Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL

E203 – Circuitos Elétricos III

Solução de circuitos no domínio do tempo

Algumas definições

Corrente elétrica

A corrente elétrica é a taxa de variação de carga (q) por unidade de tempo, que passa por uma área em ponto do circuito, dada em ampère (A). É um movimento organizado (orientado) de cargas por um percurso definido. Assim, a corrente elétrica é dada por

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

A carga de um elétron (negativa) é $1{,}602\times10^{-19}$ coulombs (C). Então, 1C é a carga de $6{,}242\times10^{18}$ elétrons. Portanto, 1A = 1C/s.

A carga pode ser encontrada a partir da corrente elétrica da seguinte forma

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + q(t_0)$$

onde $q(t_0)$ é a carga em $t = t_0$. Normalmente, adota-se $t_0 = 0$.

Tensão

A tensão é o trabalho necessário para deslocar uma unidade de carga entre dois pontos do circuito, dada em volts (V). Para realizar o trabalho, uma energia (*w*) é necessária. O trabalho sobre a carga é realizado por uma força eletromotriz (FEM) externa.

Assim, a tensão é dada por

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq}$$

Então, 1V = 1J/C. Uma carga de 1C fornece uma energia de 1 joule (J) em uma diferença de potencial (ddp) de 1V entre dois pontos.

Potência e energia

A potência é a taxa com a qual a energia é fornecida (ou absorvida) por unidade de tempo, dada em watts (W), sendo expressa por

$$p(t)=\frac{dw(t)}{dt}$$

Então, 1W = 1J/s. Também,

$$p(t)=\frac{dw(t)}{dt}=\frac{dw(t)}{dt}\frac{dq}{dq}=\underbrace{\frac{dw(t)}{dq}}_{v(t)}\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{i(t)}=v(t)i(t)$$

Se 1V = 1J/C e 1A = 1C/s, então 1V×1A = 1J/s = 1W.

A potência absorvida por um componente (ou recebida pelo componente ou dissipada pelo componente) é aquela em que a corrente entra no terminal positivo da tensão no componente.

A potência fornecida por um componente é aquela em que a corrente entra no terminal negativo da tensão no componente.

A energia é a capacidade de realizar trabalho. A energia absorvida por um componente é

$$dw(t) = p(t)dt \rightarrow \int dw(t) = \int p(t)dt \rightarrow w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt$$

Considerando um instante inicial t_0, se o componente recebe potência para $t \geq t_0$ e se $t_0 = 0$, tem-se

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)dt = \int_{0}^{t} p(t)dt$$

Circuitos e componentes passivos e ativos

Componente passivo: absorve energia do circuito (resistor, indutor, capacitor).

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt = \int_{-\infty}^{t} v(t)i(t)dt \geq 0$$

Componente ativo: fornece energia ao circuito (baterias, geradores, transistores).

Se em algum instante $w(t) < 0$.

Elementos e circuitos lineares

Linearidade é a propriedade de um elemento descrever uma relação linear entre causa e efeito.

Um componente é linear se a relação entre o sinal de excitação (entrada) e o sinal de resposta (saída) satisfaz os princípios da superposição (aditividade) e da homogeneidade (mudança de escala).

Para a superposição, a resposta para a soma de entradas deve ser igual a soma das respostas de cada entrada aplicada separadamente.

Para a homogeneidade, se a entrada for multiplicada por uma constante, a saída deverá ser multiplicada pela mesma constante.

Um circuito é linear quando possui apenas elementos lineares (componentes lineares, fontes lineares dependentes e independentes, etc.). Assim, sua saída é linearmente relacionada (ou diretamente proporcional) à sua entrada.

Em um componente, considerar a corrente como o sinal de excitação e a tensão como o sinal de resposta, sendo relacionados por uma constante de proporcionalidade R, ou seja, $v = Ri$.

Superposição:

aplicando i_1: $v_1 = Ri_1$

aplicando i_2: $v_2 = Ri_2$

aplicando $i_1 + i_2$: $v = R(i_1 + i_2) = Ri_1 + Ri_2 = v_1 + v_2$

Homogeneidade:

fazendo ki: $R(ki) = k(Ri) = kv$

Satisfaz os princípios da superposição e da homogeneidade. Portanto, a relação é linear.

Considerar agora que uma resposta p seja dada por $p = i^2$.

Superposição:

aplicando i_1: $p_1 = i_1^2$

aplicando i_2: $p_2 = i_2^2$

aplicando $i_1 + i_2$: $p = (i_1 + i_2)^2 = i_1^2 + 2i_1i_2 + i_2^2 = p_1 + 2(p_1p_2)^{1/2} + p_2$

fazendo $p_1 + p_2$: $p = i_1^2 + i_2^2 = p_1 + p_2$

Não satisfaz o princípio da superposição, pois $(i_1 + i_2)^2 \neq i_1^2 + i_2^2$. Portanto, o comportamento é não-linear.

Resistor

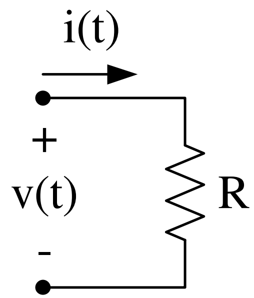
O resistor é um componente que possui uma propriedade física, conhecida como resistência (R), capaz de opor a passagem de corrente elétrica, com menor ou maior intensidade.

Para um circuito formado por uma bateria e um fio condutor, da lei de Ohm tem-se que

$$i(t) = \frac{A}{\rho L} v(t) \rightarrow R = \frac{\rho L}{A}$$

onde R é a resistência dada em Ω (constante de proporcionalidade), A é a área da seção transversal do fio (em m^2), ρ é a resistividade (em Ω.m), L é o comprimento do fio (em m) e $v(t)$ é a tensão (em V) entre os terminais. Então, $1\Omega = 1V/1A$.

Assim, tem-se que a tensão é diretamente proporcional à corrente,



$$v_R(t) = R i_R(t) \qquad i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} \qquad R = \frac{v_R(t)}{i_R(t)}$$

A potência fornecida ao resistor é

$$p_R(t) = v_R(t) i_R(t) = \begin{cases} \dfrac{v_R^2(t)}{R} \\ R i_R^2(t) \end{cases}$$

A energia absorvida (dissipada) pelo resistor é

$$w_R(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} v_R(t)\,i_R(t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{v_R^2(t)}{R}\,dt \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} R i_R^2(t)\,dt \end{cases}$$

Portanto, o resistor é um componente passivo, pois $w_R(t) \geq 0$.

Uma outra forma de expressar a lei de Ohm é

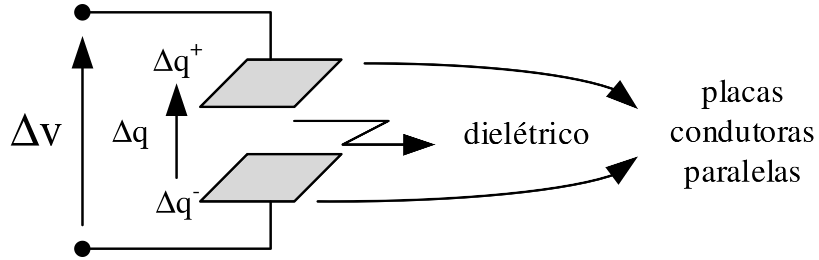
$$i(t) = Gv(t)$$

onde $G = 1/R$ é a condutância, dada em siemens (S), que é a capacidade do componente conduzir corrente elétrica. Então,

$$p(t) = v(t)\,i(t) = \begin{cases} Gv^2(t) \\ \dfrac{i^2(t)}{G} \end{cases}$$

Capacitor

O capacitor é um componente que pode ser modelado por duas placas condutoras separadas por uma distância (*d*) com um material isolante(dielétrico) entre elas.

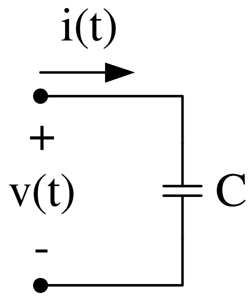


Uma tensão (v_C) aplicada aos seus terminais fornece a energia necessária para movimentar uma carga (*q*) da placa negativa para a placa positiva. A carga (*q*) do capacitor é proporcional à tensão (v_C) aplicada, então

$$q(t) = Cv_C(t) \rightarrow C = \frac{q(t)}{v_C(t)}$$

onde *C* é a capacitância (constante de proporcionalidade), dada em C/V e também chamada de farad (F).

A corrente no capacitor é



$$q(t) = Cv_C(t) \rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv_C(t)}{dt} \rightarrow i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

e a tensão no capacitor é

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(t)\,dt + v_C(t_0)$$

onde $v_C(t_0) = q(t_0)/C$ é a tensão no capacitor no instante t_0, que é a condição inicial. Normalmente, adota-se $t_0 = 0$.

Para uma tensão constante aplicada, a corrente pelo capacitor é nula, se comportando como um circuito aberto.

A potência no capacitor é

$$p_C(t) = v_C(t) i_C(t) = C v_C(t) \frac{dv_C(t)}{dt}$$

A energia absorvida (armazenada) no capacitor, considerando $v_C(-\infty) = 0$V, é

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} v_C(t) i_C(t) dt = \frac{C v_C^2(t)}{2}$$

Portanto, o capacitor é um componente passivo, pois $w_C(t) \geq 0$.

O capacitor ideal armazena energia, não dissipa, podendo ser recuperada.

O capacitor possui capacidade de armazenar energia na forma de um campo elétrico (tensão), gerado pela diferença de potencial entre as placas condutoras.

Os capacitores reais possuem perdas que podem ser modeladas por resistências, sendo uma em série (baixo valor) com o capacitor ideal, devido às placas condutoras, e outra em paralelo (alto valor) com o capacitor ideal, devido ao dielétrico.

A tensão em um capacitor não pode variar instantaneamente, pois resultaria em uma corrente infinita em um intervalo de tempo nulo. Pela lei da conservação de carga, a quantidade de carga em um ponto qualquer de um circuito não pode variar instantaneamente, ou seja, $q(t)$ deve ser uma função contínua. Assim, $v_C(t)$ também deve ser contínua. Portanto,

$$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$$

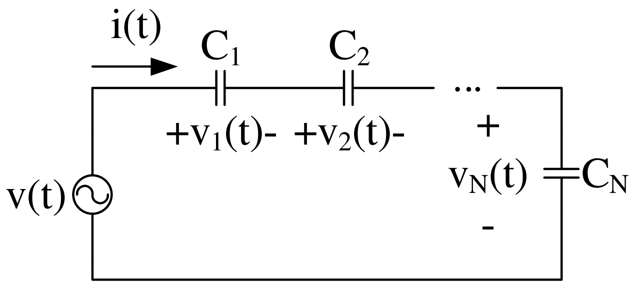
Por outro lado, a corrente no capacitor pode variar instantaneamente.

O valor da capacitância é diretamente proporcional à área entre as placas (em m^2) e inversamente proporcional à distância entre elas (em m) da forma

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

onde ε é a permissividade elétrica (ou constante dielétrica) dada em F/m. É um parâmetro que descreve a quantidade de energia que um material isolante é capaz de armazenar por unidade de volume e por unidade de diferença de potencial. No vácuo, $\varepsilon_o = 10^{-9}/36\pi$ F/m.

Associação em série:

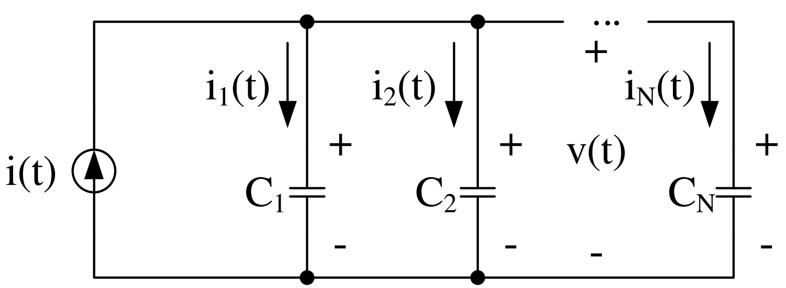


$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)+\cdots+v_N(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt+v(t_0)$$

onde $v(t_0)=v_1(t_0)+v_2(t_0)+\cdots+v_N(t_0)$

E a capacitância equivalente é dada por: $\dfrac{1}{C_{eq}}=\dfrac{1}{C_n}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}+\cdots\dfrac{1}{C_N}$

Associação em paralelo:

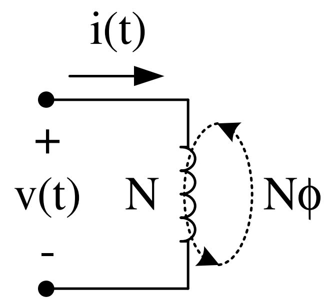


$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)+\cdots+i_N(t)=\sum_{n=1}^{N}C_n\frac{dv(t)}{dt}$$

E a capacitância equivalente é dada por: $C_{eq}=C_n=C_1+C_2+\cdots C_N$

Indutor

O indutor é um componente que pode ser modelado como um fio condutor enrolado na forma de uma bobina com *N* espiras.



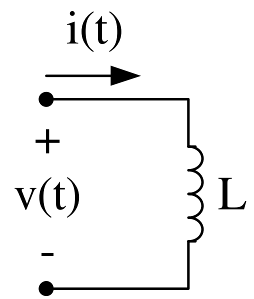
Uma corrente circulando por um fio produz um campo magnético, sendo linearmente relacionados. O fluxo magnético total ($N\phi$), dado em weber (Wb), que envolve o indutor, é proporcional à corrente que passa por ele. Depende do número de espiras (N) e do fluxo magnético (ϕ) que envolve uma espira. Assim,

$$N\phi(t) = Li_L(t)$$

onde L é a indutância (constante de proporcionalidade), dada em Wb/A e também chamada de henry (H).

De acordo com a lei de Faraday, a variação do fluxo (ϕ) com o tempo dá origem a uma tensão induzida em cada espira, que é proporcional à derivada do fluxo. Então,

$$v_L(t) = N\frac{d\phi(t)}{dt} \rightarrow v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$



Portanto, uma tensão (v_L) aplicada entre os terminais da bobina é proporcional à taxa de variação da corrente (i_L) que passa por ela por unidade de tempo. A corrente no indutor é

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)\,dt + i_L(t_0)$$

onde $i_L(t_0)$ é a corrente no indutor no instante t_0, que é a condição inicial. Normalmente, adota-se $t_0 = 0$.

Para uma corrente constante pelo indutor, a tensão é nula, se comportando como um curto-circuito.

A potência no indutor é

$$p_L(t) = v_L(t) i_L(t) = L i_L(t) \frac{di_L(t)}{dt}$$

A energia absorvida (armazenada) no indutor, considerando $i_L(-\infty) = 0A$, é

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} v_L(t) i_L(t) dt = \frac{L i_L^2(t)}{2}$$

Portanto, o indutor é um componente passivo, pois $w_L(t) \geq 0$.

O indutor ideal armazena energia, não dissipa, podendo ser recuperada.

O indutor possui capacidade de armazenar energia na forma de um campo magnético (corrente), gerado pela corrente que passa pelo fio condutor.

Os indutores reais possuem perdas que podem ser modeladas por resistências, sendo em série (baixo valor) com o indutor ideal, devido à resistência do fio condutor.

A corrente em um indutor não pode variar instantaneamente, pois resultaria em uma tensão infinita em um intervalo de tempo nulo. Pela lei da conservação de fluxo magnético, o fluxo magnético não pode variar instantaneamente, ou seja, $\phi(t)$ deve ser uma função contínua. Assim, $i_L(t)$ também deve ser contínua. Portanto,

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)$$

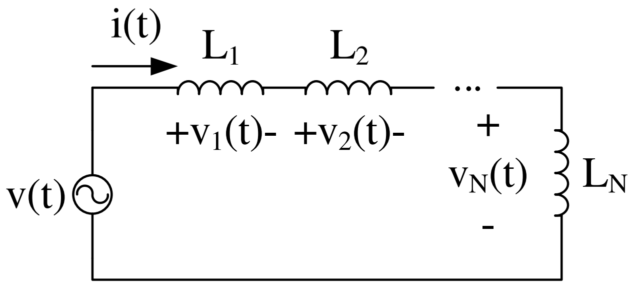
Por outro lado, a tensão no indutor pode variar instantaneamente.

A indutância de uma bobina, na forma de um solenoide, é,

$$L = \frac{\mu_o N^2 A}{l + 0{,}45d}$$

onde N é o número de espiras, A é a área da seção reta do núcleo (em m^2), l é o comprimento da bobina (em m), d é o diâmetro do núcleo (em m) e μ_o é a permeabilidade magnética do vácuo ($= 4\pi\times10^{-7}$ H/m). A permeabilidade é um parâmetro que quantifica a concentração de fluxo magnético, aumentando a indutância da bobina.

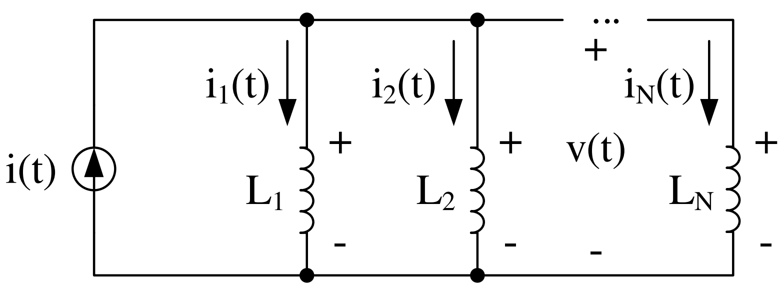
Associação em série:



$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_N(t) = \sum_{n=1}^{N} L_n \frac{di(t)}{dt}$$

E a indutância equivalente é dada por: $L_{eq} = L_n = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$

Associação em paralelo:



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)$$

onde $i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0)$

E a indutância equivalente é dada por: $\dfrac{1}{L_{eq}} = \dfrac{1}{L_n} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \cdots + \dfrac{1}{L_N}$

Exercícios:

1) Utilizando as leis de Kirchhoff de tensão e de corrente e a associação série de capacitores, demostrar que:

a) $$v(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt+v(t_0)$$

b) $$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots\frac{1}{C_N}$$

2) Utilizando as leis de Kirchhoff de tensão e de corrente e a associação paralela de capacitores, demostrar que:

a) $$i(t)=\sum_{n=1}^{N}C_n\frac{dv(t)}{dt}$$

b) $$C_{eq}=C_1+C_2+\cdots C_N$$

3) Utilizando as leis de Kirchhoff de tensão e de corrente e a associação série de indutores, demostrar que:

a) $$v(t)=\sum_{n=1}^{N}L_n\frac{di(t)}{dt}$$

b) $$L_{eq}=L_1+L_2+\cdots+L_N$$

4) Utilizando as leis de Kirchhoff de tensão e de corrente e a associação paralela de indutores, demostrar que:

a) $$i(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt+i(t_0)$$

b) $$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_N}$$

5) Demonstrar que a energia armazenada no capacitor é dada por:

a) $w_C(t) = \dfrac{Cv_C^2(t)}{2}$ b) $w_C(t) = \dfrac{q^2(t)}{2C}$

6) Demonstrar que a energia armazenada no indutor é dada por:

a) $w_L(t) = \dfrac{Li_L^2(t)}{2}$ b) $w_L(t) = \dfrac{\left[N\phi(t)\right]^2}{2L}$

Solução de circuitos RC e RL no domínio do tempo

Equação diferencial representativa para um sistema linear de ordem n, considerando $x(t)$ o sinal de entrada (excitação) e $y(t)$ o sinal de saída (resposta), é:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

A solução de circuitos RC e RL de 1ª ordem no domínio do tempo, para tensão ou para corrente, considerando um sinal de entrada constante $x(t) = A$, é dada por:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = A$$

Resolvendo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = A \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = A - ay(t) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = a\left[\frac{A}{a} - y(t)\right] \rightarrow \frac{dy(t)}{\frac{A}{a} - y(t)} = adt \rightarrow \frac{dy(t)}{y(t) - \frac{A}{a}} = -adt \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{dy(t)}{y(t) - \frac{A}{a}} = -a\int dt + B \rightarrow \ln\left[y(t) - \frac{A}{a}\right] = -at + B \rightarrow e^{\ln\left[y(t) - \frac{A}{a}\right]} = e^{-at+B} \rightarrow y(t) - \frac{A}{a} = e^{-at}e^{B} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{A}{a} + e^{B}e^{-at} \rightarrow y(t) = K_1 + K_2 e^{-at} \qquad \text{onde:} \quad K_1 = \frac{A}{a} \qquad K_2 = e^{B}$$

Para $t \to \infty$:

$$y(\infty) = K_1 = \frac{A}{a}$$

Para $t = 0$:

$$y(0) = K_1 + K_2 \to K_2 = y(0) - K_1 = y(0) - y(\infty)$$

Então, a resposta pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y(t) = y(\infty) + \left[y(0) - y(\infty) \right] e^{-at}$$

Definindo a constante de tempo como sendo

$$\tau = \frac{1}{a}$$

a resposta fica:

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-at} = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} = A\tau + K_2 e^{-t/\tau}$$

Um teorema fundamental das equações diferenciais afirma que:

se $y_p(t)$ é solução de $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = A$ e se $y_h(t)$ é solução de $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = 0$ então $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

onde $y(t)$ é a resposta completa
$y_p(t)$ é a resposta particular, ou forçada, ou permanente (estacionária)
$y_h(t)$ é a resposta homogênea (complementar), ou natural, ou transitória

Sabendo que a e A são constantes e para que a solução de $y_p(t)$ seja verdadeira, tem-se que $y_p(t)$ = constante = K_1.
Então,

$$\underbrace{\frac{dy_p(t)}{dt}}_{=0} + ay_p(t) = A \rightarrow y_p(t) = \frac{A}{a} = K_1$$

Para a solução de $y_h(t)$ tem-se que

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \rightarrow \frac{dy_h(t)}{dt} = -ay_h(t) \rightarrow \frac{dy_h(t)}{y_h(t)} = -adt \rightarrow \int \frac{dy_h(t)}{y_h(t)} = -a\int dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left[y_h(t)\right] = -at + B \rightarrow e^{\ln\left[y_h(t)\right]} = e^{-at+B} \rightarrow y_h(t) = e^{-at}e^{B} \rightarrow y_h(t) = K_2 e^{-at}$$

Então $$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \underbrace{K_1}_{\text{permanente}} + \underbrace{K_2 e^{-at}}_{\text{transitória}}$$

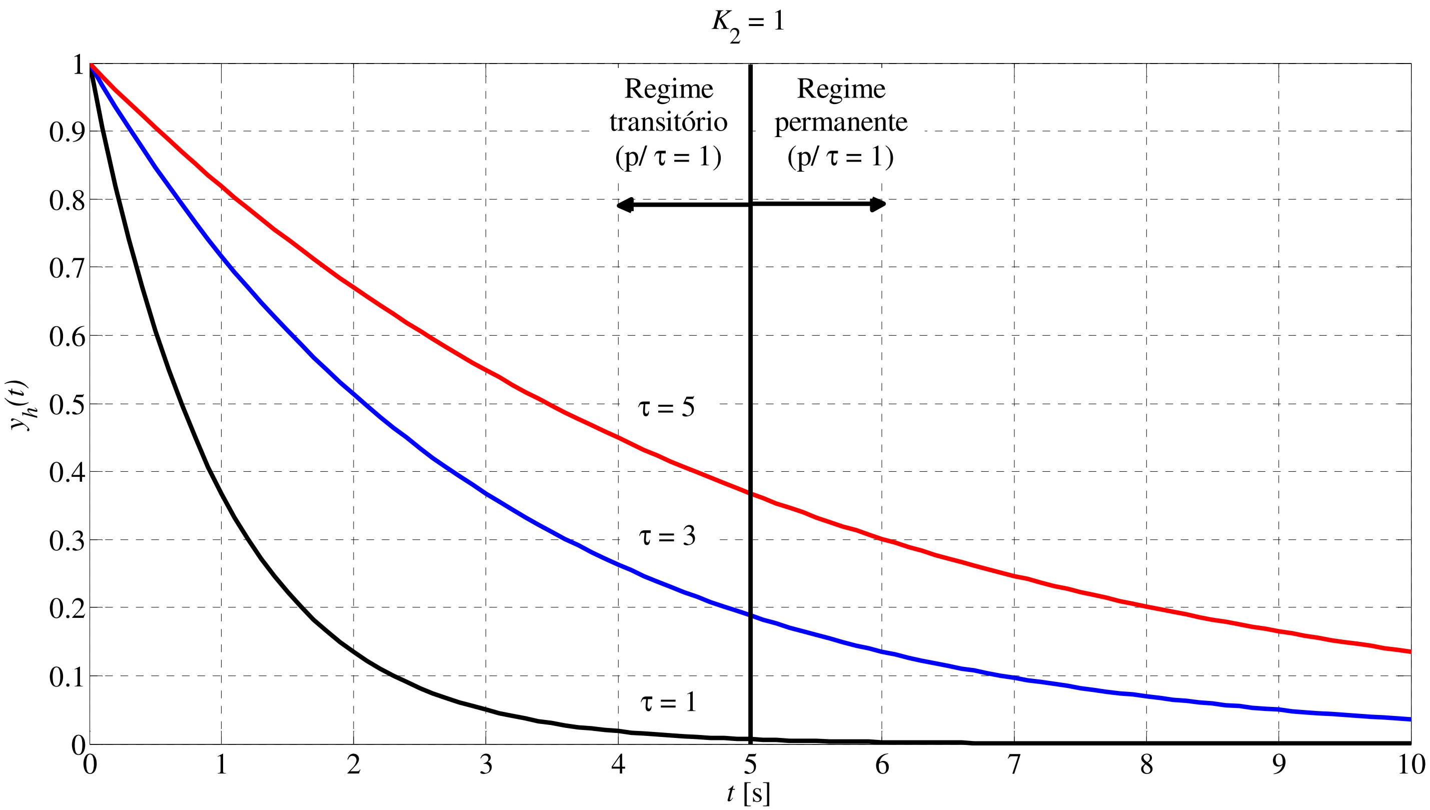
Observações:

1) Resposta completa: $y(t) = K_1 + K_2 e^{-at}$
p/ $t = \infty$s: $y(\infty) = K_1$
p/ $t = 0$s: $y(0) = K_1 + K_2$

2) Resposta homogênea (para $a > 0$): $y_h(t) = K_2 e^{-at} = K_2 e^{-t/\tau}$

Considerando $\tau = 1$s:

p/ $t = 0\text{s} \rightarrow y_h(0) = K_2$
p/ $t = 1\tau\text{s} \rightarrow y_h(1\tau) = 0{,}3678K_2 \rightarrow 36{,}78\%$
p/ $t = 2\tau\text{s} \rightarrow y_h(2\tau) = 0{,}1353K_2 \rightarrow 13{,}53\%$
p/ $t = 3\tau\text{s} \rightarrow y_h(3\tau) = 0{,}0497K_2 \rightarrow 4{,}97\%$
p/ $t = 4\tau\text{s} \rightarrow y_h(4\tau) = 0{,}0183K_2 \rightarrow 1{,}83\%$
p/ $t = 5\tau\text{s} \rightarrow y_h(5\tau) = 0{,}0067K_2 \rightarrow 0{,}67\%$
p/ $t = \infty\tau\text{s} \rightarrow y_h(\infty\tau) = 0$



$\tau \uparrow$: resposta mais lenta
$\tau \downarrow$: resposta mais rápida

3)

Para $t \to \infty$s: $f = 1/t \to 0$Hz (c.c.)

Capacitor: $i_C(t) = \dfrac{dv_C(t)}{dt} = 0$ (circuito aberto)

Indutor: $v_L(t) = \dfrac{di_L(t)}{dt} = 0$ (curto-circuito)

Para $t = 0$s: $f = 1/t \to \infty$Hz (c.a.)

Capacitor: $i_C(t) = \dfrac{dv_C(t)}{dt} \neq 0$

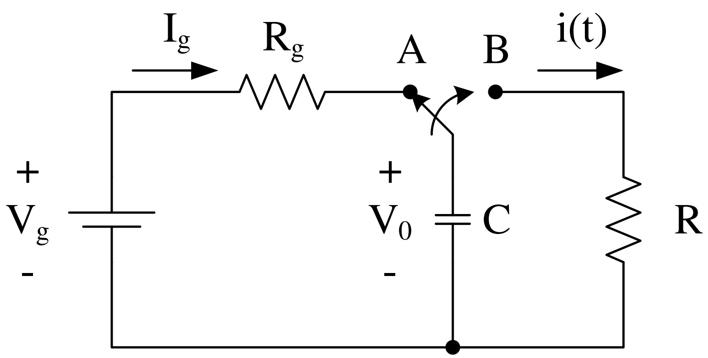
Indutor: $v_L(t) = \dfrac{di_L(t)}{dt} \neq 0$

4)

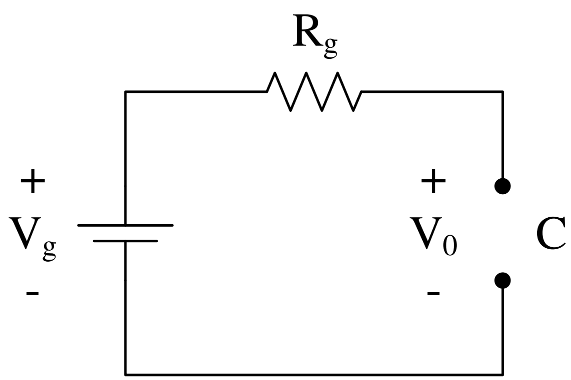
Indutor: $i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)$

Capacitor: $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$

Circuito RC sem fonte



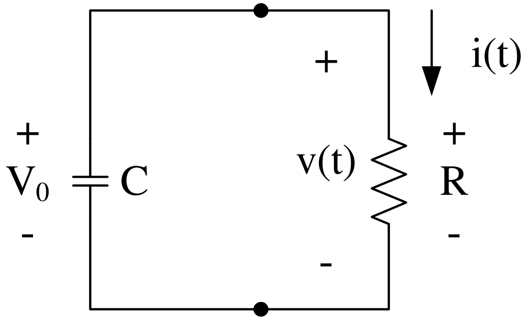
- Chave em A (–∞s a 0s): Considerar que o circuito esteja nesta posição por muito tempo, ou seja, tenha atingido o regime permanente. Portanto, V_g atingiu um valor constante. Assim, o capacitor comporta-se como um circuito aberto, não circulando corrente pela malha.



O capacitor irá se carregar com o valor da fonte, então:

$V_0 = V_g = v_C(0)$ (condição inicial)

- Chave em B (0s a ∞s): A chave é comutada para B em t = 0s e o circuito fica:



$$v(t)+v_c(t)=0 \rightarrow Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt=0 \quad \left(\times\frac{d}{dt}\right)$$

$$R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=0 \quad (\div R) \rightarrow \frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{RC}i(t)=0$$

Solução: $i(t)=K_1+K_2e^{-at}=K_1+K_2e^{-t/\tau}$

. $a = 1/RC \rightarrow \tau = 1/a = RC$ (constante de tempo)

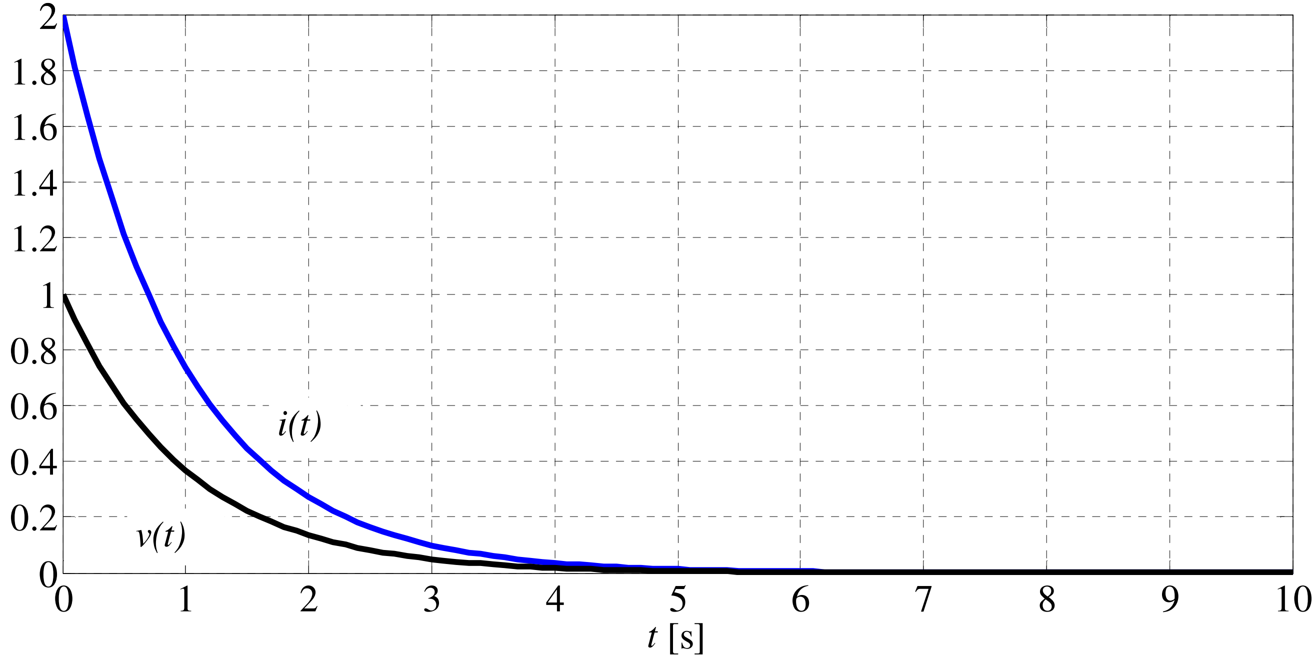
. $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = V_0$

. $i(\infty) = K_1 \rightarrow i(\infty) = 0\text{A} \rightarrow K_1 = 0$
(capacitor é circuito aberto
em regime permanente)

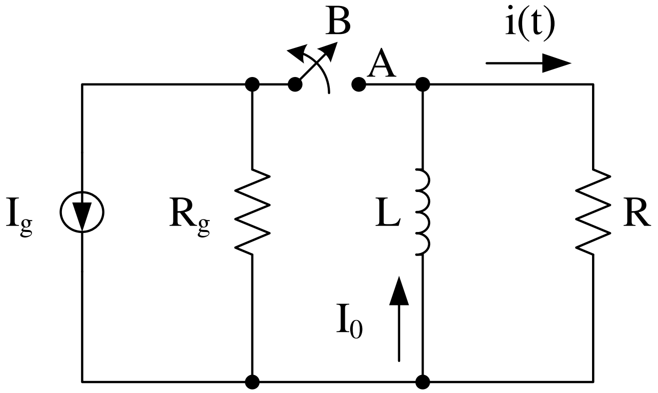
. $i(0) = K_1 + K_2 = K_2 \rightarrow i(0) = v(0)/R = V_0/R$
$K_2 = V_0/R$

. $i(t) = (V_0/R)e^{-t/RC}$ A p/ t > 0s
. $v(t) = V_0e^{-t/RC}$ V p/ t > 0s

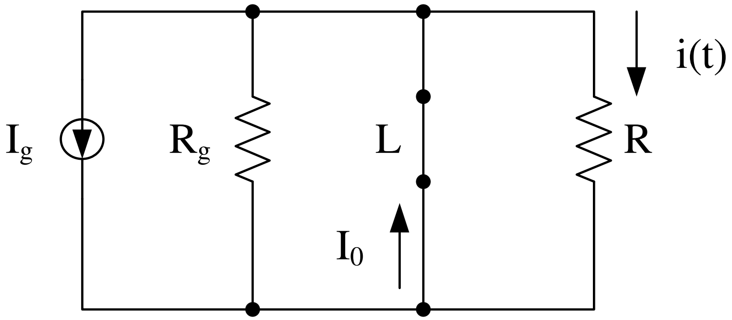
V_0 = 1V , R = 0,5Ω , C = 2F



Circuito RL sem fonte



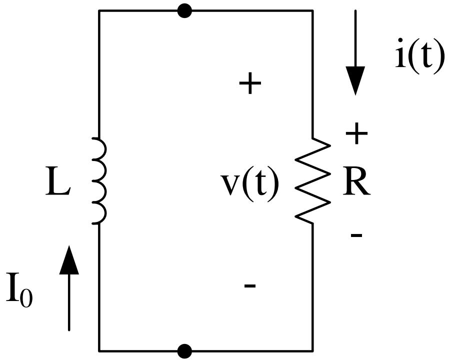
- Chave em A ($-\infty$s a 0s): Considerar que o circuito esteja nesta posição por muito tempo, ou seja, tenha atingido o regime permanente. Portanto, I_g atingiu um valor constante. Assim, o indutor comporta-se como um curto-circuito e toda a corrente irá circular por ele.



O indutor carrega-se com o valor da fonte, então:

$I_0 = I_g = i_L(0)$ (condição inicial)

- Chave em B (0s a ∞s): A chave é aberta em $t = 0$s e o circuito fica:



$$v(t) + v_L(t) = 0 \rightarrow Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (\div L)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

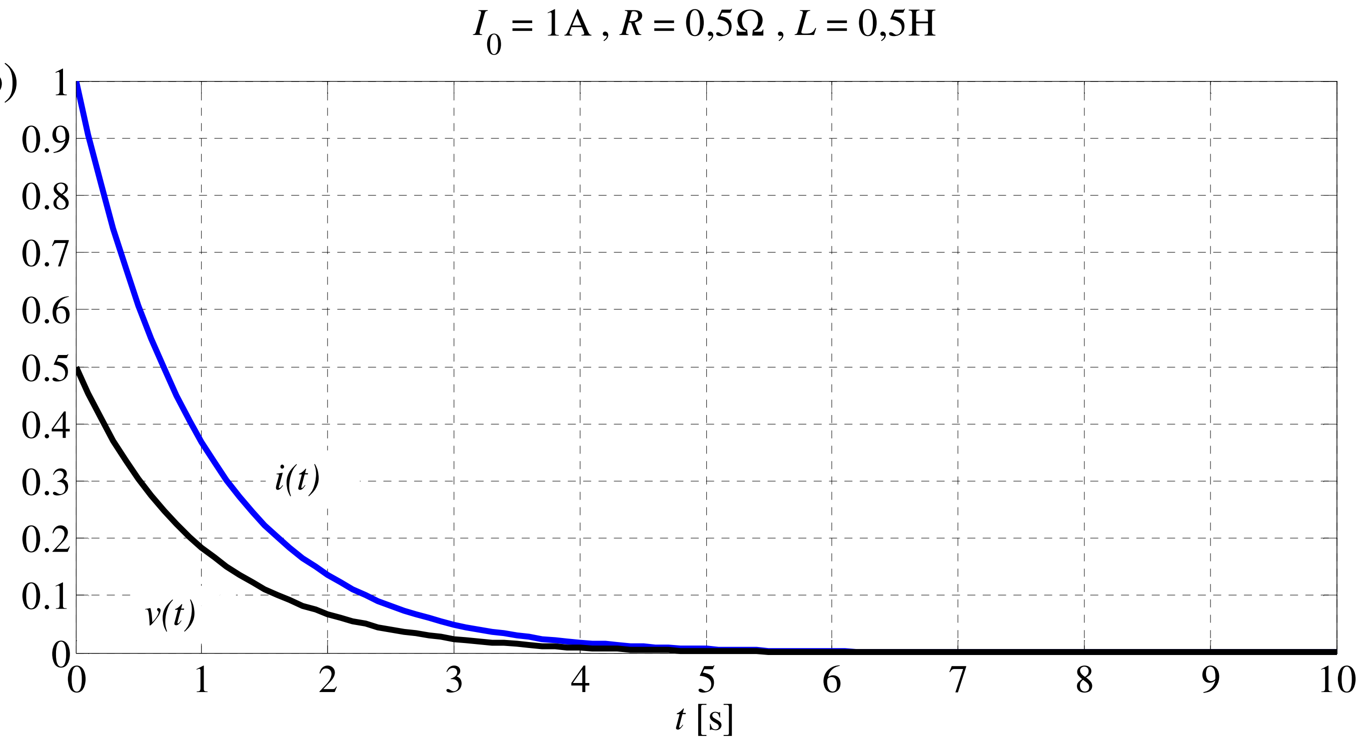
Solução: $i(t) = K_1 + K_2 e^{-at} = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$

. $a = R/L \rightarrow \tau = 1/a = L/R$ (constante de tempo)

. $i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = I_0$

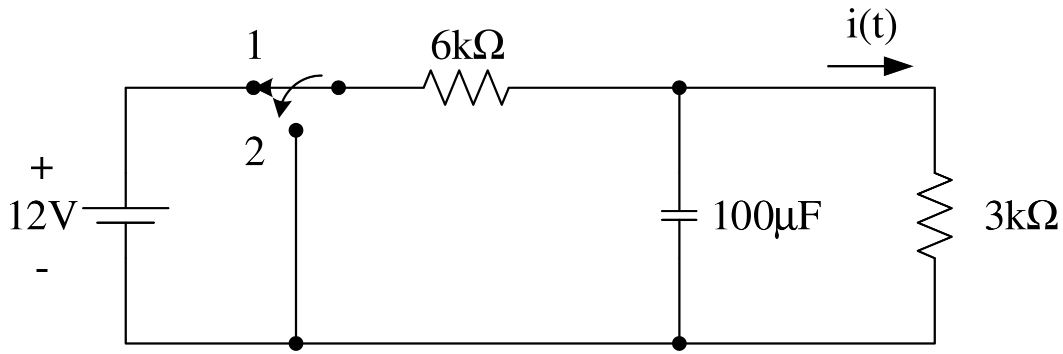
. $i(\infty) = K_1 \rightarrow i(\infty) = 0\text{A} \rightarrow K_1 = 0$
(indutor é curto-circuito
em regime permanente)
. $i(0) = K_1 + K_2 = K_2 \rightarrow i(0) = I_0$
$K_2 = I_0$

. $i(t) = I_0 e^{-tR/L}$ A p/ $t > 0$s
. $v(t) = RI_0 e^{-tR/L}$ V p/ $t > 0$s

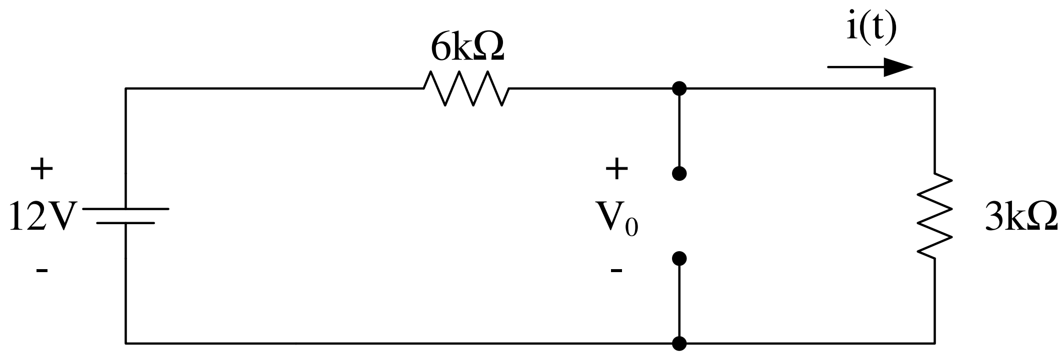


Exemplo

Assumir que a chave ficou na posição 1 por muito tempo e no instante t = 0s a chave é alterada para a posição 2. Calcular $i(t)$ para t > 0s.



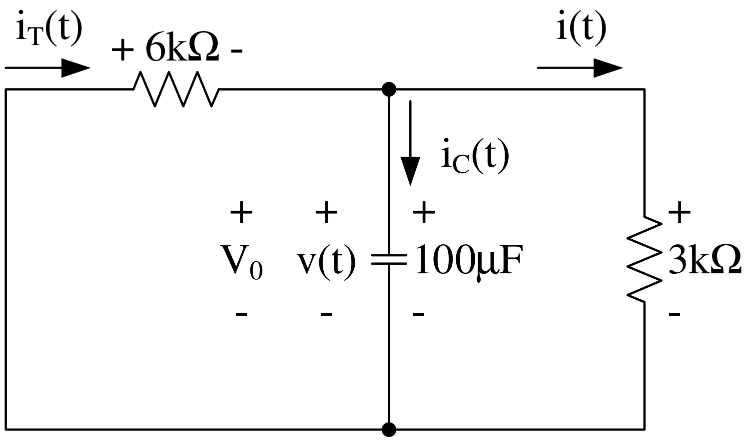
. Chave na posição 1 (–∞s a 0s) tem-se que o capacitor é um circuito aberto. Então



$$V_0 = \frac{3\text{k}}{3\text{k}+6\text{k}}12 = 4\text{V}$$

(condição inicial)

. Chave na posição 2 (0s a ∞s). As correntes $i_T(t)$ e $i_C(t)$ foram adotadas com os sentidos indicados, assim como a tensão $v(t)$ com a polaridade indicada.



$$i_T(t)=i_C(t)+i(t)\rightarrow -\frac{v(t)}{6k}=100\mu\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{3k}$$

$$100\mu\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{3k}+\frac{v(t)}{6k}=0\rightarrow 100\mu\frac{dv(t)}{dt}+\left(\frac{1}{3k}+\frac{1}{6k}\right)v(t)=0$$

$$100\mu\frac{dv(t)}{dt}+500\mu v(t)=0\quad(\div 100\mu)\rightarrow\frac{dv(t)}{dt}+5v(t)=0$$

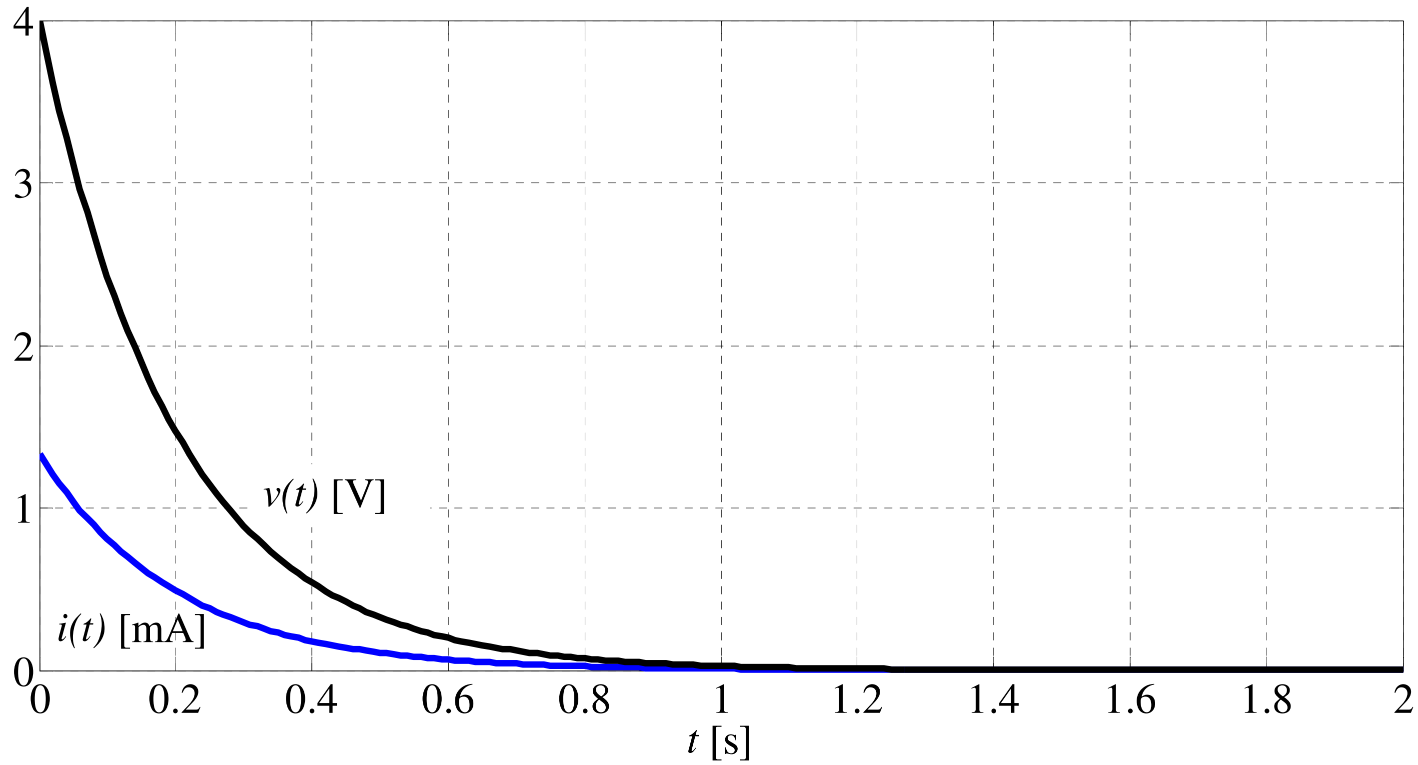
$. v(t)=K_1+K_2e^{-t/\tau}$

$. a=5\therefore\tau=0,2$

$. v_C(0^-)=v_C(0)=v_C(0^+)=V_0=4V=v(0)$

$. v(\infty)=K_1\rightarrow v(\infty)=0V\therefore K_1=0$

$. v(0)=K_1+K_2=K_2\therefore K_2=4$

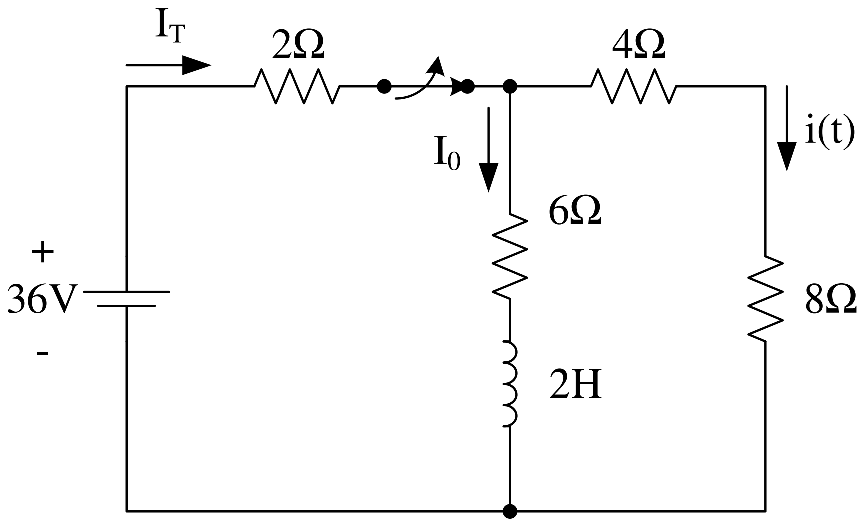


$$. v(t)=4e^{-5t}\rightarrow i(t)=\frac{v(t)}{3k}=1,33e^{-5t}\text{mA}$$

Exercício

Assumir que a chave ficou fechada por muito tempo e no instante t = 0s a chave é aberta. Calcular $i(t)$ para t > 0s.

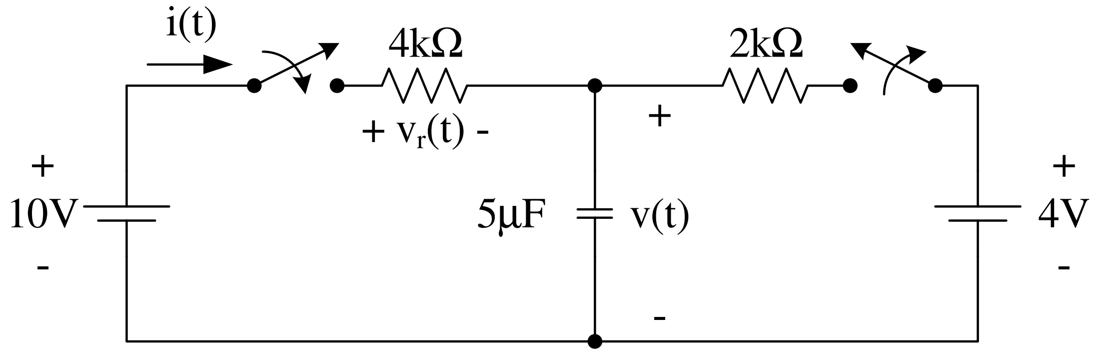
Resposta: $i(t) = -4e^{-9t}$A



Circuitos RC e RL com fontes constantes

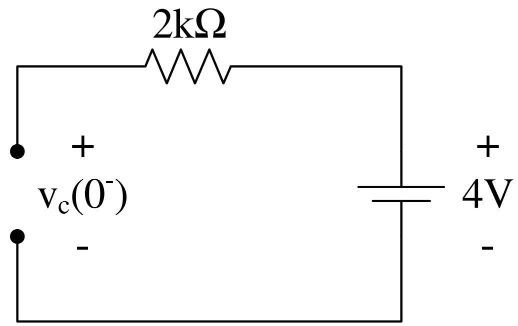
Exemplo

Calcular $i(t)$, $v(t)$ e $v_r(t)$ para $t > 0$s. Assumir que a chave ficou em sua posição inicial por muito tempo e que no instante $t = 0$s a chave é alterada de posição.



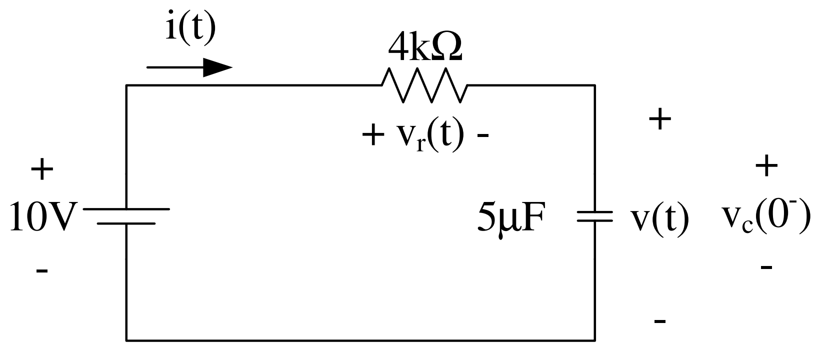
- Em $t = 0^{-}$s

Como o circuito está em regime permanente, o capacitor é um circuito aberto e não há corrente circulando. Portanto, a tensão da fonte aparece sobre os terminais do capacitor. Assim:



$v_c(0^{-}) = 4\text{V} \rightarrow$ condição inicial

- Para $t > 0$s



$$10 = v_r(t) + v(t) \rightarrow 10 = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \quad \left(\times\frac{d}{dt}\right)$$

$$0 = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) \quad (\div R) \rightarrow 0 = \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t)$$

$$0 = \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{4k.5\mu}i(t) \therefore \frac{di(t)}{dt} + 50i(t) = 0$$

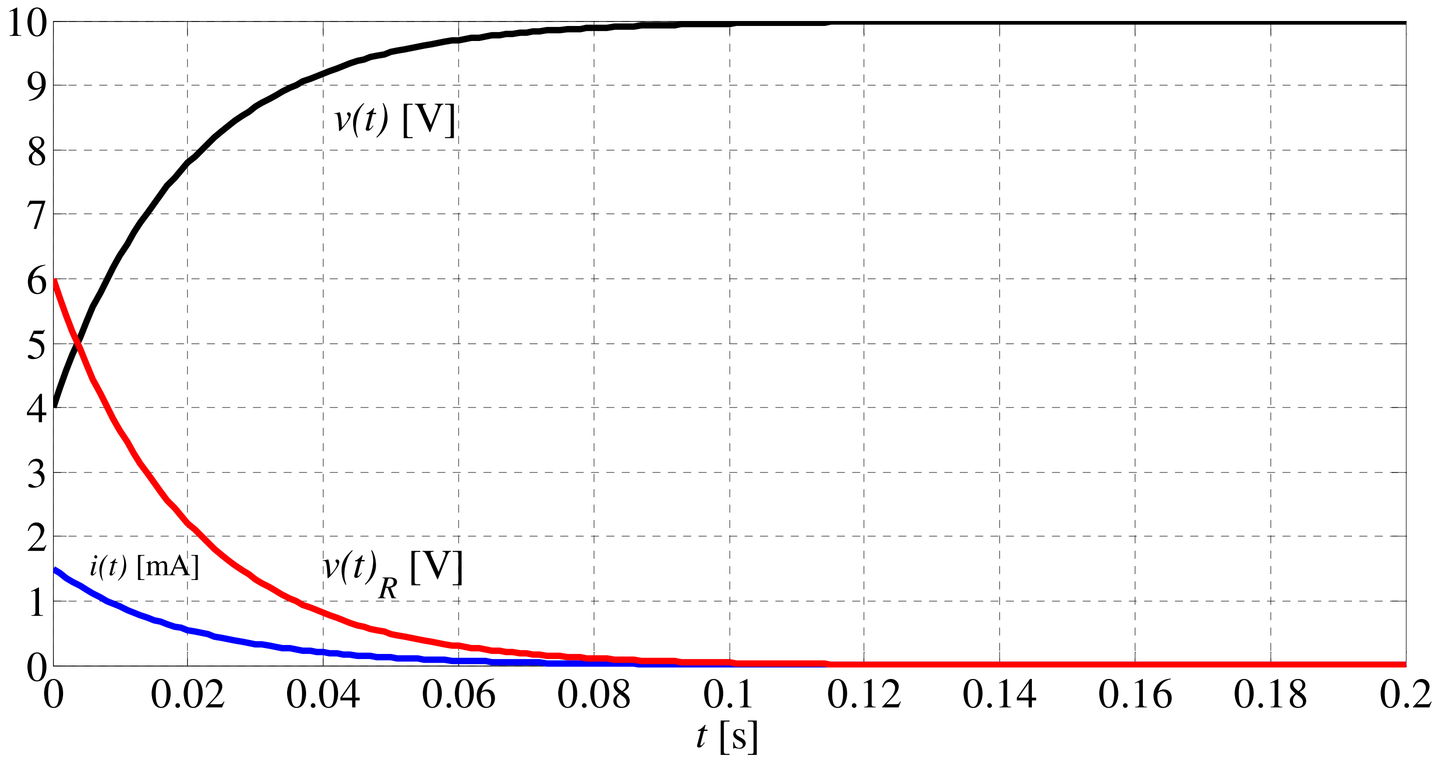
. $i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$

. $a = 50 \rightarrow \tau = 20$m

. $i(\infty) = K_1 \rightarrow i(\infty) = 0$A
$K_1 = 0$

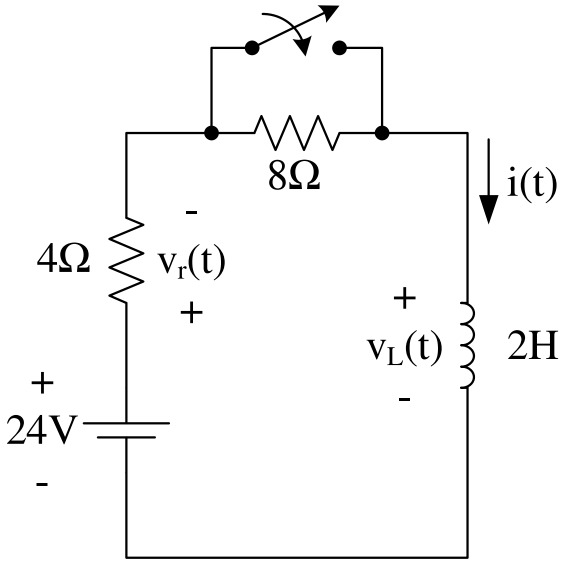
. $i(0) = K_1 + K_2 = K_2$
$i(0) = (10-4)/4\text{k} = 1{,}5\text{mA} \rightarrow K_2 = 1{,}5$m

. $i(t) = 1{,}5e^{-50t}$ mA para $t > 0$s
. $v_r(t) = 4\text{x}10^3 i(t) = 6e^{-50t}$ V para $t > 0$s
. $v(t) = 10 - 6e^{-50t}$ V para $t > 0$s

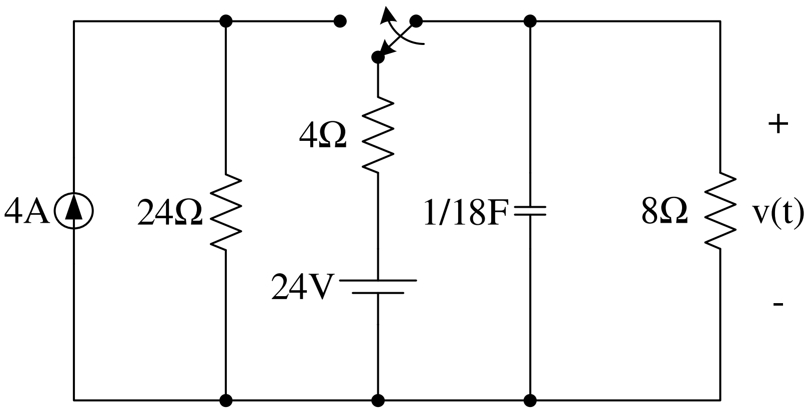


Exercícios

1) Calcular $i(t)$, $v_r(t)$ e $v_L(t)$ para $t > 0$s. Assumir que a chave ficou em sua posição inicial por muito tempo e que no instante $t = 0$s a chave é alterada de posição. Resposta: $i(t) = 6 - 4e^{-2t}$ A p/ $t > 0$s; $v_r(t) = 24 - 16e^{-2t}$ V p/ $t > 0$s; $v_L(t) = 16e^{-2t}$ V p/ $t > 0$s.



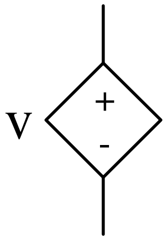
2) Calcular $v(t)$ para $t > 0$s. Assumir que a chave ficou em sua posição inicial por muito tempo e que no instante $t = 0$s a chave é alterada de posição. Resposta: $v(t) = 24 - 8e^{-3t}$ V p/ $t > 0$s.



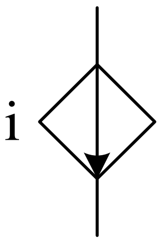
Fontes dependentes ou fontes controladas

São fontes de tensão ou de corrente que possuem seus valores controlados (ou que dependem) por outras grandezas (tensão ou corrente) do circuito.

Simbologia:



fonte controlada (ou dependente) de tensão

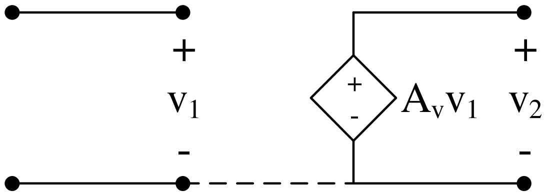


fonte controlada (ou dependente) de corrente

Existem basicamente quatro tipos de fontes controladas:

- Fonte de tensão controlada por tensão (FTCT)

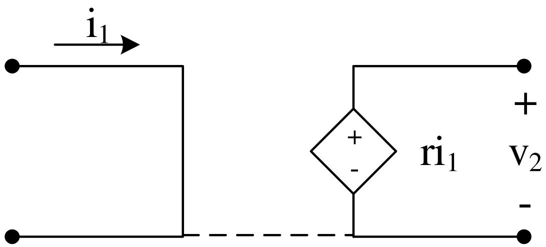
É uma fonte de tensão que possui valor controlado por uma tensão.



$$v_2 = A_v v_1 \rightarrow A_v = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \text{ganho de tensão}$$

- Fonte de tensão controlada por corrente (FTCC)

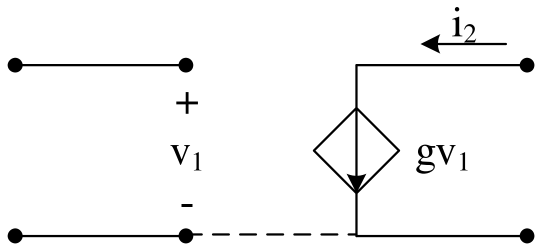
É uma fonte de tensão que possui valor controlado por uma corrente.



$$v_2 = r i_1 \rightarrow r = \frac{v_2}{i_1} \rightarrow \text{resistência de transferência } [\Omega]$$

- Fonte de corrente controlada por tensão (FCCT)

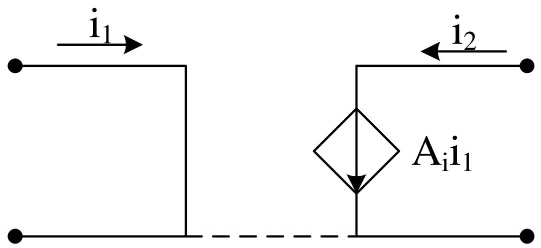
É uma fonte de corrente que possui valor controlado por uma tensão.



$$i_2 = gv_1 \rightarrow g = \frac{i_2}{v_1} \rightarrow \text{condutância de transferência [S]}$$

- Fonte de corrente controlada por corrente (FCCC)

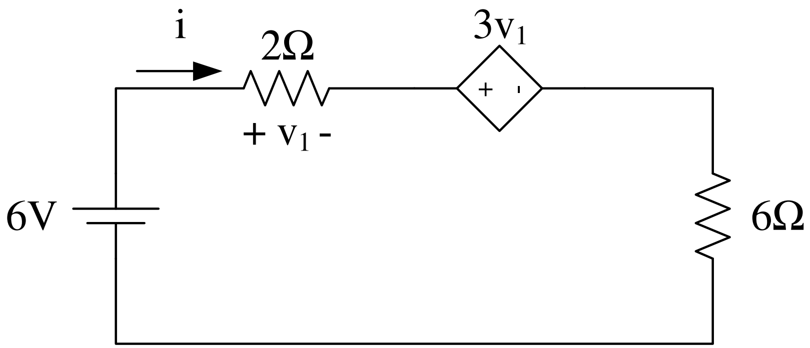
É uma fonte de corrente que possui valor controlado por uma corrente.



$$i_2 = A_i i_1 \rightarrow A_i = \frac{i_2}{i_1} \rightarrow \text{ganho de corrente}$$

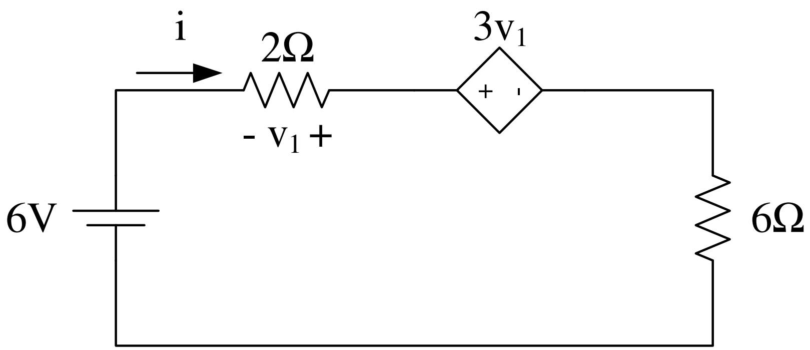
Exemplo

Calcular os valores de i e de v_1. Resp: i = 0,43A, v_1 = 0,86V



Exercícios

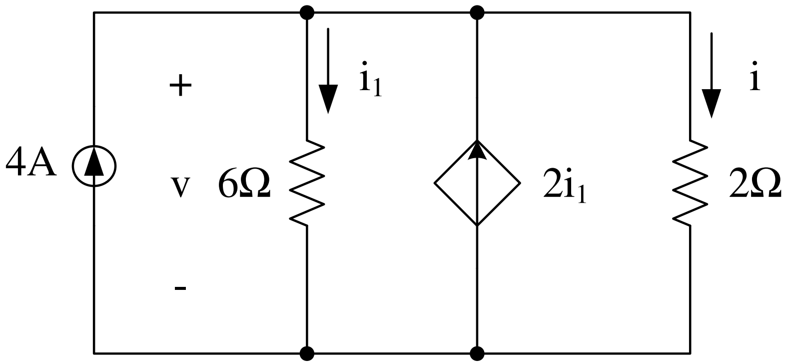
1) Calcular os valores de i e de v_1. Resp: i = 3A; v_1 = –6V.



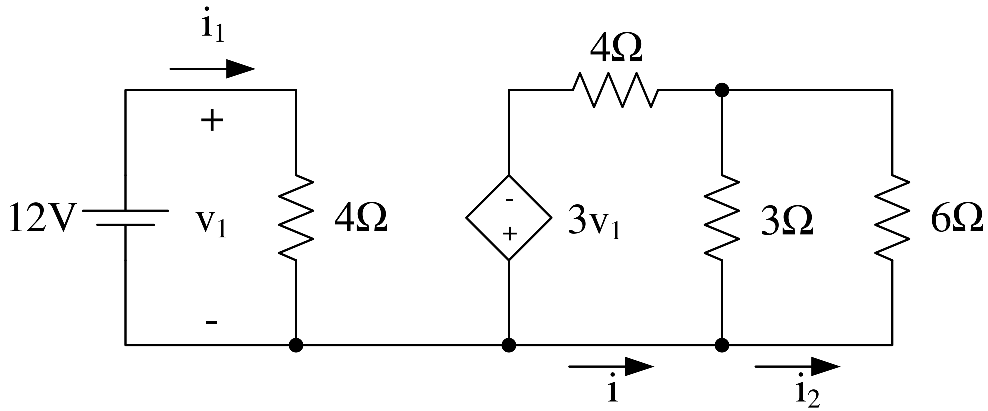
2) Repetir o exercício 1 com o resistor de 2Ω substituído por um resistor de 1Ω. Resp: i = 1,5A; v_1 = –1,5V.

3) Repetir o exercício 1 com o resistor de 2Ω substituído por um resistor de 4Ω. Resp: i = –3A; v_1 = 12V.

4) Calcular os valores de v e de i_1. Resp: v = 12V; i_1 = 2A.



5) Calcular os valores de i_1 e de i_2. Resp: i_1 = 3A; i_2 = 2A.



6) Considerando o amplificador operacional ideal, obter o circuito equivalente para uma FTCT, relacionando v_2 com v_1, utilizando as fontes controladas. Apresentar o desenvolvimento analítico.