}\lim_{n\to\infty} p_n = 1$. 取

$$\tau : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H^{(\infty)}), \qquad z \mapsto z \oplus z \oplus \cdots,$$

有

$$\underset{n\to\infty}{\text{SOT–}\lim} v_n^* z v_n = \underset{n\to\infty}{\text{SOT–}\lim} v_n^* p_n \tau(z) p_n v = v^* \tau(z) v,$$

只需注意到 $v_n^* \tau(z) v_n = \sum_{i=1}^n x_n z x_n$ 即可. □

命题 2.9.5 设 A 是可分的 C^* 代数, $F \subset A$ 是一个有限集, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一列正的有限秩算子 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 满足 $\text{SOT–}\sum_{n\geqslant 1} x_n^2 = 1$, 且

$$\forall a \in A \left(a - \sum_{n\geqslant 1} x_n a x_n \in \mathcal{K}(H)\right), \quad \forall a \in F \left(\left\|a - \sum_{n\geqslant 1} x_n a x_n\right\| < \varepsilon\right).$$

证明 取 $L \supset F$ 是一个 A 的可分稠子集, 且 L 是 $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})$-线性的, 记 $L = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$, $F_1 = F$ 且 $\forall n \geqslant 1\,(F_n \subset F_{n+1})$. 取一列收敛到 0 的递减正数列 $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$, 满足 $\|a\| \leqslant 1$, $\|e\| \leqslant 1$, $e \geqslant 0$ 时

$$\|ea - ae\| < \delta_n \implies \left\|e^{1/2} a - a e^{1/2}\right\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

取 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是一列 A 的拟中心逼近单位元, 且 e_n 均有限秩, 适当地选取子序列可以不妨假设

$$\forall a \in F_{n+1} \left(\|e_n a - a e_n\| < \frac{\delta_n}{2}\right).$$

约定 $e_0 = 0$, $\delta_0 = 0$, 则对任意 $a \in F_n$ 有

$$\|(e_n - e_{n-1})a - a(e_n - e_{n-1})\| < \frac{\delta_n}{2} + \frac{\delta_{n-1}}{2} \leqslant \delta_n.$$

令 $f_n = (e_n - e_{n-1})^{1/2}$, 则 $f_n \geqslant 0$ 是有限秩算子, 且满足

$$\forall a \in F_n \left(\|f_n a - a f_n\| < \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

又因为 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是逼近单位元, 故 $\text{SOT–}\sum_{n\geqslant 1} f_n^2 = 1$. 由引理 2.9.4 可知对任意 $a \in A$, 级数 $\text{SOT–}\sum_{n\geqslant 1} f_n a f_n$ 收敛. 另一方面, 若 $a \in L = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$, 则

$$a - \sum_{n\geqslant 1} f_n a f_n = \sum_{n\geqslant 1} (a f_n^2 - f_n a f_n) = \sum_{n\geqslant 1} (a f_n - f_n a) f_n.$$

它在范数意义下收敛, 故 $\forall a \in L$ 都有 $a - \sum_{n\geqslant 1} f_n a f_n \in \mathcal{K}(H)$. 于是算子 $a \mapsto a - \sum_{n\geqslant 1} f_n a f_n$ 是 L 到 $\mathcal{K}(H)$ 的有界线性算子, 将其延拓到 A 即证对任意 $a \in A$, $a - \sum_{n\geqslant 1} f_n a f_n$ 是紧算子. 特别地, 当 $a \in F = F_1$ 时就有

$$\forall n \geqslant 1 \left(\|a f_n - f_n a\| < \frac{\varepsilon}{2^n}\right),$$

这即 $\left\|a - \sum_{n\geqslant 1} f_n a f_n\right\| < \varepsilon$. □

下面给出 Voiculescu 定理, 注意它与 Glimm 引理的异同.

定理 2.9.6 (Voiculescu) 设 $A \subset \mathcal{B}(H)$ 是可分 C^* 代数, $\varphi : A \to \mathcal{B}(K)$ 是完全正映射, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(A \cap \mathcal{K}(H)) = 0$. 则存在一列等距算子 $(v_n)_{n\geqslant 1} : K \to H$ 使得

(1) $\forall n \neq m\,(\operatorname{im} v_n \perp \operatorname{im} v_m)$, 故 $\text{WOT–}\lim_{n\to\infty} v_n = 0$;

(2) $\forall a \in A\, \forall n \geqslant 1\,(\varphi(a) - v_n^* a v_n \in \mathcal{K}(K))$;

(3) $\forall a\in A\,(\lim_{n\to\infty}\|\varphi(a)-v_n^*av_n\|=0)$.

证明 记 $B=C^*(\varphi(A))+\mathcal{K}(K)\subset\mathcal{B}(K)$ 是一个可分的 C^* 代数, 由命题 2.9.5 可知存在一列正的有限秩算子 $(f_n)_{n\geqslant1}$ 使得 $\text{SOT-}\sum_{n\geqslant1}f_n^2=1$, 且

$$\forall b\in B\left(b-\sum_{n\geqslant1}f_nbf_n\in\mathcal{K}(K)\right).$$

取 $e_n=\sum_{i=1}^nf_i^2$, p_n 是到 $\operatorname{im}e_n$ 上的正交投影. 故 $(p_n)_{n\geqslant1}$ 是一列递增的有限秩算子, 且 $\text{SOT-}\lim_{n\to\infty}p_n=1$.

在 A 中取一列自伴子集 $F_n=F_n^*$, 满足 $1\in F_1$, $\forall n\geqslant1\,(F_n\subset F_{n+1})$, 且 $F=\bigcup_{n\geqslant1}F_n$ 在 A 中稠密. 考虑映射

$$A\to\mathcal{B}(p_nK),\qquad a\mapsto p_n\varphi(a)p_n,$$

它是完全正映射, 其核包含 $\mathcal{K}(H)$. 因此存在等距 $u_n:p_nK\to H$ 使得

$$\forall a\in F_n\left(\|p_n\varphi(a)p_n-u_n^*au_n\|<\frac{1}{2^n}\right),$$

且

$$\operatorname{im}u_n\perp\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1}F_n\operatorname{im}u_i\right\},$$

因此对 $a\in F$ 成立 $\sum_{n\geqslant1}\|p_n\varphi(a)p_n-u_n^*au_n\|<\infty$. 因 $1\in F_1$, 故 $n\neq m$ 成立 $\operatorname{im}u_n\perp\operatorname{im}u_m$, 而 $\|u_nf_n\|\leqslant1$. 于是 $v=\text{SOT-}\sum_{n\geqslant1}u_nf_n$ 是 $K\to H$ 的有界线性算子, 且 $\|v\|\leqslant1$. 对任意 $\xi\in K$, 由 $\text{SOT-}\sum_{n\geqslant1}f_n^2=1$ 可知

$$\|v\xi\|^2=\sum_{n\geqslant1}\|u_nf_n\xi\|^2=\sum_{n\geqslant1}\|f_n\xi\|^2=\sum_{n\geqslant1}\langle f_n^2\xi,\xi\rangle=\|\xi\|^2.$$

这即 v 是等距. 记 $v_n=\sum_{i=1}^nu_if_i$, 则由 $\text{SOT-}\lim_{n\to\infty}v_n=v$ 可知 $\text{WOT-}\lim_{n\to\infty}v_n^*=v^*$. 因此

$$\forall a\in\mathcal{B}(H)\big(\lim_{n\to\infty}v_n^*av_n=v^*av\big).$$

固定 p, 取 $a\in F_p$. 若 $p\leqslant i<j$, 由

$$a(\operatorname{im}u_i)\subset(\operatorname{im}u_j)^\perp=\ker u_j^*$$

可知 $u_j^*au_i=0$. 类似地 $p\leqslant j<i$ 时 $u_i^*au_j=0$. 因 $F_p=F_p^*$, 于是

$$\forall a\in F_p\,\forall i,j\geqslant p\,(i\neq j\implies u_j^*au_i=0).$$

因此记 $\rho_p(a)=\sum_{i,j<p,i\neq j}f_ju_j^*au_if_i$, 则 $a\in F_p$ 时

$$\begin{aligned}v^*av&=\text{WOT-}\lim_{n\to\infty}v_n^*av_n\\&=\text{WOT-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^nf_ju_j^*au_jf_j+\sum_{i,j<n,i\neq j}f_ju_j^*au_if_i\\&=\text{WOT-}\sum_{n\geqslant1}f_nu_n^*au_nf_n+\rho_p(a).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\varphi(a)-v^*av&=\varphi(a)-\sum_{n\geqslant1}f_nu_n^*au_nf_n-\rho_p(a)\\&=\varphi(a)-\sum_{n\geqslant1}f_n\varphi(a)f_n+\sum_{n\geqslant1}f_n(p_n\varphi(a)p_n-u_n^*au_n)f_n-\rho_p(a).\end{aligned}$$

其中 $\varphi(a)-\sum_{n\geqslant 1} f_n\varphi(a)f_n \in \mathcal{K}(K)$ 是已知的, 第三项是一列有限秩算子的范数极限, 因此也是紧算子, $\rho_p(a)$ 是有限秩的从而也是紧的. 由此 $\varphi(a)-v^*av\in\mathcal{K}(K)$. 而由 p 的任意性可知 $v: K\to H$ 是等距, 且对任意 $a\in A$ 都成立 $\varphi(a)-v^*av\in\mathcal{K}(K)$.

在

$$\varphi^{(\infty)}: A\to\mathcal{B}(K^{(\infty)}),\qquad a\mapsto\varphi(a)\oplus\varphi(a)\oplus\cdots$$

上考虑相同的命题. 因 $\varphi^{(\infty)}$ 也是完全正的, 且其核包含 $\mathcal{K}(H)$, 类似的讨论可以得到等距 $v: K^{(\infty)}\to H$ 使得

$$\forall a\in A\,(\varphi^{(\infty)}(a)-v^*av\in\mathcal{K}(K)).$$

因此 v 可以作如下的分解: $v=\bigoplus_{n\geqslant 1} v_n$, 其中 $v_n: K\to H$ 是等距, 且 $m\neq n$ 时 $\operatorname{im} v_n\perp\operatorname{im} v_m$. 于是

$$\varphi^{(\infty)}(a\oplus a\oplus\cdots)-v^*(a\oplus a\oplus\cdots)v=\bigoplus_{n\geqslant 1}(\varphi(a)-v_n^*av_n)\in\mathcal{K}(K^{(\infty)}).$$

这即 $\varphi(a)-v_n^*av_n\in\mathcal{K}(K)$ 对任何 $n\geqslant 1$ 成立, 且 $\lim_{n\to\infty}\|\varphi(a)-v_n^*av_n\|=0$. □

推论 2.9.7 设 $A\subset\mathcal{B}(H)$ 是可分的 C^* 代数, $\rho: A\to\mathcal{B}(K)$ 是一个非退化表示, $\rho(A\cap\mathcal{K}(H))=0$. 则 $\mathrm{id}\sim_{au,\mathcal{K}}\mathrm{id}\oplus\rho$.

证明 对 $\rho^{(\infty)}$ 使用 Voiculescu 定理可知存在等距 $v: K^{(\infty)}\to H$ 使得

$$\forall a\in A\,(av-v\rho(a)^{(\infty)}\in\mathcal{K}(K^{(\infty)},H)).$$

设 $K^{(\infty)}=\bigoplus_{n\geqslant 1}K_n$, 其中 $K_n=K$, 再记 $v=\bigoplus_{n\geqslant 1}$, 其中 $v_n=v|_{K_n}$, 再记 $H_n=\operatorname{im} v_n$. 那么

$$\forall n\neq m\,(H_n\perp H_m),\qquad H=(\operatorname{im} v)^\perp\oplus\bigoplus_{n\geqslant 1}H_n.$$

记 $j_n: K\hookrightarrow K_n\subset K^{(\infty)}$ 是典范地嵌入. 令

$$s_n=\sum_{i=1}^{n-1}j_ij_i^*+\text{SOT-}\sum_{i\geqslant n}j_{i+1}j_i^*,$$

则 $s_n\in\mathcal{B}(K^{(\infty)})$. 它是一个等距, 这因考虑它在每一个 K_n 上的作用时, 在 $i<n$ 时就是恒等映射, 而 $i\geqslant n$ 时它等距同构地将 H_n 映到 H_{n+1}.

考虑 vs_nv^*, 它在 $(\operatorname{im} v)^\perp$ 上是零, 在 $\bigoplus_{i=1}^{n-1}H_i$ 上是 id, 而当 $i\geqslant n$ 时将 H_i 映到 H_{i+1}, 因此 $1-vv^*+vs_nv^*: H\to H_n^\perp$ 是一个等距. 令

$$u_n=(1-vv^*-vs_nv^*)\oplus vj_n: H\oplus K\to H,$$

则 u_n 是酉算子.

现在只需证明 $u_n^*au_n-a\oplus\rho(a)$ 是紧算子, 且 $\lim_{n\to\infty}\|u_n^*au_n-a\oplus\rho(a)\|=0$ 即可. 注意到

$$\begin{aligned}au_n-u_n(a\oplus\rho(a))&=a(1-vv^*+vs_nv^*)\oplus avj_n-(1-vv^*+vs_nv^*)a\oplus vj_n\\&=(-(avv^*-v^*va)+(avs_nv^*-vs_nv^*a))\oplus(avj_n-vj_n\rho(a)).\end{aligned}$$

逐项考虑: 因

$$\begin{aligned}avv^*-vv^*a&=(av-v\rho(a)^{(\infty)})v^*+v(\rho(a)^{(\infty)}v^*-v^*a)\\&=(av-v\rho^{(\infty)}(a))v^*+v(v\rho(a^*)^{(\infty)}-a^*v)^*\end{aligned}$$

是紧的; 其次, 由 s_n 的定义容易验证 $\rho(a)^{(\infty)}s_n=s_n\rho^{(\infty)}(a)$. 因此

$$\begin{aligned}avs_nv^*-vs_nv^*a&=(av-v\rho(a)^{(\infty)})s_nv^*+vs_n(\rho(a)^{(\infty)}v^*-v^*a)\\&=(av-v\rho(a)^{(\infty)})s_nv^*+vs_n(v\rho(a^*)^{(\infty)}-a^*v)^*\end{aligned}$$

也是紧的, 因此 $au_n - u_n(a \oplus \rho(a))$ 中第一个直和项是紧的. 而

$$avj_n - vj_n\rho(a) = (av - v\rho(a)^{(\infty)})j_n$$

也是紧的, 于是 $au_n - u_n(a \oplus \rho(a))$ 的第二个直和项也是紧的, 因此它是紧的. 从而左乘 u_n^* 之后仍然是紧的.

再证明收敛性. 由定义 $\text{SOT–}\lim_{n\to\infty} s_n - 1 = 0$, $\text{SOT–}\lim_{n\to\infty} j_n = 0$, $\text{SOT–}\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geqslant n} j_i j_i^* = 0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} \|-(avv^* - v^*va) + (avs_nv^* - vs_nv^*a)\| = 0.$$

再由

$$\left\|av - v\rho(a)^{(\infty)}|_{K_n}\right\| = \left\|(av - v\rho(a)^{(\infty)})j_n\right\| = \|avj_n - vj_n\rho(a)\| \to 0.$$

即证. □

推论 2.9.8　设 $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是商同态, A 是可分 C^* 代数, $\rho_1,\ \rho_2 : A \to \mathcal{B}(H)$ 是表示. 且

$$\ker\rho_1 = \ker\pi\rho_1 = \ker\rho_2 = \ker\pi\rho_2.$$

则 $\rho_1 \sim_{au,\mathcal{K}} \rho_2$.

证明　记 $A_i = \rho_i(A), i = 1, 2$. 则 $A_1,\ A_2$ 都不包含紧算子. 存在唯一的*-同构 $\sigma : A_1 \to A_2$ 使得 $\rho_2 = \sigma\rho_1$, 则

$$\rho_1 = \mathrm{id}\rho_1 \sim_{au,\mathcal{K}} (\mathrm{id} \oplus \sigma)\rho_1 = \rho_1 \oplus \rho_2.$$

类似可证 $\rho_2 \sim_{au,\mathcal{K}} \rho_1 \oplus \rho_2$. □

至此, 可分 C^* 代数的可分表示的近似等价关系可以通过以下命题描述:

定理 2.9.9　设 A 是可分 C^* 代数, $\rho,\ \rho'$ 是 A 的可分表示, 则以下条件等价:

(1)　$\rho \sim_{au,\mathcal{K}} \rho'$;

(2)　$\rho \sim_{au} \rho'$;

(3)　$\rho \sim_{wau} \rho'$;

(4)　对任意 $a \in A$ 成立 $\operatorname{rank}\rho(a) = \operatorname{rank}\rho'(a)$.

证明　(1) ⇒ (2) ⇒ (3) : 显然.

(3) ⇒ (4) : 这因对任意 $k \geqslant 0$,

$$X_k = \{x \in \mathcal{B}(H) : \operatorname{rank} x \leqslant k\}$$

是 WOT–闭的.

(4) ⇒ (1) : 当 $\operatorname{rank}\rho(a) = \operatorname{rank}\rho'(a) = 0$ 时, $\ker\rho = \ker\rho'$. 记 $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是商映射, 则

$$\ker\pi\rho = \rho^{-1}(\mathcal{K}(H)) = \mathbf{clos}\left\{\rho^{-1}(\mathcal{F}(H))\right\} = \mathbf{clos}\left\{\rho'^{-1}(\mathcal{F}(H))\right\} = \rho'^{-1}(\mathcal{K}(H)) = \ker\pi\rho'.$$

令 $B = \rho(A)$, 定义 B 的表示 $\tau(b) = \rho'\rho^{-1}(b)$. 则 (4) 的条件表明 τ 是有限秩的. 记

$$H_0 = \mathrm{im}\,(B \cap \mathcal{K}(H)), \qquad K_0 = \mathrm{im}\,(\rho'(A) \cap \mathcal{K}(H)),$$

再记 $H_1 = H_\rho \ominus H_0, K_1 = H_{\rho'} \ominus K_0$. 记 $\tau_i = \tau|_{K_i}, \mathrm{id}_i = \mathrm{id}|_{H_i}$.

由 $\tau(B\cap\mathcal{K}(H))=\tau(B)\cap\mathcal{K}(H)$ 且保持秩不变, 因此 $\tau_0=\tau|_{B\cap K}$ 与 id_0 酉等价. 由推论 2.9.7 可知

$$\mathrm{id}\sim_{au,\mathcal{K}}\mathrm{id}\oplus\tau_1=\mathrm{id}_0\oplus\mathrm{id}_1\oplus\tau_1\simeq\tau_0\oplus\tau_1\oplus\mathrm{id}_1=\tau\oplus\mathrm{id}_1.$$

由对称性可知 $\tau\sim_{au,\mathcal{K}}\tau\oplus\mathrm{id}_1$, 因此 $\mathrm{id}\sim_{au,\mathcal{K}}\tau$. 这等价于 $\rho\sim_{au,\mathcal{K}}\rho'$. □

以下的推论可以看作是 Weyl–von Neumann–Berg 定理在非交换情形下的推广.

推论 2.9.10 设 $A\subset\mathcal{B}(H)$ 是可分的 C^* 代数, 其任何表示 ρ 与一族不可约表示的直和都相对 $\mathcal{K}$ 近似酉等价.

证明 将表示 ρ 类似推论 2.8.9 做分解 $\rho=\rho_0\oplus\tilde{\rho}$, 记 ρ_0 的像为 K. 再记 $\sigma_0:B:=\rho(A)\to K,\sigma'$ 是到 $K^\perp$ 上的压缩. 则由分解可知 $\tilde{\rho}=\sigma'\rho$. 因此 $\sigma'(B\cap\mathcal{K}(H))=0$. 而 $B\cap\mathcal{K}(H)$ 作为紧算子构成的 C^* 子代数, 其上的恒等表示 id 是若干不可约表示的直和, 因此 σ_0 也是若干不可约表示的直和.

从 GNS 表示的构造可知存在不可约表示的直和 $\sigma:B\to\mathcal{B}(H)$ 使得 $\ker\sigma=\ker\sigma'$, 故 $\tau=\sigma^{(\infty)}$ 的像不含紧算子. 因此

$$\mathrm{id}_B=\sigma_0\oplus\sigma'\sim_{au,\mathcal{K}}\sigma_0\oplus\sigma'\oplus\tau\sim_{au,\mathcal{K}}\sigma_0\oplus\tau.$$

故 $\rho=\mathrm{id}_B\rho\sim_{au,\mathcal{K}}(\sigma_0\oplus\tau)\rho=\rho_0\oplus\tau\rho$ 是不可约表示的直和. □

3 拓扑群与群代数

本章的主线是讨论拓扑群以及它们生成的群代数. 群代数是指局部紧群上的 C^* 代数 (或者更一般地, Banach 代数), 使得代数的表示与群的表示联系起来. 这和离散群的群环是类似的. 群的取子群和商群的操作同样自然地诱导了群 C^* 代数的同态. 本章的主线主要有三:

(1) 拓扑群和群上的分析: 第 1 – 3 节.

- 为了在群上做分析, 我们首先需要对群赋予拓扑. 简单地说, 拓扑群就是一个群上赋予一个使得群运算连续的拓扑. 我们在第 1 节完成对拓扑群的基本刻画, 并介绍如何通过通过取子群和商群的方式构造更多的拓扑群. 群运算的连续性使得拓扑群的许多拓扑性质可以化归到对单位元 1 的邻域基上的讨论, 我们在之后也经常用到这一重要性质.
- 我们主要讨论局部紧群, 这是因为局部紧群 G 上容许一个左不变的正则 Borel 测度 μ_G 存在, 称作左 Haar 测度. 左 Haar 测度的存在使得我们可以在群 G 的函数代数上定义积分, 进而研究 $C_c(G)$ 或 $L^p(G)$ 这样的函数空间. 它的存在唯一性的发现和证明经过了几十年才得以完全解决, 但承认这一事实比起如何证明它在实际操作中要重要得多.
- 对离散群可以构造所谓的群代数 $\mathbb{C}G$, 但对一般的局部紧群 G 来说可以通过 $\mathbb{C}G$ 构造一些 C^* 代数, 这取决于如何对 $\mathbb{C}G$ 做完备化. 基本的例子包括 $L^1(G)$ (但这不是 C^* 代数), $C^*(G)$ 和 $C_r^*(G)$. 对群 C^* 代数的讨论基本上都来源于对核 C^* 单代数的分类 (即 *Elliott* 所做的工作), 进一步的讨论是所谓 C^* 代数的交叉积.

(2) 局部紧群的顺从性: 第 4 – 7 节.

- 之前对离散群讨论过顺从性, 并给出了许多顺从性的判断方式. 这依赖于 $\ell^\infty(G)$ 上的左不变平均. 但对一般的局部紧群来说, $\ell^\infty(G)$, 也即那些有界函数全体上的左不变平均不再能用来刻画顺从性. 为此, 我们需要讨论两种函数空间上的平均: 其一是 $\mathrm{LUC}(G)$, 即左一致连续的函数, 我们将会重新叙述使用 $\mathrm{LUC}(G)$ 上左不变平均刻画的顺从性; 其二是 $L^\infty(G)$, 此时对平均的要求提高了, 需要拓扑左不变性.
- 在局部紧群的语境下, 第 5 节主要使用第 4 节的内容重新讨论顺从群的继承性质: 例如取子群, 商群, 余极限等等. 我们将会证明局部紧群的顺从性同样满足对离散群讨论过的那些继承性质.
- 作为顺从性的重要应用, 第 6 节叙述的定理表明群 G 成为顺从群当且仅当它的群 C^* 代数 $C^*(G)$ 和约化群 C^* 代数 $C_r^*(G)$ 是同构的, 并且它们是核 C^* 代数: 这表明它们与其他 C^* 代数做张量积时的张量积结构也是唯一的.
- 而自由群 $\mathbb{F}_2$ 作为结构最简单的非顺从群, 第 7 节则主要聚焦于 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 与 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 的异同点. 作为例子, $C^*(\mathbb{F}_2)$ 给出了具有以下不平凡条件的实例: 作为一个不可约的 C^* 代数, 它不具有任何的非平凡投影, 同时存在一列分离的有限维表示. 而 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 同样不具有任何的非平凡投影.

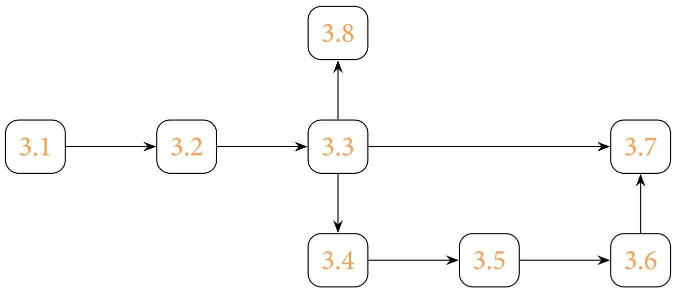
(3) Kazhdan 性质 (T): 第 8 节.

- Kazhdan 性质 (T) 是 Kazhdan 提出用于解决所有半单 Lie 群中的格都是有限生成的这一猜想的

方式, 在之后的发展中逐渐应用于泛函分析和 von Neumann 代数理论中. 对局部紧群来说, 顺从性和性质 (T) 某种程度上是互斥的, 因为同时满足这两个性质的群是紧的.

- 历史上对 Kazhdan 性质 (T) 的定义有多种, 我们在此讨论两种: Kazhdan 的原初定义, 和通过仿射等距作用的不动点性质 (*在一些文献中被称作性质 (FH)*) 的定义. 另有通过其对偶空间上 Fell 拓扑的定义方式, 此处按下不表.
- 从通过仿射等距作用出发我们可以讨论所谓的 a-T-顺从性, 这是一种更弱的类顺从性. 它包含所有的顺从群, 自由群和 Baumslag-Solitar 群.

阅读顺序



3.1 拓扑群

首先回顾一些点集拓扑学的定义.

定义 3.1.1 (拓扑群) 一个**拓扑群** G 意指群 G 上带有拓扑结构, 使得乘法 $m: G \times G \to G$ 和取逆运算 $\mathrm{inv}: G \to G$ 都是连续映射.

于是对拓扑群 G, 乘法连续说明对任意 xy 的开邻域 U, 存在 x 和 y 的开邻域 V 和 W 使得 $VW \subset U$. 而取逆连续则说明对任意 x^{-1} 的开邻域 U, 存在 x 的开邻域 V 使得 $V^{-1} \subset U$.

命题 3.1.2 设 G 是拓扑群, $\mathcal{U}$ 是 1 处的一个开邻域基.

(1) 对任意 $a \in G$, 左乘 $x \mapsto ax$ 和右乘 $x \mapsto xa$ 是 G 到自身的同胚; 取逆 inv 也是 G 到自身的同胚;

(2) $\{xU : x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ 和 $\{Ux : x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ 是 G 的拓扑基.

证明 (1) 是显然的.

(2) 设 W 是 G 中的非空开集, 且 $a \in W$. 映射 $x \mapsto a^{-1}x$ 将 W 映到 $a^{-1}W$, 后者是 1 的邻域. 由于 $\mathcal{U}$ 是 1 处的开邻域基, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $1 \in U \subset a^{-1}W$, 于是 $a \in aU \subset W$. 这说明 W 是若干形如 aU 的开集的并: 这就说明 $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ 是 G 的拓扑基. 对 $\{Ux : x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ 的情形是类似的.

作为推论, 群的拓扑完全由单位元 1 的邻域基反映:

推论 3.1.3 设 G 是拓扑群, $\mathcal{U}$ 是 1 处的开邻域基. 那么

(1) 对任意 $U \in \mathcal{U}$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $V^2 \subset U$;

(2) 对任意 $U \in \mathcal{U}$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $V^{-1} \subset U$;

(3) 对任意 $U \in \mathcal{U}$ 和 $x \in U$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $xV \subset U$;

(4) 对任意 $U \in \mathcal{U}$ 和 $x \in G$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $xVx^{-1} \subset U$.

证明　(1) 是因为乘法是连续的, (2) 是因为取逆是连续的, (3) 使用了 U 是开集. 而 (4) 只需注意到 $x \mapsto ax \mapsto axa^{-1}$ 是 G 上若干同胚的复合, 从而仍是同胚. □

命题 3.1.4　设 G 是拓扑群, 那么

(1)　存在 1 处的开邻域基 $\mathcal{U}$, 使得其中的元素 $U \in \mathcal{U}$ 均满足 $U = U^{-1}$ (此时称 U **对称**);

(2)　对任意 1 的开邻域 U, 存在 1 的邻域 V 使得 $\bar{V} \subset U$;

(3)　若 G 作为拓扑空间是 T_0 的, 则 G 是正规的, 从而 Hausdorff;

(4)　设 U 是 1 的开邻域, $K \subset G$ 是紧子集. 则存在 1 的邻域 V 使得 $xVx^{-1} \subset U$ 对任何 $x \in K$ 成立.

证明　(1) 对任意 1 的开邻域 U, 取 $V = U \cap U^{-1}$ 那么 $V = V^{-1}$. 此时 V 也是 1 的邻域, 且 $V \subset U$.

(2) 设 V 是 1 处满足 $V^2 \subset U$ 的对陈邻域. 若 $x \in \bar{V}$, 那么 $(xV) \cap V \neq \varnothing$, 于是存在 $v_1, v_2 \in V$ 使得 $xv_1 = v_2$, 进而 $x = v_2 v_1 \in VV^{-1} = V^2 \subset U$.

(3) 由 (2) 可知 G 在 1 处满足正规空间的条件, 而命题 3.1.2 说明 G 在每一点处都满足正规空间的条件, 于是 G 作为拓扑空间是正规的, 进而是 Hausdorff 的.

(4) 由 (1) 知 1 处存在对称邻域基 $\mathcal{U}$, 固定 $y \in G$, 断言存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $x \in Vy \implies xVx^{-1} \subset U$.

为此, 设 $V_1 \in \mathcal{U}$ 使得 $V_1^3 \subset U$, $V_2 \in \mathcal{U}$ 使得 $yV_2y^{-1} \subset V_1$. 令 $V = V_1 \cap V_2$, 则对 $x \in Vy$, 有 $xy^{-1} \in V \subset V_1$, $yx^{-1} \in V_1^{-1} = V_1$. 因此

$$xVx^{-1} \subset xV_2x^{-1} = (xy^{-1})yV_2y^{-1}(yx^{-1}) \subset V_1^3 \subset U.$$

于是断言成立.

下面对任意 $y \in K$, 存在 $V_y \in \mathcal{U}$ 使得 $x \in V_y y \implies xV_yx^{-1} \subset U$. 由于 K 是紧的, 存在有限个 $y_1, \ldots, y_n \in K$ 使得 $F \subset \bigcup_{k=1}^n V_{y_k} y_k$, 于是令 $V = \bigcap_{k=1}^n V_{y_k}$, 这是 1 的一个邻域, 并且若 $x \in K$, 则存在某个 $k = 1, \ldots, n$ 使得 $x \in V_{y_k} y_k$, 于是

$$xVx^{-1} \subset xV_{y_k}x^{-1} \subset U,$$

从而命题得证. □

反之, 给定 G 的任意一族包含 1 的子集 $\{H_i\}_{i \in I}$, $1 \in H_i$, 当 I 是滤过偏序集且 $i \leqslant j \implies H_j \subset H_i$, $H_i \lhd G$ 时使得 G 成为拓扑群的拓扑总是存在. 这时定义

$$E \subset G \text{ 是开集} :\iff \forall x \in E \, \exists i \in I \, (xH_i = H_i x \subset E)$$

容易验证这样的定义满足开集公理. 拓扑的分离性公理也借此简化.

引理 3.1.5　设 G 是拓扑群, 对 $x \in G$, 以 $\mathcal{N}(x)$ 记 x 的邻域全体. 则以下条件等价.

(1)　G 是 Hausdorff 的;

(2)　$\{1\}$ 是 G 的闭子集;

(3)　$\bigcap_{\text{开集 } U \in \mathcal{N}(1)} U = \{1\}$.

于是任何 $x \in G$ 都存在由闭邻域构成的邻域基.

证明　对每个 $x \in G$, 由之前的讨论可知 $\mathcal{N}(x) = x\mathcal{N}(1) = x\mathcal{N}(1)^{-1}$, 因此

$$x \in \overline{\{1\}} \iff 1 \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}(x)} V = \bigcup_{U \in \mathcal{N}(1)} xU^{-1} \iff x^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(1)} U^{-1} \iff x \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(1)} U.$$

这即 $\overline{\{1\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(1)} U$. 于是 (2) ⇔ (3) 成立. 且 (1) ⇒ (2) 成立. 只需说明 (2) ⇒ (1) 即可.

定义连续函数 $f: G\times G\to G, (x,y)\mapsto xy^{-1}$, 那么 G 是 Hausdorff 空间当且仅当对角子集 $\Delta_G\subset G\times G$ 是闭的, 而 $\Delta_G=f^{-1}(1)$ 是闭集的原像, 因此是闭的.

群运算的连续性说明任何开邻域 $V\in\mathcal{N}(1)$ 都包含在某个开邻域 $U\in\mathcal{N}(1)$ 中, 满足 $U^{-1}U\subset V$. 而 $g\in\bar{U}$ 蕴含 $Ug\cap U\neq\varnothing$, 于是 $\bar{U}\subset U^{-1}U$, 这就说明任何 $x\in G$ 都有闭邻域构成的邻域基. □

引理 3.1.6 设拓扑群 G 的子群 H 是 1 的邻域, 则 H 既开又闭. 若 G 还是紧的, 则 $(G:H)<+\infty$.

证明 取开集 U 满足 $1\in U\subset H$, 那么 $H=\bigcup_{x\in H}Ux$ 是开集. 取 G/H 在 G 中的一族代表元 α, 陪集分解给出 G 的开覆盖 $G=\coprod_{x\in\alpha}xH$. 于是 $H=G\setminus\coprod_{x\in\alpha,xH\neq H}xH$ 是闭集. 并且当 G 是紧集时 α 是有限集. □

例 3.1.7 我们给出一些基本的拓扑群的例子.

(1) 设 G 是群, 在 G 上赋予离散拓扑, 那么在离散拓扑下 G 是一个拓扑群. 称赋予离散拓扑的群 G 是**离散群**.

(2) 设 G 是群, 在 G 上赋予平凡拓扑, 那么 G 也是一个拓扑群.

(3) 设 G 是无限群, 在 G 上赋予有限补拓扑, 此时 G 不是拓扑群.

(4) $(\mathbb{R},+)$ 在赋予 Euclid 拓扑时是一个局部紧的 Abel 拓扑群.

(5) 设 G 是某个 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ 的子群, 在其上赋予它作为 n^2 维 Euclid 空间的子空间拓扑, 那么 G 是一个拓扑群. 这是因为矩阵的乘积和求逆在每个分量上都是连续的.

例 3.1.8 下面是一些线性群的例子:

(1) 线性群 $\mathrm{U}(n),\mathrm{O}(n,\mathbb{R}),\mathrm{SU}(n),\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 赋予 Euclid 拓扑都是紧的拓扑群. 这是因为映射 $A\mapsto A^{\mathsf{T}}$, $A\mapsto A^{-1}$, $A\mapsto A^*$, $A\mapsto\det A$ 都是连续的. 特别地, $\mathrm{U}(n),\mathrm{O}(n,\mathbb{R}),\mathrm{SU}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 作为 $\mathbb{K}^{n^2}$ 的子集是闭的: 这是因为对酉矩阵 $A=[a_{ij}]$, 由 $A^*A=1$ 可知

$$\sum_{k=1}^n a_{kj}\bar{a}_{kj}=1,\qquad j=1,2,\dots,n,$$

于是 $|a_{ij}|\leqslant 1$ 对任意 $i,j=1,2,\dots,n$ 成立, 这说明 $\mathrm{U}(n)$ 是有界闭集, 进而是紧集. 而 $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}),\mathrm{SU}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 作为 $\mathrm{U}(n)$ 的子空间是闭的.

(2) 线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}),\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n),\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 在局部都是 Euclid 空间, 它们分别可以被嵌入到 $2n^2$(或 n^2), $2n^2-2$(或 n^2-1), $n^2, n^2-1, \frac{1}{2}n(n-1)$ 和 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维实 Euclid 空间中.

下面我们来构造拓扑群的子群和商群.

定义–命题 3.1.9 (拓扑子群) 设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群. 那么在 G 的子空间拓扑下 H 也是一个拓扑群, 称作 G 的**拓扑子群**.

证明 这是因为乘法 $H\times H\to H, (x,y)\mapsto xy$ 和取逆 $\mathrm{inv}|_H: H\to H, x\mapsto x^{-1}$ 是对应运算在 H 上的限制, 因此仍然是连续的.

命题 3.1.10 设 A 和 B 是拓扑群 G 的子集, 那么:

(1) $\bar{A}\bar{B}\subset\overline{AB}$;

(2) $\bar{A}^{-1}=\overline{A^{-1}}$;

(3) 对任意 $x,y\in G$, $x\bar{A}y=\overline{xAy}$.

若 G 还是 T_0 的, 那么

(4) 若对任意 $a\in A, b\in B$ 都有 $ab=ba$, 那么对任意 $a\in\bar{A}, b\in\bar{B}$ 也有 $ab=ba$.

证明　(1) 设 $x \in \bar{A}, y \in \bar{B}$, 并取 1 的开邻域 U, 那么存在 1 的邻域 V 使得 $(xV)(yV) \subset xyU$. 由于 x, y 分别位于 A, B 的闭包中, 于是存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $a \in xV, b \in yV$, 因此 $ab \in (AB) \cap (xyU)$, 从而 $xy \in \overline{AB}$.

(2) 这因 $x \mapsto x^{-1}$ 是同胚.

(3) 这因 $z \mapsto xzy$ 是同胚.

(4) 注意到映射 $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$ 在 $G \times G$ 上连续, 而 G 是 T_0 空间说明 $\{1\}$ 是闭集, 于是

$$H = \left\{(a, b) \in G \times G : aba^{-1}b^{-1} = 1\right\}$$

是闭集. 显然有 $A \times B \subset H$, 于是 $\bar{A} \times \bar{B} \subset H$, 这即 $ab = ba$ 对 $a \in \bar{A}, b \in \bar{B}$ 成立.

命题 3.1.11　设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群, 那么

(1)　若 H 是 G 的子群, 那么 $\bar{H}$ 也是 G 的子群, 若 H 还是正规子群, 那么 $\bar{H}$ 也是正规子群;

(2)　若 G 是 T_0 的, 且 H 是 Abel 群, 那么 $\bar{H}$ 仍是 G 的 Abel 子群;

(3)　$\overline{\{1\}}$ 是 G 中最小的正规闭子群, 且任意 $a \in G$ 的闭包是陪集 $a\overline{\{1\}}$ 或 $\overline{\{1\}}a$;

(4)　H 是开子群当且仅当它的的内部非空. 任意 G 的开子群 H 都是闭的;

(5)　H 是离散的当且仅当它存在孤立点.

证明　(1) 若 H 是 G 的子群, 那么由

$$\bar{H}^2 \subset \overline{H^2} \subset \bar{H}, \qquad \bar{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} \subset \bar{H}$$

可知 $\bar{H}$ 也是 G 的子群. 对正规子群的情况类似.

(2) 这无非是多验证一步交换性, 由命题 3.1.10 (4) 得到.

(3) 由 (2) 可知 $\overline{\{1\}}$ 是 G 的正规闭子群, 它显然是最小的那个. 而左乘 $x \mapsto ax$ 和右乘 $x \mapsto xa$ 都是同胚, 由 $\overline{\{1\}}$ 的正规性即得结论.

(4) 设 H 存在内点 x, 则存在 1 的邻域 U 使得 $xU \subset H$. 对任意 $y \in H$, 由

$$yU = yx^{-1}xU \subset yx^{-1}H = H$$

可知 H 是开的. 若 H 是开的, 那么由定义可知任何 H 中的点都是内点. 此时 H 的补集 $G \setminus H = \bigcup_{x \notin H} xH$ 是若干开集 xH 的并, 从而也是开的, 这说明 H 是闭的.

(5) 设 $x \in H$ 是孤立点, 那么存在 1 的开邻域 U 使得 $(xU) \cap H = \{x\}$, 于是对任意 $y \in H$ 都有

$$(yU) \cap H = (yU) \cap (yx^{-1}H) = yx^{-1}(xU \cap H) = \{y\},$$

于是任何 H 中的点都是孤立点. 反之, 若 H 是离散的, 那么由定义, 它的每一点都是孤立点. □

命题 3.1.12　下面给出 G 中闭子群的几个必要条件. 设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群.

(1)　若存在 1 的邻域 U 使得 $\bar{U} \cap H$ 是闭的, 那么 H 是闭的;

(2)　若 G 是 T_0 的, 那么 G 的任意离散子群都是闭的;

(3)　若 G 是 T_0 的, 且 H 在子空间拓扑下是局部紧的, 那么 H 是闭的.

证明　(1) 设 U 是满足 $\bar{U} \cap H$ 闭的 1 的邻域, 那么存在 V 使得 $V^2 \subset U$. 任取 $x \in \bar{H}$, 再取收敛到 x 的网 $(x_i)_{i \in I}$. 由 $x^{-1} \in \bar{H}$ 可知存在 $y \in Vx^{-1} \cap H$, 于是存在 $i_0 \in I$ 使得 $i \geqslant i_0$ 时 $x_i \in xV$. 此时

$$yx_i \in (Vx^{-1})(xV) = V^2 \subset U,$$

因此 $yx_i \in \bar{U} \cap H$. 因此 $(yx_i)_{i\in I}$ 是收敛到 yx 的网, 再由 $\bar{U} \cap H$ 的闭性可知 $yx \in \bar{U} \cap H$. 因此 $x = y^{-1}yx \in H$, 这就说明了 $\bar{H} \subset H$, 于是 H 是闭的.

(2) 设 U 是满足 $U \cap H = \{1\}$ 的 1 的开邻域, 那么存在 1 的邻域 V 使得 $\bar{V} \subset U$, 因此 $\bar{V} \cap H = \{1\}$. 由于 G 是 Hausdorff 的, 于是 $\{1\} = \bar{V} \cap H$ 是闭集, 由 (1) 可知 H 是闭的.

(3) 设 U 是满足 $\bar{U} \cap H$ 是紧集的 1 的邻域, 那么作为 G 的子集, 由 G 是 Hausdorff 的可知 $\bar{U} \cap H$ 是闭的, 因此由 (1) 可知 H 也是闭的. □

定义–定理 3.1.13 (紧生成) 设 G 是局部紧群, 以下叙述等价:

(1) 存在 1 的开邻域 U 使得 $\bar{U}$ 是紧的, 且 U 生成 G;

(2) 存在开集 $U \subset G$ 使得 $\bar{U}$ 是紧的, 且 U 生成 G;

(3) 存在紧子集 $K \subset G$ 使得 K 生成 G.

其中 G 的子集 A 生成 G 是指 $G = \{1\} \cup \bigcup_{n\geqslant 1}(A \cup A^{-1})^n$. 称满足以上等价条件之一的群 G 是**紧生成**的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的, 只需证明 (3) $\Rightarrow$ (1).

设 $K \subset G$ 是生成 G 的紧子集, 那么 $K \cup \{1\}$ 也是紧的, 因此存在开集 U 包含 $K \cup \{1\}$ 使得 $\bar{U}$ 是紧集, 显然 U 生成 G. 由此, 进一步可得对任意 G 的紧子集 K, 存在包含 K 的既开又闭的紧生成子群 H. □

至此, 对 G 的子群 H, 我们可以定义商群 G/H.

定义–定理 3.1.14 (拓扑商群) 设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群, 以 $\pi : G \to G/H$ 记自然投影. 在 G/H 上如下定义拓扑:

$$\{xH : x \in X\} \text{ 是开集 } :\Longleftrightarrow \pi^{-1}(\{xH : x \in X\}) \text{ 是开集.}$$

并称 G/H 在这一拓扑下构成的拓扑群为 G 对 H 的**商群**.

证明 注意到 G/H 上的拓扑即为 π 的推出, 因此 G/H 的确构成拓扑群. 由拓扑的定义可知任何 G/H 中的开集都形如 $\{uH : u \in U\}$, 其中 U 是 G 中的开群. 对 $aH \in G/H$, $\{uH : u \in U\}$ 给出一个开邻域基. □

命题 3.1.15 设 G 是拓扑群, H 是其子群, $\pi : G \to G/H$ 是自然投影.

(1) π 是开映射;

(2) 若 H 是紧的, 那么 π 是闭映射;

(3) 若 U, V 是 1 的邻域, 满足 $V^{-1}V \subset U$, 那么 $\overline{\pi(V)} \subset \pi(U)$.

证明 (1) 这因对任何 G 中的开集 U, UH 都是 G/H 中的开集, 于是 $\pi(U) = UH$ 也是开集.

(2) 设 $A \subset G$ 是闭子集, 要证 $\pi(A)$ 是闭的, 即证 $(G/H) \setminus \pi(A)$ 是开的. 设 $x \in G$ 满足 $xH \notin \pi(A)$, 也即 $x \notin AH$. 由于 AH 是闭的, 于是存在 x 的邻域 U 使得 $U \cap (AH) = \varnothing$. 显然 $\{uH : u \in U\}$ 是 G/H 中包含 xH 的开集, 且它与 $\pi(A)$ 不交. 因此 $(G/H) \setminus \pi(A)$ 是开集.

(3) 设 $xH \in G/H$ 落在 $\overline{\pi(V)}$ 中, 那么 $\{vxH : v \in V\}$ 是 xH 的邻域, 进而包含 $\pi(V)$ 中的点. 因此存在 v_1, $v_2 \in V$ 使得 $v_1xH = v_2H$, 也即

$$xH = v_1^{-1}v_2H \in \left\{wH : w \in V^{-1}V\right\} \subset \{uH : u \in U\} = \pi(U),$$

得证. □

上述命题 (2) 中对 H 的限制条件是必要的. 一般来说 π 并非闭映射: 例如考虑 $(\mathbb{R},+)$ 及其子群 $(\mathbb{Z},+)$, 那么任何 $x+\mathbb{Z}$ 包含 $x-\lfloor x\rfloor$, 于是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 可以看作 $[0,1)$. 令 $A=\{n+2^{-n}:n\in\mathbb{N}\}$, 那么 A 在 $\mathbb{R}$ 中是闭集, 但

$$\pi(A)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{2^n},\cdot\right\}\subset[0,1)$$

显然在 $[0,1)$ 中不是闭集.

命题 3.1.16 设 G 是拓扑群, H 是其子群. 那么

(1) G/H 离散当且仅当 H 是开的;

(2) 若 H 是闭的, 那么 G/H 是 Hausdorff 的;

(3) 若 G/H 是 T_0 的, 那么 H 是闭的;

(4) 对任意 $a\in G$, 左乘 $xH\mapsto axH$ 是 G/H 上的同胚, 这说明 G/H 是齐性空间;

(5) 若 G 是 (*局部*) 紧的, 则 G/H 是 (*局部*) 紧的.

证明 (1) *必要性*. 若 G/H 是离散的, 那么 $\{H\}$ 是 G/H 中的开集, 从而 $\pi^{-1}(\{H\})=H$ 是 G 中的开集.

充分性. 若 H 是开集, 那么对任意 $a\in G$, aH 是开集. 由于 π 是开映射, $aH\in G/H$ 是 G/H 中的开集.

(2) 若 H 是闭的, 那么 aH 是 G 中的闭集, 因此 $\bigcup_{xH\neq aH}xH$ 是 G 中的开集, 也即 $\{()\,G/H)\setminus aH$ 是 G/H 中的开集. 这就说明 G/H 中的任何单点集 $\{aH\}$ 都是开集, 因此 G/H 是正则空间, 于是 G/H 是 Hausdorff 的.

(3) 设 G/H 是 T_0 的, 那么由命题 3.1.15 (3) 可知 $\{xH:xH\neq H\}$ 是 G/H 中的开集. 因此 $H=G\setminus\bigcup_{xH\neq H}xH$ 是 G 中的闭集.

(4) 由于 $xH\mapsto axH$ 是 G/H 到自身的双射, 只需证明它是开映射即可. 令 $\{uH:u\in U\}$ 是 G/H 中的开集, 那么 U 是 G 的开集, 而 $x\mapsto ax$ 是 G 中的同胚, 于是 aU 是 G 中的开集, 这就说明 $xH\mapsto axH$ 是开映射.

(5) 若 G 是紧的, 那么 G/H 是 G 的连续像, 从而也是紧的. 若 G 是局部紧的, 那么存在 1 的邻域 U 使得 $\bar{U}$ 是紧的, 于是 $\overline{\pi(U)}$ 在 G/H 中是紧的. 由 (4) 可知 G/H 是局部紧的. □

定理 3.1.17 设 G 是拓扑群, H 是其子群.

(1) 若 H 和 G/H 都是紧的, 那么 G 是紧的;

(2) 若 H 和 G/H 都是局部紧的, 那么 G 是局部紧的.

证明 参见 [HeR, **定理** (5.25)]. □

3.2 局部紧群上的 Haar 测度

在谈论群上的测度之前, 我们需要来谈一些历史. 在 19 世纪下半叶到 20 世纪上半叶的一段时间里, 数学家们开始思考是否在所有的拓扑群上都具有一个平移不变的测度. 彼时在一些特殊的群上已经发现了一些不变测度, 例如

- 1897 年 Hurwitz 计算了 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 上的不变测度;
- 1900 年到 1920 年间, Schur 和 Frobenius 在有限群上建立了平均的概念;
- 1925 年, Weyl 计算了诸如 $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ 等紧 Lie 群上的不变测度.

但对于一般拓扑群上的存在性还一筹莫展. 1927 年, Weyl 和 Peter 证明了任何紧 Lie 群上都具有不变测度. 1933 年, Haar 证明了具有第二可数的局部紧群上存在 Haar 测度, 而 Weil 在 1936 年将这一结论推广到任何局部紧群上. 至此, 局部紧群上的左 Haar 测度的存在性算是初具雏形了.

1934 年, von Neumann 证明了紧群上 Haar 测度的存在唯一性, 并证明了第二可数的局部紧群上左 Haar 测度的唯一性. 1941 年, Weil 推广了这一结果, 证明了任意局部紧群上的左 Haar 测度都是唯一的.

以上所有的证明均依赖于选择公理, 1940 年, Cartan 提出了不依赖于选择公理的证明.

我们首先给出 Haar 测度的定义.

定理 3.2.1 (Haar 测度) 设 G 是局部紧群, 则存在非平凡的 Borel 测度 μ_G, 满足

(1) μ_G 是左平移不变的, 即对任何 $g \in G$ 和 Borel 子集 $S \subset G$, 有 $\mu_G(gS) = \mu_G(S)$;

(2) 对任意紧子集 $K \subset G$, $\mu_G(K) < +\infty$;

(3) 外正则性: 对任意 Borel 集 $S \subset G$, $\mu_G(S) = \inf\left\{\mu_G(U) : S \subset U,\ U \text{ 是开集}\right\}$;

(4) 内正则性: 对任意开集 $U \subset G$, $\mu_G(U) = \sup\left\{\mu_G(K) : K \subset U,\ K \text{ 是紧集}\right\}$.

这样的测度在相差一个常数的意义下唯一, 称作是 G 上的**左 Haar 测度**.

一般来说, 上述定理的证明有两条路可走: 其一是先定义外测度, 再使用 Carathéodory 延拓定理将其延拓为测度, 这是测度论的做法. 其二是定义 $C_c(G)$ 上的左不变积分, 这是更加泛函分析的方法, 依赖于 Riesz 表示定理.

在下面的证明中我们总是假设 G 是一个 σ-紧的拓扑群, 也即 (G, μ) 是 σ-有限的测度空间: 这使得我们可以使用 Fubini 定理. 这样假设的合理性来自于, 取 1 的预紧对称开邻域 U, 考虑 $H = \bigcup_{n \geqslant 0} U^n$, 这是一个 σ-紧的开子群. 于是对 G 作陪集分解得到 $G = \coprod_{i \in H} g_i H$, 而 H 是开子群时 G 上的左 Haar 测度在 H 上的限制恰为 H 上的左 Haar 测度, 而对任意 Borel 子集 $B \subset G$,

$$\mu_G(B) := \sum_{i \in I} \mu_H(g_i^{-1}(B \cap g_i H))$$

是 G 上的左 Haar 测度.

定理 3.2.1 的证明 下面给出的证明循 [Gl] 的路径, 我们把完整的证明大体分为 11 步. 其中第 1 步到第 6 步证明了存在性, 第 7 步到第 11 步证明了唯一性.

第 1 步. 在 1 的邻域基上定义 μ_U.

设 $K \subset G$ 是紧子集, V 是 G 中内部非空的子集. 那么 $K = \bigcup_{g \in G} g(\operatorname{Int} V)$. 由 K 的紧性可知它存在有限子覆盖 $\{g_i(\operatorname{Int} V) : i = 1, 2, \ldots, n\}$, 令

$$(K : V) := \min\left\{n \in \mathbb{N} : K = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(\operatorname{Int} V), g_1, \ldots, g_n \in G\right\}.$$

记 $\mathcal{K}$ 是 G 中紧子集全体, $\mathcal{N}(1)$ 是 1 的开邻域系. 由 G 局部紧可知存在内部非空的紧子集 $K_0 \in \mathcal{K}$. 对 $U \in \mathcal{N}(1)$, 定义

$$\mu_U : \mathcal{K} \to \mathbb{R}, \qquad K \mapsto \frac{(K : U)}{(K_0 : U)},$$

由于 $\operatorname{Int} K_0 \neq \varnothing$, 于是 $(K_0 : U) \neq 0$, 这保证了 μ_U 良定义. 由于 $(K : U)$ 总是正整数, 因此 $\mu_U \geqslant 0$. 记 $m = (K : K_0)$, $n = (K_0 : U)$, 再令 $g_1, \ldots, g_m \in G$, $h_1, \ldots, h_n \in G$ 使得

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} g_i(\operatorname{Int} K_0), \qquad K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} h_j U,$$

那么 $K \subset \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{n} g_i h_j U$. 这就说明 $(K:U) \leqslant mn = (K:K_0)(K_0:U)$. 于是

$$0 \leqslant \mu_U(K) \leqslant (K:K_0).$$

第 2 步. 在紧集上定义测度.

设 $X = \prod_{K\in\mathcal{K}}[0,(K:K_0)]$, Tychonoff 定理说明 X 是紧空间. 由第 1 步的讨论可知 $\mu_U(K) \in [0,(K:K_0)]$, 于是可将 $\mu_U(K)$ 视作 X 中的一点. 对 $V \in \mathcal{N}(1)$, 定义

$$C(V) = \mathbf{clos}\left\{\mu_U : U \in \mathcal{N}(1),\ U \subset V\right\},$$

下面证明 $\{C(V) : V \in \mathcal{N}(1)\}$ 具有有限交性质. 令 $V_1,\dots,V_n \in \mathcal{N}(1)$, 那么由 $\mu_{\bigcap_{i=1}^{n} V_i} \in \bigcap_{i=1}^{n} C(V_i)$ 可知 $\bigcap_{i=1}^{n} C(V_i)$ 非空. 而 X 是紧的, 于是 $\bigcap_{V\in\mathcal{N}(1)} C(V)$ 也非空. 取其中的一点 $\mu \in \bigcap_{V\in\mathcal{N}(1)} C(V)$.

令 $K_1,\ K_2 \in \mathcal{K}$, 我们验证 μ 是 $\mathcal{K}$ 上的 Haar 测度.

- 若 $K_1 \subset K_2$, 那么对任意 $U \in \mathcal{N}(1)$ 有 $(K_1:U) \leqslant (K_2:U)$, 这是因为任何 K_2 的陪集覆盖都是 K_1 的陪集覆盖. 因此 $\mu_U(K_1) \leqslant \mu_U(K_2)$. 考虑映射

$$X \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto f(K_2) - f(K_1),$$

  这是连续映射的复合, 从而仍然连续. 它在 $C(V)$ 上非负, 因对任意 $U \in \mathcal{N}(1)$ 都有 $\mu_U(K_2) - \mu_U(K_1) \geqslant 0$. 因此 $\mu(K_2) - \mu(K_1) \geqslant 0$.

- 对任意 $U \in \mathcal{N}(1)$, 因 K_1 的陪集覆盖和 K_2 陪集覆盖的并也是 $K_1 \cup K_2$ 的陪集覆盖, 于是

$$(K_1 \cup K_2 : U) \leqslant (K_1:U) + (K_2:U),$$

  这就说明 $\mu_U(K_1\cup K_2) \leqslant \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. 由此得到 $\mu(K_1\cup K_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2)$ 的方法与前述类似.

- 若 $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \varnothing$, 令 $g_1,\dots,g_n \in G$ 使得 $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n} g_k U$, 其中 $n = (K_1\cup K_2 : U)$. 若 $g_kU \cap (K_1 \cap K_2) \neq \varnothing$, 那么 $g_k \in K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1}$, 矛盾. 因此任何 g_kU 只与 K_1 和 K_2 的其中一个相交. 于是存在正整数 $m \in \mathbb{N}$ 并重新排列 g_k 使得

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} g_i U, \qquad K_2 \subset \bigcup_{j=m+1}^{n} g_j U,$$

  那么 $(K_1:U) + (K_2:U) \leqslant (K_1\cup K_2 : U)$. 这就说明 $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$ 对任何 $U \in \mathcal{N}(1)$ 成立.

- 若 $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, 可以选取不交的非空开集 U_1, U_2 使得 $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$. 那么存在 $V_1,\ V_2 \in \mathcal{N}(1)$ 使得 $K_1V_1 \subset U_1, K_2V_2 \subset U_2$. 令 $V = V_1 \cap V_2$, 由于 U_1 与 U_2 不交, K_1V 与 K_2V 也不交. 于是对任意 $U \in \mathcal{N}(1), U \subset V^{-1}$, 都有 $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \varnothing$. 由前述讨论可知 $\mu_U(K_1\cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. 通过构造映射

$$X \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto f(K_1) + f(K_2) - f(K_1 \cup K_2)$$

  可知它在 $C(V^{-1})$ 上恒为零, 从而得到 $\mu(K_1) + \mu(K_2) - \mu(K_1\cup K_2) = 0$.

第 3 步. 将 μ 扩张到 2^G 上.

对 G 的开子集 U, 定义

$$\mu(U) := \sup\left\{\mu(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\right\}.$$

要说明它是 $\mathcal{K}$ 上 μ 的扩张, 只需要说明当 K 是紧的开子集时 $\mu(K)$ 与第 2 步中的定义相同即可. 首先, 由于 $\mu(K) \in \{\mu(K') : K' \subset K,\ K' \in \mathcal{K}\}$, 于是

$$\mu(K) \leqslant \sup\left\{\mu(K') : K' \subset K,\ K' \in \mathcal{K}\right\}.$$

而第 2 步的讨论说明右侧的集合有上界 $\mu(K)$, 于是 $\sup\{\mu(K') : K' \subset K,\ K' \in \mathcal{K}\} \leqslant \mu(K)$. 由此容易证明 μ 在 G 的全体开集上的扩张仍然满足当 $U_1 \subset U_2$ 时 $\mu(U_1) \leqslant \mu(U_2)$.

对 G 的任意子集 A, 再定义

$$\mu(A) := \inf\left\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ 是开集}\right\},$$

类似于之前的讨论, 这的确是定义在开集全体上 μ 的扩张, 并且容易证明 μ 在 2^G 上的扩张仍然满足当 $A_1 \subset A_2$ 时 $\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2)$.

第 4 步. 证明 μ 是 G 的外测度.

这需要证明 $\mu : 2^G \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是一个有单调性和可列次加性的集函数. 由于 $(\varnothing : U) = 0$ 对任何 $U \in \mathcal{N}(1)$ 都成立, 于是 $\mu(\varnothing) = 0$. 由 μ 的定义和第 2 步, 第 3 步所做的扩张, 要证明非负性只需证明 μ 在 $\mathcal{K}$ 上非负即可. 对任意固定的 $K \in \mathcal{K}$, 注意到映射

$$X \to \mathbb{R}, \qquad K \mapsto f(K)$$

是连续的, 且在每个 μ_U 上非负, 于是在 $C(V)$ 上非负. 因此 μ 也是非负的, 这即 $\mu(K) \geqslant 0$.

要证明可列次加性, 我们首先说明对任何可列个开集 $(U_n)_{n\geqslant 1}$ 满足

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} U_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(U_n).$$

令 $K \subset \bigcup_{n\geqslant 1} U_n$ 是一个紧集, 那么在适当重新排列 $(U_n)_{n\geqslant 1}$ 后存在有限子覆盖 $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$. 可以找到紧子集 $K_j \subset U_j$ 使得 $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$, 那么由第 3 步的讨论,

$$\mu(K) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(K_k) \leqslant \sum_{k=1}^{k} \mu(U_k) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(U_n).$$

因此

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} U_n\right) = \sup\left\{\mu(K) : K \subset \bigcup_{n\geqslant 1} U_n,\ K \in \mathcal{K}\right\} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(U_n).$$

再考虑 G 的任意子集族 $(A_n)_{n\geqslant 1}$, 若 $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) = +\infty$, 那么命题平凡. 因此假设 $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) < +\infty$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取开集 U_n 使得 $A_n \subset U_n$, $\mu(U_n) \leqslant \mu(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. 那么

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} U_n\right) &\leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(U_n) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1} (\mu(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$. 因此 μ 是 G 的外测度.

第 5 步. 说明 Carathéodory 扩张得到的可测集族包含 Borel 集.

由 Borel 集的定义, 这只需证明 G 的开集都是可测集即可. 因此令 $U \subset G$ 是开子集, $A \subset G$. 若 $\mu(A) = +\infty$, 那么 $\mu(A \cap U) + \mu(A \setminus U) \leqslant \mu(A)$ 是显然的. 于是下面假设 $\mu(A) < +\infty$. 令 $\varepsilon > 0$, 取开

集 $V \subset G$ 满足 $A \subset V$ 且 $\mu(V) \leqslant \mu(A)+\varepsilon$. 再令 $K \subset V \cap U$ 是紧子集, 且满足 $\mu(V \cap U)-\varepsilon \leqslant \mu(K)$; 令 $L \subset V \setminus K$, 满足 $\mu(V \setminus K)-\varepsilon \leqslant \mu(L)$. 由于 $K \subset U, V \setminus U \cap V \setminus K$, 于是

$$\mu(V \setminus U)-\varepsilon \leqslant \mu(V \setminus K)-\varepsilon \leqslant \mu(L).$$

由第 2 步的讨论可知

$$\begin{aligned}\mu(A \cap U)+\mu(A \setminus U)-2\varepsilon &\leqslant \mu(V \cap U)+\mu(V \setminus U)-2\varepsilon \leqslant \mu(K)+\mu(L)\\&=\mu(K \cup L) \leqslant \mu((V \cap U) \cup(V \setminus K)) \leqslant \mu(V) \leqslant \mu(A)+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\mu(A \cap U)+\mu(A \setminus U) \leqslant \mu(A)+3\varepsilon.$$

由于 ε 是任取的, 于是 $\mu(A \cap U)+\mu(A \setminus U) \leqslant \mu(A)$, 这就说明 U 是可测集. 因此所有 Borel 集都是可测集.

第 6 步. 证明 μ 是非平凡的左平移不变的正则测度.

这是因为:

- 对任意 $U \in \mathcal{N}(1)$, $\mu_U(K_0)=1$. 而 $X \to \mathbb{R}, f \mapsto f(K_0)$ 在 $C(U)$ 上恒为 1, 于是 $\mu(K_0)=1$, 这就说明 μ 不是零测度.
- 将 μ 视作 X 中的元素, 且 μ 在紧集上取有限值. 那么由 μ 的构造过程可知 μ 是外正则的. 第 3 步在扩张的过程中我们说明它与紧集上的定义相同, 于是 μ 也是内正则的.
- 固定 $g \in G$, 那么 $K \subset \bigcup_{k=1}^n g_k U$ 当且仅当 $gK \subset \bigcup_{k=1}^n g g_k U$. 这说明对任意 $U \in \mathcal{N}(1)$ 有 $(K:U)=(gK:U)$, 于是 $\mu_U(K)=\mu_U(gK)$. 而映射 $X \to \mathbb{R}, f \mapsto f(K)-f(gK)$ 在 $C(U)$ 上恒为零, 于是 $\mu(K)=\mu(gK)$, 这说明 μ 是左平移不变的.

于是 μ 是 G 上的一个左 Haar 测度.

至此, 我们证明了 G 上左 Haar 测度的存在性.

第 7 步. 对任何紧支函数给出一致的充分小开邻域.

设 $f \in C_c(G)$, 对任意 $\varepsilon>0$, 断言存在 $U \in \mathcal{N}(1)$ 使得 $y \in xU$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 为此, 令 $K=\operatorname{supp} f \in \mathcal{K}$, 对任意 $x \in K$, 由 f 的连续性可以取到 $U_x \in \mathcal{N}(1)$ 使得当 $y \in xU_x$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 取开邻域 $V_x \in \mathcal{N}(1)$ 使得 $V_x V_x \subset U_x$. 其中 U_x 是满足条件的邻域. 由 K 的紧性可知存在有限开覆盖 $K \subset \bigcup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. 令 $V=\bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$, 再令 $U=V \cap V^{-1}$, 那么 U 是一个 1 的开邻域.

令 $y \in xU$, 当 $x, y \notin K$ 时 $|f(x)-f(y)|=0$. 因此不妨假设 $x \in K$ 与 $y \in K$ 二者成立其一. 若 $x \in K$, 那么存在 $k \in\{1,2, \ldots, n\}$ 使得 $x \in x_k V_{x_k}$. 由于 $V \cap V_{x_k}$, 于是 $y \in xV \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k}$. 因此

$$|f(x)-f(y)| \leqslant|f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)|<2\varepsilon.$$

再设 $y \in K$, 那么存在 $u \in U$ 使得 $y=xu$. 而 $U=V \cap V^{-1}$, 于是 $u^{-1} \in U$, 进而 $x=yu^{-1} \in yU$. 因此 $y \in K, x \in yU$. 类似于 $x \in K$ 的讨论可得结论成立 (这只需交换 x 与 y 的位置).

第 8 步. 对 $f \in L^1(G)$ 证明 $\int_G f(xg) \,\mathrm{d}\mu(g)=\int_G f(g) \,\mathrm{d}\mu(g)$.

设 A 是可测集, 令 $f=1_A$, 那么

$$\begin{aligned}\int_G f(xg) \,\mathrm{d}\mu(g)&=\int_G 1_A(xg) \,\mathrm{d}\mu(g)=\int_G 1_{x^{-1}A}(g) \,\mathrm{d}\mu(g)\\&=\mu(x^{-1}(A))=\mu(A)=\int_G 1_A(g) \,\mathrm{d}\mu(g)=\int_G f(g) \,\mathrm{d}\mu(g).\end{aligned}$$

由积分的线性可知这对任何简单函数 f 成立. 而 $L^1(G)$ 中的元素可以被简单函数单调递增地一致逼近, 于是对 $f \in L^1(G)$ 也成立.

第 9 步. 说明非负的非零函数 $f \in C_c(G)$ 的积分 $\int_G f\,\mathrm{d}\mu > 0$.

令 $f \in C_c(G)$ 非零, 令 $U = f^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$, 这是开集的原像, 从而也是开集. 它非空, 因 $f \neq 0$. 由于 μ 非零, 于是存在紧集 $K \in \mathcal{K}$ 使得 $\mu(K) > 0$. 由 K 的紧性可知存在有限个 $g_1, \dots, g_n$ 使得 $K \subset \bigcup_{k=1}^n g_k U$, 于是

$$0 < \mu(K) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(g_k) U = n\mu(U).$$

这说明 $\mu(U) > 0$. 因此存在 $a > 0$ 使得 $V = f^{-1}[a, +\infty)$ 满足 $\mu(V) > 0$. 因此

$$\int_G f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_V f\,\mathrm{d}\mu \geqslant a\mu(V) > 0.$$

第 10 步. 对左 Haar 测度 μ, ν 定义比例函数 h.

下面设 μ, ν 是两个 G 上的左 Haar 测度. 令 $g \in C_c(G)$ 是非零的非负紧支函数, $f \in C_c(G)$ 是任意的紧支函数. 定义

$$h(x, y) := \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)\,\mathrm{d}\nu(t)},$$

那么第 9 步的讨论保证了分母不为零, 因此 h 在 $G \times G$ 上良定义. 且由 f, g 都具有紧支集可知 h 具有紧支集. 由于 f, g 均连续, 因此只要 $I(x) := \int_G g(tx)\,\mathrm{d}\nu(x)$ 连续, 那么 h 就也连续.

令 $K = \operatorname{supp} g$, 令 $x_0 \in G, U \in \mathcal{N}(x_0)$ 满足 $\mathbf{clos}(U) \in \mathcal{K}$(由于 G 局部紧, 这样的 U 可以取到). 由 Tychonoff 定理可知 $K \times \mathbf{clos}(U)^{-1}$ 也是紧的, 因此 $K\mathbf{clos}(U)^{-1}$ 作为 $K \times \mathbf{clos}(U)^{-1}$ 的连续像也是紧的. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使得 $\delta\nu(K\mathbf{clos}(U)^{-1}) < \varepsilon$. 第 7 步的讨论保证了存在开邻域 $V \in \mathcal{N}(1)$ 使得当 $y \in xV$ 时 $|g(x) - g(y)| < \delta$.

因此当 $x \in U \cap x_0 V$ 时, $tx \in tx_0 V$, 此时

$$|I(x) - I(x_0)| \leqslant \int_G |g(tx) - g(tx_0)|\,\mathrm{d}\nu(t) \leqslant \delta\nu(K\mathbf{clos}(U)^{-1}) < \varepsilon,$$

这因 $K\mathbf{clos}(U)^{-1}$ 以外被积函数为零. 因此注意到 $U \cap x_0 V$ 是 x_0 的邻域后可知 I 是连续函数, 进而 h 也是连续函数. 它又具有紧支集, 因此 $h \in C_c(G \times G)$.

第 11 步. 说明 μ 与 ν 相差一个常数.

因 $h \in C_c(G \times G)$, 可以应用 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\int_G\int_G h(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G\int_G h(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_G\int_G h(y^{-1}x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_G\int_G h(y^{-1}x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G\int_G h(y^{-1},xy)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

由第 8 步的讨论可知

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G f(x)\frac{\int_G g(yx)\,\mathrm{d}\nu(y)}{\int_G g(tx)\,\mathrm{d}\nu(t)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G\int_G \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)\,\mathrm{d}\nu(t)}\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\nu(x)\\ &= \int_G\int_G h(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G\int_G h(y^{-1},xy)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G\int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})\,\mathrm{d}\nu(t)}\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \left(\int_G g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\left(\int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})\,\mathrm{d}\nu(t)}\,\mathrm{d}\nu(y)\right).\end{aligned}$$

这说明 $\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) / \int_G g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = c$ 是一个与 μ 无关的常数. 因此

$$\frac{\int_G f\,\mathrm{d}\mu}{\int_G g\,\mathrm{d}\mu} = c = \frac{\int_G f\,\mathrm{d}\nu}{\int_G g\,\mathrm{d}\nu}.$$

于是令 $a = \int_G g\,\mathrm{d}\nu / \int_G g\,\mathrm{d}\mu > 0$ 后
$$\int_G f\,\mathrm{d}\nu = a\int_G f\,\mathrm{d}\mu.$$
由于对任意 $f \in C_c(G)$ 上式成立, 令 $\varphi(f) = \int_G f\,\mathrm{d}\mu, \psi(f) = \int_G f\,\mathrm{d}\mu'$, 其中 $\mu' = a^{-1}\nu$, 那么 φ 与 ψ 都是 $C_c(G)$ 上的正泛函. 且
$$\varphi(f) = \int_G f\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{a}\int_G\int_G f\,\mathrm{d}\nu = \int_G f\,\mathrm{d}\mu' = \psi(f).$$
由 Riesz 表示定理可知 $\mu = \mu'$, 这即 $\nu = a\mu$.

至此, 我们证明了 G 上左 Haar 测度的唯一性. □

引理 3.2.2　设 μ_G 是 G 上的左 Haar 测度, 则对任意非空开集 $U \subset G, \mu_G(U) > 0$.

证明　否则存在非空开集 U 使得 $\mu_G(U) = 0$. 因此对任意 $g \in G$ 由左平移不变性可知 $\mu_G(gU) = 0$. 于是对任意紧集 $K \subset G$, 存在 $g_1, \dots, g_n \in G$ 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^n g_iU$, 于是 $\mu_G(K) = 0$. 由于 μ_G 是正则测度, 于是 $\mu_G = 0$. □

对局部紧空间 X 上的正则 Borel 测度 μ, 其**支撑**定义为最小的满足 $\mu(X \setminus F) = 0$ 的闭集 $F \subset X$. 于是上述引理表明了 $\operatorname{supp}\mu_G = G$.

命题 3.2.3　G 是紧群当且仅当 $\mu_G(G) < +\infty$.

证明　*必要性*. 由 Haar 测度的定义显然.

充分性. 用反证法. 若 G 不是紧的, 取 1 的预紧开邻域 U 使得对任意 $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^n x_kU$. 再令 V 是 1 的对称的开邻域, 使得 $V^2 \subset U$. 那么 $x_1V,\ x_2V, \dots$ 是两两不交的. 因此
$$\mu_G(G) \geqslant \sum_{k=1}^n \mu_G(x_kV) = n\mu_G(V)$$
对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 而 V 是非空开集, 于是 $\mu_G(V) > 0$, 从而 $\mu_G(G) = +\infty$, 矛盾. □

在定义中我们有左平移不变性和正则性, 那么何时 μ_G 也是右平移不变的? 对固定的 $g \in G$, 考虑 G 上的 Borel 测度 $\mu_G^g(B) := \mu_G(Bg)$, 其中 $B \in \mathfrak{B}(G)$. 容易证明 μ_G^g 仍是左正则不变的, 于是定理 **??** 说明存在 $\Delta_G(g) \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得 $\mu_G^g = \Delta_G(g)\mu_G$. 这确定了一个函数 $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$.

定义 3.2.4 (模函数, 单模)　上述讨论中确定的函数
$$\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}, \qquad g \mapsto \frac{\mu_G^g}{\mu_G}$$
称作 G 的**模函数**. 若 $\Delta_G = 1$, 则称 G 是**单模**的.

于是由定义可知单模群就是那些左平移不变性与右平移不变性等价的群, 在这类群上左 Haar 测度和右 Haar 测度没有区别, 于是将单模群上的 μ_G 称作 Haar 测度. Δ_G 与 μ 的选取无关, 这来源于 Haar 测度的存在唯一性.

命题 3.2.5　设 G 是局部紧群, Δ_G 是其模函数, μ 是 G 的左 Haar 测度. 则

(1)　Δ_G 是连续函数;

(2)　$\mathrm{d}\mu(x^{-1}) = \Delta_G(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x)$.

证明　(1) 由 μ_G 的外正则性, 给定 $\varepsilon > 0$ 和内部非空的紧集 A, 存在开集 $U \supset A$ 使得 $\mu(A) < \mu(U) < (1+\varepsilon)\mu(A)$. 由于 A 是紧的, 存在 1 的邻域 V 使得 $AV \subset U$. 对 $g \in V$,
$$\Delta_G(g) = \frac{\mu(Ag)}{\mu(A)} \leqslant \frac{\mu(U)}{\mu(A)} < 1 + \varepsilon.$$

另一方面, 对 $h \in V^{-1}$, 由 $Ah^{-1} \subset U$ 可知 $A \subset Uh$, 因此

$$\Delta_G(h) = \frac{\mu(Uh)}{\mu(U)} \geqslant \frac{\mu(A)}{\mu(U)} \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon.$$

因此对 $g \in W := V \cap V^{-1}$, 有 $1-\varepsilon < \Delta(g) < 1+\varepsilon$. 而 W 是 1 的邻域, 于是 Δ_G 在 1 处连续, 进而由可乘性可知 Δ_G 在 G 上连续.

(2) 由于 $f \mapsto \int_G f(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x)$ 定义了 $C_c(G)$ 上的一个右平移不变的 Haar 测度 (紧支集函数的积分可以恢复出测度, 这是 *Riesz* 表示定理保证的), 于是

$$C_c(G) \to \mathbb{C}, \qquad f \mapsto \int_G \Delta_G(x^{-1})f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

也定义了一个右平移不变的 Haar 测度. 于是存在 $c > 0$ 使得对任意 $f \in C_c(G)$ 成立

$$\int_G f(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x) = c\int_g \Delta_G(x^{-1})f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

将 $f(x)$ 替换为 $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$ 后可知

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = c\int_G \Delta_G(x^{-1})f(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x),$$

而 $\int_G \Delta_G(x^{-1})f(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x) = c\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = c\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, 于是 $c^2 = 1$, 这就说明 $c = 1$. 从而 $\mathrm{d}\mu(x^{-1}) = \Delta_G(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x)$. $\square$

例 3.2.6 下面是一些单模群的例子.

(1) 有限群都是单模的. 这是因为有限群 G 上存在显然的 Haar 测度 $\mathrm{d}\mu_G = 1/|G|$.

(2) 紧群都是单模的. 这是因为模函数是群 G 到 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ 的连续群同态, 而 $\Delta_G(G) \subset \mathbb{R}_{>0}$ 是一个紧子集. 若 $\Delta_G \neq 1$, 那么存在 $t \in G$ 使得 $\Delta_G(t) > 1$, 进而 $\Delta_G(t^n) \to \infty$. 这与 $\Delta_G(G)$ 有界矛盾.

(3) 考虑 Abel 群 $G = \mathbb{R}^n$, $\mu_G = m|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}$, 那么 G 是单模的. 实际上任何 Abel 群都是单模的, 因为 Abel 群上无需区分左右平移.

(4) 设 $G = \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\mu_G(X) = |\det X|^{-n}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathrm{d}x_{ij}$, 则 G 是单模的.

(5) 设

$$G = \left\{\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

是 **Heisenburg 群**, $\mathrm{d}\mu_G = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 则 G 是单模的.

(6) 考虑仿射变换全体

$$G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}\right\},$$

其左 Haar 测度 $\mathrm{d}\mu_G := |a|^{-2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$, 那么 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ 不是单模的, 它的模函数 $\Delta_G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ & 1 \end{bmatrix}\right) = |a|^{-1}$.

3.3 群 C^* 代数的一般理论

对离散群 G, 直接考虑 $\mathbb{C}$-模

$$\mathbb{C}G := \left\{f : G \to \mathbb{C} : \operatorname{supp} f \text{ 有限}\right\},$$

并赋予 $\mathbb{C}G$ 上如下的代数结构: 对任意 $\sum_{g\in G} a_g\delta_g$ 和 $\sum_{g\in G} b_g\delta_g \in \mathbb{C}G$, 定义卷积

$$\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) * \left(\sum_{h\in G} b_h\delta_h\right) := \sum_{g,h\in G} a_g b_h \delta_{gh} = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right)\delta_g,$$

和对合

$$\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) := \sum_{g\in G} \bar{a}_g \delta_{g^{-1}},$$

则 $(\mathbb{C}G, *, {}^*)$ 是一个*–代数, 且单位元为 δ_1, 这里 $1\in G$ 是 G 的单位元.

若 G 是局部紧群, 由 **??** 节的讨论可知存在左 Haar 测度 μ, 令

$$L^1(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} : \int_G |f(t)| \,\mathrm{d}\mu(t) < +\infty \right\}, \qquad \|f\|_1 := \int_G |f(t)| \,\mathrm{d}\mu(t),$$

并赋予如下的代数结构: 对任意 $f, g\in L^1(G)$, 定义卷积和对合

$$(f*g)(t) := \int_G f(s) g(s^{-1}t)\,\mathrm{d}\mu(s), \qquad f^*(t) := \Delta(t)^{-1}\overline{f(t^{-1})},$$

那么由 Fubini 定理可知 $f*g$ 几乎处处有定义, 容易验证

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \qquad \|f^*\|_1 = \|f\|_1.$$

于是 $(L^1(G), \|\cdot\|_1, *, {}^*)$ 是一个 Banach *–代数.

注意到 $L^1(G)$ 是单位的当且仅当 G 是离散的, 此时也将其写作 $\ell^1(G)$, 而单位元处的特征函数 δ_1 即为 $\ell^1(G)$ 的单位元. 此时群代数 $\mathbb{C}G$ 是 $\ell^1(G)$ 的一个稠密子集, 因此往往只需处理 $\mathbb{C}G$ 即可. 当 G 不是离散群时, $L^1(G)$ 上可以取到一个模 1 的逼近单位元, 只需取单位元 1 的一个开邻域 U 和正函数 f_U 满足 $\operatorname{supp} f = U$, $f_U^* = f_U$, $\|f_U\|_1 = 1$, 将 U 在包含关系下构成的网记作 $\mathcal{U}$, $\{f_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 就是一个模 1 的逼近单位元.

左 Haar 测度的存在性使得我们可以直接定义 $L^p(G)$, $1\leqslant p\leqslant +\infty$. 今后在不致混淆时也直接将 Haar 测度 $\mathrm{d}\mu(t)$ 写作 $\mathrm{d}t$. 在

$$L^p(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} : \int_G |f(t)|^p \,\mathrm{d}t < +\infty \right\}, \qquad \|f\|_p := \left(\int_G |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

上赋予逐点的乘法得到一个 Banach 空间. (*一般来说 $L^p(G)$ 不构成 Banach 代数*)

考虑 G 上的一个酉表示 ρ, 即一个从 G 到 $\mathcal{U}(H)$ 的 SOT–连续群同构, 即对任何 $x\in H$ 都有 $g\mapsto \rho(g)x$ 连续.

命题 3.3.1 G 的酉表示全体与 $L^1(G)$ 的非退化 *–表示全体之间存在一一对应.

证明 设 $\pi : G\to \mathcal{U}(H)$ 是一个酉表示, 定义

$$\tilde{\pi}(f) := \int_G f(t)\pi(t)\,\mathrm{d}t,$$

(*这是一个算子值积分, 这实际上是对 $\xi,\eta\in H$ 定义 $\langle\tilde{\pi}(f)\xi,\eta\rangle = \int_G f(t)\langle\pi(t)\xi,\eta\rangle\,\mathrm{d}t$.*) 那么 $\|\tilde{\pi}(f)\| \leqslant \|f\|_1$, 且 $\tilde{\pi}(f*g) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)$, $\tilde{\pi}(f^*) = \tilde{\pi}(f)^*$. 因此 $\tilde{\pi}$ 是 $L^1(G)$ 的 *–表示. 它非退化是因为对任意 $x\in H$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开邻域 $U_\varepsilon \in \mathcal{N}(1)$ 使得

$$\forall g\in U_\varepsilon\ (\|\pi_g(x) - x\| < \varepsilon).$$

令 $f\in L^1(G)$, $\operatorname{supp} f\subset U_\varepsilon$, 满足 $f\geqslant 0$ 且 $\|f\|_1 = 1$, 则 $\|\tilde{\pi}(f)x - x\| < \varepsilon$. 这就说明 $\tilde{\pi}$ 是非退化的.

反之, 设 $\tilde{\pi}: L^1(G) \to \mathcal{B}(H)$ 是非退化的*–表示, 由于它是从 Banach *–代数到 C^* 代数的 *–同态, 它一定是压缩的. 选取 $L^1(G)$ 中的近似单位 $(f_i)_{i\in I}$, 那么 $\text{sot–}\lim_{i\in I}\tilde{\pi}(f_i) = \mathrm{id}_H$. 定义

$$\pi : G \to \mathcal{U}(H), \qquad s \mapsto \pi(s) : [\tilde{\pi}(g)x \mapsto \tilde{\pi}(g_s)x],$$

其中 $g_s(t) = g(s^{-1}t)$. 那么 $\pi(s) = \text{sot–}\lim_{i\in I}\tilde{\pi}((f_i)_s)$. 直接计算可知 $\pi(s)^* = \pi(s^{-1}) = \pi(s)^{-1}$, 于是 π 是酉表示. 它是 sot 连续的容易验证. □

从表示论的 Schur 引理可知 $\rho : G \to \mathcal{U}(H)$ 不可约当且仅当 $\rho(G)' = \mathbb{C}\mathrm{id}_H$, 作为推论, 交换群的不可约表示都是 1 维表示, 于是交换群的不可约表示均为形如 $\rho : G \to \mathbb{S}^1$ 的同态, 因 $\dim\rho = 1$, 因此这就是 G 所有不可约表示的的特征, 今后用 χ 表示.

定义 3.3.2 (局部紧群的对偶) 设 G 是局部紧群, 定义其**对偶**为

$$\widehat{G} := \big\{\sigma : G \to \mathcal{U}(H) : \sigma\text{ 是不可约酉表示}\big\} / \sim_u,$$

其中 $\sim_u$ 是表示的酉等价关系. $\widehat{G}$ 未必仍是一个群. 若 G 还是 Abel 群, 此时

$$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{S}^1),$$

它在逐点乘法下构成一个群, 称作是 G 的 **Pontryagin 对偶**.

例 3.3.3 对局部紧 Abel 群 G, $\widehat{G}$ 上的拓扑是比较容易确定的. $\chi_i \to \chi$ 当且仅当 χ_i 在 G 上内闭一致收敛到 χ. 本例给出一些局部紧 Abel 群及其对偶的例子:

(1) 对 $(\mathbb{Z}, +)$, 它有特征 $\tau_\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$, $n \mapsto \xi^n$, 其中 $\xi \in \mathbb{T}$. 此时 $\tau : \xi \mapsto \tau_\xi$ 给出一个同胚和群同构. 因此 $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$.

类似地, 对 $(\mathbb{Z}^n, +)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{T}^n$, 相应的特征由

$$\tau_\xi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{S}^1, \qquad k \mapsto \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}$$

给出. 因此 $\widehat{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{T}^n$. 实际上, $(G_1 \times \cdots \times G_n)^\wedge \cong \widehat{G}_1 \times \cdots \times \widehat{G}_n$.

(2) 对 $(\mathbb{R}, +)$, $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ 有特征 $\tau_x : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. $y \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}$, 其中 $x \in \mathbb{R}$. 此时 $x \mapsto \tau_x$ 给出一个同胚和群同构.

定理 3.3.4 设 G 是局部紧 Abel 群, 记 $\mathfrak{M}$ 是 $L^1(G)$ 的极大理想空间, 则 $\mathfrak{M} \cong \widehat{G}$.

证明 对 $\chi \in \widehat{G}$, 定义

$$\tilde{\chi}(f) = \int_G f(s)\overline{\chi(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad f \in L^1(G),$$

则 $\tilde{\chi}$ 可以看作是 $L^1(G)$ 上的线性泛函. 它是可乘的, 这因

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(f * g) &= \int_G f * g(s)\overline{\chi(s)}\,\mathrm{d}s = \int_G\int_G f(t)g(st^{-1})\,\mathrm{d}t\overline{\chi(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_G f(t)\overline{\chi(t)}\,\mathrm{d}t\int_G g(st^{-1})\chi(st^{-1})\,\mathrm{d}(st^{-1}) = \tilde{\chi}(f)\tilde{\chi}(g).\end{aligned}$$

这即 $\tilde{x} \in \mathfrak{M}$. □

由此, 当 G 是局部紧 Abel 群时, 可以在 $L^1(G)$ 上建立 Fourier 变换理论.

定义 3.3.5 ($L^1(G)$ 上的 Fourier 变换) 设 G 是局部紧 Abel 群, 对 $f \in L^1(G)$, 称

$$\hat{f}(\chi) := \tilde{\chi}(f) = \int_G f(s)\overline{\chi(s)}\,\mathrm{d}s$$

是 f 的 **Fourier 变换**. 由 $\tilde{\chi}$ 的定义可知 $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, 此时 $\wedge : L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ 给出一个群同态.

设 ν 是 $\widehat{G}$ 上的 Haar 测度, 在 $L^2(G)$ 与 $L^2(\widehat{G})$ 上:

(1)　Fourier 变换可以延拓为 $L^2(G)$ 到 $L^2(\widehat{G})$ 上的一个酉算子, 这因 $L^1(G)\cap L^2(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密. 特别地, 对 $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$, 有 $\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2$. (这被称作 **Plancherel 定理**)

(2)　若 G 是离散群, 则 $\widehat{G}$ 是紧群. 特别地, 若 G 可数, 即 $G=\{g_n\}_{n\geqslant 1}$, 定义

$$\tilde{g}_n(\xi)=\xi(g_n)=\langle g_n,\xi\rangle\,,$$

则 $\{\tilde{g}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $L^2(\widehat{G})$ 的一个完全正交基.

考虑几个特殊的群, 当 $G=\mathbb{Z}$, $\widehat{G}=\mathbb{T}$ 时, $\tilde{n}(z)=z^n$. 此时 $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 就给出了 $L^2(\mathbb{T},\,\mathrm{d}\theta/2\pi)$ 的一个规范正交基. 类似地, $G=\mathbb{Z}^n$, $\widehat{G}=\mathbb{T}^n$ 时, $\tilde{k}(z_1,\dots,z_n)=z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$. 此时 $\left\{z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}:k_i\in\mathbb{Z}\right\}$ 给出了 $L^2(\mathbb{T}^n,\,\mathrm{d}\theta/2\pi\times\cdots\times\,\mathrm{d}\theta/2\pi)$ 的一个规范正交基.

下面取 $G=\mathbb{R}$, 则 $\widehat{G}=\mathbb{R}$. 问题转化为我们熟悉的 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换理论. 在 $L^1(\mathbb{R})$ 上取正则化的 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}m(t)=\,\mathrm{d}t/\sqrt{2\pi}$, 对 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 其 **Fourier 变换**

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}m(t),\qquad x\in\mathbb{R}$$

可以写成熟悉的积分形式. 则 $\hat{f}\in C_0(\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_1$. 当 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ 时, 卷积

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}m(t)$$

如此定义, 则 $f*g\in L^1(\mathbb{R})$. 由 Fubini 定理可知 $\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$.

下面总是假设 G 是局部紧 Abel 群, 我们希望找到正算子对应到函数一侧的性质.

定义 3.3.6 (正定函数)　设 G 是一个群, $\varphi:G\to\mathbb{C}$ 是一个函数, 若对任意有限个 $t_1,\dots,t_n\in G$, 和有限个复数 $z_1,\dots,z_n$, 都有

$$\sum_{i,j}\varphi(t_i^{-1}t_j)\bar{z}_iz_j\geqslant 0,$$

则称 φ 是 G 上的**正定函数**.

命题 3.3.7　对群 G 上的正定函数 φ, 有

(1)　$\varphi(1)\geqslant 0$, 且 $\overline{\varphi(g)}=\varphi(g^{-1})$;

(2)　对任意 $g\in G$, $|\varphi(g)|\leqslant\varphi(1)$.

证明　(1) 取 $g_1=1$, $z_1=1$ 可知 $f(1)\geqslant 0$. 再取 $g_2=g$, 取 $z_1=(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $z_2=(1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$ 代入取虚部得

$$\operatorname{Im}\left(-\mathrm{i}f(g)+\mathrm{i}f(g^{-1})\right)=0,$$

这即 $\operatorname{Re}f(g)=\operatorname{Re}f(g^{-1})$; 再取 $z_1=z_2=1$, 代入取虚部得

$$\operatorname{Im}\left(f(g)+f(g^{-1})\right)=0,$$

这即 $\operatorname{Im}f(g)=-\operatorname{Im}f(g^{-1})$. 于是 $f(g^{-1})=\overline{f(g)}$.

(2) 令 $g_1=1,\ g_2=g$, 由 f 正定可知矩阵

$$\begin{bmatrix} f(1) & f(g)\\ f(g^{-1}) & f(1)\end{bmatrix}$$

半正定, 从而 $|f(x)|^2\leqslant f(1)^2$, 也即 $|f(x)|\leqslant f(1)$. □

定理 3.3.8 (Bochner)　设 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是函数, 则:

(1) φ 是正定函数当且仅当在 Hilbert 空间 H 上存在单参数酉算子群 $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $x \in H$ 使得 $\varphi(t) = \langle U_t x, x\rangle$;

(2) 正定函数 φ 是连续的当且仅当 φ 在 $t = 0$ 处连续, 且存在有界递增右连续函数 g 使得

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}g(s),$$

即 φ 是 Lebesgue–Stieltjes 测度 $\mathrm{d}g(s)$ 的 Fourier 变换.

证明 (1) *充分性*. 若 $\varphi(t) = \langle U_t x, x\rangle$, 则对任何有限个实数 $\{t_1, \ldots, t_n\}$ 和复数 $\{z_1, \ldots, z_n\}$, 由

$$\sum_{i,j} \varphi(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j = \sum_{i,j} \left\langle U_{t_i - t_j} x, x\right\rangle z_i \bar{z}_j = \sum_{i,j} \left\langle z_i U_{t_i} x, z_j U_{t_j} x\right\rangle = \left\|\sum_{i=1}^n z_i U_{t_i} x\right\|^2 \geqslant 0,$$

于是 φ 是正定的.

必要性. 若 φ 是正定的, 故二元函数 $K(s,t) = \varphi(s-t)$ 也是正定的. 由 Moore 定理可知存在 Hilbert 空间 H_φ 使得 $U_t : f(s) \mapsto f(s-t)$ 对任何 $t \in \mathbb{R}$ 都是酉算子, 易见 $\{U_t\}$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的单参数酉算子群. 令 $K_s(t) = \varphi(s-t)$, 则 $\varphi(t) = \langle U_t K_0, K_0\rangle$.

(2) *必要性*. 显然.

充分性. 由 Moore 定理中对 H_φ 的构造可知

$$\|U_t K_s - K_s\|^2 = 2\varphi(0) - \varphi(t) - \varphi(-t).$$

若 φ 在 $t = 0$ 连续, 则 $t \to 0$ 时 $\|U_t K_s - K_s\| \to 0$. 因 K_s 的复系数有限线性组合在 H_φ 中稠密, 于是对任何 $f \in H_\varphi$, 当 $t \to 0$ 时有 $\|U_t f - f\| \to 0$. 因此 $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $t = 0$ 处 SOT–连续, 因此 $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上 SOT–连续. 由 (1) 可知 $\varphi(t) = \langle U_t x, x\rangle$, 由 $\{U_t\}$ 连续可知 $\varphi(t)$ 也连续.

由 Stone 定理可知存在 $\{U_t\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的恒等映射分解 $\{E_t\}$ 使得

$$\varphi(t) = \langle U_t K_0, K_0\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}E_{K_0}(s),$$

令 $g(s) = E_{K_0}(s)$ 即为所要求的有界递增右连续函数. □

定义 3.3.9 (测度的卷积) 设 μ, ν 是两个正则 Borel 复测度, 则 $C_0(\mathbb{R})$ 上定义线性泛函

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s+t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu,$$

它是一个有界的线性泛函. 由 Riesz 表示定理得到的正则 Borel 测度称作 μ 与 ν 的**卷积**, 记作 $\mu * \nu$, 它由

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s+t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu, \qquad \forall f \in C_0(\mathbb{R})$$

确定.

“卷积” 这一名称出自这样的实例: 设 μ 和 ν 对于测度 m 的 Radon–Nikodym 导数分别为 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 则对 $h \in C_0(\mathbb{R})$, 若记 $\mathrm{d}\beta = (f*g)\,\mathrm{d}m$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h\,\mathrm{d}\beta = \int_{\mathbb{R}} h(f*g)\,\mathrm{d}m &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}m(s)\,\mathrm{d}m(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(t)g(t-s)\,\mathrm{d}m(t)f(s)\,\mathrm{d}m(s)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} h(x+y)g(x)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} h(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

这就说明 $(f\,\mathrm{d}m)*(g\,\mathrm{d}m)=(f*g)\,\mathrm{d}m$.

通过测度的卷积, 我们可以证明连续正定函数的乘积仍然是正定的:

命题 3.3.10　若 φ,ψ 都是连续正定函数, 则 $\varphi\psi$ 也是连续的正定函数.

证明　由 Bochner 定理可知存在单调递增右连续函数 g,h 使得

$$\varphi(t)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}g(s),\quad \psi(t)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}h(s),$$

则

$$\varphi(t)\psi(t)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s_1t}\,\mathrm{d}g(s_1)\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s_2t}\,\mathrm{d}h(s_2)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s_1+s_2)t}\,\mathrm{d}g(s_1)\,\mathrm{d}h(s_2)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}(g*h)(s),$$

得证. □

正定函数有另外一种常见的定义:

命题 3.3.11　设 $\varphi\in C_b(G)$, 以下条件等价.

(1)　φ 是 G 上的正定函数;

(2)　对任意 $f\in C_c(G)$, 成立 $\int_G(f^**f)\varphi\geqslant 0$;

(3)　对任意 $f\in L^1(G)$, 成立 $\int_G(f^**f)\varphi\geqslant 0$;

今后将 G 上的正定函数全体记作 $\mathcal{P}(G)$.

证明　(1) ⇒ (2): 若 $f\in C_c(G)$, 考虑 $F(x,y)=f(x)\overline{f(y)}\varphi(y^{-1}x)\in C_c(G\times G)$. 令 $K=\operatorname{supp}f$, 那么 $\operatorname{supp}F\subset K\times K$. 给定 $\varepsilon>0$, $K\times K$ 有形如

$$K\times K\subset\bigcup_{i,j=1}^n U_i\times U_j$$

的开覆盖, 其中 $(x,y)\in U_i\times U_j$ 时 $|F(x,y)-F(x_i,x_j)|<\varepsilon$. 适当调整 U_i 可以得到 K 的分划 $K=\coprod_{i=1}^n E_i$, 且 $K\times K\subset\coprod_{i,j=1}^n E_i\times E_j$. 于是

$$\begin{aligned}\int_G(f^**f)\varphi&=\int_G\int_G F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i,j=1}^n\int_{E_i}\int_{E_j}F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{i,j=1}^n F(x_i,x_j)\mu(E_i)\mu(E_j)+R=\sum_{i,j=1}^n f(x_i)\mu(E_i)\overline{f(x_j)}\mu(E_j)\varphi(x_j^{-1}x_i)+R.\end{aligned}$$

其中

$$|R|=\left|\sum_{i,j=1}^n\int_{E_i}\int_{E_j}(F(x,y)-F(x_i,x_j))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon\mu(K)^2.$$

由 ε 的任意性即得 $\int_G(f^**f)\varphi\geqslant 0$.

(2) ⇒ (3): 这是因为 $L^1(G)$ 中的元素可被 $C_c(G)$ 逼近.

(3) ⇒ (1): 记 L_x 是左平移作用, $\{\psi_U\}$ 是一个 $L^1(G)$ 的近似单位元. 给定 $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$ 和 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$. 令 $f_U=\sum_{j=1}^n c_jL_{x_j}\psi_U$. 那么

$$0\leqslant\int_G(f_U^**f_U)\varphi=\sum_{i,j=1}^n c_i\bar{c}_j\int_G\int_G\psi_U(x_i^{-1}y)\psi_U(x_j^{-1}z)\varphi(z^{-1}y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

由于 φ 连续, 当 $U\to\{1\}$ 时右侧的积分非负. □

设 G 是局部紧群, $L^2(G)$ 上的**左正则表示**如下定义:

$$\lambda : G \to \mathcal{B}(L^2(G)), \qquad g \mapsto [f(t) \mapsto f(g^{-1}t)],$$

它是一个酉表示, 因左平移是等距. 通过群 G 上的表示, 可以定义两个 C^* 代数.

定义 3.3.12 设 G 是局部紧群, 那么

(1) 令 $C_r^*(G) := \mathbf{clos}\,\{\lambda(L^1(G))\}$, 称作是 G 的**约化群** C^* **代数**;

(2) 在 $L^1(G)$ 上定义如下的 C^* 范数

$$\|f\| := \sup\left\{\|\rho(f)\| : \rho \text{ 是 } L^1(G) \text{ 上的 } {}^*\text{-表示}\right\},$$

并称 $C^*(G) := \mathbf{clos}^{\|\cdot\|}\,\{L^1(G)\}$ 是 G 的**群** C^* **代数**.

在上述定义 (2) 中给出的范数是良定义的, 这因 $C_r^*(G)$ 上的不可约表示给出 G 的一个不可约表示, 而 $\|f\| \leqslant \|f\|_1$, 于是这一上确界是存在且有限的, 它也的确满足 C^* 条件. 特别地, 正定函数可以用来刻画 $C^*(G)$ 上的范数.

命题 3.3.13 记 G (可能可约) 的酉表示的酉等价类全体为 $r(G)$, 令 $S = \{\varphi \in \mathcal{P}(G) : \|\varphi\|_\infty = 1\}$ 是 $\mathcal{P}(G)$ 的单位球面, 那么对任意 $f \in L^1(G)$ 成立

$$\|f\|^2 = \sup_{[\pi]\in r(G)} \|\pi(f)\|^2 = \sup_{\varphi\in S} \int_G (f^* * f)\varphi = \sup_{\varphi\in \mathrm{Ext}S} \int_G (f^* * f)\varphi.$$

证明 不妨记等式中的四项分别为 $A_1, A_2, \ldots, A_4$. 由定义 $A_1 \leqslant A_2$ 是显然的. 若 π 是 G 的酉表示, 且 $u \in H$ 是单位向量, 令 $\varphi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$, 则 $\varphi \in S$ 且

$$\|\pi(f)u\|^2 = \int_G (f^* * f)\varphi.$$

因此 $A_2 \leqslant A_3$.

下面断言 $\mathrm{co}(\mathrm{Ext}S)$ 在 S 中弱*稠密. 令 $\varphi_0 \in S$, 是一些 $\mathrm{Ext}S$ 中元素的凸组合 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 的弱*极限, 那么 $\|\varphi_0\|_\infty = 1$, $\|\varphi_i\|_\infty \leqslant 1$, 且

$$\{f \in L^\infty(G) : \|f\|_\infty \leqslant 1 - \varepsilon\}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 都是弱*闭的. 因此只能 $\lim_{i\in I} \varphi_i(1) = \lim_{i\in I} \|\varphi_i\|_\infty = 1$. 取 $\varphi_i' = \varphi_i/\varphi_i(1)$ 后

$$\varphi_i' = \frac{1}{\varphi_i(1)} \sum_{j=1}^n c_j \psi_j, \qquad \frac{1}{\varphi_i(1)} \sum_{j=1}^n c_j = \frac{\varphi_i(1)}{\varphi_i(1)} = 1.$$

因此 $\varphi_i' \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}S)$ 且 $\varphi_0 = \lim_{i\in I} \varphi_i'$. 因此 $\int_G (f^* * f)\varphi$ 是一列形如 $\int_G (f^* * f)\psi$, $\psi \in \mathrm{Ext}S$ 凸组合的弱*极限, 从而 $A_3 \leqslant A_4$.

若 $\varphi \in \mathrm{Ext}S$, 那么存在不可约表示 π 和单位向量 $u \in H$ 使得 $\varphi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$. 因此

$$\int_G (f^* * f)\varphi = \|\pi(f)u\|^2.$$

从而 $A_4 \leqslant A_1$. □

由此, $\|\cdot\|$ 的确是 $L^1(G)$ 上的一个范数. 首先它很显然是一个半范数, 而 $\|f\| = 0$ 时对任何酉表示 π 都有 $\pi(f) = 0$, 而左正则表示是酉表示, 因此 $\pi(f)g = f * g = 0$ 对任何 g 成立. 将 g 取成逼近单位元之后可知 $f = 0$. 尽管 $C^*(G)$ 中的元素未必还是 G 上的函数, 我们仍然将 $C^*(G)$ 中的元素用类似于 f 的字母来记.

命题 3.3.14　若 G 是局部紧 Abel 群, 那么 $C_r^*(G)=C^*(G)=C_0(\widehat{G})$.

证明　设 $\wedge$ 是 Gelfand 变换在 $L^2(G)$ 上的等距延拓, 以下图表交换, 从而 $C_r^*(G)=C_0(\widehat{G})$.

$$\begin{tikzcd} L^2(G) \arrow[r, "\lambda(f)"] \arrow[d, "\wedge"'] & L^2(G) \arrow[d, "\wedge"] \\ L^2(\widehat{G}) \arrow[r, "M_{\hat{f}}"] & L^2(\widehat{G}) \end{tikzcd}$$

而对 $f\in L^1(G)$, 有

$$\|f\|=\sup_{\chi\in\widehat{G}}\|\chi(f)\|=\sup_{\chi\in\widehat{G}}\left|\hat{f}(\chi)\right|=\|\hat{f}\|_\infty.$$

这就说明 $C^*(G)=C_0(\widehat{G})$. □

当 G 不是 Abel 群时, $\widehat{G}$ 上不再有群结构, 于是要定义拓扑需要另寻他法. 任何 $L^1(G)$ 的 $*$–表示都可以延拓到 $C^*(G)$ 上, 于是命题 3.3.1 说明 G 的酉表示与 $C^*(G)$ 非退化的 $*$–表示也具有一一对应. 设 π 是 $C^*(G)$ 的非退化 $*$–表示, 那么

$$\ker\pi=\{f\in C^*(G):\pi(f)=0\}$$

是 $C^*(G)$ 的闭理想.

定义 3.3.15 (本原理想)　称形如 $\ker\pi$ 的 $C^*(G)$ 的理想为**本原理想**, 其中 π 是 $C^*(G)$ 的非退化不可约 $*$–表示. 记 $C^*(G)$ 的本原理想全体为 $\mathrm{Prim}(G)$, 也即

$$\mathrm{Prim}(G)=\left\{\ker\pi:[\pi]\in\widehat{G}\right\}.$$

我们希望在 $\mathrm{Prim}(G)$ 上赋予拓扑使得它成为一个拓扑空间: 设 $U\subset\mathrm{Prim}(G)$ 非空, 定义其闭包为

$$\bar{U}:=\left\{I\in\mathrm{Prim(G)}:I\supset\bigcap_{J\in U}J\right\},$$

并约定 $\bar{\varnothing}=\varnothing$.

定义–命题 3.3.16 (Jacobson 拓扑)　上述定义的闭包算子满足 Kuratowski 闭包公理: 也即对任意 $U,\ V\in\mathrm{Prim}(G)$,

$$\bar{U}\supset U,\qquad \bar{\bar{U}}=\bar{U},\qquad \overline{U\cup V}=\bar{U}\cup\bar{V}.$$

称 $\mathrm{Prim}(G)$ 上如此定义的拓扑为 **Jacobson 拓扑**, 它使得 $\mathrm{Prim}(G)$ 是 T_0 空间.

证明　首先 $U\subset\bar{U}$ 是显然的. 而由 $\bar{U}$ 的定义可知 $\bigcap_{J\in\bar{U}}J=\bigcap_{J\in U}J$, 因此 $\bar{\bar{U}}=\bar{U}$. 又因为 $U\subset U\cup V, V\subset U\cup V$, 于是

$$\bar{U}\subset\overline{U\cup V},\ \bar{V}\subset\overline{U\cup V}\implies\bar{U}\cup\bar{V}\subset\overline{U\cup V}.$$

要证明反向的包含关系, 设 $[\pi]\in\widehat{G}$ 使得 $\ker\pi\notin\bar{U}\cup\bar{V}$, 于是存在 $f\in\bigcap_{J\in U}J$, $g\in\bigcap_{J\in V}J$, 使得 $\pi(f)\neq 0$ 且 $\pi(g)\neq 0$. 取单位向量 $u\in H$ 满足 $\pi(f)u\neq 0$, 那么由 $\pi(g)\neq 0$ 且 π 不可约可知存在 $h\in C^*(G)$ 使得

$$\pi(g)\pi(h)\pi(f)u\neq 0.$$

但 $g*h*f\in\bigcap_{J\in U\cup V}J$, 于是 $\ker\pi\not\supset\bigcap_{J\in U\cup V}J$, 这就说明 $\ker\pi\notin\overline{U\cup V}$.

要说明 $\mathrm{Prim}(G)$ 是 T_0 的, 只需要注意到对任何 $I,J\in\mathrm{Prim}(G)$, 当 $I\neq J$ 时或者 $I\notin J$, 或者 $J\notin I$. 因此由闭包的定义可知或者 $I\notin\overline{\{J\}}$, 或者 $J\notin\overline{\{I\}}$. 因此 $\mathrm{Prim}(G)$ 总是 T_0 的. □

定义 3.3.17 (Fell 拓扑) 设 G 是局部紧群, 考虑 $\mathrm{Prim}(G)$ 上的 Jacobson 拓扑在映射

$$\widehat{G} \to \mathrm{Prim}(G), \qquad [\pi] \mapsto \ker \pi$$

下的拉回, 也即在 $\widehat{G}$ 上定义开集 $\{[\pi] : \ker \pi \in U,\ U \text{ 是 } \mathrm{Prim}(G) \text{ 的开集}\}$. 称 $\widehat{G}$ 上如此定义的拓扑为 $\widehat{G}$ 的 **Fell 拓扑**.

3.4 局部紧群的顺从性

对局部紧群, 我们重述顺从群的定义如下:

定义 3.4.1 (顺从群) 设 G 是局部紧群, 若存在线性泛函 $m : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ 满足

(1) m 是正的, 即 $\varphi \geqslant 0$ 时 $m(\varphi) \geqslant 0$;

(2) $m(1_G) = 1$;

(3) m 是左平移不变的, 即对任意 $\gamma \in G, \varphi \in L^\infty(G)$, 有 $m(\gamma \cdot \varphi) = m(\varphi)$.

则称这样的线性泛函 m 是 $L^\infty(G)$ 上的一个**左不变平均**. 若 G 上存在左不变平均, 则称 G 是**顺从**的.

如果 G 上的拓扑是离散拓扑, 那么 $L^\infty(G)$ 就可以写作 $\ell^\infty(G)$. 之前对离散群的顺从性已经做了较为详尽的讨论, 许多结论在 G 上的拓扑局部紧时证明是类似的, 因此往往将类似的证明略去.

但需要注意的是, 群的顺从性与群上赋予怎样的拓扑是有关的. 例如对紧群 G 来说, 规范化的 Haar 测度 $\mathrm{d}\mu$ 总能在 $L^\infty(G)$ 上给出一个左不变平均 $m(\varphi) := \int_G \varphi \, \mathrm{d}\mu$. 例如 $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, 它可以嵌入 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 上继承 $\mathbb{R}^9$ 的 Euclid 拓扑. 这是一个紧群, 因此存在左不变平均. 但它存在自由子群 $\mathbb{F}_2$, 而 $\mathbb{F}_2$ 在离散拓扑下不是顺从的, 因此 $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ 在离散拓扑下也不是顺从的.

因此如果要使用与离散拓扑的情形下完全一样的方法会遇到下面的问题: 对局部紧的顺从群 G 和它的一个闭子群 H, 如果要像离散情形一样证明相关结论, 需要自然的嵌入 $\ell^\infty(H) \hookrightarrow \ell^\infty(G)$. 但 G 的 Haar 测度在 H 上的限制却未必是 H 上的 Haar 测度: 例如 $G = \mathbb{R}^2, H = \mathbb{R}$. 要克服这一问题, 我们需要使用 $L^\infty(G)$ 的子空间来刻画顺从性.

定义–命题 3.4.2 (左一致连续) 设 G 是局部紧群, $\varphi : G \to \mathbb{C}$ 是有界函数 (这即 φ 可以看作 $\ell^\infty(G)$ 中的元素). 以下条件等价:

(1) 映射 $G \to \ell^\infty(G), \gamma \mapsto \gamma \cdot \varphi$ 连续;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 1 的开邻域 U 使得对任意满足 $xy^{-1} \in U$ 的 $x, y \in G$ 成立 $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 1 的开邻域 U 使得对任意 $z \in G$ 和满足 $xy^{-1} \in U$ 的 $x, y \in G$ 成立 $|\varphi(xz) - \varphi(yz)| < \varepsilon$.

在上述任意条件满足的情况下, φ 是连续函数. 此时称 φ 是**左一致连续**的, 并记 G 上左一致连续函数全体为 $\mathrm{LUC}(G)$.

证明 注意到 (1) 中提到的映射在 1 处连续当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 1 的开邻域 U 使得对任意 $\gamma \in U$ 都有

$$\|\gamma \cdot \varphi - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in G} \left|\varphi(\gamma^{-1}x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon.$$

这等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 1 的开邻域 U 使得对任意满足 $xy^{-1} \in U$ 的 $x, y \in G$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon,$$

这即 (2). 此时对任意 $\gamma_0 \in G$, 考虑

$$G \xrightarrow{L_{\gamma_0}} G \longrightarrow \ell^\infty(G), \qquad \gamma \mapsto \gamma_0\gamma \mapsto (\gamma_0\gamma)\cdot\varphi,$$

因此只需 (2) 在 1 处成立即可得到 (3); 另一边, 只需 (3) 在 1 处成立即可得到 (1). □

注意到对任意 $f \in L^1(G)$, 映射 $G \to L^1(G), \gamma \mapsto \gamma \cdot f$ 总是连续函数.

命题 3.4.3　$\mathrm{LUC}(G)$ 是 $\ell^\infty(G)$ 中的 G-不变闭子集.

证明　先说明 $\mathrm{LUC}(G)$ 是闭的. 这是因为对任意依无穷范数收敛到 $\varphi \in \ell^\infty(G)$ 的 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathrm{LUC}(G)$, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\left(n > n_0 \implies \|\varphi - \varphi_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

而 $\varphi_n \in \mathrm{LUC}(G)$, 于是存在 1 的开邻域 U 使得

$$\forall \gamma \in G\left(\|\gamma\cdot\varphi_n - \varphi_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\|\gamma\cdot\varphi - \varphi\|_\infty &\leqslant \|\gamma\cdot\varphi - \gamma\cdot\varphi_n\|_\infty + \|\gamma\cdot\varphi_n - \varphi_n\|_\infty + \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

于是映射 $G \to L^\infty(G), \gamma \mapsto \gamma\cdot\varphi$ 在 $1 \in G$ 处连续. 由定义可知 $\varphi \in \mathrm{LUC}(G)$.

再说明 $\mathrm{LUC}(G)$ 是 G-不变的. 对任意 $\varphi \in \mathrm{LUC}(G)$ 和任意的 $\gamma \in G$, 考虑映射

$$G \overset{L_{\gamma_0}}{\to} G \to L^\infty(G), \qquad \gamma_0 \mapsto \gamma_0\gamma \mapsto \gamma_0\gamma\cdot\varphi.$$

这是连续映射的复合, 因此也是连续的. 这说明 $\gamma\cdot\varphi \in \mathrm{LUC}(G)$. 于是说明了 G-不变性. □

因此我们将不变平均定义在 $\mathrm{LUC}(G)$ 上.

定义 3.4.4 (左不变平均)　设 G 是局部紧群, 若线性泛函 $m : \mathrm{LUC}(G) \to \mathbb{C}$ 满足

(1)　对任意 $\varphi \geqslant 0$ 成立 $m(\varphi) \geqslant 0$;

(2)　$m(1_G) = 1$,

则称 m 是一个**平均**. 若对任意 $\gamma \in G$ 还成立 $m(\gamma\cdot\varphi) = m(\varphi)$, 则称之为**左不变平均**.

我们希望证明 $\mathrm{LUC}(G)$ 上左不变平均的存在性与 G 的顺从性之间是等价的. 但 $\mathrm{LUC}(G)$ 上存在左不变平均显然是比 $L^\infty(G)$ 上存在左不变平均要弱一些. 为此, 我们需要一些更强的工具, 其中比较重要的便是卷积.

定义 3.4.5 (卷积)　设 G 是局部紧群, $f \in L^1(G), \varphi \in L^\infty(G)$. 定义 f 与 φ 的**卷积**为

$$(f * \varphi)(x) := \int_G f(y)\varphi(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(y), \qquad \forall x \in G.$$

容易验证 $f * \varphi \in L^\infty(G)$, 且 $\|f * \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty$.

于是利用卷积可以刻画 $\mathrm{LUC}(G)$.

命题 3.4.6　对局部紧群 G, 有

$$\mathrm{LUC}(G) = \left\{f * \varphi : f \in L^1(G),\ \varphi \in L^\infty(G)\right\}.$$

证明 对任意 $f \in L^1(G)$ 和 $\varphi \in L^\infty(G)$, 由

$$\begin{aligned}|(f*\varphi)(x)-(f*\varphi)(y)| &\leqslant \int_G |f(xt)-f(yt)|\left|\varphi(t^{-1})\right| \mathrm{d}\mu(t) \\ &\leqslant \left\|x^{-1}\cdot f - y^{-1}\cdot f\right\|_1 \cdot \|\varphi\|_\infty .\end{aligned}$$

由于 $G \to L^1(G), \gamma \mapsto \gamma \cdot f$ 对任意给定的 $f \in L^1(G)$ 连续, 于是 $f * \varphi \in \mathrm{LUC}(G)$.

另一侧的证明参见 [**HeR, (32.45)**], 所需要的工具是 Cohen 分解定理. □

命题 3.4.7 对 $f, g \in L^1(G)$, 卷积的定义式右侧的积分对 μ-a.e. 的 $x \in G$ 成立, 于是 $f*g \in L^1(G)$, 这说明 $(L^1(G), *)$ 是一个代数. 进一步, $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

证明 由于 Fubini 定理只对 σ-有限的测度空间成立, 这在局部紧群的语境下即为 G 是 σ-紧的. 我们需要下面的技巧来讲一般的 G 分解成若干 σ-紧陪集的分解. 取预紧的对称开邻域 $U \ni 1$, 并定义 $H = \bigcup_{n \geqslant 0} H^n$. 那么 H 是 σ-紧的开子群. 考虑 G 关于 H 的陪集分解 $G = \coprod_{i \in I} H g_i$.

对 $f \in L^1(G)$, 有 $f = \sum_{i \in I} f \cdot 1_{Hg_i}$, 由

$$\|f\|_1 = \sum i \in I \left\|f \cdot 1_{Hg_i}\right\|_1$$

可知对给定的 $f \in L^1(G)$ 总有 $\left\{i \in I : \left\|f \cdot 1_{Hg_i}\right\|_1 \neq 0\right\}$ 是可数集. 因此 Fubini 定理可以对 $L^1(G)$ 使用, 无论 G 是否是 σ-紧的.

设 (G, μ) 是测度空间, 那么 $G \times G$ 局部紧且 $(G \times G, \mu \otimes \mu)$ 也是一个测度空间. 对 $f, g \in L^1(G)$, 定义 $F(x, y) := f(y) g(y^{-1}x)$, 那么

$$\begin{aligned}+\infty > \|f\|_1 \|g\|_1 &= \int_G |f(y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \int_G |g(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \int_G |f(y)|\,|g(x)| \,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_G \int_G |f(y)| \left|g(y^{-1}x)\right| \mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(y^{-1}x) = \int_G \int_G |F(x,y)| \,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{G\times G} |F(x,y)| \,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) = \|F\|_1 .\end{aligned}$$

于是 $F \in L^1(G \times G)$. 由 Fubini 定理可知

$$(f*g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{G\times G} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y),$$

因此有

$$\|f*g\|_1 \leqslant \||f|*|g|\|_1 \leqslant \|F\|_1 .$$

这就证明了命题中的范数不等式. □

如果 G 上的拓扑是离散拓扑, 那么对任意 $\gamma \in G, \varphi \in \ell^\infty(G)$, 都有

$$(1_\gamma * \varphi)(x) = \int_G 1_\gamma(y) \varphi(y^{-1}x) \,\mathrm{d}y = \varphi(\gamma^{-1}x).$$

于是 $1_\gamma * \varphi = \gamma \cdot \varphi$. 因此对离散群 G 来说, 如果 $\ell^\infty(G)$ 上有左不变平均, 那么应当对任意 $f \in \ell^1(G)_{1,+}$ 和 $\varphi \in \ell^\infty(G)$ 成立 $m(f * \varphi) = m(\varphi)$.

现在考虑一般的局部紧群 G, 此时 $1_\gamma * \varphi$ 往往是零, 但如果将 1_γ 看作是 $M(G)$ 中的集中于一点 γ 的测度 δ_γ, 那么对任意 $\nu \in M(G), \varphi \in L^\infty(G)$ 有

$$(\nu * \varphi)(x) := \int_G \varphi(y^{-1}x) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

在这种意义下仍有 $\delta_\gamma * \varphi = \gamma \cdot \varphi$. 那么看起来 $L^\infty(G)$ 上有左不变平均 m 仍然应当成立 $m(f * \varphi) = m(\varphi)$. 因此我们引入下面的概念.

定义 3.4.8 (拓扑左不变性)　设 G 是局部紧群, $E = L^\infty(G)$ 或 $E = \mathrm{LUC}(G)$. 称 $m \in E^*$ 是**拓扑左不变的**, 若对任意 $f \in L^1(G)_{1,+}$ 和 $\varphi \in E$ 成立 $m(f * \varphi) = m(\varphi)$.

在上述的定义中我们需要保证 $f * \varphi \in E$. 这在 $E = L^\infty(G)$ 时由

$$\|f * \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty < +\infty$$

得到, 而在 $E = \mathrm{LUC}(G)$ 时由命题 3.4.6 得到.

引理 3.4.9　设 G 是局部紧群, $E = L^\infty(G)$ 或 $\mathrm{LUC}(G)$. 那么任何 E 上的拓扑左不变泛函都是左不变的.

证明　为此, 设 m 是拓扑左不变的, 对任意 $\varphi \in E$ 和 $\gamma \in G$, 固定 $f \in L^1(G)_{1,+}$, 那么

$$\begin{aligned}(f * (\gamma \cdot \varphi))(x) &= \int_G f(y)(\gamma \cdot \varphi)(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(y)\varphi(\gamma^{-1}y^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_G f(t\gamma^{-1})\varphi(t^{-1}g)\,\mathrm{d}\mu(t\gamma^{-1}) = \int_G f(t\gamma^{-1})\Delta(\gamma^{-1})\varphi(t^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(t)\\ &= \int_G f_1(t)\varphi(t^{-1}g)\,\mathrm{d}\mu(t),\end{aligned}$$

其中 $t = y\gamma$, $f_1(t) = f(t\gamma^{-1})\Delta(\gamma^{-1})$. 由于

$$\int_G f_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_G f(t\gamma^{-1})\Delta(\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_G f(t\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\mu(t\gamma^{-1}) = 1.$$

于是 $f_1 \in L^1(G)_{1,+}$. 因此

$$m(\gamma \cdot \varphi) = m(f * (\gamma \cdot \varphi)) = m(f_1 * \varphi) = m(\varphi)$$

对任意 $\gamma \in G$ 成立, 这就说明 m 是左不变的. □

命题 3.4.10　设 G 是局部紧群, $m \in \mathrm{LUC}(G)^*$ 是左不变的平均, 则 m 是拓扑左不变的.

证明　对任意 $f \in L^1(G)_{1,+}$ 和 $\varphi \in \mathrm{LUC}(G)$, 有

$$|m(f * \varphi)| \leqslant \|f * \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty .$$

因此 $f \mapsto m(f * \varphi)$ 在 $L^1(G)$ 上连续, 因此存在 $\psi \in L^\infty(G)$ 使得

$$m(f * \varphi) = \int_G f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

注意到对任意 $\gamma \in G$ 都有

$$\begin{aligned}(\gamma \cdot (f * \varphi))(x) = (f * \varphi)(\gamma^{-1}x) &= \int_G f(y)\varphi(y^{-1}\gamma^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_G f(\gamma^{-1}t)\varphi(t^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(t) = ((\gamma \cdot f) * \varphi)(x),\end{aligned}$$

其中 $t = \gamma y$. 于是

$$\begin{aligned}m(\gamma \cdot (f * \varphi)) = m((\gamma \cdot f) * \varphi) &= \int_G (\gamma \cdot f)(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G f(y)\psi(\gamma y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = m(f * \varphi).\end{aligned}$$

于是 $\gamma \cdot \psi = \psi$ 对 μ-a.e. 的 $x \in G$ 成立, 这就说明 $\psi = c(\varphi) \in \mathbb{C}$ 对 μ-a.e. 的 $x \in G$ 成立. 因此对任意 $f \in L^1(G)_{1,+}, \varphi \in \mathrm{LUC}(G)$, 由

$$m(f * \varphi) = c(\varphi)\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

可知 $m(f*\varphi)=c(\varphi)$. 令 $\mathcal{U}$ 是 1 的一个邻域基, 对任意 $U\in\mathcal{U}$ 定义 $e_U\in C_c(G)$ 满足 $e_U\geqslant 0$, $\operatorname{supp}e_U\subset U$ 且 $\|e_U\|_1=1$. 且在 $\mathcal{U}$ 上存在包含关系确定的偏序 $U\leqslant V:\Longleftrightarrow V\subset U$. 那么 $(e_U)_{U\in\mathcal{U}}$ 是 $L^1(G)$ 的逼近单位元, 从而

$$m(f*\varphi)=c(\varphi)=\lim_{U\in\mathcal{U}}m(e_U*\varphi)=m(\varphi),$$

这就说明 m 是拓扑左不变的. □

上述的证明不能在 $L^\infty(G)$ 上进行, 这是因为对一般的 $f\in L^\infty(G)$, e_U*f 未必收敛到 f.

推论 3.4.11 设 m 是 $\mathrm{LUC}(G)$ 上的平均, 那么 m 是左不变的当且仅当它是拓扑左不变的.

于是我们给出局部紧群 G 顺从的判别方法.

定理 3.4.12 设 G 是局部紧群, 以下叙述等价:

(1) G 是顺从群;

(2) 存在 $C_b(G)$ 上的左不变平均;

(3) 存在 $\mathrm{LUC}(G)$ 上的左不变平均;

(4) 存在 $L^\infty(G)$ 上的拓扑左不变平均;

(5) 存在 $\mathrm{LUC}(G)$ 上的拓扑左不变平均.

特别地, 对一般的拓扑群 G, 若它满足 (3), 则称 G 是**顺从群**.

证明 下图的黑色部分是显然的, 粉色的部分由前面的结论得到: (3) ⇔ (5) 由推论 3.4.11 得到, (4) ⇒ (1) 由引理 3.4.9 得到, 因此只需要证明 (3) ⇒ (4).

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
(4) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (5) &
\end{tikzcd}$$

为此, 固定 $\mathrm{LUC}(G)$ 上的左不变平均 m. 由命题 3.4.10 可知 m 是拓扑左不变的. 取 $L^1(G)$ 中的逼近单位元 $(e_U)_{U\in\mathcal{U}}\subset L^1(G)_{1,+}$ 和 $\mathcal{U}$ 上的超滤子 ω, 使得对任意 $U_0\in\mathcal{U}$, $\omega(\{U\in\mathcal{U}:U\geqslant U_0\})=1$. 定义

$$\tilde{m}:L^\infty(G)\to\mathbb{C},\qquad \varphi\mapsto\lim_{\omega}m(e_U*\varphi),$$

那么由极限的保序性可知对任意 $\varphi\geqslant 0$ 仍有 $\tilde{m}(\varphi)\geqslant 0$, 且 $\tilde{m}(1_G)=1$. 因此 $\tilde{m}$ 是 $L^\infty(G)$ 上的平均. 其左不变性由

$$\tilde{m}(f*\varphi)=\lim_{\omega}m(e_U*f*\varphi)=\lim_{\omega}m(f*e_U*\varphi)=\lim_{\omega}m(e_U*\varphi)=\tilde{m}(\varphi)$$

对任意 $f\in L^1(G)_{1,+}$ 成立得到. 上式中的倒数第二个等号只需注意到 $e_U*\varphi\in\mathrm{LUC}(G)$ 且 m 是拓扑左不变的即可. □

推论 3.4.13 设 G 是局部紧群, 令 G_d 是 G 赋予离散拓扑得到的拓扑群. 若 G_d 是顺从的, 那么 G 也是顺从的.

命题 3.4.14 若 G_d 顺从, 则存在 $\ell^\infty(G)$ 上的左不变平均 m. 由 $\mathrm{LUC}(G)\subset\ell^\infty(G)$ 可知 $m|_{\mathrm{LUC}(G)}$ 是 $\mathrm{LUC}(G)$ 上的左不变平均, 从而 G 也是顺从的. □

3.5 顺从群的继承性质

若无特殊说明, 本节总是假设 G 是一个局部紧群. 尽管上一节最后的推论表明我们可以只考虑离散群, 这在证明上也的确比较简单, 但本节仍然以局部紧群的情形作为蓝本: 这在思路上几乎相同, 但在细节上更加复杂. 这样做的目的是为了熟悉群上函数的操作.

1. 取商群和取余极限保持顺从性.

引理 3.5.1 设 N 是 G 的正规闭子群, 若 G 是顺从的, 则 G/N 也是顺从的.

证明 考虑映射 $q: C_b(G/N) \to C_b(G)$, $(qf)(x) = f(xN)$, 并定义 $m_{G/N} = m_G \circ q$. 这是一个 $C_b(G/N) \to \mathbb{C}$ 的线性映射, 因 m_G 和 q 都是线性的. 它是一个平均, 因

- 对 $f \in C_b(G/N)$, $f \geqslant 0$, 由定义 $qf \geqslant 0$, 于是 $m_{G/N}(f) = m_G(qf) \geqslant 0$.
- 注意到 $q1_{G/N} = 1_G$, 于是 $m_{G/N}(1_{G/N}) = m_G(q1_{G/N}) = m_G(1_G) = 1$.

而左不变性只需注意到对任意 $\gamma \in G$ 成立

$$q(\gamma N \cdot f)(x) = (\gamma N \cdot f)(xN) = f(\gamma^{-1}xN) = (qf)(\gamma^{-1}x) = (\gamma \cdot qf)(x),$$

再由 m_G 的左不变性得到. □

引理 3.5.2 令 G 是局部紧群, $(H_i)_{i\in I}$ 是一个 G 的闭子群构成的定向系, 使得 $\bigcup_{i\in I} H_i$ 在 G 中稠密. 若每个 H_i 都是顺从的, 那么 G 也是顺从的.

证明 对任意 $i \in I$, 设 m_i 是 $C_b(H_i)$ 上的左不变平均, 定义 $\tilde{m}_i \in C_b(G)^*$ 是限制映射 $r_i: C_b(G) \to C_b(H_i)$ 与 m_i 的复合. 取 m 是 $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ 的弱*聚点, 那么 m 是 $C_b(G)$ 上的平均且 $\forall g \in \bigcup_{i\in I} H_i$ 都成立 $m(g \cdot \varphi) = m(\varphi)$. 于是对 $g \in G$, 取一个网 $(g_j)_{j\in J} \subset \bigcup_{i\in I} H_i$ 使得 $g_j \to g$, 对 $\varphi \in \mathrm{LUC}(G)$, 由

$$\lim_{j\in J} g_j \cdot \varphi = g \cdot \varphi \implies m(g \cdot \varphi) = \lim_{j\in J} m(g_j \cdot \varphi) = \lim_{j\in J} m(\varphi) = m(\varphi)$$

得证. □

引理 3.5.3 设 G 是局部紧群, N 是 G 的正规闭子群, 若 G/N 和 N 都是顺从的, 那么 G 也是顺从的.

证明 设 $\tilde{m}$ 是 $C_b(N)$ 上的一个左不变平均, 对 $\varphi \in \mathrm{LUC}(G)$, 定义

$$T\varphi : G \to \mathbb{C}, \qquad (T\varphi)(x) := \tilde{m}((g \cdot \varphi)|_N).$$

那么对任意 $x \in G$, 有

$$|(T\varphi)(x)| = |\tilde{m}((g \cdot \varphi)|_N)| \leqslant \|(g \cdot \varphi)|_N\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty,$$

于是 $T\varphi$ 有界. 要证明它连续, 只需要注意到它是以下几个连续映射的复合:

$$G \to \ell^\infty(G) \to \ell^\infty(N) \to \mathbb{C}, \qquad g \mapsto g \cdot \varphi \mapsto (g \cdot \varphi)|_N \mapsto \tilde{m}((g \cdot \varphi)|_N).$$

因此 $T\varphi \in C_b(G)$.

对满足 $Nx_1 = Nx_2$ 的 $x_1, x_2 \in G$, 存在 $g \in N$ 使得 $x_2 = gx_1$, 于是由 $\tilde{m}$ 的左不变性可知

$$(T\varphi)(x_1) = \tilde{m}((x_1 \cdot \varphi)|_N) = \tilde{m}(g(x_1 \cdot \varphi)|_N) = \tilde{m}((gx_1 \cdot \varphi)|_N) = \tilde{m}((g_2 \cdot \varphi)|_N) = (T\varphi)(x_2).$$

因此 $T\varphi$ 确定了映射 $\tilde{T}:\mathrm{LUC}(G)\to C_b(G/N)$, 这是一个有界线性映射. 再令 $\bar{m}$ 是 $C_b(G/N)$ 上的左不变平均, 定义 $m:=\bar{m}\circ\tilde{T}\in\mathrm{LUC}(G)^*$, 于是只需证明 m 也是左不变的. 这是因为对 $\gamma\in G$, $\varphi\in\mathrm{LUC}(G)$, 若 $\gamma\in gN$, 那么

$$m(\gamma\cdot\varphi)=\bar{m}(\tilde{T}(\gamma\cdot\varphi))=\bar{m}(gN\cdot\tilde{\varphi})=\bar{m}(\tilde{T}\varphi)=m(\varphi),$$

于是 m 是 $\mathrm{LUC}(G)$ 上的左不变平均, 这说明 G 是顺从的. □

在离散的情形下, 由于 $\ell^\infty(H)\hookrightarrow\ell^\infty(G)$ 是显然的, 因此对离散群的情况不需要考虑 $L^\infty(G)$ 或者 $\mathrm{LUC}(G)$, 抑或是 $C_b(G)$. 我们选取 $\mathrm{LUC}(G)$ 的原因是它的连续性比 $L^\infty(G)$ 更好, 所需要的条件也更少: 在 $L^\infty(G)$ 上我们需要拓扑左不变的平均.

2. 取闭子群保持顺从性.

引理 3.5.4 设 G 是局部紧群, $H\leqslant G$ 是一个闭子群, U 是 1 的一个相对紧的对称开邻域. 那么存在 $S\subset G$ 使得

(1) 对任意 $g\in G$, 存在 $s\in S$ 使得 $gH\cap Us\neq\varnothing$;

(2) 若 $K\subset G$ 是紧的, 那么 $\{s\in S: KH\cap\bar{U}s\neq\varnothing\}$ 是有限集.

证明 由 Zorn 引理, 存在满足 $\forall s\in S\,(s\neq t\implies s\notin UtH)$ 的极大子集 $S\subset G$.

(1) 令 $g\in G$, 若 $gH\cap Us=\varnothing$ 对任意 $s\in S$ 成立, 那么 $g\notin UsH$ 对任意 $s\in S$ 成立. 若 $g\notin S$, 那么 $S\sqcup\{g\}$ 也是满足 $\forall s\in S\,(s\neq t\implies s\notin UtH)$ 的 G 的子集, 这与 S 的极大性矛盾, 于是只能 $g\in S$. 而此时 $g\in gH\cap Ug$, 矛盾.

(2) 若存在紧子集 $K\subset G$ 使得 $\{s\in S: KH\cap\bar{U}s\neq\varnothing\}$ 是无限集, 那么存在 $(s_n)_{n\geqslant1}$ 和 $(h_n)_{n\geqslant1}\subset H$ 使得对任意 $n\neq m$ 都有 $s_n\neq s_m$ 和 $\forall n\in\mathbb{N}(s_nh_n\in\bar{U}K)$. 由于 $\bar{U}K$ 是紧的, 于是 $(s_nh_n)_{n\geqslant1}$ 在 $\bar{U}K$ 上存在凝聚点 g. 再取 1 的对称邻域 V 满足 $V^2\subset U$(这样的邻域存在是因为乘法和取逆都是连续的), 那么存在 $n\neq m$ 使得 $s_nh_n,\ s_mh_m\in Vg$, 于是 $s_nh_n\in Us_mh_m$, 这即 $s_n\in Us_mH$, 矛盾. □

引理 3.5.5 对引理 3.5.4 中的 G 和 H, 存在连续函数 $f:G\to\mathbb{R}_{\geqslant0}$ 使得

(1) 对任意 $g\in G$, $\{h\in G: f(h)>0\}\cap gH\neq\varnothing$;

(2) 若 $K\subset G$ 是紧的, 那么 $\operatorname{supp} f|_{KH}$ 也是紧的.

证明 选取 $\varphi\in C_c(G)$ 满足: $\varphi\geqslant0,\forall x\in G\,(\varphi(x)=\varphi(x^{-1})),\varphi(1)=1$. 那么 $U:=\{x\in G:\varphi(x)>0\}$ 是一个 1 的相对紧的对称开邻域. 由引理 3.5.4 可知存在 $S\subset G$ 满足引理 3.5.4 的条件. 定义

$$f:G\to\mathbb{R}_{\geqslant0},\qquad x\mapsto\sum_{s\in S}\varphi(gs^{-1}),$$

由引理 3.5.4 (2) 可知当 g 取遍 G 的紧子集 K 时上述的和式总是有限和, 因此 f 是良定义的, 并且是连续的. 因此引理 3.5.4 (1) 说明 (1) 成立.

对紧子集 $K\subset G$, 由引理 3.5.4 (2) 可知存在 $s_1,\dots,s_n\in S$ 使得

$$\{x\in KH: f(x)>0\}=\bigcup_{s\in S}Us\cap KH\subset\bigcup_{i=1}^{s}Us_i,$$

由 $\bigcup_{i=1}^n Us_i$ 相对紧可知 $\operatorname{supp} f|_{KH}$ 也相对紧. □

命题 3.5.6 设 G 是局部紧群, H 是 G 的闭子群, 那么存在 G 上的连续非负函数 β 使得

(1) 对任意紧子集 $K\subset G$, $\operatorname{supp}\beta|_{KH}$ 是紧的;

(2) 对任意 $x\in G$, $\int_H\beta(xy)\,\mathrm{d}\mu_H(y)=1$.

称 β 是 H 的 **Bruhat 函数**.

证明　取引理 3.5.5 中的函数 f, 并定义

$$\alpha : G \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto \int_H f(xy)\,\mathrm{d}\mu_H(y),$$

那么由 f 连续, G 局部紧, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 1 的紧邻域 K. 由于 $\operatorname{supp} f|_{KH}$ 也是紧的, 于是 f 在 KH 上一致连续, 也即

$$\forall x \in K\, \forall h \in H\, (|f(xh) - f(h)| < \varepsilon).$$

因此对任意 $x \in K$ 成立

$$|\alpha(x) - \alpha(1)| = \left|\int_H (f(xh) - f(h))\,\mathrm{d}\mu_H(h)\right| \leqslant \int_H |f(xh) - f(h)|\,\mathrm{d}\mu_H(h) < \varepsilon\mu_H(H) = \varepsilon.$$

进一步, 对任意 $x \in G$, 由引理 3.5.5 (1) 可知 $\{h \in G : f(h) > 0\} \cap xH \neq \varnothing$, 于是

$$\begin{aligned} f(xh) > 0 &\iff xh \in \{h \in G : f(h) > 0\} \cap xH \\ &\iff h \in x^{-1}\{h \in G : f(h) > 0\} \cap H =: V_x \neq \varnothing, \end{aligned}$$

由于 V_x 是闭子群 H 中与开集 $x^{-1}\{h \in G : f(h) > 0\}$ 的交, 从而在 H 的子空间拓扑下是非空开集, 因此 $\mu_H(V_x) > 0$. 因此,

$$\alpha(x) = \int_H f(xh)\,\mathrm{d}\mu_H(h) \geqslant \int_{V_x} f(xh)\,\mathrm{d}\mu_H(h) > 0.$$

再取

$$\beta : G \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{\alpha(x)},$$

由前述讨论, $\alpha(x) > 0$, 于是 β 是良定义的. 并且 f 和 α 都是连续的非负函数, 从而 β 也是连续的非负函数. 对任意紧子集 $K \subset G$, 由于 $\operatorname{supp} f|_{KH}$ 是紧的, 于是 $\operatorname{supp} \beta|_{KH}$ 也是紧的. 并且

$$\begin{aligned} \int_H \beta(xh)\,\mathrm{d}\mu_H(h) &= \int_H \frac{f(xh)}{\alpha(xh)}\,\mathrm{d}\mu_H(h) = \int_H f(xh)\frac{1}{\int_H f(xhy)\,\mathrm{d}\mu_H(y)}\,\mathrm{d}\mu_H(h) \\ &= \int_H f(xh)\frac{1}{\int_H f(xhy)\,\mathrm{d}\mu_H(hy)}\,\mathrm{d}\mu_H(h) = \int_H f(xh)\frac{1}{\alpha(x)}\,\mathrm{d}\mu_H(h) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \end{aligned}$$

于是 β 是满足条件的函数. $\square$

引入 Bruhat 函数的直觉是考虑与 H-方向横截的那些函数. 在离散的情形, 若 $G = \coprod_{i\in H} s_i H$, 那么 Bruhat 函数可以取成

$$\beta(x) = \begin{cases} 1, & x = s_i, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

至此, 我们可以考虑闭子群的顺从性了.

命题 3.5.7　设 G 是局部紧群, H 是 G 的闭子群. 若 G 是顺从的, 那么 H 也是顺从的.

证明　令 $\beta : G \to \mathbb{C}$ 是命题 3.5.6 中的 Bruhat 函数, 定义

$$T : C_b(H) \to \ell^\infty(G), \qquad (T\varphi)(x) := \int_H \varphi(y)\beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}\mu_H(y),$$

那么对任意 $\varphi \in C_b(H)$ 都有

$$|(T\varphi)(x)| \leqslant \left|\int_H \varphi(y)\beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \left|\int_H \beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y\right| = \|\varphi\|_\infty.$$

于是 $\|T\| \leqslant 1$. 再注意到

$$T1_H(x) = \int_H 1_H(y)\beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y = \int_H \beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

于是 $\|T\| = 1$.

我们断言 $T(C_b(H)) \subset C_b(G)$. 要说明 $T\varphi$ 连续, 只需注意到 β 连续且对任意 $\varepsilon > 0$, 由 G 的局部紧性可以取到 1 的紧邻域 V. 由 β 的性质可知 $\operatorname{supp} \beta|_{VH}$ 是紧的, 于是 β 在其上一致连续. 从而

$$\forall x \in V\, \forall y \in H\, (\left|\beta(x^{-1}y) - \beta(y)\right| < \varepsilon).$$

因此

$$|(T\varphi)(x) - (T\varphi)(1)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_H \left|\beta(x^{-1}y) - \beta(y)\right|\,\mathrm{d}y < \|\varphi\|_\infty\, \mu(H)\varepsilon,$$

于是 $T\varphi \in C_b(G)$.

设 m 是 $C_b(G)$ 上的左不变平均, 定义 $\tilde{m} = T^*m$, 那么对任意 $\varphi \in C_b(H)$, $\varphi \geqslant 0$, 存在 $m = \inf \varphi(x) \geqslant 0$, 此时

$$T\varphi(x) = \int_H \varphi(y)\beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y \geqslant m \int_H \beta(x^{-1}y)\,\mathrm{d}y = m \geqslant 0,$$

这说明 $T\varphi \geqslant 0$. 于是 $\tilde{m}(\varphi) = T^*m(\varphi) = m(T\varphi) \geqslant 0$. 而 $T1_H = 1_G$, 于是 $\tilde{m}(1_H) = 1$, 这说明 $\tilde{m}$ 是 $C_b(H)$ 上的一个平均. 要说明左不变性, 对任意 $h \in H, \varphi \in C_b(H)$,

$$\begin{aligned} T(h \cdot \varphi)(x) &= \int_H \varphi(h^{-1}y)\beta(x^{-1}(y))\,\mathrm{d}\mu_H(y) \\ &= \int_H \varphi(y)\beta((x^{-1}h)y)\,\mathrm{d}\mu_H(y) = (T\varphi)(h^{-1}x) = (h \cdot T\varphi)(x). \end{aligned}$$

这就说明了 H 是顺从的. □

3.6 顺从性与核 C^* 代数

定义 3.6.1 (完全正逼近性质) 设 A 是 C^* 代数, 若存在一列形如

$$i_n : A \xrightarrow{\alpha_n} A_n \xrightarrow{\beta_n} A$$

的态射, 使得 i_n 逐点收敛到 id, α_n, β_n 都是满足 $\|\alpha_n\| = \|\beta_n\| = 1$ 的完全正映射, A_n 是有限维 C^* 代数, 则称 A 具有**完全正逼近性质** (cpap = completely positive approximation property).

下面的定理来自 [**Ch**].

定理 3.6.2 若 A 具有 cpap, 则 A 是核 C^* 代数. 特别地, 若 A 是可分的单位 C^* 代数, 则 A 具有 cpap 当且仅当 A 是核 C^* 代数.

证明 参见 [**Ch, 定理 3.6**]. □

例 3.6.3 设 X 是紧度量空间, 则 $C(X)$ 是核 C^* 代数. 这是因为考虑 X 的开覆盖 $\{B(x, 1/n) : x \in X\}$, 由于 X 是紧的, 取有限子覆盖 $\{B(x_i, 1/n)\}_{i=1}^{k_n}$, 并取这一开覆盖下的单位分解 $\sum_{i=1}^{k_n} f_i = 1$. 定义

$$\alpha_n : C(X) \to \mathbb{C}^{\oplus k_n}, \qquad f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_{k_n})),$$

和

$$\beta_n : \mathbb{C}^{\oplus k_n} \to C(X), \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_n}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i.$$

则 $n\to\infty$ 时有 $\beta_n\alpha_n\to \mathrm{id}$, 而 $\mathbb{C}^{\oplus k_n}$ 是有限维的 C^* 代数, 于是这就构造出了 i_n. 这说明 $C(X)$ 具有 cpap, 从而是核 C^* 代数.

离散群的顺从性与其约化群代数的核性质通过下面的结论联系起来. 我们只考虑 G 可数的情形, 但实际上对任何离散群 G 都成立.

定理 3.6.4　设 G 是可数离散群, 则 G 顺从当且仅当 $C_r^*(G)$ 是核 C^* 代数.

证明　*必要性*. 设 G 是顺从群, 取其 Følner 序列 $(F_n)_{n\geqslant 1}$, 那么 $\ell^2(F_n)$ 是 $\ell^2(G)$ 的有限维子空间. 定义

$$\alpha_n : C_r^*(G)\to \mathcal{B}(\ell^2(F_n)), \qquad f\mapsto p_nfp_n,$$

其中 $p_n:\ell^2(G)\to\ell^2(F_n)$ 是正交投影算子. 再定义

$$\beta_n:\mathcal{B}(\ell^2(F_n))\to C_r^*(G), \qquad T\mapsto \frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in G} g^{-1}Tg.$$

那么 Følner 条件保证了 $n\to\infty$ 时 $i_n=\beta_n\alpha_n$ 逐点收敛到 id, 于是 $C_r^*(G)$ 具有 cpap, 从而是核 C^* 代数.

充分性. 由于 G 是可数离散群, 于是 $C_r^*(G)$ 是可分的单位 C^* 代数, 因此具有 cpap. 即存在有限秩的完全正映射 $i_n: C_r^*(G)\to\mathcal{B}(H_n)\to C_r^*(G)$ 使得 $i_n\to\mathrm{id}$ 逐点收敛, 其中 H_n 是有限维的 Hilbert 空间. 注意到有限秩的完全正映射 $\varphi: C_r^*(G)\to\mathcal{B}(H_n)$ 可以一一对应到

$$\psi: t\mapsto \langle\delta_1, \varphi(\lambda(t)\lambda(t)^*)\delta_1\rangle\in\mathbb{C}G.$$

因此只需找到一列有限支撑的正定函数逼近即可. 存在 $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{B}(C_r^*(G)), g_1,\ldots,g_n\in C_r^*(G)$ 使得对任意 $x\in C_r^*(G), \varphi(x)=\sum_{i=1}^n f_i(h)g_i$. 对应地

$$t\mapsto\langle\delta_1, g_i\lambda(t)^*\delta_1\rangle=\langle\delta_t, g_i\lambda(t)^*\rangle\in\ell^2(G).$$

于是 $\psi\in\ell^2(G)$, 因此存在 $\xi\in\ell^2(G)$ 使得

$$\forall x\in G\,(\psi(x)=\langle\xi,\lambda(x)\xi\rangle).$$

而 $\xi\in\ell^2(G)$ 可以被有限支撑的函数在 2-范数下逼近, 于是 ψ 可以被有限支撑的正定函数逼近. 因此 ψ 可以延拓成为 $\mathcal{B}(\ell^2(G))\to\mathcal{B}(H_n)$ 的完全正映射.

由 Banach–Alaoglu 定理可知 $\tau_n : \mathcal{B}(\ell^2(G)) \xrightarrow{\varphi_n} C_r^*(G) \xrightarrow{\tau_0} \mathbb{C}$ 存在聚点 τ, 其中 $\tau_0 : g\mapsto \langle[1], g([1])\rangle$ 是一个迹. 因此 $\ell^\infty(G)$ 作为 $\mathcal{B}(\ell^2(G))$ 的子空间, τ 在其上的限制 m 即为所求的左不变平均, 这就说明 G 是顺从的. □

3.7　自由群 $\mathbb{F}_2$ 的群代数

上一节的讨论说明对离散群来说 $C^*(G)$ 与 $C_r^*(G)$ 同构. 由此而来的问题便是: 对非顺从的 G, $C^*(G)$ 和 $C_r^*(G)$ 有多大的不同?

我们知道自由群 $\mathbb{F}_2$ 是结构最简单的非顺从群. 由自由群的泛性质可知, 若 u,v 是 $\mathbb{F}_2$ 的生成元, 对任何至少含有 2 个元素 g,h 的群 G, 存在唯一群同态 $\alpha:F_2\to G$ 使得 $\alpha(u)=g, \alpha(v)=h$.

定理 3.7.1　设 A 是单位 C^* 代数, 且含有至少 2 个酉元 U,V, 则存在唯一的单位*–同态 $\rho: C^*(\mathbb{F}_2)\to A$ 使得

$$\rho(u)=U, \quad \rho(v)=V.$$

特别地, 对任何 $n \geqslant 1$, 存在满$\star$-同态 $\rho: C^*(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

证明 任取 $\pi: A \to \mathcal{B}(H)$ 是一个忠实表示, 由 $U, V \in \mathcal{U}(A)$ 可知 $\pi(U)$, $\pi(V) \in \mathcal{U}(H)$. 因此 $\mathcal{U}(H)$ 是一个至少含有 $\pi(U)$ 和 $\pi(V)$ 的群. 故存在唯一群同态 $\alpha: \mathbb{F}_2 \to \mathcal{U}(H)$ 使得

$$\alpha(u) = \pi(U), \quad \alpha(v) = \pi(V).$$

此时 $\alpha: \mathbb{F}_2 \to \mathcal{U}(H)$ 就给出了 $\mathbb{F}_2$ 的一个酉表示. 对 α 做线性延拓得到 $\beta_0: \mathbb{C}\mathbb{F}_2 \to \mathcal{B}(H)$ 是一个表示, 将 $\mathbb{C}\mathbb{F}_2$ 看作 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 的稠子集, 延拓得到的 $\beta: C^*(\mathbb{F}_2) \to \mathcal{B}(H)$ 就是 $C^*(F_2)$ 的一个表示.

$$\begin{array}{ccccc}
C^*(F_2) & \xrightarrow{\beta} & \beta(C^*(\mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & A \\
 & & \bigcup & & \\
 & & C^*(\pi(U), \pi(V)) & & \\
 & & \bigcup & & \\
 & & \pi(A) & \xleftarrow{\pi} & A
\end{array}$$

因此取 $\rho = \pi^{-1}\beta: C^*(\mathbb{F}_2) \to A$ 就满足条件. 特别地, 取

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)2\pi/n} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

则 $U, V \in \mathrm{U}(n)$, 并且 $C^*(U, V) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, 于是 $\rho: C^*(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 是满的. □

上述证明中的 H 是 n 维复 Hilbert 空间, 如果将其替换为可分的 Hilbert 空间, 我们仍然希望这样的表示存在且是满的, 并且希望它与 U, V 的选取无关. 由于 $\mathbb{F}_2$ 离散, $L^1(\mathbb{F}_2) = \ell^1(\mathbb{F}_2)$ 由 $\{\delta_g\}_{g \in \mathbb{F}_2}$ 生成. 因此 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 由 $\{\pi(g) : g \in \mathbb{F}_2\}$ 生成, 我们要求表示 π 是泛表示.

定义 3.7.2 (泛酉元对) 设 $U, V \in \mathcal{U}(H)$, 称 (U, V) 是一个**泛酉元对**, 若对任何酉元对 $U_1, V_1 \in \mathcal{U}(H_1)$,

$$U \mapsto U_1, \qquad V \mapsto V_1$$

可以延拓为一个 $C^*(U, V)$ 到 $C^*(U_1, V_1)$ 的 $\star$-同态.

命题 3.7.3 在 $\star$-同构的意义下, $C^*(\mathbb{F}_2)$ 可以看作泛酉元对生成的 C^* 代数.

证明 考虑一族泛酉元对 $\{(U_i, V_i)\}_{i \in \alpha}$, 再取

$$U_0 = \bigoplus_{i \in \alpha} U_i, \qquad V_0 = \bigoplus_{i \in \alpha} V_i,$$

因 $\mathbb{F}_2$ 是可数的, 故 $\ell_1(\mathbb{F}_2)$ 有可数稠子集, 于是 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 可分. 因此我们可以要求 (U_i, V_i) 取在固定的某一可分 Hilbert 空间 H 的酉元对, 并且 α 可数. 这因对任何可分代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$, 存在到可数维空间的投影 P 使得 $x \mapsto PxP$ 是 $\mathcal{A}$ 到 $P\mathcal{A}P \subset \mathcal{B}(PH)$ 的 $\star$-同构. 而泛酉元对的定义可以说明 $C^*(U, V)$ 在 $\star$-同构下的唯一性. □

因此对任何酉元对 (U, V), 若 $\pi: C^*(U_0, V_0) \to C^*(U, V)$ 满足 $\pi(U_0) = U$, $\pi(V_0) = V$, 则它给出一个 $\star$-同态.

我们下面要说明如下的事实: 对群 C^* 代数 $C^*(\mathbb{F}_2)$, 其上存在忠实不可约的表示 (意即这是一个本原 C^* 代数). 通过这一表示, 我们可以说明, $C^*(\mathbb{F}_2)$ 给出了一个具有以下不平凡的条件的实例:

- 一个不可约的 C^* 代数, 它不具有任何的非平凡投影;

- 一个不可约的 C^* 代数, 其上存在一列分离的有限维表示.

定理 3.7.4 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 没有非平凡投影.

证明 视 $C^*(\mathbb{F}_2)=C^*(U,V)$ 是泛酉元对 $U,V\in\mathcal{U}(H)$ 生成的 C^* 代数, H 是可分 Hilbert 空间. 取

$$A=\{\varPhi\in C([0,1],\mathcal{B}(H)):\varPhi(0)\in\mathbb{C}\mathrm{id}\},$$

断言 A 是一个没有非平凡投影的 C^* 代数. 否则, 设 $\varPhi$ 是一个投影, 那么由 A 的定义可知 $\varPhi(0)=0$ 或者 $\varPhi(0)=\mathrm{id}$. 因 $\varPhi$ 是连续的, 于是 $(\varPhi(t))_{0\leqslant t\leqslant 1}$ 必须或者都是 0, 或者都是 id.

如果我们说明 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 可以作为一个 C^* 子代数被嵌入 A 中, 那么 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 就也没有非平凡投影. 由谱定理可知存在自伴算子 $T,S\in\mathcal{B}(H)$ 使得 $U=\exp(\mathrm{i}T)$, $V=\exp(\mathrm{i}S)$, 于是在 A 中可以定义两个酉算子

$$\varPhi_U(t)=\exp(\mathrm{i}tT),\qquad \varPhi_V(t)=\exp(\mathrm{i}tS).$$

此时赋值映射 $\mathrm{ev}_1:\varPhi\mapsto\varPhi(1)$ 给出 $C^*(\varPhi_U,\varPhi_V)$ 到 $C^*(U,V)=C^*(\mathbb{F}_2)$ 的 $\star$–同态. 反过来, 因为 (U,V) 是泛酉元对, 于是

$$\pi:C^*(\mathbb{F}_2)\to C^*(\varPhi_U,\varPhi_V),\qquad U\mapsto\varPhi_U,\ V\mapsto\varPhi_V$$

又给出了 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 到 $C^*(\varPhi_U,\varPhi_V)$ 的 $\star$–同态. 于是它们都是 $\star$–同构, 这说明 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 可以通过 π 嵌入到 A 中. □

推论 3.7.5 若 $\pi:C^*(\mathbb{F}_2)\to\mathcal{B}(H)$ 是一个忠实表示, 则 $\pi(C^*(\mathbb{F}_2))$ 不包含非零的紧算子.

证明 若 $K\neq 0$, $K\in\mathcal{K}(H)$ 在 $\pi(C^*(\mathbb{F}_2))$ 中, 则 $K^*K\in\pi(C^*(\mathbb{F}_2))$. 而 K^*K 是一个有限秩的谱投影, 而 $\pi(C^*(\mathbb{F}_2))\cong C^*(\mathbb{F}_2)$ 不存在非平凡投影, 矛盾. □

一方面, 我们可以说明在以上构造中的每一个 (U_i,V_i) 都可以取成有限维空间上的酉算子, 即酉矩阵. 另一方面, 存在一个万有酉元对使得它们存在非平凡的公共约化子空间, 这诱导出 2 个 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 的表示.

先来处理第一种情形:

命题 3.7.6 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 存在一列分离的有限维表示.

证明 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 可分, 设 U,V 是可分 Hilbert 空间上的泛酉元对, 那么命题 3.7.3 说明 $C^*(\mathbb{F}_2)\cong C^*(U,V)$. 取 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有限秩投影 $(P_n)_{n\geqslant 1}$, 满足 $\textsc{sot}\text{–}\lim_{n\to\infty}P_n=\mathrm{id}$, 再记 $A_n=P_nUP_n$, $B_n=P_nVP_n$, 则在 $H_n=P_nH\oplus P_nH$ 上, 记 $I_n=\mathrm{id}_{P_nH}$

$$U_n=\begin{bmatrix}A_n & (I_n-A_nA_n^*)^{1/2}\\ (I_n-A_n^*A_n)^{1/2} & -A_n^*\end{bmatrix},\ V_n=\begin{bmatrix}B_n & (I_n-B_nB_n^*)^{1/2}\\ (I_n-B_n^*B_n)^{1/2} & -B_n^*\end{bmatrix}.$$

那么注意到 A_n 和 B_n 都只是相当于 U 和 V 分别把定义域和值域都限制在 P_nH 上得到的算子, 从而仍是酉算子. 因此 $U_n,V_n\in\mathcal{U}(H_n)$. 并且由 P_n 有限秩可知 H_n 有限维. 因此,

$$\pi_n:C^*(\mathbb{F}_2)\to\mathcal{B}(H_n),\qquad U\mapsto U_n,\quad V\mapsto V_n$$

是一个有限维表示.

令 $\pi=\bigoplus_{n\geqslant 1}\pi_n$, 则有

$$\underset{n\to\infty}{\textsc{sot}\text{–}\lim}\,U_n=\operatorname{diag}\{U,-U^*\},\qquad \underset{n\to\infty}{\textsc{sot}\text{–}\lim}\,V_n=\operatorname{diag}\{V,-V^*\}.$$

若记 $F(\cdot,\cdot)$ 是 2 个字生成的词的某个有限线性组合, 那么

$$\operatorname*{SOT-lim}_{n\to\infty} F(U_n,V_n)=\operatorname{diag}\{F(U,V),F(-U^*,-V^*)\}.$$

因此对 $\|F(U,V)\|=1$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 使得 $\|F(U_n,V_n)\|\geqslant 1-\varepsilon$, 因此

$$\|\pi(F(U,V))\|\geqslant\|\pi_n(F(U,V))\|=\|F(U_n,V_n)\|\geqslant 1-\varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知 π 限制在 $\{F(U,V)\}$ 上是等距, 而 $\{F(U,V)\}=\mathbb{C}\mathbb{F}_2$ 是 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 的稠子集, 于是 π 可以延拓到 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 上且仍是一个等距, 从而忠实. 这即 $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$ 是一列分离的有限维表示. □

定义 3.7.7 (准对角) 称 C^* 代数 $\mathcal{A}$ 是**准对角**的, 若存在忠实表示 π 和一列满足 $\operatorname{SOT-lim}_{n\to\infty}P_n=\operatorname{id}$ 的递增有限秩投影 $(P_n)_{n\geqslant 1}$, 使得对任意 $A\in\mathcal{A}$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n\pi(A)-\pi(A)P_n\|=0.$$

于是由定义立刻得到 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 是准对角的 C^* 代数.

推论 3.7.8 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 上存在忠实的迹.

证明 在命题 3.7.6 中我们可以选取这样的一列 $(P_n)_{n\geqslant 1}$ 使得 $\operatorname{rank}P_n=n$. 此时 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 可以依照证明的方法嵌入到 $\bigoplus_{n\geqslant 1}\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$ 中. 令 τ_{2n} 是 $\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$ 上忠实的迹, 定义

$$\tau(A)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau_{2n}(\pi_n(A))}{2^n},$$

则 τ 是 $\bigoplus_{n\geqslant 1}\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$ 上的忠实的迹. □

下面再来处理第二种情形: 我们约定 H 是一个可分 Hilbert 空间, $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 的一组规范正交基.

引理 3.7.9 将 $T\in\mathcal{B}(H)$ 看作是无限阶的矩阵. 那么

(1) 若 T 是对角的, 且对角线上的元素互异, S 的第一列元素均非零, 则 T, S 没有非平凡公共约化子空间;

(2) 设 $U\in\mathcal{U}(H)$, 则存在紧算子 $K\in\mathcal{K}(H)$ 和对角算子 $D\in\mathcal{U}(H)$ 使得 $U=D+K$, 且 D 作为无限矩阵, 对角线上的元素互异;

(3) 设 $U\in\mathcal{U}(H)$, 则存在 $K\in\mathcal{K}(H)$ 使得 $U-K$ 作为无限矩阵, 第一列元素均非零.

证明 (1) 注意到 $\{T\}'$ 就是对角算子全体, 而 $\{S\}'=\mathbb{C}\operatorname{id}$, 因此若投影 $P\in\{T\}'\cap\{S\}'$, 就只能 $P=0$ 或者 $P=\operatorname{id}$, 即 T, S 没有非平凡的公共约化子空间.

(2) 由 Weyl–von Neumann–Berg 定理可知存在 $K_0\in\mathcal{K}(H)$ 和对角算子 D_0 使得 $U_0=D_0+K_0$. 设 $D=\operatorname{diag}\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots\}$, 因为 U 是酉算子, 故 $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n|=1$. 取一列 $(\beta_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{C}$ 使得

$$|\beta_n|=1,\quad i\neq j\implies\beta_i\neq\beta_j,\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n-\beta_n=0,$$

再记 $D=\operatorname{diag}\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\ldots\}$. 那么 $D_0-D\in\mathcal{K}(H)$ 还是对角算子, 令 $K=K_0+D_0-D\in\mathcal{K}(H)$, 就有 $U=D+K$ 满足条件.

(3) 设 $v=\sum_{n\geqslant 1}\alpha_ne_n$ 使得 $\|v\|=1$ 且对任意 $n\geqslant 1$, 有 $\alpha_n\neq 0$. 再记 $\mathcal{S}=\operatorname{span}\{v,Ue_1\}$, 取 $V\in\mathcal{U}(H)$ 使得

$$V(\mathcal{S})=\mathcal{S},\quad V|_{\mathcal{S}^\perp}=\operatorname{id}_{\mathcal{S}^\perp},\quad V(Ue_1)=v,$$

则 $\operatorname{rank}(V-\mathrm{id})\leqslant 2$, 且 VU 的第一列就是 v, 这即 VU 第一列元素均非零. 因此

$$VU=U+(V-\mathrm{id})U=U-K$$

满足条件. □

定理 3.7.10　$C^*(\mathbb{F}_2)$ 存在忠实的不可约表示 (我们称这样的 C^* 代数为**本原 C^* 代数**).

证明　设 $C^*(\mathbb{F}_2)=C^*(U,V)$, 其中 $U,V\in\mathcal{U}(H)$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的万有酉元对. 则引理 3.7.9 (2) 和 (3) 给出以下的分解:

$$U=U_0+K_U,\qquad V=V_0+K_V,$$

其中 $U_0\in\mathcal{U}(H)$ 是一个对角线元素互异的对角算子, $V_0\in\mathcal{U}(H)$ 是一个第一列元素均非零的酉算子, $K_U,K_V\in\mathcal{K}(H)$. 则

$$\pi:C^*(\mathbb{F}_2)\to C^*(U_0,V_0)\subset\mathcal{B}(H),\qquad U\mapsto U_0,\ V\mapsto V_0$$

确定了一个 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 的表示. 由引理 3.7.9 (1) 可知 U_0,V_0 无非平凡公共约化子空间, 这即 $C^*(U_0,V_0)$ 不可约, 于是 π 是一个不可约表示.

我们还需要证明如此定义的 π 是忠实的. 记 $\eta:\mathcal{B}(H)\twoheadrightarrow\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是自然射影, 那么

$$\eta(C^*(U_0,V_0))=C^*(\eta(U_0,V_0))=C^*(\eta(U),\eta(V)),$$

由推论 3.7.5 可知 $\pi(C^*(\mathbb{F}_2))$ 不存在非零紧算子, 于是 η 限制到 $C^*(U_0,V_0)$ 上是一个$*$-同构. 因此以下的复合

$$C^*(\mathbb{F}_2)\xrightarrow{\pi}C^*(U_0,V_0)\xrightarrow{\eta}C^*(\eta(U),\eta(V))\cong C^*(U,V)=C^*(\mathbb{F}_2)$$

给出 $\mathrm{id}_{C^*(\mathbb{F}_2)}$. 这即 π 是一个 $*$-同构, 因此它是忠实的. □

至此我们对 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 的结构已经讨论的足够多了, 下面将目光放在 $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ 上. 首先, $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ 是单模的, 这因 $\mathbb{F}_2$ 离散. 下面明确 $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{F}_2))$ 上的左正则表示. 注意到 $\{\delta_g\}_{g\in\mathbb{F}_2}$ 给出 $\ell^2(F_2)$ 的正交基, 对 $s\in\mathbb{F}_2$, 左正则表示由

$$\lambda(s)\delta_g(t)=\delta_g(s^{-1}t)=\delta_{sg}(t),\qquad\forall t\in\mathbb{F}_2$$

确定. 因此 $\lambda(s)\delta_g=\delta_{sg}$, 注意到 $\lambda(s)$ 就是对 $\ell^2(\mathbb{F}_2)$ 正交基的一个置换, 因此它如下诱导 $\pi_\lambda:\sum_{g\in\mathbb{F}_2}a_g g\mapsto\sum_{g\in\mathbb{F}_2}a_g\lambda(g)$ 是一个酉表示.

下面我们主要通过这几个方面来探讨 $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ 与 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 的不同.

	$C^*(\mathbb{F}_2)$	$C^*_r(\mathbb{F}_2)$
表示	存在一列分离的有限维表示	不存在有限维表示
投影	不存在非平凡投影	不存在非平凡投影
迹	存在忠实的迹	有唯一的迹
准对角性	准对角	不准对角

命题 3.7.11　若 G 是离散的, 则 $C^*_r(G)$ 上的迹 $\tau(c)=\langle c\delta_1,\delta_1\rangle$ 是忠实的.

证明 我们将 $C_r^*(G)$ 和 $\pi_\lambda(C_r^*(G))$ 等同起来. 首先容易验证 τ 的确是 $C_r^*(G)$ 上的迹, 只需验证对 $a = \sum_{g\in G} a_g\delta_g, b = \sum_{h\in G} b_h\delta_h, a, b \in \mathbb{C}\mathbb{F}_2$, 有

$$\tau(a * b) = \tau\Big(\sum_{g,h\in G} a_g b_h \delta_{gh}\Big) = \Big\langle\Big(\sum_{g,h\in G} a_g b_h 1_{gh}\Big)\delta_1, \delta_1\Big\rangle = \sum_{gh=1} a_g b_h,$$

对 $\tau(b * a)$, 交换上式的 g 和 h 得到相同的结果.

其次要验证 τ 是忠实的. 那么对使得 $\tau(c^*c) = 0$ 的 $c \in C_r^*(G)$, 任取 $g \in G$ 都有

$$\begin{aligned}\|c\delta_g\|^2 = \langle c\delta_g, c\delta_g\rangle &= \langle c\lambda(g)\delta_1, c\lambda(g)\delta_1\rangle \\ &= \tau(\lambda(g)^* c^* c\lambda(g)) = \tau(\lambda(g)\lambda(g)^* c^* c) = \tau(c^*c) = 0,\end{aligned}$$

由 g 的任意性和 $\{\delta_g\}_{g\in G}$ 是 $C_r^*(G)$ 的正交基可知 $c = 0$. □

在以上命题中令 $G = \mathbb{F}_2$, 便得到了 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 上的一个忠实的迹, 并且此时 $\Phi(c) = \tau(c)\mathrm{id}$ 给出一个正的, 保持单位且幂等的映射 (称这样的映射是一个**期望**).

为了说明命题 3.7.11 中给出的迹是唯一的, 我们需要一些技术性的引理. 不严格地说, 下面的引理相当于对 c 做了某种 "平均" 来大大减少它的范数.

引理 3.7.12 设 $H = M \oplus M^\perp, c \in \mathcal{B}(H)$ 在如此的分块下具有 $\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}$ 的形式, $\{u_i\}_{i=1}^n$ 是一族酉算子, 使得 $i \neq j$ 时 $u_i^* u_j$ 在如此的分块下具有 $\begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$ 的形式. 那么

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i c u_i^*\right\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\|c\|.$$

证明 首先设 $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$. 若 $d = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $c^*d = d^*c = 0$. 于是

$$\|c + d\|^2 = \|(c+d)^*(c+d)\| = \|c^*c + d^*d\| \leqslant \|c^*c\| + \|d^*d\| = \|c\|^2 + \|d\|^2.$$

对 $k > 1$ 定义

$$d_k = (u_1^* u_k)c(u_1^* u_k)^* = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对 c 和 d_k 应用前面的范数不等式得到

$$\left\|\sum_{k=1}^n u_k c u_k^*\right\|^2 = \left\|u_1\Big(\sum_{k=2}^n (u_1 u_k)c(u_1^* u_k)^*\Big)u_1^*\right\|^2 \leqslant \|c\|^2 + \left\|\sum_{k=2}^n d_k\right\|^2.$$

对 $\sum_{k=2}^n d_k^2$, 把 u_2 和 u_2^* 拆分出来重复上述步骤, 归纳地得到

$$\left\|\sum_{k=1} u_k c u_k^*\right\|^2 \leqslant n\|c\|^2 \implies \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1} u_k c u_k^*\right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\|c\|.$$

若 $c = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$, 取共轭对 c^* 作范数估计即可, 方法与第一种情形完全相同. 若 $c = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}$, 则将 c 拆分成 $c = p_M c + p_{M^\perp} c$, 此时可以分别对 $p_M c$ 和 $p_{M^\perp} c$ 做上述的范数估计, 得到

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k c u_k^*\right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\|p_M c\| + \frac{1}{\sqrt{n}}\|p_{M^\perp} c\| = \frac{2}{\sqrt{n}}\|c\|,$$

得证. □

那么对 $\mathbb{F}_2$ 中的元素 s(总假设 s 是既约的), 总可以 $\mathbb{F}_2$ 做如下的分类: 将以 $u^{\pm 1}$ 开头的划为一类, 以 $v^{\pm 1}$ 开头的划为一类, 单位元 1 划给其中的任意一类均可. 那么对应到 Hilbert 空间 $\ell^2(\mathbb{F}_2)$ 上, 就可以把 H 做如下的拆分:

$$M = \operatorname{span}\left\{1_s : s = e \text{ 或 } s = u^{\pm 1}t\right\}, \quad M^{\perp} = \operatorname{span}\left\{1_s : s = v^{\pm 1}t\right\}.$$

此时 $H = M \oplus M^{\perp}$.

推论 3.7.13　对 $s \in \mathbb{F}_2$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(s)\lambda(u^{-i}) = \begin{cases} \lambda(s), & s = u^k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明　$s = u^k$ 的情形是显然的, 这因 $\lambda(u^i)\lambda(s)\lambda(u^{-i}) = \lambda(s)$.

否则, 若 s 不是 u 的幂次, 则存在 s_0 以 $v^{\pm 1}$ 开头和结尾, 使得 $s = u^k s_0 u^{\ell}$. 那么拆分 $H = M \oplus M^{\perp}$ 使得 $\lambda(s_0)M \subset M^{\perp}$, $\lambda(u)M^{\perp} \subset M$. 取 $c = \lambda(s_0)$, $u_i = \lambda(u^i)$, 那么在这样的分块下就有

$$c = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}, \qquad u_i^* u_j = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix},$$

应用引理 3.7.12 就得到

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \lambda(u^k) c \lambda(u^{\ell}) u_i^* \right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \|\lambda(u^k)\|\,\|c\|\,\|\lambda(u^{\ell})\| = 0,$$

这即 s 不是 u 的幂次时 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(s)\lambda(u^{-i}) = 0$. □

定理 3.7.14　对 $c \in C_r^*(\mathbb{F}_2)$, 成立

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i v^j) c \lambda(v^{-j}u^{-i}) = \Phi(c).$$

由此, $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 是单代数, 它没有有限维表示.

证明　因 $\mathbb{C}\mathbb{F}_2$ 在 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 中稠, 只需对 $\mathbb{C}\mathbb{F}_2$ 中的元素进行讨论. 进一步, 由线性可知只需验证 $c = \delta_s$ 的情形.

情形 1. 若 $s = 1$, 命题显然成立.

情形 2. 若 $s = v^k$, $k \in \mathbb{Z}^{\times}$, 则对任何 $\ell \in \mathbb{Z}$, $\lambda(s)$ 与 $\lambda(v^{\ell})$ 可交换. 故

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i v^j) c \lambda(v^{-j}u^{-i}) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(s)\lambda(u^{-i}) = 0.$$

情形 3. 若 $s \neq v^k$, $k \in \mathbb{Z}$. 由推论 3.7.13 可知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \geqslant 0$ 使得 $n \geqslant n_0$ 时有

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda(v^j)\lambda(s)\lambda(v^{-j}) \right\| < \varepsilon.$$

于是对任意 $i \geqslant 1$ 就有

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(v^j)\lambda(s)\lambda(v^{-j})\lambda(u^{-i}) \right\| < \varepsilon,$$

这即

$$\left\| \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(v^j)\lambda(s)\lambda(v^{-j})\lambda(u^{-i}) \right\| < \varepsilon.$$

得证.

设 $I\neq 0$ 且 $I\lhd C_r^*(\mathbb{F}_2)$, 取 $c\neq 0, c\in I$, 则 $c^*c\in I$. 因 τ 忠实, 有 $\tau(c^*c)>0$, 故 $\Phi(c^*c)>0$. 因此由 c 生成的理想应当包含

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda(u^iv^j)c^*c\lambda(v^{-j}u^{-i})=\Phi(c^*c)=\tau(c^*c)\mathrm{id}.$$

故 $I=C_r^*(\mathbb{F}_2)$. 于是 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 是单的. □

对之前讨论的 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), u, v$ 如之前所述, 则对 $c\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, 也成立

$$\mathrm{tr}\, c\cdot 1_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v^ju^icu^{-i}v^{-j},$$

其中 tr 是 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 上典范的迹.

于是我们立刻得到:

推论 3.7.15 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 与 $C^*(\mathbb{F}_2)$ 不同构.

这因前者是单的但后者不是.

推论 3.7.16 在 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 上的迹是唯一的.

证明 设 φ 是 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 上的另一个迹, 则由 $\varphi(\mathrm{id})=1$ 可知对 $c\in C_r^*(\mathbb{F}_2)$.

$$\varphi(c)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi\Big(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda(u^iv^j)c\lambda(v^{-j}u^{-i})\Big)=\varphi(\tau(c)\mathrm{id})=\tau(c).$$

故 $\varphi=\tau$. □

下面考虑准对角性和顺从性之间的关系:

定理 3.7.17 设 G 是可数离散群, $C_r^*(G)$ 准对角, 则 G 是顺从的.

证明 视 $\ell^\infty(G)$ 乘法左作用于 $\ell^2(G)$ 上:

$$M_fx(s):=f(s)x(s),\qquad s\in G,\ f\in\ell_\infty(G),\ x\in\ell_2(G).$$

考虑 $\lambda(t)M_f\lambda(t)^*$. 计算得到

$$\lambda(t)M_f\lambda(t)^*x(s)=(M_f\lambda(t)^*x)(t^{-1}s)=f(t^{-1}s)(\lambda(t)^*x)(t^{-1}s)=f(t^{-1}s)x(s),$$

令 $f_t(s)=f(t^{-1}s)$ 是 f 的平移, 则 $\lambda(t)M_f\lambda(t)^*=M_{f_t}$.

记 $d_n=\mathrm{rank}\, p_n$, 取 $\mathbb{N}$ 的一个自由的超滤子 $\mathcal{U}$, 定义 $\ell_\infty(G)$ 上的一个态

$$m(f):=\lim_{\mathcal{U}}d_n^{-1}\,\mathrm{tr}(p_nM_fp_n),$$

其中 tr 是典范迹, 这因 p_n 有限秩, $p_nM_fp_n\in\mathrm{Mat}_{d_n}(\mathbb{C})$. 那么

$$\begin{aligned}|m(f_t)-m(f)|&=\lim_{\mathcal{U}}d_n^{-1}\,|\mathrm{tr}(p_n\lambda(t)M_f\lambda(t)^*p_n)-\mathrm{tr}(p_nM_fp_n)|\\&=\lim_{\mathcal{U}}d_n^{-1}\,|\mathrm{tr}(p_n\lambda(t)M_f\lambda(t)^*p_n)-\mathrm{tr}(\lambda(t)p_nM_fp_n\lambda(t)^*)|\\&=\lim_{\mathcal{U}}d_n^{-1}\,|\mathrm{tr}((p_n\lambda(t)-\lambda(t)p_n)M_f\lambda(t)^*p_n)-\mathrm{tr}(\lambda(t)p_nM_f(p_n\lambda(t)-\lambda(t)p_n))|\\&\leqslant 2\lim_{\mathcal{U}}\|p_n\lambda(t)-\lambda(t)p_m\|\,\|f\|_\infty\\&=0\end{aligned}$$

这即 m 是一个左不变平均, 于是 G 是顺从的. □

于是因为 $\mathbb{F}_2$ 并非顺从群, 我们有:

推论 3.7.18 $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ 不是准对角的.

3.8 Kazhdan 性质 (T)

性质 (T) 是 1967 年被 Kazhdan 引入的, 其目的是为了证明 Siegel 提出的猜想: 所有半单 Lie 群中的格都是有限生成的. 自此之后, 性质 (T) 被发现在动力系统, 遍历论, 泛函分析和 von Neumann 代数等多个方面具有重要作用.

Gromov 在 1993 年提出 a-T-顺从性 (*a-T-menability*) 的概念, 这源于 amenability 和 Property (T) 的结合: 这是一种更弱的类似于顺从性的性质. A-T-顺从性也在算子代数的其他近似性质中出现, 例如 Akemann 和 Walter 提出的 Haagerup 性质, 或是 Bergelson 和 Rosenblatt 提出的性质 C_0. 我们将会看到 a-T-顺从群包含了所有的顺从群, 自由群和 Baumslag-Solitar 群.

定义 3.8.1 (仿射等距)　设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $U : X \to X$ 是线性映射. 若它是满的, 且满足

$$\forall x \in X\,(\|Ux\| = \|x\|),$$

则称 U 是一个**线性等距**. 记 $\mathrm{Isom}(X)$ 是 X 上的线性等距全体.

若映射 $T : X \to X$ 满足: 存在 $U \in \mathrm{Isom}(X)$ 和 $y \in X$ 使得 $\forall x \in X\,(Tx = Ux + y)$, 则称 T 是 X 上的一个**仿射等距**. 记 $\mathrm{Aff}(X)$ 是 X 上的仿射等距全体.

定义 3.8.2 (等距表示)　设 G 是一个群, X 是赋范线性空间. 若表示 $\pi : G \to \mathrm{Isom}(X)$, 则称 π 是一个**等距表示**. 特别地, 若 X 是 Hilbert 空间, 等距表示就是酉表示.

在 $\mathbb{R}$-线性空间上我们有以下的 Mazur–Ulam 定理成立: 它说明赋范 $\mathbb{R}$-线性空间上的等距满射一定是仿射等距.

定理 3.8.3 (Mazur–Ulam)　设 X 是赋范 $\mathbb{R}$-线性空间, $f : X \to X$ 是一个满射, 若对任意 $x, y \in X$ 都有 $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, 那么 f 是仿射等距.

我们省略它的证明. 这一结论对赋范 $\mathbb{C}$-线性空间是不成立的, 因为 $z \mapsto \bar{z}$ 明显是一个等距满射, 但它不可能是仿射等距, 这因它不是线性映射.

设 G 是一个群, X 是一个赋范线性空间. 若存在同态 $T : G \to \mathrm{Aff}(X)$, 则称 G 通过仿射等距作用于 X. 于是同态 $T : G \to \mathrm{Aff}(X)$ 可以写成

$$T_g x = \pi_g x + b_g, \qquad \forall g \in G,\ \forall x \in X, \tag{3.8.1}$$

其中 T 对应到两个映射: 等距表示 $\pi : G \to \mathrm{Isom}(X)$ 和 $b : G \to X$.

引理 3.8.4　设 $T : G \to \mathrm{Aff}(X)$ 是一个满足 (3.8.1) 的映射, π 和 b 是上述讨论中对应到的映射. 那么 T 是同态当且仅当 π 是同态, 且 b 满足以下的上闭链条件:

$$\forall g, h \in G\,(b_{gh} = \pi_g b_h + b_g).$$

此时称 b 是 π 的一个**上闭链**.

例如: 考虑 $\pi : G \to \mathrm{Isom}(X)$ 是一个同态, 固定 $x_0 \in X$, 再定义

$$b : G \to X, \qquad g \mapsto b_g = \pi_g x_0 - x_0,$$

那么 b 是 π 的一个上闭链. 我们称形如 $b_g = \pi_g x_0 - x_0$ 的上闭链为一个**上边缘链**.

定义–命题 3.8.5 (度量恰当)　设 G 是可数离散群, 它通过仿射等距作用在赋范空间 X 上, 且 $b : G \to E$ 是对应的上闭链. 若它满足以下的等价条件之一:

(1) $\lim_{g\to\infty}\|b_g\| = +\infty$;

(2) 对任意 $x\in X$, $\lim_{g\to\infty}\|T_gx\| = +\infty$;

(3) 存在 $x\in X$ 使得 $\lim_{g\to\infty}\|T_gx\| = +\infty$.

则称 π 是**度量恰当**的. 此处 $g\to\infty$ 是将 ∞ 的开邻域看作 $\{G\setminus F : F\in \operatorname{fin} G\}$.

证明 (1) ⇒ (2): 这是因为

$$\|T_gx\| = \|\pi_g x + b_g\| \geqslant |\|b_g\| - \|\pi_g x\|| = |\|b_g\| - \|x\||,$$

由 $\|b_g\|\to\infty$ 可知成立.

(2) ⇒ (3) 显然.

(3) ⇒ (1): 这是因为

$$\|T_gx\| = \|\pi_g x + b_g\| \leqslant \|\pi_g x\| + \|b_g\| = \|x\| + \|b_g\|,$$

由 $\|T_gx\|\to\infty$ 可知 $\|b_g\|\to\infty$. □

定义 3.8.6 (a-T-顺从性) 设 G 是可数离散群, 若存在 Hilbert 空间 H 和度量恰当的仿射等距作用 $G\curvearrowright \operatorname{Aff}(H)$, 则称 G 是 **a-T-顺从**的.

需要注意的是, 度量恰当作用便要求了 G 是可数群. 对一般的群 G, 其 a-T-顺从性的定义是其任何可数子群都是 a-T-顺从的. 这一定义与通过任何有限生成子群均 a-T-顺从等价, 但这一结果并不平凡. 更进一步的证明参见 [CCJ].

例 3.8.7 考虑 $\mathbb{Z}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的平移作用: $\forall(z_1,z_2,\dots,z_n)\in\mathbb{Z}^n, \forall(v_1,v_2,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$T_{(z_1,z_2,\dots,z_n)}(v_1,v_2,\dots,v_n) := (z_1+v_1, z_2+v_2,\dots,z_n+v_n).$$

上述作用是度量恰当的, 于是 $\mathbb{Z}^n$ 是 a-T-顺从的.

定理 3.8.8 设 G 是可数离散群, 则 G 是 a-T-顺从的.

证明 取一列递增的有限对称子集 $E_0\subset E_1\subset\cdots\subset G$, 使得 $\bigcup_{n\geqslant 0}E_n = G$ 且 $E_n\cdot E_m\subset E_{n+m}$. 由 Hulanicki–Reiter 条件 (ℓ^2 版本), 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在有限支撑的 $f_n\in\ell^2(G)_{1,+}$, 使得

$$\forall\gamma\in E_n\left(\|f_n-\gamma\cdot f_n\|_2\leqslant\frac{1}{2^n}\right).$$

取 $H=\bigoplus_{n\geqslant 1}\ell^2(G)$, 定义表示 $\pi: G\to\mathcal{U}(H)$, $g\mapsto\pi_g=\bigoplus_{n\geqslant 1}\lambda_g$, 其中 λ 是左正则表示. 取 $b_g=\bigoplus_{n\geqslant 1}(\lambda_g f_n - f_n)$.

那么, b 是良定义的: 这是因为对任意 $g\in G$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 是最小的满足 $g\in E_n$ 的指标, 那么

$$\|b_g\|^2 = \sum_{n\geqslant 1}\|\lambda_g f_n - f_n\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\|\lambda_g f_n - f_n\|_2^2 + \sum_{n\geqslant N+1}\frac{1}{2^n} < +\infty,$$

于是 $b_g\in H$. 进一步, b 是上闭链, 这是因为对任意 $g,h\in G$ 都有

$$\begin{aligned} b_{gh} &= \bigoplus_{n\geqslant 1}(\lambda_{gh}f_n - f_n) = \bigoplus_{n\geqslant 1}(\lambda_g\lambda_h f_n - f_n) = \bigoplus_{n\geqslant 1}(\lambda_g\lambda_h - f_n - \lambda_g f_n + \lambda_g f_n - f_n) \\ &= \bigoplus_{n\geqslant 1}(\lambda_g(\lambda_h f_n - f_n) + (\lambda_g f_n - f_n)) = \bigoplus_{n\geqslant 1}\lambda_g(\lambda_h f_n - f_n) + \bigoplus_{n\geqslant 1}(\lambda_g f_n - f_n) = \pi_g b_h + b_g, \end{aligned}$$

这就说明了 b 是上闭链. 因此 $T_gx = \pi_g x + b_g$ 是一个通过仿射等距的作用.

再说明这一作用是度量恰当的. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $N_n \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $g \notin E_{N_n}$ 成立

$$\|\lambda_g f_n - f_n\| = \sqrt{2}.$$

不失一般性, 设 $(N_n)_{n\geqslant 1}$ 是递增序列. 令 $\varphi(g) := \max\{n \in \mathbb{N} : g \notin E_{N_n}\}$, 那么对任意 $g \in G$, 有

$$\|b_g\| = \sum_{n\geqslant 1} \|\lambda_g f_n - f_n\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\varphi(g)} 2 = 2\varphi(g).$$

而 $\lim_{g\to\infty} \varphi(g) = +\infty$, 这是因为每个 E_{N_n} 都是有限集, 于是对任意 $M > 0$ 总能找到 $m > M$, 此时 $F_m = \bigcup_{k=1}^{N_m-1} E_k$ 仍是有限集, 且对任意 $g \notin F_m$ 有

$$\varphi(g) = \max\{n \in \mathbb{N} : g \notin E_{N_n}\} \geqslant m > M,$$

于是由 M 的任意性可得. □

命题 3.8.9　自由群 $\mathbb{F}_n$ 在 $n \geqslant 2$ 时是 a-T-顺从的.

证明　以 $n = 2$ 的情形为例. 在 $\mathbb{F}_2$ 的 Cayley 图中, 以 $E_\pm$ 记图中有向边的全体, 其中边的方向如下定义: 若 (h, g) 中 h 落在 g 与 1 之间, 则称边 (h, g) 是正的; 否则称其是负的. (*换句话说, 在 Cayley 图中, 接近 1 的边是负的, 远离 1 的边是正的.*) 定义符号函数

$$\operatorname{sgn} : E_\pm \to \{\pm 1\}, \qquad a \mapsto \begin{cases} 1, & a \in E_+, \\ -1, & a \in E_-. \end{cases}$$

考虑 G 在 $E_\pm$ 上的左乘作用 $\pi : G \to \mathcal{U}(\ell^2(E_\pm))$, 并考虑

$$b : \mathbb{F}_2 \to \ell^2(E_\pm), \qquad g \mapsto \sum_{a\in 1\to g} \operatorname{sgn} a \cdot 1_a,$$

其中 $1 \to g$ 表示 Cayley 图上从 1 到 g 的路径, 1_a 表示 a 的特征函数.

b 是一个上闭链, 这是因为对任意 $g \in \mathbb{F}_2$, $a \in E_\pm$, 由定义可知 $\operatorname{sgn}(ga) = \operatorname{sgn} a$, 于是对任意 $g, h \in G$ 都有

$$\begin{aligned} b_{gh} = \sum_{a\in 1\to gh} \operatorname{sgn} a \cdot 1_a &= \sum_{a\in 1\to g} \operatorname{sgn} a 1_a + \sum_{c\in g\to gh} \operatorname{sgn} c 1_c \\ &= b_g + \sum_{c\in 1\to h} \operatorname{sgn}(gc) 1_{gc} = b_g + \sum_{b\to 1\to h} \operatorname{sgn} b \lambda_g 1_b = b_g + \pi_g b_h. \end{aligned}$$

并且注意到对任意 $R > 0$ 都有 $|\{g \in \mathbb{F}_2 : d(1, g) \leqslant R\}| < +\infty$, 于是作用 π 是在自由群的词度量下是度量恰当的. □

由离散群的 Hulanicki–Reiter 条件可知, 离散群 G 顺从当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 对任意有限集 $Q \subset G$, 存在 $f \in \ell^2(G)$ 使得 $\sup_{s\in Q} \|s \cdot f - f\|_2 < \varepsilon \|f\|_2$. 不严格地说, 顺从群可以容许一列具有几乎不变性质的函数.

定义 3.8.10　设 G 是顺从群, (H, π) 是 G 的酉表示, 称:

(1)　向量 $\xi \in H$ 是 G-**不变**的, 若对任意 $g \in G$ 都有 $\pi_g \xi = \xi$;

(2)　对 $\varepsilon > 0$ 和 $Q \subset G$, 向量 $\xi \in H$ 称作是 (Q, ε)-**不变**的, 若

$$\sup_{s\in Q} \|\pi_s \xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|.$$

(3)　称 π 具有**几乎不变向量**, 若对任意 $\varepsilon > 0$ 和有限集 $G \subset Q$, 都存在 (Q, ε)-不变的向量.

于是 G 顺从当且仅当 G 在 $\ell^2(G)$ 上的左正则表示具有几乎不变向量. π 具有几乎不变向量当且仅当存在 H 中的单位向量网 $(\xi_i)_{i\in I}$ 使得对任意 $g \in G$ 都有

$$\lim_{i\in I} \|\pi_g\xi_i - \xi_i\| = 0.$$

定义 3.8.11 (Kazhdan 性质 (T)) 设 G 是离散群, 若 G 的任意具有几乎不变向量的酉表示都具有非零的不变向量, 则称 G 具有 **Kazhdan 性质** (T), 或直接称它具有性质 (T).

这一术语中的 T 来自于 Trivial, 这是因为性质 (T) 的一种等价定义是说群 G 的平凡表示 1_G 在 $\widehat{G}$ 赋予 Fell 拓扑下是孤立点.

下面我们给出另一种性质 (T) 的刻画方式.

定义 3.8.12 (Kazhdan 对) 设 G 是离散群, $Q \subset G$, $\varepsilon > 0$. 若对于任意 G 的存在 (Q, ε)-不变向量的酉表示 π 都存在非零的 G-不变向量, 则称 (Q, ε) 是一个 **Kazhdan 对**.

若子集 $Q \subset G$ 满足存在 $\varepsilon > 0$ 使得 (Q, ε) 成为 Kazhdan 对, 则称 Q 是一个 **Kazhdan 集**.

命题 3.8.13 离散群 G 具有性质 (T) 当且仅当存在有限 Kazhdan 集.

证明 充分性是显然的, 只需要证明必要性, 也即对任意有限集 $Q \subset G$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在酉表示 (H, π) 使得它存在 (Q, ε)-不变向量, 但只有零向量是 G-不变向量.

设单位向量 $\xi \in H$ 使得对任意 $s \in Q$ 都有 $\|\pi_s\xi - \xi\| < \varepsilon$, 于是取一列递减到 0 的 $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 使得到一列酉表示 (H_n, π_n), 使得 π_n 只有零向量是 G-不变向量, 但对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在单位向量 $\xi_n \in H_n$ 使得 $\|(\pi_n)_g\xi_n - \xi_n\| < \varepsilon_n$. 令 $\pi = \bigoplus_{n\geqslant 1} \pi_n$, 这仍是一个酉表示, 且只有零向量是 G-不变向量. 但 π 存在几乎不变向量. □

命题 3.8.14 设 G 是离散群, 若 G 的酉表示 π 存在 $(G, \sqrt{2})$-不变向量, 则 π 存在非零的 G-不变向量. 特别地, 任何有限群都具有性质 (T).

证明 设 ξ 是 π 的 $(G, \sqrt{2})$-不变向量. 记 $K = \overline{\mathrm{co}}(\pi(G)\xi)$, 这是一个紧集. 因此存在 $\eta_0 \in K$ 使得 $\|\eta_0\| = \min\{\|\eta\| : \eta \in K\}$. 由于 K 是 G-不变的, 于是 η_0 也是 K 不变的.

断言 $\eta_0 \neq 0$. 取 $\varepsilon = \sqrt{2} - \sup_{x\in G} \|\pi_x\xi - \xi\| > 0$, 那么对任意 $x \in G$ 都有

$$2 - 2\mathrm{Re}\,\langle \pi_x\xi, \xi\rangle = \|\pi_x\xi - \xi\|^2 \leqslant (\sqrt{2} - \varepsilon)^2,$$

因此

$$\mathrm{Re}\,\langle \pi_x\xi, \xi\rangle \geqslant \frac{2 - (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}{2} = \frac{\varepsilon(2\sqrt{2} - \varepsilon)}{2} > 0.$$

因此对任意 $\eta \in K$ 都有 $\mathrm{Re}\,\langle \eta, \xi\rangle \geqslant \varepsilon(2\sqrt{2} - \varepsilon)/2 > 0$, 这就说明 $\eta_0 \neq 0$. □

推论 3.8.15 对离散群 G, 它顺从且具有性质 (T) 当且仅当它是有限群.

Kazhdan 最初的动机是希望描述那些有限生成, 且具有有限的 Abel 化群的性质.

命题 3.8.16 设 G 是离散群, Q 是有限 Kazhdan 集, $\varepsilon > 0$ 使得 (Q, ε) 成为一个 Kazhdan 对. 那么对任意 G 的酉表示 (H, π), 对任意 $\delta > 0$ 和 $(Q, \delta\varepsilon)$-不变向量 ξ, 都有

$$\|\xi - p\xi\| < \delta\,\|\xi\|,$$

其中 $p : H \to H^G$ 是正交投影, H^G 是 H 中 G-不变向量全体.

证明 将 $\xi \in H$ 经过正交分解写成 $\xi = \xi' + \xi''$, 其中 $\xi' = p\xi \in H^G$. 由于 $(H^G)^\perp$ 不包含任何非零的 G-不变向量, (Q, ε) 是 Kazhdan 对, 于是存在 $x \in Q$ 使得 $\|\pi_x\xi'' - \xi''\| \geqslant \varepsilon\,\|\xi''\|$. 另一方面,

$\|\pi_x\xi'' - \xi''\| = \|\pi_x\xi - \xi\| < \delta\varepsilon\,\|\xi\|$, 这就说明

$$\|\xi - \xi'\| = \|\xi''\| < \delta\,\|\xi\|\,,$$

得证. □

推论 3.8.17　设 G 是离散群, 且具有性质 (T). 设 Q 是有限 Kazhdan 集, 那么 G 由 Q 生成.

证明　设 G_0 是由 Q 生成的子群, 并考虑 G 在 $\ell^2(G/G_0)$ 上的作用

$$G \curvearrowright \ell^2(G/G_0), \qquad s\cdot(tG_0) := stG_0.$$

由于对任意 $\gamma \in Q$ 都有 $\gamma \cdot G_0 = G_0$, 于是命题 3.8.16 说明 G_0 是 G-不变的, 因此 $G_0 = G$. □

需要注意的是, 性质 (T) 一般不能通过取子群来继承. 1967 年 Kazhdan 证明了 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 在 $n \geqslant 3$ 时具有性质 (T), 但它具有子群 $\mathbb{Z}$. 不过我们下面还是可以证明取商群和群扩张会继承性质 (T).

定义–命题 3.8.18 (Kazhdan 数)　设 G 是离散群, $Q \subset G$ 是一个子集. 定义 **Kazhdan 数**

$$\kappa_{(G,Q)} := \inf_{\pi}\inf_{\|v\|=1}\sup_{s\in Q}\|\pi_s v - v\|\,,$$

其中第一个下确界对所有不存在非零 G-不变向量的酉表示 π 取. 那么 G 具有性质 (T) 当且仅当存在有限集 $Q \subset G$ 使得 $\kappa_{(G,Q)} > 0$.

证明　这无非是命题 3.8.13 的重新叙述, □

命题 3.8.19　设 G 和 Γ 是离散群, $Q \subset G$ 是一个子集, 且 $\varphi : G \to \Gamma$ 是一个满同态. 那么 $\kappa_{(G,Q)} \leqslant \kappa_{(\Gamma,\varphi(Q))}$. 特别地, 若 G 存在性质 (T), 则 Γ 存在性质 (T).

证明　设 (H,π) 是 Γ 的酉表示, 且不存在非零的 Γ-不变向量. 考虑 $\tilde{\pi} := \pi \circ \varphi$, 那么 $\tilde{\pi}$ 是 G 的酉表示, 并且由 φ 是满的可知 $\tilde{\pi}$ 不存在非零的 G-不变向量. 因此

$$\kappa_{(\Gamma,\varphi(Q))} = \inf_{\pi}\inf_{\|v\|=1}\sup_{s\in Q}\left\|\pi_{\varphi(s)}v - v\right\| = \inf_{\pi}\inf_{\|v\|=1}\sup_{s\in Q}\|\tilde{\pi}_s v - v\| \geqslant \kappa_{(G,Q)}.$$

而后半断言是上式显然的推论. □

由于 G 的 Abel 化 $G_{\mathrm{ab}} = G/[G,G]$, 于是由推论 3.8.15 和命题 3.8.19 可知:

推论 3.8.20　设 G 是离散群, 若存在从 G 到一个顺从的无限群的满同态, 则 G 不具有性质 (T). 特别地, 具有性质 (T) 的离散群一定具有有限的 Abel 化.

下面给出一个通过不动点来判断群是否具有性质 (T) 的方式:

引理 3.8.21　设 $T : G \to \mathrm{Aff}(X)$ 是一个仿射等距, 那么 $w \in X$ 是 T 的不动点当且仅当对任意 $g \in G$ 都成立 $b_g = w - \pi_g w$.

证明　简单地验证定义即可. □

定理 3.8.22　设 G 是可数离散群. 若 G 的任意通过仿射等距的表示都具有不动点, 则 G 具有性质 (T).

证明　固定一列 G 的递增有限子集 $(E_n)_{n\geqslant 1}$, 使得 $\bigcup_{n\geqslant 1} E_n = G$. 若 G 不具有性质 (T), 那么存在没有非零 G-不变向量的酉表示 π, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在单位向量 $v_n \in H$ 使得

$$\sup_{g\in E_n}\|\pi_g v_n - v_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

考虑 $H^\infty := \bigoplus_{n\geqslant 1} H$ 和表示 $\pi^\infty := \bigoplus_{n\geqslant 1} \pi$, 定义 $b: G \to H^\infty, g \mapsto \bigoplus_{n\geqslant 1} n(\pi_g v_n - v_n)$. 那么 b 是良定义的上闭链, 但它是无界的. 这是因为 π 不存在非零的 G-不变向量, 因此对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $g_n \in G$ 使得 $\|\pi_{g_n} v_n - v_n\| \geqslant \sqrt{2}$. 于是

$$\|b_{g_n}\| \geqslant n \|\pi_{g_n} v_n - v_n\| \geqslant \sqrt{2}n.$$

这与引理 3.8.21 矛盾. □

4 初等同调代数

在进入 K-理论的讨论之前, 我们需要做一些代数的准备. 本章讨论初等的同调代数, 一般的同调代数理论建立在 Ab-范畴上, 但 Freyd–Mitchell 嵌入定理保证了所有的 Ab-范畴都可以嵌入到模范畴中, 因此我们只在模范畴的意义下讨论同调代数. 基于 Ab-范畴的同调代数理论参见李文威老师所《代数学方法 卷二: 线性代数》, 这也是本章参考的主要材料.

本章的主题主要有三:

(1) 首先是对模范畴 Mod-R 进行进一步的讨论, 这些讨论一部分在本科的代数课程中已经完成, 但另一些需要单独拿出来重新回顾. 进一步, 将加性的概念抽象出来, 我们建立加性范畴和 Ab-范畴的概念. 并通过 Freyd–Mitchell 嵌入定理说明我们只需要对模范畴讨论同调. 这些工作在第 1–5 节完成.

- 第 1 节回顾模范畴 Mod-R 的基本概念, 并由此抽象出加性范畴和 Ab-范畴的定义. 其中最重要的对象是称作双积的对象, 它被加性函子保持, 并且在有限的情形下兼为积与余积. 之后给出正合函子的概念, 正合列是同调代数中最基本的数学对象, 而保持正合性质的函子理所当然地需要被详细讨论.
- 第 2 节回顾模的张量积, 这应当是本科代数学课程的标准内容. 所有的性质都使用泛性质的方式书写, 这使得我们可以避开构造性证明带来的良定义性验证. 除此之外, 我们加入了 Hom 函子与张量积函子的对偶性, 这在对导出函子的长正合列的讨论中发挥作用.
- 第 3 节讨论投射模和内射模的理论, 这进一步导向交换环论和同调代数. 投射模在后续讨论拓扑 K-理论时还会发挥重要的作用, 这因 K-理论的目的是分类流形上的向量丛, 而 Swan–Serre 定理保证了紧流形 M 上的复向量丛都是某个有限生成的投射 $C(M)$-模.
- 第 4 节是蛇引理与五引理在模范畴下的叙述. 在更一般的 Abel 范畴上它们的证明在细节上更加复杂, 但思路上几乎一致. 对模范畴来说, 技巧是图追踪, 这是一种自己写起来比读书更快的方式. 将其单独列出来仅仅是因为它们相较于其他的图表引理更加常用.
- 第 5 节给出 Abel 范畴的定义, 这是具有核, 余核且所有态射皆严格的加性范畴. 它们是环 R 上的模范畴 Mod-R 的推广, 其上可以开展对内射对象, 投射对象, 复形, 同调与上同调以及正合列等种种概念的研究. 模范畴是 Abel 范畴的原型, 但不足以穷尽 Abel 范畴的底蕴. 在一般的 Abel 范畴中对象无元素可言, 态射亦非映射, 于是图追踪法不再适用, 而必须从对象与函子的操作来推导最基本的几种正合列. Freyd–Mitchell 嵌入定理断言任何 Abel 小范畴都可以全忠实地嵌入某个模范畴 Mod-R 中. 一旦接受了这一结果, 关于正合列的许多断言便可以化约到模范畴的情形, 使得图追踪仍有用武之地. 尽管对于代数学家来说这样的做法与其说是化约, 毋宁说是心理上的慰藉: 这回避了 Abel 范畴的本质, 因为嵌入定理仍然避不开 Abel 范畴的若干核心事实.

(2) 其次是讨论模范畴上的链复形及其同调, 这些工作在第 6–8 节完成. 同调的发展离不开两方面的推动: 其一是拓扑学上的, 19 世纪后期 Riemann 和 Betti 研究了曲面的亏格, 以及称作 Betti 数的高维推广. 这一套思路在 Poincaré 手中发展为更加严谨的体系. 1925 年, Noether 阐明如何将同调定义为

一个交换群, 而 Betti 数及其挠版本不过是其派生的数值, 这已经接近代数拓扑学中的现代定义: 对带有剖分的空间 X 和交换群 A 定义链复形 $C(X;A)$, 这记录剖分的黏合方式. 并定义 X 的 A-系数同调群 $H_n(X;A)$, 而另有对偶的方式定义上同调群 $H^n(X;A)$. 至 20 世纪 50 年代, 同调与上同调的泛系数定理被提出, 这说明整系数的情形足以确定系数在 A 的同调与上同调.

- 第 6 节讨论复形上的同调与上同调, 它们从代数上来看并无区别, 只是符号的选取不同. 同调代数的基本技巧之一是从复形的短正合列 $0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ 导出长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_n(X') \xrightarrow{H_n f} H_n(X) \xrightarrow{H_n g} H_n(X'') \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(X') \longrightarrow \cdots$$

  其中连接态射的构造是这一结果的核心.
- 第 7 节谈论所谓的 M 的解消, 这分成左右两种版本, 具体写成正合列

$$\cdots \to C_1 \to C_0 \to M \to 0 \qquad \text{或} \qquad 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots .$$

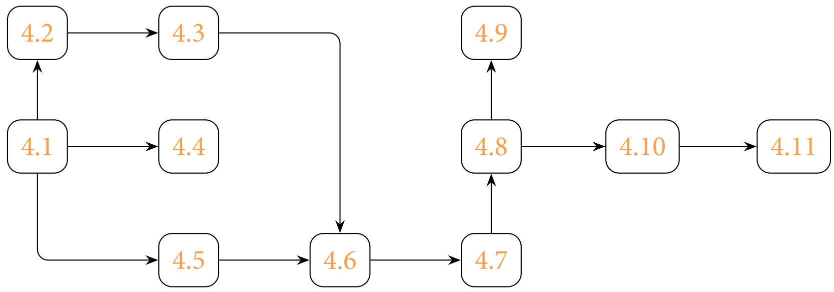
  这相当于通过同调或上同调层面上的同构将 M 替换成一个性质更好的链复形 (C_n, d) 或是 (I^n, δ). 解消具有同伦意义下的函子性与唯一性. 通过以投射解消或内射解消代替 M, 让右正合 (*左正合*) 函子作用于解消的每一项, 再取同调或上同调, 便引向了左导出函子 (*右导出函子*) 的经典定义, 而短正合列诱导导出函子的长正合列. 基于复形的解消, 导出函子可以在下有界或者上有界复形上求值, 这在经典文献中称作超导出函子.
- 第 8 节讨论导出函子的两个实例: Ext 和 Tor, 它们分别是 Hom 和 $\otimes$ 的导出函子. 我们以平衡双函子的语言叙述, 这是基于双复形的上同调基本性质, 用来说明对两个变元的求导殊途同归. 同时, Ext 和 Tor 作为例子给出了代数拓扑学中的同调 Künneth 定理, 其集中于零次项的情形即为同调的泛系数定理.

(3) 最后是讨论两个非常重要的问题: 其一是 Hochschild 同调与上同调, 它发端于环上的求导运算, 由 Hochschild 在 1942 年提出. 其 $n = 1$ 次项分类了所有的求导运算. 这些构造能扩张到一般的 (R, R)-双模 M, 并在现代数学的前沿中继续扮演要角. 其二是 Hilbert 合冲定理: 这是同调代数来自代数学内部的推手. 用现代语言来说, 它断言多项式环 $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 上的模总存在长度 $\leqslant n$ 的自由解消.

- 第 9 节讨论更具体的实例: Hochschild 同调与上同调. 其构造和性质的讨论涉及复形的种种基础操作, 其本身也在现代数学前沿中发挥重要作用. 我们后续讨论 Connes 提出的循环上同调也基于 Hochschild 上同调.
- 第 10–11 节引入证明 Hilbert 合冲定理的两个重要工具: 其一投射维数与整体同调维数的概念, 前者刻画了一个模与投射模多么接近, 后者则直接表现环的性质. 其二是 Koszul 解消, 它使得我们可以处理 $K[x]$ 的投射维数, 进而处理多项式环的整体维数. 在本章的最后我们以 Hilbert 合冲定理的证明作为收尾.

最后多提一句 Ext 函子, 交换群的短正合列给出群扩张. 在同构的意义下它们和群 $\mathrm{Ext}^1(B, A)$ 的元素一一对应. 若将 B 换成一般的群 G, 群扩张的分类自然地引出群的上同调 $H^2(G, A)$ 的代数定义. 将交换群替换成 C^* 代数之后, 我们仍然定义 C^* 代数的扩张, 并给出对应版本的 Ext 群. 当然这是后话了.

阅读顺序



4.1　范畴 Mod-R

因 R-Mod 与 Mod-R^{op} 等价, 本节只讨论右 R-模范畴.

对 M_R, N_R, 在 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 上存在 Abel 群结构如下: 对 $f,g\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$, 定义

$$f+g: M\to N,\qquad x\mapsto f(x)+g(x).$$

则 $(\mathrm{Hom}_R(M,N),+)$ 是一个 Abel 群. 其零元为平凡同态 $M\to N, x\mapsto 0$; f 的负元为 $-f: M\to N$, $x\mapsto -f(x)$.

注意到态射的合成是 $\mathbb{Z}$-双线性的, 即在

$$M \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} N \overset{h}{\underset{k}{\rightrightarrows}} P$$

中有 $k(f+g)=kf+kg$, $(k+h)f=kf+hf$.

定义 4.1.1 (积, 余积)　设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是一族右 R-模, 称

(1)　$\{M_i\}_{i\in I}$ 的**积**是右 R-模 $\prod_{i\in I}M_i$ 和投影 $\pi_j:\prod_{i\in I}M_i\to M_j$, 满足

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I}M_i \arrow[r, "\pi_j"] & M_j \\ & N \arrow[u, "f_j"'] \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

(2)　$\{M_i\}_{i\in I}$ 的**余积**是右 R-模 $\coprod_{i\in I}M_i$ 和嵌入 $\iota_j: M_j\to\coprod_{i\in I}M_i$, 满足

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I}M_i \arrow[dr, dashed] & M_j \arrow[l, "\iota_j"'] \arrow[d, "g_j"] \\ & N \end{tikzcd}$$

在 Mod-R 中积与余积总是存在的, 这因 Mod-R 是完备且余完备的.

定义 4.1.2 (Ab-范畴, 加性范畴)　设 C 是一个局部小范畴, 即每个 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 都是集合. 称 C 是一个 **Ab-范畴**, 若

(1)　任何 C 中的 Hom 集都有 Abel 群结构, 且态射复合

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$$

是 $\mathbb{Z}$-双线性的.

称 C 是**加性范畴**, 若它还满足

(2)　C 中含有零对象 0;

(3) C 中任何有限积和有限余积存在.

由此, Mod-R 是一个加性范畴.

定义 4.1.3 (加性函子) 设 $\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2$ 是 Ab-范畴, 称函子 $F : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ 是**加性函子**, 若它诱导 Hom 集的群同态.

约定今后谈及 Ab-范畴的等价时, 对应的函子总是加性的; 谈及 Mod-R 上的函子总是加性的.

定义 4.1.4 (双积) 设 C 是 Ab-范畴, $X_1,\ X_2$ 是其中的对象, $X_1,\ X_2$ 的**双积**指图表

$$X_1 \underset{\iota_1}{\overset{p_1}{\leftrightarrows}} Z \underset{\iota_2}{\overset{p_2}{\leftrightarrows}} X_2$$

满足 $p_1\iota_1 = \mathrm{id}, p_2\iota_2 = \mathrm{id}, \iota_1 p_1 + \iota_2 p_2 = \mathrm{id}_Z$. 也称 Z 连同态射 $(\iota_1, \iota_2, p_1, p_2)$ 是 $X_1,\ X_2$ 的双积. 记作 $Z = X_1 \oplus X_2$.

双积的构造可以迭代到 n 元情形 $Z = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$, 其中图表 $X_i \underset{\iota_i}{\overset{p_i}{\leftrightarrows}} Z$ 满足

$$p_i\iota_j = \begin{cases} \mathrm{id}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \iota_i p_i = \mathrm{id}_Z.$$

定理 4.1.5 设 C 是 Ab-范畴, $X_1,\ X_2$ 是 C 的对象, 以下条件等价:

(1) 积 $X_1 \times X_2$ 存在;

(2) 余积 $X_1 \sqcup X_2$ 存在;

(3) 双积 $X_1 \oplus X_2$ 存在.

并且以上任意一条成立时, $Z = X_1 \oplus X_2$ 连同 (p_1, p_2) 给出 $X_1 \times X_2$, 连同 (ι_1, ι_2) 给出 $X_1 \sqcup X_2$.

证明 (3) $\Longrightarrow$ (1,2): 设 $Z = X_1 \oplus X_2$ 存在, 由

$$p_1\iota_2 = p_1\mathrm{id}_Z\iota_2 = p_1(\iota_1p_1 + \iota_2p_2)\iota_2 = p_1\iota_2 + p_1\iota_2$$

可知 $p_1\iota_2 = 0$, 同理 $p_2\iota_1 = 0$. 在 $X \overset{f_1}{\leftarrow} W \overset{f_2}{\to} X_2$ 中取 $\varphi = \iota_1 f_1 + \iota_2 f_2, \varphi : W \to Z$, 则 $p_i\varphi = f_i$. 反之, 若 $\varphi : W \to Z$ 满足 $p_i\varphi = f_i$, 则

$$\varphi = (\iota_1p_1 + \iota_2p_2)\varphi = \iota_1 f_1 + \iota_2 f_2,$$

因此 (Z, p_1, p_2) 满足积的泛性质. 余积的情况是类似的.

(1) $\Longrightarrow$ (3) : 设 $X_1 \overset{p_1}{\leftarrow} Z \overset{p_2}{\to} X_2$ 是积, 定义 $\iota_i : X_i \to Z$ 使得

$$p_i\iota_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{X_i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

则

$$p_1(\iota_1p_1 + \iota_2p_2) = p_1 + 0 = p_1\mathrm{id}_Z, \qquad p_2(\iota_1p_1 + \iota_2p_2) = 0 + p_2 = p_2\mathrm{id}_Z.$$

由积的泛性质可知 $\iota_1p_1 + \iota_2p_2 = \mathrm{id}_Z$. 于是 $(Z, \iota_1, \iota_2, p_1, p_2)$ 是双积.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : 反转 (1) $\Longrightarrow$ (3) 中所有的箭头得到. □

因此由

$$p_j\psi\iota_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{X_i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

诱导的 $\psi : X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{\sim} X_1 \times X_2$ 是一个同构. 其中 $\iota_i : X_i \to X_1 \sqcup X_2, p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$. 这解释了 Mod-$R$ 中有限直和兼具有限积和有限余积两种角色.

命题 4.1.6　Ab-范畴间的加性函子保持双积.

证明　这因加性函子保持 Hom 集上的 Abel 群结构. 于是若 $(\iota_1, \iota_2, p_1, p_2)$ 满足双积的定义, 应有 $(F(\iota_1), F(\iota_2), F(p_1), F(p_2))$ 满足双积的定义. □

定义 4.1.7 (正合列)　设 M, N, P 是右 R-模, 称序列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

在 N 处是**正合**的, 若 $\operatorname{im} f = \ker g$. 若序列

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

处处正合, 则称其为一个**正合列**.

由定义立刻得到 $0 \to M \xrightarrow{f} N$ 正合当且仅当 f 是单态, $M \xrightarrow{g} N \to 0$ 正合当且仅当 g 是满态. 若序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

正合, 称其为**短正合列**. 它是短正合列当且仅当 f 是单态且 g 是满态.

由此, 模的同态定理立刻给出对任意模同态 $f : M \to N$, 序列

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0$$

正合.

定义 4.1.8 (正合函子)　称 F : Mod-$R \to$ Mod-S 是**正合函子**, 若 F 保持短正合列: 即对 Mod-R 中的短正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0\ ,$$

有 Mod-S 中的短正合列

$$0 \longrightarrow FM \xrightarrow{F(f)} FN \xrightarrow{f(g)} FP \longrightarrow 0.$$

命题 4.1.9　函子 F : Mod-$R \to$ Mod-S 正合当且仅当它保持任何正合列.

证明　*充分性*. 显然成立.

必要性. 对 Mod-R 中的正合列

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

作如下的分解:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & M_{i-1} \arrow[rr, "f_{i-1}"] \arrow[dr, "g_{i-1}"] & & M_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"] & & M_{i+1} \arrow[rr, "f_{i+1}"] \arrow[dr, "g_{i+1}"] & & \cdots \\
& \operatorname{im} f_{i-2} \arrow[ur, "\alpha_{i-2}"] \arrow[dr] & & \operatorname{im} f_{i-1} \arrow[ur, "\alpha_{i-1}"] \arrow[dr] & & \operatorname{im} f_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[dr] & & \operatorname{im} f_{i+1} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

由 $\ker f_{i-1} = \ker g_{i-1}, \operatorname{im} g_{i-1} = \operatorname{im} \alpha_{i-1}$ 可知橙色部分是正合的. 由 F 是正合函子可知序列

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{im} f_{i-1}) \xrightarrow{F(\alpha_{i-1})} FM_i \xrightarrow{F(g_i)} F(\operatorname{im} f_i) \longrightarrow 0$$

正合. 这即

$$\ker F(f_i) = \ker(F(\alpha_i)F(g_i)) = \ker F(g_i) = \operatorname{im} F(\alpha_{i-1}) = \operatorname{im} F(f_{i-1}).$$

于是序列在 M_i 处正合. 由 i 的任意性可知序列处处正合. □

定义 4.1.10 (左正合函子, 右正合函子) 函子 $F : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}S$ 称作是

(1) **左正合**的, 若 $0 \to M' \to M \to M''$ 导出 $0 \to FM' \to FM \to FM''$ 正合;

(2) **右正合**的, 若 $M' \to M \to M'' \to 0$ 导出 $FM' \to FM \to FM'' \to 0$ 正合.

于是正合函子无非是左右皆正合的函子.

命题 4.1.11 设 $F : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}S$ 是函子, 则 F 左正合当且仅当 F 保持核; F 右正合当且仅当 F 保持余核.

证明 由左正合与右正合的定义直接验证即可. □

定理 4.1.12 设 $F : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}S$ 是函子, 则 F 左正合当且仅当它保持所有有限 $\varprojlim$; F 右正合当且仅当它保持所有有限 $\varinjlim$.

证明 由命题 4.1.6 可知 F 保持所有有限积和有限余积, 而在 Ab-范畴中

$$F \text{ 左正合} \iff F \text{ 保持核} \iff F \text{ 保持等化子} \iff F \text{ 保持有限 } \varprojlim;$$
$$F \text{ 右正合} \iff F \text{ 保持余核} \iff F \text{ 保持余等化子} \iff F \text{ 保持有限 } \varinjlim;$$

得证. □

4.2 模的张量积

定义 4.2.1 (双模) 设 R, S 是环, 一个 (R, S)-**双模**意即兼具左 R-模和右 S-模结构的 Abel 群 M, 满足

$$r(ms) = (rm)s, \qquad \forall r \in R,\ m \in M,\ s \in S.$$

于是可以无歧义地写作 rms. 这即 (R, S)-双模上 R-左乘和 S-右乘可以交换.

记 (R, S)-双模构成的范畴为 $(R, S)\text{-}\mathsf{Mod}$.

定义 4.2.2 (平衡积) 设 R 是环, M_R, ${}_RN$ 是模, $(A, +)$ 是 Abel 群. 称映射

$$B : M \times N \to A$$

是一个**平衡积**, 若它满足:

(1) $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$;

(2) $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$;

(3) $B(xr, y) = B(x, ry)$.

其中 (1)–(2) 是 B 对两个变元的线性, 而 (3) 即为平衡性.

全体从 M, N 出发的平衡积构成范畴 $\mathsf{Bil}(M, N; *)$, 其中的态射 φ 为使得下图交换的群同态.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "B'"'] & A \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

定义 4.2.3 (张量积)　称满足以下泛性质的平衡积 $M \times N \to M \otimes_R N$ 是 M_R 与 ${}_RN$ 的**张量积**: 对任意平衡积 $B : M \times N \to A$, 存在唯一的群同态 $M \otimes_R N \to A$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "B"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed] \\ & A \end{tikzcd}$$

这即张量积 $M \times N \to M \otimes_R N$ 是范畴 $\mathsf{Bil}(M, N; *)$ 的始对象, 因此张量积若存在则必然唯一.

引理 4.2.4　对任何 M_R 和 ${}_RN$, 张量积 $M \times N \to M \otimes_R N$ 存在.

证明　考虑 $M \times N$ 上的自由 $\mathbb{Z}$-模 F, 记

$$I = \langle (x+x', y) - (x,y) - (x', y), (x, y+y') - (x,y) - (x,y'), (xr, y) - (x, ry) \rangle\,,$$

这是 F 的一个 $\mathbb{Z}$-子模. 记 $(x,y) \in M \times N$ 在 $F/I =: M \otimes_R N$ 下的像为 $x \otimes y$.

由自由模的定义, 对 Abel 群 A 和平衡积 $B : M \times N \to A$, 存在唯一的同态 $\beta : F \to A$ 使得 $\beta(x,y) = B(x,y)$. 由 I 的构造可知 $\beta|_I = 0$, 于是 $\bar\beta : F/I \to A$ 由

$$\bar\beta(x \otimes y) = B(x,y)$$

给出. 这即 $M \otimes_R N$ 和 $\bar\beta$ 给出 M 与 N 的张量积. □

注意到 $M \otimes_R N$ 中的元素具有 $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ 的一般形式. 这样的表示并不唯一, 但总有

$$M \otimes_R N = \langle x \otimes y : x \in M,\ y \in N \rangle$$

成立. 后面会证明若 M 和 N 都是交换环 R 上的自由模, 则 M 和 N 上的基的张量积全体 $x \otimes y$ 就构成 $M \otimes_R N$ 的一组基.

引理 4.2.5 (张量积的函子性)　张量积 $- \otimes_R -$ 对两个变元都具有函子性. 即对 $\varphi : M \to M'$ 和 $\psi : N \to N'$ 是 Mod-R 中的态射, 存在唯一的态射 $\varphi \otimes \psi : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\times\psi"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\varphi\otimes\psi"] \\ M' \times N' \arrow[r] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

证明　这因态射合成 $M \times N \to M' \times N' \to M' \otimes_R N'$ 仍是平衡积, 于是泛性质保证了 $\varphi \otimes \psi$ 的存在唯一性. □

注意到上述引理的条件即为

$$(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y),$$

这唯一确定了态射 $\varphi \otimes \psi$.

命题 4.2.6 (张量积上的双模结构)　设 Q, R, S 是环, ${}_QM_R$, ${}_RN_S$ 是双模. 则 $M \otimes_R N$ 带有唯一的 (Q, S)-双模结构:

$$q(x \otimes y)s = qx \otimes ys, \qquad \forall q \in Q,\ \forall s \in S.$$

即 $\otimes_R$ 将相邻的 R-模结构缩并.

证明 这因对 $q\in Q$ 和 $s\in S$, 由双模的定义可知 Q-左乘 $m\mapsto qm$ 和 S-右乘 $n\mapsto ns$ 分别给出 M 和 N 作为 R-模的自同态. 于是由张量积的函子性可知

$$M\otimes_R N\to M\otimes_R N,\qquad x\otimes y\mapsto qx\otimes ys$$

取遍所有 q 和 s 即证. □

命题 4.2.7 (张量积的结合约束) 设 Q,R,S,T 是环, ${}_QM_R,\ {}_RM'_S,\ {}_SM''_T$ 是双模. 则存在典范同构

$$M\otimes_R(M'\otimes_S M'')\xrightarrow{\sim}(M\otimes_R M')\otimes_S M'',\qquad x\otimes(y\otimes z)\mapsto(x\otimes y)\otimes z.$$

并将其视作 (Q,R)-Mod $\times$ (R,S)-Mod $\times$ (S,T)-Mod $\to$ (Q,T)-Mod 的函子.

证明 只证明 $Q=T=\mathbb{Z}$ 的情形. 对 Abel 群 $(A,+)$ 有

$$\mathrm{Hom}((M\otimes_R M')\otimes_S M'',A)=\mathrm{Bil}(M\otimes_R M',M'';A).$$

在以上同构中 $\mathrm{Bil}(M\otimes_R M',M'';A)$ 与 "三元平衡积" 构成的群典范同构. 所谓三元平衡积是指对三个变元都具有线性的映射 $D:M\times M'\times M''\to A$, 并且满足如下的平衡性:

$$D(xr,y,sz)=D(x,rys,z),\qquad \forall r\in R,\ \forall s\in S.$$

因此 $B(\cdot,z):M\otimes_R M'\to A$, $D(x,y,z)=B(x\otimes y,z)$ 就确定了一个平衡积 $M\otimes_R M'\times M''\to A$, 满足

$$B(x\otimes y,z+z')=B(x\otimes y,z)+B(x\otimes y,z'),\quad B(x\otimes y,sz)=B(x\otimes ys,z)=B((x\otimes y)s,z).$$

相应的同态 $\varphi:(M\otimes_R M')\otimes_S M''\to A$ 则由

$$\varphi((x\otimes y)\otimes z)=D(x,y,z)$$

刻画.

注意到以上的操作每一步都可以反向, 因此 B 和 D 之间可以建立一一对应. 而 A 的选取是任意的, 于是

$$M\otimes_R(M'\otimes_S M'')\xrightarrow{\sim}(M\otimes_R M')\otimes_S M'',\qquad x\otimes(y\otimes z)\mapsto(x\otimes y)\otimes z.$$

是一个同构. 它对 $M,\ M',\ M''$ 的函子性自明. □

命题 4.2.8 设 R,S 是环, 对 ${}_RM_S$, 存在典范同构

$$\begin{aligned} M\otimes_S S\xrightarrow{\sim}M,&\quad m\otimes s\mapsto ms,\\ R\otimes_R M\xrightarrow{\sim}M,&\quad r\otimes m\mapsto rm.\end{aligned}$$

证明 以下略去 $\mathrm{Hom}_{(R,S)\text{-Mod}}$ 的下标而将其直接记作 Hom. 对 (R,S)-双模 A, 有双射

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Hom}(M,A) & \xleftrightarrow{\text{1-1}} & \{B:M\otimes_S S\to A\} & \xleftrightarrow{\text{1-1}} & \mathrm{Hom}(M\otimes_S S,A)\\ \phi & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & B & \longmapsto & \varphi\end{array}$$

其中第一个双射由 $\phi(m)=B(m,1)$ 给出. 这因 $B(m,s)=B(ms,1)$ 由 ϕ 完全确定. 第二个双射由 $\varphi(m\otimes s)=B(m,s)$ 给出, 这是张量积的泛性质. 因此 $\phi(ms)=\varphi(m\otimes s)$. 由米田引理即证. □

命题 4.2.9 (张量积的交换约束)　设 R 是交换环, 则由典范同构

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N \otimes_R M, \qquad x \otimes y \mapsto y \otimes x.$$

它视作 $\mathsf{Mod}\text{-}R \times \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}R$ 的函子.

证明　在 $\mathrm{Bil}(M, N; A)$ 中考虑双射

$$\mathrm{Bil}(M, N; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}(N, M; A), \qquad B \mapsto B^{\mathrm{op}}.$$

其中 $B^{\mathrm{op}}(n, m) := B(m, n)$. 因 R 是交换的, 立刻得到上述双射是自然同构. □

推论 4.2.10　设 M, N 是交换环 R 上的自由模, 设 M 以 X 为基, N 以 Y 为基, 则 $M \otimes_R N$ 也是自由 R-模, 它以

$$X \times Y \xrightarrow{1-1} \{x \otimes y : x \in X,\ y \in Y\}$$

为基. 因此 $\mathrm{rank}\,_R(M \otimes_R N) = \mathrm{rank}\,_R M \cdot \mathrm{rank}\,_R N$.

Hom 函子与张量积函子互为对偶. 设 $Q,\ R,\ S$ 是环, 双模 ${}_QM_R$, ${}_QM'_S$ 作为左 Q-模的 Hom 群 $\mathrm{Hom}({}_QM, {}_QM')$ 可以定义如下的 (R, S)-双模结构: 对 $f \in \mathrm{Hom}({}_QM, {}_QM')$, 定义

$$rfs : m \mapsto ((mr)f)s, \qquad \forall r \in R,\ \forall s \in S.$$

其中 R-Mod 上同态的作用 $f(m) =: mf$. 同样地, 双模 ${}_RM_S, {}_QM'_S$ 作为右 S-模的 Hom 群 $\mathrm{Hom}(M_S, M'_S)$ 可以定义如下的 (Q, R)-双模结构: 对 $f \in \mathrm{Hom}(M_S, M'_S)$, 定义

$$qfr : m \mapsto q(f(rm)), \qquad \forall q \in Q,\ \forall r \in R.$$

因此 $\mathrm{Hom}(-, -)$ 给出一个 $(Q, R)\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times (Q, S)\text{-}\mathsf{Mod} \to (R, S)\text{-}\mathsf{Mod}$ 的函子.

定理 4.2.11　设 Q, R, S 是环, 存在典范同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(Q,S)\text{-}\mathsf{Mod}}(M \otimes_R N, A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(R,S)\text{-}\mathsf{Mod}}(N, \mathrm{Hom}({}_RM, {}_RA)) \\ \varphi &\mapsto [y \mapsto [x \mapsto \varphi(x \otimes y)]] \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(Q,S)\text{-}\mathsf{Mod}}(M \otimes_R N, A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(Q,R)\text{-}\mathsf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}(N_S, A_S)) \\ \varphi &\mapsto [x \mapsto [y \mapsto \varphi(x \otimes y)]] \end{aligned}$$

它们给出 $(Q, R)\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times (R, S)\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times (Q, S)\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ 的函子.

这无非是张量积泛性质的改写.

推论 4.2.12 (Hom 函子与张量积函子的对偶性)　设 M 是 (Q, R)-双模, N 是 (R, S)-双模, 则有:

(1)　$\mathrm{Hom}({}_QM, {}_Q-)$ 是 $M \otimes_R -$ 的右伴随;

(2)　$\mathrm{Hom}(N_S, -_S)$ 是 $- \otimes_R N$ 的右伴随.

命题 4.2.13　设 Q, R, S 是环, 则 Hom 函子

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(-_S, -_S) : (R, S)\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times (Q, S)\text{-}\mathsf{Mod} \to (Q, R)\text{-}\mathsf{Mod} \\ &\mathrm{Hom}({}_Q-, {}_Q-) : (Q, R)\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times (Q, S)\text{-}\mathsf{Mod} \to (R, S)\text{-}\mathsf{Mod} \end{aligned}$$

对两个变元都是左正合的. 张量积函子

$$- \otimes_R - : (Q, R)\text{-}\mathsf{Mod} \times (R, S)\text{-}\mathsf{Mod} \to (Q, S)\text{-}\mathsf{Mod}$$

对两个变元都是右正合的.

证明 由于极限存在等价于函子可表, Hom 函子对两个变元保持 $\varprojlim$, 再由定理 4.1.12 可知 Hom 函子对两个变元都是左正合的. 而张量积函子作为 Hom 函子的左伴随, 它对两个变元保持 $\varinjlim$, 于是由定理 4.1.12 可知张量积函子对两个变元都是右正合的. □

4.3 投射模 内射模 平坦模

定义 4.3.1 (投射模, 内射模) 设 P, I 是右 R-模, 称

(1) P 是**投射模**, 若函子 $\mathrm{Hom}(P,-):\mathsf{Mod}\text{-}R\to\mathsf{Ab}$ 正合;

(2) I 是**内射模**, 若函子 $\mathrm{Hom}(-,I):R\text{-}\mathsf{Mod}\to\mathsf{Ab}$ 正合.

其泛性质可以用下图表示: P 投射当且仅当对任何正合列 $M\to M''\to 0$ 和 $P\to M''$, 存在唯一的 $P\to M$ 使得下图交换. I 内射当且仅当对任何正合列 $0\to M'\to M$ 和 $M'\to I$, 存在唯一的 $M\to I$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

尽管泛性质是对偶的, 但投射模和内射模的性质却有相当差别.

引理 4.3.2 设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是一族右 R-模, 则:

(1) $\bigoplus_{i\in I}M_i$ 投射当且仅当对任意 $i\in I$, M_i 投射;

(2) $\prod_{i\in I}M_i$ 内射当且仅当对任意 $i\in I$, M_i 内射.

证明 因 Hom 函子对两个变元左正合, 于是保持 $\varprojlim$. 因此有自然同构

$$\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{i\in I}M_i,-\Big)\simeq\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(M_i,-),\quad \mathrm{Hom}\Big(-,\prod_{i\in I}M_i\Big)\simeq\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(-,M_i),$$

得证. □

命题 4.3.3 设 $0\to I\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}P\to 0$ 是短正合列, 若以下条件其一成立, 则短正合列分裂:

(1) I 是内射模;

(2) P 是投射模.

证明 (1) 若 I 是内射模, 由 $0\to I\to M$ 正合可知 $\mathrm{Hom}_R(M,I)\xrightarrow{f^*}\mathrm{Hom}_R(I,I)\to 0$ 也正合. 于是存在 $r\in\mathrm{Hom}_R(M,I)$ 使得 $rf=f^*(r)=\mathrm{id}_I$.

(2) 若 P 是投射模, 由 $M\to P\to 0$ 正合可知 $\mathrm{Hom}_R(P,M)\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_R(P,P)\to 0$ 也正合. 于是存在 $s\in\mathrm{Hom}_R(P,M)$ 使得 $gs=g_*(s)=\mathrm{id}_P$. □

命题 4.3.4 P 是投射模当且仅当它是自由 R-模 F 的直和因子.

证明 *必要性*. 因 P 是投射模, 对任何模 M 都有下图交换:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\ M \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

这即任何形如 $0\to N\to M\to P\to 0$ 的序列正合. 而任何模都可以看做自由模的同态像.

充分性. 我们证明凡自由模皆投射. 设 $F=R^{\oplus X}$, 对任何 $\varphi:F\to N$, $\pi:M\twoheadrightarrow N$, 考虑

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi"] \\ F \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

其中 $\psi : F \to M$ 如下构造: 因 π 是满的, 故

$$\forall x \in X \, \exists m_x \in M \, (\pi(m_x) = \varphi(x) \in N).$$

取 $\psi : x \mapsto m_x$ 并作线性扩张就有 $\pi\psi(x) = \varphi(x)$. 而由引理 4.3.2 可知其直和因子也投射. □

因任何模 M 都是自由模的商, 故也可以写成投射模的商. 这即总存在投射模 P 使得 $P \to M \to 0$ 正合. 对偶地, 考虑内射模的情形.

命题 4.3.5 (内射模的 Baer 判别法) I 是内射模当且仅当任何右理想 $\mathfrak{a} \subset R$ 商的模同态 $f : \mathfrak{a} \to I$ 都可以延拓为 $f : R \to I$.

证明 *必要性*. 由内射模的泛性质

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

即证.

充分性. 考虑非空偏序集 $\{(M_i, h_i)\}$, 其中 $M' \subset M_i \subset M$, $h_i : M_i \to I$ 是 $h : M' \to I$ 的延拓, 其上的偏序关系定义为

$$(M_1, h_1) \leqslant (M_2, h_2) \iff (M_1 \subset M_2) \wedge (h_2|_{M_1} = h_1).$$

因此习见的取并记得全序子集的最大元. 由 Zorn 引理可知存在存在极大元, 不妨记作 (M_1, h_1), 断言 $M_1 = M$.

否则, 取 $x \in M \setminus M_1$, 取右理想 $\mathfrak{a} = \{r \in R : xr \in M_1\}$. 此时合成同态 $\varphi : \mathfrak{a} \hookrightarrow M_1 \xrightarrow{h_1} I$. 设存在延拓 $\tilde{\varphi} : R \to I$, 取

$$h_2 : M_2 := M_1 + xR \to I, \qquad x_1 + xr \mapsto h_1(x_1) + \tilde{\varphi}(r).$$

则 $h_2 : M_2 \to I$ 良定义, 并且 $(M_2, h_2) > (M_1, h_1)$. 这与 (M_1, h_1) 的极大性矛盾. □

下面说明任何 R-模都可以嵌入内射 R-模. 但在此之前需要做一些准备.

定义 4.3.6 (平坦模) 设 M 是右 R-模, 称它是**平坦模**, 若 $M \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ 是正合的.

引理 4.3.7 设 $\{M_i\}_{i \in I}$ 是一族右 R-模, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 平坦当且仅当对任意 $i \in I$, M_i 平坦.

证明 这源于自然同构 $- \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \simeq \bigoplus_{i \in I}(- \otimes_R M_i)$. □

命题 4.3.8 凡自由模皆平坦, 凡投射模皆平坦.

证明 设 $F = R^{\oplus X}$, 由引理 4.3.2 和引理 4.3.7 可知只需证明 $|X| = 1$ 的情形. 此时 $R^{\oplus X} = R$, 而 $\mathrm{Hom}_R(R, -)$ 与 $R \otimes_R -$ 都同构于恒等函子, 自然是正合的. □

定义 4.3.9 (可除 Abel 群) 称 $\mathbb{Z}$-模 A 是**可除**的, 若存在 $n \neq 0$ 使得 $nA = A$.

引理 4.3.10 设 I 是 $\mathbb{Z}$-模, 则 I 可除当且仅当 I 是内射 $\mathbb{Z}$-模.

证明 因 $\mathbb{Z}$ 的非零理想均形如 $n\mathbb{Z}$. 对 $n \neq 0$, 考虑下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, I) \arrow[r, "\text{限制}"] \arrow[d, "\varphi\mapsto\varphi(1)"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, I) \arrow[d, "\sim"', "\varphi\mapsto\varphi(n)"] \\ I \arrow[r, "\cdot n"] & I \end{tikzcd}$$

由 Baer 判别法即证. □

引理 4.3.11 任何 $\mathbb{Z}$-模都可以嵌入某个内射 $\mathbb{Z}$-模.

证明 设 $A = \mathbb{Z}^{\oplus X}/N$ 是某个自由模的商, 作嵌入 $\mathbb{Z}^{\oplus X}/N \hookrightarrow \mathbb{Q}^{\oplus X}/N$. 因 $\mathbb{Q}$ 是可除 $\mathbb{Z}$-模, 故 $\mathbb{Q}^{\oplus X}/N$ 也是可除的. □

命题 4.3.12 在引理 4.3.11 的条件下, 设 R, S 是环, N 是内射右 S-模, P 是平坦左 R-模, 则 $\mathrm{Hom}_{S\text{-Mod}}(N, P)$ 是内射右 R-模.

证明 注意到自然同构

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(-, \mathrm{Hom}_{S\text{-Mod}}(N, P)) \simeq \mathrm{Hom}_{S\text{-Mod}}(- \otimes_R P, N)$$

而后者保持正合列. □

定理 4.3.13 设 R 是环, 任何 R-模 M 可以嵌入一个内射 R-模.

证明 视 M 为 $\mathbb{Z}$-模, 由引理 4.3.11 可知存在内射 $\mathbb{Z}$-模 J 使得 M 可以嵌入 J 中. 再将 R 看作是 $(\mathbb{Z}, R)$-双模. 由命题 4.3.12 可知 $S = \mathbb{Z}, P =_Z R_R$ 时 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}(R, J)$ 是内射右 R-模. 故

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(R, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}(R, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}(R, J) \\ x &\mapsto (r \mapsto xr) \end{aligned}$$

中的每一项都是嵌入, 而嵌入的终点是内射模. □

4.4 若干图表引理

定理 4.4.1 (蛇引理) 设 $X' \to X \to X'' \to 0$ 正合, $0 \to Y' \to Y \to Y''$ 也正合. ker 和 coker 分别指竖直方向态射的核与余核. 存在连接同态 $\delta : \ker'' \to \mathrm{coker}'$ 使得序列

$$\ker' \to \ker \to \ker'' \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}' \to \mathrm{coker} \to \mathrm{coker}''$$

正合.

证明 考虑交换图

$$\begin{tikzcd} & \ker' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \arrow[r] \arrow[d] & \ker'' \arrow[d] & \\ & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y'' \arrow[d] & \\ & \mathrm{coker}' \arrow[r] & \mathrm{coker} \arrow[r] & \mathrm{coker}'' & \end{tikzcd}$$

定义 δ 如下: 对 $x'' \in \ker''$, 作图追踪

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, hook] & x'' \\
 & x \arrow[d, mapsto] & \\
y' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & y & \\
\bar{y}' & &
\end{tikzcd}$$

其中 $x \mapsto x''$ 由 $X \to X'' \to 0$ 正合得到, $x \mapsto y$ 由交换性可知 $y \in \ker[Y \to Y'']$, $y' \mapsto y$ 由 $Y' \to Y \to Y''$ 正合得到. 则 $\delta(x'') = \bar{y}'$ 是良定义的. 此时只需验证 $\ker''$ 和 coker' 处的正合性. 这因 $\ker$ 和 coker 处的正合性由图表的交换性和横行的正合性得到.

第 1 步. 若 $x'' \in \ker\delta$. 由 δ 的构造可知存在 $x' \in X'$ 使得 $x - x' \in \ker$. 再由 $X' to X \to X''$ 正合可知 $x'' \in \operatorname{im}[\ker \to \ker'']$.

第 2 步. 若 $\bar{y}' \in \ker[\operatorname{coker}' \to \operatorname{coker}]$, 这等价于存在 $x_0 \in X$ 使得它在 $X \to Y$ 下的像与 y' 在 $Y' \to Y$ 下的像相等, 于是 $x_0 \mapsto x'' \in \ker''$. 由 δ 的构造可知 $\bar{y}' \in \ker[\operatorname{coker}' \to \operatorname{coker}]$ 等价于存在 $x'' \in \ker''$ 使得 $\delta(x'') = \bar{y}'$. □

定理 4.4.2 (五引理) 设 X_i, Y_i 均为 R-模, 下图中横行均正合.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5
\end{tikzcd}$$

则

(1) 若 f_1 满, f_2, f_4 单, 则 f_3 单;

(2) 若 f_5 单, f_2, f_4 满, 则 f_3 满.

证明 类似于蛇引理作图追踪即可. □

4.5 Abel 范畴 Freyd–Mitchell 嵌入定理

回顾 Ab-范畴上的双积 $Z = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$. 特别地, 若 $X_i = X$, 得到 X 的 n 次双积

$$X^{\oplus n} := X \oplus X \oplus \cdots \oplus X,$$

其上的积带有对角态射 $\Delta_X : X \to X^{\oplus n}$; 余积带有对偶的版本 $\nabla_X : X^{\oplus n} \to X$. 它们分别由

$$p_i \Delta_X = \mathrm{id}_X = \nabla_X \iota_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

刻画. 特别地, $\Delta_X = \sum_{i=1}^n \iota_i$, $\nabla_X = \sum_{i=1}^n p_i$.

一族态射 $f_i : X_i \to X_i'$ 自然的诱导一个双积 $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n X_i \to \bigoplus_{i=1}^n X_i'$, 它表作 $\sum_{i=1}^n \iota_i' f_i p_i$.

例 4.5.1 给出分析上的一个例子, 考虑 $\mathbb{C}$ 上 Banach 空间全体构成的范畴 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$, 其中的态射是连续线性映射. 则 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$ 是一个加性范畴. 此时 $(X_1, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X_2, \|\cdot\|_2)$ 的双积即为向量空间的直和 $X_1 \oplus X_2$ 配上范数

$$\|(x_1, x_2)\| := \max\left\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\right\}.$$

命题 4.5.2 设 $f, g : X \to Y$ 是加性范畴 C 的一对态射, 则 $f + g$ 即为以下交换图表按第一行的合成.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[dr] & X \oplus X \arrow[rr, "f\oplus g"] \arrow[d, "\sim"] & & Y \oplus Y \arrow[r, "\nabla_Y"] & Y \\
& X \times X \arrow[r, "f\times g"] & Y \times Y \arrow[r, "\sim"] & Y \sqcup Y \arrow[u, "\sim"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

这里 $f \times g$ 由积的函子性得到, $Y \times Y$ 到 $Y \sqcup Y$ 的同构无非是 $\delta_{ij} = \mathrm{id}_Y, i = j$ 和 $\delta_{ij} = 0, i \neq j$ 确定的映射的逆.

证明 由对角函子及其对偶版本的定义易证两侧的三角交换. 由 $f \oplus g$ 的定义可知中间的方块交换. 只需证明第一行的合成是 $f \oplus g$ 即可. 这因

$$\begin{aligned}
\nabla_Y(f \oplus g)\Delta_X &= \nabla_Y(f \oplus g)(\iota_1^X p_1^X + \iota_2^X p_2^X)\Delta_X \\
&= \nabla_Y(f \oplus g)\iota_1^X + \nabla_Y(f \oplus g)\iota_2^X \\
&= \nabla_Y(\iota_1^Y f p_1^Y + \iota_2^Y g p_2^Y)\iota_1^X + \nabla_Y(\iota_1^Y f p_1^Y + \iota_2^Y g p_2^Y)\iota_2^X \\
&= \Delta_Y \iota_1^Y f + \Delta_Y \iota_2^Y g \\
&= f + g.
\end{aligned}$$

明所欲证. □

推论 4.5.3 设 C, D 是加性范畴, $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是函子, 则

(1) F 保持有限积当且仅当 F 保持有限余积;

(2) 若 F 保持有限积, 则 F 是加性的;

(3) 若 F 保持零对象和双积, 则 F 是加性的;

(4) 若 F 是范畴等价, 则 F 及其拟逆都是加性的;

(5) 设 $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ 与 F 互为伴随, 则 F 和 G 都是加性函子.

证明 (1) 考虑 $\delta : FX \sqcup FY \xrightarrow{\sim} FX \times FY$ 可以分解为

$$FX \sqcup FY \to F(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} F(X \times Y) \to FX \times FY$$

即可.

(2) 在命题 4.5.2 中图表沿下方的合成与 Hom 集上的假发无关, 只与范畴的有限积和有限余积有关.

(3) 因零对象兼为空积和空余积, 而有限双积兼为有限积和有限余积.

(4,5) 设 (F, G) 是伴随对, 由伴随对保持极限可知 F 保持 $\varinjlim$ 而 G 保持 $\varprojlim$, 而等价保持所有极限, 于是由 (2) 即证. □

定义 4.5.4 (像, 余像) 设 C 是范畴, $f : X \to Y$ 是态射:

(1) 若 $Y \sqcup_X Y$ 存在, 等化子 $\ker(Y \rightrightarrows Y \sqcup_X Y)$ 也存在, 则称 $\mathrm{im}\, f := \ker(Y \rightrightarrows Y \sqcup_X Y)$ 是 f 的**像**, 它带有典范的单态射 $\mathrm{im}\, f \hookrightarrow Y$;

(2) 若 $X \times_Y X$ 存在, 余等化子 $\mathrm{coker}(X \times_Y X \rightrightarrows X)$ 也存在, 则称 $\mathrm{coim}\, f := \mathrm{coker}(X \times_Y X \rightrightarrows X)$ 是 f 的**余像**, 它带有典范的满态射 $X \twoheadrightarrow \mathrm{coim}\, f$.

以下的引理说明了像和余像的泛性质.

引理 4.5.5 设 $f : X \to Y$ 在 C 中存在 $\mathrm{coim}\, f$ 和 $\mathrm{im}\, f$, 则:

(1) 对任何单态 $j : Y' \hookrightarrow Y$, 若 $g : X \to Y'$ 满足 $jg = f$, 则存在唯一的 $\bar{g} : \mathrm{coim}\, f \to Y'$ 使得下图交换;

(2) 对任何满态 $q : X \twoheadrightarrow X'$, 若 $g : X' \to Y$ 满足 $gq = f$, 则存在唯一的 $\bar{g} : X' \to \mathrm{im}\, f$ 使得下图交换.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "g"] & Y \\
\operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\bar{g}"] & Y' \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & Y \\
X' \arrow[ur, "g"] \arrow[r, dashed, "\bar{g}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

证明 只证 (1), 因 (2) 无非是 (1) 的对偶. 设 $p_1,\ p_2$ 分别是纤维积的投影 $X \times_Y X \twoheadrightarrow X$, 由

$$jgp_1 = fp_1 = fp_2 = jgp_2$$

和 j 的单性可知 $gp_1 = gp_2$. 故余等化子的泛性质确定了唯一的 $\bar{g}$ 使得图表交换. □

因此, 取 $X' = \operatorname{coim} f$, 或取 $Y' = \operatorname{im} f$ 即得

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & Y \\
\operatorname{coim} f \arrow[r] & \operatorname{im} f \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

其中态射 $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ 是唯一的, 这因单态有左消去律而满态有右消去律.

定义 4.5.6 (严格态射) 设 $f : X \to Y$ 的像和余像都存在, 称 f 是**严格态射**, 若 $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ 是同构.

引理 4.5.7 设 $f : X \to Y$ 是 C 中的态射, 则 f 是满态当且仅当 $\operatorname{im} f \simeq Y$; f 是单态当且仅当 $X \simeq \operatorname{coim} f$. 若 f 严格, 则 f 是同构当且仅当 f 既是单态也是满态.

证明 只需证明 f 是满态的情形即可, 因 f 是单态时无非是对偶的情形. 设 f 是满态, 考虑典范的 $\iota_1,\ \iota_2 : Y \rightrightarrows Y \sqcup_X Y$. 则由 $\iota_1 f = \iota_2 f$ 可知 $\iota_1 = \iota_2$, 因此 $\operatorname{im} f = \ker(\iota_1, \iota_2) = Y$.

反之, 若 $\operatorname{im} f$ 与 Y 同构, 由它和 ι_1, ι_2 的合成相等可知 $\iota_1 = \iota_2$. 若另有 $Z \in \operatorname{Ob}(\mathsf{C})$, $g_1, g_2 : Y \rightrightarrows Z$ 使得 $g_1 f = g_2 f$, 则泛性质确定了 $g : Y \sqcup_X Y \to Z$ 使得 $g_i = g\iota_i$. 故 $g_1 = g_2$, 这就说明 f 是满态.

当 f 是严格态射时, f 是同构显然对应既单又满的情形. 反之, 若 f 既单又满, 则对

$$X \twoheadrightarrow \operatorname{coim} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f \hookrightarrow Y$$

应用前述条件即可. □

定义 4.5.8 (核, 余核) 设 C 是存在零对象的 Ab-范畴, $f : X \to Y$ 是 C 中的态射, 则

(1) 若等化子 $\ker(f, 0)$ 存在, 则称 $\ker f := \ker(f, 0)$ 连同单态射 $\ker f \hookrightarrow X$ 是 f 的**核**;

(2) 若余等化子 $\operatorname{coker}(f, 0)$ 存在, 则称 $\operatorname{coker} f := \operatorname{coker}(f, 0)$ 连同满态射 $Y \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$ 是 f 的**余核**.

由定义可知合成 $\ker f \hookrightarrow X \to Y$ 和 $X \to Y \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$ 都是 0, 其泛性质可表为

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dashed, "g'"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "0"] & \\
\ker f \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & T & \\
X \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "h"] \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[ul, dashed, "h'"']
\end{tikzcd}
$$

这无非是等化子和余等化子的泛性质重述.

命题 4.5.9 设 $f : X \to Y$ 是加性范畴 C 中的态射, 则有典范同构

$$\operatorname{im} f \simeq \ker[Y \to \operatorname{coker} f] \hookrightarrow Y$$
$$\operatorname{coim} f \simeq \operatorname{coker}[\ker f \to X] \twoheadleftarrow X$$

在对应的 ker 和 coker 均存在时成立.

证明 只证明 $\operatorname{im} f \simeq \ker[Y \to \operatorname{coker} f]$, 考虑 $\iota_1, \iota_2 : Y \rightrightarrows Y \sqcup_X Y$, 由米田引理可知只需证明对任意 $T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 有

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(T, \operatorname{im} f) &= \{h : T \to Y : \iota_1 h = \iota_2 h\} \\ &= \{h : T \to Y : \forall S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})\, \forall s_1, s_2 : Y \to S\, (s_1 f = s_2 f \implies s_1 h s_2 h)\} \\ &= \{h : T \to Y : \forall S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})\, \forall s : Y \to S\, (sf = 0 \implies sh = 0)\} \\ &= \left\{h : T \to Y : [T \xrightarrow{h} Y \to \operatorname{coker} f] = 0\right\} \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(T, \ker[Y \to \operatorname{coker} f]).\end{aligned}$$

其中第一个等号因 $\operatorname{im} f = \ker(\iota_1, \iota_2)$, 第二个等号因纤维余积的泛性质

$$\operatorname{Hom}(Y \sqcup_X Y, S) \to \operatorname{Hom}(Y, S) \times_{\operatorname{Hom}(X,S)} \operatorname{Hom}(Y, S), \qquad s \mapsto (s'\iota_1, s'\iota_2) =: (s_1, s_2),$$

其中 $s' : Y \sqcup_X Y \to S$ 使得 $s'\iota_1 h = s'\iota_2 h$, 并且上述对应是一一的. 第三个等号取 $s = s_1 - s_2$ 即可, 而最后的等号对 $S = \operatorname{coker} f$ 应用余核的泛性质得到. □

例 4.5.10 (R-Mod 的核与余核) 对模同态 $f : M \to N$, 其核与余核按照经典的方式取成

$$\ker f = f^{-1}(0), \qquad \operatorname{coker} f = N/f(M),$$

因此 $\operatorname{im} f$ 就是 f 在集合论意义下的像, $\operatorname{coim} f = M/\ker f$. 此时态射 $\operatorname{coim} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ 是同构, 这由同态基本定理给出, $M/\ker f \simeq \operatorname{im} f$. 因此 R-Mod 中的态射都是严格的.

定义 4.5.11 (Abel 范畴) 设 A 是加性范畴, 称 A 是 Abel 范畴, 若

(1) A 中的态射 f 总存在核与余核;

(2) A 中的态射都是严格态射.

因此 Abel 范畴上存在所有的有限 $\varinjlim$ 和有限 $\varprojlim$.

由例 4.5.10 可知 R-Mod 是 Abel 范畴, 以 R^{op} 代 R 可知 Mod-R 也是 Abel 范畴.

定理 4.5.12 (Freyd–Mitchell) 每个小的 Abel 范畴都可以正合地嵌入某个模范畴.

证明 (太长省略, 否则我们需要花大半个学期的时间来证明这一件事情.) □

之后讨论复形和同调都会在模范畴中讨论而非在 Abel 范畴中讨论, 这会帮我们省去很多技术上的困难, 因为模范畴上的对象和态射是我们所熟悉的.

4.6 复形上的同调

定义 4.6.1 (R-模复形范畴) 设 R 是环, R-模复形范畴 $\mathsf{C}(R\text{-Mod})$ 指以下资料组成的范畴:

(1) 其对象, R-**模复形** $(C_\bullet, d_\bullet)$ 是指一个 R-模同态列

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

满足 $\forall i \in \mathbb{Z}\, (d_{i-1} d_i = 0)$.

(2) 其态射, **链映射**(这里借助拓扑上的术语) $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}} : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ 使得图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & C'_i \arrow[r, "d'_i"] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

中的每一个方块都交换. 态射的合成是分量上的合成.

$\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 是一个 Abel 范畴. 容易验证其零对象为零复形, $\mathrm{Hom}((C_\bullet, d_\bullet), (C'_\bullet, d'_\bullet))$ 上的 Abel 群结构由分量上的加法确定, 并且容易验证分配律是成立的; 核与余核在每个分量上都存在, 从而整体上也存在; 有限积和有限余积可以被典范地构造出来. 因此只需说明其态射是严格的. 这是自然的, 因模的同态定理在每个分量上都给出同构 $\mathrm{coim}\, \alpha_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}\, \alpha_i$.

定义–命题 4.6.2 (同调群, 同调函子)　对复形 $(C_\bullet, d_\bullet)$, 称 $Z_i(C_\bullet) := \ker d_i$ 为其 i-**闭链**, $B_i(C_\bullet) := \mathrm{im}\, d_{i+1}$ 为其 i-**边缘链**, 定义

$$H_i(C_\bullet) := Z_i(C_\bullet)/B_i(C_\bullet),$$

称作是复形 $(C_\bullet, d_\bullet)$ 的 i-**同调群**. 由此得到的

$$H_i : \mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod}) \to \mathsf{Ab}, \qquad (C_\bullet, d_\bullet) \mapsto H_i(C_\bullet), \quad \alpha \mapsto \tilde{\alpha}_i$$

是一个函子, 称作是 i-**同调函子**.

证明　因为 $\widetilde{\mathrm{id}_{C_\bullet}} = \mathrm{id}_{H_i(C_\bullet)}$ 和 $\widetilde{(\beta\alpha)}_i = \tilde{\beta}_i \tilde{\alpha}_i$ 都是显然的, 于是只需要说明 $\tilde{\alpha}_i$ 是良定义的, 并且是 R-模同态. 为此考虑 $\tilde{z}_i = z_i + B_i(C_\bullet)$, 定义

$$\tilde{\alpha}_i(\tilde{z}_i) := \alpha_i(z_i) + B_i(C'_\bullet),$$

它与代表元 z_i 的选取无关. 为此, 需要验证 $\alpha_i(Z_i(C_\bullet)) \subset Z_i(C'_\bullet)$ 和 $\alpha_i(B_i(C_\bullet)) \subset B_i(C'_\bullet)$.

对 $z_i \in Z_i(C_\bullet)$, 由交换性可知 $d'_i \alpha_i = \alpha_{i-1} d_i$, 于是

$$d'_i \alpha_i(z_i) = \alpha_{i-1} d_i(z_i) = 0,$$

这即 $\alpha_i(z_i) \in Z_i(C'_\bullet)$. 对 $b_i \in B_i(C_\bullet)$, 存在 c_{i+1} 使得 $d_{i+1}(c_{i+1}) = b_i$. 由交换性可知 $\alpha_i d_{i+1} = d'_{i+1}\alpha_{i+1}$, 于是

$$\alpha_i(b_i) = \alpha_i d_{i+1}(c_{i+1}) = d'_{i+1}\alpha_{i+1}(c_{i+1}),$$

记 $\alpha_{i+1}(c_{i+1}) = c'_{i+1}$ 就有 $\alpha_i(b_i) = d'_{i+1} c'_{i+1} \in B_i(C'_\bullet)$. 于是命题得证. □

有时将 R-Mod 看作集中于 0 处的 R-模复形, 从而 R-Mod 可以看作是 $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 的全子范畴. 有时也将 R-Mod 中的对象通过 $M \mapsto \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M$ 嵌入到 $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 中, 看作分次模.

称 $i < 0$ 时总有 $C_i = 0$ 的链复形为 **(下) 链复形**, 而称 $i > 0$ 时总有 $C_i = 0$ 的链复形在记 $C_{-i} = C^i$, $d_{-i} = d^i$ 后得到的链复形为**上链复形**, 上链复形导出的同调群称作**上同调群**. 在代数上它们是完全对偶的, 在拓扑上, 上同调群的定义依赖于 Hom 集的结构, 从而具有与 (下) 同调群不同的拓扑意义.

定义 4.6.3 (复形的短正合列)　称复形列

$$0 \longrightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet) \xrightarrow{\alpha} (C_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\beta} (C''_\bullet, d''_\bullet) \longrightarrow 0$$

是一个**短正合列**, 若对任意 $i \in \mathbb{Z}$, 序列

$$0 \longrightarrow C'_i \xrightarrow{\alpha_i} C_i \xrightarrow{\beta_i} C''_i \longrightarrow 0$$

是正合列.

下面的定理给出从复形的短正合列构造同调群的长正合列的过程.

定理 4.6.4 (短正合列诱导同调长正合列)　设

$$0 \longrightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet) \xrightarrow{\alpha} (C_\bullet, d_\bullet) \xrightarrow{\beta} (C''_\bullet, d''_\bullet) \longrightarrow 0$$

是 R-模复形的短正合列, 则对任意 $i \in \mathbb{Z}$, 存在**连接同态** $\Delta_i : H_i(C''_\bullet) \to H_{i-1}(C'_\bullet)$ 使得序列

$$\cdots \longrightarrow H_i(C'_\bullet) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_i} H_i(C_\bullet) \xrightarrow{\tilde{\beta}_i} H_i(C''_\bullet) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(C'_\bullet) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{i-1}} H_{i-1}(C_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

正合.

证明　第 1 步. 定义连接同态 Δ_i. 对 $z''_i \in Z_i(C''_\bullet)$.

首先, 通过图追踪法得到

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_i \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dd, "d'_i"'] & & C_i \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dd, "d_i"'] & & C''_i \arrow[rr] \arrow[dd, "d''_i"'] & & 0 \\
& & & & c_i \arrow[rr, mapsto, "(1)"] \arrow[dd, mapsto] & & z''_i \arrow[dd, mapsto] & \\
0 \arrow[r] & C'_{i-1} \arrow[rr, "\alpha_{i-1}"] \arrow[dd, "d'_{i-1}"'] & & C_{i-1} \arrow[rr, "\beta_{i-1}"] \arrow[dd, "d_{i-1}"'] & & C''_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dd, "d''_{i-1}"'] & & 0 \\
& & z'_{i-1} \arrow[rr, mapsto, "(2)"] \arrow[dd, mapsto] & & d_i(c_i) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & 0 & \\
0 \arrow[r] & C'_{i-2} \arrow[rr, "\alpha_{i-2}"] & & C_{i-2} \arrow[rr, "\beta_{i-2}"] & & C''_{i-2} \arrow[rr] & & 0 \\
& & d'_{i-1}z'_{i-1} \arrow[rr, mapsto] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

其中 (1) 因 β_i 是满的, (2) 由正合性得到.

于是可以定义

$$\Delta_i : H_i(C''_\bullet) \to H_{i-1}(C'_\bullet), \qquad z''_i + B_i(C'_\bullet) \mapsto z'_{i-1} + B_{i-1}(C'_\bullet),$$

这里 $z'_{i-1} \in \alpha_{i-1}^{-1} d_i \beta_i^{-1}(z''_i)$.

它是良定义的, 若另有 $\tilde{z}'_{i-1} \in \alpha_{i-1}^{-1} d_i \beta_i^{-1}(z''_i)$, 设对应的 $\tilde{c}_i \in C_i$ 使得

$$\alpha_{i-1}(\tilde{z}'_{i-1}) = d_i(\tilde{c}_i), \qquad \beta_i(\tilde{c}_i) = z''_i,$$

而由

$$\alpha_{i-1}(z'_{i-1}) = d_i(c_i), \qquad \beta_i(c_i) = z''_i,$$

可知 $c_i - \tilde{c}_i \in \ker \beta = \operatorname{im} \alpha_i$, 也即存在 $c'_i \in C'_i$ 使得 $\alpha_i(c'_i) = c_i - \tilde{c}_i$. 从而

$$\alpha_{i-1}(z'_{i-1} - \tilde{z}'_{i-1}) = d_i(c_i - \tilde{c}_i) = d_i \alpha_i(c'_i) = \alpha_{i-1} d_i(c'_i),$$

而 α_{i-1} 是单射, $z'_{i-1} - \tilde{z}'_{i-1} = d_i(c'_i) \in B_{i-1}(C'_\bullet)$, 于是 $z'_{i-1} + B_{i-1}(C'_\bullet) = \tilde{z}'_{i-1} + B_{i-1}(C'_\bullet)$.

再证 $\Delta_i(B_i(C''_\bullet)) = 0$. 同样地通过图追踪法

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_i \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dd, "d'_i"'] & & C_i \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dd, "d_i"'] & & C''_i \arrow[rr] \arrow[dd, "d''_i"'] & & 0 \\
& & & & c'_{i+1} \arrow[rr, mapsto, "(1)"] \arrow[dd, mapsto] & & c''_{i+1} \arrow[dd, mapsto] & \\
0 \arrow[r] & C'_{i-1} \arrow[rr, "\alpha_{i-1}"] \arrow[dd, "d'_{i-1}"'] & & C_{i-1} \arrow[rr, "\beta_{i-1}"] \arrow[dd, "d_{i-1}"'] & & C''_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dd, "d''_{i-1}"'] & & 0 \\
& & & & c_i \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & b''_i & \\
0 \arrow[r] & C'_{i-2} \arrow[rr, "\alpha_{i-2}"] & & C_{i-2} \arrow[rr, "\beta_{i-2}"] & & C''_{i-2} \arrow[rr] & & 0 \\
& & 0 \arrow[rr, mapsto] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

即证. 这里 (1) 因 β_{i+1} 满.

第 2 步. 说明序列是正合的.

(分三步完成, 暂时先摆了, 无非是做图追踪, *tikzcd* 太难写了.)

第 3 步. 以上构造的连接同态 Δ_i 是自然的.

这意味着如果

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & D' \arrow[r, "\gamma"] & D \arrow[r, "\delta"] & D'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

中的水平序列都是正合的, 那么它导出图表

$$\begin{tikzcd}
H_i(C'') \arrow[r, "\Delta_i"] \arrow[d, "\tilde{f}''_i"'] & H_{i-1}(C') \arrow[d, "\tilde{f}'_i"] \\
H_i(D'') \arrow[r, "\Delta_i"] & H_{i-1}(D')
\end{tikzcd}$$

交换.

我们只需要对 $z''_i \in Z_i(C'')$ 验证 $f'_{i-1}(z'_{i-1}) \in \gamma_{i-1}^{-1} d_i^D \delta_i^{-1}(f''_i(z_i)'')$ 即可. 这只需要对下图做图追踪.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & C'_i \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & C_i \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & C''_i \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & C'_{i-1} \arrow[rr, "\alpha_{i-1}"] \arrow[dd] & & C_{i-1} \arrow[rr, "\beta_{i-1}"] \arrow[dd] & & C''_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & D'_i \arrow[rr] \arrow[dl] & & D_i \arrow[rr] \arrow[dl] & & D''_i \arrow[rr] \arrow[dl] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & D'_{i-1} \arrow[rr, "\gamma_{i-1}"] & & D_{i-1} \arrow[rr, "\delta_{i-1}"] & & D''_{i-1} \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

于是自然性得证. □

定义 4.6.5 (同伦)　设 α, β 是 $(C_\bullet, d_\bullet)$ 到 $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ 的链映射, 称使得图

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}"'] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha_i-\beta_i"] \arrow[dl, "s_i"'] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}"] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & C'_i \arrow[r, "d'_i"] & C'_{i-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

交换的一族同态 $s = \left\{s_i : C_i \to C'_{i+1}\right\}$ 是 α 到 β 的一个**同伦**, 记作 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta$.

命题 4.6.6　若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\beta}_i$ 对任何 $i \in \mathbb{Z}$ 成立.

证明　这因对任何 $z_i + B_i(C)$, 有

$$(\alpha_i - \beta_i)(z_i) = (d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i)(z_i) = d'_{i+1}s_i(z_i) \in B_i(C')$$

成立. □

引理 4.6.7　同伦是一个等价关系.

证明　只证明传递性, 设 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta, \beta \overset{t}{\sim} \gamma$, 则

$$\begin{aligned}
\alpha_i - \gamma_i &= (\alpha_i - \beta_i) + (\beta_i - \gamma_i) \\
&= (d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i) + (d'_{i+1}t_i + t_{i-1}d_i) \\
&= d'_{i+1}(s_i + t_i) + (s_{i-1}t_{i-1})d_i.
\end{aligned}$$

这即 $\alpha \overset{s+t}{\sim} \gamma$. □

命题 4.6.8　设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都是链映射,

$$(C_\bullet, d_\bullet) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} (C'_\bullet, d'_\bullet) \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightrightarrows}} (C''_\bullet, d''_\bullet)$$

满足 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta, \gamma \overset{t}{\sim} \delta$, 则 $\gamma\alpha \sim \delta\beta$.

证明 我们只需注意到下面的两个图

$$\begin{tikzcd} C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] \arrow[d, "\gamma_{i+1}"'] & C'_i \arrow[d, "\gamma_i"'] \\ C''_{i+1} \arrow[r, "d''_{i+1}"] & C''_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "\beta_{i-1}"'] \\ C'_i \arrow[r, "d'_i"] & C'_{i-1} \end{tikzcd}$$

交换, 直接计算

$$\begin{aligned} \gamma_i\alpha_i - \delta_i\beta_i &= (\gamma_i\alpha_i - \gamma_i\beta_i) + (\gamma_i\beta_i - \delta_i\beta_i) \\ &= \gamma_i(d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i) + (d''_{i+1}t_i - t_{i-1}d'_i)\beta_i \\ &= d''_{i+1}\gamma_{i+1}s_i + \gamma_i s_{i-1}d_i + d''_{i+1}t_i\beta_i + t_{i-1}\beta_{i-1}d_i \\ &= d''_{i+1}(\gamma_{i+1}s_i + t_i\beta_i) + (\gamma_i s_{i-1} + t_{i-1}\beta_{i-1})d_i. \end{aligned}$$

于是 $u = \{u_i = \gamma_{i+1}s_i + t_i\beta_i\}$ 给出了 $\gamma\alpha$ 到 $\delta\beta$ 的同伦. □

4.7 模的解消 导出函子

定义 4.7.1 (解消) 设 M_R 是一个模, 链复形 $(C_\bullet, d_\bullet)$ 是 M 上的一个复形, 这即存在**增广同态** $\varepsilon : C_0 \to M$ 使得 $\varepsilon d_1 = 0$, 也即

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

是复形. 称 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 的一个**解消**.

此时称 $(C_\bullet, d_\bullet)$ 是 M 上的一个复形. 若每一个 C_i 都是投射模, 则称 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 的**投射解消**. 类似地有**内射解消**和**自由解消**的概念.

定理 4.7.2 (比较引理) 设 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 的投射解消, $(C'_\bullet, d'_\bullet, \varepsilon')$ 是 M' 的一个解消, 则对任意模同态 $u : M \to M'$, 存在链映射 $\alpha : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ 使得

$$u\varepsilon = \varepsilon'\alpha_0,$$

且 α 在同伦的意义下是唯一的.

证明 我们归纳地构造 α, 因为 C_0 是投射模, $C'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} M \to 0$ 是正合的, 于是存在 $\alpha_0 : C_0 \to C'_0$ 使得 $u\varepsilon = \varepsilon'\alpha_0$. 我们归纳地假设 $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ 都已经被定义好, 使得图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "d'_1"] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

交换. 在交换图

$$\begin{tikzcd} & C_n \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[d, "\alpha_{n-1}d_n"] & \\ C'_n \arrow[r] \arrow[dr, "d'_n"'] & \operatorname{im} d'_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & C'_{n-1} & \end{tikzcd}$$

中考虑如下的合成

$$d'_{n-1}\alpha_{n-1}d_n=\alpha_{n-2}d_{n-1}d_n=0,$$

这说明 $\operatorname{im}(\alpha_{n-1}d_n)\subset\ker d'_{n-1}=\operatorname{im}d'_n$, 于是由 C_n 是投射模可知存在 α_n 使得上图交换, 于是 α 可以被归纳地构造.

如果另有 $\beta=\{\beta_i\}$ 也满足条件, 记 $\gamma=\alpha-\beta$, 则

$$\varepsilon'\gamma_0=\varepsilon(\alpha_0-\beta_0)=u\varepsilon-u\varepsilon=0,$$

这说明 $\operatorname{im}\gamma_0\subset\ker\varepsilon'=\operatorname{im}d'_1$, 而 C_0 是投射模, 故存在 $s_0:C_0\to C'_1$ 使得

$$d'_1s_0=\gamma_0.$$

(这里将 s_{-1} 看作零态射). 归纳地假设 $s_0,\dots,s_{n-1}$ 都已经被定义好, 使得图

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\gamma_0"] \arrow[dl, "s_0"'] & 0 \arrow[dl, "s_{-1}"'] \\
{} \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_2 \arrow[r, "d'_2"] & C'_1 \arrow[r, "d'_1"] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & 0
\end{tikzcd}$$

交换, 考虑态射的合成

$$\begin{aligned}
d'_n(\gamma_n-s_{n-1}d_n)&=d'_n\gamma_n-d'_ns_{n-1}d_n=(\gamma_{n-1}-d'_ns_{n-1})d_n\\
&=(d'_ns_{n-1}+s_{n-2}d_{n-1}-d'_ns_{n-1})d_n=s_{n-2}d_{n-1}d_n=0,
\end{aligned}$$

这即 $\operatorname{im}(\gamma_n-s_{n-1}d_n)\subset\ker d'_n=\operatorname{im}d'_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "\gamma_n-s_{n-1}d_n"] & \\
C'_{n+1} \arrow[r] \arrow[dr, "d'_{n+1}"'] & \operatorname{im}(\gamma_n-s_{n-1}d_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C'_n &
\end{tikzcd}$$

因 C_n 是投射模, 故存在 $s_n:C_n\to C'_{n+1}$ 使得

$$d'_{n-1}s_n=\gamma_n-s_{n-1}d_n,$$

即 $\gamma_n=d'_{n-1}s_n+s_{n-1}d_n$, 这就说明了 $\alpha\overset{s}{\sim}\beta$. □

定义–命题 4.7.3 (自由解消)　设 M 是一个 R–模, 存在自由链复形 $(F_\bullet,d_\bullet,\varepsilon)$ 是 M 的解消, 称作是**自由解消**. 自由解消在同伦意义下是唯一的.

证明　取自由模 F_0 使得 $\varepsilon:F_0\twoheadrightarrow M$, 于是得到短正合列

$$0\longrightarrow\ker\varepsilon\xrightarrow{\ i\ }F_0\xrightarrow{\ \varepsilon\ }M\longrightarrow0$$

再取 $d_1=i\pi:F_1\to F_0$ 满足 F_1 是自由模, $\pi:F_1\twoheadrightarrow\ker\varepsilon$ 是满态, 则由正合列

$$0\longrightarrow\ker d_1\xrightarrow{\ i_2\ }F_1\xrightarrow{\ d_1\ }F_0\xrightarrow{\ \varepsilon\ }M\longrightarrow0$$

由此可以得到一列自由模 $(F_n)_{n\geqslant1}$ 使得 $(F_\bullet,d_\bullet,\varepsilon)$ 是 M 的自由解消, 存在性得证.

下面说明它在同伦意义下的唯一性, 只需要注意到比较引理保证了

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
{} \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "d_1'"] \arrow[d, "\beta_1"] & F_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\beta_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
{} \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "d_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

中 $\beta\alpha \simeq \mathrm{id}$ 即可. 同理可证 $\alpha\beta \simeq \mathrm{id}$. □

比较引理和自由解消都可以作对偶, 从而得到内射的版本.

命题 4.7.4 (内射解消) (摆, 反正就是比较引理的对偶版本, 无非是投射对象变内射对象, 箭头全反过来, ker 变 coker, im 变 coim 这种东西.)

定义 4.7.5 (导出函子) 下设 $F : \mathsf{Mod}\text{–}R \to \mathsf{Ab}$ 是一个加性函子, M_R 是右 R-模.

(1) 取定其投射解消 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$, 那么

$$\longrightarrow FC_n \xrightarrow{Fd_n} FC_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow FC_1 \xrightarrow{Fd_1} FC_0 \xrightarrow{F\varepsilon} FM \longrightarrow 0$$

是一个复形, 在 FC_0 处截断得到 $(FC_\bullet, Fd_\bullet)$ 也是复形. 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 定义 F 的 n **次左导出函子**为

$$L_nF : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Ab}, \qquad M \mapsto \begin{cases} H_n(FC_\bullet), & n > 0 \\ FC_0/\mathrm{im}\, F(d_1), & n = 0 \end{cases}$$

(2) 取定其内射解消 $(D^\bullet, d^\bullet, \eta)$, 那么

$$0 \longrightarrow FM \xrightarrow{F\eta} FD^0 \xrightarrow{Fd^0} FD^1 \xrightarrow{Fd^1} \cdots \longrightarrow FD^n \xrightarrow{Fd^n} \cdots$$

是一个复形, 在 FD^0 处截断得到 $(FD^\bullet, Fd^\bullet)$ 也是复形. 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 定义 F 的 n **次右导出函子**为

$$R^nF : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Ab}, \qquad M \mapsto \begin{cases} H^n(FD^\bullet), & n > 0 \\ \ker Fd^0, & n = 0 \end{cases}$$

定理 4.7.6 (马蹄引理) 设序列 $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ 正合, 则存在 M', M, M'' 的投射解消 $(C'_\bullet, d'_\bullet, \varepsilon'), (C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon), (C''_\bullet, d''_\bullet, \varepsilon'')$ 和链映射 i, p 使得图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C'_\bullet, d'_\bullet) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & (C_\bullet, d_\bullet) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varepsilon"] & (C''_\bullet, d''_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

交换, 其中水平的两行均正合.

证明 取定 M' 和 M'' 的投射解消 $(C'_\bullet, d'_\bullet, \varepsilon')$ 和 $(C''_\bullet, d''_\bullet, \varepsilon'')$, 归纳地构造 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$. 取 $C_0 = C'_0 \oplus C''_0$, i_0 和 p_0 分别是标准的嵌入和投影, 则在下图中

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & C_0 \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & C''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] \arrow[dl, "\beta^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

水平的两行均正合, 竖直两列均正合. 因为 C''_0 是投射模, 于是存在 $\beta^* : C''_0 \to M$ 使得 $\beta\beta^* = \varepsilon''$. 定义

$$\varepsilon : C_0 \to M, \qquad (c'_0, c''_0) \mapsto \alpha\varepsilon'(c'_0) + \beta^*(c''_0),$$

则由定义 $\varepsilon i_0 = \alpha\varepsilon'$, $\beta\varepsilon = \varepsilon'' p_0$, 即 ε 使得上图交换.

作图追踪

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[dd, "\varepsilon'"'] & C_0 \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[dd, "\varepsilon"'] & C''_0 \arrow[r] \arrow[dd, "\varepsilon''"'] & 0 \\
& & c \arrow[r, mapsto] & c''_0 \arrow[d, "(1)"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
& & m \arrow[r, mapsto] & \beta(m) &
\end{tikzcd}$$

这里 $c = (0, c''_0)$, (1) 中 c''_0 存在因为 ε'' 是满态. 令 $x = m - \varepsilon(c_0) \in M$, 则 $\beta(x) = 0$, 即 $x \in \ker\beta = \operatorname{im}\alpha$.

作图追踪

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[dd, "\varepsilon'"'] & C_0 \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[dd, "\varepsilon"'] & C''_0 \arrow[r] \arrow[dd, "\varepsilon''"'] & 0 \\
& c'_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & i(c'_0) & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
& x' \arrow[r, mapsto, "(1)"] & x - \varepsilon(c) & &
\end{tikzcd}$$

即 $\varepsilon(c'_0, 0) = m - \varepsilon(c)$. 由此可知 $m = \varepsilon(c'_0, c''_0)$, 即 ε 是满同态. 至此我们定义了 C_0 与 ε.

分别将 i_0 和 p_0 限制到 $\ker\varepsilon'$ 和 $\ker\varepsilon$ 中, 记限制后的态射为 $i_0|$ 和 $p_0|$. 由蛇引理可知序列

$$0 \longrightarrow \ker\varepsilon' \xrightarrow{i_0|} \ker\varepsilon \xrightarrow{p_0|} \ker\varepsilon'' \longrightarrow 0$$

正合. 在下图中重复上述讨论定义 C_1, i_1, p_1, 则存在 $\bar{d}_1 : C_1 \to \ker\varepsilon$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
& C'_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\bar{d}_1"] & C''_1 & \\
0 \arrow[r] & \ker\varepsilon' \arrow[r, "i_0|"] \arrow[d, hook] & \ker\varepsilon \arrow[r, "p_0|"] \arrow[d, hook] & \ker\varepsilon'' \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, "i_0"] & C_0 \arrow[r, "p_0"] & C''_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由此, 定义 d_1 为 $\bar{d}_1$ 与嵌入 $\ker\varepsilon \to C_0$ 的合成, 于是 C_1 和 d_1 也被定义.

由归纳法可知 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 可以由此归纳地定义. □

命题 4.7.7 (左导出函子的长正合列) 设 F : Mod-R → Ab 是一个加性函子, 对任意短正合列 $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$, 存在一个连接同态 $\Delta_n : L_nFM'' \to L_{n-1}FM'$ 使得序列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nFM' \xrightarrow{L_nF(\alpha)} L_nFM \xrightarrow{L_nF(\beta)} L_nFM'' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}FM' \xrightarrow{L_{n-1}F(\alpha)} \cdots$$

正合.

证明 由马蹄引理, 分别存在 M', M, M'' 的投射解消使得序列

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{i} C_\bullet \xrightarrow{p} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

因 $C_i = C'_i \oplus C''_i$, 于是其投射解消在每个分量上都是分裂的. 而加性函子保持分裂的正合列, 于是

$$0 \longrightarrow FC'_\bullet \xrightarrow{Fi} FC_\bullet \xrightarrow{Fp} FC''_\bullet \longrightarrow 0$$

是复形的短正合列. 所求证的序列就是其同调长正合列. □

命题 4.7.8 (右导出函子的长正合列) 设 F : Mod-R → Ab 是一个加性函子, 对任意短正合列 $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$, 存在一个连接同态 $\Delta^n : R^nFM'' \to R^{n+1}FM'$ 使得序列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} R^nFM' \xrightarrow{R^nF(\alpha)} R^nFM \xrightarrow{R^nF(\beta)} R^nFM'' \xrightarrow{\Delta^n} R^{n+1}FM' \xrightarrow{R^{n+1}F(\alpha)} \cdots$$

正合.

证明 应用内射版本的马蹄引理即可, 其余过程与命题 4.7.7 完全一致. □

4.8 Ext 函子和 Tor 函子

作为导出函子的两个重要实例, 本节讨论 Ext 函子和 Tor 函子. 它们分别是 Hom 函子的导出函子和张量积函子的导出函子. 在 4.2 节已经说明了 Hom 函子和张量积函子的对偶性, 因而 Ext 函子和 Tor 函子在某种意义下也是 "对偶" 的.

定义 4.8.1 (平衡函子) 设 $F : \mathsf{Mod}\text{-}R \times \mathsf{Mod}\text{-}S \to \mathsf{Mod}\text{-}T$ 对两个变元都是左正合的, 且对任何内射模 $I_1,\ I_2$ 有

$$F(I_1, \cdot) : \mathsf{Mod}\text{-}S \to \mathsf{Mod}\text{-}T, \qquad F(\cdot, I_2) : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}T$$

是正合的, 则称 F 是一个**平衡函子**. 对偶地, 若 F 对两个变元都是右正合的, 且对任何投射模 $P_1,\ P_2$ 有

$$F(P_1, \cdot) : \mathsf{Mod}\text{-}S \to \mathsf{Mod}\text{-}T, \qquad F(\cdot, P_2) : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}T$$

是正合的, 也称 F 是一个**平衡函子**.

设 F 是平衡函子, 当它对每个变元左正合 (*或右正合*) 时可以对两个变元分别取右导出函子 (*或左导出函子*), 分别记作 R^n_{I} 和 R^n_{II} (*或* L^{I}_n *和* L^{II}_n).

命题 4.8.2 设 $F : \mathsf{Mod}\text{-}R \times \mathsf{Mod}\text{-}S \to \mathsf{Mod}\text{-}T$ 是平衡函子, 它对两个变元左正合. 则存在双函子的典范同构 $R^n_{\mathrm{I}}(M_1, M_2) \simeq R^n_{\mathrm{II}}(M_1, M_2)$.

定义 4.8.3 (Ext 函子) 对双函子 $\mathrm{Hom}_R(\cdot, \cdot)$, 它对每个变元都是左正合的. 对 $n \in \mathbb{Z}$ 定义双函子

$$\mathrm{Ext}^n_R := R^n_{\mathrm{I}}\mathrm{Hom}_R(\cdot, \cdot) \simeq R^n_{\mathrm{II}}\mathrm{Hom}_R(\cdot, \cdot),$$

称作是 **Ext 函子**.

具体地, 对 $M,\ N$, 有 $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = \mathrm{Ext}^n_R(\cdot, N)(M) = \mathrm{Ext}^n_R(M, \cdot)(N)$. 因此若 M 的投射解消为 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$, N 的内射解消为 $(D^\bullet, d^\bullet, \eta)$, 则有

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(C_\bullet, N)) = H^n(\mathrm{Hom}_R(M, D^\bullet)).$$

特别地, 当 $n = 0$ 时 $\mathrm{Ext}^0 \simeq \mathrm{Hom}$.

命题 4.8.4 (Ext 函子的长正合列) 设序列 $0 \to N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \to 0$ 是正合的, 则有长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \xrightarrow{\Delta^0} \mathrm{Ext}^1_R(M, N') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M, N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M, N'') \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N') \longrightarrow \cdots$$

而若序列 $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ 是正合的, 则有长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(M', N) \xrightarrow{\Delta^0} \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

注意到长正合列对第一个变元反变, 对第二个变元共变.

证明　分别使用投射版本和内射版本的马蹄引理, 所求证即为对应的长正合列. □

符号 Ext 表示扩张 extension, 这因 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ 中的元素与扩张 $0\to N\to E\to M\to 0$ 的同构类一一对应.

引理 4.8.5 (投射模与内射模的 Ext 刻画)　在 Mod-R 中,

(1)　P 是投射模 $\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(P,\cdot)=0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(P,\cdot)=0$;

(2)　I 是内射模 $\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(\cdot,I)=0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\cdot,I)=0$.

证明　只证明 (1), (2) 是其对偶版本. 使用轮转证法.

设 P 是投射模, 将 P 自然地看作集中于 $i=0$ 处的复形, 则 $(C_\bullet,d_\bullet,\mathrm{id}_P)$ 就是 P 的投射解消. 因此在正合列

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\mathrm{id}_P} P \longrightarrow 0$$

中导出 $\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(P,\cdot)=0$.

$\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(P,\cdot)=0 \implies \mathrm{Ext}^1_R(P,\cdot)=0$ 是显然的.

下面设 $\mathrm{Ext}^1_R(P,\cdot)=0$, 设 $0\to K\xrightarrow{\eta}M\xrightarrow{\varepsilon}P\to 0$ 正合, 其中 M 是投射模. 则有序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,N) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\eta^*} \mathrm{Hom}_R(K,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(P,N)$$

对任何 N_R 都是正合的, 因此 η^* 是满同态. 特别地, 取 $N=K$, 由 η^* 的满性可知对 $\mathrm{id}_K\in\mathrm{Hom}_R(K,K)$ 存在 $\eta\in\mathrm{Hom}_R(M,K)$ 使得 $\eta^*(\xi)=\xi\eta=\mathrm{id}_K$, 这说明序列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[l, bend left, "\xi"] \arrow[r, "\varepsilon"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

分裂. 因此 P 是 M 的直和因子, 由 M 投射可知 P 投射. □

定义–定理 4.8.6 (扩张)　称短正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是 M 被 N 的一个**扩张**, 或称 E 是 M 被 N 的一个扩张. 称 M 被 N 的两个扩张是等价的, 若存在 $\gamma: E\to E'$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha'"] & E' \arrow[r, "\beta'"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

并以 $E(M,N)$ 记 M 被 N 扩张的等价类. 则存在 $E(M,N)$ 到 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ 的双射.

证明　取 $0\to K\xrightarrow{\eta}P\xrightarrow{\varepsilon}M\to 0$ 是正合列, P 是投射模, 则由序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_R(P,N) \xrightarrow{\eta^*} \mathrm{Hom}_R(K,N) \xrightarrow{\Delta^0} \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(P,N)$$

正合 (注意到 $\mathrm{Ext}^1_R(P,N)=0$) 可知

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N)=\mathrm{Hom}_R(K,N)/\operatorname{im}\eta^*=\operatorname{coker}\eta^*.$$

任取 M 被 N 的扩张 $0\to N\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}M\to 0$, 考虑

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "u"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\lambda"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] & E \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因 P 是投射模, 故存在 $\lambda : P \to E$ 使得 $\beta\lambda = \varepsilon$. 而第一行是正合的, 于是 $\varepsilon\eta = 0$, 从而 $\beta\lambda\eta = 0$. 这即

$$\forall x \in K\, (\lambda\eta x \in \ker\beta = \operatorname{im}\alpha) \implies \exists y \in N\, (\alpha y = \lambda\eta x).$$

令 $u : K \to N, x \mapsto y$, 则 $u : K \to N$ 使得上图交换, 即 $\alpha u = \lambda\eta$.

下面定义 $E(M, N)$ 到 $\operatorname{coker}\eta^*$ 的映射

$$\varphi : E(M, N) \to \operatorname{coker}\eta^*, \qquad [E] \mapsto u + \operatorname{im}\eta^*,$$

这一定义是合理的, 若另有 $\lambda' : P \to E$ 使得 $\beta\lambda' = \varepsilon$, 则根据以上讨论存在 $u' : K \to N$ 使得 $\alpha u' = \lambda'\eta$. 此时

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda - \lambda') = \beta\lambda - \beta\lambda' = \varepsilon - \varepsilon = 0 &\implies (\lambda - \lambda')x \in \ker\beta = \operatorname{im}\alpha \\
&\implies \exists y\, (\alpha y = (\lambda - \lambda')x).
\end{aligned}$$

令 $\tau : x \mapsto y$, 则 $\alpha\tau = \lambda - \lambda'$, 而

$$\lambda'\eta = (\lambda - \alpha\tau)\eta = \lambda\eta - \alpha\tau\eta = \alpha u - \alpha\tau\eta = \alpha(u - \tau\eta) = \alpha u'.$$

因 α 是单同态, 故 $u' = u - \tau\eta$, 这即 $u - u' = \tau\eta = \eta^*(\tau) \in \operatorname{im}\eta^*$. 因此若 E 与 E' 在同一等价类中, 考虑

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "u"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\lambda"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则

$$\varphi([E']) = \mathrm{id}_N u + \operatorname{im}\eta^* = u + \operatorname{im}\eta^* = \varphi([E]),$$

这即 u 与代表元的选取无关.

对 $u + \operatorname{im}\eta^* \in \operatorname{coker}\eta^*$, 定义

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "u"] & P \\
N &
\end{tikzcd}
\implies
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "u"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\lambda"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] & E \arrow[r, dashed, "\beta"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

就得到扩张 $0 \to N \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \to 0$, 这即 φ 是满的.

再证 φ 是单的. 对 $\varphi([E]) = u + \operatorname{im}\eta^*$, 则上图中右侧部分确定的 $0 \to N \to E \to M \to 0$ 唯一地对应左侧的推出, 因此 φ 是单射. □

另一个主题是 Tor 函子.

定义 4.8.7 (Tor 函子) 对双函子 $- \otimes_R -$, 它对每个变元都是右正合的, 定义双函子

$$\operatorname{Tor}_n^R := L_n^{\mathrm{I}}(- \otimes_R -) \simeq L_n^{\mathrm{II}}(- \otimes_R -),$$

称作是 **Tor 函子**.

具体地, 对 M, N, 有 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := \mathrm{Tor}_n^R(\cdot,N)(M) = \mathrm{Tor}_n^R(M,\cdot)(N)$. 因此若 M 的投射解消为 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$, N 的投射解消为 $(C'_\bullet, d'_\bullet, \varepsilon')$, 则有

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) = H_n(M \otimes_R C'_\bullet) = H_n(C_\bullet \otimes_R N).$$

特别地, 当 $n=0$ 时 $\mathrm{Tor}_0 \simeq - \otimes -$.

命题 4.8.8 (Tor 函子的长正合列)　设序列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ 是正合的, 则有长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(M,N') \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M,N'') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M,N'') \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$

而若序列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是正合的, 则有长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M'',N) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(M',N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M'',N) \xrightarrow{\partial_1} M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

注意到长正合列对两个变元都是共变的.

证明　与 Ext 的长正合列类似, 这无非是同调长正合列. □

引理 4.8.9 (平坦模的 Tor 刻画)　设 R 是环, 则

(1)　M_R 是平坦模 $\iff \mathrm{Tor}_{\geqslant 1}^R(M,\cdot) = 0 \iff \mathrm{Tor}_1^R(M,\cdot) = 0$;

(2)　${}_RN$ 是平坦模 $\iff \mathrm{Tor}_{\geqslant 1}^R(\cdot,N) = 0 \iff \mathrm{Tor}_1^R(\cdot,N) = 0$.

证明　只证 Mod-R 的情形, R-Mod 是其对偶版本, 使用轮转证法.

若 M 是平坦模, 任取 N 的投射解消 $(C_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$, 那么 M 的平坦性结合 $C_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} N \to 0$ 正合导出

$$M \otimes_R C_\bullet \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \varepsilon} M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

也是正合的. 这即 $\mathrm{Tor}_{\geqslant 1}^R(M,N) = 0$.

$\mathrm{Tor}_{\geqslant 1}^R(M,\cdot) = 0 \implies \mathrm{Tor}_1^R(M,\cdot) = 0$ 是显然的.

下面设 $\mathrm{Tor}_1^R(M,\cdot) = 0$, 对任何正合列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$, 有 Tor 函子的长正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N'') \longrightarrow M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$

这就说明 M 是平坦的. □

符号 Tor 来自挠 torsion, 这因对环 R 的左理想 $\mathfrak{a}$ 和右 R-模 M, 因 R 作为自由左 R-模是平坦的, 由序列 $0 \to \mathfrak{a} \to R \to R/\mathfrak{a} \to 0$ 正合可知存在典范同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(M,R/\mathfrak{a}) &\simeq \ker[M \otimes_R \mathfrak{a} \to M \otimes_R R \simeq M] \\ &\simeq \left\{\sum_i m_i \otimes a_i \in M \otimes_R \mathfrak{a} : \sum_i m_i a_i = 0\right\}.\end{aligned}$$

特别地, 若 $t \in R$ 是非右零因子, $\mathfrak{a} = Rt$, 有

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,R/Rt) \simeq \{m \in M : mt = 0\}.$$

这即 t-挠子模.

4.9 Hochschild 同调与上同调

下面设 K 是交换环, 将 K-模的张量积 $\otimes_K$ 直接记作 $\otimes$. 若 M 是 K-模, 其 m 重张量积记作 $M^{\otimes n}$, 并约定 $M^{\otimes 0} = K$. 设 A 是 K-代数, 默认 (A, A)-双模上的左乘与右乘相等, 此时可将 (A, A)-双模与 $A \otimes A^{\mathrm{op}}$-模等同起来. 记 $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ 是 A 的**包络代数**.

定义 4.9.1 (杠复形) 设 A 是 K-代数, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 定义 (A, A)-双模

$$\mathsf{B}_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A = A^{\otimes(n+2)}.$$

其上的 (A, A)-双模结构为

$$a(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})a' := aa_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}a'.$$

定义同态

$$b_n : \mathsf{B}_n A \to \mathsf{B}_{n-1} A, \qquad a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \cdots.$$

则 $\mathsf{B}A := (\mathsf{B}_\bullet A, b_\bullet)$ 是一个复形, 称作是 A 的**杠复形**.

经典的记法是将 $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$ 记作 $(a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1})$, 则同态 b_n 可以看作以所有可能方式抽掉一条杠后符号交错加总. 因此 $b_{n-1}b_n = 0$ 是自然的.

命题 4.9.2 (杠复形作为 A 的解消) 设 A 是 K-代数, 定义增广同态

$$\varepsilon : \mathsf{B}_0 A \to A (=: \mathsf{B}_{-1} A), \qquad (a_0 \mid a_1) \mapsto a_0 a_1,$$

则 $(\mathsf{B}_\bullet A, b_\bullet, \varepsilon)$ 是 A 的解消. 特别地, 若 A 自由, 则 $(\mathsf{B}_\bullet A, b_\bullet, \varepsilon)$ 是 A 的自由解消.

证明 这即证明增广复形是正合的, 为此需要证明 id 与零链映射是同伦的.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathsf{B}_{n+1}A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathsf{B}_n A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "s_n"] & \cdots \arrow[r] & \mathsf{B}_0 A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "s_{-1}"] & 0 \\
{} \arrow[r] & \mathsf{B}_{n+1}A \arrow[r] & \mathsf{B}_n A \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathsf{B}_0 A \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

也即需要构造 $s = (s_n)_{n \geqslant -1}$ 使得 $b_{n+1}s_n + s_{n-1}b_n = \mathrm{id}$. 约定 $b_{-1} = 0, s_{-2} = 0$.

取

$$s_n : \mathsf{B}_n A \to \mathsf{B}_{n+1} A, \qquad (a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}) \mapsto (1 \mid a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}),$$

则 s_n 是 K-线性的, 从而可以线性地延拓到 $\mathsf{B}_n A$ 上. 验证

$$\begin{aligned}
&(b_{n+1}s_n + s_{n-1}b_n)(a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}) \\
&\qquad = b_{n+1}(1 \mid a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}) + s_{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\cdots \mid a_k a_{k+1} \mid \cdots)\right) \\
&\qquad = (a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} (\cdots \mid a_k a_{k+1} \mid \cdots) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\cdots \mid a_k a_{k+1} \mid \cdots) \\
&\qquad = (a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}).
\end{aligned}$$

因此 $b_{n+1}s_n + s_{n-1}b_n = \mathrm{id}$. 特别地, 若 $n = -1$, 则 $b_0 s_{-1}(a) = b_0(1 \mid a) = a$ 也成立. 因此 $(\mathsf{B}_\bullet A, b_\bullet, \varepsilon)$ 是 A 的解消.

若 A 是自由的, 此时

$$\mathsf{B}_n A := A^{\otimes(n+2)} \simeq A^e \otimes A^{\otimes n}$$

看作 A^e-模是自由的. 其中同构由 $(a_0 \mid \cdots \mid a_{n+1}) \mapsto (a_0 \mid a_{n+1}) \otimes (a_1 \mid \cdots \mid a_n)$ 给出, 从而是自由解消. □

定义 4.9.3 (Hochschild 同调和上同调) 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 定义 K-线性的函子如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}_n &: (A,A)\text{-}\mathsf{Mod} \to K\text{-}\mathsf{Mod}, && M \mapsto H_n(M \otimes_{A^e} \mathsf{B}A) \\ \mathrm{HH}^n &: (A,A)\text{-}\mathsf{Mod} \to K\text{-}\mathsf{Mod}, && M \mapsto H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathsf{B}A, M)) \end{aligned}$$

前者称作 M 的 **Hochschild 同调**, 后者称作 M 的 **Hochschild 上同调**.

当 $M = A$ 时, 它定义了 $\mathrm{HH}_n(A)$ 与 $\mathrm{HH}^n(A)$.

在 Hochschild 的原始定义中, 引入了两个 Hochschild 复形

$$\begin{aligned} C_\bullet(A,M) &:= [\cdots \to M \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{d_n} M \otimes A^{\otimes(n-1)} \to \cdots \to M \otimes A \xrightarrow{d_1} M] \\ C^\bullet(A,M) &:= [M \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}_K(A,M) \xrightarrow{d^1} \cdots \to \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n},M) \xrightarrow{d^n} \cdots] \end{aligned}$$

其中 $d_n : M \otimes A^{\otimes n} \to M \otimes A^{\otimes(n-1)}$ 由

$$d_n(m \mid a_1 \mid \cdots \mid a_n) = (ma_1 \mid \cdots \mid a_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(m \mid \cdots \mid a_k a_{k+1} \mid \cdots) + (-1)^n(a_n m \mid a_1 \mid \cdots \mid a_{n-1})$$

确定.

视 $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, M)$ 的元素为多重线性映射 $A^n \to M$, 则 $d^n : \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, M) \to \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes(n-1)}, M)$ 由

$$(d^n f)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(\ldots, a_k a_{k+1}, \ldots) + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1}$$

确定. 于是对 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 有同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} \mathsf{B}_n A &\xrightarrow{\quad\sim\quad} M \otimes A^{\otimes n} \\ m \otimes (a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &\longmapsto (a_{n+1} m a_0 \mid a_1 \mid \cdots \mid a_n \mid 1) \\ m \otimes (1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &\longleftarrow\!\shortmid (m \mid a_1 \mid \cdots \mid a_n) \end{aligned}$$

这即 $d_n \simeq \mathrm{id}_M \otimes b_n$. 而

$$\varphi \mapsto [(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \varphi(1, a_1 \ldots, a_n, 1)], \qquad f \mapsto [a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \mapsto a_0 f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1}],$$

这即 b_n 的拉回 $b_n^* \simeq d_n$. 因此这些同构对应复形的同构, 这即

$$\mathrm{HH}^n(A,M) = H^n(C^\bullet(A,M)), \qquad \mathrm{HH}_n(A,M) = H_n(C_\bullet(A,M)).$$

于是以下的结论成立.

命题 4.9.4 设 M 是 (A,A)-双模, 则

(1) 若 A 作为 K-模是投射模, 则 $\mathrm{HH}^n(M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)$;

(2) 若 A 作为 K-模是平坦模, 则 $\mathrm{HH}_n(M) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M,A)$.

证明 (1) 若 A 是投射 K-模, 则它是自由模的直和因子, 于是 $A^{\otimes n}$ 仍是投射 K-模. 将 $\mathsf{B}_n A = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ 视作 A^e-模, 则

$$A \otimes - \otimes A : K\text{-}\mathsf{Mod} \to A^e\text{-}\mathsf{Mod}$$

是忘却函子的左伴随, 因此保持投射模. 这即杠复形 BA 给出了 A 作为左 A^e-模的投射解消. 因此

$$\mathrm{HH}^n(M)=H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathsf{B}A,M))=\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M).$$

(2) 若 A 是平坦 K-模, 则 $A^{\otimes n}$ 仍是平坦的. 而由

$$-\otimes_{A^e}(A\otimes A^{\otimes n}\otimes A)\simeq -\otimes A^{\otimes n}$$

可知 $A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ 也是平坦的. 因此杠复形 BA 给出 A 作为左 A^e-模的平坦解消, 于是

$$\mathrm{HH}_n(M)=H_n(M\otimes_{A^e}\mathsf{B}A)=\mathrm{Tor}^{A^e}_n(M,A).$$

□

推论 4.9.5 对自由 K-模 A, $\mathrm{HH}^n(M)=\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)$, $\mathrm{HH}_n(M)=\mathrm{Tor}^{A^e}_n(M,A)$.

Hochschild 同调和上同调给出了一些经典的例子. 以零次和一次情形为例:

例 4.9.6 (零次情形: 中心和余中心) 考虑 M 的 0 次 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^0(M)$, 由定义可知

$$d^0: M\to \mathrm{Hom}_K(A,M),\qquad m\mapsto [a\mapsto ma-am].$$

于是

$$\mathrm{HH}^0(M)=\ker d^0=\{m\mathrm{im}\,M:\forall a\in A\,(ma=am)\},$$

这即 M 的**中心**.

再考虑 M 的 0 次 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_0(M)$, 由定义 $d_0: M\to 0$, 于是 $\ker d_0=M$. 而

$$d_1: M\otimes A\to M,\qquad (m\mid a)\mapsto ma-am$$

故 $\mathrm{im}\,d_1=[M,A]$. 其中 $[M,A]=\langle ma-am: a\in A,\ m\in M\rangle$ 是 M 的子 K-模. 故 $\mathrm{HH}_0(M)=M/[M,A]$. 特别地, $\mathrm{HH}_0(A)=A/[A,A]$ 称作 A 的**余中心**.

如果我们注意到 1 阶 Hochschild 上同调和 Leibniz 律的关系, 便可以得到一些非交换情形的灵感.

例 4.9.7 (一次情形: 导子) 考虑 $\mathrm{HH}^1(M)$, 由定义有

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\,d^0&=\{[a\mapsto am-ma]\in\mathrm{Hom}_K(A,M):m\in M\}\\ \ker d^1&=\{D\in\mathrm{Hom}_K(A,M):\forall a,b\in A\,(aD(b)-D(ab)+bD(a)=0)\}\end{aligned}$$

这即 $D\in\ker d^1$ 当且仅当 D 满足 Leibniz 律, 即

$$D(ab)=aD(b)+D(a)b,\qquad \forall a,b\in A.$$

于是 D 是导子, 也即 $\ker d^1=\mathrm{Der}_K(A,M)$. 而 $f\in\mathrm{im}\,d^0$ 当且仅当 $f(a)=am-ma$ 是内导子, 于是

$$\mathrm{HH}^1(M)=\mathrm{Der}_K(A,M)/\mathrm{Inn}_K(A,M).$$

4.10 同调维数

定义 4.10.1 (投射维数) 设 M 是右 R-模, 称

$$\mathrm{p.dim}_R M:=\inf\left\{n\in\mathbb{Z}:\text{存在 } M \text{ 的长度为 } n \text{ 的投射解消}\right\}$$

为 M 的**投射维数**.

特别地, 若 M 没有长度有限的投射解消, 则 $\mathrm{p.dim}_R M = \inf\varnothing = +\infty$, 而若 M 本身就是一个投射模, 则 $\mathrm{p.dim}_R M = 0$. 因此投射维数表征了 M 有多么 "接近" 一个投射模.

命题 4.10.2 (投射维数的刻画)　设 M 是右 R-模, 则以下条件等价:

(1)　$\mathrm{p.dim}_R M \leqslant n$;

(2)　$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N)=0$ 对任意 N_R 成立;

(3)　若 $\forall k<n, C_k$ 是投射模, 且序列 $0\to C_n\to C_{n-1}\to\cdots\to C_0\to M\to 0$ 正合, 则 C_n 是投射模.

证明　(1) $\Longrightarrow$ (2): 因 $\mathrm{p.dim}_R M\leqslant n$, 设

$$0\longrightarrow C_n\longrightarrow C_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

是一个投射解消, 则对任意 N_R 都有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N)=0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 设 $\forall k<n$ 都有 C_k 是投射模, 则对 C_n, 它有投射解消 $(F_\bullet,d_\bullet,\varepsilon)$. 因此考虑

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & C_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[u, "\varepsilon"] & & & & \end{tikzcd}$$

是一个 M 的解消, 则由 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N)=\mathrm{Ext}_R^1(C_n,N)=0$ 可知 C_n 是投射模.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 此时 $0\to C_n\to C_{n-1}\to\cdots\to C_0\to M\to 0$ 就给出了一个 M 的长度为 n 的投射解消, 因此 $\mathrm{p.dim}_R M\leqslant n$. □

例 4.10.3　下面给出一个投射维数是无穷的例子. 设 p 是一个素数, 以 $\mathbb{Z}_p$ 记 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 对 $n\geqslant 1$, 考虑 $\mathbb{Z}_p$ 作为 $\mathbb{Z}_{p^n}$-模, 若记 $p: n\mapsto pn$, 则序列

$$\mathbb{Z}_{p^n}\xrightarrow{\ p\ }\mathbb{Z}_{p^n}\longrightarrow\mathbb{Z}_p\longrightarrow 0$$

是正合的. 要将其向左延长, 只能延长为

$$\mathbb{Z}_{p^n}\xrightarrow{p^{n-1}}\mathbb{Z}_{p^n}\xrightarrow{\ p\ }\mathbb{Z}_{p^n}\longrightarrow\mathbb{Z}_p\longrightarrow 0$$

而再延拓有只能得到态射 p, 因此我们得到一个投射解消

$$\cdots\longrightarrow\mathbb{Z}_{p^n}\xrightarrow{p^{n-1}}\mathbb{Z}_{p^n}\xrightarrow{\ p\ }\cdots\xrightarrow{p^{n-1}}\mathbb{Z}_{p^n}\xrightarrow{\ p\ }\mathbb{Z}_{p^n}\longrightarrow\mathbb{Z}_p\longrightarrow 0$$

它是一个无限长度的投射解消.

并且由

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{p^n}}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{p^n}}(\mathbb{Z}_{p^n},\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "p*"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{p^n}}(\mathbb{Z}_{p^n},\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "(p^{n-1})^*"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{p^n}}(\mathbb{Z}_{p^n},\mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \cdots \\ & & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \end{tikzcd}$$

可知 $p^*=0, (p^{n-1})^*=0$. 这即 $\forall n\geqslant 1$ 都有 $\mathrm{Ext}_R^n(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p\neq 0$. 于是得到 $\mathrm{p.dim}_{\mathbb{Z}_{p^n}}\mathbb{Z}_p=+\infty$.

命题 4.10.4　设 M 是右 R-模, $\mathrm{p.dim}_R M\leqslant n$, 则

(1)　$\mathrm{Ext}_R^{\geqslant n+1}(M,N)=0$ 对任何 N_R 成立;

(2)　$\mathrm{Tor}^R_{\geqslant n+1}(M,N)=0$ 对任何 N_R 成立.

证明　因 $\mathrm{p.dim}_R M\leqslant n$, 故可以取一个长度为 n 的投射解消

$$0\longrightarrow C_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

因 C_n 是投射模, 由投射模的 Ext 刻画可知 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant n+1}(M,N)=0$. 而考虑复形

$$0 \longrightarrow C_n \otimes_R N \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

可知 $\mathrm{Tor}_k^R(M,N)=H_k(C_\bullet \otimes_R N)$. 而 $k \geqslant n+1$ 时 $\mathrm{Tor}_{\geqslant n+1}^R(M,N)=0$. □

定理 4.10.5 设序列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

正合, 则任意两个模的投射维数有限可以导出第三个模的投射维数也有限. 更具体地:

(1) 若 $\mathrm{p.dim}_R M' < \mathrm{p.dim}_R M$, 则 $\mathrm{p.dim}_R M'' = \mathrm{p.dim}_R M$;

(2) 若 $\mathrm{p.dim}_R M' > \mathrm{p.dim}_R M$, 则 $\mathrm{p.dim}_R M'' = \mathrm{p.dim}_R M + 1$;

(3) 若 $\mathrm{p.dim}_R M' = \mathrm{p.dim}_R M$, 则 $\mathrm{p.dim}_R M'' \leqslant \mathrm{p.dim}_R M + 1$.

证明 最初的断言由正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M',N) \longrightarrow \cdots$$

得到.

(1) 若 $\mathrm{p.dim}_R M' < \mathrm{p.dim}_R M = n-1$, 则注意到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M',N) \longrightarrow \cdots$$

中第一、三、四项均为零, 于是 $\mathrm{Ext}_R^n(M'',N)=0$. 这说明 $\mathrm{p.dim}_R M'' \leqslant n-1 = \mathrm{p.dim}_R M$. 若它们不相等, 则存在右 R-模 N 使得 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(M,N)\neq 0, \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M'',N)=0$. 但在正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

中第一、三、四项均为零, 但第二项不为零, 矛盾. 于是只能 $\mathrm{p.dim}_R M'' = \mathrm{p.dim}_R M$.

(2) 和 (3) 的证明都是类似的. □

除了对模 M 定义的同调维数, 还有对环 R 定义的整体维数: 与同调维数不同, 整体维数表现的是 R 作为环的性质.

定义 4.10.6 (整体维数) 设 R 是一个环, 称

(1) $\mathrm{l.gl.dim}\, R := \sup\{\mathrm{p.dim}_R M : M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathsf{Mod})\}$ 是 R 的**左整体维数**;

(2) $\mathrm{r.gl.dim}\, R := \sup\{\mathrm{p.dim}_R M : M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}\text{-}R)\}$ 是 R 的**右整体维数**.

特别地, 对交换环 R, 因此时 R-模不分左右, 故

$$\mathrm{gl.dim}\, R := \mathrm{l.gl.dim}\, R = \mathrm{r.gl.dim}\, R$$

称作 R 的**整体维数**.

整体维数表现的是环的性质. 例如:

(1) 若 R 是 Artin 半单环, 则每个左 R-模都是投射模, 于是 $\mathrm{l.gl.dim}\, R = 0$. 而 Artin 半单环没有左右之分, 于是 $\mathrm{r.gl.dim}\, R = 0$.

(2) $\mathrm{gl.dim}\, \mathbb{Z} = 1$ 是显然的, 因 $\mathbb{Z}$-模无非是 Abel 群, 而 Abel 群总有长度为 1 的自由解消.

(3) 设 F 是域, 则 $\mathrm{gl.dim}\, F[x] = 1$.

(4) 若 R 同时是左 Noether 环和右 Noether 环, 则 $\mathrm{l.gl.dim}\, R = \mathrm{r.gl.dim}\, R$.

(5) 设 R 是交换 Noether 环, 则 R 是正则局部环当且仅当 $\mathrm{gl.dim}\, R < +\infty$, 这即所谓的 **Serre 定理**.

4.11 Koszul 复形

本节中总假定 F 是域, $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ 是 F 上的 n 元多项式环. 令

$$J = \{f \in R : f(0) = 0\},$$

则 $J \triangleleft R$ 且 $R/J \simeq F$. 因此 F 可以通过 $f(x)\alpha := f(0)\alpha$ 看作一个 R-模.

定义 4.11.1 (张量代数)　设 K 是交换环, 定义 K-模 M 的 n 重张量积 $T^n(M) = M^{\otimes n}$, 并约定 $T^0(M) = R$. 其中的态射是多重线性映射, 并且张量积的结合约束给出 $\mu_{i,j} : T^i(M) \otimes T^j(M) \xrightarrow{\sim} T^{i+j}(M)$. 称

$$T(M) := \bigoplus_{i \geqslant 0} T^i(M)$$

是 M 的**张量代数**. 其中的乘法由 $\mu_{i,j}$ 给出, 而幺元由 $R = T^0(M) \hookrightarrow T(M)$ 给出.

定义 4.11.2 (外代数)　记

$$I_\Lambda(M) := \{x \otimes x : x \in M\},$$

它是 $T(M)$ 的分次双边理想. 称 $\Lambda(M) := T(M)/I_\Lambda(M)$ 是 M 的**外代数**, 则由定义可知在外代数 $\Lambda(M)$ 上总有 $\forall m \in M\ (m^2 = 0)$.

由此, 存在同态 ℓ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & \Lambda(M) \arrow[d, dashed, "\ell"] \\ & \Lambda(M) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\ & -x \end{tikzcd}$$

称 ℓ 是 $\Lambda(M)$ 上的**对合同态**, 它满足 $\ell^2|_M = \mathrm{id}_M$, $\ell^2 = \mathrm{id}_{\Lambda(M)}$. 特别地, 记 $\ell(x) = \bar{x}$.

定义 4.11.3 (反导子)　设 $D : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ 是一个 K-代数同态, 称 D 是 $\Lambda(M)$ 上的**反导子**, 若

$$D(ab) = D(a)b + \bar{a}D(b), \qquad \forall a, b \in \Lambda(M).$$

引理 4.11.4　设 $D : M \to \Lambda(M)$ 是一个 K-代数同态, 且对任意 $x \in M$ 成立 $xD(x) = D(x)x \in \Lambda(M)$, 则 D 可以唯一地扩张成 $\Lambda(M)$ 上的反导子.

证明　为此, 取 $A = \mathrm{Mat}_2(\Lambda(M))$, 并取 K-线性映射

$$f : M \to A, \qquad x \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ D(x) & -x \end{bmatrix}.$$

验证

$$f(x)^2 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ D(x) & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ D(x) & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ D(x)x - xD(x) & (-x)^2 \end{bmatrix} = 0,$$

故存在唯一的 K-代数同态 $\bar{f} : \Lambda(M) \to A$ 使得 $\bar{f}|_M = f$. 再对 $a \in \Lambda(M)$, 由 $f(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ *(a) & \bar{a} \end{bmatrix} \in A$ 可知 $*(a) \in \Lambda(M)$. 且对任意 $x \in M$ 都有 $*(x) = D(x)$. 因此可在 $\Lambda(M)$ 上定义 $D(a) = *(a)$, 那么 D 是 K-代数同态, $D|_M = D$. 因此, 对任意 $a, b \in \Lambda(M)$,

$$\bar{f}(ab) = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ D(ab) & \overline{ab} \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}(a)\bar{f}(b) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ D(a) & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ D(b) & \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ D(a)b + \bar{a}D(b) & \overline{ab} \end{bmatrix}$$

这即 $D(ab)=D(a)b+\bar{a}D(b)$, 于是 D 是 $\Lambda(M)$ 上的反导子.

再证唯一性, 若另有 D' 是满足条件的延拓, 只需注意到 M 是 $\Lambda(M)$ 的生成元集且 $(D'-D)|_M=0$, $D'-D$ 是 $\Lambda(M)$ 上的反导子, 于是只能 $D'-D=0$. □

下面考虑 $\Lambda(M)$ 上的分次结构, 因 $T(M)=\bigoplus_{i\geqslant 0}T^i(M)$, 记

$$\Lambda^i(M):=T^i(M)/I_\Lambda(M).$$

则对 $d\in \mathrm{Hom}_K(M,K)=M^*$ 有 $\forall x\in M\ (xd(x)=d(x)x)$, 由引理 4.11.4 可知它可以扩张成 $\Lambda(M)$ 的反导子. 满足 $d(M)\subset K$, $d(\Lambda^i(M))\subset \Lambda^{i-1}(M)$.

命题 4.11.5 设 $d\in \mathrm{Hom}_K(M,K)=M^*$, 则 $(\Lambda^i(M),d)$ 是一个复形.

证明 即证 $d^2=0$. 因 $d\in \mathrm{Hom}_K(M,K)$, 故 d 是 K-线性映射, 且由

$$d(1)=1d(1)+1d(1)=2d(1)$$

可知 $d(1)=0$, 这说明 $d(K)=0$, 于是 $d^2(M)\subset d(K)=0$.

对 $a\in\Lambda(M)$ 满足 $\overline{d(a)}=-d(\bar{a})$ 和任意 $x\in M$, 由

$$\overline{d(ax)}=\overline{d(a)x}+a\overline{d(x)}=-d(\bar{a})\bar{x}-ad(\bar{x})=-d(\overline{ax}).$$

可知对任意 $a\in\Lambda(M)$ 都有 $\overline{d(a)}=-d(\bar{a})$. 因此对 $a\in\Lambda^i(M)$ 和 $b\in M$,

$$d^2(ab)=d(d(a)b+\bar{a}d(b))=\overline{d(a)}d(b)+d(\bar{a})d(b)=0,$$

这就说明 $d^2(\Lambda^{i+1}(M))=0$. □

引理 4.11.6 设 L 是交换的 K-代数, M 是 K-模, 则 $\Lambda(L\otimes_K M)=L\otimes_K\Lambda(M)$.

证明 因 M 是 $\Lambda(M)$ 作为 K-模的直和因子, 故序列 $0\to L\otimes_K M\to L\otimes_K\Lambda(M)$ 是正合的. 任取 $\sum_i l_i\otimes x_i\in L\otimes_K M$, 则在 $\Lambda(M)$ 中

$$\Big(\sum_i l_i\otimes x_i\Big)^2=\sum_{i<j}l_il_j\otimes x_ix_j+\sum_{i>j}l_il_j\otimes x_ix_j=\sum_{i<j}l_il_j\otimes(x_ix_j+x_jx_i)=0\in L\otimes_K\Lambda(M).$$

其中 $x_ix_j+x_jx_i=0$ 是因在 $\Lambda(M)$ 中有

$$0=(x_i+x_j)^2-x_i^2-x_j^2=x_ix_j+x_jx_i.$$

下面设 $f:L\otimes M\to A$ 是一个 L-同态, A 是一个 L-代数, 若对任意 $x\in L\otimes M$ 成立 $f(x)^2=0$, 则

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_1"] & \Lambda(M) \arrow[d, "\sigma_2"] \\
0 \arrow[r] & L\otimes_K M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & L\otimes_K\Lambda(M) \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
 & A_L &
\end{tikzcd}$$

由外代数的泛性质可知存在 K-代数同态 $\bar{f}:\Lambda(M)\to A$ 使得 $\bar{f}|_M=f\sigma_1$. 再记 $\tilde{f}$ 是 $\mathrm{id}\otimes\bar{f}:L\otimes_K\Lambda(M)\to L\otimes_K A$ 和映射 $L\otimes_K A\to A$, $l\otimes a\mapsto la$ 的复合, 那么 $\tilde{f}|_{L\otimes M}=f$. 又因为 $L\otimes_K M$ 是 $L\otimes_K\Lambda(M)$ 的生成元集, 故使得上图交换的 $\tilde{f}$ 是唯一的. □

现在回顾 $R=F[x_1,\dots,x_m]$, 视 F 为左 R-模, 再设 $V=Fy_1\oplus\cdots\oplus Fy_m$ 是一个 m 维 F-向量空间. 此时

$$\Lambda_F(V)=F1\oplus V\cdots\oplus V^r\oplus\cdots\oplus V^m,\qquad V^r=\bigoplus_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant m}Fy_{i_1}\cdots y_{i_r}.$$

则由定义可知 $\dim_F V^r=\binom{m}{r}$. 记 $M=R\otimes_F V=\bigoplus_{i=1}^m Ry_u$, 它作为自由 R-模, $\operatorname{rank}_R M=m$. 故由引理 4.11.6 可知

$$\Lambda_R(M)=R\otimes\Lambda_F(V)=R\oplus M\oplus\cdots\oplus M^r\oplus\cdots\oplus M^m,$$

其中 $M^r=\bigoplus_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant m}Ry_{i_1}\cdots y_{i_r}$, 它作为自由 R-模, $\operatorname{rank}_R M^r=\binom{m}{r}$.

再设 $d:M\to R$, $y_i\mapsto x_i$, 则 $d\in M^*=\operatorname{Hom}_R(M,R)$, 则 d 确定了一个复形

$$0\longrightarrow M^m\xrightarrow{d}M^{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow M\xrightarrow{d}R\longrightarrow 0$$

而

$$d(y_{i_1}\cdots y_{i_r})=\sum_{j=1}^r(-1)^{j-1}x_{i_j}y_{i_1}\cdots y_{i_{j-1}}y_{i_{j+1}}\cdots y_{i_r}.$$

再定义 $\varepsilon:R\to F$, $f(x)\mapsto f(0)$. 定义 $\varepsilon(M^i)=0$, $i\geqslant 1$. 则 $\varepsilon:R\to F$ 可以扩张到 $\Lambda(M)=R\oplus M\oplus\cdots\oplus M^m$ 上, 成为 $\Lambda(M)$ 到 $\Lambda(M)$ 的代数同态. 由

$$d\varepsilon(\Lambda(M))\subset d(F)=0,\qquad \varepsilon d(\Lambda(M))\subset\varepsilon\Big(J+\sum_{i>1}d(M^i)\Big)=0$$

可知 $d\varepsilon=\varepsilon d=0$, 因此

$$0\longrightarrow M^m\xrightarrow{d}M^{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow M\xrightarrow{d}R\xrightarrow{\varepsilon}F\longrightarrow 0$$

也是一个复形.

引理 4.11.7　存在 F-线性映射 $s:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$ 使得 $ds+sd=\mathrm{id}-\varepsilon$.

证明　对未定元数量 m 作归纳: 当 $m=1$ 时 $M=Ry$, $\Lambda(M)=R\oplus Ry$. 因 $R=F[x]$ 的基为 $\{1,x,x^2,\dots\}$, 故 $\Lambda(M)$ 的基为 $\{1,y,x,xy,x^2,x^2y,\dots\}$. 由

$$\varepsilon(1)=1,\qquad\varepsilon(x^{i+1})=0,\qquad\varepsilon(x^iy)=0,$$

可知

$$(\mathrm{id}-\varepsilon)(1)=0,\qquad(\mathrm{id}-\varepsilon)(x^{i+1})=x^{i+1},\qquad(\mathrm{id}-\varepsilon)(x^iy)=x^iy.$$

而 $d(x^i)=0$, $d(x^iy)=x^{i+1}$. 令 s 由以下条件线性地确定

$$s(1)=0,\qquad s(x^{i+1})=x^iy,\qquad s(x^iy)=0.$$

于是容易验证 $sd+ds=\mathrm{id}-\varepsilon$. 且满足 $s\varepsilon=\varepsilon s=0$, $\varepsilon\ell=\ell\varepsilon=0$, $s\ell+\ell s=0$.

下面归纳地假设对 $m-1$ 个未定元时成立. 对 m 个未定元的情形, 取

$$E_1=\left\langle x_1^k,x_1^ky_1:k\geqslant 0\right\rangle,\qquad E_2=\left\langle x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m},x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}y_{i_2}\cdots y_{i_r}:2\leqslant i_2<\cdots<i_r\leqslant m,k_j\geqslant 0\right\rangle.$$

则 $E_1=\Lambda(Ry_1)=\Lambda(M_1)$. $E_2=\Lambda\left(\sum_{i=2}^m Ry_i\right)$, 因此 $\Lambda(M)=E_1\otimes E_2$.

由定义可知 d,ε 限制到 E_i 上的值域就是 E_i. 而 E_1, E_2 分别对应 1 个未定元和 $m-1$ 个未定元的情形, 故由归纳假设, 存在 $s_1:E_1\to E_1$, $s_2:E_2\to E_2$ 使得

$$s_1d+ds_1=(\mathrm{id}-\varepsilon)|_{E_1},\qquad s_2d+ds_2=(\mathrm{id}-\varepsilon)|_{E_2}.$$

于是令

$$s:\Lambda(M)\to\Lambda(M),\qquad u\otimes v\mapsto s_1u\otimes v+\varepsilon u\otimes s_2v$$

分别计算

$$\begin{aligned}ds(u\otimes v)&=d(s_1u)v+\overline{s_1u}dv+\overline{\varepsilon u}ds_2v\\ sd(u\otimes v)&=s(du\otimes v+\bar{u}\otimes dv)\\&=(s_1du)v+(\varepsilon du)s_2v+s_1\bar{u}dv+\varepsilon\bar{u}s_2dv\\&=(s_1du)v+s_1\ell(u)dv+\varepsilon\ell(u)(s_2dv).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(ds+sd)(u\otimes v)&=d(s_1u)v+\overline{s_1u}dv+\varepsilon\bar{u}ds_2v+(s_1du)v+s_1\ell(u)dv+\varepsilon\ell(u)(s_2dv)\\&=(ds_1+s_1d)(u)v+\varepsilon(u)(ds_2+s_2d)(v)\\&=(\mathrm{id}-\varepsilon)(u)v+\varepsilon(u)(\mathrm{id}-\varepsilon)(v)\\&=uv-\varepsilon(u)v+\varepsilon(u)v-\varepsilon(u)\varepsilon(v)\\&=(\mathrm{id}-\varepsilon)(u\otimes v).\end{aligned}$$

故 $sd+ds=\mathrm{id}-\varepsilon$. □

定理 4.11.8 (Koszul 复形) 对 $d:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$ 是满足 $dy_i=x_i$ 的反导子, $\varepsilon:R\to F$, $f(x)\mapsto f(0)$. 则

$$0\longrightarrow M^m\xrightarrow{d}M^{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow M\xrightarrow{d}R\xrightarrow{\varepsilon}F\longrightarrow 0$$

给出 F 作为左 R-模的自由解消, 称作 F 的 **Koszul 解消**或 **Koszul 复形**.

证明 它给出一个复形已经证明. 而 ε 是满同态, 且

$$\ker\varepsilon=(x_1,\ldots,x_m)=\mathrm{im}\,[d:M\to R],$$

因此序列在 R 处正合.

再考虑序列在 $M^i, i\geqslant 1$ 处的正合性. 由引理 4.11.7 可知存在 $s:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$ 使得 $sd+ds=\mathrm{id}-\varepsilon$, 设 $z_i\in\ker[d:M^i\to M^{i-1}]$, 则因 $\varepsilon(M^i)=0$ 可知

$$z_i=(\mathrm{id}-\varepsilon)(z_i)=sdz_i+dsz_i=d(sz_i).$$

记 $w=sz_i=\sum_{j=0}^m w_j\in\Lambda(M), w_j\in M^j$, 则有

$$z_i=dw=\sum_{j=1}^m dw_j\in\sum_{j=1}^m M^{j-1}.$$

而 $z_i\in M^i$, 于是 $dw=dw_{i+1}$. 因此 $z_i=dw_{i+1}\in\mathrm{im}\,[d:M^{i+1}\to M^i]$. 因此序列在 M^i 处也是正合的. 而自由解消因各 M^r 作为 R-模均自由. □

通过 Koszul 复形, 我们得以处理 R 的整体维数.

命题 4.11.9 设 $R=F[x_1,\ldots,x_m]$, 则 $\mathrm{p.dim}_RF=m$. 由此 $\mathrm{gl.dim}\,R\geqslant m$.

证明 视 F 为左 R-模, 由 Koszul 解消的存在性可知 $\mathrm{p.dim}_RF\leqslant m$. 再计算 $\mathrm{Tor}_i^R(F,F)$, 考虑下面的图表:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F\otimes_R M^m \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & F\otimes_R M^{m-1} \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & \cdots \arrow[r] & F\otimes_R M \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & F\otimes_R R \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & 0\\
0 \arrow[r] & F\otimes_R V^m \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & F\otimes_R V^{m-1} \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & \cdots \arrow[r] & F\otimes_R V \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & F \arrow[r]\arrow[d,"\sim"] & 0\\
0 \arrow[r] & V^m \arrow[r,"0"] & V^{m-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & V \arrow[r,"0"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中竖直方向的同构由

$$F \otimes_R M^r \to V^r, \qquad \alpha \otimes f \otimes y_{i_1} \cdots y_{i_r} \mapsto \alpha f(0) y_{i_1} \cdots y_{i_r}$$

给出. 则由

$$d(y_{i_1} \cdots y_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} x_{i_j} y_{i_1} \cdots y_{i_j-1} y_{i_j+1} \cdots y_{i_r}$$

可知图表交换. 因此 $i \leqslant m$ 时有 $\operatorname{Tor}_i^R(F,F) = V^i \neq 0$, 这即 $\operatorname{p.dim}_R F \geqslant m$. 而 $\operatorname{gl.dim} R \geqslant \operatorname{p.dim}_R F = m$. □

另一个方向的证明需要以下的引理:

引理 4.11.10　设 K 是交换环, M 是右 K-模, 记 $M[x] = M \otimes_K K[x]$, 则 $\operatorname{p.dim}_K M = \operatorname{p.dim}_{K[x]} M[x]$.

证明　取 M 的一个投射解消 $0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, 因 $K[x]$ 作为 K-模是自由的, 故

$$0 \longrightarrow P_n[x] \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0[x] \longrightarrow M[x] \longrightarrow 0$$

也是正合的, 它是 $M[x]$ 作为 $K[x]$-模的投射解消. 因此 $\operatorname{p.dim}_{K[x]} M[x] \leqslant \operatorname{p.dim}_K M$.

另一方面, 视 $M[x]$ 为 K-模, 它是可数多个 M 的直和, 故因 $K[x]$ 是自由 K-模, 成立 $\operatorname{p.dim}_K M \leqslant \operatorname{p.dim}_K M[x] \leqslant \operatorname{p.dim}_{K[x]} M[x]$, 得证. □

引理 4.11.11　设 M 是 $K[x]$-模, 对 $K[x]$-模的满同态

$$\pi : M[x] \to M, \qquad \sum_i m_i \otimes x^i \mapsto \sum_i m_i x^i,$$

有 $\ker \pi \simeq M[x]$. 因此序列 $0 \to M[x] \to M[x] \to M \to 0$ 正合.

证明　定义

$$\sigma : M[x] \to \ker \pi, \qquad \sum_{i \geqslant 0} m_i \otimes x^i \mapsto m_0 x \otimes 1 + \sum_{i > 0} (m_i x - m_{i-1}) \otimes x^i,$$

则 σ 是 $K[x]$-模同态, 且

$$\begin{aligned}
\sigma\Big(\sum_{i \geqslant 0} m_i \otimes x^i\Big) = 0 &\implies m_0 x \otimes 1 + \sum_{i>0} (m_i x - m_{i-1}) \otimes x^i = 0 = 0 \\
&\implies (m_0 = 0 \implies m_1 = 0 \implies \cdots) \\
&\implies \sum_{i \geqslant 0} m_i \otimes x^i = 0.
\end{aligned}$$

于是 σ 是单态. 再设 $\sum_{i=0}^n m_i \otimes x^i \in \ker \pi$, 则由 $\sum_{i \geqslant 0} m_i x^i = 0$ 可知

$$\begin{aligned}
m_0 &= (-m_1 - m_2 x - \cdots - m_n x^{n-1}) =: m_0' x \\
m_1 &= (-m_2 - m_3 x - \cdots - m_n x^{n-2}) - m_0' =: m_1' x - m_0' \\
&\ \ \vdots \\
m_{n-1} &=: m_{n-1}' x - m_{n-2}' \\
m_n &=: m_{n-1}'
\end{aligned}$$

这即 $\sum_{i=0}^n m_i \otimes x^i = \sigma(\sum_i m_i' \otimes x^i)$, 即 σ 是满态. 因此 σ 给出 $M[x]$ 与 $\ker \pi$ 的同构. □

命题 4.11.12　对 $R = F[x_1, \ldots, x_m]$, 有 $\operatorname{gl.dim} R = m$.

证明　由命题 4.11.9 可知 $\operatorname{gl.dim} R \geqslant m$, 再由引理 4.11.11 可知序列

$$0 \longrightarrow M[x] \xrightarrow{\sigma} M[x] \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是正合的. 故 $\mathrm{p.dim}_{K[x]} M \leqslant \mathrm{p.dim}_{K[x]} M[x] + 1 = \mathrm{p.dim}_K M + 1$. 因此 $\mathrm{gl.dim}\, K[x] \leqslant \mathrm{gl.dim}\, K + 1$. 于是

$$\mathrm{gl.dim}\, F[x_1, \ldots, x_m] \leqslant \mathrm{gl.dim}\, F[x_1, \ldots, x_{m-1}] + 1 \leqslant \cdots \leqslant m.$$

得证. □

下面我们证明 **Hilbert 合冲定理**, 这是域上多项式环的基本定理之一. Hilbert 合冲定理涉及理想和模的生成元之间的关系, 这些关系构成一个模时又可以考虑关系的关系. 它断言带有 n 个未定元的多项式环经过至多 n 步得到一个零模.

引理 4.11.13 设 M 是分次 R-模, $M \otimes_R F = 0$, 则 $M = 0$.

证明 回顾 $J = \{f \in R : f(0) = 0\} \lhd R$, 则序列 $0 \to J \to R \to F \to 0$ 正合导出序列

$$M \otimes_R J \longrightarrow M \otimes_R R \longrightarrow M \otimes_R F \longrightarrow 0$$

正合. 而 $M \otimes_R F = 0$, $M \otimes_R R \simeq M$, 于是 $M \otimes_R J \to M, u \otimes f \mapsto uf$ 是满同态. 若 $M \neq 0$, 取 $x \neq 0$ 是 M 中次数最低的齐次元, 于是

$$\exists u_i \in M \, \exists f_i \in J \left(x = \sum_i u_i f_i \right)$$

不妨 u_i, f_i 都是齐次元, 那么 $\deg x = \deg u_i + \deg f_i$. 但 $\deg f_i > 0$, 这与 x 次数最低是矛盾的. □

引理 4.11.14 若 M 是分次 R-模, $\mathrm{Tor}_1^R(M, F) = 0$, 则 M 是分次自由 R-模.

证明 视 $M \otimes_R F = \langle u \otimes 1 : u \text{ 是 } M \text{ 中的齐次元} \rangle$ 为 F-向量空间, 它的基为 $\{u_i \otimes 1\}_{i \in I}$. 再记 $L = \bigoplus_{i \in I} e_i R$, $\deg e_i = \deg u_i$.

作同态 $\eta : L \to M$, $e_i \mapsto u_i$, 则有序列

$$L \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow \operatorname{coker} \eta \longrightarrow 0$$

正合, 因此

$$L \otimes_R F \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}} M \otimes_R F \longrightarrow \operatorname{coker} \eta \otimes_R F \longrightarrow 0$$

也是正合的. 而 $\{e_i \otimes 1\}_{i \in I}$ 和 $\{u_i \otimes 1\}_{i \in I}$ 分别是 $L \otimes_R F$ 和 $M \otimes_R F$ 的基, 故 $\eta \otimes \mathrm{id}$ 是一个同构, 因此 $\operatorname{coker} \eta \otimes_R F = 0$. 而由引理 4.11.13 可知 $\operatorname{coker} \eta = 0$.

而序列

$$0 \longrightarrow \ker \eta \longrightarrow L \xrightarrow{\eta} M$$

正合, 故

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, F) \longrightarrow \ker \eta \otimes_R F \longrightarrow L \otimes_R F \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}} M \otimes_R F \longrightarrow 0$$

也正合, 注意到 $\mathrm{Tor}_1^R(M, F) = 0$, $\eta \otimes \mathrm{id}$ 是同构, 于是 $\ker \eta \otimes_R F = 0$. 由引理 4.11.13 可知 $\ker \eta = 0$, 因此 $M \simeq L$, 故 M 是自由 R-模. □

定理 4.11.15 (Hilbert 合冲定理) 设 $R = F[x_1, \ldots, x_m]$, M 是分次 R-模, 若

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是正合的, 且 $i < m$ 时 L_i 是分次自由 R-模, 则 P_m 也是分次自由 R-模.

证明　此时 $\mathrm{Tor}_1^R(P_m, F) = \mathrm{Tor}_{m+1}^R(M, F) = 0$, 因此由引理 4.11.14 可知 P_m 是分次自由模. □

由此立刻得到 $F[x_1, \ldots, F_m]$ 上的每个投射模都自由.

5 K-理论基础

K-理论这一术语最初来源于 Grothendieck 对代数簇 X 定义的 $K(X)$, 这分类了所有 X 上的向量丛. 这一结果被应用于 Grothendieck–Riemann–Roch 定理的提出. 字母 K 出自德文中的 *Klasse*, 意为分类. K-理论大致上有三种完全不同的味道: 拓扑 K-理论, 解析 K-理论和代数 K-理论. 其中前两者继续发展产生了非交换几何学的雏形, 这是我们将来会关心的内容.

(1) 空间的 K-理论: Atiyah 和 Hirzebruch 对局部紧 Hausdorff 空间 X 定义了拓扑 K-理论.

- $K^0(X)$ 分类了紧 Hausdorff 空间上所有的向量丛;
- $(K^n(\cdot))_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成了一个在 Eilenburg–Steenrod 意义下的上同调理论;
- 拓扑 K-理论有 Bott 周期律: 这在复的情形下是 $K^{n+2}(X) \cong K^n(X)$, 于是我们只关心 K^0 和 K^1 便足够了.

拓扑 K-理论在 Atiyah–Singer 指标定理中扮演了重要的角色.

(2) Banach 代数 (或 C^* 代数) 的解析 K-理论: 对 Banach 代数 A, 或者更常考虑 C^* 代数 A, 可以对其定义解析 K-理论.

- 它直接地推广了拓扑 K-理论, 建立了 $K_n(C_0(X)) \cong K^n(X)$, 因此作为 $\mathsf{LCHaus} \to \mathsf{Ab}$ 的函子, K_n 给出一个反变函子;
- 它可以看作是非交换拓扑空间上的上同调理论;
- 我们仍然有 Bott 周期律, 于是上同调的长正合列变成了六项正合列.

解析 K-理论迅速成为了高指标理论和非交换几何学中的基础工具.

(3) 环 R 的代数 K-理论: 对环 R 我们可以定义其代数 K-理论, 其中的 K_0, K_1, K_2 具有较为直接的定义, 但高阶的 K-理论不同, 它是通过同伦代数定义的. 因此代数 K-理论并不存在 Bott 周期律.

尽管如此, 我们仍然可以看到这三种 K-理论定义的 K_0 都是相同的. 因此我们无妨从 K_0 入手. 本章的主要组织方式如下:

- 第 1 节介绍代数 K_0 群, 它的基本想法是分类有限生成的投射模, Swan–Serre 定理阐明了流形上的向量丛与连续函数代数上有限生成的投射模之间的一一对应, 于是这就是「分类向量丛」的基本想法. 这样的构造可以作用于环 R 上, 从而定义出 $K_0(R)$, 其基本的等价关系是 Murray–von Neumann 等价.
- 第 2 节介绍解析 K_0 群的几种等价定义, 我们先考虑 Banach 代数的解析 K_0 群, 它的拓扑结构给出同伦关系, 从而可以使用同伦来定义 K_0; 进一步, C^* 代数比 Banach 代数多了对合结构, 这使得我们可以考虑自伴的幂等元 — 即投影, 并简化 Murray–von Neumann 等价的定义, 进而给出更多的 K_0 等价定义. Gelfand–Naimark 定理给出局部紧 Hausdorff 空间与交换 C^* 代数的一一对应, 于是可以对局部紧 Hausdorff 空间定义拓扑 K^0 群. 同时, 投影在 K_0 的定义中起到了至关重要的作用, 我们在最后讨论 $\mathtt{Proj}(A)$ 上的几种不同等价关系之间的联系.
- 第 3 节我们谈论 C^* 代数的归纳极限: 我们将证明范畴 $\mathsf{C^*\text{-}Alg}$ 是一个余完备的范畴, 也即任意定

向系存在归纳极限, 并且其结构可以较为容易地刻画. 进而证明 K_0 在归纳极限下的连续性: 这给我们一个基本的例子, 对矩阵代数 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 赋予左上角嵌入, 得到的归纳极限是可分 Hilbert 空间的紧算子代数 $\mathcal{K}(H)$. 由此我们引出稳定 C^* 代数的概念, 并说明 K_0 具有稳定性.

- 第 4 节我们讨论 Fredholm 算子与其 Fredholm 指标, 这在指标理论中至关重要. 主要的思路是推广有限维空间之间的线性映射, 但不平凡之处在于此时 $\dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$ 可以非零, 这是无限维空间带来的. 由此, 我们可以在差值有意义的情况下定义算子的指标. 我们将在后续看到算子的 Fredholm 指标如何对应到 K-理论的正合列的边缘态射, 而作为 Fredholm 算子的重要例子, Hardy 空间上的 Toeplitz 扩张也将在后续 Bott 周期性的证明中发挥至关重要的作用.

通过正合列来引出代数 K_1 群和解析 K_1 群, 并给出边缘态射的构造: 其中代数 K_1 的边缘态射相对比较复杂, 而解析 K_1 的边缘态射则更为简单一些. 这当然是因为 C^* 代数拥有比环丰富得多的结构. 由此, 我们从短正合列得到长正合列, 对解析版本的 K–理论, 我们通过悬挂函子构造高阶 K 群, 从而得到真正的「长正合列」.

- 第 5 节介绍从正合列的角度出发引出 K_1 群的想法, 并由此给出代数 K_1 群和解析 K_1 群. 第 5 节主要考虑代数 K_1 群与代数 K_1 函子, 并给出 K_1^{alg} 和 K_0 构成的长正合列, 其中代数版本的边缘态射用到了伪同构这一工具, 它在之后介绍的相对 K-理论群中还会以相似的方式再次出现.
- 第 6 节介绍解析 K_1 群. 同样地, 尽管可以对 Banach 代数讨论解析 K_1 群, 我们仍将更多地着眼于 C^* 代数, 并说明解析 K_1 群与酉元的关系. 在这一节我们给出三种解析 K_1 的等价定义, 其中有两种都可以对 Banach 代数定义, 同时本节介绍的定义也可以推广到更高阶的 K-理论上. 最重要的一个定义是通过悬挂函子的定义, 悬挂函子正合性使得在高阶 K-理论中讨论正合序列可以化归到 K_0 情形使用投影进行具体的操作. 最后给出 Calkin 代数的例子, 我们将看到 K-理论如何与 Fredholm 指标结合起来.
- 第 7 节转向讨论形如

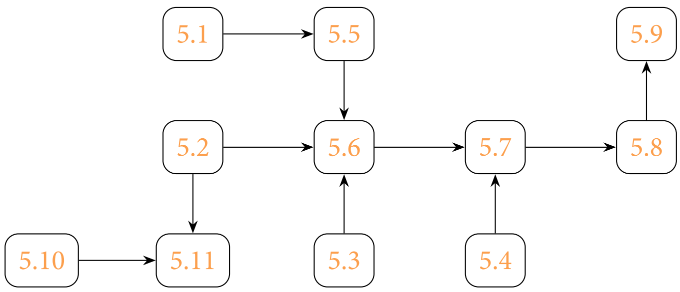
$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

  的短正合列, 其中 J 是 A 的闭理想. 此时 A/J 作为商代数, 我们提供刻画 $K_0(A/J)$ 的方法, 并仿照代数拓扑中的相应结论 (*这很合理, 因为 K-理论就是一种上同调理论*) 给出切除定理. 通过这一技术准备, 我们得以具体地写出长正合列中边缘态射 $\partial : K_1(A/J) \to K_0(J)$ 的形式, 并说明它为何被称作「指标映射」.
- 我们首先通过悬挂函子定义高阶的 K-理论群, 而第 7 节最后的例子为 Bott 周期性提供了非常重要的例子. 第 8 节从 Bott 生成子开始, 通过将其看作 $K_2(\mathbb{C})$ 中的元素, 经由 Kasparov 外乘积建立起态射 $K_0(A) \to K_2(A)$, 并证明解析 K-理论中可能是最重要的结论: Bott 周期律. 这表明解析 K-理论本质上只有 K_0 和 K_1, 这与代数 K-理论不同. 于是所谓的长正合列无非是一个只有六项的环, 称作是六项正合列. 其变体之一被称作 Mayer–Vietoris 序列, 通过 C^* 代数的推出和拉回给出了两个六项正合列. 借助这一工具可以帮助我们计算更多代数的 K-理论. 在本节的最后, 我们具体地刻画六项正合列中用以首尾相连的态射 $\delta : K_0(A/J) \to K_1(J)$, 并说明它为何被称作「指数映射」.
- 第 9 节是对高阶 K-理论的另一种解释: 通过 $\mathrm{U}(A)$ 的高阶同伦群同样可以定义高阶 K-理论, 并且如此定义的高阶 K-理论与通过悬挂函子的定义相同. 实际上高阶的代数 K-理论也是通过这样的思路构造的, 但这里不平凡的点在于我们有同伦群的周期性 $\pi_{n+2}(\mathrm{U}(A)) = \pi_n(\mathrm{U}(A))$, 这是在代数 K-理论的情形下做不到的.

有限维 C^* 代数作为最简单的一类 C^* 代数, 它有着简单的结构定理 (定理 2.4.8). 我们可以通过分析的方式去「逼近」得到一类较为简单的 C^* 代数, 称作是近似有限维代数 (或简称作 *AF* 代数). AF 代数具有较为丰富的实例, 并且作为相对简单的一类对象, 我们通过 K-理论的工具对其分类.

- 第 10 节介绍 AF 代数的基本概念, 它是一些有限维 C^* 代数的归纳极限, 因此是仅次于有限维 C^* 代数的简单的 C^* 代数. 由于有限维 C^* 代数均形如若干矩阵代数的直和, 而矩阵代数之间的同态是容易描述的. 于是可以通过有向图来刻画 AF 代数的结构, 也即 Bratteli 图. 理想可以和一类特殊的 Bratteli 子图建立一一对应的关系.
- 第 11 节应用 K-理论的工具来分类一类特殊的 AF 代数. 首先, 仅仅是 K_0 群无法分类 AF 代数, 于是我们需要 K_0 群上更多的结构, 这引导我们引入有序 K_0 群的概念. AF 代数的特殊结构使得其 K_0 群均形如一些 $\mathbb{Z}^{n_k}$ 的归纳极限, 这样的 Abel 群称作维度群. 著名的 Elliott 分类定理说明带有序单位的有序 K_0 群是 AF 代数的完全不变量. 而作为应用, 我们在最后计算一类特殊的 AF 代数 — UHF 代数的有序 K_0 群, 并完全分类 UHF 代数.

阅读顺序



5.1　代数 K_0 群

无论在何种 K-理论中, 定义 K_0 的基本想法都是

$$K_0 := \langle 生成元 \mid 等价关系 \rangle,$$

因此基本的想法总是在生成元上面找到一些等价关系.

本节总假设 R 是一个幺环, 若无特殊说明, 总考虑右 R-模.

命题 5.1.1　设 E 是 R 上有限生成的投射模, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 和幂等的 $p \in \mathrm{Mat}_n(R)$ 使得 $E \cong pR^n$. 由此, R 上有限生成的投射模在同构意义下的等价类构成一个集合.

证明　由投射模的定义可知, 对满同态 $\varphi : R^n \to E$, 存在 $\psi : E \to R^n$ 使得 $\varphi\psi = \mathrm{id}_E$. 令 $p = \varphi\psi \in \mathrm{Mat}_n(R)$, 那么 $p^2 = p$ 是幂等元, 且 $p = \mathrm{id}_E$ 说明 $E = pE = pR^n$. □

定义–命题 5.1.2 (Murray–von Neumann 等价)　设 $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $p \in \mathrm{Mat}_n(R)$, $q \in \mathrm{Mat}_m(R)$ 是两个幂等元. 那么 $pR^n \cong qR^m$ 当且仅当存在 $x \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$, $y \in \mathrm{Mat}_{n,m}(R)$ 使得 $p = xy$, $q = yx$. 此时称 p 与 q **Murray–von Neumann 等价**, 记作 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$, 或在不致混淆时直接记作 $p \sim q$.

证明　*必要性.* 设 $u : pR^n \to qR^m$ 是一个同构, 由投射模的定义可知存在同态 x, y 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "x"] \arrow[d] & R^m \arrow[d] \\ pR^n \arrow[ur, "x_0"] \arrow[r, "u"] & qR^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R^n \arrow[d] & R^m \arrow[l, "y"'] \arrow[d] \\ pR^n & qR^m \arrow[ul, "y_0"'] \arrow[l, "u^{-1}"] \end{tikzcd}$$

此时 x, y 是自由模之间的同态, 于是由对应的矩阵表示, 仍记作 x, y. 于是 $p = xy, q = yx$ 成立.

充分性. 将 x, y 看作是自由模 $R^n \to R^m$ 和 $R^m \to R^n$ 之间的同态, 类似地, 上述交换图唯一地确定了 u 和 u^{-1}. □

在上述定义中, Murray–von Neumann 等价的两个幂等元可能落在不同的 $\mathrm{Mat}_n(R)$ 中. 于是如果我们要描述 $\sim_{\mathrm{MvN}}$ 作为等价关系, 需要定义一个底空间. 于是对 $n \in \mathbb{N}$, 考虑从 $\mathrm{Mat}_n(R)$ 到 $\mathrm{Mat}_{n+1}(R)$ 的嵌入如下:

$$i_n : \mathrm{Mat}_n(R) \to \mathrm{Mat}_{n+1}(R), \qquad p \mapsto \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

那么定义以下定向系

$$\mathrm{Mat}_1(R) \to \mathrm{Mat}_2(R) \to \cdots \to \mathrm{Mat}_n(R) \to \cdots$$

的归纳极限为 $\mathrm{Mat}(R) := \varinjlim \mathrm{Mat}_n(R)$. 于是每个 $\mathrm{Mat}(R)$ 中的元素都在某个 $\mathrm{Mat}_n(R)$ 中, 进而可以定义 $\mathrm{Mat}(R)$ 中的幂等元全体 $\mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}(R))$. 在 $\mathrm{Mat}(R)$ 上还可以定义直和 $\oplus$ 和张量积 $\otimes$.

由 Murray–von Neumann 等价的定义可知对 $p \in \mathrm{Mat}_n(R)$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 有 $p \sim \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}$.

定义 5.1.3 (代数 K_0 群) 设 R 是一个幺环, 定义

$$V(R) := \left\langle \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}(R)) : p \sim_{\mathrm{MvN}} q,\ p + q \sim \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \right\rangle,$$

它配上直和运算构成一个交换半群. 定义 $V(R)$ 的 Grothendieck 群为 $K_0(R)$, 称作是 R 的**代数 K_0 群**.

直和 $\oplus$ 在 $V(R)$ 上满足结合律是显然的, 再注意到对任意两个投射模 E_1, E_2, 都有 $E_1 \oplus E_2 \cong E_2 \oplus E_1$ 即证交换性. 对 $\oplus$ 来说, 其群单位元为 $[0]$. 对幺环同态 $\varphi : R \to S$, 它诱导了一个群同态 $K_0(\varphi) : K_0(R) \to K_0(S)$.

于是 $K_0(R)$ 中的元素都具有形式 $g = [p] - [q]$, 其中 $[p]$ 表示 $p \in \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}(R))$ 在 $V(R)$ 中对应地等价类. 由 Grothendieck 群的性质可知 $K_0(R)$ 是一个 Abel 群, 且具有以下的泛性质: 对任意 Abel 群 A, 存在唯一的群同态 $K_0(R) \to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} V(R) \arrow[r] \arrow[dr] & K_0(R) \arrow[d, dashed] \\ & A \end{tikzcd}$$

但需要注意的是, $[p] = [q] \in K_0(R)$ 并不能推出 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$. 考虑

$$p \sim_{\mathrm{conj}} :\iff \exists a \in \mathrm{GL}_n(R)\,(q = apa^{-1}),$$

那么 $p \sim_{\mathrm{conj}} q$ 蕴含 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$, 这是因为此时令 $x = pa^{-1}q$ 和 $y = qap$ 即可. 并且由 $K_0(R)$ 的定义, $[p] = [q]$ 等价于 $p \sim_{\mathrm{conj}} q$. 但在 $\mathrm{Mat}(R)$ 上 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$ 与 $p \sim_{\mathrm{conj}} q$ 是等价的, 下面的引理 (3) 说明了这一点.

引理 5.1.4 设 R, S 是幺环, 那么

(1) $K_0(R \oplus S) = K_0(R) \oplus K_0(S)$;

(2) $V(\mathrm{Mat}_n(R)) = V(R)$, 于是进一步 $K_0(\mathrm{Mat}_n(R)) = K_0(R)$;

(3) 若 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$, 那么存在 $m \geqslant n$ 和 $a \in \mathrm{GL}_m(R)$ 使得 $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} a^{-1}$.

证明 (1) 在 $R \oplus S$ 上具有自然的环结构, 且对任意 $R \oplus S$-模 E, 都有

$$E \cong E(1_R, 0) \oplus E(0, 1_B),$$

于是命题得证.

(2) 设 E 是 R-模, 则 $E^{\oplus n}$ 可以看作 $\mathrm{Mat}_n(R)$-模. 设 F 是 $\mathrm{Mat}_n(R)$-模, 记 e_{ij} 是只有 (i,j)-元为 1, 其余均为 0 的矩阵, 那么 $E = Fe_{11}$ 是一个 R-模. 对任意 $k = 1, 2, \ldots, n$, 由于 $e_{kk} = e_{k1}e_{11}e_{1k}$, 于是 $Fe_{kk} \cong Fe_{11} = E$, 因此 $F = \bigoplus_{k=1}^n Fe_{kk}$. 再由 $xe_{ii}e_{jj} = \delta_{ij}$ 可知 $\mathrm{id}_F = \sum_{k=1}^n e_{kk}$, 于是 $F \cong E^{\oplus n}$, 命题得证.

(3) 设 $x, y \in \mathrm{Mat}_n(R)$ 使得 $p = xy, q = yx$, 令 $a = \begin{bmatrix} pxq & q-p \\ q-1 & qyp \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$, 那么

$$a\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}a^{-1} = \begin{bmatrix} pxq & 1-p \\ 1-q & qyp \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} qyp & 1-q \\ 1-p & pxq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是命题得证. □

上述 (3) 的证明中构造 a 的直觉来源于

$$\begin{tikzcd}
pR^n \arrow[drr, bend left, "y"] & (1-p)R^n \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] & qR^n & (1-q)R^n \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] \\
pR^n \arrow[urr, bend right, "x"'] & (1-p)R^n & qR^n & (1-q)R^n
\end{tikzcd}$$

引理 5.1.5　设 R, S 是幺环, $\varphi : R \to S$ 是满同态, $x \in \mathrm{GL}_n(S)$, 则存在 $y \in \mathrm{Mat}_{2n}(R)$ 使得 $\varphi(y) = \begin{bmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{bmatrix}$.

证明　注意到

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 φ 是满同态, 于是存在 z_1, $z_2 \in R$ 使得 $\varphi(z_1) = x, \varphi(z_2) = x^{-1}$. 于是令

$$y = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则 $\varphi(y) = \begin{bmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{bmatrix}$. □

命题 5.1.6　$K_0 : \mathsf{Ring} \to \mathsf{Ab}$ 是一个函子.

证明　设有环同态 $f : R \to S, g : S \to T$ 和 R-模 P, 由于

$$T \otimes_S (S \otimes_R P) \cong (T \otimes_S S) \otimes_R P \cong T \otimes_R P,$$

而 $T\otimes_R$ 是由 $gf : R \to R$ 定义的, 于是 $K_0(g) \circ K_0(f) = K_0(g \circ f)$. 而恒等映射 $\mathrm{id}_R : R \to R$ 诱导恒等映射 $K_0(\mathrm{id}_R) : K_0(R) \to K_0(R)$. □

至此, 我们对幺环 R 定义了 K_0.

例 5.1.7　下面讨论一些例子:

(1) 若 F 是域, 则 $K_0(F) = \mathbb{Z}$. 这是因为有限生成的 F-模是有限维向量空间, 而 F-模是投射模. 考虑 $\varphi : [V] \mapsto \dim_F V$, 那么它诱导同态 $K_0(F) \to \mathbb{Z}$. 当 $n > 0$ 时取 $n \mapsto [F^{\oplus n}]$, 再将其扩展为群同态 $\mathbb{Z} \to K_0(F)$, 这便是 φ 的逆映射.

(2) $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. 这因有限生成的投射 $\mathbb{Z}$-模就是有限秩自由 Abel 群. 记 $\mathrm{rank}\, G$ 是 G 的秩, 那么 $[G] \mapsto \mathrm{rank}\, G$ 确定了一个群同态 $K_0(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. 反之, 对 $n > 0$ 取 $n \mapsto [\mathbb{Z}^n]$, 再将其扩展为群同态 $\mathbb{Z} \to K_0(\mathbb{Z})$, 这便是前者的逆映射.

(3) 由 (2), 若 R 是主理想环, 那么 $K_0(R)=\mathbb{Z}$.

(4) 若 D 是除环, 那么 $K_0(D)=\mathbb{Z}$. 进一步, 若 R 是半单 Artin 环, 由 Artin–Wedderburn 定理可知存在除环 $D_1,\dots,D_k$ 和 $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ 使得

$$R\cong \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1)\times\cdots\times\mathrm{Mat}_{n_k}(D_k),$$

因此 $K_0(R)=\mathbb{Z}^k$.

下面讨论 R 可能不含幺的情形: 对任意的环 R, 总可以定义 $R^+:=R\times\mathbb{Z}1$, 这是一个幺环. 记投影 $\varepsilon:R^+\to\mathbb{Z}$, $a+b1\mapsto b$. 若 R 本身是幺环, 则 $R^+\cong R\oplus\mathbb{Z}\langle 1-1_R\rangle$.

定义 5.1.8 (代数 K_0 群) 对可能不含幺的环 R, 定义

$$K_0(R):=\ker K_0(\varepsilon)=\ker[K_0(R^+)\to K_0(\mathbb{Z})],$$

称作是 R 的**代数 K_0 群**.

$K_0(R)$ 是良定义的, 这是因为 R^+ 和 $\mathbb{Z}$ 都是幺环, 于是 $K_0(R^+)$ 和 $K_0(\mathbb{Z})$ 都已经被定义. 若 R 本身是幺环, 此时 $K_0(R^+)=K_0(R)\oplus K_0(\mathbb{Z})$, 于是上述定义与之前对幺环定义的 K_0 是一致的.

命题 5.1.9 设 R 是环, 那么

$$K_0(R)=\left\{[e]-[1_n]:e\in\mathrm{Mat}_n(R^+)\right\}.$$

证明 由 $K_0(R)$ 的定义可知

$$\begin{aligned}K_0(R)&=\left\{[e]-[f]:e,f\in R^+,\ [\pi(e)]=[\pi(f)]\in K_0(\mathbb{Z})\right\}\\&=\left\{[e]-[f]:e,f\in R^+,\ \exists v\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\,(\pi(e)=a\pi(f)a^{-1})\right\},\end{aligned}$$

于是令 $e'=aea^{-1}$, $f'=f$, 并且将 $[e']-[f']$ 写成 $\left[\begin{bmatrix}e' & \\ & 1_n-f'\end{bmatrix}\right]-\left[\begin{bmatrix}f' & \\ & 1_n-f'\end{bmatrix}\right]$, 注意到 $w=f'+\begin{bmatrix}1_n & \\ & 1_n\end{bmatrix}+(1_n-f)\begin{bmatrix} & 1_n\\ 1_n & \end{bmatrix}$ 使得

$$w\begin{bmatrix}f' & \\ & 1_n-f\end{bmatrix}w^{-1}=\begin{bmatrix}1_n & \\ & 0\end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}K_0(R)&=\left\{[e]-[f]:e,f\in R^+,\ \exists a\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\,(\pi(e)=a\pi(f)a^{1})\right\}\\&=\left\{[e']-[f']:e',f'\in R^+,\ \pi(e')=\pi(f')\right\}\\&=\left\{[e'']-[f'']:\pi(e'')=\pi(f''),\ f''=\begin{bmatrix}1_n & \\ & 0\end{bmatrix}\right\}\\&=\left\{[e'']-[1_n]:e''\in\mathrm{Mat}_n(R^+)\right\},\end{aligned}$$

从而命题得证. □

例 5.1.10 设 R 是环, 左上角嵌入

$$\iota:R\to\mathrm{Mat}_n(R),\qquad a\mapsto\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

诱导一个 K_0 群之间的同构.

下面为了记号的简便, 对 $\varphi:R\to S$, 记 $K_0(\varphi)=\varphi_*$.

引理 5.1.11 设 J,A,B 是环, 序列

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{\ j\ }A\xrightarrow{\ \pi\ }B\longrightarrow 0$$

正合, 则 $j_*(K_0(J)) \subset K_0(A)$.

证明　在图

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & J^+ \arrow[r, "\varepsilon_J"] \arrow[d, "j^+"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r] & A^+ \arrow[r, "\varepsilon_A"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

中注意到 $(\varepsilon_J)_* = (\varepsilon_A)_* j_*^+$ 可知 $j_*^+|_{K_0(J)} = j_*$. 于是 $j_*(K_0(J)) \subset K_0(A)$. □

定理 5.1.12 (K_0 函子的分裂正合性)　设 J, A, B 是环, 序列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

是正合的, 且在 A 处分裂, 则 K_0 群的序列

$$0 \longrightarrow K_0(J) \xrightarrow{j_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(B) \longrightarrow 0$$

是正合的, 且在 $K_0(A)$ 处分裂.

证明　(1) 先证明 $K_0(A)$ 处的正合性: 因 $\pi j = 0$, 故 $\pi_* j_* = 0$, 这即 $\operatorname{im} j_* \subset \ker \pi_*$.

设 $p \in \mathrm{Mat}_n(A^+)$ 使得 $[\pi^+(p)] - [1_n] = 0$, 也即 $\pi^+(p) \sim 1_n$. 于是存在 $x, y \in \mathrm{Mat}_n(B^+)$ 使得 $\pi^+(p) = xy, 1_n = yx$. 由引理 5.1.4 (3) 可知存在 $m \geqslant n$ 和 $a \in \mathrm{Mat}_m(B^+)$ 使得

$$\pi^+(p) \oplus 0 = a(1_n \oplus 0)a^{-1}.$$

取 $p' = s^+(a^{-1})(p \oplus 0)s^+(a)$, 有 $p'^2 = p'$, 即 p' 幂等, 并且 $p' \sim p \oplus 0$. 此时 $\pi^+(p') = 1_n$, 于是存在 $q \in \mathrm{Mat}_{2n}(J^+)$ 使得 $p' = j^+(q)$. 那么此时

$$[p] - [1] = [p'] = [1_n] \in j_*(K_0(J^+)),$$

而由引理 5.1.11 可知 $j_*(K_0(J)) \subset K_0(A)$, 故 $[p] - [1] \in j_*(K_0(J))$.

(2) 序列在 $K_0(B)$ 处正合, 也即需证 π_* 是满态. 这由 $\pi s = \mathrm{id}$ 显然.

(3) 序列在 $K_0(J)$ 处正合, 也即需证 j_* 是单态. 为此, 设 $g = [p] - [q] \in K_0(J)$. 不妨设 $p, q \in \mathrm{Mat}_n(J)$. 再取 $p' = p \oplus (1 - q), q' = 0 \oplus 1$, 以 p', q' 代 p, q 不妨设 $g = [p] - [1_n]$. 设 $j_*(g) = 0$, 由 $[j^+(p)] - [j^+(1_n)] = 0$ 可知 $j^+(p) \oplus 1_m \simeq 1_{m+n}$, 不妨设 $j^+(p) \sim 1_n$.

设 $x, y \in \mathrm{Mat}_n(A^+)$ 使得 $j^+(p) = xy, 1_n = yx$. 记

$$x' = (s\pi)^+(x), \qquad y' = (s\pi)^+(y), \qquad p' = (s\pi)^+ j^+(p).$$

则 $x'y' = p', y'x' = 1$. 由 $\pi j = 0$ 可知 $(\pi j)^+ = \varepsilon$, 于是此时 $p' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Mat}_n(A^+)$. 记

$$x'' = xy', \qquad y'' = x'y, \qquad p'' = j^+(p').$$

则 $x''y'' = j^+(p), y''x'' = p''$, 且

$$\pi^+(x'') = \pi^+(xy') = \pi^+(p') \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}).$$

将 x'' 分解为 $x'' = x'' - \varepsilon(x'') + \varepsilon(x'')$, 则存在 $a, b \in \mathrm{Mat}_n(J^+)$ 使得 $x'' = j^+(a), y'' = j^+(b)$. 因 j^+ 是单态, 故 $p = ab, p' = ba$, 这即 $p \sim p' \in J^+$. 因此

$$[p] - [1_n] = [p'] - [1_n] \in K_0(\mathbb{Z}) \subset K_0(J^+).$$

于是 $[p] - [1_n] = 0 \in K_0(J)$. 这就说明了 j_* 是单射. □

推论 5.1.13 (K_0 的半正合性) 设 J, A, B 是环, 序列

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

是正合的, 则 K_0 群的序列

$$0 \longrightarrow K_0(J) \xrightarrow{j_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(B) \longrightarrow 0$$

在 $K_0(A)$ 处正合.

于是由 K_0 的正合性我们得到:

命题 5.1.14 $K_0 : \mathsf{Rng} \to \mathsf{Ab}$ 是一个函子.

证明 设 $\varphi : R \to S$ 是一个环同态, 那么它诱导一个幺环同态

$$\varphi^+ : R^+ \to S^+, \qquad (r, \lambda) \mapsto (\varphi(r), \lambda),$$

此时 φ^+ 使得下面的图表交换.

$$\begin{tikzcd} R^+ \arrow[r, "\varepsilon_R"] \arrow[d, "\varphi^+"] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ S^+ \arrow[r, "\varepsilon_S"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

在下图中的每一个横行都是一个短正合列, 于是由幺环 K_0 的函子性和 K_0 的分裂正合性可知存在唯一的态射使得下图交换,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "K_0(\varphi)"] & K_0(R^+) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\varphi^+)"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(S) \arrow[r] & K_0(S^+) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

此时 $K_0(\varphi)$ 便是图表中的虚线箭头. $\square$

引理 5.1.15 设环 J 满足 $J^n = 0$, 则 $K_0(J) = 0$.

证明 先证明 $n = 2$ 的情形. 因 $J^2 = 0$, $(\mathrm{Mat}_n(J))^2 = 0$. 设 p 是 $\mathrm{Mat}_n(J^+)$ 中的幂等元, 具有以下形式:

$$p = p_0 + x, \qquad p_0 \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}), \quad x \in \mathrm{Mat}_n(J).$$

由 $p^2 = p$ 可知 $x = xp_0 + p_0x$. 令 $u = p_0p$, $v = pp_0$, 则

$$uv = p_0 + p_0xp_0 = p_0, \qquad vu = p - pxp = p.$$

因此在序列 $\begin{tikzcd} J \arrow[r] & J^+ \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$ 中 s_* 是满射, $K_0(J) = \ker \pi_* = 0$.

对 $n \geqslant 2$ 的情形, 注意到

$$(1 + x)^{-1} = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i,$$

在序列 $J^{n-1} \xrightarrow{i} J \xrightarrow{\pi} J/J^{n-1}$ 中, 由 $K_0(J^{n-1}) = 0$ (由归纳法) 可知 $\operatorname{im} \pi_* = 0$; 而 $K_0(J/J^{n-1}) = 0$ 导出 $\ker \pi_* = K_0(J)$. 于是 $K_0(J) = 0$. $\square$

例 5.1.16 考虑 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的 K_0 群. 首先若 $n = 0$, $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 是已知的.

(1) 若 n 是素数, 此时 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个域, 于是 $K_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

(2) 若 $n = p^k$, 其中 p 是素数, $k \in \mathbb{N}$, 对序列

$$0 \longrightarrow p^k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

应用引理 5.1.15 可知 $K_0(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

(3) 设 $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ 是其素因子分解, 由中国剩余定理可知

$$K_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong K_0(\mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus K_0(\mathbb{Z}/p_m^{k_m}\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\oplus m}.$$

因此 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\oplus m}$, 其中 m 是 n 的互异素因子个数.

5.2　解析 K_0 群

下面若无特殊说明, 总假设 A 是一个 Banach 代数.

由于 Banach 代数是一个 $\mathbb{C}$-代数, 它自然存在环结构, 于是可以按照 5.1 节的方法定义 $K_0(A)$. 但 Banach 代数结构的存在使得我们存在更多的选择. 我们重申定义 K_0 的基本想法:

$$K_0 := \langle \text{生成元} \mid \text{等价关系} \rangle .$$

我们介绍一些对生成元和等价关系的不同选法, 并说明所有的选法定义出的 K_0 都是相同的.

选项 1 : $\langle$幂等元 | 幂等元的同伦 (+ 直和)$\rangle$

对 Banach 代数来说, 与环相比它额外的结构是拓扑结构, 因此我们可以谈论连续映射, 进而谈论同伦.

定义 5.2.1 (同伦)　设 $e_0,\ e_1$ 是 A 中的两个幂等元, 若存在连续映射 $e : [0,1] \to \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}_n(A))$ 使得 $e(0) = e_0, e(1) = e_1$, 则称 e_0 与 e_1 **同伦**, 记作 $e_0 \sim_h e_1$.

当 A 是单位代数时, 记 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 中的可逆元全体为 $\mathrm{GL}_n(A)$, 考虑从 $\mathrm{GL}_n(A)$ 到 $\mathrm{GL}_{n+1}(A)$ 的嵌入如下:

$$i_n : \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_{n+1}(A), \quad a \mapsto \begin{bmatrix} a & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

记定向系 $\mathrm{GL}_1(A) \to \mathrm{GL}_2(A) \to \cdots \to \mathrm{GL}_n(A) \to \cdots$ 的归纳极限为 $\mathrm{GL}(A)$.

引理 5.2.2　设 A 是单位代数, $e_0,\ e_1$ 是 A 中的两个幂等元, 且满足

$$\|e_0 - e_1\| < \frac{1}{\|2e_0 - 1\|},$$

则存在 $a \in \mathrm{GL}(A)$ 使得 $e_1 = ae_0a^{-1}$. 于是若 e_0 与 e_1 同伦, 则存在 $a \in \mathrm{GL}(A)$ 使得 $e_1 = ae_0a^{-1}$.

证明　令 $a = e_0 + e - 1$, 那么

$$ae_0 = e_0^2 + e_1e_0 - e_0 = e_1e_0, \qquad e_1a = e_1e_0 + e_1^2 - e_1 = e_1e_0,$$

于是 $ae_0 = e_1a$. 注意到 $(2e_0 - 1)^2 = 4e_0^2 - 4e_0 + 1 = 1$, 于是 $2e_0 - 1 \in \mathrm{GL}(A)$. 因此由

$$\|e_1 - e_0\| < \|2e_0 - 1\|^{-1} = 1,$$

那么 $a = (2e_0 - 1) + (e_1 - e_0)$ 是可逆元的和, 于是也可逆. 并且 $e_1 = ae_0a^{-1}$.

假设 $e_0 \sim_h e_1$, 令

$$a_t := (2e_0 - 1)(1 + t(2e_0 - 1)^{-1}(e_1 - e_0)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

那么注意到 $e_t = a_te_0a_t^{-1}$ 给出一个 $[0,1]$ 到 $\mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}_n(A))$ 的连续映射, 满足 $0 \mapsto e_0, 1 \mapsto e_1$. □

定义 5.2.3 (解析 K_0 群) 设 A 是单位 Banach 代数, 称

$$K_0(A) := \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}(A))/(\sim_h, \sim_\oplus)$$

是 A 的**解析 K_0 群**.

命题 5.2.4 使用幂等元的同伦定义的解析 K_0 群与代数 K_0 群同构.

证明 为此, 只需说明 $e_0 \sim_h e_1$ 当且仅当 $e_0 \sim_{\mathrm{conj}} e_1$ 即可.

必要性. 选取一列幂等元 $e_{t_0} = e_0, e_{t_1}, \ldots, e_{t_{k-1}}, e_{t_k} = e_1$, 使得对任意 $j = 0, 1, \ldots, k-1$ 都有 $\|e_{t_{j-1}} - e_{t_j}\| < \|2e_{t_j} - 1\|^{-1}$. 由引理 5.2.2 可知存在一列可逆元 $v_1, \ldots, v_k \in \mathrm{GL}(A)$ 使得 $e_{t_j} = v_j e_{t_{j-1}} v_j^{-1}$. 于是

$$e_1 = (v_k \cdots v_1) e_0 (v_k \cdots v_1)^{-1},$$

这就说明 $e_0 \sim_{\mathrm{conj}} e_1$.

必要性. 下面的技巧称作 2×2 **矩阵技巧**. 设 $v \in \mathrm{GL}(A)$ 使得 $e_1 = v e_0 v^{-1}$, 那么将其写成 2×2 矩阵的形式有

$$\begin{bmatrix} e_1 & \\ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & \\ & v^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & \\ & v^{-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

再注意到

$$\begin{bmatrix} v & \\ & v^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & v^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}.$$

那么映射

$$[0,1] \to \mathrm{GL}(A), \qquad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\pi t/2) & \sin(\pi t/2) \\ -\sin(\pi t/2) & \cos(\pi t/2) \end{bmatrix}$$

是一个连接 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}$ 的同伦, 这就证明了命题. □

对两个 Banach 代数同态 $\varphi_0, \varphi_1 : A \to B$, 若存在连续映射 $t \mapsto \varphi_t : A \to B$ 使得对任意 $a \in A$, $t \mapsto \varphi_t(a)$ 在 B 上的范数 $\|\cdot\|_B$ 下连续, 则称 φ_0 与 φ_1 同伦, 记作 $\varphi_0 \sim_h \varphi_1$.

命题 5.2.5 K_0 是同伦不变的.

证明 这只需证明若 $\varphi_0 \sim_h \varphi_1$, 那么 $K_0(\varphi_0) = K_0(\varphi_1) : K_0(A) \to K_0(B)$.

考虑赋值映射

$$\mathrm{ev}_t : C([0,1], A) \to A, \qquad f \mapsto f(t),$$

断言对 $t = 0$ 和 $t = 1$, $K_0(\mathrm{ev}_t)$ 给出一个从 $K_0(C([0,1], A))$ 到 $K_0(A)$ 的同构. 这是因为, 当我们定义映射

$$s : A \to C([0,1], A), \qquad a \mapsto [s(a) : t \mapsto a],$$

我们有 $\mathrm{ev}_t s = \mathrm{id}_A$, 于是 $K_0(\mathrm{ev}_t) K_0(s) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$, 这就说明了 $K_0(\mathrm{ev}_t)$ 是单的.

令 $q \in \mathrm{Mat}_n(C([0,1], A)) \cong C([0,1], \mathrm{Mat}_n(A))$, 令 $q_t(x) = q(tx)$, 那么 $q_1 = q$, $q_0 = s\mathrm{ev}_0(q)$. 于是 $q_0 \sim_h q_1$. 由上述定义可知 $[q_1] = [q_0] = K_0(s)[q_0]$, 这就说明 $K_0(s)$ 是满射. 由 Banach–Steinhaus 定理可知, 由于 $t \mapsto \varphi_t(a)$ 对每个 $a \in A$ 都连续, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|\varphi_t\| < +\infty$, 令

$$\varphi : A \to C([0,1], B), \qquad a \mapsto [\varphi(a) : t \mapsto \varphi_t(a)],$$

那么 $\mathrm{ev}_0 \varphi = \varphi_0$, $\mathrm{ev}_1 \varphi = \varphi_1 = K_0(s)^{-1}$. □

同伦不变性使得我们可以拓扑地计算 Banach 代数的 K_0 群.

例 5.2.6 (锥) 设 X 是可缩的紧 Hausdorff 空间, 也即存在嵌入 $\iota : \mathrm{pt} \to X$ 和 $\pi : X \to \mathrm{pt}$ 使得 $\iota\pi \sim_h \mathrm{id}_X$, 那么由同伦不变性可知

$$K_0(C(X)) = K_0(C(\mathrm{pt})) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

称 A 的**锥**为 $CA := C((0,1], A)$, 这是一个**可缩代数**的重要例子, 也即 $\mathrm{id}_A \sim_h 0 : A \to A$. 其中的同伦由

$$\varphi_t : CA \to CA, \qquad f(x) \mapsto f(tx),$$

于是对任意 Banach 代数 A 都有 $K_0(CA) = 0$.

Gelfand–Naimark 定理给出了紧 Hausdorff 空间范畴 $\mathsf{CHaus}^{\mathrm{op}}$ 和单位交换 C^* 代数 $\mathsf{C^*\text{-}CommAlg1}$ 作为范畴的同构, 于是对紧 Hausdorff 空间, 可以定义其**拓扑 K^0 群** 为

$$K^0(X) := K_0(C(X)),$$

这里上下标改变的缘由是 Gelfand–Naimark 定理给出的是反变函子.

选项 2 : $\langle$半幂等元 | 半幂等元的同伦 (+ 直和)$\rangle$

定义 5.2.7 (半幂等元) 设 A 是 Banach 代数, 若 $e \in A$ 使得存在 $\varepsilon \leqslant 1/4$ 使得 $\|e^2 - e\| < \varepsilon$, 则称 e 是一个**半幂等元**.

我们将看到 $\varepsilon \leqslant 1/4$ 这一假设是如何得到的: 这是为了保证幂等元的稳定性. 所谓的**稳定性**指的是: 几乎拥有某种性质的元素与具有这种性质的元素靠的很近. 上面定义的半幂等元就是几乎满足幂等性的元素, 下面我们说明「成为幂等元」是具有稳定性的: 也即如果一个元素是半幂等元, 那么存在幂等元在它的充分小邻域中.

命题 5.2.8 设 e 是半幂等元, 则存在幂等元 e' 使得 $\|e - e'\| < 2\varepsilon$.

证明 由半幂等元的定义, $\varepsilon \leqslant 1/4$, 考虑 $\sigma(e - e^2)$. 由于 $f(t) = t - t^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是 $1/4$, 于是 $\varepsilon \leqslant 1/4$ 时

$$f^{-1}[0,\varepsilon] = \left[0, \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2}, 1\right] \supset \sigma(e),$$

从而 $1_{[1/2,1]}$ 在 $\sigma(e)$ 上是全纯的. 定义 $e' = 1_{[1/2,1]}(e)$ 得到一个幂等元. 又因为

$$\sup_{t\in\sigma(e)} |f(t) - t| = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2},$$

于是

$$\|e' - e\| = \left\|1_{[1/2],1} - 1\right\|_{\sigma(e),\infty} = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} < 2\varepsilon,$$

得证. □

由此可知幂等元的同伦可以得到半幂等元的同伦, 反之亦然. 因此如此选择生成的 K_0 群与选项 1 中的解析 K_0 群是一回事.

选项 3 : C^*-情形, $\langle$投影 | 投影的同伦 (+ 直和)$\rangle$

下面假设 A 是一个单位 C^* 代数: 这在 Banach 代数的基础上增加了对合结构, 因此我们可以考虑自伴的幂等元 $p = p^* = p^2$, 也即 A 中的投影. 为了保证记号的统一, 记 A 的单位化 $\tilde{A}$ 为 A^+.

命题 5.2.9 A 中任何幂等元 e 都与某个投影 p 在 $\mathrm{Idem}(A)$ 中同伦, 并且 (在幂等元的意义下) 等价.

证明 令 $h=1+(e-e^*)(e^*-e)$, 则 h 为 A^+ 中可逆的正元. 定义映射:

$$\rho : \mathrm{Idem}(A) \to \mathrm{Proj}(A), \qquad e \mapsto ee^*h^{-1}$$

有 $\rho(e) \in A$. 这因 $ee^* \in A$ 且 $(1+(e-e^*)(e^*-e))^{-1} \in A^+$, 结合 A 为 A^+ 中理想即得.

由于 $h=1+ee^*+e^*e-e-e^*$, 得

$$eh = ee^*e = he, \qquad e^*h = e^*ee^* = he^*$$

因此

$$ee^*h = (ee^*)^2 = ee^*ee^* = hee^*.$$

因 h 可逆, 有 $h^{-1}ee^* = ee^*h^{-1}$, 这就说明 $\rho(e)$ 自伴. 而

$$\rho(e)^2 = ee^*h^{-1}ee^*h^{-1} = (ee^*)^2h^{-2} = ee^*h^{-1} = \rho(e)$$

因此 $\rho(e) \in \mathrm{Proj}(A)$. 注意到 $\rho(e)e = ee^*h^{-1}e = h^{-1}ee^*e = h^{-1}he = e$ 和 $e\rho(e) = \rho(e)$ 可得 e 与 $\rho(e)$ 等价.

下证 e 与 $\rho(e)$ 在 $\mathrm{Idem}(A)$ 中同伦. 注意到 $(te+(1-t)\rho(e))^2 = te+(1-t)\rho(e)$ 和映射 $\rho : \mathrm{Idem}(A) \to \mathrm{Proj}(A)$ 连续即可. □

对于上述定义的 ρ, 若 p 为投影, 则 $\rho(p)=p$. 因此 $\mathrm{Proj}(A)$ 为 $\mathrm{Idem}(A)$ 的强形变收缩核. 具体地,

$$H : \mathrm{Idem}(A) \times [0,1] \to \mathrm{Idem}(A), \qquad (e,t) \mapsto (1-t)\rho(e)+te$$

给出所求同伦. 由此立刻得到

推论 5.2.10 $\mathrm{Proj}(A)$ 为 $\mathrm{Idem}(A)$ 的强形变收缩核. 特别地, $\mathrm{Proj}(A)$ 与 $\mathrm{Idem}(A)$ 同伦等价.

投影在 $\mathrm{Idem}(A)$ 中同伦的确可以推出在 $\mathrm{Proj}(A)$ 中同伦, 因此在同伦的层面上, 考虑投影是合理的.

推论 5.2.11 若 $p,q \in \mathrm{Proj}(A)$, p 与 q 在 $\mathrm{Idem}(A)$ 中同伦, 则 p 与 q 在 $\mathrm{Proj}(A)$ 中同伦.

证明 设 $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Idem}(A)$ 是连接 p 与 q 的同伦道路, 即

$$\varphi(0)=p, \quad \varphi(1)=q, \quad \varphi(t) \in \mathrm{Idem}(A),\ \forall 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

考虑 $\rho \circ \varphi : [0,1] \to \mathrm{Proj}(A)$. 由 ρ 和 φ 均连续可知 $\rho \circ \varphi$ 连续, 且

$$\rho(\varphi(0)) = \rho(p) = p, \qquad \rho(\varphi(1)) = \rho(q) = q.$$

因此 $\rho \circ \varphi$ 给出 p 和 q 在 $\mathrm{Proj}(A)$ 中的同伦. □

于是对 C^* 代数 A 来说, 使用投影及其同伦定义的 K_0 群与视 A 为 Banach 代数使用选项 1 定义的解析 K_0 群一致.

选项 4 : C^*-情形, $\langle$投影 | 部分等距定义的 Murray–von Neumann 等价 (+ 直和)$\rangle$

命题 5.2.12 设 $p,q \in A$ 是投影, 则 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$ 当且仅当存在部分等距 v 使得 $p=vv^*$, $q=v^*v$.

证明 *必要性*. 显然.

充分性. 若 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$, 设 $p=xy$, $q=yx$. 令 $x'=pxq$, $y'=qyp$, 我们可以假设 $x=pxq$, $y=qyp$. 于是有

$$p = p^*p = y^*x^*xy \leqslant \|x\|^2\, y^*y,$$

这说明 y^*y 在 pAp 中可逆, 因此 $|y|=(y^*y)^{1/2}$ 也可逆. 设 $r\in A$ 使得 $r=prp$, 且 $|y|\,r=r\,|y|=p$, 再记 $v=yr$, 那么

$$v^*v=r^*y^*yr=r^*\,|y|^2\,r=p^2=p.$$

因此 v 是一个部分等距, 进而 vv^* 是投影.

注意到

$$qvv^*=qyrr^*y^*=qyprr^*y^*=yrr^*y^*=vv^*,$$

于是 $vv^*\leqslant q$. 另一方面,

$$v\,|y|=yr\,|y|=yp=qypp=qyp=y,\quad q=yxx^*y^*\leqslant\|x\|^2\,yy^*=\left\|x^2\right\|vy^*yv^*\leqslant\|x\|^2\,\|y\|^2\,vv^*.$$

于是 $vv^*=q$. □

于是 C^* 代数 A 中投影的 Murray–von Neumann 等价关系还可以使用部分等距来刻画. 特别地, 若 A 是交换的, 那么此时的 Murray–von Neumann 等价就是相等. 零算子 0 不与任何非零投影等价. 若 $I\lhd A$ 是一个理想, 那么当 $p\in I$ 且 $p\sim_{\mathrm{MvN}}q$ 时, $q\in I$. 这是因为此时 $q=vpv^*$.

通过这种方式得到的 K_0 群与将 A 视作幺环得到的代数 K_0 群一致, 于是也与解析 K_0 群一致.

选项 5 : C^*-情形, $\langle$投影 | 酉元的共轭类 (+ 直和)$\rangle$

下面设 A 是 C^* 代数, 并记 A 的酉元全体为 $\mathrm{U}(A)$.

定义 5.2.13 (酉等价)　设 $p,q\in A$ 是投影, 若存在 $u\in\mathrm{U}(A^+)$ 使得 $q=upu^*$, 则称 p 与 q **酉等价**, 记作 $p\sim_u q$, 相应的等价类记作 $[p]_u$.

容易验证 $\sim_u$ 的确是一个等价关系, 且 $1\in A^+$ 不与任何非恒等算子酉等价.

引理 5.2.14　设 A 是单位 C^* 代数, $p,q\in A$ 是投影, 以下条件等价:

(1)　$p\sim_u q$;

(2)　存在 $u\in\mathrm{U}(A)$ 使得 $q=upu^*$;

(3)　$p\sim_{\mathrm{MvN}}q$ 且 $1_A-p\sim_{\mathrm{MvN}}1_A-q$.

证明　令 $e=1_{A^+}-1_A$, 于是对任意 $a\in A$, 成立 $ae=ea=0$.

(1) ⇒ (2) : 因 $p\sim_u q$, 存在 $\tilde u\in\mathrm{U}(A^+)$ 使得 $q=\tilde up\tilde u^*$, 因 A 是单位的, 存在 $u\in A$ 和 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $\tilde u=u+\alpha e$. 于是由 $\tilde u$ 是酉元可知 $u=\tilde u-\alpha e$ 也是酉元, 且

$$q=(u+\alpha e)p(u+\alpha e)^*=upu^*,$$

(这因 $p\in A$ 于是 $pe=ep=0$.) 得证.

(2) ⇒ (3) : 若存在 $u\in\mathrm{U}(A)$ 使得 $q=upu^*$, 令 $v=up, w=u(1_A-p)$, 有

$$v^*v=p,\quad vv^*=q,\quad w^*w=1_A-p,\quad ww^*=1_A-q,$$

得证.

(3) ⇒ (1) : 设存在部分等距 v,w 满足 $p\sim_{\mathrm{MvN}}q$, $v^*v=p$, $vv^*=q$, 且 $1_A-p\sim_{\mathrm{MvN}}1_A-q$, $w^*w=1_A-p$, $ww^*=1_A-q$, 令 $\tilde u=v+w+e$, 就有

$$uu^*=vv^*+vw^*+wv^*+ww^*+ee^*=q+1_A-q+1_{A^+}-1_A=1_{A^+},$$

即 $\tilde u$ 是酉元, 而 $q=\tilde up\tilde u^*$ 无非是代入计算. □

这说明若 $p \sim_u q$, 则 $p \sim_{\text{MvN}} q$. 但反之未必成立, 这因 $p \sim_{\text{MvN}} q$ 并不能推出其正交补 $1-p \sim_{\text{MvN}} 1-q$. 反例是容易构造的, 只需要考虑 A 中存在不保持单位的等距 s, 则 $s^*s \sim_{\text{MvN}} ss^*$, 但此时 $s^*s = 1$, 而 $1-s^*s = 0$ 一定不会与 $1-ss^* \neq 0$ 等价. 但是对酉等价, 容易说明 $p \sim_u q$ 一定能推出 $1-p \sim_u 1-q$.

引理 5.2.15 设 $p, q \in A$ 是投影, 存在可逆的 $z \in A^+$ 使得 $q = zpz^{-1}$, 则 $p \sim_u q$.

证明 此时 $zp = qz$, $z^*q = pz^*$, 故

$$pz^*z = z^*qz = z^*zp,$$

这即 z^*z 与 p 交换. 于是 $|z|^{-1} = (z^*z)^{-1/2}$ 也和 p 交换. 令 $u = z\,|z|^{-1} \in \mathrm{U}(A)$, 由

$$upu^* = z\,|z|^{-1}\,p\,|z|^{-1}\,z^* = zp\,|z|^{-2}\,z^* = qz(z^*z)^{-1}z^* = q,$$

这即 $p \sim_u q$. □

于是通过酉元的共轭类定义的 K_0 与将 A 视作幺环时得到的代数 K_0 群一致.

选项 6 : C^*-情形, ⟨半投影 | 半投影的同伦 (+ 直和)⟩

定义 5.2.16 (半投影) 设 A 是 C^* 代数, 若 $p \in A$ 使得存在 $\varepsilon \leqslant 1/4$ 使得 $\|p^2 - p\| < \varepsilon$, 则称 p 是一个**半投影**.

使用与命题 5.2.8 完全相同的方法可以证明投影在 C^* 代数中也具有稳定性. 由此, 半投影的同伦可以与投影的同伦建立对应, 进而可以定义 C^* 代数的 K_0, 这与选项 3 中的 K_0 一致.

总结与补充: 投影的不同等价关系

至此, 对 Banach 代数 A, 我们给出了两种生成解析 K_0 群的方式. 对 C^* 代数 A, 我们可以给出六种生成 K_0 群的方式. 其中同伦是 Banach 代数相比于幺环多出的拓扑结构给出的, 而投影是 C^* 代数相比于 Banach 代数多出的对合结构给出的.

于是对 C^* 代数 A, 投影全体 $\mathrm{Proj}(A)$ 是重要的研究对象. 至此, 我们在 $\mathrm{Proj}(A)$ 上定义了三种不同的等价关系: Murray–von Neumann 等价 $\sim_{\text{MvN}}$, 同伦 $\sim_h$ 和酉等价 $\sim_u$. 通过 2×2 矩阵技巧, 它们之间可以相互转化.

引理 5.2.17 设 A 是单位 C^* 代数, 记 $\mathrm{U}(A)_0$ 是 $\mathrm{U}(A)$ 中包含 1 的连通分支. 那么:

(1) 对任意 $h \in A_{\text{sa}}$, 有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}h} \in \mathrm{U}(A)_0$.

(2) 若 $u \in \mathrm{U}(A)$ 且 $\sigma(u) \neq \mathbb{S}^1$, 则 $u \in \mathrm{U}(A)_0$.

(3) 若 $u, v \in \mathrm{U}(A)$ 满足 $\|u - v\| < 2$, 则 $u \sim_h v$.

证明 (1) 对 $h \in A_{\text{sa}}$, 由连续函数演算可知 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}h} \in \mathrm{U}(A)$. 定义

$$H_t : \sigma(h) \to \mathbb{S}^1, \qquad z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz},$$

则 $t \mapsto H_t$ 给出所求的同伦, 满足 $H_0(h) = 1$, $H_1(h) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h}$, 故 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}h} \sim_h 1$, 得证.

(2) 若 $\sigma(u) \neq \mathbb{S}^1$, 则存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \notin \sigma(u)$, 于是函数

$$\varphi : \sigma(u) \to (\theta, \theta + 2\pi), \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mapsto t$$

在 $\sigma(u)$ 上连续. 取 $h = \varphi(u)$, 由 φ 是实函数可知 $h \in A_{\text{sa}}$, 则由 (1) 可知 $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h} \in \mathrm{U}(A)_0$.

(3) 对 $u, v \in \mathrm{U}(A)$, 有 $\|u\| = \|v\| = 1$, 使得

$$\|v^*(u - v)\| \leqslant \|v^*\|\,\|u - v\| < 2.$$

因此 $-2 \notin \sigma(v^*(u-v)) = \sigma(v^*u-1)$, 故 $-1 \notin \sigma(v^*u)$, 这说明 $v^*u \in \mathrm{U}(A)$ 且 $\sigma(v^*u) \neq \mathbb{S}^1$. 由 (2) 可知 $v^*u \sim_h 1$. 而 $v \sim_h v$, 将二者的同伦道路相乘就得到 $u \sim_h v$. □

$\mathrm{U}(A)_0$ 的结构相对来说是比较简单的, 这使得我们可以写出这一连通分支内元素的具体形式.

定理 5.2.18 ($\mathrm{U}(A)_0$ 的结构)　设 A 是一个单位 C^* 代数, 则 $\mathrm{U}(A)_0$ 是 $\mathrm{U}(A)$ 的既开又闭的正规子群, 它形如

$$\mathrm{U}(A)_0 = \left\{ \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}h_k} : n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1},\ h_k \in A_{\mathrm{sa}} \right\}.$$

证明　首先 $\mathrm{U}(A)_0$ 是 $\mathrm{U}(A)$ 的子群, 对 $u \in \mathrm{U}(A)_0$, 设 $u \sim_h 1$ 的同伦道路为 $t \mapsto H_t$, 则 $t \mapsto H_t^{-1}$ 给出了 u^{-1} 到 1 的同伦道路, 对 $v \in \mathrm{U}(A)$, $t \mapsto vH_tv^*$ 给出了 vuv^* 到 1 的同伦道路, 这就说明 $\mathrm{U}(A)_0$ 是 $\mathrm{U}(A)$ 的正规子群.

记 $G = \left\{\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}h_k} : n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1},\ h_k \in A_{\mathrm{sa}}\right\}$, 由定义立刻得到 G 是 $\mathrm{U}(A)_0$ 的子群. 对 $u \in \mathrm{U}(A)$ 和 $v \in G$ 满足 $\|u-v\| < 2$, 由

$$\|1-uv^*\| = \|u-v\| < 2$$

可知 $uv^* \in \mathrm{U}(A)$, 因此存在 $h \in A_{\mathrm{sa}}$ 使得 $uv^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h}$, 也即 $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h}v$. 因此 $u \in G$, 这就说明 G 在 $\mathrm{U}(A)$ 中开. 而 $\mathrm{U}(A) \setminus G$ 是若干形如 Gu 的陪集的无交并, 由 G 开可知 Gu 开, 于是 $\mathrm{U}(A) \setminus G$ 也是开集, 这即 G 在 $\mathrm{U}(A)$ 中是闭集. 因此 G 是 $\mathrm{U}(A)$ 中既开又闭的子集, 而 $G \subset \mathrm{U}(A)_0$, 后者是连通集, 只能 $G = \mathrm{U}(A)_0$. 得证. □

引理 5.2.19　设 A 是 C^* 代数, $p, q \in A$ 是投影.

(1)　若 $\|p-q\| < 1$, 则 $p \sim_h q$;

(2)　设 $x \in \mathrm{GL}(A)$, 若 $y \in A$ 满足 $\|x-y\| \leqslant \|x^{-1}\|^{-1}$, 则 $y \in \mathrm{GL}(A)$, 且在 $\mathrm{GL}(A)$ 中 $x \sim_h y$;

(3)　$p \sim_h q$ 当且仅当存在 $u \in \mathrm{U}(A^+)_0$ 使得 $q = upu^*$.

证明　(1) 记 $x_t = p + t(q-p)$, $t \in [0,1]$. 则 $x_t \in A_{\mathrm{sa}}$ 且

$$\max\{\|x_t - p\|, \|x_t - q\|\} \leqslant \frac{\|p-q\|}{2} < \frac{1}{2},$$

且映射 $t \mapsto x_t$ 是连续的. 定义 $f = 1_{[1/2,1]}$, 它在 $\sigma(x_t)$ 上连续, 于是 $r = f(x_t)$ 是一个投影, 且 $t \mapsto f(x_t)$ 也连续. 因此

$$p = f(p) = f(x_0) \sim_h f(x_1) = f(q) = q,$$

即 $p \sim_h q$.

(2) 由

$$\left\|1 - x^{-1}y\right\| = \left\|x^{-1}(x-y)\right\| \leqslant \left\|x^{-1}\right\| \|x-y\| \leqslant 1$$

可知 $x^{-1}y \in \mathrm{GL}(A)$, 且 $\|(x^{-1}1y)^{-1}\| \leqslant (1 - \|1 - x^{-1}y\|)^{-1}$, 于是 $y \in \mathrm{GL}(A)$. 由此 $y^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}x^{-1}$. 此时

$$\begin{aligned}\left\|y^{-1}\right\|^{-1} &\geqslant \left\|(x^{-1}y)^{-1}\right\|^{-1} \left\|x^{-1}\right\|^{-1} \\ &\geqslant \left(1 - \left\|1 - x^{-1}y\right\|\right) \left\|x^{-1}\right\|^{-1} \geqslant \left\|x^{-1}\right\|^{-1} - \|x-y\|.\end{aligned}$$

要说明 $x \sim_h y$, 还需要说明对任意 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x + t(y-x) \in \mathrm{GL}(A)$. 这因

$$\|x - (x - t(y-x))\| = t\|x-y\| < \left\|x^{-1}\right\|^{-1},$$

于是 $x + t(y-x) \in \mathrm{GL}(A)$.

(3) 充分性. 由 $u \in \mathrm{U}(A^+)_0$, 取 u 与 1 的同伦道路 $t \mapsto u_t$, 则 $t \mapsto u_tpu_t^*$ 给出 p 到 q 的同伦道路.

必要性. 若 $p\sim_h q$, 取若干投影 $p_0,\dots,p_n$ 使得 $p_0=p, p_n=q$, 且对任意 j, $\|p_{j+1}-p_j\|<1/2$. 因此不妨设 $\|p-q\|<1/2$. 设 $r=pq+(1-p)(1-q)$, 则 $r\in A^+$ 且 $pr=pq=rq$, 即 $p=rqr^{-1}$. 由

$$\|1-r\|=\|p(q-p)+(1-p)((1-q)-(1-p))\|\leqslant 2\|q-p\|<1$$

可知 $r\in \mathrm{GL}(A^+)$, 于是 $p\sim_u q$, 特别地若 $r=u|r|$, 则 $p=uqu^*$. 又 $r\sim_h 1$, 于是 $u\sim_h r\sim_h 1$, 这就说明了 $u\in \mathrm{U}(A^+)_0$.

于是我们得到:

推论 5.2.20 设 A 是 C^* 代数, $p,q\in A$, 以下条件渐弱:

(1) $p\sim_h q$;

(2) $p\sim_u q$;

(3) $p\sim_{\mathrm{MvN}} q$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由引理 5.2.19 得到, (2) $\Rightarrow$ (3) 由命题 5.2.9 得到. 注意这同时给出了反向的额外条件, 因此反向的推导均不成立. □

但将其放到矩阵代数 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 中, 可以通过 2×2 矩阵技巧使得其反向蕴涵在更高阶数的矩阵代数上成立. 为此介绍一个重要的技术性引理: Whitehead 引理.

引理 5.2.21 (Whitehead) 设 A 是单位 C^* 代数, $u,v\in \mathrm{U}(A)$, 那么在 $\mathrm{U}_2(A)$ 中有

$$\begin{bmatrix}u&\\&v\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}uv&\\&1\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}vu&\\&1\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}v&\\&u\end{bmatrix}.$$

特别地, $\begin{bmatrix}u&\\&u^*\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$.

证明 由于 $\sigma\left(\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}\right)\neq\mathbb{S}^1$, 于是 $\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{bmatrix}u&\\&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u&\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v&\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}uv&\\&1\end{bmatrix},$$

其余的同伦类类似可得. □

命题 5.2.22 设 A 是单位 C^* 代数, $p,q\in A$ 是投影, 则

(1) 若 $p\sim_{\mathrm{MvN}} q$, 则在 $\mathrm{Mat}_2(A)$ 中 $\begin{bmatrix}p&0\\0&0\end{bmatrix}\sim_u\begin{bmatrix}q&0\\0&0\end{bmatrix}$;

(2) 若 $p\sim_u q$, 则在 $\mathrm{Mat}_2(A)$ 中 $\begin{bmatrix}p&0\\0&0\end{bmatrix}\sim_h\begin{bmatrix}q&0\\0&0\end{bmatrix}$.

证明 (1) 因 $p\sim_{\mathrm{MvN}} q$, 存在部分等距 v 使得 $p=v^*v, q=vv^*$. 因

$$v=qv=vp=qvp,$$

令 $w=\begin{bmatrix}q&1-q\\1-q&q\end{bmatrix}$, $u=\begin{bmatrix}v&1-q\\1-p&v^*\end{bmatrix}$, 计算验证 $u,w\in \mathrm{U}_2(A)$.

令 $u_0=wu\in \mathrm{U}_2(A)$, 计算得到 $u_0=\begin{bmatrix}v+(1-q)(1-p)&(1-q)v^*\\q(1-p)&1-q+qv^*\end{bmatrix}$, 继续计算

$$u_0\begin{bmatrix}p&0\\0&0\end{bmatrix}u_0^*=\begin{bmatrix}v&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^*+(1-p)(1-q)&(1-p)q\\v(1-q)&1-q+vq\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q&0\\0&0\end{bmatrix},$$

得证.

(2) 若 $p \sim_u q$, 设 $u \in \mathrm{U}(A)$ 使得 $q = upu^*$. Whitehead 引理说明 $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{bmatrix} \sim_h \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. 不妨设 $t \mapsto u_t$ 连续, 使得 $u_0 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{bmatrix}$. 令

$$p_t = u_t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_t^*,$$

则 $p_0 = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p_1 = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 并且 $t \mapsto p_t$ 仍然是连续的. 得证. □

5.3　归纳极限与稳定性

我们已经在 5.1 节与 5.2 节讨论了 K_0 群及其正合性, 我们证明了:

- K_0 是半正合的函子;
- K_0 保持分裂的正合列.

而 Banach 代数的解析 K_0 群可以通过看作是幺环的代数 K_0 群, 因此尽管 5.2 节中的绝大多数讨论都针对单位 Banach 代数, 仍然可以照猫画虎地对非单位的 Banach 代数定义解析 K_0 群. 这样 Gelfand–Naimark 定理同样可以给出局部紧 Hausdorff 空间 X 的拓扑 K^0 群 $K^0(X) := K_0(C_0(X))$.

对 C^* 代数 A, 类似地给出 $K_0(A)$ 中元素的一般形式:

命题 5.3.1 (解析 K_0 群的结构)　设 A 是 C^* 代数, 有正合列

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} A^+ \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

记 $s = \lambda\pi$, 并将其延拓到 $\mathrm{Proj}_\infty(A^+)$ 上, 那么

$$K_0(A) = \left\{ [p] - [s(p)] : p \in \mathrm{Proj}_\infty(A^+) \right\}.$$

证明　设 $p \in \mathrm{Proj}_\infty(A^+)$, 则由 $\pi = \pi s$ 可知

$$K_0(\pi)([p] - [s(p)]) = [\pi(p)] - [\pi s(p)] = 0,$$

于是 $[p] - [s(p)] \in \ker K_0(\pi) = K_0(A)$.

反之, 设 $g \in K_0(A) \subset K_0(A^+)$, 因 A^+ 是单位的, 于是单位 C^* 代数 K_0 群的结构给出 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $e, f \in \mathrm{Proj}_n(A^+)$ 使得 $g = [e] - [f]$. 取

$$p = \mathrm{diag}\{e, 1_n - f\}, \qquad q = \mathrm{diag}\{0, 1_n\},$$

则此时 $p, q \in \mathrm{Proj}_{2n}(A^+)$, 并且

$$[p] - [q] = [e] + [1_n - f] - [1_n] = [e] - [f] = g,$$

此时 q 的选取使得 $s(q) = \lambda\pi(q) = q$, 于是

$$[s(p)] - [q] = [s(p)] - [s(q)] = K_0(s)(g) = K_0(\lambda)K_0(\pi)(g) = 0,$$

于是 $[s(p)] = [q]$, 这即 $g = [p] - [q] = [p] - [s(p)]$. □

引理 5.3.2　设 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 为一列 C^* 代数, 以 $\prod_{n\geqslant 1} A_n$ 记其直积而以 $\bigoplus_{n\geqslant 1} A_n$ 记其直和, 设 $\pi : \prod_{n\geqslant 1} A_n \to \prod_{n\geqslant 1} A_n / \bigoplus_{n\geqslant 1} A_n$ 是商映射, 则对任意 $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \prod_{n\geqslant 1} A_n$, 成立

$$\|\pi(a)\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

证明 容易验证 $\bigoplus_{n\geqslant 1} A_n \lhd \prod_{n\geqslant 1} A_n$, 于是 π 是良定义的. 令

$$I=\left\{a\in\prod_{n\geqslant 1}A_n : a_n=0\,\text{除有限多个}\ n\ \text{以外}\right\},$$

易证 I 在 $\bigoplus_{n\geqslant 1} A_n$ 中稠密, 因此由 $b\mapsto \|a-b\|$ 连续可知 $\|\pi(a)\| = \inf\{\|a-b\| : b\in I\}$. 对任意 $b=(b_n)_{n\geqslant 1}\in I$ 和充分大的 n 总有 $b_n=0$, 因此

$$\|a-b\|\geqslant \limsup_{n\to\infty}\|a_n-b_n\|=\limsup_{n\to\infty}\|a_n\|.$$

反之, 任取 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, 令 $b^{(k)}=(b_n^{(k)})_{n\geqslant 1}\in I$, 其中

$$b_n^{(k)}=\begin{cases}a_n, & n\leqslant k\\ 0, & n>k.\end{cases}$$

因此

$$\|\pi(a)\|\leqslant \inf_{k\geqslant 1}\left\|a-b^{(k)}\right\|=\inf_{k\geqslant 1}\sup_{n>k}\|a_n\|=\limsup_{n\to\infty}\|a_n\|.$$

得证. □

命题 5.3.3 C*–Alg 中任何归纳序列

$$A_1\xrightarrow{\varphi_1}A_2\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\longrightarrow A_n\xrightarrow{\varphi_n}\cdots$$

都存在归纳极限 $(A,(\mu_n))$, 其中 $A=\overline{\bigcup_{n\geqslant 1}\mu_n(A_n)}$, 且

(1) $\|\mu_n(a)\|=\lim_{n\to\infty}\|\varphi_{m,n}(a)\|$ 对任意 $a\in A_n$ 和 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 均成立;

(2) $\ker(\mu_n)=\{a\in A_n : \lim_{m\to\infty}\|\varphi_{m,n}(a)\|=0\}$;

(3) 若 $(\mathcal{B},(\lambda_n))$ 也是一个有向系, $\lambda : A\to\mathcal{B}$ 是泛性质中唯一确定的态射, 则

  (i) $\ker\mu_n\subset\ker\lambda_n$ 对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 均成立;

  (ii) λ 是单态当且仅当 $\ker\lambda_n\subset\ker\mu_n$ 对所有的 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 均成立;

  (iii) λ 是满态当且仅当 $\mathcal{B}=\overline{\bigcup_{n\geqslant 1}\lambda_n(A_n)}$.

证明 首先给出归纳极限的构造. 令

$$\pi:\prod_{n\geqslant 1}A_n\to\prod_{n\geqslant 1}A_n\Big/\bigoplus_{n\geqslant 1}A_n$$

为商映射. 定义 $\varphi_{m,n}: A_n\to A_m$, 其中

$$\varphi_{m,n}=\begin{cases}\varphi_{m-1}\circ\varphi_{m-2}\circ\cdots\circ\varphi_n, & m>n\\ \mathrm{id}_{A_n}, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

再定义

$$\nu_n: A_n\to\prod_{n\geqslant 1}A_n,\qquad a\mapsto(\varphi_{m,n}(a))_{m\geqslant 1}$$

并记 $\mu_n=\pi\circ\nu_n$. 对 $a\in A_n$, 有 $\nu_n(a)-(\nu_{n+1}\circ\varphi_n)(a)\in\mathcal{I}\subset\bigoplus_{n\geqslant 1}A_n$, 因此 $\mu_n=\mu_{n+1}\circ\varphi_n$. 于是 $\{\mu_n(A_n)\}_{n\geqslant 1}$ 为一列递增 C^* 代数, 因此

$$A=\overline{\bigcup_{n\geqslant 1}\mu_n(A_n)}$$

是一个 C^* 代数. 如此定义的 A 满足归纳极限定义的态射条件.

若 $(\mathcal{B}, \{\lambda_n\})$ 是一个有向系, 满足 $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$, 则 $\lambda_m \circ \varphi_{m,n} = \lambda_n$ 对所有 $m > n$ 均成立. 此时自然有 $\|\lambda_n(a)\| \leqslant \|\varphi_{m,n}(a)\|$. 由引理 5.3.2 得

$$\|\mu_n(a)\| = \|\pi(\nu_n(a))\| = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|.$$

其中最后一个等号因 $\|\varphi_{m,n}(a)\|$ 关于 m 是一个单调减且有下界的数列, 因此极限存在. 这就给出了命题中的 (1).

此时

$$\|\lambda_n(a)\| \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = \|\mu_n(a)\|.$$

因此, 存在唯一的 $\lambda_n' : \mu_n(A_n) \to B$ 使得 $\lambda_n' \circ \mu_n = \lambda_n$. 由之前的讨论容易验证 λ_n' 良定义, 且由 $\lambda_{n+1}' \circ \mu_{n+1} = \lambda_{n+1}$ 得到

$$\lambda_{n+1}' \circ \mu_{n+1} \circ \varphi_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$$

那么 $\lambda_{n+1}' \circ \mu_n = \lambda_n$, 由唯一性有 $\lambda_{n+1}'|_{\mu_n(A_n)} = \lambda_n'$.

综上,

$$\lambda' : \bigcup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n) \to B$$

良好地定义了一个*-代数同态, 它延拓了每一个 λ_n'. 而每个 λ_n' 均压缩, 故 λ' 也压缩. 因此 λ' 可以延拓到 $A = \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n)}$ 上, 记为 λ. 由 $\lambda|_{\mu_n(A_n)} = \lambda_n'$ 知 $\lambda \circ \mu_n = \lambda_n' \circ \mu_n = \lambda_n$. 唯一性由 $\bigcup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n)$ 在 A 中的稠密性得到. 因此 $A = \overline{\cup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n)}$ 满足定义. 命题中的 (1) 和 (2) 都已被证明, 下证 (3).

(i) 因对任意 $a \in \ker \mu_n$,

$$\lambda_n(a) = (\lambda_n' \circ \mu_n)(a) = 0$$

即 $a \in \ker \lambda_n$.

(ii) 因

$$\lambda \text{ 是单态} \iff \lambda \text{ 是等距} \iff \lambda' \text{ 是等距} \iff \forall n \geqslant 1\, (\lambda_n' \text{ 是等距}) \iff \forall n \geqslant 1\, (\lambda_n' \text{ 是单态})$$

由 λ_n' 的定义可知它是单态当且仅当 $\ker(\lambda_n) = \ker(\mu_n)$.

(iii) 从 λ 的构造可知

$$\lambda'\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n)\Big) \subset \lambda(A) \subset \overline{\lambda'\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n)\Big)}$$

另一方面 $\lambda(A)$ 是闭集, 因此

$$\lambda(A) = \overline{\lambda'\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \mu_n(A_n)\Big)} = \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} \lambda_n(A_n)}$$

因此 (3) 也成立. □

完全类似地, 我们得到 Ab 也是余完备的. 并且此时因为没有拓扑结构, 证明相较于命题 ?? 反而更简单.

命题 5.3.4　Ab 中的每个归纳序列

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \longrightarrow G_n \xrightarrow{\alpha_n} \cdots$$

都存在归纳极限 $(G, \{\beta_n\})$, 其中 $G = \bigcup_{n\geqslant 1} \beta_n(G_n)$, 且

(1) $\ker\beta_n = \bigcup_{m\geqslant n+1}\ker\alpha_{m,n}$ 对所有的 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 均成立;

(2) 若 $(H,(\gamma_n))$ 是有向系, $\gamma: G\to H$ 是泛性质中唯一确定的态射, 则

 (i) γ 是单态当且仅当 $\ker\gamma_n = \ker\beta_n$ 对所有的 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 均成立.

 (ii) γ 是满态当且仅当 $H=\bigcup_{n\geqslant 1}\gamma_n(G_n)$.

命题 5.3.5 K_0 保持归纳极限: 也即对定向系 (A_n,φ_n), 有 $K_0(\varinjlim A_n) = \varinjlim K_0(A_n)$.

证明 记 $A=\varinjlim A_n$, 由于以下图表交换

$$\begin{tikzcd}
K_0(A_n) \arrow[r, "K_0(\varphi_n)"] \arrow[dr, "K_0(\iota_n)"'] & K_0(A_{n+1}) \arrow[d, "K_0(\iota_{n+1})"] \\
& K_0(A)
\end{tikzcd}$$

由归纳极限的泛性质可知对任意 Abel 群 G_0, 群同态 $\beta_n: K_0(A_n)\to G_0$, 存在群同态 $\gamma: G_0\to K_0(A)$ 使得 $\gamma\circ\beta_n = K_0(\iota_n)$. 要证明 γ 是同构, 只需验证命题 5.3.4 中 (2) 的两条即可, 于是

$$K_0(A)=\bigcup_{n\geqslant 1}K_0(\iota_n)(A_n),\qquad \ker K_0(\mu_n)=\bigcup_{n\geqslant m+1}\ker K_0(\varphi_{m,n}),$$

这也就说明了 $K_0(A)=\varinjlim K_0(A_n)$. □

作为归纳极限的重要例子, 下面设 H 是一个可分无限维的 Hilbert 空间, 记其紧算子代数为 $\mathcal{K}(H)$. 那么:

命题 5.3.6 $\mathcal{K}(H)$ 是 $\bigcup_{n\geqslant 1}\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 的余完备化, 也即在嵌入映射

$$\iota_{n,m}:\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\to\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}),\qquad a\mapsto\begin{bmatrix} a & \\ & 0_{m-n}\end{bmatrix}$$

下, $\mathcal{K}(H)=\varinjlim_{\mathbb{N}}\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. 进一步, 对 C^* 代数 A, $A\otimes\mathcal{K}(H)$ 是 $A\otimes\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 的余完备化.

证明 取 H 的一个规范正交基 $(e_n)_{n\geqslant 1}$, 令 p_n 是 H 到 $\mathrm{span}(e_k)_{k=1}^n$ 的正交投影算子, 则 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 可以通过如下方式自然地嵌入到 $\mathcal{K}(H)$ 中.

$$\iota_n:\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{K}(H),\qquad A\mapsto a=p_nxp_n,$$

其中 $a=p_nxp_n$ 是一个秩为 n 的算子, 使得 $ae_i=\sum a_{ij}e_j$.

于是如此的嵌入使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \arrow[r, hook] \arrow[drr, "\iota_n"'] & \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\iota_m"] & \varinjlim\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \arrow[d, "\varinjlim\iota_n"] \\
& & \mathcal{K}(H)
\end{tikzcd}$$

由每一个 ι_n 都是单态可知 $\varinjlim\iota_n$ 也是单态. 它也是满态, 因 $(p_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathcal{K}(H)$ 的一个逼近单位元, 于是 $\bigcup_{n\geqslant 1}\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{K}(H)$ 中是稠的. 这就说明了 $\mathcal{K}(H)=\varinjlim\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. 而对 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, 有 $A\otimes\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\simeq\mathrm{Mat}_n(A)$, 于是后一断言立刻成立. □

定义–命题 5.3.7 (稳定化) 设 H 是一个可分 Hilbert 空间, A 是 C^* 代数. 若 $A\otimes\mathcal{K}(H)\cong A$, 则称 A 是**稳定**的, 并称 $A\otimes\mathcal{K}(H)=:\mathcal{K}A$ 是 A 的**稳定化**. $\mathcal{K}(H)$ 是稳定的, 由此任何 C^* 代数的稳定化都是稳定的.

证明 因 H 是可分的, 故 $H\otimes H$ 也可分, 从而 $H\otimes H\simeq H$. 因此

$$\mathcal{K}(H)\otimes\mathcal{K}(H)\simeq\mathcal{K}(H\otimes H)\simeq\mathcal{K}(H),$$

这即 $\mathcal{K}(H)$ 是稳定的. 因此 $\mathcal{K}A=A\otimes\mathcal{K}(H)$ 也是稳定的. □

我们希望证明稳定化不改变 K_0, 也即 $K_0(\mathcal{K}A) = K_0(A)$, 这被称作 K_0 函子的稳定性. 下面以 $\mathrm{Proj}_k(A)$ 记 $\mathrm{Proj}(\mathrm{Mat}_k(A))$, 并以 $\mathrm{Proj}_\infty(A)$ 记前者的归纳极限.

引理 5.3.8 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $K_0(\mathrm{Mat}_n(A)) \cong K_0(A)$, 并且通常的左上角嵌入 $i_n : A \hookrightarrow \mathrm{Mat}_n(A)$ 诱导群同构 $K_0(i_n) : K_0(A) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathrm{Mat}_n(A))$.

证明 如果 A 无单位元, 考虑如下的交换图, 注意到横行都是分裂正合的.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "i_{n,A}"] & A^+ \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i_{n,A^+}"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "i_{n,\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Mat}_n(A) \arrow[r] & \mathrm{Mat}_n(A^+) \arrow[r, "\pi_m"] & \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由 K_0 的分裂正合性可知下图交换, 并且横行还是分裂正合的.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(i_{n,A})"] & K_0(A^+) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(i_{n,A^+})"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(i_{n,\mathbb{C}})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(\mathrm{Mat}_n(A)) \arrow[r] & K_0(\mathrm{Mat}_n(A^+)) \arrow[r, "K_0(\pi_m)"] & K_0(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由五引理可知若 $K_0(i_{n,A^+})$ 和 $K_0(i_{n,\mathbb{C}})$ 都是同构, 那么 $K_0(i_{n,A})$ 也是同构.

因此无妨设 A 是单位 C^* 代数, 考虑下面的几个态射

$$\gamma_{n,k} : \mathrm{Mat}_k(\mathrm{Mat}_n(A)) \to \mathrm{Mat}_{kn}(A),$$

这无非是把构成元素的矩阵括号去掉, 将其视作 kn 阶矩阵. 再记

$$\gamma_n : \mathrm{Proj}_\infty(\mathrm{Mat}_n(A)) \to K_0(A), \qquad p \mapsto [\gamma_{n,k}(p)], \qquad p \in \mathrm{Proj}_k(\mathrm{Mat}_n(A)).$$

则 γ_n 是满足 K_0 泛性质中要求的态射, 于是存在群同态

$$\alpha : K_0(\mathrm{Mat}_n(A)) \to K_0(A), \qquad [p] \mapsto [\gamma_{n,k}(p)], \qquad p \in \mathrm{Proj}_k(\mathrm{Mat}_n(A)).$$

断言 $K_0(i_{n,A})^{-1} = \alpha$. 首先, $i_{n,A}$ 自然地诱导这样一个态射 $(i_{n,A})_m : \mathrm{Mat}_m(A) \to \mathrm{Mat}_m(\mathrm{Mat}_n(A))$, 这无非是老生常谈的逐元素作用. 那么对 $p \in \mathrm{Proj}_k(A)$, 取 $\mathbb{C}^{kn}$ 的规范正交基 $\{e_1, \ldots, e_{kn}\}$, 再取

$$u \in \mathrm{U}_{kn}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{U}_{kn}(A), \qquad e_i \mapsto e_{n(i-1)+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

这样的 u 总是存在的, 只需对基做置换使其满足上述条件即可. 此时

$$p \sim_{\mathrm{conj}} p \oplus 0_{k(n-1)} = u^*(\gamma_{n,k}(i_{n,A})_k p)u \sim_{\mathrm{conj}} \gamma_{n,k}(i_{n,A})_k p.$$

因此 $\alpha K_0(i_{n,A})([p]) = [\gamma_{n,k}(i_{n,A})_k p] = [p]$, 这即 $\alpha K_0(i_{n,A}) = \mathrm{id}$.

另一方面, 对 $p \in \mathrm{Proj}_k(\mathrm{Mat}_n(A))$, 取 $\mathbb{C}^{kn^2}$ 的规范正交基 $\{e_1, \ldots, e_{kn^2}\}$, 再取

$$v \in \mathrm{U}_{kn^2}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{U}_{kn^2}(A), \qquad e_i \mapsto e_{n(i-1)+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, kn,$$

其余的讨论是类似的, 得到 $K_0(i_{n,A})\alpha = \mathrm{id}$. □

定理 5.3.9 (K_0 的稳定性) 设 $\kappa : A \to \mathcal{K}A$ 是典范的嵌入, 则 $K_0(\kappa) : K_0(A) \to K_0(\mathcal{K}A)$ 是一个群同构.

证明 引理 5.3.8 说明 $K_0(i_n) : K_0(A) \to K_0(\mathrm{Mat}_n(A))$ 是一个同构, 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, 记 $\kappa_n : \mathrm{Mat}_n(A) \to \mathcal{K}A$ 是使得 $\kappa_n i_n = \kappa$ 的态射.

取 $g \in K_0(\mathcal{K}A)$, 由 K_0 群的刻画可知存在 $p \in \mathrm{Proj}_\infty(\mathrm{Mat}_k((\mathcal{K}A)^+))$ 使得 $g = [p] - [s(p)]$. 而 $(\mathcal{K}A)^+ = \mathbf{clos}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1} \iota_n(\mathrm{Mat}_n(A^+))\right\}$, 于是

$$\exists n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}\, \exists y_n \in \mathrm{Mat}_n(A^+) \left(\left\|\iota_n^+(y_n - p)\right\| < \frac{1}{5}\right)$$

令 $x_n = (y_n + y_n^*)/2$, 对 $m > n$ 取 $x_m = \varphi_{n,m}^+(x_n)$, 那么 x_m 是自伴的, 并且 $\|\iota_m^+(x_m) - p\| < 1/5$.

此时

$$\sigma(\iota_n^+(x_n)) \subset \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right],$$

故

$$\left\|\iota_n^+(x_n^2 - x_n)\right\| = \max_{t \in \sigma(\iota_n^+(x_n))} \left|t^2 - t\right| < \frac{1}{4},$$

于是由半幂等元被投影逼近可知存在 $q \in \mathrm{Proj}_\infty(\mathrm{Mat}_m((\mathcal{K}A)^+))$ 使得 $\|x_m - q\| < 1/2$. 因此

$$\left\|\iota_m^+(q) - p\right\| \leqslant \|q - x_m\| + \left\|\iota_m^+(x_m) - p\right\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{5} < 1,$$

于是 $\iota_m^+(q) \sim p$. 故

$$g = [p] - [s(p)] = [\iota_m^+(q)] - [s\iota_m^+(q)] = K_0(\iota_m^+)([q] - [s(q)]).$$

此时, 对某个 $h \in K_0(A)$, $q = K_0(\iota_k)(h)$, 因此

$$K_0(\kappa)(h) = K_0(\kappa_k)K_0(\iota_k)(h) = K_0(\kappa_k)(q) = g,$$

即 $K_0(\kappa)$ 是满态. 要证 $K_0(\kappa)$ 是单态, 设 $h \in K_0(A)$ 使得 $K_0(\kappa)(h) = 0$. 则对任意 $n \geqslant 2$, $K_0(\iota_n)(h) = 0$, 于是 $h = 0$, 这即 $K_0(\kappa)$ 是单态. □

例 5.3.10 设 H 是可分无限维的 Hilbert 空间, 于是可以从 K_0 关于归纳极限的连续性和 K_0 的稳定性两种方式计算 $K_0(\mathcal{K}(H))$. 首先, 由 K_0 的稳定性, 注意到 $\mathcal{K}(H) = \mathcal{K}\mathbb{C}$, 于是

$$K_0(\mathcal{K}(H)) = K_0(\mathcal{K}\mathbb{C}) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z},$$

而由稳定性, 注意到嵌入 $\varphi_n : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{C})$ 是左上角嵌入, 于是 $K_0(\varphi_n) = \mathrm{id}$. 此时

$$K_0(\mathcal{K}(H)) = K_0(\varinjlim(\mathrm{Mat}_n(C), \varphi_n)) = \varinjlim(K_0(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})), \mathrm{id}) = \mathbb{Z}.$$

例 5.3.11 由上例, 我们可以说明 K_0 不可能是正合函子. 设 H 是可分无限维的 Hilbert 空间, 于是 $V(\mathcal{B}(H)) = \{0, 1, \ldots, n, \ldots, \aleph_0\}$, 进而 $K_0(\mathcal{B}(H)) = 0$, 这源于无限基数 $\aleph_0$ 的吸收性质. 那么考虑如下的正合列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \xrightarrow{\iota} \mathcal{B}(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H) \longrightarrow 0$$

那么 K_0 函子诱导了以下的序列, 它在 $K_0(\mathcal{B}(H))$ 处正合.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(\mathcal{K}(H)) \arrow[r, "K_0(\iota)"] \arrow[d, equal] & K_0(\mathcal{B}(H)) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, equal] & K_0(\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)) \arrow[r] & 0 \\ & \mathbb{Z} & 0 & & \end{tikzcd}$$

于是 $K_0(\iota)$ 不可能为单态, 这就说明上述序列在 $K_0(\mathcal{K}(H))$ 处不是正合的. 因此 K_0 不是正合函子.

5.4 间奏: Fredholm 指标

为了记号的方便, 记 Calkin 代数为

$$\mathcal{Q}(H) := \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H).$$

在上一节最后的例子中我们得到 $K_0(\mathcal{K}(H)) = \mathbb{Z}$, 这意味着可以通过某种方式将紧算子对应到一个整数. 注意到 Hilbert 空间上的紧算子是有限秩算子的范数闭包, 于是我们可以通过考虑有限秩算子的性质来得到紧算子的性质. 对 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, 由 K_0 群的结构可知对 $g \in K_0(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$, 存在 $p, q \in \mathrm{Proj}_m(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$ 使得 $g = [p] - [q]$. 于是考虑 $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{C})$ 上典范的迹 tr, 并将 p, q 看作 $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{C})$ 中的元素, 那么

$$K_0(\mathrm{tr})(g) = \mathrm{tr}\, p - \mathrm{tr}\, q = \mathrm{rank}\, p - \mathrm{rank}\, q \in \mathbb{Z}.$$

注意到这是单射, 因 $\mathrm{rank}\, p = \mathrm{rank}\, q$ 就蕴含 $p \sim_{\mathrm{MvN}} q$, 它同时是一个满射, 因 $1 \in \mathrm{im}\, K_0(\mathrm{tr})$ 且后者是 $\mathbb{Z}$ 的循环子群. 于是对 $\kappa : \mathbb{C} \to \mathcal{K}\mathbb{C} = \mathcal{K}(H)$ 来说, 取 $\alpha_1 : K_0(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$ 是同构, 满足 $\alpha_1([1]) = 1$, 那么

$$K_0(\mathrm{tr}) = \alpha_1 K_0(\kappa)^{-1} : K_0(\mathcal{K}(H)) \to \mathbb{Z}$$

具体地给出同构的形式: 也即将 H 上的 1 维投影 e 与 $\kappa(1)$ 对应起来.

在将有限维线性空间上的线性变换的性质搬到无限维空间上去的时候, 如果对 $T : E \to F$ 考虑的是

$$\dim\ker T + \dim\mathrm{Ran}\, T = \dim E,$$

其等价形式是

$$\dim\ker T - (\dim F - \dim\mathrm{Ran}\, T) = \dim E - \dim F.$$

当 $\dim E$, $\dim\mathrm{Ran}\, T$ 和 $\dim F$ 均为 $+\infty$ 时, 上式还可能是有意义的. 我们暂时不需要 E 和 F 是 Hilbert 空间, 只需要假定它们是 Banach 空间即可.

定义 5.4.1 (Fredholm 算子, Fredholm 指标) 设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若 $\dim\ker T < +\infty$, 且 $\mathrm{Ran}\, T$ 具有有限维补空间, 或者

$$\dim\{\ell \in Y^* : \ell(\mathrm{Ran}\, T) = 0\} < +\infty,$$

则称 T 是一个 **Fredholm 算子**, 并称 $\mathrm{Ind}\, T = \dim\ker T - \mathrm{codim}\,\mathrm{Ran}\, T$ 是 T 的 **(Fredholm) 指标**.

命题 5.4.2 对 Fredholm 算子 T, $\mathrm{Ran}\, T$ 一定是闭的.

证明 设 Y 的有限维 (从而一定是闭的) 子空间 Z 满足 $Y = \mathrm{Ran}\, T \oplus Z$, 记 $\tilde{X} = X \oplus Z$, 定义

$$\tilde{T} : \tilde{X} \to Y, \qquad (x, z) \mapsto Tx + z,$$

不妨取 $\|(x,z)\|_{\tilde{X}} = (\|x\|_X^2 + \|z\|_Z^2)^{1/2}$, 显然 $\tilde{T}$ 连续, $\mathrm{Ran}\, \tilde{T} = Y$. 由开映射定理可知 $\tilde{T}(\{\tilde{x} : \|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} < 1\})$ 包含了 Y 中以原点为球心, 以 ε 为半径的一个球. 即

$$\forall y \in Y\, \exists \tilde{x} \in \tilde{X}\, (\|\tilde{x}\| \leqslant \varepsilon^{-1}\|y\| \implies \tilde{T}\tilde{x} = y).$$

特别地, 当 $y \in \mathrm{Ran}\, T$ 时 $\tilde{x} \in X$, 也即其 z 分量为零.

设 $y_\infty \in \overline{\operatorname{Ran} T}$, 则存在一列 $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset X$, $Tx_n \to y_\infty$ 且 $\|Tx_{n+1} - Tx_n\| \leqslant 2^{-n}$. 由上式可知存在 $x_n^\sharp \in X$ 使得 $Tx_n^\sharp = Tx_n$ 且 $\left\|x_{n+1}^\sharp - x_n^\sharp\right\| < 2^{-n}\varepsilon^{-1}$. 因此 $(x_n^\sharp)_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列, 它有极限 $x_\infty^\sharp$. 于是

$$y_\infty = \lim_{n\to\infty} Tx_n^\sharp = Tx_\infty^\sharp,$$

这即 $y_\infty \in \operatorname{Ran} T$. 因此 $\operatorname{Ran} T$ 是闭的. □

定义 5.4.3 (拟逆) 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, X)$. 若

$$ST - 1_X \in \mathcal{K}(X), \qquad TS - 1_Y \in \mathcal{K}(Y),$$

则称 S 是 T 的一个**拟逆**.

命题 5.4.4 若 S_1, $S_2 \in \mathcal{B}(Y, X)$ 满足 $S_1T - 1_X \in \mathcal{K}(X)$, $TS_2 - 1_Y \in \mathcal{K}(Y)$, 则 $TS_1 - 1_Y \in \mathcal{K}(Y)$. 这即存在左右拟逆的算子一定存在拟逆.

证明 设 $K \in \mathcal{K}(X)$, $L \in \mathcal{K}(Y)$ 使得 $S_1T = 1_X + K$, $TS_1 = 1_Y + L$. 那么

$$S_1TS_2 = S_2 + KS_2 = S_1 + S_1L = S_1TS_2.$$

那么 $S_1 - S_2 = KS_2 - S_1L \in \mathcal{K}(Y, X)$. 因此

$$TS_1 - 1_Y = TS_2 + T(S_1 - S_2) - 1_Y = 1_Y + L + T(KS_2 - S_1L) - 1_Y = L + T(KS_2 - S_1L)$$

由 $KS_2 - S_1L$ 紧可知 $TS_1 - 1_Y$ 紧. □

定理 5.4.5 (Atkinson) 对 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 以下叙述等价.

(1) T 是 Fredholm 算子;

(2) T 存在拟逆;

(3) 命题 5.4.4 中的 K 和 L 可以取成有限秩算子.

证明 (1) ⇒ (3): 由于 $\ker T$ 是 X 的闭子空间, 选取另一闭子空间 $Z \subset X$ 使得 $Z \oplus \ker T = X$, 并定义投影 $P : X \to \ker T$ 使得 $\operatorname{Ran}(1 - P) = Z$. 那么 $T|_Z : Z \to \operatorname{Ran} T$ 是连续满射, 且

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \geqslant \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|(1-P)x\|_X}.$$

因此 $T|_Z$ 作为 Banach 空间之间的满线性映射, 它是可逆的. 由逆映射定理可知存在 $S : \operatorname{Ran} T \to Z$ 使得 $TS = 1$, $ST = 1$.

再令 $Y = \operatorname{Ran} T \oplus W$, 取投影 $Q : Y \to W$ 满足 $\operatorname{Ran}(1 - Q) = \operatorname{Ran} T$. 延拓 S 得到

$$\tilde{S} : Y \to X, \qquad y \mapsto S(1 - Q)y,$$

则对 $x \in \ker T$, $\tilde{S}Tx = 0$, 对 $z \in Z$, $\tilde{S}Tz = z$. 于是 $\tilde{S}T = 1 - P$. 由于 $\dim \operatorname{Ran} T < +\infty$, 因此 P 是有限秩的.

(3) ⇒ (2): 这由命题 5.4.4 得到.

(2) ⇒ (1): 设 $ST = 1 + K$, 则 $x \in \ker T$ 导出 $(1 + K)x = 0$, 于是 $\ker T \subset \ker(1 + K)$. 由于 $K \in \mathcal{K}(H)$, 那么

$$\dim \ker(1 + K) = n_K(-1) < +\infty,$$

其中 $n_K(-1)$ 表示 -1 作为 K 特征值的重数. 设 $TS = 1 + L$, 那么 $\mathrm{Ran}\, T \supset \mathrm{Ran}\,(1 + L)$. 令 $f \in Y^*$, 那么 $f(\mathrm{Ran}\, T) = 0$ 导出 $f(\mathrm{Ran}\,(1 + L)) = 0$. 那么

$$f((1 + L)y) = 0 \implies f(y) = -f(Ly) \implies f \in \ker(1_{Y^*} + L^*).$$

由于 L 是紧的, 于是 L^* 也是紧的, 因此 $\dim\ker(1_{Y^*} + L^*) < +\infty$, 这即 $\operatorname{codim}\ker(1 + L) < +\infty$. □

在 Atkinson 定理 (1) ⇒ (3) 的证明中, 我们得到了投影 P, Q 使得 $ST = 1_X - P, TS = 1_Y - Q$. 只需考虑 $\mathrm{Ind}\, T$ 与 P 和 Q 的关系. 注意到 $\mathrm{Ran}\, P = \overline{\ker T}$, $\ker(1 - Q) = (\mathrm{Ran}\, T)^{\perp}$ (这里表示某个补空间). 于是对 (3) 中出现的拟逆 S,

$$\mathrm{Ind}\, T = \dim\ker(1 - P) - \dim\ker(1 - Q),$$

而

$$\mathrm{Ind}\, S = \dim\ker(1 - Q) - \dim\ker(1 - P) = -\mathrm{Ind}\, T.$$

对一般的情形, 如果 $(1 + K)^2 = 1 + K$, $(1 + L)^2 = 1 + L$, 那么

$$\mathrm{Ind}\, T = \dim\ker(1 + K) - \dim\ker(1 + L).$$

设 $X = X_1 \oplus X_2, Y = Y_1 \oplus Y_2$, 其中 X_1, X_2, Y_1, Y_2 都是闭的. 将算子 $T : X \to Y$ 依照这样的分块写成 2×2 矩阵

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

那么:

(1) 当 $B = C = 0$, 也即 $T = \begin{bmatrix} A & \\ & D \end{bmatrix}$ 时, 则 T 是 Fredholm 算子当且仅当 A 与 D 都是 Fredholm 算子, 且此时 $\mathrm{Ind}\, T = \mathrm{Ind}\, A + \mathrm{Ind}\, D$.

(2) 若 D 是可逆的, 那么由

$$\begin{bmatrix} 1_{Y_1} & -BD^{-1} \\ & 1_{Y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{X_1} & \\ -D^{-1}C & 1_{X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & \\ & D \end{bmatrix}$$

可知 T 是 Fredholm 算子当且仅当 $A - BD^{-1}C$ 是 Fredholm 算子, 且此时 $\mathrm{Ind}\, T = \mathrm{Ind}\,(A - BD^{-1}C)$.

(3) 若 D 是可逆的, 且 $\dim X_1 < +\infty, \dim Y_1 < +\infty$, 则 T 是 Fredholm 算子 (这因它是有限维空间之间的线性映射), 且 $\mathrm{Ind}\, T = \dim X_1 - \dim Y_1$.

以下的定理来自 **[Dieu]**, 它说明 Fredholm 算子全体 $\mathcal{F}(X, Y)$ 在范数拓扑下是开集, 且在局部是常值的.

定理 5.4.6 (Dieudonné) 设 $T : X \to Y$ 是 Fredholm 算子, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\|T' - T\| < \varepsilon$ 时 T' 是 Fredholm 算子, 且 $\mathrm{Ind}\, T' = \mathrm{Ind}\, T$.

证明 记 $X_1 = \ker T$, $Y_2 = \mathrm{Ran}\, T$, X_2 和 Y_1 分别是它们闭的补空间. 这样 $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$ 且 $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$. 此时 D 是 X_2 到 Y_2 的双射, 由你映射定理可知 D 可逆. 下面设 $T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$, 则

$$T' \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'x_2 \\ D'x_2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$(T' - T) \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'x_2 \\ (D' - D)x_2 \end{bmatrix}.$$

由于我们处理的是 Banach 空间, 做不到 $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\| \geqslant \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right\|$, 于是注意到 Y_1 是有限维的, Y_2 是闭的. 从而 Y_1 的单位球面 (这是一个紧集) 到 Y_2 的距离有正的下确界, 即存在 $k > 0$ 使得 $\left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\| \geqslant k \left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|$. 从而

$$\left\|\begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\| \leqslant \left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\| + \left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\| \leqslant \left(\frac{1}{k}+1\right) \left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\|.$$

于是 $\|D'-D\| \leqslant (1+\frac{1}{k})\,\|T'-T\|$. 因此当 $\|T'-T\|$ 充分小时 $\|D'-D\|$ 也充分小. 由 (3) 得证. □

注意到我们在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上讨论可逆映射全体时不能直接使用 $(1-D)^{-1}$ 这样的展开. 现在设 $D^{-1}: Y \to X$, 并记 $D' = D + (D'-D)$, 那么由

$$D^{-1}D' = 1_X + D^{-1}(D'-D)$$

可知当 $\|D^{-1}(D'-D)\| < 1$, 也即 $\|D'-D\| < \|D^{-1}\|^{-1}$ 时 $1_X + D^{-1}(D'-D)$ 可逆, 此时 D' 也可逆, 且

$$(D')^{-1} = (1_X + D^{-1}(D'-D))^{-1}D^{-1}.$$

于是在 Banach 空间上可逆映射仍然在范数拓扑下是开的.

推论 5.4.7　设 X, Y 是 Banach 空间, 以 $\mathcal{F}(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的 Fredholm 算子全体.

(1)　在 $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$ 下, $\mathrm{Ind}: T \mapsto \mathrm{Ind}\, T$ 在每个 $\mathcal{F}(X,Y)$ 的道路连通分支上是常数.

(2)　若 $\gamma: [0,1] \to \mathcal{F}(X,Y)$ 是连续的, 则 $\mathrm{Ind}\,\gamma(0) = \mathrm{Ind}\,\gamma(1)$.

(3)　设 $T \in \mathcal{F}(X,Y)$, $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, 则 $T+K \in \mathcal{F}(X,Y)$ 且 $\mathrm{Ind}\,(T+K) = \mathrm{Ind}\,T$.

证明　(1) 和 (2) 由定理 5.4.6 可知显然. 只需证明 (3). 由 Atkinson 定理可知存在 S 使得 $ST - 1_X \in \mathcal{K}(X)$, $TS - 1_Y \in \mathcal{K}(Y)$, 此时

$$S(T+K) - 1_X = (ST - 1_X) + SK \in \mathcal{K}(X), \qquad (T+K)S - 1_Y = (TS - 1_Y) + KS \in \mathcal{K}(Y),$$

这说明 S 同时是 T 和 $T+K$ 的拟逆. 令 $\gamma(t) = T + tK$ 可知 γ 是连续的, 那么 $\mathrm{Ind}\,\gamma(0) = \mathrm{Ind}\,T = \mathrm{Ind}\,(T+K) = \mathrm{Ind}\,\gamma(1)$. □

定义 **Hardy 空间** $H^2(\mathbb{S}^1)$ 是 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 上被 $\{z^n : n \geqslant 0\}$ 生成的闭子空间, 其上的内积与 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 上相同. 再记相应的正交投影是 P. 从 Fourier 系数表示来看,

$$P: L^2(\mathbb{S}^1) \to H^2(\mathbb{S}^1), \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

并且注意到 $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ 就是 $H^2(\mathbb{S}^1)$ 的一组规范正交基.

定义 5.4.8 (Toeplitz 算子)　设 $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$, 定义

$$T_f: H^2(\mathbb{S}^1) \to H^2(\mathbb{S}^1), \qquad \varphi \mapsto P(f\varphi)$$

是以 f 为象征的 **Toeplitz 算子**.

对处处非零的 $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$, 可以定义其**绕数**

$$\mathrm{Winding}(f) := [f] \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

这里 $[f]$ 是基本群 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ 中的等价类. 我们取使得 $f(z) = z$ 的绕数为 1 的 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.

定理 5.4.9 (Toeplitz 指标定理) 设 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 连续, T_f 是以 f 为象征的 Toeplitz 算子, 则 $T_f\in\mathcal{F}(H^2(\mathbb{S}^1))$ 且 $\operatorname{Ind}T_f=-\text{Winding}(f)$.

证明 以 M_g 记关于 g 的逐点乘积算子. 定义

$$\mathcal{A}=\left\{g\in L^\infty(\mathbb{S}^1):[P,M_g]\in\mathcal{K}(H^2(\mathbb{S}^1))\right\},$$

它是 $C(\mathbb{S}^1)$ 的一个 C^* 子代数. 这因

$$\begin{aligned}
[P,M_{g_1+g_2}]&=[P,M_{g_1}]+[P,M_{g_2}], &\qquad [P,M_{\lambda g}]&=\lambda[P,M_g],\\
[P,M_{g_1g_2}]&=[P,M_{g_1}]M_{g_2}+M_{g_1}[P,M_{g_2}], &\qquad [P,M_{\bar g}]&=-[P,M_g]^*.
\end{aligned}$$

取 $g(z)=z$ 可知 $g\in\mathcal{A}$, 并且 $C^*(g)=C(\mathbb{S}^1)$. 并且 $[P,M_g]$ 是秩 1 算子, 于是对任意 $g\in C(\mathbb{S}^1)$ 都有 $[P,M_g]\in\mathcal{K}(H^2(\mathbb{S}^1))$. 于是此时

$$\begin{aligned}
T_{g_1}T_{g_2}=PM_{g_1}PM_{g_2}&=PPM_{g_1}M_{g_2}+K_0\\
&=PM_{g_1}M_{g_2}+K_1=PM_{g_1g_2}+K_1=T_{g_1g_2}+K_1,
\end{aligned}$$

其中 $K_0,\ K_1\in\mathcal{K}(H^2(\mathbb{S}^1))$. 于是 $T_{g_1g_2}-T_{g_1}T_{g_2}\in\mathcal{K}(H)$ 对任意 $g_1,g_2\in C(\mathbb{S}^1)$ 成立. 此时 $T_{g^{-1}}T_g=1+K$, 故由 Atkinson 定理可知 T_g 是 Fredholm 算子, 于是 $\operatorname{Ind}T_g$ 仅依赖于 $[g]$. 于是只需对同伦类 $\{z^n\}$ 计算指标即可. □

因此若 $f\in C(\mathbb{S}^1)$, 则 T_f 是一个本质正规算子, 这因 $T_f^*=T_{\bar f}$. 于是当 f 是实值函数时 T_f 是本质自伴算子. 且对任意 $f,g\in C(\mathbb{S}^1)$ T_f 和 T_g 在模掉紧算子的意义下是可交换的.

命题 5.4.10 映射

$$\alpha:C(\mathbb{S}^1)\to\mathcal{Q}(H^2(\mathbb{S}^1)),\qquad g\mapsto\pi(T_g)$$

给出一个单的 $*$-同态.

证明 首先 α 是一个 $*$-同态, 这因

$$\pi(T_{g_1g_2})=\pi(T_{g_1}T_{g_2})=\pi(T_{g_1})\pi(T_{g_2}),\quad T_g^*=T_{\bar g}.$$

只需说明它是单的. 注意到 $\ker\alpha$ 是 $C(\mathbb{S}^1)$ 的一个理想, 于是存在 $\mathbb{S}^1$ 的闭子集 X 使得

$$\ker\alpha=\left\{g\in C(\mathbb{S}^1):g|_X=0\right\}.$$

下面给 g 复合一个旋转, 记 $\tau:z\mapsto\exp(\mathrm{i}\varepsilon)z$, 在 $H^2(\mathbb{S}^1)$ 上定义酉算子 $U:f\mapsto f\circ\tau$, 记 $g'=g\circ\tau$, 只需注意到

$$T_{g'}=UT_gU^{-1}$$

于是 T_g 紧时 $T_{g'}$ 也是紧的, 这就说明 X 是旋转不变的. 因此只能 $X=\varnothing$ 或者 $X=\mathbb{S}^1$. 并非所有 Toeplitz 算子都是紧算子 (*例如 $g(z)=z$ 对应的 Toeplitz 算子*), 因此 $X\neq\varnothing$, 于是只能 $X=\mathbb{S}^1$, 这即 α 是单的. □

推论 5.4.11 若 $g\in C(\mathbb{S}^1)$, 则 $\sigma_{\text{ess}}(T_g)=g(\mathbb{S}^1)$.

证明 这因单的 $*$-同态保持谱不变. □

因每一个自伴算子的紧致摄动都是本质自伴的, 而本质自伴算子总是自伴算子的紧致摄动, 因此本质自伴算子 T_1,T_2 本质酉等价当且仅当 $\sigma_{\text{ess}}(T_1)=\sigma_{\text{ess}}(T_2)$. 注意到 f 是实值函数时 T_f 就是本质自伴的, 由上述推论可知对实值函数 f,g, T_f 与 T_g 本质酉等价当且仅当它们拥有相同的值域.

但本质正规算子的情形与之不同, 为此设 $f(z)=z$ 和 $g(z)=z^2$, 它们的值域相同, 均为 $\mathbb{S}^1$, 于是 $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_f)=\sigma_{\mathrm{ess}}(T_g)$. 但 T_f 与 T_g 不可能是本质酉等价的, 因它们的 Fredholm 指标不同. 同时本质正规算子未必是正规算子的紧致摄动, 例如以上给出的 T_f 和 T_g, 这因正规算子的 Fredholm 指标总是零.

命题 5.4.10 给出一个短正合列:

定义 5.4.12 (Toeplitz 代数, Toeplitz 扩张) 记 $H=H^2(\mathbb{S}^1)$, 记 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{K}(H)$ 和 $\{T_g : g\in C(\mathbb{S}^1)\}$ 生成的 C^* 代数, 它是 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数, 称作 **Toeplitz 代数**. 而短正合列

$$0\longrightarrow \mathcal{K}(H)\longrightarrow \mathcal{T}\longrightarrow C(\mathbb{S}^1)\longrightarrow 0$$

称作 **Toeplitz 扩张**, 这里 $\mathcal{K}(H)\to\mathcal{T}$ 是嵌入而 $\mathcal{T}\to C(\mathbb{S}^1)$ 指同态 $T_g\mapsto g$.

注意到 $C(\mathbb{S}^1)$ 中的可逆元未必被提升到 $\mathcal{T}$ 中的可逆元. 例如 $g(z)=z$ 在 $C(\mathbb{S}^1)$ 中可逆但 T_g 在 $\mathcal{T}$ 中不可逆. 这说明了 Toeplitz 扩张并不是分裂的.

5.5 正合列, 代数 K_1 群

设 H 是可分无限维的 Hilbert 空间, 于是可以等同于 $\ell^2(\mathbb{N})$. 令 $p_0=1_{\{0\}}$, 这是一个投影, 容易验证

$$\begin{bmatrix}1 & \\ & p_0\end{bmatrix}=w\begin{bmatrix}1 & \\ & 0\end{bmatrix}w^{-1}\sim_{\mathrm{MvN}}\begin{bmatrix}1 & \\ & 0\end{bmatrix},\qquad w=\begin{bmatrix}T_z & *\\ * & 1\end{bmatrix},$$

其中 T_z 是以 $g(z)=z$ 为象征的 Toeplitz 算子. 若 $v\in \mathrm{GL}_n(\mathcal{Q}(H))$ 是 Fredholm 算子, 那么 $\operatorname{Ind} v$ 可以看作是 $K_0(\mathcal{K}(H))=\mathbb{Z}$ 中的元素.

将指标的概念推广, 考虑短正合列

$$0\longrightarrow I\longrightarrow R\longrightarrow R/I\longrightarrow 0$$

若 $[e]-[f]=0\in K_0(R/I)$, 那么存在 $v\in R/I$ 使得 $[e]=v[f]v^{-1}$. 当 $v\in R/I$ 可逆时, 由 Whitehead 技巧, 可以找到 $z\in \mathrm{GL}(R)$ 使得 $[z]_{R/I}=\begin{bmatrix}v & \\ & v^{-1}\end{bmatrix}$, 进而可以定义

$$\operatorname{Ind} v := \left[z\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}z^{-1}\right]-\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right]\in K_0(I).$$

于是一个自然的问题是: 何时 $\operatorname{Ind} v=\operatorname{Ind} v'$? 或者等价地, 何时 $\operatorname{Ind} v=0$?

计算

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind} vv' &= \left[zz'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}(zz')^{-1}\right]-\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right]\\ &=\left([z\left(z'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}(z')^{-1}\right)z^{-1}]-\left[z'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}(z')^{-1}\right]\right)+\left(\left[z'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}(z')^{-1}\right]-\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right]\right)\\ &=\operatorname{Ind} v-\operatorname{Ind} v'.\end{aligned}$$

若存在 $w\in\mathrm{GL}(R)$ 使得 $v=[w]_{R/I}$, 那么 $\begin{bmatrix}w & \\ & w^{-1}\end{bmatrix}$ 是 $\begin{bmatrix}v & \\ & v^{-1}\end{bmatrix}$ 的一个提升. 因此

$$\operatorname{Ind} v=\left[\begin{bmatrix}w & \\ & w^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^{-1} & \\ & w\end{bmatrix}\right]-\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right].$$

特别地, 若下面条件之一成立:

- v 是一些基础矩阵的乘积 (这只依赖于 I 和 R 的代数结构, 由此出发诱导出代数 K_1);

- 存在可逆元构成的同伦道路 $(v_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ 连接 v 和 1 (这需要 R 和 I 上有拓扑结构, 由此出发诱导出拓扑 K_1).

那么 $\operatorname{Ind} v=0$.

于是无论是拓扑 K_1 还是代数 K_1, 定义 K_1 的基本思路仍然是

$$K_1(R) := \langle \text{生成元} \mid \text{等价关系} \rangle .$$

令 $Q=R/I$, 那么上述讨论中给出的指标就定义了一个映射

$$\operatorname{Ind} : \mathrm{GL}(Q^+) \to K_0(I), \qquad v \mapsto \operatorname{Ind} v,$$

这称作**指标映射**.

下面设 R 是一个环, I 是 R 的理想. 由 $\mathrm{GL}(R)$ 的定义可知

$$\mathrm{GL}(R^+) = \left\{x\in \mathrm{Mat}(R^+) : x=1+y,\ y\in \mathrm{Mat}(R)\right\}.$$

记 e_{ij} 是只有 (i,j)-元为 1, 其余元素均为零的矩阵. 对 $i\neq j$, 记 $e_{ij}(\lambda)=1+\lambda e_{ij}$, 再记 $E(R):=\langle e_{ij}(\lambda):\lambda\in\mathbb{C}\rangle$.

引理 5.5.1　$[\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)]=E(R)$.

证明　首先, 任何基础矩阵都是交换子, 这是因为 $e_{ij}(\lambda)=[e_{ik}(\lambda),e_{kj}(1)]$, 于是

$$E(R)\subset [E(R),E(R)]\subset [\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)].$$

而当 $n=2$ 时, 对 $a,b\in R^\times$, 有

$$\begin{bmatrix} a & \\ & a^{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a-1 \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ -a & 1\end{bmatrix}.$$

这蕴含

$$\begin{bmatrix} a & \\ & a^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & \\ & b^{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1}b^{-1} & \\ & ba\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a,b] & \\ & 1\end{bmatrix}.$$

将 $a,b\in R^\times$ 替换为 $a,b\in \mathrm{GL}_n(R)$ 便得到一般的情形. 换句话说,

$$\begin{bmatrix} [\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)] & \\ & 1_n\end{bmatrix}\subset E(R),$$

于是 $[\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)]\subset E(R)$. □

定义 5.5.2 (代数 K_1 群)　设 R 是幺环, 定义

$$K_1^{\mathrm{alg}}(R) := \mathrm{GL}(R)/E(R)$$

是 R 的**代数 K_1 群**.

命题 5.5.3　设 $R,\ S$ 是幺环, 那么 $K_1^{\mathrm{alg}}(R)$ 是交换群. 并且 $K_1^{\mathrm{alg}}(R\oplus S)=K_1^{\mathrm{alg}}(R)\oplus K_1^{\mathrm{alg}}(S)$.

证明　由引理 5.5.1 可知

$$K_1^{\mathrm{alg}}(R)=\mathrm{GL}(R)/E(R)=\mathrm{GL}(R)/[\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)]=\mathrm{GL}(R)_{\mathrm{ab}}$$

是 $\mathrm{GL}(R)$ 的 Abel 化, 从而是交换的. 而后一断言由 $\mathrm{GL}(R\oplus S)=\mathrm{GL}(R)\oplus \mathrm{GL}(S)$ 即证. □

设 R 是交换的幺环, 将 $\mathrm{GL}_n(R)$ 上的行列式映射记作 $\det_n$, 并记 $\mathrm{SL}_n(R):=\ker\det_n$. 它们定义了 $\mathrm{GL}(R)$ 上的行列式映射

$$\det:\mathrm{GL}(R)\to R^\times,\qquad x\mapsto \det_n(x),\ x\in\mathrm{GL}_n(R).$$

它诱导一个满射 $\det:K_1(R)\to R^\times$. 对 $x\in R^\times$, 它定义了一个 $K_1(R)$ 中的元素 $s(x)$, 使得 $s:R^\times\to K_1(R)$ 满足 $\det\circ s=\mathrm{id}_{R^\times}$. 因此当 R 本身是一个交换幺环时, $R^\times$ 是 $K_1(R)$ 的一个子群.

例 5.5.4 设 F 是域, 则 $K_1^{\mathrm{alg}}(F)=F^\times$.

这因对 $x\in\mathrm{GL}_n(F)$, 将其通过行初等变换 $e_k\in E(R)$ 变为

$$x=e_1e_2\cdots e_ra,$$

其中 $a=\mathrm{diag}\{\det a,1,\ldots,1\}$, $\det a\in F^\times$. 则 $x\sim\det a$. 注意到这就是 $\det a$ 嵌入到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 中.

例 5.5.5 设 D 是一个 Euclid 整环, 其上有映射 $\delta:D\to\mathbb{N}$ 满足对任意 $a,b\in D$, $a,b\neq 0$, 存在 $q,r\in D$

$$a=bq+r,\qquad \delta(r)<\delta(b).$$

断言 $\mathrm{GL}_n(D)=D^\times E_n(D)$, 其中 $E_n(D)$ 指由所有 n 阶的 $\{e_{ij}(\lambda):i\neq j\}$ 生成的 $\mathrm{GL}_n(D)$ 的子群. 当 $n=1$ 时断言显然成立, 下设 $n\geqslant 2$.

取 $x\in\mathrm{GL}_n(D)$, 下证存在 $y,y'\in E_n(D)$ 使得 $yxy'\in\mathrm{GL}_{n-1}(D)$. 考虑 $E_n(D)xE_n(D)$ 中所有矩阵元, 并选取使得 $\delta(s)$ 最小的非零的 s. 取适当的 $y,y'\in E_n(D)$ 使得 yxy' 的 (n,n) 元为 s. 于是不妨假设 x 的 (n,n) 元为 s. 对 $k<n$, 记 x 的 (k,n) 元为 r, 若 $r\neq 0$, 则存在 $a,b\in D$ 使得

$$r=as+b,\qquad \delta(b)<\delta(r).$$

记 $x_1=e_{k,n}(-a)x$, 则 x_1 的 (k,n) 元为 $r-as=b$. 由 $\delta(s)$ 的最小性可知 $b=0$, 于是可以选取适当的 $e_1\in E_n(D)$ 使得 e_1x 的第 n 列除了 (n,n) 元以外均为零. 同理, 可以选取适当的 $e_2\in E_n(D)$ 使得 e_1xe_2 的第 n 行除了 (n,n) 元以外均为零. 再由 $e_1xe_2\in\mathrm{GL}(D)$ 可知 $s\in D^\times$.

因此不妨设 x 只有 (n,n) 元为 $s\neq 0$, 其余矩阵元均为零. 由

$$e_{n-1,n}(s)e_{n,n-1}(s)^{-1}e_{n-1,n}(s)e_{n-1,n}(1)e_{n,n-1}(1)^{-1}e_{n-1,n}(1)x=\begin{bmatrix} z & \\ & 1\end{bmatrix},\quad z\in\mathrm{GL}_{n-1}(D)$$

可知 $E_n(D)xE_n(D)$ 中含有 $\mathrm{GL}_{n-1}(D)$ 中的元素. 由归纳法可知对 $a\in D^\times=\mathrm{GL}_1(D)$, 有

$$aE_n(D)a^{-1}\subset E_n(D),$$

于是 $x\in D^\times E_n(D)$. 特别地, $\mathrm{SL}_n(D)=\mathrm{SL}_1(D)E_n(D)=E_n(D)$.

考虑 $\mathrm{GL}(D)$ 上行列式诱导的 $\det:K_1^{\mathrm{alg}}(D)\to D^\times$, 设 $g\in K_1(D)$ 的代表元为 x, 则 $x\in\mathrm{SL}_n(D)=E_n(D)$. 于是 $x=1$. 这说明 $\det:K_1^{\mathrm{alg}}(D)\to D^\times$ 是单态. 因此 $K_1^{\mathrm{alg}}(D)=D^\times$, 这因 $D^\times=\mathrm{GL}_1(D)\hookrightarrow\mathrm{GL}_n(D)$ 就是 $\det:\mathrm{GL}_n(D)\to D^\times$ 的截面. □

特别地, $\mathbb{Z}$ 是一个 Euclid 整环, 其上满足条件的映射为 $\delta:x\mapsto|x|$. 于是

$$K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^\times=\{\pm1\}.$$

若 R 不是幺环, 类似地考虑 $\varepsilon_R:R^+\to\mathbb{Z}$, $r+s1\mapsto s$, 并定义

$$K_1^{\mathrm{alg}}(R):=\ker[K_1^{\mathrm{alg}}(\varepsilon_R):K_1^{\mathrm{alg}}(R^+)\to K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{Z})]$$

即可. 特别地, 由于 $K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^\times$, 于是 $K_1^{\mathrm{alg}}(R^+)=K_1^{\mathrm{alg}}(R)\oplus\mathbb{Z}^\times$.

类似地可以验证:

命题 5.5.6　K_1^{alg} : Rng $\to$ Ab 是一个函子.

进而由函子性可以得到 K_1^{alg} 的半正合性和分裂正合性. 因此, 对环的正合列

$$0\longrightarrow J\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow 0$$

我们希望有长正合列

$$K_1^{\mathrm{alg}}(J)\longrightarrow K_1^{\mathrm{alg}}(A)\longrightarrow K_1^{\mathrm{alg}}(B)\xrightarrow{\partial^{\mathrm{alg}}}K_0(J)\longrightarrow K_0(A)\longrightarrow K_0(B)\longrightarrow 0$$

其中 $\partial^{\mathrm{alg}}:K_1^{\mathrm{alg}}(B)\to K_0(J)$ 是我们需要构造的态射, 称作是边缘态射.

我们的基本思路是通过以下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}(A^+) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}(B^+) \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{Ind}"] & & & \\
K_1^{\mathrm{alg}}(A) \arrow[r] & K_1^{\mathrm{alg}}(B) \arrow[r, "\partial^{\mathrm{alg}}"] & K_0(J) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

至于图中的 $\mathrm{Ind}:\mathrm{GL}(B^+)\to K_0(J)$ 就是本节开头定义的指标映射.

定义 5.5.7 (伪同构)　设 $A,\ B$ 是幺环, $\varphi:A\to B$ 是满同态. 一个**伪同构**意谓以下资料:

(1)　$E,\ F$ 是有限生成的投射 A-模 (从而可以对应到 $K_0(A)$ 中的元素);

(2)　存在同构 $\alpha:\varphi(E)\to\varphi(F)$,

并将上述资料确定的伪同构记作 (E,F,α). 记 A 到 B 的伪同构全体为 $\mathrm{PIsom}(A,B)$.

对两个伪同构 $\xi=(E,F,\alpha)$ 和 $\xi'=(E',F',\alpha')$, 定义它们的和为

$$\xi\oplus\xi'=(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha'),$$

于是 $\xi\oplus\xi'=\xi'\oplus\xi$ 是显然的. 我们希望 $\mathrm{PIsom}(A,B)$ 可以在这种加法的诱导下构成一个群, 于是自然地需要去寻找「零元」和「逆元」.

- 零元: 若存在同构 $\beta:E\to F$ 使得 $\alpha=\varphi(\beta)$, 则称 (E,F,α) 是**退化**的. 其中 $\alpha=\varphi(\beta)$ 意为下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A^m & \supset & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & F \arrow[d, "\varphi"] & \subset & A^n \\
B^m & \supset & \varphi(E) \arrow[r, "\alpha"] & \varphi(F) & \subset & B^n
\end{tikzcd}$$

  我们将退化的伪同构当作是零元.

- 逆元: 对 $\xi=(E,F,\alpha)$, 存在 $\bar{\xi}=(F,E,\alpha^{-1})$ 使得 $\xi\oplus\bar{\xi}$ 退化. 这因对 $\alpha:\varphi(E)\to\varphi(F)$ 和 $\alpha^{-1}:\varphi(F)\to\varphi(E)$, 由于 E 是满同态, 存在映射 $a:E\to F$ 使得 $\varphi(a)=\alpha$, $a':F\to E$ 使得 $\varphi(a')=\alpha^{-1}$. 于是由

$$\alpha\oplus\alpha^{-1}=\begin{bmatrix} & \alpha^{-1}\\ \alpha & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ \alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\alpha^{-1}\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ \alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}.$$

  令

$$\beta=\begin{bmatrix}1 & \\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -a'\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}.$$

  由定义这是一个 $E\oplus F$ 到 $E\oplus F$ 的同态, 而它同时还是若干可逆矩阵的乘积, 于是仍是可逆的, 从而是同构.

于是在 $\mathrm{PIsom}(A,B)$ 上定义等价关系如下:

- 若 $\xi=(E,F,\alpha)\in\mathrm{PIsom}(A,B)$ 满足: 存在退化的 η 使得 $\eta\oplus\xi$ 退化, 则称 ξ **稳定平凡**.
- 定义 $\xi\sim\eta$ 当且仅当 $\xi\oplus\bar{\eta}$ 稳定平凡. (这就是某种程度上的 $\xi=-\eta$.)

这的确是一个等价关系, 因 $\xi\sim\eta$ 当且仅当 $\exists\zeta$ 使得 $\xi\oplus\zeta$ 与 $\eta\oplus\zeta$ 均稳定平凡. 于是 $\mathrm{PIsom}(A,B)/\sim$ 是一个集合, 记作 $K_0(\varphi)$, 并将 (E,F,α) 在其中的等价类记作 $[E,F,\alpha]$.

命题 5.5.8 对满同态 $\varphi:A\to B$, $K_0(\varphi)=K_0(\ker\varphi)$.

证明 为此, 令 $J=\ker\varphi$ 是 A 的一个理想, 它未必含幺. 则有环的正合列

$$0\longrightarrow J\longrightarrow A\xrightarrow{\varphi}B\longrightarrow 0$$

第 1 步. 构造态射 $K_0(J)\to K_0(\varphi)$.

由于 B 是幺环, $\mathbb{Z}$ 可以视作 B 的子环, 有嵌入 $i_0:\mathbb{Z}\to B$. 而 J^+ 可以看作 A 的子环, 于是有嵌入 $i:J^+\to A$. 考虑如下的交换图:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d, equal] & J^+ \arrow[r, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z} \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "i_0"] \\ J \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd}$$

设 $p\in\mathrm{Idem}(J^+)$, 并令 $p_1=(s\varepsilon)(p)$. 那么 $(pA^n,p_1A^n,i_0\varepsilon(p))$ 是 $\mathrm{PIsom}(A,B)$ 中的元素. 于是 $p\mapsto[pA^n,p_1A^n,i_0\varepsilon(p)]$ 确定了一个 J 到 $K_0(\varphi)$ 的映射. 要说明 $K_0(J)\to K_0(\varphi)$ 良定义, 只需要当 $[p]=[q]$ 时 $[pA^n,p_1A^n,i_0\varepsilon(p)]=[qA^m,q_1A^m,i_0\varepsilon(q)]$ 即可.

不失一般性, 可以假设 p,q 都是 n 阶的. 由 $[p]=[q]$ 可知存在 $u,v\in\mathrm{Mat}_n(J^+)$ 使得 $p=vu$, $q=uv$. 注意到

$$\begin{bmatrix} & \varepsilon(v)\\ \varepsilon(u) & \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\varepsilon(v)\varepsilon(u) & \\ & \varepsilon(u)\varepsilon(v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon(p) & \\ & \varepsilon(q).\end{bmatrix}$$

将 $\begin{bmatrix} & \varepsilon(v)\\ \varepsilon(u) & \end{bmatrix}^2$ 提升到 $\mathrm{Mat}_{2n}(J^+)$ 上得到 $\sigma=\begin{bmatrix} & (s\varepsilon)(v)\\ u & \end{bmatrix}^2$, $\tau=\begin{bmatrix} & v\\ (s\varepsilon)(u) & \end{bmatrix}^2$. 于是

$$\sigma\tau=\begin{bmatrix}p_1 & \\ & q\end{bmatrix},\qquad \tau\sigma=\begin{bmatrix}p & \\ & q_1\end{bmatrix}.$$

于是

$$(pA^n,p_1A^n,i_0\varepsilon(p))\oplus\overline{(qA^m,q_1A^m,i_0\varepsilon(q))}=((p\oplus q_1)A^{2n},(q\oplus p_1)A^{2n},i_0\varepsilon(p\oplus q))$$

由定义是稳定平凡的 (由 σ,τ 给出.) 于是 $[pA^n,p_1A^n,i_0\varepsilon(p)]=[qA^m,q_1A^m,i_0\varepsilon(q)]$.

第 2 步. 构造态射 $K_0(\varphi)\to K_0(J)$.

令 $D=\{x\oplus y=:(x,y)\in A\oplus A:\varphi(x)=\varphi(y)\}$, 它是 $A\oplus A$ 的子环. 将 J 通过 $i:J\to D$, $x\mapsto x\oplus 0$ 嵌入到 D 中. 再记

$$\pi:D\to A,\ x\oplus y\mapsto y,\qquad \delta:A\to D,\ a\mapsto a\oplus a.$$

则有以下的分裂正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "i"] & D \arrow[r, shift left, "\pi"] & A \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

取 $(E_0,E_1,\alpha)\in\mathrm{PIsom}(A,B)$, 并考虑

$$E=E_0\times_\alpha E_1:=\{(x_0,x_1)\in E_0\times E_1:\varphi_*(x_1)=\alpha\varphi_*(x_0)\},$$

断言 E 是有限生成的投射 D-模. 由于 (E_0, E_1, α) 是伪同构, 故存在可逆的 $\beta : E_0 \oplus E_1 \to E_0 \oplus E_1$ 使得 $\varphi(\beta) \begin{bmatrix} & -\alpha^{-1} \\ \alpha & \end{bmatrix}$. 考虑

$$\begin{aligned} \pi_0 &: E_0 \oplus E_1 \to E_0 \oplus E_1, \qquad x \oplus y \mapsto x \oplus 0, \\ \pi_1 &: E_0 \oplus E_1 \to E_0 \oplus E_1, \qquad x \oplus y \mapsto 0 \oplus y. \end{aligned}$$

取 $p_0' = \pi_0, p_1' = \beta^{-1}\pi_1\beta$, 那么

$$\varphi(p_1') = \begin{bmatrix} & \alpha^{-1} \\ -\alpha & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -\alpha^{-1} \\ \alpha & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} = \varphi(p_0').$$

再令

$$\begin{aligned} R_0' &: p_0'(E_0 \oplus E_1) \to E_0, \qquad x \oplus 0 \mapsto x, \\ R_1' &: p_1'(E_0 \oplus E_1) \to E_1, \qquad \beta^{-1}(0 \oplus y) \mapsto y. \end{aligned}$$

那么 $\alpha = \varphi(R_1')\varphi(R_0')^{-1}$. 因此, 取 $E_0 \oplus E_1 \hookrightarrow A^n$, 则存在 $p \in \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}_n)A$ 使得 $R : pA^n \xrightarrow{\sim} E_0 \oplus E_1$ 是同构. 取

$$p_i = R^{-1}p_i'R, \qquad R_i = R_i'R,$$

由 $\varphi(p_0') = \varphi(p_1')$ 可知 $\varphi(p_0) = \varphi(p_1), \alpha = \varphi(R_1)\varphi(R_0)^{-1}$. 因此存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $p_0, p_1 \in \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}_n(A))$, 且 $p_0 - p_1 \in \mathrm{Mat}_n(J)$.

若记 $s_i : p_iA^n \xrightarrow{\sim} E_i$, 那么 $\alpha = \varphi_*s_1 \circ \varphi_*s_0$, 从而对 $\begin{bmatrix} p_0 & \\ & p_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(D)$, 有同构

$$s : \begin{bmatrix} p_0 & \\ & p_1 \end{bmatrix} D^n \xrightarrow{\sim} E, \qquad \begin{bmatrix} x_0 & \\ & x_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s_0x_0 & \\ & s_1x_1 \end{bmatrix}.$$

因此 E 是有限生成的投射 D-模.

于是, 对 $[E_0, E_1, \alpha] \in K_0(\varphi)$, 定义

$$\psi : K_0(\varphi) \to K_0(J), \qquad [E_0, E_1, \alpha] \mapsto [E] - \delta_*[E_1] = [E] - \delta_*\pi_*[E],$$

这是一个良定义的映射.

第 3 步, 证明 $K_0(\varphi) = K_0(J)$.

为此, 考虑序列

$$0 \longrightarrow K_0(J) \longrightarrow K_0(D) \underset{\delta_*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} K_0(A) \longrightarrow 0$$

这是一个分裂的正合序列. 于是 $\psi([E_0, E_1, \alpha]) \in K_0(J) \subset K_0(D)$. 而对 $\xi = (E_0, E_1, \alpha)$, $\xi' = (E_0', E_1', \alpha')$, 由

$$(E_0 \times_\alpha E_1) \oplus (E_0' \times_{\alpha'} E_1') = (E_0 \oplus E_0') \times_{\alpha\oplus\alpha'} (E_1 \oplus E_1')$$

可知 $\psi(\xi \oplus \xi') = \psi(\xi) \oplus \psi(\xi')$. 我们希望证明 ψ 是一个双射.

设 $r : E_0 \xrightarrow{\sim}$ 是一个同构, $\varphi(r) = \alpha$, 那么由

$$E = \{(x_0, x_1) \in E_\times E_1 : \varphi_*(x_1 - rx_0) = 0\}, \quad \delta_*(E_1) = \{(a, b) \in E_1 \times E_1 : \varphi_*(a - b) = 0\},$$

和 $\delta_*(E_1) \xrightarrow{\sim} E$, $(a, b) \mapsto (r^{-1}a, b)$ 给出同构可知 $x \in K_0(D)$ 时, $x - \delta_*\pi_*(x) \in \mathrm{im}\,\psi$. 设 $p \in \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}_n(D))$ 使得 $p = \begin{bmatrix} p_0 & \\ & p_1 \end{bmatrix}$, 其中 $p_0, p_1 \in \mathrm{Idem}(\mathrm{Mat}_n(A))$ 且 $p_0 - p_1 \in \mathrm{Mat}_n(J)$. 则

$$pD^n = \{(x, y) \in p_0A^n \times p_1A^n : x - y \in J^n\} = p_0A^n \times_{\mathrm{id}} p_1A^n.$$

这即 ψ 是满射.

若 $\psi([E,F,\alpha])=[E]-\delta_*[E_1]=0\in K_0(J)\subset K_0(D)$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $D^n\oplus E=D^n\oplus\delta_*(E_1)$. 注意到 $D^n=A^n\times_{\mathrm{id}}A^n=\delta_*A^n$, 记 $E_i'=A^n\oplus E_i$, $\alpha'=\mathrm{id}\oplus\alpha$, 那么 $(E_0,E_1,\alpha)\cong(E_0',E_1',\alpha')$. 因 $r_*(E_1')=E_1'\times_{\mathrm{id}}E_1'$, 于是存在 D-模同态 $s:E_0'\times_\alpha E_1'\to E_1'\times_{\mathrm{id}}E_1'$ 可逆. 此时, 记 $\beta:D\to A\oplus A$, 那么 $\beta_*s=\begin{bmatrix}s_0&\\&s_1\end{bmatrix}$ 是一个 $(A\oplus A)$-模同态. 则

$$\forall(x_0,x_1)\in E\,(\varphi_*(s_0x_0-s_1x_1)=0),\qquad \forall x_0\in E_0'\,\exists x_1\in E_1\,((x_0,x_1)\in E).$$

这即 $\alpha'=\varphi_*(s_1^{-1}s_0)$, 于是 (E_0,E_1,α) 稳定平凡, 从而 $[E_0,E_1,\alpha]=0\in K_0(\varphi)$. 这即 ψ 是单射. □

定理 5.5.9 设有环的正合列

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{j}A\xrightarrow{\pi}B\longrightarrow 0$$

则存在同态 $\partial^{\mathrm{alg}}:K_1^{\mathrm{alg}}(B)\to K_0(J)$ 使得序列

$$K_1^{\mathrm{alg}}(J)\xrightarrow{j_*}K_1^{\mathrm{alg}}(A)\xrightarrow{\pi_*}K_1^{\mathrm{alg}}(B)\xrightarrow{\partial^{\mathrm{alg}}}K_0(J)\xrightarrow{j_*}K_0(A)\xrightarrow{\pi_*}K_0(B)\longrightarrow 0$$

正合.

证明 我们的证明分 4 步进行, 首先构造出满足要求的同态 ∂^{alg}, 之后验证在每一处的正合性.

第 1 步. 构造态射 $\partial^{\mathrm{alg}}:K_1^{\mathrm{alg}}\to K_0(J)$.

由环的正合序列可知 $J=\ker\pi$, 于是命题 5.5.8 说明 $K_0(\pi)=K_0(J)$. 设 $\alpha\in\mathrm{GL}_n(B)$, 并定义

$$\partial^{\mathrm{alg}}\alpha:=[A^n,A^n,\alpha]\in K_0(\pi).$$

那么 $\partial^{\mathrm{alg}}\alpha$ 是一个伪同构确定的等价类, 且 ∂^{alg} 满足: 对 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in\mathrm{GL}_n(B)$ 有

$$\partial^{\mathrm{alg}}(\alpha_1\alpha_2)=\partial^{\mathrm{alg}}\alpha_1\partial^{\mathrm{alg}}\alpha_2,\qquad \partial^{\mathrm{alg}}\begin{bmatrix}\alpha&\\&1_m\end{bmatrix}=\partial^{\mathrm{alg}}\alpha.$$

由于 $K_0(\pi)$ 本身是 Abel 群, 于是 $\partial^{\mathrm{alg}}:K_1^{\mathrm{alg}}(B)\to K_0(\pi)\xrightarrow{\sim}K_0(J)$ 是一个群同态.

若 $\alpha_2\in E_n(B)$, 那么 $\partial^{\mathrm{alg}}(\alpha_1\alpha_2)=\partial^{\mathrm{alg}}\alpha_1$. 这即 $E_n(B)\subset\ker\partial^{\mathrm{alg}}$. 因 α_2 可以提升成有限乘积, 故存在 $\beta_2\in E_n(A)$ 使得 $\alpha_2=\pi(\beta_2)$. 故

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2&\\&\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\\&\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2&\\&1\end{bmatrix}\in E_{2n}(B)$$

也可以提升到 $E_{2n}(A)$ 上. 由 $\partial^{\mathrm{alg}}\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2&\\&\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}=0$ 可知 $\partial^{\mathrm{alg}}\begin{bmatrix}\alpha_1&\\&\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}=0$. 于是

$$\partial^{\mathrm{alg}}\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2&\\&\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}=\partial^{\mathrm{alg}}\begin{bmatrix}\alpha_1&\\&\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}\implies\partial^{\mathrm{alg}}(\alpha_1\alpha_2)=\partial^{\mathrm{alg}}\alpha_1.$$

对 $x,y\in\mathrm{GL}_n(A)$, $[x],[y]\in K_1^{\mathrm{alg}}(A)$, 由于

$$\begin{bmatrix}xy&\\&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&\\&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y&\\&y^{-1}\end{bmatrix},$$

故 $[xy]=\left[\begin{bmatrix}x&\\&y\end{bmatrix}\right]=:[x]+[y]$.

第 2 步. 证明 $j_*\partial^{\mathrm{alg}}=\partial^{\mathrm{alg}}\pi_*=\pi_*j_*=0$.

首先由命题 5.5.8 的证明过程可知对 $(E_0,E_1,\alpha)\in K_0(\pi)$, 有 $E=E_0\times_\alpha E_1$ 是有限生成的投射 D-模. 于是序列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[dr, "j"'] & D \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, shift left, "\pi_0"] & A \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r] & 0 \\
& & A \arrow[u, shift left] \arrow[d] & & \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

在两个方向上都分裂正合. 于是 $(\pi_0)_*E = E_0, (\pi_0)_*\delta_*E_1 = E_1$. 因此

$$j_*(\pi_0)_*([E] - [\delta_*\pi_*E_1]) = [E_0] - [E_1].$$

因此对 $\partial^{\mathrm{alg}}(\alpha)$ 就有 $j_*\partial^{\mathrm{alg}}(\alpha) = 0$, 这即 $j_*\partial^{\mathrm{alg}} = 0$.

若 $\alpha = \pi_*(\beta), x = [\pi_*(\beta)] \in \mathrm{GL}_n(A)$, 有 $\partial^{\mathrm{alg}}x = [(A^n, A^n, \pi(\beta))]$. 这说明 $\partial^{\mathrm{alg}}\pi_* = 0$.

作 π 和 j 的提升 $j^+ : J^+ \to A^+, \pi^+ : A^+ \to B^+$. 并记 $J^+ \xrightarrow{\varepsilon_J} \mathbb{Z} \xrightarrow{s_B} B^+$. 若 $x \in K_1(J), x \in \ker(\varepsilon_J)_*$, 则

$$(\pi^+j^+)_*(x) = (s_B)_*(0) = 0,$$

这即 $\pi_*j_* = 0$.

第 3 步. 证明在 $K_1(A)$ 处的正合性.

设 $x \in \mathrm{GL}_n(A^+)$ 满足 $\pi^+(x) \in E(B^+)$, 则存在 $y \in E(A^+)$ 使得 $\pi^+(y) = \pi^+(x)$. 此时

$$[xy^{-1}]_{K_1(A)} = [x]_{K_1(A)}, \qquad \pi^+(xy^{-1}) = 1,$$

于是 $xy^{-1} = 1 + j^+(z) = j^+(1+z)$, 其中 $1 + z \in K_1(J) \subset K_1(J^+)$. 这因 $x \in \mathrm{GL}_n(A)$ 时, $xy^{-1} \in \mathrm{GL}_n(A) \lhd \mathrm{GL}_n(A^+)$.

第 4 步. 证明在 $K_1(B)$ 处的正合性.

设 $\alpha \in \mathrm{GL}_n(A)$ 使得 (A^n, A^n, α) 是稳定平凡的, 则存在伪同构 $(E_0, E_1, \pi(\beta))$ 使得 $(E_0, E_1, \pi(\beta)) \oplus (A^n, A^n, \alpha)$ 退化, 这即存在 F_0 使得

$$A^m \simeq F_0 \oplus E_0 \simeq F_0 \oplus E_1.$$

于是 $(A^n \oplus F_0 \oplus E_0, A^n \oplus F_0 \oplus E_1, \alpha \oplus \mathrm{id}_{F_0} \oplus \pi(\beta))$ 退化. 也即

$$[A^n, A^n, \alpha] + [A^m, A^m, \pi(\beta')] = 0.$$

可取 $s' = 1$, 此时 $\begin{bmatrix}\alpha & \\ & \pi(\beta')\end{bmatrix}$ 可以提升为 $s'' \in \mathrm{GL}_{n+m}(A)$, $\begin{bmatrix}\alpha & \\ & 1\end{bmatrix}$ 可以提升为 $s''\begin{bmatrix}1 & \\ & (s')^{-1}\end{bmatrix}$. 于是 $[\alpha] = \pi_*\left(s''\begin{bmatrix}1 & \\ & (s')^{-1}\end{bmatrix}\right)$, 得证. □

至此, 我们得到了代数 K 群在 K_0 和 K_1 处的正合列.

5.6 解析 K_1 群

回忆 5.5 节最开始时的讨论, 我们通过同伦关系定义 Banach 代数的解析 K_1 群 (如果对交换的 C^* 代数, 便得到对应空间上的拓扑 K_1 群.) 记 $\mathrm{GL}_0(A^+)$ 是 $\mathrm{GL}(A^+)$ 中包含 1 的道路连通分支.

选项 1: 使用同伦群定义 K_1.

定义 5.6.1 (解析 K_1 群) 设 A 是 Banach 代数, 定义其**解析 K_1 群**为

$$K_1(A) := \varinjlim \pi_0(\mathrm{GL}_n(A)) = \pi_0(\mathrm{GL}(A)).$$

特别地, 若 A 是单位的, 则 $K_1(A) = \mathrm{GL}(A)/\mathrm{GL}_0(A)$.

定义中后一个等号成立是因为拓扑空间中的道路同伦是其紧子集, 而 $Y = \varinjlim Y_n$ 的紧子集一定在某个 Y_n 中是紧的. 因此 $\varinjlim \pi_0(\mathrm{GL}_n(A)) = \pi_0(\varinjlim \mathrm{GL}_n(A))$.

命题 5.6.2 对 Banach 代数 A, $K_1(A)$ 是 Abel 群.

证明 不失一般性, 设 A 是单位的. 首先 $K_1(A)$ 是一个群: 这是因为若 $y_0 \sim_h y_1 \in \mathrm{GL}_n(A)$, 那么对任意 $x \in \mathrm{GL}_n(A)$, 有 $xy_0 \sim_h xy_1$. 类似地,

$$x_0 \sim_h x_1,\ y_0 \sim_h y_1 \implies x_0y_0 \sim_h x_1y_1.$$

因此 $K_1(A)$ 上矩阵乘法作用是良定义的, 由此 $K_1(A)$ 具有群结构.

考虑映射 $\pi_* : K_1^{\mathrm{alg}}(A) \to K_1(A)$, $[x]_{\mathrm{alg}} \mapsto [x]$. 对任意 $e_{ij}(a) \in E(A)$, 令 $e_t = e_{ij}(ta)$ 就有 $e_0 = 1$, $e_1 = e_{ij}(a)$, 且 $(e_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ 给出同伦道路. 因此 $1 \sim_h e_{ij}(a)$, 从而 π_* 也是良定义的, 并且容易得到 π_* 是满射. 于是由 $K_1^{\mathrm{alg}}(A)$ 是 Abel 群可知 $K_1(A)$ 是 Abel 群. □

例 5.6.3 符号循线性代数中的惯例, 对任何自然数 n 都有 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 连通, 此时 $E_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的连通子群, 且

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^\times.$$

于是 $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

命题 5.6.4 记复 Banach 代数全体构成的范畴为 BanAlg, 那么 K_1 : BanAlg $\to$ Ab 是一个函子.

证明 容易验证它对态射的作用即为 $\varphi \mapsto \varphi_*$. □

命题 5.6.5 K_1 保持分裂的正合序列.

证明 设有分裂的正合列

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\ j\ } A \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

只需证明有拓扑群的分裂正合序列

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}_n(J) \xrightarrow{\ j_*\ } \mathrm{GL}_n(A) \underset{s_*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{GL}_n(B) \longrightarrow 1$$

对 $1+x \in \mathrm{GL}_n(A)$, 有 $\pi_*(1+x) = 1+\pi(x)$. 若 $(1+y)^{-1} = 1+z$, 那么 $z = -y(1+y)^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(A)$. 注意 $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab$. 定义

$$\varphi : \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_n(I) \times \mathrm{GL}_n(B), \qquad 1+x \mapsto (j^{-1}(1+x(s\pi(1+x))^{-1}), \pi(1+x)).$$

那么 φ 可逆, 这是因为 $\varphi^{-1}(1+x, 1+y) = (1+j(1+x))(1+s(1+y))$. 因此 φ 是一个同构, 也即 $\mathrm{GL}_n(A) = \mathrm{GL}_n(B) \ltimes \mathrm{GL}_n(J)$, 这就证明了命题. □

推论 5.6.6 K_1 是同伦不变的.

证明 若 $\varphi_t : A \to B$ 是一族强连续的同态, 只需证明对任意 $x \in \mathrm{GL}_n(A)$, $\varphi_0(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 在 $\mathrm{GL}_n(B)$ 的同一个连通分支中. 易见 $(\varphi_t(x))_{0\leqslant t\leqslant 1}$ 为连通二者的道路. □

选项 2: C^*-情形, 使用酉元刻画 K_1.

下面设 A 是一个 C^* 代数, 并用 $\mathrm{U}_0(A)$ 表示 $\mathrm{U}(A)$ 中包含 1 的道路连通分支. 由于 $\mathrm{U}_n(A)$ 与 $\mathrm{GL}_n(A)$ 同伦, 而归纳极限保持同伦, 从而其 0 阶同伦群也相等. 于是对 C^* 代数 A, 其解析 K_1 群可以由

$$K_1(A) = \varinjlim \pi_0(\mathrm{U}_n(A)) = \pi_0(\mathrm{U}(A))$$

定义. 进一步, 在 $\mathrm{U}(A)$ 上可以定义如下的等价关系:

命题 5.6.7　对 $u, v \in \mathrm{U}(A)$, 不妨 $u \in \mathrm{U}_n(A), v \in \mathrm{U}_m(A)$, 定义

$$u \sim_1 v :\Longleftrightarrow \exists k \geqslant \max_{n,m} ((u \oplus 1_{k-n}) \sim_h (v \oplus 1_{k-m})),$$

这的确是一个等价关系, 它满足

(1)　对任何 $1_n \in \mathrm{Mat}_n(A), u \sim_1 u \oplus 1_n \sim_1 1_n \oplus u$;

(2)　若 $u_1 \sim_1 u_2, v_1 \sim_1 v_2$, 则 $u_1 \oplus v_1 \sim_1 u_2 \oplus v_2$;

(3)　$u \oplus v \sim_1 v \oplus u$;

(4)　若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $u, v \in \mathrm{U}_n(A)$, 那么 $uv \sim_1 vu$.

并且此时有 $K_1(A) = \mathrm{U}(A)/\sim_1$, 由此立刻有 $K_1(A) = \{[u]_1 : u \in \mathrm{U}(A)\}$.

证明　(1) 由 $\sim_1$ 的定义立刻得到.

(2) 对任意 $k, \ell \in \mathbb{N}$, 由 (1) 可知 $(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_\ell) \sim_1 u \oplus v$. 因此不妨设 $u_1, v_1 \in \mathrm{U}_n(A)$, $u_2, v_2 \in \mathrm{U}_m(A)$. 此时 $\sim_1$ 即为 $\sim_h$. 于是存在同伦道路 $t \mapsto u_{t+1}$ 和 $t \mapsto v_{t+1}$, 那么 $t \mapsto u_{t+1} \oplus v_{t+1}$ 就是所求的同伦道路.

(3) 对 $u \in \mathrm{U}_n(A), v \in \mathrm{U}_m(A)$, 取 $z = \begin{bmatrix} & 1_m \\ 1_n & \end{bmatrix} \in \mathrm{U}_{m+n}(A)$ 即可.

(4) 由 Whitehead 引理和 (3), 有

$$uv \sim_1 \begin{bmatrix} u & \\ & v \end{bmatrix} \sim_1 \begin{bmatrix} v & \\ & u \end{bmatrix} \sim_1 vu,$$

得证. □

于是对 $u \in \mathrm{U}_n(A)$, 注意到 $[u] + [u^*] = [1_{2n}] = 0$, 于是 $[u^*] = -[u]$. 进而 $\varphi : A \to B$ 作用到 $[u]$ 上就有 $\varphi_*[u] = [\varphi^+(u)]$.

例 5.6.8　设 H 是可分无限维的 Hilbert 空间, 对 $u \in \mathrm{U}_n(\mathcal{B}(H))$, 定义

$$\varphi : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi), \qquad \exp(\mathrm{i}\theta) \mapsto \theta.$$

此时 φ 是一个有界 Borel 函数 (这就是 log 的一个单值分支). 由 Borel 函数演算可知对任意 $z \in \mathbb{S}^1$ 都有 $z = \exp(\mathrm{i}\varphi(z))$, 于是任取 $u \in \mathrm{U}_n(\mathcal{B}(H)) = \mathrm{U}(H^n)$, 有

$$\varphi(u) = \varphi(u^*), \qquad u = \exp(\mathrm{i}\varphi(u)).$$

于是 $u \sim_h 1_n$, 这就说明了 $K_1(\mathcal{B}(H)) = 0$.

特别地, 若 A 是 von Neumann 代数, 那么 log 在 A 上是 Borel 函数. 相似的讨论得到 $K_1(A) = 0$.

使用酉元的刻画可以更容易地证明 K_1 的半正合性.

引理 5.6.9　设 A, B 是 C^* 代数, $\varphi : A \to B$ 是态射, $g \in K_1(A) \cap \ker \varphi_*$, 则

(1)　存在 $u \in \mathrm{U}(A^+)$ 使得 $g = [u]_1$ 且 $\varphi^+(u) \sim_h 1$;

(2) 若 φ 还是满的, 则以上的 u 可以适当地选取使得 (1) 中的 $\varphi^+(u)=1$.

证明 (1) 选取 $v\in \mathrm{U}_m(A^+)$ 使得 $g=[v]_1$, 则 $[\varphi^+(v)]_1=0=[1_m]_1$. 故取 $n\geqslant m$ 使得

$$\varphi^+(v)\oplus 1_{n-m}\sim_h 1_m\oplus 1_{n-m}=1_n,$$

再取 $u=v\oplus 1_{n-m}$. 则 $[u]_1=[v]_1=g$, 且 $\varphi^+(u)=\varphi^+(v)\oplus 1_{n-m}\sim_h 1_n$.

(2) 由 (1) 可知存在 $v\in \mathrm{U}_n(A^+)$ 使得 $g=[v]_1$ 且 $\varphi^+(v)\sim_h 1$. 回顾 $\mathrm{U}_0(A)$ 的结构, 对 $u=\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}h_i}$, 由 φ^+ 是满的可知存在 $x_j\in A^+$ 使得 $\varphi(x_j)=h_j$. 令 $k_j=(x_j+x_j^*)/2$, 则 $k_j=k_j^*$ 且 $\varphi(k_j)=h_j$, 取 $v=\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i}$ 可知 $\varphi(\mathrm{U}_0(A^+))=\mathrm{U}_0(B^+)$. 因此 1 可以被提升到 $\mathrm{U}(A^+)$ 中, 不妨记其为 $w\in \mathrm{U}_n(A^+)$. 则

$$\varphi^+(w)=\varphi^+(v),\qquad w\sim_h 1.$$

取 $u=w^*v$ 即证. □

定理 5.6.10 K_1 是半正合的. 即对短正合列

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{j} A\xrightarrow{\pi} B\longrightarrow 0$$

有序列

$$0\longrightarrow K_1(J)\xrightarrow{j_*} K_1(A)\xrightarrow{\pi_*} K_1(B)\longrightarrow 0$$

在 $K_1(A)$ 处正合.

证明 由正合性有 $\pi j=0$, 再由函子性就有 $\pi_* j_*=0$. 因此 $\operatorname{im} j_*\subset \ker \pi_*$. 下面证明反向的包含关系: 设 $g\in\ker\pi_*$, 由引理 5.6.9 可知存在 $u\in \mathrm{U}_n(A^+)$ 使得 $g=[u]_1$ 且 $\pi^+(u)=1$. 于是存在 $v\in \mathrm{U}_n(J^+)$ 使得 $j^+(v)=u$, 这即 $[v]_1\in K_1(J)$. 并且

$$g=[u]_1=[j^+(v)]_1=j_*[v]_1\in \operatorname{im} j_*,$$

得证. □

于是对解析 K_1, 我们同样希望有长正合列

$$K_1(J)\longrightarrow K_1(A)\longrightarrow K_1(B)\xrightarrow{\partial} K_0(J)\longrightarrow K_0(A)\longrightarrow K_0(B)\longrightarrow 0$$

定理 5.6.11 设有 Banach 代数的正合列

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{j} A\xrightarrow{\pi} B\longrightarrow 0$$

存在态射 $\partial: K_1(B)\to K_0(J)$ 使得以下序列正合.

$$K_1(J)\xrightarrow{j_*} K_1(A)\xrightarrow{\pi_*} K_1(B)\xrightarrow{\partial} K_0(J)\xrightarrow{j_*} K_0(A)\xrightarrow{\pi_*} K_0(B)\longrightarrow 0$$

证明 首先, 回忆对 Banach 代数 A, 存在代数 K_1 群到解析 K_1 群的商映射 $q: K_1^{\mathrm{alg}}(A)\to K_1(A)$, $[x]_{\mathrm{alg}}\mapsto [x]$. 并且代数 K_1 与 K_0 有边缘态射 ∂^{alg} 给出的正合序列.

第 1 步. 构造 $\partial: K_1(B)\to K_0(J)$.

以 $\mathrm{GL}_{n,0}(A)$ 记 $\mathrm{GL}_n(A)$ 中包含 1_n 的道路连通分支. 设 $y\in \mathrm{GL}_n(A)$ 使得 $\pi(y)=x$, 且 $[x]=0\in K_1(B)$. 那么存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\begin{bmatrix} x & \\ & 1_m\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}_{n+m,0}(B)$. 由于 π 是开映射, 且 $\mathrm{GL}_{n+m,0}(A)$ 是既开又闭

的非空集合, 于是 $\mathrm{GL}_{n+m,0}(A)\to \mathrm{GL}_{n+m,0}(B)$ 是满射. 于是 $\begin{bmatrix} x & \\ & 1_m\end{bmatrix}$ 在 $\pi: K_1^{\mathrm{alg}}(A)\to K_1^{\mathrm{alg}}(B)$ 的像中, 也即存在 $[x']_{\mathrm{alg}}\in K_1^{\mathrm{alg}}(A)$ 使得 $\pi_*([x']_{\mathrm{alg}})=\begin{bmatrix} x & \\ & 1_m\end{bmatrix}$. 这表明

$$\partial^{\mathrm{alg}}([x]_{\mathrm{alg}})=\partial^{\mathrm{alg}}\left(\begin{bmatrix} x & \\ & 1_m\end{bmatrix}\right)=\partial^{\mathrm{alg}}\pi_*([x']_{\mathrm{alg}})=0,$$

于是 ∂^{alg} 可以经由 $K_1(B)$ 分解. 从而可以从 ∂^{alg} 出发诱导一个边界映射 ∂ 使得以下图表交换:

$$\begin{tikzcd} K_1^{\mathrm{alg}}(A) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, two heads] & K_1^{\mathrm{alg}}(B) \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "\partial^{\mathrm{alg}}"] & & \\ K_1(A) \arrow[r, "\pi_*"] & K_1(B) \arrow[r, "\partial"] & K_0(J) \arrow[r, "j_*"] & K_0(A) \end{tikzcd}$$

第 2 步. 验证 $K_0(J)$ 处的正合性.

这是因为

$$\operatorname{im}\partial=\operatorname{im}\partial^{\mathrm{alg}}=\ker j_*,$$

由代数 K_1 与 K_0 的正合序列可知所求证序列在 $K_0(J)$ 处是正合的.

第 3 步. 验证 $K_1(B)$ 处的正合性.

设 $x'\in K_1(A)$, 则存在 $y'\in K_1(A)$ 对应于 x'. 于是 $\partial\pi_*(x)=\partial^{\mathrm{alg}}\pi_*(y)=0$, 这表明 $\operatorname{im}\pi_*=\ker\partial$.

再设 $x\in K_1(B)$, 且 $x\in\ker\partial$. 存在 $y\in K_1^{\mathrm{alg}}(B)$ 对应于 x, 也即 $q(y)=x$. 由交换图可见 $\partial^{\mathrm{alg}}(y)=0$. 由 π_* 是满射, 可知存在 $y'\in K_1^{\mathrm{alg}}(A)$ 使得 $\pi_*(y')=y$. 记 $x'\in K_1(A)$ 对应 y', 由交换图可知 $\pi_*(x')=x$. 这表明 $\ker\partial\subset\operatorname{im}\pi_*$. 这就说明了序列在 $K_1(B)$ 处是正合的.

第 4 步. 验证 $K_1(A)$ 处的正合性.

对于任意的正整数 $n\in\mathbb{N}$, 记 $H_n=\pi(\mathrm{GL}_n(A))$ 是 $\mathrm{GL}_n(B)$ 的开子群, 且序列

$$1\longrightarrow \mathrm{GL}_n(J)\xrightarrow{j_*}\mathrm{GL}_n(A)\xrightarrow{\pi_*}H_n\longrightarrow 1$$

作为拓扑群的序列是正合的.

由于 $\pi j=0$, 于是由 K_1 的函子性有 $\pi_*j_*=0$, 这即 $\operatorname{im}j_*\subset\ker\pi_*$. 另一方面, 设 $x\in\mathrm{GL}_n(A)$ 使得 $[x]\in\ker\pi_*$, 那么存在自然数 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\begin{bmatrix} \pi(x) & \\ & 1_m\end{bmatrix}\in\mathrm{GL}_{n+m,0}(B)$. 由于 $\mathrm{GL}_{n+m,0}(A)\to \mathrm{GL}_{n+m,0}(B)$ 是满射, 于是存在 $y\in\mathrm{GL}_{n+m,0}(A)$ 使得 $\pi(y)=\begin{bmatrix} \pi(x) & \\ & 1_m\end{bmatrix}$. 这就说明

$$\pi\left(\begin{bmatrix} x & \\ & 1_m\end{bmatrix}y^{-1}\right)=1_{n+m}.$$

由于 $y^{-1}\in\mathrm{GL}_{n+m,0}(A)$, 那么从上述正合的拓扑群序列, 有 $w\in\mathrm{GL}_n(J)$ 使得 $j_*(w)=\begin{bmatrix} x & \\ & 1_m\end{bmatrix}y^{-1}$. 这即 $[x]\in\operatorname{im}j_*$, 于是 $\ker\pi_*\subset\operatorname{im}j_*$. □

选项 3: 悬挂函子定义 K_1.

对 Banach 代数 A, 之前定义过 A 的锥 $CA=C_0((0,1],A)$. 于是记 $SA=C_0((0,1),A)$ 后有以下 Banach 代数的正合序列

$$0\longrightarrow SA\xrightarrow{\iota}CA\xrightarrow{\mathrm{ev}_1}A\longrightarrow 0$$

其中 $\iota : SA \to CA$ 是自然的嵌入映射, 而 $\mathrm{ev}_1 : CA \to A$ 表示在 1 处的赋值函数.

在例 5.2.6 中已经说明了 $K_0(CA) = 0$. 当时使用了同伦不变性说明了 CA 与零代数同伦, 而 K_1 也有同伦不变性, 于是 $K_1(CA) = 0$. 那么在长正合列

$$K_1(SA) \longrightarrow K_1(CA) \longrightarrow K_1(A) \longrightarrow K_0(SA) \longrightarrow K_0(CA) \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow 0$$

中 $K_0(CA) = K_1(CA) = 0$ 给出 $K_1(A) = K_0(SA)$. 于是我们考虑**悬挂函子**如下:

$$S : \mathsf{C^*\text{-}Alg} \to \mathsf{C^*\text{-}Alg}, \qquad \begin{aligned} A &\mapsto SA = C_0(0,1) \otimes A, \\ [\varphi : A \to B] &\mapsto [S\varphi : SA \to SB]. \end{aligned}$$

并且定义 $K_1 = K_0 S$ (作为函子).

我们下面的讨论均假设涉及到的代数是 C^* 代数.

定理 5.6.12 悬挂函子 S 在归纳极限下连续, 也即 $\varinjlim SA_n = S(\varinjlim A_n)$.

证明 设 (A_n, φ_n) 是一个归纳序列, 由 S 是共变函子可知 $(SA_n, S\varphi_n)$ 的归纳极限在 (A_n, φ_n) 的归纳极限存在时存在, 记其为 (B, λ_n). 由泛性质可知存在态射 $\sigma : B \to SA$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} SA_n \arrow[r, "S\varphi_n"] \arrow[dr, "\lambda_n"'] & SA \arrow[d, dashed, "\sigma"] \\ & B \end{tikzcd}$$

第 1 步. 证明 σ 是满态.

由于 $X = (0,1)$ 局部紧, 于是 $C_0(X) \odot A$ 在 $C_0(X, A)$ 中稠密, 且由 $C_0(X, A)$ 的核性质可知 $C_0(X, A) = C_0(X) \otimes A$. 因此只需证明

$$SA = \mathbf{clos}\left\{ \bigcup_{n \geqslant 1} S\varphi_n(SA_n) \right\},$$

也即对 $f \in C_0(X)$, $a \in A$, 只需证明

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}\, \exists g \in C_0(X, A_n)\, (\|S\varphi_n(g) - fa\| < \varepsilon)$$

即可.

取定 $f \in C_0(X)$ 和 $a \in A$, 由 C^* 代数归纳极限的刻画可知 $A = \mathbf{clos}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi_n(A_n)\right\}$, 于是存在 $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ 使得 $\|\varphi_n(a_n) - a\| < \varepsilon / \|f\|$. 取 $g = fa_n \in C_0(X, A_n)$, 则

$$\|S\varphi_n(g) - fa\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\varphi_n(a_n) - f(x)a\| < \varepsilon.$$

这即 $SA = \mathbf{clos}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1} S\varphi_n(SA_n)\right\}$, 从而 σ 是满态.

第 2 步. 证明 σ 是单态.

同样地, 这只需证明 $\ker S\varphi_n \subset \ker \lambda_n$, 因

$$\ker \lambda_n = \left\{ f \in SA_n : \lim_{n \to \infty} \|S\varphi_{m,n}(f)\| = 0 \right\}.$$

固定 $n \in \mathbb{N}$, 取 $f \in \ker S\varphi_n$, 那么

$$\forall x \in X\, (S\varphi_n(f)(x) = \varphi_n(f(x)) = 0) \implies f \in \ker \varphi_n,$$

从而由归纳极限的刻画可知 $\lim_{m\to\infty}\|\varphi_{m,n}(f(x))\|=0$. 令 $g_m(x)=\|\varphi_{m,n}(f(x))\|$, 就有对任意 $x\in X$ 成立 $\lim_{m\to\infty}g_m(x)=0$. 而 C^* 代数的同态不增加范数, 于是

$$g_{m+1}(x)=\|\varphi_{m+1,n}(f(x))\|\leqslant\|\varphi_{m,n}(f(x))\|=g_m(x),$$

这说明 $(g_m)_{m\geqslant1}$ 单调递减且逐点收敛到 0. 由 $\|g_m(x)\|\leqslant\|f(x)\|$ 可知 $g_m\in C_0(X)$, 因此由 DIni 定理可知 $(g_m)_{m\geqslant1}$ 在 X 上一致收敛到 0. 因此

$$\lim_{m\to\infty}\|S\varphi_{m,n}(f)\|=0.$$

从而 $f\in\ker\lambda_n$.

因此 σ 是一个同构, 这即 $\varinjlim SA_n=S\varinjlim A_n$. □

定理 5.6.13　S 是正合函子, 也即它保持正合序列.

证明　设有 C^* 代数的正合序列

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{j}A\xrightarrow{\pi}B\longrightarrow0$$

只需证明序列

$$0\longrightarrow SJ\xrightarrow{Sj}SA\xrightarrow{S\pi}SB\longrightarrow0$$

也正合即可. Sj 是单态是显然的, 只需说明 $S\pi$ 是满态. 这因 $C_0(0,1)\odot B$ 在 SB 中稠密, 对任何 $g=fb\in C_0(0,1)\odot B$, 由于 π 是满态, 取 $a\in A$ 使得 $\pi(a)=b$, 则

$$S\pi(f(a))=f\pi(a)=fb=g,$$

这即 $S\pi$ 是满态. □

于是如果 $K_1=K_0S$ 由悬挂函子定义, 由 S 的正合性可知 K_0 的半正合性, 分裂正合性, 同伦不变性和稳定性都可以继承到 K_1.

例 5.6.14　设 H 是无限维 (未必可分) Hilbert 空间, 我们已经计算过 $K_0(\mathcal{K}(H))=\mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{B}(H))=K_0(\mathcal{B}(H))=0$. 正合序列

$$0\longrightarrow\mathcal{K}(H)\longrightarrow\mathcal{B}(H)\longrightarrow\mathcal{Q}(H)\longrightarrow0$$

导出的长正合列

$$K_1(\mathcal{B}(H))\longrightarrow K_1(\mathcal{Q}(H))\longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H))\longrightarrow K_0(\mathcal{B}(H))$$

给出 $K_1(\mathcal{Q}(H))=K_0(\mathcal{K}(H))=\mathbb{Z}$.

之前也讨论过 Calkin 代数与 Fredholm 指标的关系: 设 $U=\pi(T)$ 是 $\mathcal{Q}(H)$ 中的酉元, 那么·

$$\operatorname{Ind}:K_1(\mathcal{Q}(H))\to\mathbb{Z},\qquad[\pi(T)]\mapsto\operatorname{Ind}T$$

是良定义的映射, 这是由 Fredholm 指标对紧摄动的稳定性保证的. 而 $\operatorname{Ind}(TS)=\operatorname{Ind}T+\operatorname{Ind}S$ 则表明它是一个同态. 由于 $\operatorname{Ind}T=0$ 当且仅当 T 是酉算子的紧摄动, 再由 $K_1(\mathcal{B}(H))=0$ 推出 $K_1(\pi)=0$, 进而 $[\pi(T)]=K_1(\pi)([T])=0$, 因此 Ind 是一个单同态. 在 $\mathcal{B}(H)$ 上取 $\mathcal{B}(H)=\ell^2\otimes K$, 其中 K 可能是零空间. 定义 $S|_{\ell^2}$ 是单向移位算子, $S|_K=\mathrm{id}_K$, 那么 $\operatorname{Ind}S=1$. 由 $\mathbb{Z}$ 是循环群, 而 1 是其生成元便可知 Ind 是同构.

5.7 相对 K-理论与切除定理, 指标映射

现在考虑一般的正合列: 设 J 是 A 的闭理想, 有以下的短正合列

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

如果我们希望它能诱导长正合列, 有下面这些问题需要解决.

- 对闭理想 J, 如何定义 $K_0(J)$?
- $K_0(A/J)$ 和 $K_1(A/J)$ 中的元素如何使用 A 和 J 来具体描述?
- 边缘态射 $\partial : K_1(A/J) \to K_0(J)$ 如何具体地描述?

对前两个问题, 我们需要 A/J 上的 Murray–von Neumann 等价, 也即等价类在 J 上不同的作用被模掉了. 这类似于代数拓扑中的相对同调群, 而在解析 K-理论的环境中, 我们需要考虑的是所谓的「相对投影」.

定义 5.7.1 (相对环路) 设 $p, q \in \mathrm{Proj}_n(A), x \in \mathrm{Mat}_n(A)$. 若 p, q 在 A/J 上 Murray–von Neumann 等价, 也即

$$\pi^*(x)\pi(x) = \pi(p), \qquad \pi(x)\pi(x)^* = \pi(q),$$

则称三元组 (p, q, x) 是一个**相对环路**. 特别地, 若 x 本身给出了 p, q 作为 $\mathrm{Proj}_n(A)$ 中的元素 Murray–von Neumann 等价, 也即 $p = x^*x, q = xx^*$, 则称 (p, q, x) 是**退化**的.

记所有满足条件的 n 阶相对环路为 $\mathrm{Proj}_n(A, A/J)$, 并类似地记 $\mathrm{Proj}(A, A/J)$.

在 $\mathrm{Proj}(A, A/J)$ 上定义等价关系如下: 对 (p_1, q_1, x_1) 和 (p_2, q_2, x_2), 若存在非退化的 (r_1, s_1, t_1) 和 (r_2, s_2, t_2) 使得

$$\begin{bmatrix} p_1 & \\ & r_1 \end{bmatrix} \sim_h \begin{bmatrix} p_2 & \\ & r_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} q_1 & \\ & s_1 \end{bmatrix} \sim_h \begin{bmatrix} q_2 & \\ & s_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 & \\ & t_1 \end{bmatrix} \sim_h \begin{bmatrix} x_2 & \\ & t_2 \end{bmatrix},$$

则称 $(p_1, q_1, x_1) \sim (p_2, q_2, x_2)$. 并将 (p, q, x) 所在的等价类记作 $[p, q, x]$.

命题 5.7.2 在 $\mathrm{Proj}(A, A/J)/\sim$ 上直和诱导一个二元运算

$$[p_1, q_1, x_1] + [p_2, q_2, x_2] := [p_1 \oplus p_2, q_1 \oplus q_2, x_1 \oplus x_2],$$

它满足:

(1) 当 (r, s, t) 退化时, $[p, q, x] = [p \oplus r, q \oplus s, x \oplus t]$, 也即退化的相对环路在商集上是零元;

(2) 若 $[p_1, q_1, x_1] = [p_2, q_2, x_2]$, 则 $[p_1^\intercal, q_1^\intercal, x_1^\intercal] = [p_2^\intercal, q_2^\intercal, x_2^\intercal]$;

(3) 二元运算 $+$ 满足结合律和交换律;

(4) 若 $p_1p_2 = 0, q_1q_2 = 0$, 则 $[p_1, q_1, x_1] + [p_2, q_2, x_2] = [p_1 + p_2, q_1 + q_2, x_1 + x_2]$.

证明 这代入直接验证即可. $\square$

于是 $\mathrm{Proj}(A, A/J)/\sim$ 在二元运算 $+$ 下构成一个交换的幺半群, 且其零元即为退化相对环路对应的等价类 $[r, s, t]$. 于是将其对应的 Grothendieck 完备化群定义为**相对解析 K_0 群** $K_0(A, A/J)$ 再合适不过了. 此时有自然的态射

$$K_0(A, A/J) \to K_0(A), \qquad [p, q, x] \mapsto [p] - [q].$$

结合稳定等价的定义, 我们得到序列

$$K_0(A, A/J) \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(A/J)$$

在 $K_0(A)$ 处是正合的. 这也解释了符号 $K_0(A, A/J)$ 的合理性.

定理 5.7.3 (切除定理)　定义 $K_0(J) := K_0(J^+, J^+/J) = K_0(J^+, \mathbb{C})$, 那么

$$K_0(A, A/J) = K_0(J^+, J^+/J) = K_0(J).$$

证明　由于 J 是 A 的闭理想, 于是 J^+ 可以看作是 A 的子代数, 将切除映射定义为

$$K_0(J) = K_0(J^+, J^+/J) \to K_0(A, A/J).$$

只需要证明这是同构即可.

先证它是一个满态. 对任意 $[p', q', x'] \in K_0(A, A/J)$, 不妨设它是 k 阶的. 由于 $p'(1_k - p') = 0$, 于是

$$[p', q', x'] = [p' \oplus (1_k - p'), q' \oplus (1_k - p'), x' \oplus (1_k - p')] =: [1_k \oplus 0, q'', x''].$$

那么此时

$$\pi(x'')\pi(x'')^* = \pi(q''), \qquad \pi(x'')^*\pi(x'') = \pi(1_k \oplus 0).$$

由此得到一个同伦

$$\begin{bmatrix} \pi(x'') & q - \pi(x'')\pi(x'')^* \\ 1 - \pi(x'')^*\pi(x'') & \pi(x'')^* \end{bmatrix} \sim_h 1.$$

记对应的同伦道路为 $t \mapsto v_t$, 那么令 $y = \pi(x'')$, 存在酉元 v 使得 $v^*yy^*v = y^*y$, 于是 $[1_k \oplus 0, q'', x''] = [1_k \oplus 0, q, x]$, 其中 $1_k = \pi(1_k \oplus 0) = \pi(q) = \pi(x)$, $q = v_1^* q'' v_1$, $x = v_1^* x''$. 于是现在 $[1_k \oplus 0, v_t^* q'' v_t, v_t^* x'']$ 是一个相对环路.

如果 $[p, q, x]$ 和 $[p, q, y]$ 是两个相对环路, 且 $\pi(x) = \pi(y)$, 那么 $t \mapsto [pq, tx + (1-t)y]$ 给出一个同伦. 由此, $\pi(x) = \pi(1_k \oplus 0)$ 蕴含 $[1_k \oplus 0, q, x] = [1_k \oplus 0, q, 1_k \oplus 0]$. 因而 $[p, q, x]$ 的确是一个 $K_0(J^+, J^+/J)$ 中的相对环路.

再证切除映射是一个单态. 若 $p_1 \sim_h p_2$, $q_1 \sim_h q_2$, $x_1 \sim_h x_2$, 分别记 $t \mapsto p_t$, q_t, x_t 是相应的同伦道路, 那么满态的证明过程中已经说明了 $[p_1, q_1, x_1] = [p_2, q_2, x_2]$. □

例 5.7.4　下面重述例 5.6.14 . 设 $A = \mathcal{B}(H)$, $J \in \mathcal{K}(H)$, $T \in A$ 是一个本质酉算子. 那么 $[T] \in K_0(A, A/J)$ 使用相对环路的写法可以写成 $[\mathrm{id}, \mathrm{id}, T]$. 由切除定理可知

$$K_0(A, A/J) = K_0(J) = \mathbb{Z},$$

于是 $[T]$ 就通过切除映射对应到一个整数. 事实上, 这一整数就是 $\operatorname{Ind} T$. 若记 p 是到 $\ker T$ 的正交投影, 那么

$$[\mathrm{id}, \mathrm{id}, T] = [p, q, 0] + [1 - p, 1 - q, T(1 - p)],$$

其中后者是退化的, 这是因为 $T : \operatorname{im}(1 - p) \to \operatorname{im}(1 - q)$ 是可逆的. 而 $[p, q, 0] \in K_0(J^+, \mathbb{C})$ 就对应于 $\dim \operatorname{im} p - \dim \operatorname{im} q = \operatorname{Ind} T$.

对第三个问题, 如果将 A/J 中的酉元对应到 $K_0(J)$ 中看作是某种意义上的指标, 那么当指标非零时, A/J 中的酉元不能提升成为 A 中的酉元. 于是我们需要回顾以下有关于提升的内容: 首先, 自伴元可以被提升为自伴元, 正元可以被提升为正元. 但:

- *正规元未必可以被提升为正规元*: 例如 $\mathcal{B}(H)$ 上的单向移位算子 S, $\pi(S)$ 是正规的, 但 $\pi(S)$ 不可能被提升成为正规元.

- *投影未必可以被提升为投影:* 例如 $A=C[0,1]$, $B=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, 取 $\varphi=\mathrm{ev}_0\oplus\mathrm{ev}_1$, $q:B\to B$ 是到第二个分量的投影. 那么 q 是 B 中的投影, 但不存在投影 p 使得 $\varphi(p)=q$.
- *酉元未必可以被提升为酉元:* 考虑正合序列

$$0\longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2)\xrightarrow{\alpha}C(\bar{\mathbb{D}})\xrightarrow{\beta}C(\mathbb{S}^1)\longrightarrow 0$$

其中 $\beta:C(\bar{\mathbb{D}})\to C(\mathbb{S}^1)$ 是限制映射. 那么取 $v(z)=z$, $\forall z\in\mathbb{S}^1$. 它不能提升成 $C(\bar{\mathbb{D}})$ 中的酉元, 这是因为 $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ 不可能连续地延拓到 $u:\bar{\mathbb{D}}\to\mathbb{S}^1$ 上. 这是因为如果 u 是酉元, 它必然映到 $\mathbb{S}^1$, 但 $\pi_1(\bar{\mathbb{D}})=0$ 而 $\pi_1(\mathbb{S}^1)\neq 0$.

引理 5.7.5 设 A 是单位 C^* 代数, J 是 A 的闭理想, $\pi:A\to A/J$ 是商映射. 取 $u\in\mathrm{U}_1(A/J)$, 则

(1) 存在 $a\in A$ 使得 $\|a\|\leqslant 1$ 且 $\pi(a)=u$;

(2) 对 (1) 中的 $a\in A$, $w=\begin{bmatrix}a & -(1-aa^*)^{1/2}\\ (1-a^*a)^{1/2} & a^*\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}_2(A)$ 是酉元;

(3) 对 (2) 中的 $w\in\mathrm{Mat}_2(A)$, 有 $w\in\mathrm{U}_{2,0}(A)$.

证明 (1) 任取 u 在 A 中的提升 b, 并取 $a=b\varphi(b^*b)$, 其中 $\varphi:\lambda\mapsto\min\left\{1,|\lambda|^{-1/2}\right\}$ 是一个 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 到 $\mathbb{C}$ 的连续函数, 于是

$$\|a\|=\|b\varphi(b^*b)\|\leqslant\|b\|\,\|b^*b\|^{-1/2}=1.$$

且 $\pi(a)=u$.

(2) 一些简单的矩阵计算得到 $ww^*=w^*w=1_2$, 于是由 $\pi(a)=u$ 是酉元可知 $\pi(1-a^*a)=\pi(1-aa^*)=0$. 进而 $\pi(w)=\begin{bmatrix}u & \\ & u^*\end{bmatrix}$.

(3) 取 $a_t=t+(1-t)a$, 则 $a_0=a$, $a_1=1$, 且对 $0\leqslant t\leqslant 1$, 定义

$$w_t=\begin{bmatrix}a_t & -(1-a_ta_t^*)^{1/2}\\ (1-a_t^*a_t)^{1/2} & a_t^*\end{bmatrix},$$

那么 $w_t\in\mathrm{U}_2(A)$. (*这与 $w\in\mathrm{U}_2(A)$ 的计算几乎完全一致, 因为含有 a 的项都是整体消去的.*) 而 $w_0=w$, $w_1=1_2$ 且 $(w_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ 关于 t 是连续的, 于是 $w\in\mathrm{U}_{2,0}(A)$. □

为了更具体地表示 $\partial:K_1(A/J)\to K_0(J)$, 我们需要找到 $K_1(A/J)$ 的生成元. 注意到对单位 C^* 代数 A 来说,

$$(SA)^+=\{f:[0,1]\to A: f(0)=f(1)\in\mathbb{C}\}.$$

其中 $\mathbb{C}$ 看作是单位元 1 生成的 A 的子代数. 那么 $K_0((SA)^+)$ 便是由投影值环路 $p:[0,1]\to\mathrm{Proj}_n(A)$ 生成的 (*之所以称作环路, 是因为 $p(0)=p(1)\in\mathrm{Proj}_n(\mathbb{C})$.*) 那么 $K_1(A)$ 中的元素就可以看作 $K_0((SA)^+)$ 中形如 $[p]-[q]$ 的元素, 特别地, $p(1)=q(1)\in\mathrm{Proj}_n(\mathbb{C})$.

现在设 J 是 A 的闭理想, 那么由于 $\mathbb{C}\hookrightarrow A/J$ 可以被提升为 $\mathbb{C}\hookrightarrow A$, 投影 $p(1)\in\mathrm{Proj}_n(\mathbb{C})\subset\mathrm{Proj}_n(A/J)$ 也可以被提升, 使得 $P(1)\in\mathrm{Proj}_n(\mathbb{C})\subset\mathrm{Proj}_n(A)$. 于是存在 A 上的投影值环路 $P:[0,1]\to\mathrm{Proj}_n(A)$ 使得 $\pi(P)=p$, 且 $P(0)$ 是 $p(0)$ 的提升. 那么通过以上的记号, 我们约定

$$\mathrm{Twist}(p):=[P(0)]-[P(1)]\in K_0(J).$$

引理 5.7.6 设 A 是单位 C^* 代数, J 是 A 的闭理想, p,q 是 A/J 上的投影值环路, 且 $p(1)=q(1)$. 于是 $[p]-[q]$ 确定了 $K_1(A/J)$ 中的一个元素. 那么

$$\partial([p]-[q])=\mathrm{Twist}(p)-\mathrm{Twist}(q)\in K_0(J).$$

证明　设 P 是 p 的一个提升, 于是只需证明 $(P(1),p)$ 和 $(P(0),p(0))$ 在

$$C(A,A/J)^+=\{(a,f):a\in A,\ f:[0,1]\to A/J,\ f(1)=\pi(a)\}$$

上是同伦的即可. 这一同伦道路由 $s\mapsto(P(s),p_s)$ 给出, 其中 $p_s(t)=p(st)$. □

下面可以给出 $\partial:K_1(A/J)\to K_0(J)$ 的具体描述了.

命题 5.7.7　设 A 是单位 C^* 代数, J 是 A 的闭理想, $\pi:A\to A/J$ 是商映射. 对 $u\in \mathrm{U}_1(A/J)$, 取 $a\in A$ 使得 $\|a\|=1$ 且 $\pi(a)=u$, 那么

(1)　$P=\begin{bmatrix} aa^* & a(1-a^*a)^{1/2}\\ a^*(1-aa^*)^{1/2} & (1-a^*a)^{1/2}\end{bmatrix}\in \mathrm{Mat}_2(J^+)$ 是一个投影, 且 $\pi(P)=Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$;

(2)　设 $\partial:K_1(A/J)\to K_0(J)$ 是边缘态射, 则 $\partial[u]=[P]-[Q]\in K_0(J)$;

(3)　特别地, 若 a 是部分等距, 那么 $\partial[u]=[1-a^*a]-[1-aa^*]\in K_0(J)$.

证明　(1) $\pi(P)=Q$ 是显然的, $P=P^*$ 由 P 的形式也容易看出. 取引理 5.7.5 中的 w 和 w_t 有

$$w\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=Pw\implies P=w\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}w^*.$$

于是 $P^2=P$, 这即 $P\in\mathrm{Proj}_2(J^+)$.

(2) 将 $K_1(A/J)$ 中的元素 $[u]$ 看作是 $K_0(S(A/J))$ 中由 $[p]-[q]$ 确定的元素, 其中

$$p(t)=u(t)p(1)u(t)^*,\qquad p(1)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad q(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

那么由引理 5.7.6 可知

$$\partial[u]=\partial([p]-[q])=\mathrm{Twist}(p)-\mathrm{Twist}(q)$$

记 $P(t)=w_t\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}w_t^*$ 后 $\pi P(t)=p(t)$, 于是 $\mathrm{Twist}(p)=[P(0)]-[P(1)]=[P]$, 而 $\mathrm{Twist}(q)=[Q]$ 是容易验证的. 进而

$$\partial[u]=[P(0)]-[P(1)]-[Q]=[P]-[Q].$$

(3) 考虑 $v=\begin{bmatrix}a&0\\(1-a^*a)^{1/2}&0\end{bmatrix}$, 则 v 是 $\begin{bmatrix}u&\\&0\end{bmatrix}$ 在 $\mathrm{Mat}_2(A)$ 中的提升, 且 v 是部分等距. 注意到 $vv^*=P$, $v^*v=Q$, 于是

$$\partial[u]=[P]-[Q]=[1_2-vv^*]-[1_2-v^*v].$$

特别地, 若 a 本身就是部分等距, 那么 $\partial[u]=[1-aa^*]-[1-a^*a]$. □

由此我们可以看到 $\partial:K_1(A/J)\to K_0(J)$ 被称作**指标映射**的缘由: 它某种意义上推广了 Fredholm 指标. 取 $A=\mathcal{B}(H)$, $J=\mathcal{K}(H)$, 那么 a 是部分等距且 $a\in\mathcal{F}(H)$ 时 $1-a^*a$ 是到 $\ker a$ 的正交投影, $1-aa^*$ 是到 $\operatorname{coker} a$ 的正交投影. 此时

$$[1-a^*a]=\dim\ker a,\qquad [1-aa^*]=\dim\operatorname{coker}a.$$

进而

$$\partial[u]=[1-a^*a]-[1-aa^*]=\dim\ker a-\dim\operatorname{coker}a=\operatorname{Ind}a.$$

此时的 ∂ 就是在取 Fredholm 指标.

是时候用长正合列做一些计算了. 考虑下面 C^* 代数的长正合列:

$$0\longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2)\xrightarrow{\varphi}C(\bar{\mathbb{D}})\xrightarrow{\psi}C(\mathbb{S}^1)\longrightarrow 0$$

将 $\bar{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{S}^1\cong\mathbb{R}^2$ 等同起来之后可以将 φ 看作是通常的嵌入映射, 而 ψ 是限制映射. 此时有长正合列

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^2))\xrightarrow{K_1(\varphi)}K_1(C(\bar{\mathbb{D}}))\xrightarrow{K_1(\psi)}K_1(C(\mathbb{S}^1))\xrightarrow{\partial}K_0(C_0(\mathbb{R}^2))\xrightarrow{K_0(\varphi)}K_0(C(\bar{\mathbb{D}}))\xrightarrow{K_0(\psi)}K_0(C(\mathbb{S}^1))$$

由于 $\bar{\mathbb{D}}$ 是可缩的, 于是 $K_0(C(\bar{\mathbb{D}}))=\mathbb{Z}$. 而 $K_1(C(\bar{\mathbb{D}}))$ 中的元素可以看作是 $C(\bar{\mathbb{D}},\mathbb{S}^1)$ 中的同伦等价类, 于是

$$K_1(C(\bar{\mathbb{D}}))=C(\bar{\mathbb{D}},\mathbb{S}^1)/\sim_h=\pi^1(\bar{\mathbb{D}})=0.$$

那么 $K_0(\psi):K_0(C(\bar{\mathbb{D}}))\to K_0(C(\mathbb{S}^1)),[p]\mapsto[\psi(p)]$ 中 ψ 是限制映射, p 连续. 若 $p|_{\mathbb{S}^1}=0$, 由 $\bar{\mathbb{D}}$ 的连通性可知 $p=0$, 于是 $K_0(\psi)$ 是单态. 正合性导出 $\operatorname{im}K_0(\varphi)=\ker K_0(\psi)=0$, 于是 $K_0(\varphi)=0$. 再使用正合性有

$$\ker\partial=\operatorname{im}0=0,\qquad \operatorname{im}\partial=\ker 0=K_0(C_0(\mathbb{R}^2)),$$

这就说明 $K_1(C(\mathbb{S}^1))=K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$.

5.8 Bott 周期性, 六项正合列与指数映射

接续上一节最后的例子, $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ 中的元素可以用相对环路表示. 取 $b=[1,1,\bar{z}]$, 其中

$$[1,1,\bar{z}]\in K_0(C(\bar{\mathbb{D}}),C(\bar{\mathbb{D}})/C(\partial\mathbb{D}))=K_0(C_0(\mathbb{D}))=K_0(C_0(\mathbb{R}^2)).$$

称 b 为 **Bott 生成子**. 我们不妨将它写得更加清晰一些: 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义

$$B:\mathbb{R}^2\to\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}),\qquad (x,y)\mapsto\frac{1}{1+|z|^2}\begin{bmatrix}1 & z\\ \bar{z} & |z|^2\end{bmatrix},$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$. 则嵌入映射 $\varphi_2^+:\mathrm{Mat}_2((C_0(\mathbb{R}^2))^+)\to\mathrm{Mat}_2(C(\bar{\mathbb{D}}))$ 使得

$$\varphi_2^+(B)=\left[z\mapsto\begin{bmatrix}|z|^2 & \bar{z}\sqrt{1-|z|^2}\\ z\sqrt{1-|z|^2} & 1-|z|^2\end{bmatrix}\right].$$

再考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的酉算子

$$u:\mathbb{R}^2\to\mathrm{U}_2(\mathbb{C}),\qquad (x,y)\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\begin{bmatrix}1 & -z\\ \bar{z} & 1\end{bmatrix},$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$. 那么 u 是酉算子, 且 $u\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}u^*=B$.

若记 $u'=\varphi_2^+(u)$, 则有 $u'(z)=\begin{bmatrix}\bar{z} & -\sqrt{1-|z|^2}\\ \sqrt{1-|z|^2} & z\end{bmatrix}$. 因此考虑 $\begin{bmatrix}\bar{z} & \\ & z\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}_2(C(\mathbb{S}^1))$. 当 $|z|=1$ 时 $u'(z)=\begin{bmatrix}\bar{z} & \\ & z\end{bmatrix}$, 故 $\psi_2^+(u')=\begin{bmatrix}\bar{z} & \\ & z\end{bmatrix}=:v$. 此时由命题 5.7.7 可知

$$\partial[\bar{z}]=[B]-[1].$$

这即生成子这一名字的由来.

再注意到 $C_0(\mathbb{R})\cong C_0(0,1)$, 于是可以在悬挂函子的定义中用 $C_0(\mathbb{R})$ 代替 $C_0(0,1)$. 由于 K_1 可以经由 K_0S 定义, 于是对 C^* 代数 A, 可以归纳地定义**高阶 K-理论**

$$K_n(A)=K_{n-1}(SA),\qquad \forall n\geqslant 0.$$

于是 Bott 生成子 $b\in K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ 可以看作是 $K_2(\mathbb{C})$ 中的元素.

定义 5.8.1 (Kasparov 外乘积) 设 $A,\ B$ 是 C^* 代数, 定义 **Kasparov 外乘积**如下:

(1) 定义

$$\times: K_0(A)\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(B)\to K_0(A\otimes_{\max})B,\quad ([e]-[f])\otimes([e']-[f'])\mapsto [e\otimes e']-[e\otimes f']-[f\otimes e']+[f\otimes f'].$$

(2) 对高阶 K-理论, 使用同构 $S^iA\otimes_{\max} S^jB\cong S^{i+j}(A\otimes_{\max} B)$, 定义

$$\times: K_i(A)\otimes_{\mathbb{Z}} K_i(B)\cong K_0(S^iA)\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(S^jB)\to K_0(S^{i+j}(A\otimes_{\max} B))=K_{i+j}(A\otimes_{\max} B).$$

特别地, 上述 C^* 代数张量积 $\otimes_{\max}$ 可以被替换成任意范数 α 的张量积 $\otimes_\alpha$.

命题 5.8.2 设 $A,\ B$ 是单位 C^* 代数, 则 Kasparov 外乘积具有以下的具体表示:

$$\times: K_1(A)\times K_0(B)\to K_1(A\otimes B),\qquad ([u],[p])\mapsto [u\otimes p+1\otimes(1-p)].$$

其中的张量积 $\otimes$ 可以替换成任意的 $\otimes_\alpha$.

证明 由定义可知 $K_0(A)\times K_0(B)\to K_0(A\otimes B)$ 由 $([p],[q])\mapsto[p\otimes q]$ 给出. 而 $K_1(A)$ 与 $K_0(SA)$ 之间存在一一对应, 记

$$P(t)=w(t)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}w(t)^*,\qquad w(0)=\begin{bmatrix}u&\\&u^*\end{bmatrix},\qquad w(1)=\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}.$$

其中 $w(t)$ 关于 t 连续, 且对任意 $0\leqslant t\leqslant 1$ 成立 $w(t)\in\mathrm{U}_2(A)$. 再记 $Q(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$. 那么 $[u]=[P]-[Q]$. 而 Kasparov 外乘积由定义是双线性的, 因此它对应到 $K_1(A\otimes B)$ 上应为 $[u\otimes p-1\otimes p]$, 但此时 $u\otimes p-1\otimes p$ 不是酉元, 注意到 $[1\otimes 1]=0$, 于是取 $[u\otimes p-1\otimes p+1\otimes 1]=[u\otimes p+1\otimes(1-p)]$ 即可, 此时 $u\otimes p+1\otimes(1-p)$ 成为酉元. □

定义 5.8.3 (Bott 映射) 设 $b\in K_2(\mathbb{C})$ 是 Bott 生成子, A 是 C^* 代数, 称

$$\beta_A: K_0(A)\to K_2(A),\qquad x\mapsto b\times x$$

是 A 的 **Bott 映射**.

引理 5.8.4 设 $p\in\mathrm{Proj}_n(A)$, 定义

$$b_p:\mathbb{S}^1\to\mathrm{U}_n(A),\qquad z\mapsto \bar{z}p+1-p.$$

那么 b_p 给出 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathrm{U}_n(A)$ 的群同态. 令 $b_A: p\mapsto b_p$, 那么 b_A 诱导一个从 $K_0(A)$ 到 $K_2(A)$ 的群同态.

证明 对任意 $z_1,z_2\in\mathbb{S}^1$, 由

$$b_p(z_1)b_p(z_2)=(\bar{z}_1p+1-p)(\bar{z}_2p+1-p)=\overline{z_1z_2}p+1-p=b_p(z_1z_2)$$

可知 b_p 是群同态. 若 $p,q\in\mathrm{Proj}_n(A)$ 使得 $p\sim_h q$, 考虑对应的 b_p,b_q. 将

$$\mathrm{Mat}_n((SA)^+)\cong\left\{f\in C(\mathbb{S}^1,\mathrm{Mat}_n(A)): f(1)\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\right\}$$

等同起来, 那么 $b_p\in\mathrm{U}_n((SA)^+)$ 对任何 $p\in\mathrm{Proj}_n(A)$ 成立. 设 $p=p_0,q=p_1$, 且 $t\mapsto p_t$ 给出对应的同伦道路, 那么

$$b_{p_t}:\mathbb{S}^1\to\mathrm{U}_n(A),\qquad z\mapsto\bar{z}p_t+1-p_t$$

就是关于 $t\in[0,1]$ SOT-连续的, 且 $b_{p_t}\in \mathrm{U}_n((SA)^+)$. 于是 $t\mapsto b_{p_t}$ 给出了连接 b_p 与 b_q 的同伦道路. 由 $K_2(A)=K_1(SA)$ 可知 b_A 诱导了一个群同态

$$\beta'_A: K_0(A)\to K_2(A),\qquad [p]\mapsto[\bar z p+1-p],$$

这即所求的群同态. □

上述证明给出的 β'_A 事实上就是 Bott 映射 β_A. 这是因为 $\bar z\otimes p+1\otimes(1-p)$ 就是上一引理中的上下文中就是 $\bar z p+1-p$. 这对单位 C^* 代数都是成立的. 而下面的引理说明这样的讨论对非单位的 C^* 代数也成立.

引理 5.8.5 设 A 是单位 C^* 代数, 则 β 是自然的. 也即, 若 $\varphi: A\to B$ 是保持单位的 C^* 代数同态, 那么下图交换.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] \arrow[d, "\beta_A"] & K_0(B) \arrow[d, "\beta_B"] \\
K_2(A) \arrow[r, "K_2(\varphi)"] & K_2(B)
\end{tikzcd}$$

而对非单位的 C^* 代数 A, 存在唯一地态射 β_A 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta_A"] & K_0(A^+) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{A^+}"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "\beta_{\mathbb{C}}"] \\
K_2(A) \arrow[r] & K_2(A^+) \arrow[r] & K_2(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

证明 β 的自然性由 $\varphi(\bar z p+1-p)=\bar z\varphi(p)+1-\varphi(p)$ 得到. 而若 A 是非单位的, 那么 $K_0(A)$ 中的元素均形如 $[p]=[s(p)]$, 其中 $s=\lambda\pi$ 是以下短正合列中态射的合成.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & A^+ \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此时右侧的方块交换由 β 的自然性得到, 而 β_A 的唯一取法为

$$\beta_A: K_0(A)\to K_2(A),\qquad [p]-[s(p)]\mapsto[b_p b^*_{s(p)}].$$

这与我们对 Bott 映射最初的定义是一致的. □

下面证明本节的核心结论: *Bott 映射 β_A 实际上是一个同构*. 这时解析 K-理论中最重要的结论之一, 它表明解析 K-理论本质上只有 K_0 和 K_1.

下面的结论基于出现的代数均为 C^* 代数的假设, 对 Banach 代数的讨论参见 **[RLL, 11.2 节]**, 其中使用了 Higman 线性化技巧. 下面的证明基于 Toeplitz 扩张和 Fredholm 指标.

定理 5.8.6 (Bott 周期律) 设 A 是 C^* 代数, Bott 映射 $\beta_A: K_0(A)\to K_2(A)$ 是同构.

证明 考虑 Toeplitz 扩张

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(H) \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r, shift left, "\pi"] & C(\mathbb{S}^1) \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $\pi: T_g\mapsto g$. 注意到 $C(\mathbb{S}^1)$ 是交换的, 而 $\lambda: g\mapsto T_g$ 是正映射, 于是 λ 是完全正映射. 这即 π 有完全正的截面, 于是对任意 C^* 代数 A 都有正合列

$$0\longrightarrow \mathcal{K}(H)\otimes A\longrightarrow \mathcal{T}\otimes A\longrightarrow C(\mathbb{S}^1)\otimes A\longrightarrow 0$$

因此有 K-理论的长正合列

$$K_1(\mathcal{T}\otimes A)\longrightarrow K_1(C(\mathbb{S}^1)\otimes A)\xrightarrow{\partial}K_0(\mathcal{K}(H)\otimes A)\longrightarrow K_0(\mathcal{T}\otimes A)$$

由 K_0 的稳定性, 可以将边缘态射看作 $\partial: K_1(C(\mathbb{S}^1)\otimes A)\to K_0(A)$, 再通过 Caylay 变换 $x\mapsto(x-\mathrm{i})/(x+\mathrm{i})$ 将 $C_0(\mathbb{R})\otimes A$ 视作是 $C(\mathbb{S}^1)\otimes A$ 的子代数, 那么将 ∂ 限制到 $K_1(C_0(\mathbb{R})\otimes A)$ 上就得到

$$\alpha_A: K_1(C_0(\mathbb{R})\otimes A)=K_2(A)\to K_0(A).$$

断言 α_A 是 β_A 的逆.

取 $A=\mathbb{C}$, 此时 $b\in K_2(\mathbb{C})$ 满足 $b=[\bar{z}]\in K_1(C(\mathbb{S}^1)\otimes\mathbb{C})$, 因此

$$\alpha_{\mathbb{C}}(b)=\partial[\bar{z}]=\operatorname{Ind}T_{\bar{z}}=1.$$

而 α 是右线性的, 于是考虑 $x\in K_2(A)$ 和 $y\in K_0(B)$, 有

$$\alpha_{A\otimes B}(x\times y)=\partial(x\times y)=\partial(x)\times y=\alpha_A(x)\times y.$$

下面的证明中只用到了 α 的这两条性质.

首先, 由于

$$\alpha_A\beta_A(x)=\alpha_A(b\times x)=\alpha_{\mathbb{C}}(b)\times x=1\times x=x,$$

于是 $\alpha_A\beta_A=\mathrm{id}$, 这说明 β_A 是单同态.

其次, 对 $x\in K_p(A), y\in K_q(B)$, 若以 $\theta: A\otimes B\to B\otimes A$ 记将两个张量积分量调换位置的映射, 那么 $y\times x=(-1)^{pq}\theta_*(x\times y)$. 因此, 如果能说明所有的 $y\in K_0(A\otimes C_0(\mathbb{R}^2))$ 都可以写成 $y=x\times b$, $x\in K_0(A)$, 那么就可以说明 β_A 是满同态.

为此, 考虑下面三个映射:

$$\begin{aligned}
\sigma: A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)&\to C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A, && (x,y)\mapsto(y,x),\\
\tau: C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)&\to C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A\otimes C_0(\mathbb{R}^2), && (x,y,z)\mapsto(z,y,x),\\
\theta: A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)\otimes C_0(\mathbb{R}^2)&\to C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A\otimes C_0(\mathbb{R}^2), && (x,y,z)\mapsto(z,x,y).
\end{aligned}$$

那么 $\tau\theta=\sigma\otimes 1$. 于是对 $b\in K_2(\mathbb{C})=K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$, 有

$$\tau_*(b\times y)=\tau_*\theta_*(y\times b)=(\sigma\otimes 1)_*(y\times b)=\sigma_*(x)\times b.$$

而 τ_* 是对 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^4$ 做规范正交基的重排得到的, 这一重排具有矩阵形式 $T=\begin{bmatrix} & 1_2\\ 1_2 & \end{bmatrix}\in\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. 并且由 $\det T=1$ 可知 $T\sim_h 1$. 因此由同伦不变性可知 $\tau_*=\mathrm{id}_*$ 是恒等映射.

我们在 β_A 是单同态的证明当中已经说明了对任何 C^* 代数 A 都有 $\alpha_A\beta_A=\mathrm{id}$, 因此将这一结论应用于 $A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)$, 就得到对 $y\in K_0(A\otimes C_0(\mathbb{R}^2))$, 有

$$\begin{aligned}
y=\alpha_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}\beta_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}(y)&=\alpha_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}(b\times y)\\
&=\alpha_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}(\sigma_*(y)\times b)=\alpha_A(\sigma_*(y))\times b.
\end{aligned}$$

令 $x=\alpha_A(\sigma_*(y))$ 就得到 y 具有 $x\times b$ 的形式. 再由 $y\in K_0(A\otimes C_0(\mathbb{R}^2))$ 可知 $\sigma_*(y)\in K_0(C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A)=K_2(A)$, 于是 $x\in K_0(A)$. 这就说明 β_A 是一个满同态. □

上述证明与 Toeplitz 指标定理相关, 它将最基本的拓扑不变量 — 绕数, 与指标联系起来. 此外, Toeplitz 指标定理是 Atiyah–Singer 指标定理的基础之一, 这意味着上面的证明还可以进行推广.

由 Bott 周期律, 我们立刻得到下面的推论:

推论 5.8.7 对任何 C^* 代数 A, $K_{n+2}(A)=K_n(A)$.

这说明 K-理论的长正合列其实是一个环, 其中只有六项. 这即所谓的**六项正合列**.

定理 5.8.8 设有 C^* 代数的正合列

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

那么有以下的 K-理论的正合列

$$\begin{tikzcd}
K_1(J) \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r] & K_1(B) \arrow[d, "\partial"] \\
K_0(B) \arrow[u, "\delta"] & K_0(A) \arrow[l] & K_0(J) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

其中 $\delta : K_0(B) \to K_1(J)$ 是 Bott 映射 $\beta_B : K_0(B) \to K_2(B)$ 和边缘态射 $\partial_2 : K_2(B) \to K_1(J)$ 的复合.

证明 考虑下面的图表

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_A"] & K_0(B) \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "\beta_B"] & K_1(J) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(A) \arrow[d, equal] \\
K_2(A) \arrow[r] & K_2(B) \arrow[r, "\partial_2"] & K_1(J) \arrow[r] & K_1(A)
\end{tikzcd}$$

其中左侧的方块交换由 Bott 映射的自然性得到, 中间方块交换由 δ 的定义得到, 右侧交换是显然的. 于是下面一行是正合列蕴含上面一行也是正合列. □

六项正合列允许我们做一些具体 K-理论的计算.

例 5.8.9 由于 $S^n\mathbb{C} = \{f \in C(\mathbb{S}^n, \mathbb{C}) : f(p) = 0\} = C_0(\mathbb{R}^n)$, 因此六项正合列给出

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) = K_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases}, \qquad K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) = K_{n+1}(\mathbb{C}) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \mathbb{Z}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

而 $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的单点紧化, 也即 $C_0(\mathbb{R}^n)^+ = C(\mathbb{S}^n)$. 因此

$$K_0(C(\mathbb{S}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2k, \\ \mathbb{Z}, & n = 2k+1. \end{cases}, \qquad K_1(C(\mathbb{S}^n)) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \mathbb{Z}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

例 5.8.10 设 A 是 C^* 代数. 由于我们只需要关心 K_0 与 K_1, 记 A 的**全 K-理论群**为

$$K_*(A) = K_0(A) \oplus K_1(A),$$

并赋予自然的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 (*这是为了保证 Kasparov 外乘积可以定义在 $K_*(A)$ 上*). 记 $\mathbb{T}A := C(\mathbb{S}^1, A)$, 那么有分裂的短正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & SA \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{T}A \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] & A \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是由 K_n 的分裂正合性, 有

$$K_n(\mathbb{T}A) = K_n(A) \oplus K_n(SA) = K_n(A) \oplus K_{n+1}(A) = K_*(A).$$

并且 $K_*(A) = K_*(SA)$. 于是 $K_0(\mathbb{T}A) = K_1(\mathbb{T}A) = K_*(A)$.

特别地, 若 $A = \mathbb{C}$, 则 $\mathbb{T}\mathbb{C} = C(\mathbb{S}^1)$. 归纳地有 $\mathbb{T}^n\mathbb{C} = \mathbb{T}(\mathbb{T}^{n-1}\mathbb{C}) = C(\mathbb{S}^1, C(\mathbb{T}^{n-1})) = C(\mathbb{T}^n)$, 于是归纳地也有

$$K_0(\mathbb{T}^n\mathbb{C}) = K_1(\mathbb{T}^n\mathbb{C}) = K_*(\mathbb{T}^{n-1}\mathbb{C}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2^{n-1}}.$$

例 5.8.11　考虑 Toeplitz 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \xrightarrow{\iota} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

相应的六项正合列为

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "K_1(\iota)"] & K_1(\mathcal{T}) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\partial"] \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\delta"] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[l, "K_0(\pi)"'] & \mathbb{Z} \arrow[l, "K_0(\iota)"'] \end{tikzcd}$$

对 $\partial : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, 由于 $\mathbb{Z}$ 的自同态是单态当且仅当它非零; 是满态当且仅当 1 或 -1 位于其值域. 而对单向移位算子 v, $\partial[\mathrm{id}] = [1 - v^*v] - [1 - vv^*] = -1$, 于是 ∂ 是同构. 由正合性就有

$$K_1(\mathcal{T}) = \operatorname{im} K_1(\pi) = \ker \partial = 0.$$

由 $\delta : \mathbb{Z} \to 0$ 可知 $\delta = 0$, 故 $K_0(\pi)$ 是满的. 而 ∂ 是满态, $K_0(\iota) = 0$, 于是 $K_0(\pi)$ 还是单态. 由此 $K_0(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}$.

作为六项正合列的重要变体, 我们给出被称作 **Mayer–Vietoris 序列**的两类序列. 我们约定一些符号: 设 A 和 B 是 C^* 代数, I 和 J 是 A 的闭理想, 且 $I + J$ 在 A 中稠密. 那么有 C^* 代数的推出 (*左图表*) 和拉回 (*右图表*).

$$\begin{tikzcd} I \cap J \arrow[r, "\iota^I"] \arrow[d, "\iota^J"] & I \arrow[d, "\kappa^I"] \\ J \arrow[r, "\kappa^J"] & A \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "\rho^A"] \arrow[d, "\rho^B"] & A \arrow[d, "\pi^A"] \\ B \arrow[r, "\pi^B"] & Q \end{tikzcd}$$

其中 ι^I, ι^J, κ^I, κ^J 是嵌入, π^A 与 π^B 是 $\star$-同态, 且其中至少有一个是满态.

$$P = \left\{(a, b) \in A \oplus B : \pi^A(a) = \pi^B(b)\right\},$$

且 ρ^A 和 ρ^B 是到相应分量的投影.

命题 5.8.12 (Mayer–Vietoris, 推出)　对 $p = 0, 1$, 态射

$$\begin{aligned} K_p(I \cap J) &\to K_p(I) \oplus K_p(J), & x &\mapsto \iota^I_*(x) \oplus \iota^J_*(x), \\ K_p(I) \oplus K_p(J) &\to K_p(A), & y \oplus z &\mapsto \kappa^I_*(y) - \kappa^J_*(z) \end{aligned}$$

使得下面的序列正合.

$$\begin{tikzcd} K_0(I \cap J) \arrow[r] & K_0(I) \oplus K_0(J) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\ K_1(A) \arrow[u] & K_1(I) \oplus K_1(J) \arrow[l] & K_1(I \cap J) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

证明　因为态射 $I \oplus J \to A/(I \cap J)$, $(a_I, a_J) \mapsto a_I + a_J$ 是良定义的 $\star$-同态, 且有稠密的值域, 因此是满态. 不妨 $A = I + J$. 由 C^* 代数的第二同构定理可知

$$\frac{I}{I \cap J} \cong \frac{I + J}{J} = \frac{A}{J},$$

于是下图交换.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \cap J \arrow[r, "\iota^I"] \arrow[d, "\iota^J"] & I \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^I"] & A/J \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "\kappa^J"] & A \arrow[r] & A/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

分别写出相应的六项正合列, 得到下面的交换图表.

$$\begin{tikzcd}
& K_0(I\cap J) \arrow[rr] \arrow[dl] & & K_0(I) \arrow[rr] \arrow[dl] & & K_0(A/J) \arrow[dl, equal] \arrow[dd] \\
K_0(J) \arrow[rr] & & K_0(A) \arrow[rr] & & K_0(A/J) \arrow[dd] & \\
& K_1(A/J) \arrow[uu] \arrow[dl, equal] & & K_1(I) \arrow[ll] \arrow[dl] & & K_1(I\cap J) \arrow[ll] \arrow[dl] \\
K_1(A/J) \arrow[uu] & & K_1(A) \arrow[ll] & & K_1(J) \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

橙色和黄色的箭头分别给出相应的态射, 而正合性只需做图追踪. □

命题 5.8.13 (Mayer–Vietoris, 拉回) 对 $p=0,1$, 态射

$$\begin{aligned}
K_p(P) &\to K_p(A)\oplus K_p(B), & x &\mapsto \rho^A_*(x)\oplus\rho^B_*(x), \\
K_p(A)\oplus K_p(B) &\to K_p(Q), & y\oplus z &\mapsto \pi^A_*(y)-\pi^B_*(z)
\end{aligned}$$

使得下面的序列正合.

$$\begin{tikzcd}
K_0(P) \arrow[r] & K_0(A)\oplus K_0(B) \arrow[r] & K_0(Q) \arrow[d] \\
K_1(Q) \arrow[u] & K_1(A)\oplus K_1(B) \arrow[l] & K_1(P) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

证明 不失一般性, 不妨 π^A 是满射. 记 $I=\ker\pi^A$, 那么以下图表的横行均正合.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi^A"] & Q \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r, "\rho^B"] \arrow[u, "\rho^A"'] & B \arrow[r] \arrow[u, "\pi^B"'] & 0
\end{tikzcd}$$

分别写出相应的六项正合列, 得到下面的交换图表.

$$\begin{tikzcd}
& K_0(I) \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & K_0(P) \arrow[rr] \arrow[dl] & & K_0(B) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
K_0(I) \arrow[rr] & & K_0(A) \arrow[rr] & & K_0(Q) \arrow[dd] & \\
& K_1(B) \arrow[uu] \arrow[dl] & & K_1(P) \arrow[ll] \arrow[dl] & & K_1(I) \arrow[ll] \arrow[dl, equal] \\
K_1(Q) \arrow[uu] & & K_1(A) \arrow[ll] & & K_1(I) \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

橙色和黄色的箭头分别给出相应的态射, 而正合性只需做图追踪. □

正如 ∂ 被称为指标映射是因为它的确和指标有关, δ 也有「指数映射」之名, 下面的定理说明 δ 的确具有「指数」的形式.

定理 5.8.14 设 A, B 是单位 C^* 代数, 有短正合列

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\ j\ } A \xrightarrow{\ \pi\ } B \longrightarrow 0$$

其中 $\pi: A\to B$ 是保持单位的同态, $j^+: J^+\to A$ 由 $x+\alpha 1\mapsto j(x)+\alpha 1_A$ 定义. 设 $g=[p]\in K_0(B)$, 其中 $p\in\mathrm{Proj}_n(B)$, 且 $a\in\mathrm{Mat}_n(A)_{\mathrm{sa}}$ 使得 $\pi(a)=p$. 那么存在唯一的 $u\in\mathrm{U}_n(J^+)$ 使得 $j^+(u)=\exp(2\pi\mathrm{i}a)$, 且 $\delta(g)=-[u]$.

证明　(需要说明的是, 这里 A, B 是单位代数仅仅是技术性要求, 对非单位的情况仍然可以通过考虑对应的分裂正合列, 结合单位情形的讨论得到对应的结果.)

不妨设 $B \neq 0$, 由正合性可知 j 是单的, 于是 j^+ 也是单态. 并且

$$\operatorname{im} j^+ = \{x \in \operatorname{Mat}_n(A) : j(x) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C}1_B)\}.$$

则由

$$\pi(\exp(2\pi \mathrm{i} a)) = \exp(2\pi \mathrm{i}\pi(a)) = \exp(2\pi \mathrm{i} p) = 1$$

可知存在 $u \in \operatorname{Mat}_n(J^+)$ 使得 $j^+(u) = \exp(2\pi \mathrm{i} a)$, 而 $j^+(u)$ 是酉元, 于是 u 也是酉元.

下面证明 $\delta(g) = -[u]$. 这即证明 $(S\partial)\beta_B([p]) = [u^*]$. 此时

$$\operatorname{Mat}_n((SB)^+) = \{f \in C([0,1], \operatorname{Mat}_n(B)) : f(0) = f(1) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C}1_B)\}.$$

因此在 $\mathrm{U}_n((SB)^+)$ 上定义投影值环路 $u_p(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} t)p + 1 - p$, 它满足 $u_p(0) = u_p(1) = 1$, 并且由

$$\begin{aligned}\exp(2\pi \mathrm{i} tp) &= 1 + 2\pi \mathrm{i} tp + \frac{(2\pi \mathrm{i} t)^2}{2!}p^2 + \cdots \\ &= 1 + \left(2\pi \mathrm{i} t + \frac{(2\pi \mathrm{i} t)^2}{2!} + \cdots\right)p = \exp(2\pi \mathrm{i} t)p + 1 - p = u_p(t),\end{aligned}$$

可知 $u_p(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} tp)$.

由于 $(S\pi)^+$ 是满态, 取 $v \in \mathrm{U}_{2n}((SA)^+)$ 使得 $(S\pi)^+(v) = \begin{bmatrix} u_p & \\ & u_p^* \end{bmatrix}$. 则 $v : [0,1] \to \mathrm{U}_{2n}(A)$ 连续且 $v(0) = v(1) \in \operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{C}1_A)$. 满足 $\pi(v(t)) = \begin{bmatrix} u_p(t) & \\ & u_p^*(t) \end{bmatrix}$. 因此 $u_p(0) = u_p(1) = 1$ 蕴含 $v(0) = v(1) = 1$.

取 $z(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} ta)$, 则由 a 自伴可知对任意 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 都有 $z(t) \in \mathrm{U}_n(A)$. 且

$$\pi(v(t)) = \pi(\exp(2\pi \mathrm{i} ta)) = \exp(2\pi \mathrm{i} tp) = u_p(t),$$

因此

$$\pi\left(v(t)\begin{bmatrix} z(t)^* & \\ & z(t) \end{bmatrix}\right) = 1_{2n}, \qquad s\left(v(t)\begin{bmatrix} z(t)^* & \\ & z(t) \end{bmatrix}\right) = 1_{2n}.$$

这即 $v(t)\begin{bmatrix} z(t)^* & \\ & z(t) \end{bmatrix} \in \operatorname{im} j^+$. 因此存在 $w(t) \in \mathrm{U}_{2n}(J^+)$ 使得

$$j^+(w(t)) = v(t)\begin{bmatrix} z(t)^* & \\ & z(t) \end{bmatrix}, \qquad s(w(t)) = 1_{2n}.$$

由 j^+ 是等距可知 $t \mapsto w(t)$ 仍然是连续的, 并且

$$w(0) = 1_{2n}, \qquad j^+(w(1)) = \begin{bmatrix} z(1)^* & \\ & z(1) \end{bmatrix} = j^+\left(\begin{bmatrix} u^* & \\ & u \end{bmatrix}\right).$$

因此 $w(1) = \begin{bmatrix} u^* & \\ & u \end{bmatrix}$, 这因 j^+ 是单的. 于是

$$[u^*] = \left[w\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}w^*\right] - \left[\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right].$$

而

$$j^+\left(w(t)\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}w(t)^*\right) = v(t)\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}v(t)^*.$$

于是

$$(Sj)^+\left(w\begin{bmatrix}1_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}w^*\right)=v\begin{bmatrix}1_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}v^*.$$

而 v 的取法说明了 $(S\pi)^+(v)=\begin{bmatrix}u_p & \\ & u_p^*\end{bmatrix}$, 因此由指标映射的定义,

$$(S\partial)[u_p]=\left[w\begin{bmatrix}1_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}w^*\right]-\left[\begin{bmatrix}1_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]=[u^*].$$

而 $\beta_B([p])=[u_p]$, 于是 $\delta(g)=-[u]$. □

上一定理说明 $\delta([p])=[\exp(-2\pi ip)]$, 于是「指数映射」由此得名. 于是我们也往往将 ∂ 直接写成 Ind, 而将 δ 写成 $\exp$.

5.9 行列式, 同伦群与 K-理论的关系

对一般的单位代数 A, 有以下的交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}(A) \arrow[d] \arrow[dr, "{[\cdot]_1}"] & \\ \mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A) \arrow[r, "\omega"] & K_1(A) \end{tikzcd}$$

其中 ω 是良定义的, 这是因为 $u\in\mathrm{U}_0(A)$ 时有 $[u]=0$. 一般来说 ω 既不是单态也不是满态, 但对具有某些性质的 C^* 代数来说, 甚至可以做到让 ω 是一个同构.

下面假设 $A=C_0(X)$ 是一个交换 C^* 代数. 考虑 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 上的行列式

$$\det:\mathrm{Mat}_n(A)\to A,\qquad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\mapsto\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(k)}.$$

除了具有通常行列式的性质以外, 它还具有下面的性质. 这些性质是容易验证的, 证明在此省略.

(1) 对任意 $a,b\in\mathrm{Mat}_n(A)$, $\det ab=\det a\det b$;

(2) 对 $a\in\mathrm{Mat}_n(A)$, $b\in\mathrm{Mat}_m(A)$, $\det\begin{bmatrix}a & \\ & b\end{bmatrix}=\det a\det b$;

(3) 对任意 $a\in\mathrm{Mat}_n(A)$, $\det a^*=(\det a)^*$;

(4) 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $\det$ 是一个连续映射;

特别地, 若 A 还是单位的, 那么:

(5) $\det$ 将 $\mathrm{U}(A)$ 映到 $\mathrm{U}_1(A)$;

(6) 若 $u,v\in\mathrm{U}_n(A)$ 且 $u\sim_h v$, 那么 $\det u\sim_h\det v$.

若以 $\langle u\rangle$ 记 $u\in\mathrm{U}(A)$ 在 $\mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A)$ 中的等价类, 由 K_1 的泛性质可知态射

$$\nu:\mathrm{U}(A)\to\mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A),\qquad u\mapsto\langle\det u\rangle$$

确定了唯一的态射 $\Delta:K_1(A)\to\mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A)$ 使得 $\Delta([u])=\langle\det u\rangle$. 于是有以下的交换图表

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{U}(A) \arrow[dl] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"] \arrow[dr] & \\ \mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A) \arrow[r, "\omega"] & K_1(A) \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A) \end{tikzcd}$$

且 $\Delta\omega=\mathrm{id}$. 于是我们有下面的命题.

命题 5.9.1　设 A 是单位 C^* 代数, 那么有分裂的正合序列

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\Delta \arrow[r, "\iota"] & K_1(A) \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A) \arrow[l, bend left, "\omega"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

特别地, ω 是单态, 且 $K_1(A) = \mathrm{U}(A)/\mathrm{U}_0(A) \oplus \ker\Delta$.

特别地, Gelfand–Naimark 定理说明单位交换 C^* 代数一定形如 $A = C(X)$, 其中 X 是紧 Hausdorff 空间. 此时 $\mathrm{U}(C(X)) = C(X, \mathbb{S}^1)$, 于是 $\pi^1(X) = \mathrm{U}(C(X))/\mathrm{U}_0(C(X))$. 这就说明当 A 交换时, 上述命题中正合列的第四项可以替换成 $\pi^1(X)$.

回到解析 K_1 群的定义, 对 C^* 代数 A 来说我们使用

$$K_1(A) := \varinjlim \pi_0(\mathrm{U}(A))$$

来定义解析 K_1. 高阶 K-理论可以通过悬挂函子来递归地定义, 那么通过同伦群的定义是否也可以推广到高阶 K-理论? 答案是肯定的.

为此, 我们约定下面的记号. 对 C^* 代数 A, 定义

$$\mathrm{V}(A) := \left\{u \in \mathrm{U}(A^+) : s(u) = 1\right\},$$

其中 $s : \mathrm{U}(A^+) \to \mathrm{U}(\mathbb{C})$ 是标量映射. 当 A 本身是单位 C^* 代数时, $\mathrm{V}(A) = \mathrm{U}(A)$, 于是这不影响我们之前对单位 C^* 代数做的讨论.

命题 5.9.2　设 A 是 C^* 代数, $n \in \mathbb{N}$, 有 $K_n(A) = \pi_{n-1}(\mathrm{V}(A))$.

证明　设 $\lambda_n : \mathrm{U}_n(A^+) \to \mathrm{U}(A^+)$ 是嵌入映射, 在 $\mathrm{U}(A)$ 上定义一个度量

$$d(\lambda_n(u), \lambda_n(v)) := \|u - v\|.$$

那么对 $u \in \mathrm{U}_n(A^+), v \in \mathrm{U}_m(A^+), u \sim_1 v$ 当且仅当在 $\mathrm{U}(A^+)$ 中 $\lambda_n(u) \sim_h \lambda_m(v)$. 考虑 $\mathrm{V}(A)$ 到 $\mathrm{U}(A^+)$ 的嵌入. 注意到 $\mathrm{V}(A)$ 是 $\mathrm{U}(A^+)$ 的收缩核, 收缩映射由 $u \mapsto s(u)^* u$ 给出. 于是

$$\pi_0(\mathrm{V}(\mathrm{A})) = \mathrm{V}(\mathrm{A})/\sim_h = \mathrm{U}(A^+)/\sim_h = K_1(A).$$

而对 $n \geqslant 1$, 视 $\mathbb{S}^n$ 为 $[0,1]^n/\partial[0,1]^n$, 再取

$$\Gamma_n(A) = \{f \in C([0,1]^n, \mathrm{V}(A)) : \forall t \in \partial[0,1]^n\ (f(t) = 1)\}.$$

那么 $\pi_n(\mathrm{V}(\mathrm{A})) = \Gamma_n(t)/\sim_h$, 这是因为

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(A) &= \{u \in C([0,1], \mathrm{V}(A)) : u(0) = u(1) = 1\} \\
&= \left\{u \in \mathrm{U}((SA)^+) : s(u) = 1\right\} = \mathrm{V}(SA).
\end{aligned}$$

于是

$$\pi_1(\mathrm{V}(\mathrm{A})) = \Gamma_1(A)/\sim_h = \mathrm{V}(SA)/\sim_h = K_1(SA) = K_2(A).$$

将 $\mathrm{V}(SA)$ 视作是

$$\mathrm{V}(SA) = \left\{u \in C([0,1], \mathrm{U}(A^+)) : \forall t \in [0,1]\,(u(0) = u(1) = 1 = s(u(t)))\right\}.$$

而对 $n \geqslant 2$, 将 $\Gamma_n(A)$ 与 $\Gamma_{n-1}(SA)$ 通过以下方式等同起来: 对 $f \in \Gamma_n(A), (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$, 定义

$$\tilde{f}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})(t) = f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t),$$

那么 $\tilde{f} \in \mathrm{V}(SA)$. 将 $\tilde{f}$ 视作是 $[0,1]^{n-1}$ 上的函数, 那么 $\tilde{f} \in \Gamma_{n-1}(SA)$. 因此 $f \mapsto \tilde{f}$ 就给出 $\Gamma_n(A)$ 到 $\Gamma_{n-1}(SA)$ 的同构. 由归纳法可知

$$\pi_n(\mathrm{V}(A)) = \Gamma_n(A)/\sim_h = \Gamma_{n-1}(A)/\sim_h = K_n(SA) = K_{n+1}(A)$$

对任意 $n \geqslant 2$ 都成立. □

由 Bott 周期律, 上述定理的结论还可以写成

$$\pi_n(\mathrm{V}(A)) = \begin{cases} K_0(A), & n = 2k+1, \\ K_1(A), & n = 2k. \end{cases}$$

这实际上说明了 $\pi_{n+2}(\mathrm{V}(A)) = \pi_n(\mathrm{V}(A))$, 而当 A 是单位 C^* 代数时即为 $\pi_{n+2}(\mathrm{U}(A)) = \pi_n(\mathrm{U}(A))$.

5.10 近似有限维代数

回顾有限维 $C*$ 代数的结构定理 2.4.8 , 任何有限维 C^* 代数都是若干矩阵代数的直和

$$A \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_m}(\mathbb{C}).$$

对矩阵代数 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, 若记 e_{ij} 是只有 (i,j) 元为 1, 其余均为 0 的矩阵, 则它构成 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 的一组 Hamel 基. 因此 A 中的任何元素都可以由

$$\left\{ e_{ij}^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant i,j \leqslant n_k \right\}$$

表示. 称作是 A 的**矩阵单位系统**. 容易验证它具有以下的性质:

(1) $e_{ij}^{(k)} e_{j\ell}^{(k)} = e_{i\ell}^{(k)}, (e_{ij}^{(k)})^* = e_{ji}^{(k)}$;

(2) 若 $k \neq \ell$ 或 $j \neq r$, $e_{ij}^{(k)} e_{rs}^{(\ell)} = 0$;

(3) $A = \mathrm{span}\left\{ e_{ij}^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant i,j \leqslant n_k \right\}$.

并且由此 $e_{ij}^{(k)} = (e_{1i}^{(k)})^* e_{1j}^{(k)}$.

定义 5.10.1 (近似有限维代数) 若 C^* 代数 A 可以写成有限维 C^* 代数的归纳极限, 则称 A 是**近似有限维代数**, 或简写作 **AF 代数**.

这里 AF 即为 Approximately Finite-dimensional 的首字母. 我们约定当 A 是单位 C^* 代数时, 在 $A = \varinjlim A_n$ 中的各 A_n 均含有 A 的单位, 且 φ_n 保持单位. 由定义可知 AF 代数一定是可分的.

引理 5.10.2 设 $A \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(\mathbb{C})$, $B \cong \mathrm{Mat}_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{m_\ell}(\mathbb{C})$ 是两个有限维 C^* 代数, $\varphi : A \to B$ 是一个保持单位的同态, 则在相差一个酉等价的意义下, φ 完全由一个 $\ell \times k$ 矩阵 $a = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{\ell,k}(\mathbb{N})$ 确定, 且 a 满足

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} n_j = m_i.$$

证明 考虑图表

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"] & B \arrow[d, two heads, "\pi_i"] \\
\mathrm{Mat}_{n_j}(\mathbb{C}) \arrow[u, "\iota_j"] \arrow[r, dashed, "\varphi_{ij}"] & \mathrm{Mat}_{m_i}(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

其中 ι_j 和 π_i 是典范的嵌入和投影. 由有限维 C^* 代数的表示定理可知存在唯一的正整数族 $\{a_{i1},\dots,a_{ik}\}$ 使得

$$\varphi_i \simeq \varphi_{i1}^{(a_{i1})} \oplus \cdots \oplus \varphi_{ik}^{(a_{ik})}.$$

其中 $\{\varphi_{ij}\}$ 是两两不酉等价的不可约表示. 不妨 $\varphi_{ij} = \mathrm{id}_{n_j}$, 因 φ_i 保持单位, 比较维数即得 $\sum_{j=1}^k a_{ij}n_j = m_i$. 因此 φ 被唯一的正整数矩阵 $a = [a_{ij}]$ 确定, 其中 a_{ij} 即为 $\mathrm{Mat}_{n_j}(\mathbb{C})$ 到 $\mathrm{Mat}_{m_i}(\mathbb{C})$ 同态的重数. □

这里的重数可以如下理解: 对 φ_{ij}, 它必形如

$$x_{n_j,n_j} \mapsto \mathrm{diag}\,\{x,\dots,x\}\,,$$

x 有 a_{ij} 个. 因此 φ_i 必形如

$$(x_1,\dots,x_k) \mapsto \mathrm{diag}\,\{x_1,\dots,x_1,x_2\dots,x_2,\dots,x_k,\dots,x_k\}\,.$$

其中 x_j 有 a_{ij} 个.

若 φ 不保持单位, 以上的 φ_{ij} 和 φ_i 就形如

$$\begin{aligned} x_{n_j,n_j} &\mapsto \mathrm{diag}\,\{x,\dots,x,0,\dots,0\}\,,\\ (x_1,\dots,x_k) &\mapsto \mathrm{diag}\,\{x_1,\dots,x_1,x_2\dots,x_2,\dots,x_k,\dots,x_k,0,\dots,0\}\,. \end{aligned}$$

此时 a 满足的关系变为 $\sum_{j=1}^k a_{ij}n_j \leqslant m_i$.

前述引理说明有限维 C^* 代数之间的同态完全被一个正整数矩阵确定, 因此 AF 代数作为有限维 C^* 代数的归纳极限, 可以用图示法表示其结构.

定义 5.10.3 (Bratteli 图)　设 $A = \varinjlim A_n$ 是 AF 代数, 其 **Bratteli 图**是一个如下定义的无限图:

(1)　其顶点集为 $\{(p,i) : p \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant k_p\}$, 这里 k_p 表示 A_p 中直和因子的数目, (p,i) 常带有标号 n, 是 A_p 中 i 因子的矩阵阶数;

(2)　其定向边 $(p,i) \to (p+1,j)$ 如下确定: 有 $a_{ji}^{(p)}$ 个定向边从 (p,i) 指向 $(p+1,j)$.

下面我们给出一些 AF 代数及其 Bratteli 图的例子.

例 5.10.4　设 H 是可分 Hilbert 空间, 考虑 $A = \mathcal{K}(H) \oplus \mathbb{C}$. 取一列递增投影 $(p_n)_{n\geqslant 1}$, $\mathrm{rank}\, p_n = n$ 且 SOT–$\lim_{n\to\infty} p_n = \mathrm{id}$. 取 $A_n = \mathbb{C}p_n^\perp + p_n\mathcal{K}(H)p_n \cong \mathbb{C} \oplus \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. 此时的 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ 如此定义:

$$\mathrm{diag}\,\{x,1,1,\dots\} \mapsto \mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} x & \\ & 1\end{bmatrix},1,\dots\right\},$$

这里对角线上的常数即为 $\mathbb{C}$ 的嵌入, $z \mapsto \mathrm{diag}\,\{z,z,\dots\}$. 由此 $A_n \to A_{n+1}$ 将 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 嵌入 $\mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{C})$, 将 $\mathbb{C}$ 分别嵌入 $\mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{C})$ 和 $\mathbb{C}$. 因此 $A_n \to A_{n+1}$ 对应 Bratteli 图的一部分

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \\ n \arrow[r] & n+1 \end{tikzcd}$$

则对 A 来说, 其 Bratteli 图为

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\ & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

而 $\mathcal{K}(H) = \varinjlim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 对应的 Bratteli 图为

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \cdots\,.$$

例 5.10.5 设 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是 Fibonacci 数列, 取 $A_n = \mathrm{Mat}_{f_n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{f_{n-1}}(\mathbb{C})$, 此时的 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ 如此定义:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{bmatrix} x & \\ & y \end{bmatrix}, x \right),$$

则 $A = \varinjlim A_n$ 对应的 Bratteli 图为

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 1 \arrow[dr] & 2 \arrow[dr] & 3 \arrow[dr] & 5 \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[ur] & 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 3 \arrow[r] \arrow[ur] & 5 \arrow[r] \arrow[ur] & 8 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

例 5.10.6 *Bratteli 图不能用于区分不同的 AF 代数!* 即 A, B 具有不同 Bratteli 图时未必成立 A 与 B 不同构. 考虑 **CAR 代数** A, 其中 $A_n = \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$.

(1) 将 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ 取成 $x \mapsto \mathrm{diag}\{x, x\}$, 易知 A 具有 Bratteli 图

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 4 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 8 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(2) 取 $B_n = \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C}) \subset A_{n+1}$. 则 $B_n \to B_{n+1}$ 取成 $\varphi_{n+1}|_{B_n}$, 则下图交换

$$\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_{n+1}|_{B_n}"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] \arrow[dl] \\
B_{n+1} \arrow[r, hook] & A_{n+2}
\end{tikzcd}$$

因此 $A \cong B = \varinjlim B_n$. 但 B 的 Bratteli 图为

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 4 \arrow[r] \arrow[dr] & 8 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
 & 1 \arrow[r] \arrow[ur] & 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \arrow[r] \arrow[ur] & 8 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是 A 和 B 同构, 但其 Bratteli 图不同.

(3) 下面考虑如下的归纳序列

$$A_1 \to B_1 \to A_2 \to B_2 \to \cdots A_n \to B_n \to \cdots,$$

其归纳极限 C 与 A 和 B 都同构, 且对应的 Bratteli 图为

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[r] \arrow[dr] & 4 \arrow[r] & \cdots \\
 & 1 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ur] & & 4 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

注意到 A 和 B 的 Bratteli 图都可以看作以上 Bratteli 图的一部分.

命题 5.10.7 若 $A = \varinjlim A_n$ 与 $B = \varinjlim B_n$ 具有相同的 Bratteli 图, 则 $A \cong B$.

证明 记 $\alpha_n : A_n \to A_{n+1}$ 和 $\beta_n : B_n \to B_{n+1}$ 是嵌入, $\varphi_n : A_n \to B_n$ 是自然同构 (因有限维 C^* 代数的 *Bratteli* 图相同表明 $A_n \cong B_n$). 此时 $\beta_n \varphi_n$ 和 $\varphi_n \alpha_n$ 给出重数与 α_n, β_n 相同的嵌入 $A_n \hookrightarrow B_{n+1}$. 由有限维 C^* 代数的表示定理可知存在 $u_{n+1} \in \mathrm{U}_1(B_{n+1})$ 使得

$$\beta_n \varphi_n = u_{n+1}^* \varphi_{n+1} \alpha_n u_{n+1}.$$

取 $\psi_1 := \varphi_1, v_1 = \mathrm{id}$. 归纳地取

$$v_{n+1} := \beta_n v_n u_{n+1}, \qquad \psi_{n+1} := v_{n+1}^* \varphi_{n+1} v_{n+1}.$$

简单的计算表明 $\beta_n \psi_n = \psi_{n+1} \alpha_n$, 这即下图交换.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & \cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\psi_n"] & \cdots \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & \cdots \arrow[r] & B_n \arrow[r, "\beta_n"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

因此 $A \cong B$. □

例 5.10.8 仅仅只有 $A_n \cong B_n$ 并不能导出其归纳极限同构, 连接同态如何同样关键. 记 X 是 Cantor 集, X_n 是构造 Cantor 集经典方法中的第 n 步得到的集合, 记 A_n 是在 X_n 上每个区间都是常值函数的代数, 则 $C(X) = \varinjlim A_n$. 再取 $Y = \{0\} \cup \{n^{-1} : n \geqslant 1\}$, B_n 是 $C(Y)$ 的在 $[0, 2^{-n}]$ 上为常函数的子代数, 则 $C(Y) = \varinjlim B_n$.

注意到此时 $A_n \cong B_n \cong \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$, 但 $C(X)$ 与 $C(Y)$ 不同构, 因 X 与 Y 不同胚.

引理 5.10.9 设 I 是 $A = \varinjlim A_n$ 的理想, 则

$$
I = \mathbf{clos}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1}(I \cap A_n)\right\} = \mathbf{clos}\left\{I \cap \left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right)\right\},
$$

因此 I 也是 AF 的.

证明 由 C^* 代数的第二同构定理, 有以下的交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
I \cap A_n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A_n \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \dfrac{A_n}{I \cap A_n} \arrow[d, "\sim"] \\
I \arrow[r, hook] & A_n + I \arrow[r, two heads] & \dfrac{A_n + I}{I}
\end{tikzcd}
$$

因对任意 $a \in A_n$ 都有 $d(a, A_n \cap I) = d(a, I)$, 故若 $x \in I$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 充分大的 n, 存在 $a \in A_n$ 使得 $\|x - a\| < \varepsilon$. 因此存在 $x' \in A_n \cap I$ 使得 $\|a - x'\| < \varepsilon$, 这即 $\|x - x'\| < 2\varepsilon$. 因此 $I = \mathbf{clos}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1}(I \cap A_n)\right\}$. 因各 A_n 有限维, 故 $I \cap A_n$ 也是有限维的, 这即 I 是 AF 的. □

我们希望在 AF 代数的 Bratteli 图中读出理想结构. 在例 5.10.4 中已经给出了一个理想对应 Bratteli 图一部分的例子. 借助引理 5.10.9, 我们可以通过 Bratteli 图的子集直接描述理想.

定义 5.10.10 设 $\mathcal{D}$ 是一个 AF 代数对应的 Bratteli 图, $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ 是一个子图. 称 $\mathcal{S}$ 是

(1) **定向**的, 若

$$
((p, i) \in \mathcal{S} \wedge (p, i) \to (p+1, j) \in \mathcal{S}) \implies (p+1, j) \in \mathcal{S},
$$

这即前一个节点和箭头都属于 $\mathcal{S}$ 时箭头指向的节点也属于 $\mathcal{S}$;

(2) **遗传**的, 若

$$
\forall (p, i) \in \mathcal{S}(\exists (p, i) \to (p+1, j) \in \mathcal{D} \implies (p+1, j) \in \mathcal{S}),
$$

这即对某一个节点来说, 若从它出发的箭头和箭头指向的节点都属于 $\mathcal{S}$, 则该节点也属于 $\mathcal{S}$.

直观上看, 定向性是指 "从前向后" 的封闭性, 遗传性是指 "从后向前" 的封闭性. 因此对理想来说, 一个自然的想法是将其与 $\mathcal{D}$ 的定向遗传子集对应.

定理 5.10.11 (理想与 Bratteli 图的关系) 设 A 是 AF 代数, 对应的 Bratteli 图为 $\mathcal{D}$. 则 A 的理想全体与 $\mathcal{D}$ 的定向遗传子图全体可以建立一一对应.

证明 因 $A_k \cong \mathrm{Mat}_{(k,1)}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{(k,n_k)}(\mathbb{C})$, 且每一个 $\mathrm{Mat}_{(k,i)}(\mathbb{C})$ 都是单代数, 于是设 $I_k \triangleleft A_k$, 存在 $\{1,\ldots,n_k\}$ 的一个子集 P 使得

$$I_k \cong \bigoplus_{p\in P} \mathrm{Mat}_{(k,p)}(\mathbb{C}) \triangleleft A_k.$$

因此对给定的理想 I, 由引理 5.10.9 可知 $I_k = I \cap A_k$. 下面记 $\alpha_n : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ 是嵌入, 并记 $\mathcal{S}$ 是各 I_k 对应的 Bratteli 图的部分.

$\mathcal{S}$ 是定向的. 这因当 $\mathrm{Mat}_{(p,i)}(\mathbb{C}) \subset I_p$ 且 $(p,i) \to (p+1,j) \in \mathcal{S}$ 时有

$$I \cap \mathrm{Mat}_{(p+1,j)}(\mathbb{C}) \supset \alpha_p(\mathrm{Mat}_{(p,i)}(\mathbb{C})) \cap \mathrm{Mat}_{(p+1,j)}(\mathbb{C}) \neq \{0\}.$$

于是 $(p+1,j) \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ 是遗传的. 记 $J := \{j : (p,i) \to (p+1,j) \in \mathcal{D}\}$, 则对任意 $j \in J$ 都有 $(p+1,j) \in \mathcal{S}$ 时有

$$\alpha_p(\mathrm{Mat}_{(p,i)}(\mathbb{C})) \subset \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Mat}_{(p+1,j)}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{I},$$

这即 $(p,i) \in \mathcal{S}$.

反之, 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{D}$ 的定向遗传子图, 记 I_p 是 $\{(p,i)\} \subset \mathcal{S}$ 对应的 A_p 的理想. 由 $\mathcal{S}$ 定向可知 $I := \mathbf{clos}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1} I_p\right\}$ 是 A 的理想. 由 $\mathcal{S}$ 遗传可知 $I_p = A_p \cap I_{p+1}$ 可以推出 $I_p = A_p \cap I$, 因此 $\mathcal{S}$ 可以确定唯一的 I. $\square$

推论 5.10.12 设 A 是 AF 代数, $\mathcal{D}$ 是其对应的 Bratteli 图, 则 A 是单的当且仅当 $\forall (p,i) \in \mathcal{D}\, \exists q > p\, \forall j\, (\exists (p,i) \to (q,j) \in \mathcal{D})$.

证明 *必要性*. 设 A 是单的, 用反证法. 若存在 (p,i) 不满足条件, 则 (p,i) 生成的 $\mathcal{D}$ 的定向子集 $\mathcal{S}'$ 使得对任意 p, $\mathcal{S}' \cap \{(p,i)\}$ 是 $\{(p,i)\}$ 的一个真子集. 对 $q < p$, 添加顶点 (q,j) 使得 $\mathcal{S}'$ 被扩张成一个遗传子集 $\mathcal{S}''$, 则由前述定理可知它对应一个真理想 I. 但这与 A 是单代数矛盾.

充分性. 由条件可知对任何 $I \triangleleft A$ 且 $I \neq 0$, 都有 $I \cap A_p \neq \varnothing$. 设 I 对应的 Bratteli 图的子集为 $\mathcal{S}$, 则存在 $q > p$ 使得 $A_q \subset I$, 这即 $1 \in I$, 故 $I = A$. 因此 A 是单的. $\square$

命题 5.10.13 设 A 是 AF 代数, $I \triangleleft A$. 对应的 Bratteli 图及其子集分别为 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{S}$, 则 A/I 也是 AF 的, 且 A/I 对应的 Bratteli 图为 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$.

证明 注意到 $A/I = \varinjlim (A_n + I)/I$, 而 $(A_n + I)/I$ 是有限维的, 故 A/I 是 AF 的. 由第二同构定理,

$$\frac{A_n + I}{I} \cong \frac{A_n}{I_n} \cong \sum_{(n,i)\notin\mathcal{S}} \mathrm{Mat}_{(n,i)}(\mathbb{C}).$$

且嵌入 $(n,i) \to (n+1,j) \notin \mathcal{S}$ 时保持不变, 于是 A/I 对应的 Bratteli 图即为 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$. $\square$

5.11 维度群与 Elliott 分类定理

为了区分不同的 AF 代数, 我们需要通过 K_0 群上更多的结构.

定义 5.11.1 (有序 Abel 群) 设 G 是一个 Abel 群,

(1) 若存在子集 $G^+ \subset G$ 满足

$$G^+ + G^+ \subset G^+, \qquad G^+ \cap (-G^+) = \{0\}, \qquad G^+ - G^+ = G,$$

则称 (G, G^+) 是一个**有序 Abel 群**;

(2)　在 G 上可以定义二元关系 $x \leqslant y \iff y - x \in G^+$, 此时 $(G, \leqslant)$ 是一个偏序集, 并且 G^+ 此时是一个「正锥」;

(3)　设 $u \in G^+$, 若

$$\forall g \in G \, \exists n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1} \, (-nu \leqslant g \leqslant nu),$$

则称 u 是 G 的一个**序单位**, 并称三元组 (G, G^+, u) 是一个**带单位的有序 Abel 群**. 若 G^+ 中的任何非零元都是序单位, 则称 (G, G^+, u) 是**单**的.

例 5.11.2　并非所有有序 Abel 群都有序单位. 取 $G = c_0(\mathbb{Z}_{\geqslant 1}, \mathbb{Z})$, 加法是逐分量的加法, 则

$$G^+ = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} : \forall n \geqslant 1 (x_n \geqslant 0)\},$$

注意到此时 (G, G^+) 是一个有序 Abel 群, 但它不存在序单位.

下面考虑有序 Abel 群之间的态射 f. 称群同态 $f : G \to H$ 是一个

(1)　**序同态**, 若 $f(G^+) \subset H^+$. 特别地, 若 $f : G \to H$ 是群同构且 $f(G^+) = H^+$, 则称 f 是**序同构**;

(2)　**保持单位的序同态**, 若 (G, G^+) 和 (H, H^+) 分别存在序单位, 且 f 将 (G, G^+) 的序单位映成 (H, H^+) 的序单位.

于是带单位的有序 Abel 群上的**态**可以定义成保持单位的序同态 $\varphi : (G, G^+, u) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, 1)$. 记 (G, G^+, u) 上态全体构成的空间为 $S(G, G^+, u)$, 或不致混淆时, $S(G)$.

定理 5.11.3　设 (G, G^+, u) 是带单位的有序 Abel 群, $x \in G$, 则

$$\forall \varphi \in S(G) \, (\varphi(x) > 0) \iff \exists n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}, \, nx \text{ 是序单位}.$$

证明　因 φ 是保持单位的序同态, 故 $f(x) < f(y)$ 时存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 使得 $nx \leqslant ny$. □

下面设 A 是 C^* 代数, 考虑 $K_0(A)$ 和生成它的交换半群 (也称作 $K_0(A)$ 的**正锥**)

$$K_0(A)^+ := \{[p]_0 : p \in \mathrm{Proj}(A)\} \subset K_0(A).$$

则 $K_0(A)^+ + K_0(A)^+ \subset K_0(A)^+$, 且 A 是单位 C^* 代数时 $K_0(A)^+ - K_0(A)^+ = K_0(A)$. 若还希望 $K_0(A)^+ \cap (-K_0(A)^+) = \{0\}$, 我们需要 $\mathrm{Mat}_n(A)$ 上的任何投影 $p \in \mathrm{Proj}_n(A)$ 满足, 若 $q < p, p \sim q$, 则 $q \neq p$. 满足条件的 A 称作是**稳定有限**的.

定义–定理 5.11.4 (有序 K_0 群)　设 A 是稳定有限的单位 C^* 代数, 则 $(K_0(A), K_0(A)^+, [1])$ 是带单位的有序 Abel 群, 称作是 A 的**有序 K_0 群**.

证明　只需证明 $[1]$ 是序单位即可. 由于任何 $g \in K_0(A)$ 都具有 $g = [p] - [q]$ 的形式, 因此

$$-n[1] = -[1_n] = -[q] - [1_n - q] \leqslant -[q] \leqslant g \leqslant [p] \leqslant [p] + [1_n - p] = [1_n] = n[1].$$

得证. □

由 K_0 作用在态射上的方式可知当 $\varphi : A \to B$ 是 C^* 代数的同构时 $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ 是一个群同构, 且 $K_0(\varphi)(K_0(A)^+) = K_0(B)^+$. 因此 $K_0(\varphi)$ 总是一个序同构. 若 A, B 都是单位的, 且 φ 保持单位, 则 $K_0(\varphi)$ 是保持单位的序同构.

命题 5.11.5　设 A, B 是 C^* 代数, $K_0(A \oplus B)$ 上的正锥可以自然地表作

$$K_0(A \oplus B)^+ \cong K_0(A)^+ \oplus K_0(B)^+ = \left\{(g, h) : g \in K_0(A)^+, h \in K_0(B)^+\right\}.$$

证明 只需考虑 $K_0(\pi_A)$ 和 $K_0(\pi_B)$, $K_0(\iota_A)$ 和 $K_0(\iota_B)$ 的作用即可.

定义 5.11.6 (维度群) 设 $(n_k)_{k\geqslant 1}$ 是正整数列, $\alpha_k : \mathbb{Z}^{n_k} \to \mathbb{Z}^{n_{k+1}}$ 是序同态. 称

$$\mathbb{Z}^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}^{n_2} \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{Z}^{n_3} \longrightarrow \cdots$$

的归纳极限 G 是**维度群**.

设 (G, G^+) 是有序 Abel 群. 若, 若

$$\forall x \in G\,(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\,(nx \geqslant 0) \implies x \geqslant 0).$$

则称它是**无孔**的. 若

$$\forall x_i, y_i \in G \forall i = 1, 2\, \forall j = 1, 2 (x_i \leqslant y_j \implies \exists z \in G\,(x_i \leqslant z \leqslant y_j)).$$

则称它具有 **Riesz 插值性质**. 下面的定理给出有序 Abel 群成为维度群的充分必要条件.

定理 5.11.7 (Effros–Handelman–Shen) 可数有序 Abel 群 (G, G^+) 是维度群当且仅当 G 无孔且具有 Riesz 插值性质.

证明 参见 [EHS]. □

例 5.11.8 设 (G, G^+) 和 (H, H^+) 是维度群, 则 $D = G \oplus H$, $D^+ = G^+ \oplus H^+$, (D, D^+) 仍是一个维度群. 但若令

$$D_1^+ := \{(g, h) : g > 0,\ h > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

则 (D, D_1^+) 虽仍是有序 Abel 群, 但不一定是维度群.

命题 5.11.9 设 $A = \varinjlim A_n$ 是 AF 代数, 则其有序 K_0 群 $(K_0(A), K_0(A)^+)$ 是维度群.

证明 由 K_0 的连续性可知作为 Abel 群, $K_0(A) = \varinjlim K_0(A_k)$. 而 A_k 是若干矩阵代数的直和, 于是存在 $n_k \geqslant 1$ 使得 $K_0(A_k) = \mathbb{Z}^{n_k}$, 且由 φ_k 保持单位可知 $K_0(\varphi_k)$ 是保持单位的序同态, 这即 $(K_0(A), K_0(A)^+)$ 是维度群. □

为了使用 K–理论分类 AF 代数, 我们首先需要从 K_0 群之间的态射「还原」出原本的态射. 幸运的是, 在有限维的情形下, 这件事情是容易的.

引理 5.11.10 设 $A = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$, $B = \bigoplus_{j=1}^\ell \mathrm{Mat}_{m_j}(\mathbb{C})$ 是有限维的 C^* 代数, 且态射 $\psi : K_0(A) \to K_0(B)$ 使得 $\psi(u_A) \leqslant u_B$, 其中 u_A 和 u_B 分别是 $K_0(A)$ 和 $K_0(B)$ 的序单位, 则存在态射 $\varphi : A \to B$ 使得 $K_0(\varphi) = \psi$, 且 φ 在酉等价的意义下唯一.

特别地, 若 ψ 保持单位, 则 φ 保持单位.

证明 由题设可知 $K_0(A)$ 和 $K_0(B)$ 作为带序单位的有序 Abel 群, 其序单位可以取成

$$u_A = [n_1, \ldots, n_k]\mathsf{T}, \qquad u_B = [m_1, \ldots, m_\ell]\mathsf{T}.$$

由引理 5.10.2 可知 $\psi : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^\ell$ 由一个 $\ell \times k$ 的非负整数矩阵 $[a_{ij}]$ 确定. 因 $\psi(u_A) \leqslant u_B$, 于是

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} n_j \leqslant m_i, \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant \ell.$$

且 ψ 保持单位时上式取等. 因此存在 $\varphi : A \to B$ 使得嵌入的重数恰为 a_{ij}, 它如下定义: 记 $p_j : \mathcal{A} \to \mathrm{Mat}_{n_j}(\mathbb{C})$ 是极小投影, 则

$$\varphi(p_j) = f_1 \oplus \cdots \oplus f_\ell,$$

其中 $\operatorname{rank} f_i = a_{ij}$, 它是到 $\mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ 的投影. 则 $[\varphi(p_j)]_0 = [a_{1j}, \ldots, a_{nj}]^{\mathrm{T}}$, 这即 $K_0(\varphi) = \psi$. 唯一性由引理 5.10.2 得到. $\square$

下面把映射到的代数从有限维代数推广到 AF 代数, 我们可以得到:

引理 5.11.11　设 $A = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ 是有限维 C^* 代数, $B = \varinjlim B_n$ 是 AF 代数, $\beta_n : B_n \to B$ 是相应的嵌入, $\psi : K_0(A) \to K_0(B)$ 是使得 $\psi(u_A) \leqslant u_B$ 的态射, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, $\varphi : A \to B_m$ 使得 $K_0(\beta_m \varphi) = \psi$, 且 φ 在酉等价意义下是唯一的.

特别地, 若 ψ 保持单位, 则 φ 保持单位.

证明　使用的记号与 5.11.10 相同. 取充分大的 n 使得

$$\psi(u_A) \leqslant K_0(\beta_n)(u_{B_n}), \qquad \psi(p_j) \leqslant K_0(\beta_n)(u_{B_n}), \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k.$$

再取 B_n 中的投影 q 和 q_j 使得 $K_0(\beta_n)(q) = \psi(u_A)$, $K_0(\beta_n)(q_j) = \psi(p_j)$.

若 B 不是单位的, 对其单位化考虑即可, 因此下面总是设 B 是单位的. 取 $q = 1_{B_n}$, 则由

$$K_0(\beta_n)\left([1_{B_n}]_0 - \sum_{j=1}^k n_j [q_j]_0\right) = 0$$

可知存在 $m \geqslant n$ 使得

$$K_0(\beta_{nm})\left([1_{B_n}]_0 - \sum_{j=1}^k n_j [q_j]_0\right) = 0.$$

取 $q'_j = \beta_{nm}(q_j)$, $q' = \beta_{nm}(q)$, 再取 $\rho : K_0(A) \to K_0(B_m)$, $[p_j]_0 \mapsto [q'_j]_0$ 是一个序同态, 由

$$\rho(u_A) = \sum_{j=1}^k n_j [q'_j]_0 = [1_{B_n}]_0$$

可知 ρ 满足条件, 故 $K_0(\beta_m)\rho = \psi$. 再由引理 5.11.10 可知存在 $\varphi : A \to B_m$ 使得 $K_0(\varphi) = \rho$, 于是 $K_0(\beta_m \varphi) = \psi$.

设 $\varphi' : A \to B_{m'}$ 也满足条件, 取 $\ell \geqslant \max\{m, m'\}$, 并且用 $\beta_{m\ell}\varphi$ 和 $\beta_{m'\ell}\varphi'$ 代替 φ 和 φ', 则 $K_0(\beta_\ell(\varphi - \varphi')) = 0$. 因此存在 $p \geqslant \ell$ 使得 $K_0(\beta_{\ell p}(\varphi - \varphi')) = 0$, 这即 $\beta_{\ell p}\varphi \sim_0 \beta_{\ell p}\varphi'$, 因此也酉等价. $\square$

至此, 我们可以处理 A 是 AF 代数的情形. 下面的 **Elliott 分类定理**说明了带序单位的维度群就是 AF 代数的完全不变量.

定理 5.11.12 (Elliott)　设 $A = \varinjlim A_m$ 和 $B = \varinjlim B_n$ 是 AF 代数, 则 $A \cong B$ 当且仅当它们对应的带序单位的有序 K_0 群 (即维度群) 是同构的. 且对保持单位的序同构 $\rho : K_0(A) \to K_0(B)$, 存在态射 $\varphi : A \to B$ 使得 $K_0(\varphi) = \rho$.

证明　我们有以下的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
A_{m_1} \arrow[r, "\alpha_{m_1 m_2}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_{m_2} \arrow[r, "\alpha_{m_2 m_3}"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_{m_3} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\
B_{n_1} \arrow[r, "\beta_{n_1 n_2}"'] \arrow[ur, "\psi_1"] & B_{n_2} \arrow[r, "\beta_{n_2 n_3}"'] \arrow[ur, "\psi_2"] & B_{n_3} \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots \arrow[r] \arrow[ur] & B \arrow[u, shift right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

则有 $K_0(\varphi) = \rho$, $K_0(\psi) = \rho^{-1}$.

取两个严格递增的正整数列 $(m_i)_{i \geqslant 1}$, $(n_j)_{j \geqslant 1}$ 如下: 令 $m_1 = 1$, 并应用引理 5.11.11 得到 $\rho K_0(\alpha_{m_1}) : K_0(A_{m_1}) \to K_0(B)$, 再取 $n_1 \geqslant m_1$, $\varphi_1 : A_{m_1} \to B_{n_1}$ 使得 $K_0(\beta_{n_1}\varphi_1) = \rho K_0(\alpha_{m_1})$. 再应用引

理 5.11.11 得到 $m \in \mathbb{N}$, $\psi : B_{n_1} \to A_m$ 使得 $K_0(\beta_m \psi) = \rho^{-1} K_0(\beta_{m_1})$. 因此由 $K_0(\alpha_m) K_0(\psi\varphi_1 - \alpha_{m_1 m}) = 0$ 可知存在 $m_2 \geqslant m$ 使得

$$K_0(\alpha_{mm_2}) K_0(\psi\varphi_1 - \alpha_{m_1 m}) = 0.$$

于是存在 $u \in \mathrm{U}_1(A_{m_2})$ 使得 $\mathrm{Ad}(u) : x \mapsto u^* x u$ 满足

$$\mathrm{Ad}(u)\alpha_{mm_2}\psi\varphi_1 = \alpha_{m_1 m_2}.$$

取 $\psi_1 = \mathrm{Ad}(u)\alpha_{mm_2}\psi$.

由此归纳地构造 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}, (\psi_n)_{n\geqslant 1}$, 并得到对应的 φ, ψ 使得 $\forall k \geqslant 1$ 都有

$$\varphi|_{\alpha_{m_k}(A_{m_k})} = \varphi_k, \qquad \psi\varphi|_{A_{m_k}} = \alpha_{m_k}.$$

且 φ_k 单. 故 $\psi\varphi = \mathrm{id}_A, \varphi\psi = \mathrm{id}_B$, 这即 $A \cong B$. 并且下图交换

$$\begin{tikzcd}
K_0(A_{m_k}) \arrow[r, "K_0(\alpha_{m_k})"] \arrow[d, "K_0(\varphi_k)"'] & K_0(A) \arrow[d, "\rho"] \\
K_0(B_{n_k}) \arrow[r, "K_0(\beta_{n_k})"] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

再由归纳极限的唯一性可知 $K_0(\varphi) = \rho, K_0(\psi) = \rho^{-1}$. □

应用: 一致超有限 (UHF) 代数的分类

UHF 代数 (一致超有限, Uniformly HyperFinite) 是 AF 代数的一类重要例子, 通过 Elliott 分类定理, 我们可以完全分类 UHF 代数.

定义 5.11.13 (一致超有限代数) 设 $A = \varinjlim \mathrm{Mat}_{k_n}(\mathbb{C})$ 是一个 AF 代数. 若所有连接同态都保持单位, 则称 A 是**一致超有限代数**, 或简写作 **UHF 代数**.

注意 $\varphi : \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 保持单位意味着 $m \mid n$. 因此 UHF 代数 $A = \varinjlim \mathrm{Mat}_{k_n}(\mathbb{C})$ 自然满足

$$k_1 \mid k_2 \mid k_3 \mid \cdots$$

这即 $(k_n)_{n\geqslant 1}$ 中 p-因子的个数对任何素数 p 都是递增的. 我们暂时用 $\mathbb{P}$ 来记素数全体.

定义 5.11.14 (超自然数) 设 $A = \varinjlim \mathrm{Mat}_{k_n}(\mathbb{C})$ 是 UHF 代数, 对素数 p, 记 k_n 中 p-因子的个数为 ℓ_n. 再记 $n_p = \sup_{n\geqslant 1}\{\ell_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. 称形式乘积 $\delta(A) = n := \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p}$ 是与 A 相关的**超自然数**.

定理 5.11.15 (Glimm) 设 A, B 是 UHF 代数, 则 $A \cong B$ 当且仅当 $\delta(A) = \delta(B)$.

证明 设 $A = \varinjlim \mathrm{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}), B = \varinjlim \mathrm{Mat}_{\ell_n}(\mathbb{C})$.

必要性. 若 $A \cong B$, 则 $\bigcup_{m\geqslant 1} \mathrm{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}) \cong \bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{Mat}_{\ell_n}(\mathbb{C})$, 于是存在子序列 $(m_i)_{i\geqslant 1}$ 和 $(n_i)_{i\geqslant 1}$ 使得 $\mathrm{Mat}_{k_{m_i}}(\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{Mat}_{\ell_{n_i}}(\mathbb{C})$ 的子代数同构, 而 $\mathrm{Mat}_{\ell_{n_i}}(\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{Mat}_{k_{m_{i+1}}}(\mathbb{C})$ 的子代数同构. 由此得到 $k_{m_i} \mid \ell_{n_i} \mid k_{m_{i+1}} \mid \cdots$, 这即 $\delta(A) = \delta(B)$.

充分性. 若 $\delta(A) = \delta(B)$, 则存在子序列 $(m_i)_{i\geqslant 1}$ 和 $(n_i)_{i\geqslant 1}$ 使得 $k_{m_i} \mid \ell_{n_i} \mid k_{m_{i+1}} \mid \cdots$. 不失一般性, 不妨设 $(m_i)_{i\geqslant 1} = (n_i)_{i\geqslant 1} = (i)_{i\geqslant 1}$, 并记 α_n 和 β_n 分别是嵌入, 它们分别确定 φ_i 和 ψ_i 使得

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"'] & \cdots \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[ur, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[ur, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

交换. 这即 $A \cong B$. □

推论 5.11.16 UHF 代数都是单的.

证明 这因 UHF 代数的 Bratteli 图每一层都只有一个节点, 因此其定向遗传子图只有空图和其 Bratteli 图本身. □

对超自然数 $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p}$, 记

$$Q(n) = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{Z}, y = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{m_p}, m_p \leqslant n_p \right\}.$$

它是 $\mathbb{Q}$ 的子群. 超自然数的乘法定义为 $nm := \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p+m_p}$. 注意到自然数也可以看作是超自然数, 因此自然数与超自然数的乘积也可以如此定义.

命题 5.11.17 设 $G \leqslant (\mathbb{Q}, +)$ 是一个包含 1 的子群, 则存在超自然数 n 使得 $G = Q(n)$.

证明 对素数 p, 取

$$n_p = \sup\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : p^{-k} \in G\right\} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}.$$

再取 $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p}$, 则对 $t = x/y \in \mathbb{Q}, t \neq 0, \gcd(x, y) = 1$. 记 y 的质因数分解为 $y = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{m_p}$, 再取 $y_p = yp^{-m_p}$. 由 Bézout 定理可知存在 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 使得 $1 = ax + by$, 故

$$\frac{1}{p^{m_p}} = \frac{y_p}{y} = \frac{y_p(ax + by)}{y} = y_p(at + b).$$

记 c_p 是使得 $1 = \sum_{p\in\mathbb{P}} c_p y_p$ 的正整数, 则

$$t = \frac{x}{y} = \frac{x\sum_{p\in\mathbb{P}} c_p y_p}{y} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{xc_p}{p^{m_p}}.$$

因此

$$t \in G \Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\left(\frac{1}{p^{m_p}} \in G\right) \Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\,(m_p \leqslant n_p) \Longleftrightarrow t \in Q(n).$$

于是 $G = Q(n)$. □

命题 5.11.18 $Q(n) \cong Q(n')$ 当且仅当存在正整数 m, m' 使得 $mn = mn'$, 特别地, 若同构 $\alpha : Q(n) \to Q(n')$ 还使得 $\alpha(1) = 1$, 则 $n = n'$, 反之亦然.

证明 先证后一断言, 设 $\alpha : Q(n) \to Q(n')$ 使得 $\alpha(1) = 1$, 则对任意 $t \in Q(n)$ 都有 $\alpha(t) = t$. 这即 $Q(n) = Q(n'), \alpha = \mathrm{id}$. 反之, 若 $n = n'$, 则 n_p 可以通过

$$n_p = \sup\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : p^{-k} \in G\right\} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}.$$

确定 $Q(n)$. 从而 $Q(n) = Q(n')$.

下面设 $\alpha : Q(n) \to Q(n')$ 是同构, 可设 $Q(1) > 0$(否则以 $-\alpha$ 代 α). 存在正整数 m, m' 使得 $Q(m) = m'$. 以下的复合给出使得 $\beta(1) = 1$ 的同构

$$\beta : Q(nm) \xrightarrow{m} Q(n) \xrightarrow{\alpha} Q(n') \xrightarrow{1/m'} Q(n'm').$$

于是 $nm = n'm'$.

反之, 若 $nm = n'm'$, 则

$$\alpha : Q(n) \xrightarrow{1/m} Q(nm) \xrightarrow{\mathrm{id}} Q(n'm') \xrightarrow{m'} Q(n')$$

确定了 $Q(n)$ 到 $Q(n')$ 的同构. □

定理 5.11.19 (UHF 代数的 K_0 群) 设 A 是 UHF 代数, 与其相关的超自然数为 $n = \delta(A)$, 则 $K_0(A) = Q(n)$. 且同构 $\alpha : K_0(A) \to Q(n)$ 使得 $\alpha([1]) = 1$.

证明 易知 $Q(n) = \bigcup_{n\geqslant 1} k_i^{-1}\mathbb{Z}$. 记 $\tau_j := k_j^{-1}\,\mathrm{tr}$ 是 $\mathrm{Mat}_{k_j}(\mathbb{C})$ 上规范化的迹, 这里 tr 是典范迹. 则 $K_0(\tau_j) : K_0(\mathrm{Mat}_{k_j}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} k_j^{-1}\mathbb{Z}$ 是同构. 又因为 $\tau_{j+1}\varphi_j = \tau_j$, 故 $\forall j(K_0(\tau_{j+1})K_0(\varphi) = K_0(\tau_j))$, 从而下图交换.

$$\begin{tikzcd}
 & K_0(\mathrm{Mat}_{k_j}(\mathbb{C})) \arrow[dl, "K_0(\mu_j)"'] \arrow[d, "\beta_j"] \arrow[dr, "K_0(\tau_j)"] & \\
K_0(A) \arrow[r, "\gamma"] & \varinjlim K_0(\mathrm{Mat}_{k_j}(\mathbb{C})) \arrow[r, "\beta"] & Q(n)
\end{tikzcd}$$

取 $\alpha = \beta\gamma$ 就有 $\alpha([1]) = K_0(\tau_1)([1_{k_1}]) = 1$, 且 α 是同构. □

索引