Aula 9 - Circuitos RLC em regime senoidal

sexta-feira, 16 de outubro de 2020 09:25

Os indutores e capacitores, quando submetidos a um regime de operação senoidal permanente, apresentam uma impedância puramente imaginária, denominada de reatância.

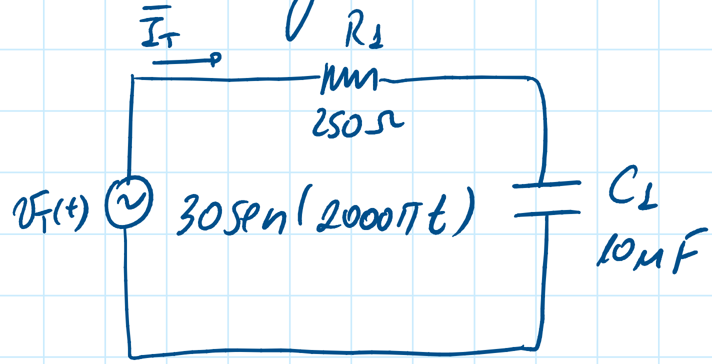
A reatância indutiva adianta a fase da tensão em 90° em relação à corrente a qual esta reatância é submetida. Já a reatância capacitiva atrasa a tensão em 90° em relação à corrente. Isso fica evidente nos resultados obtidos referentes à impedância dos indutores e capacitores, que foram demonstrados anteriormente:

$$Z_L = j\omega L = \omega L \angle 90° = j2\pi f L = 2\pi f L \angle 90° \ \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90° = \frac{-j}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi f C} \angle -90° \ \Omega$$

Capacitores e indutores podem ser combinados entre si para obter efeitos desejados em termos de defasagem ou de resposta a diferentes frequência

Exemplo 1: Determine a impedância vista pela fonte de tensão e a corrente indicada no circuito a seguir



A impedância do capacitor na freq. angular de 2000π rad/s é dada por

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{2000\pi \times 10 \times 10^{-6}} = \frac{-j}{2\pi \times 10^{-2}} = -j\frac{50}{\pi} = -j\,15{,}92\,\Omega$$

A impedância vista pela fonte senoidal é

$$\bar{Z}_{eq} = R_1 + Z_{C_1} = 250 - j\,15{,}92\,\Omega.$$

$$\bar{Z}_{eq} = 250{,}5\,\angle{-3{,}64^\circ}\,\Omega$$

$\bar{Z}_{eq} = 250{,}5 \angle -3{,}64° \ \Omega$

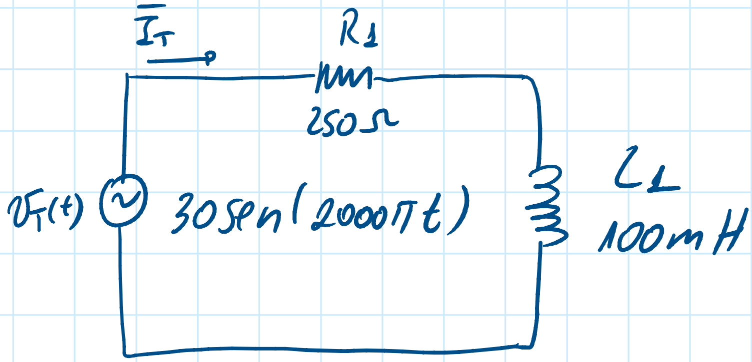
Portanto, a resistência associada com a reatância capacitiva atrasa a tensão em apenas 3,64° em relação à corrente, que é dada por

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{V}_T}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{30 \angle 0°}{250{,}5 \angle -3{,}64} = 0{,}12 \angle 3{,}64° \ A$$

Na forma trigonométrica, temos que:

$$i_T(t) = 0{,}12 \ sen(2000\pi t + 3{,}64°) \ A$$

Exemplo: Encontre a impedância vista pela fonte de tensão e a corrente indicada no circuito abaixo:



Neste caso, a impedância indutiva na frequência angular de 2000π rad/s é

$$\bar{Z}_L = j\omega L = j2000\pi \cdot 100 \times 10^{-3} = j200\pi = j628{,}3 \ \Omega$$

A impedância vista pela fonte é dada por:

A impedância vista pela fonte é dada por:

$\bar{Z}_{eq} = R_1 + \bar{Z}_L = 250 + j\,628,3\ \Omega$

$\bar{Z}_{eq} = 676,2\ \angle 68,3^\circ\ \Omega.$

A resistência em série com a indutância faz com que a tensão seja adiantada em 68,3° em relação à corrente, que é dada por

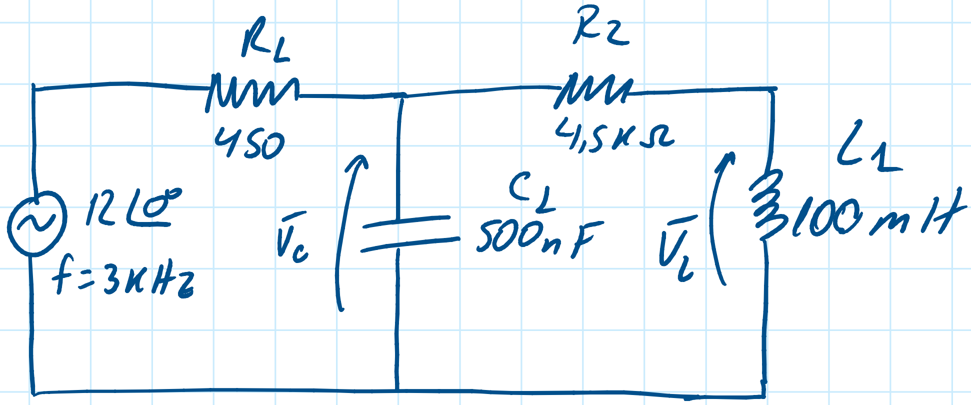
$$\bar{I}_T = \frac{\bar{V}_T}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{30\ \angle 0^\circ}{676,2\ \angle 68,3^\circ} = 44,36\ \angle -68,3^\circ\ mA$$

Na forma trigonométrica, temos que

$i(t) = 44,36\ \text{sen}(2000\pi t - 68,3^\circ)\ mA$

Capacitores, Indutores e Resistores operando em regime senoidal permanente podem ser combinados em um único circuito para atender objetivos específicos, como permitir que uma dada componente de frequência atinja a carga ou eliminar uma componente de frequência do circuito.

Exemplo 3: Encontre as tensões indicadas no circuito abaixo:



As impedâncias indutivas e capacitivas são, respectivamente, dadas por:

$$Z_L = j\,2\pi f L = j\,2\pi \times 3000 \times 100 \times 10^{-3} = j\,600\pi = j\,1{,}88\,k\Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{2\pi f C} = \frac{-j}{2\pi \times 3000 \times 500 \times 10^{-9}} = \frac{-j}{3\pi \times 10^{-3}} = -j\,106{,}1\,\Omega.$$

A impedância formada por C_1, R_2 e L_1 é

$$Z_{eq} = (R_2 + Z_L) // Z_C$$

$$Z_{eq} = (4{,}5k + j\,1{,}88k) // -j\,106{,}1$$

$$Z_{eq} = \frac{(4{,}5k + j\,1{,}88k) \times (-j\,106{,}1)}{4{,}5k + j\,1{,}88k - j\,106{,}1}$$

$$Z_{eq} = 2{,}16 - j\,107\,\Omega.$$

Assim, a tensão $\bar{V}_c$ é dada por

Assim, a tensão V_C é dada por

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{V}_T \cdot \bar{Z}_{eq}}{\bar{Z}_{eq} + R_L} = \frac{12\angle 0^\circ \cdot (2{,}16 - j107)}{2{,}16 - j107 + 450}$$

$$\bar{V}_C = 2{,}76 \angle -75{,}5^\circ \checkmark$$

Já a tensão V_L é dada por:

$$\bar{V}_L = \frac{\bar{V}_0 \times \bar{Z}_L}{R_2 + \bar{Z}_L} = \frac{2{,}76 \angle -75{,}5^\circ \times j1{,}88k}{4500 + j1{,}88k}$$

$$\bar{V}_L = 1{,}06 \angle -8{,}2^\circ \checkmark$$

Exemplo 4) O que acontece se o valor da frequência for 10 vezes maior?

Neste caso, $f = 30\,kHz$.

$$\bar{Z}_L = j2\pi \times 30\cdot 10^3 \times 100\cdot 10^{-3} = j18{,}85\,k\Omega$$

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{2\pi \times 30\times 10^3 \times 500\times 10^{-9}} = -j10{,}6\,\Omega$$

Como era de se esperar, a impedância do indutor aumentou 10 vezes, e a do capacitor diminuiu 10 vezes. Agora, o capacitor vai aterrar a maior parte da tensão em seus terminais. A tensão da fonte ficará, em sua [illegible]

A tensão da fonte ficará, em sua menor parte, sobre o resistor R_1.

$$\bar{Z}_{eq} = (4{,}5k + j\,18{,}85k) \,//\, (-j\,10{,}6) = 10{,}61 \angle -90°$$

$$\bar{V}_C = \frac{12\angle 0 \quad 10{,}61\angle -90°}{450 + 10{,}61\angle -90°} = 0{,}28 \angle -88{,}6° \checkmark$$

$$\bar{V}_L = \frac{0{,}28\angle -88{,}6 \times j\,18{,}85k}{4500 + j\,18{,}85k} = 0{,}27\angle -75{,}17 \quad \checkmark$$

Exemplos: Oque ocorre se o valor da freq. da fonte for 10 vezes menor.

Neste caso, a impedância do indutor será 10 vezes menor e a do capacitor será 10 vezes maior. A tensão sobre a impedância formada por C_1, R_2 e L_1 será maior, resultando em uma maior parcela de tensão sobre a mesma. No entanto, a menor impedância do indutor significa que a tensão sobre esse componente será menor, resultando em uma maior parcela da tensão sobre R_2.

$$\bar{Z}_L = j\,2\pi \times 300 \times 100 \times 10^{-3} = j\,188{,}5\,\Omega$$

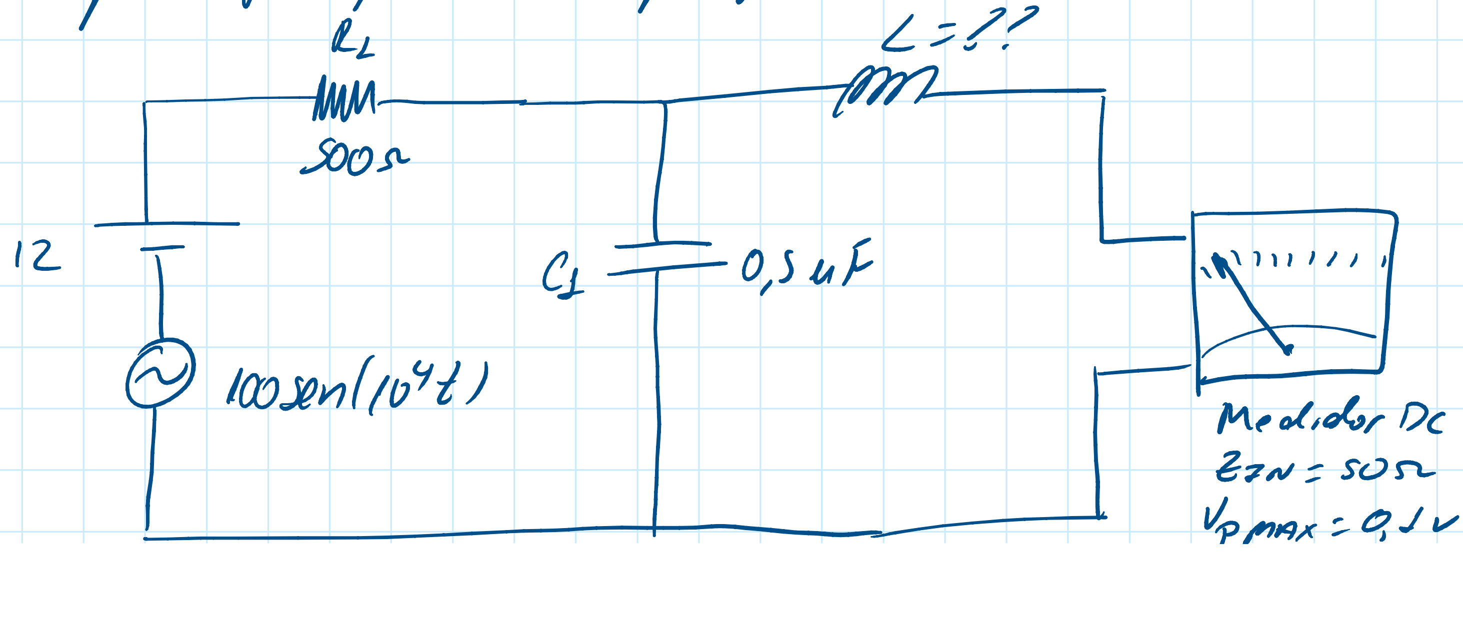
$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{2\pi \times 300 \times 500 \times 10^{-9}} = -j\,1{,}06\,k\Omega.$$

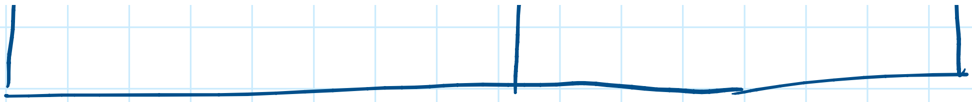
$$\bar{Z}_{eq} = \frac{(4500 + j\,188{,}5) \times (-j\,1{,}06k)}{4500 + j\,188{,}5 - j\,1{,}06k} = 240 - j\,1{,}01k\ \Omega$$

$$\bar{V}_C = \frac{12\angle 0^\circ \times (240 - j\,1{,}01k)}{450 + 240 - j\,1{,}01k} = 10{,}19\angle -20{,}92^\circ$$

$$\bar{V}_L = \frac{10{,}19\angle -20{,}92^\circ \times j\,188{,}5}{4500 + j\,188{,}5} = 0{,}43\angle 66{,}68^\circ$$

Exemplo 6: O nível DC no circuito de RF a seguir precisa ser monitorado. O equipamento de medida DC tolera uma tensão de pico AC de no máximo 0,1 V. Sua impedância é de 50 Ω. Encontre o valor de L que proteja o equipamento.





$Z_{IN} = 50\,\Omega$
$V_{P\,MAX} = 0{,}1\,V$

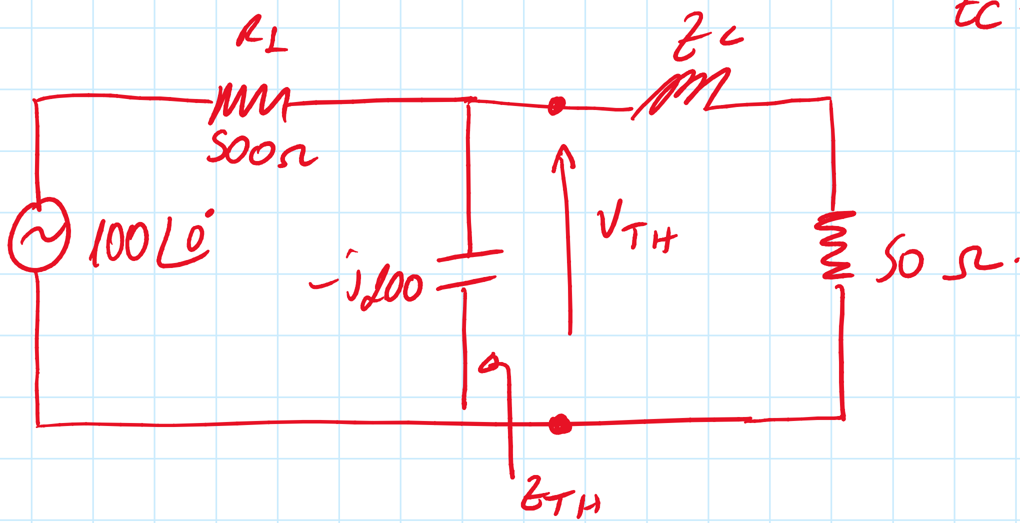
A função do indutor é permitir a passagem do nível DC para ser medido e impedir que o sinal de RF chegue até o medidor.

Quanto maior for o valor de L, maior será a proteção (menor será a tensão AC no equipamento), uma vez que

$$Z_L = j2\pi f L$$

Mas, o quão elevado precisa ser o valor da indutância? Para responder essa questão, precisamos encontrar o circuito equivalente para o circuito AC.

$$Z_C = \frac{-j}{10^9 \times \frac{10^{-6}}{2}} = -j200\,\Omega$$



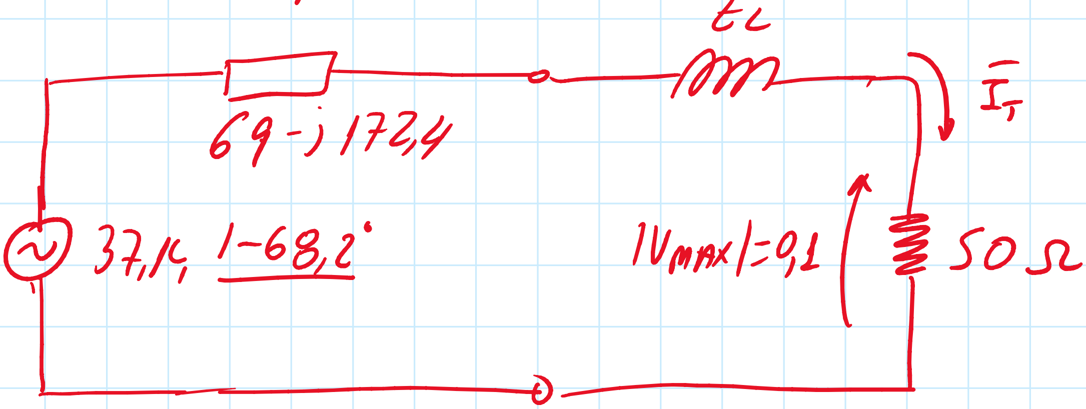
A tensão e a impedância de Thevenin no ponto de medida do circuito de RF são:

$$Z_{TH} = 500 // -j200 = \frac{500 \times (-j200)}{500 - j200} = 69 - j172{,}4\,\Omega$$

$$Z_{TH} = 500 \,//\, -j200 = \frac{500 \times (-j200)}{500 - j200} = 69 - j172{,}4\ \Omega$$

$$V_{TH} = \frac{100 \times (-j200)}{500 - j200} = 37{,}14 \angle -68{,}2\ V$$

O circuito equivalente é dado por



Como $|V_{MAX}| = |\bar{I}_{T_{MAX}} \cdot 50| = 0{,}1$, então

$$|\bar{I}_{T_{MAX}}| = \frac{0{,}1}{50} \Rightarrow |I_{max}| = 2\,mA.$$

O módulo da corrente AC circulando neste circuito não pode ser maior do que 2mA! Assim,

$$I_T = \frac{V_{TH}}{Z_{TH} + Z_L + Z_M} = \frac{37{,}14 \angle -68{,}2°}{69 - j172{,}4 + Z_L + 50}$$

$$I_T = \frac{37{,}14 \angle -68{,}2°}{119 + j(X_L - 172{,}4)}$$

Caso o indutor não seja introduzido, a corrente I_T será de

$$\bar{I}_T = 177,3 \angle{-12,81°} \text{ mA}$$

e a tensão AC no equipamento será de

$$\bar{V}_m = 50\, I_T = 8,86 \angle{-12,81°} \text{ V},$$

o que resultaria em dano ao mesmo. Logo, o indutor é fundamental!

Voltando ao resultado obtido para I_T, a impedância equivalente total pode ser expressa em sua forma polar.

$$\bar{Z}_{eq} = 119 + j\,(X_L - 172,4)\ \Omega.$$

$$|\bar{Z}_{eq}| = \sqrt{119^2 + (X_L - 172,4)^2}$$

$$= \sqrt{14,16\text{k} + X_L^2 - 344,8\,X_L + 29,72\text{k}}$$

$$= (X_L^2 - 344,8\,X_L + 43,88\text{k})^{1/2}$$

A fase de $\bar{Z}_{eq}$ não é relevante e vamos considerar como sendo θ_z, de modo que

$$\bar{Z}_{eq} = (X_L^2 - 344,8\,X_L + 43,88\text{k})^{1/2} \angle{\theta_z}$$

Assim

Assim

$$\bar{I}_T = \frac{37{,}14}{(X_L^2 - 344{,}8X_L + 43{,}88k)^{1/2}} \angle -12{,}81 - \theta_z$$

A restrição para a corrente é $|\bar{I}_{max}| = 2mA$, ou seja

$$\frac{37{,}14}{(X_L^2 - 344{,}8X_L + 43{,}88k)^{1/2}} = 2\times10^{-3}$$

$$(X_L^2 - 344{,}8\,X_L + 43{,}88\,k)^{1/2} = 18{,}57k$$

$$X_L^2 - 344{,}8\,X_L + 43{,}88k - 344{,}8M = 0$$

$$X_L^2 - 344{,}8\,X_L - 344{,}9M = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 344{,}8^2 + 4\times 344{,}9M = 1{,}38\times10^9$$

$$X_L = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{344{,}8 \pm \sqrt{1{,}38\times10^9}}{2}$$

$$X_{L_1} = 18{,}744k\Omega \qquad X_{L_2} = -18{,}4k\Omega$$

Como $X_L > 0$, então $X_L = 18{,}744k\Omega$ e

$$Z_L = j\,18{,}744k\Omega.$$

Neste caso,

$$I = 37{,}14 \angle -68{,}?^\circ = 2\angle -157^\circ mA$$

$$I_T = \frac{37{,}14 \angle -68{,}2^\circ}{119 + j(18{,}744 - 172{,}4)} = 2 \angle -157^\circ \text{ mA}$$

e

$V_M = 50 I_T = 0{,}1 \angle -157^\circ$ V, o que atende à restrição do equipamento!

Finalmente, podemos calcular o valor do indutor

$$Z_L = j\omega L \therefore j\,18{,}744 = j\,10^4 L$$

$$\underline{L = 1{,}87\text{ H}}$$ //

O valor do indutor pode ser maior do que 1,87 H, mas não pode ser menor.