Aula 06 - Capacitores em Regime Senoidal

terça-feira, 25 de agosto de 2020 14:14

O comportamento de resistores, indutores e capacitores quando submetidos a uma fonte de tensão ou corrente senoidal é de especial interesse, pois a resposta destes componentes a este tipo de sinais permite o projeto de filtros, equalizadores e osciladores.

Já foi visto que a relação entre tensão e corrente em um resistor obedece a mesma lei de Ohm usada para análise em corrente contínua, ou seja,

$$v(t) = R\, i(t).$$

Esta relação também pode ser expressa através da notação fasorial, de modo que

$$\bar{V} = R\,\bar{I} \quad \therefore \quad R = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \ \Omega$$

que

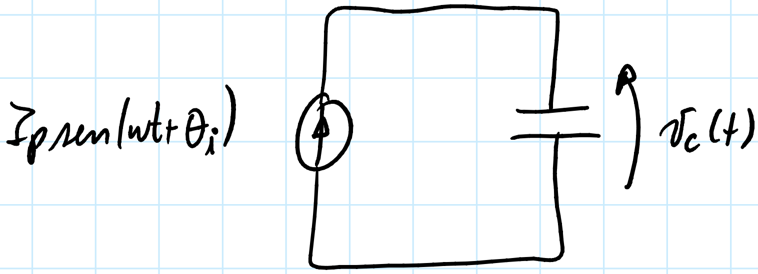
$$\bar{V} = R\bar{I} \therefore R = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}\ \Omega$$

A resistência é uma grandeza escalar, que é representada por um número positivo. Isso significa que o resistor é incapaz de causar uma defasagem entre a tensão e a corrente. Já para um capacitor ou indutor, a corrente e a tensão estão defasados entre si, de modo que a relação entre essas grandezas é um número complexo, denominado de Impedância

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}\ \Omega$$

Considere uma fonte de corrente senoidal aplicada em um capacitor com capacitância C.

$i_c(t)$



A tensão que surge nos terminais do capacitor em função da corrente $i_c(t)$ é

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)\,dt$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int I_p \operatorname{sen}(\omega t+\theta_i)\,dt$$

$$v_c(t) = -\frac{1}{C}\frac{I_p}{\omega}\cos(\omega t+\theta_i)$$

Sabe-se que $\cos(\theta) = \operatorname{sen}(\theta_i + \pi/2)$. Logo

$$v_c(t) = \frac{-1}{\omega C} I_p \operatorname{sen}(\omega t+\theta_i+\pi/2)$$

$$v_c(t) = \frac{I_p}{\omega C}\operatorname{sen}(\omega t+\theta_i+\pi/2-\pi)$$

$$v_c(t) = \frac{I_p}{\omega C}\operatorname{sen}(\omega t+\theta_i-\pi/2)$$

Pode-se concluir que a tensão do

Pode-se concluir que a tensão de pico no capacitor é dada pela corrente de pico, ponderada pelo inverso da capacitância e da frequência. Esse resultado mostra que quanto maior for a frequência, menor será a tensão de pico nos terminais do capacitor. Quando a frequência é muito elevada, $v_c(t) \to 0\,V$ e o capacitor se comporta como um curto-circuito.

$$\lim_{\omega \to \infty} v_C(t) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{I_P}{\omega C} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i - \pi/2) = 0\,V$$

Já quando a frequência do sinal é nula, a tensão nos terminais do capacitor quando circula uma corrente de pico I_P tendo ao infinito

$$\lim_{\omega \to 0} v_C(t) = \frac{I_P}{\omega C} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i - \pi/2) = \infty\,V$$

$$\lim_{\omega \to 0} v_c(t) = \frac{I_p}{\omega C} \,\text{sen}\, (\omega t + \theta_i - \pi/2) = \infty \; V$$

Isso indica que o capacitor se comporta como um circuito aberto para sinais DC. A tabela a seguir resume essas observações

$\omega \to 0$: capacitor equivale a um circuito aberto

$\omega \to \infty$: capacitor equivale a um curto-circuito

O outro ponto que pode ser observado é que o capacitor atrasa a tensão em $\pi/2$ radianos ou $90°$ em relação à corrente.

As conclusões sobre o comportamento do capacitor podem ser obtidas analisando a relação fasorial da tensão e da corrente no capacitor. O fasor da corrente é $\bar{I}_c = I_p \angle \theta_i$

capacitor. O fasor da corrente é $\bar{I}_c = I_p \angle \theta_i$, enquanto que o fasor da tensão é dado por

$$\bar{V}_c = V_p \angle \theta_v = \frac{I_p}{\omega C} \angle \theta_i - \pi/2$$

Usando a definição de impedância, chega-se em

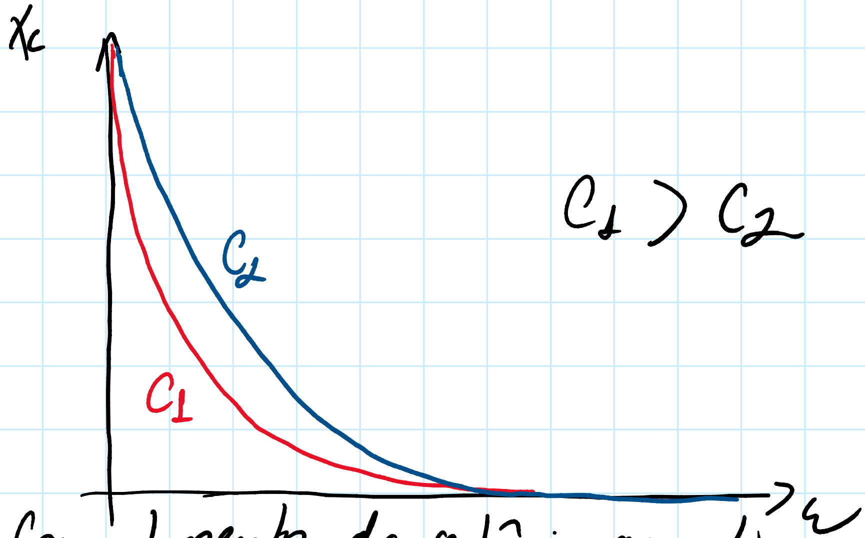
$$\bar{Z}_c = \frac{\bar{V}_c}{\bar{I}_c} = \frac{V_p \angle \theta_v}{I_p \angle \theta_i} = \frac{I_p}{\omega C} \times \frac{1}{I_p} \angle \theta_i - \pi/2 - \theta_i$$

$$\bar{Z}_c = \frac{1}{\omega C} \angle -\pi/2 = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}\ \Omega$$

Observe que a impedância do capacitor é um número puramente imaginário ($Re\{Z_c\} = 0$). Esse tipo de impedância recebe o nome de reatância. Como esta reatância advém de um capacitor que atrasa a tensão da corrente em 90°, ela recebe o nome de reatância capacitiva, representada por $X_c = 1/\omega C$.

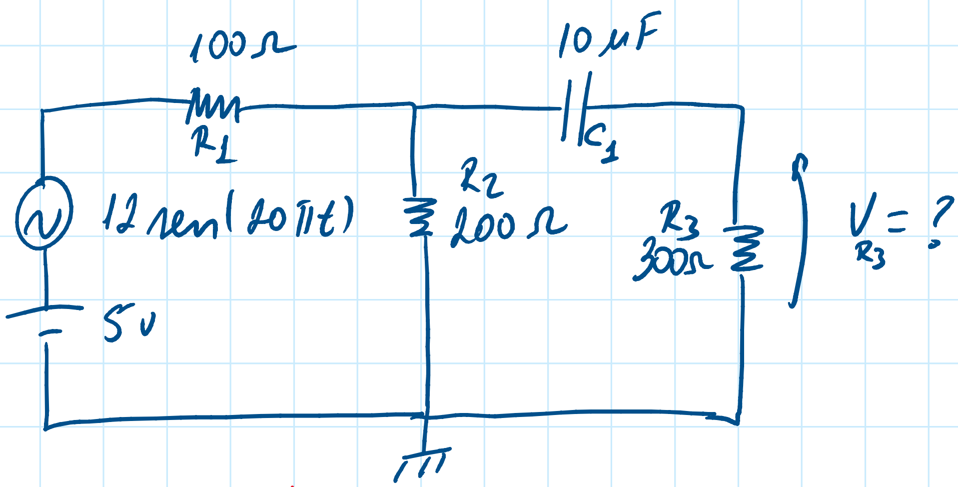
$$\bar{Z}_c = -jX_c\ \Omega$$

$$\bar{Z}_C = -jX_C \ \Omega$$



Comportamento da reatância capacitiva com a frequência. Quanto maior a capacitância, menor é a reatância para uma mesma frequência.

Exemplo: Encontre o nível DC no resistor R_3 do circuito abaixo:



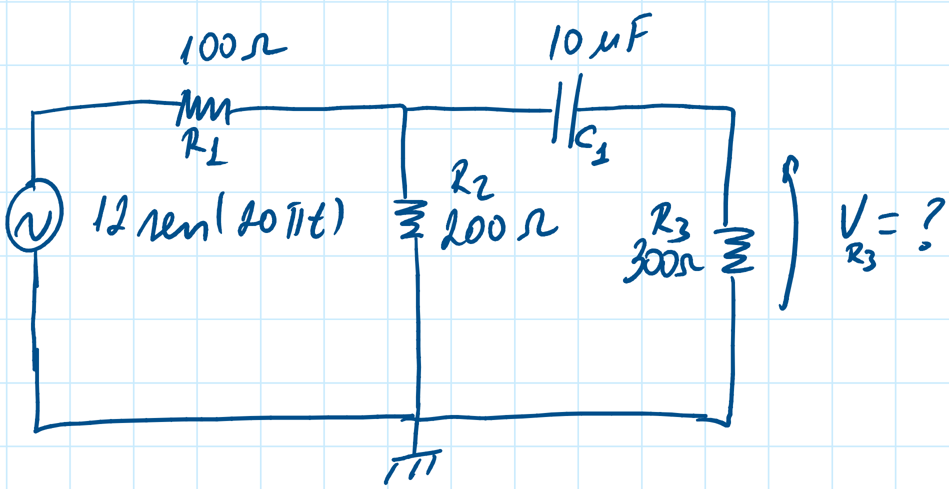
Como o capacitor se comporta como um circuito aberto para $\omega = 0$, então o nível DC no ponto indicado é 0 V.

Exemplo: Qual é a impedância que o capacitor no circuito acima irá apresentar na frequência da fonte senoidal?

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{20\pi \times 10^{-5}} = -j\,1{,}59\ k\Omega$$

A impedância do capacitor pode ser associada com a impedância de outros componentes, da mesma forma que resistências.

Exemplo: Qual é a impedância equivalente observada pela fonte AC do circuito abaixo?



$$\bar{Z}_C = -j\,1{,}59\ k\Omega$$

$$\bar{Z}_{eq} = (\bar{Z}_C + R_3) \,//\, R_2 + R_1 = (300 - j\,1{,}59k) \,//\, 200 + 100$$

$$\bar{Z}_{eq} = (300 - j1{,}59k) \times 200 \quad + 100 = 292{,}81 - j\,22{,}88\ \Omega$$

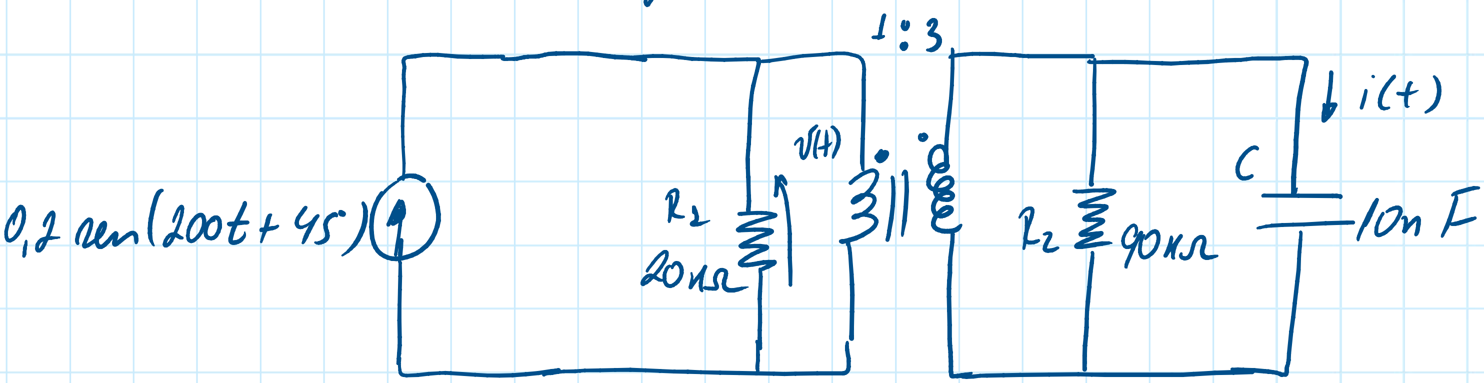
$$\bar{Z}_{eq} = \frac{(300 - j1{,}59k) \times 200}{300 - j1{,}59k + 200} + 100 = 292{,}81 - j22{,}88\,\Omega$$

$$\bar{Z}_{eq} = 293{,}71 \angle -4{,}47^\circ$$

Exemplo: Qual é a corrente AC total no circuito do exemplo anterior?

$$\bar{I}_t = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{12\angle 0^\circ}{293{,}71\angle -4{,}47^\circ} = 40{,}86 \angle 4{,}47^\circ\ mA.$$

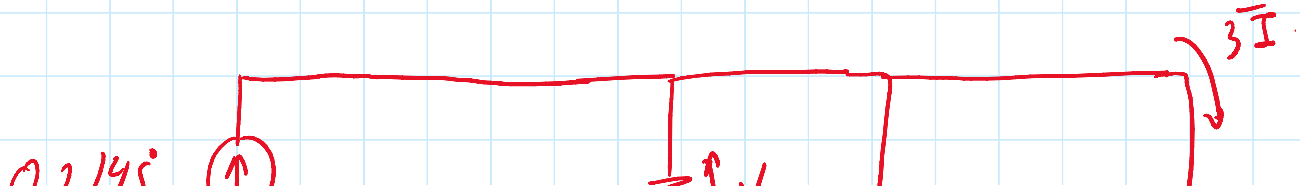
Exemplo: Encontre a tensão e a corrente indicadas no circuito abaixo.

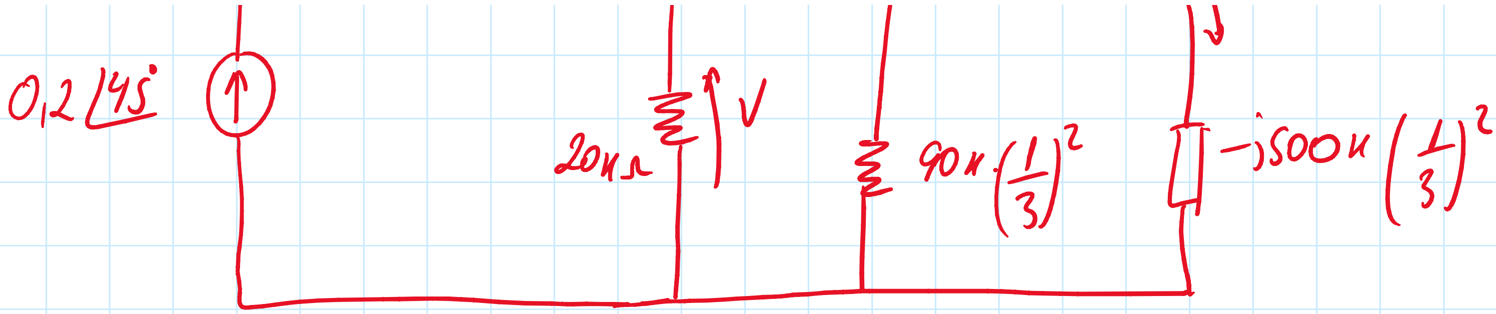


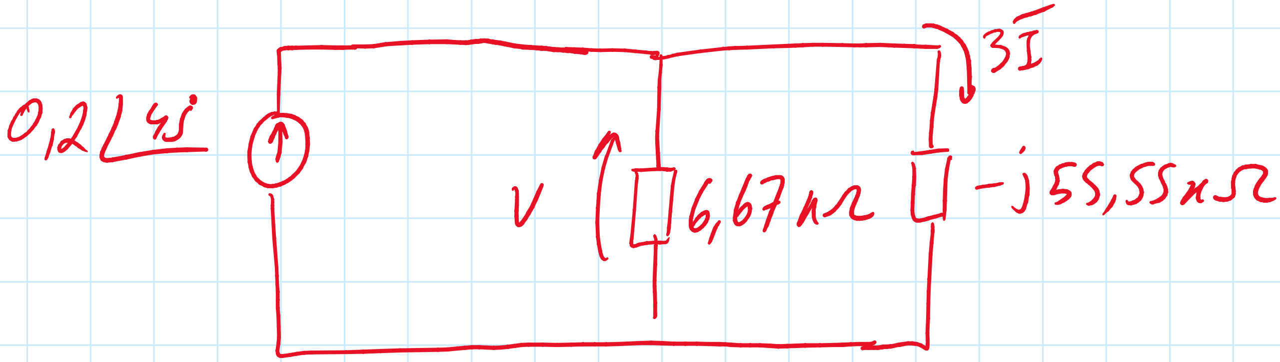
$$R_s' = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s$$

$$I_p = \frac{N_s}{N_p} I_s$$

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{200 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = -j\,500\,k\Omega$$







$$3\bar{I} = 0{,}2\angle 45^\circ \times \frac{6{,}67k\Omega}{6{,}67k\Omega - j55{,}55k} = 23{,}82\angle 128{,}16^\circ \text{ mA}$$

$$\underline{\bar{I} = 7{,}94\angle 128{,}16^\circ \text{ mA}}$$

$$\bar{V} = 3\bar{I}\cdot(-j55{,}55k) = 23{,}82\angle 128{,}16^\circ \times 10^{-3}\cdot 55{,}55\cdot 10^{3}\angle -90^\circ$$

$$\underline{\bar{V} = 1{,}32\angle 38{,}16^\circ \text{ kV}}$$