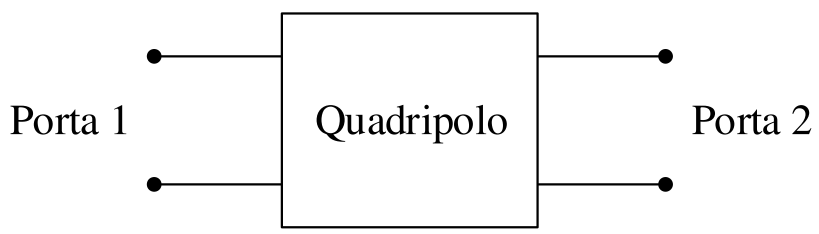
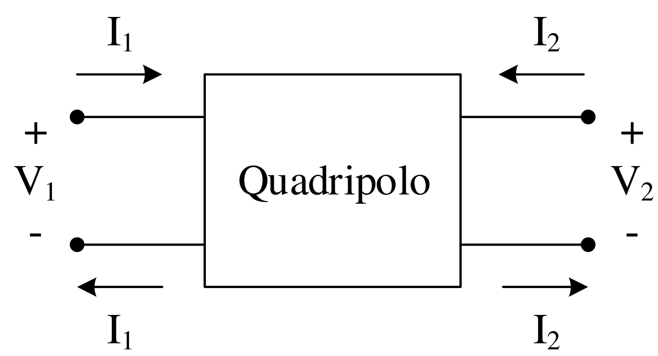
Quadripolos

Tem por função levantar as características técnicas de um circuito ou dispositivo, fornecendo informações para análise e projeto. A teoria de quadripolos é útil para a análise e modelagem de circuitos ou dispositivos, por meio de coeficientes numéricos denominados de parâmetros. Portanto, circuitos ou dispositivos (passivos ou ativos) podem ser considerados quadripolos ou associações de quadripolos.

Como exemplo têm-se os transistores, amplificadores, filtros, etc. O quadripolo é qualquer circuito ou dispositivo que tenha duas portas (entrada e saída) e quatro terminais (dois de entrada e dois de saída), não sendo necessário conhecer seu conteúdo.

Considerando o quadripolo como sendo um circuito linear, pode-se associar fontes de corrente (I_1, I_2) e de tensão (V_1, V_2) ao modelo genérico. A porta 1 pode ser considerada a entrada e a porta 2 pode ser considerada a saída.



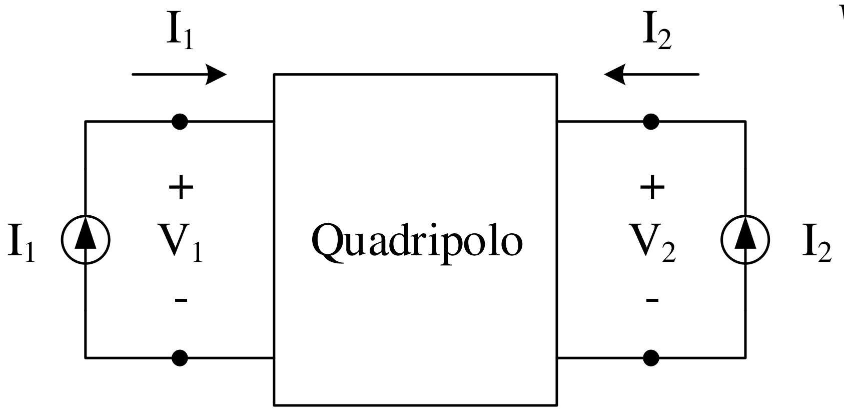


Parâmetros *Z*

São os parâmetros de impedância ou de circuito aberto. As equações que regem o modelo são

$V_1 = f(I_1, I_2)$ $\qquad$ $V_2 = f(I_1, I_2)$

I_1 e I_2 são as variáveis de entrada da função (independentes)
V_1 e V_2 são as variáveis de saída da função (dependentes)



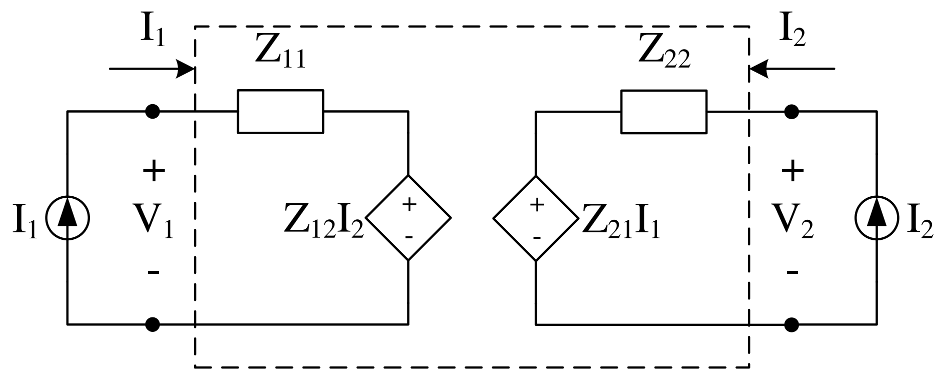
Assim
$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Matriz dos parâmetros *Z*

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \det Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$$



$Z_{11} I_1$: parcela de V_1 produzida por I_1 passando por Z_{11}
$Z_{12} I_2$: fonte de tensão dependente de I_2 (FTCC)
$Z_{21} I_1$: fonte de tensão dependente de I_1 (FTCC)
$Z_{22} I_2$: parcela de V_2 produzida por I_2 passando por Z_{22}

Significados dos parâmetros:

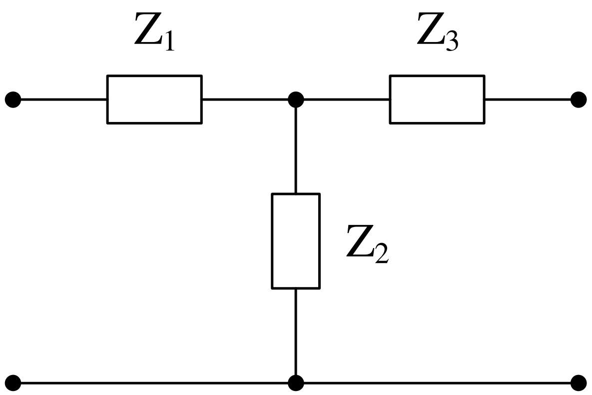
$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \equiv \text{impedância de entrada com a saída aberta, } \Omega$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \equiv \text{impedância de transferência reversa com a entrada aberta, } \Omega$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \equiv \text{impedância de transferência direta com a saída aberta, } \Omega$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \equiv \text{impedância de saída com a entrada aberta, } \Omega$$

Exemplo: Circuito T.



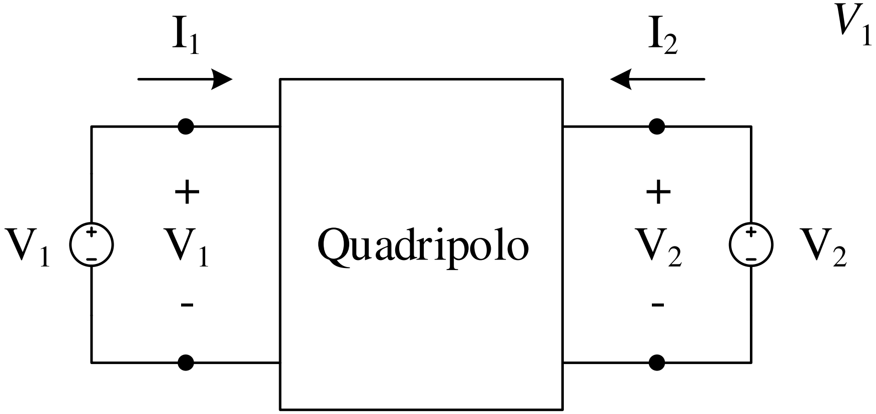
Parâmetros *Y*

São os parâmetros de admitância ou de curto-circuito. As equações que regem o modelo são

$I_1 = f(V_1, V_2)$ $\qquad$ $I_2 = f(V_1, V_2)$

I_1 e I_2 são as variáveis de saída da função (dependentes)

V_1 e V_2 são as variáveis de entrada da função (independentes)



Assim

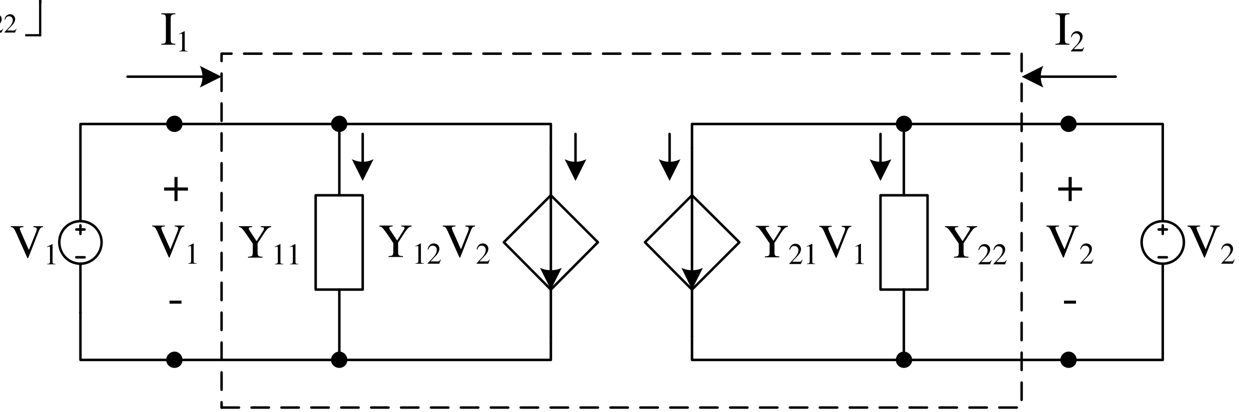
$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Matriz dos parâmetros *Y*

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \det Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$$



$Y_{11}V_1$: parcela de I_1 produzida por V_1 em Y_{11}

$Y_{12}V_2$: fonte de corrente dependente de V_2 (FCCT)

$Y_{21}V_1$: fonte de corrente dependente de V_1 (FCCT)

$Y_{22}V_2$: parcela de I_2 produzida por V_2 em Y_{22}

Significados dos parâmetros:

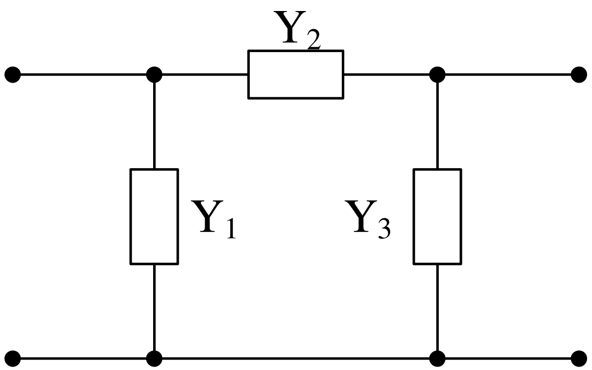
$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \equiv \text{admitância de entrada com a saída em curto, S}$$

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \equiv \text{admitância de transferência reversa com a entrada em curto, S}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \equiv \text{admitância de transferência direta com a saída em curto, S}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \equiv \text{admitância de saída com a entrada em curto, S}$$

<u>Exemplo:</u> Circuito Pi.



Relação entre os parâmetros Z e Y

Matriz identidade: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det I = 1$

Matriz inversa: $A \xrightarrow{inversa} A^{-1} = \dfrac{1}{A}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{A_4}{\det A} & -\dfrac{A_2}{\det A} \\ -\dfrac{A_3}{\det A} & \dfrac{A_1}{\det A} \end{bmatrix}$$

$$\det A = A_1 A_4 - A_2 A_3$$

Propriedade:

$$AA^{-1} = I$$

Têm-se que $\begin{array}{ll} Z: & V = ZI \\ Y: & I = YV \end{array} \rightarrow V = ZYV \rightarrow ZY = 1 = \det I$

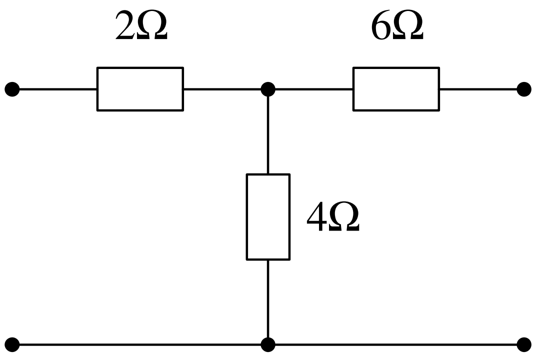
Assim

$$Z = \frac{1}{Y} = Y^{-1} \rightarrow Z = \frac{1}{\det Y}\begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} \qquad (\text{conversão } Y \rightarrow Z)$$

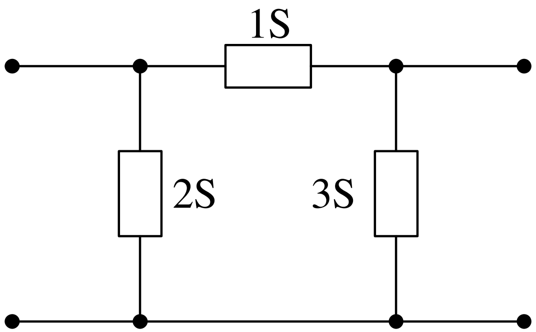
$$Y = \frac{1}{Z} = Z^{-1} \rightarrow Y = \frac{1}{\det Z}\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} \qquad (\text{conversão } Z \rightarrow Y)$$

Exemplos

1) Determinar os parâmetros Z do circuito. Resp: $Z_{11} = 6\Omega$, $Z_{12} = 4\Omega$, $Z_{21} = 4\Omega$, $Z_{22} = 10\Omega$.

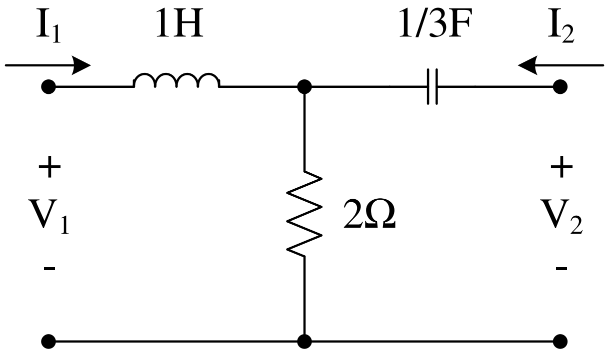


2) Determinar os parâmetros Y do circuito. Resp: $Y_{11} = 3S$, $Y_{12} = -1S$, $Y_{21} = -1S$, $Y_{22} = 4S$.

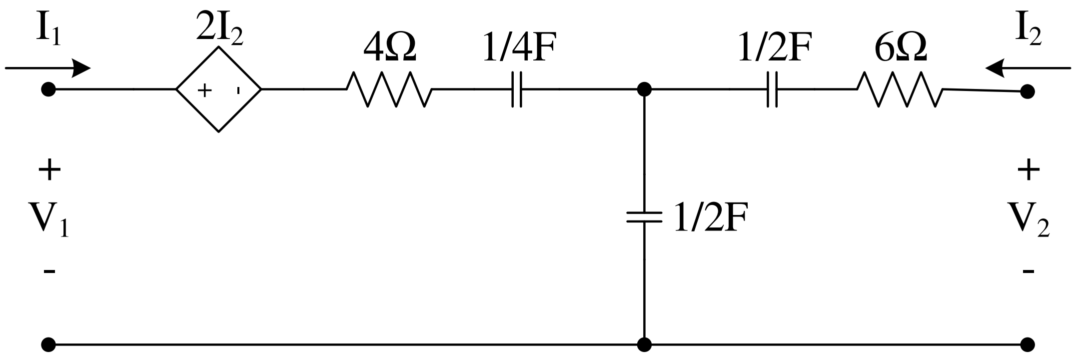


Exercícios

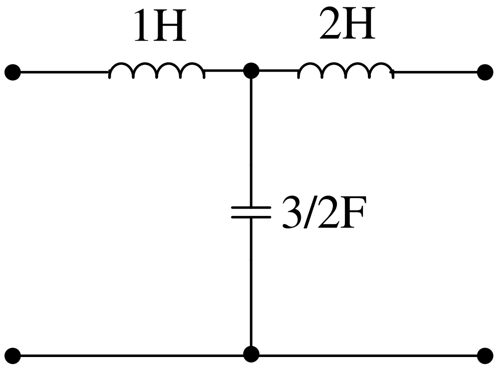
1) Calcular os parâmetros Z do circuito. Resp: $Z_{11} = (s+2)\Omega$, $Z_{12} = 2\Omega$, $Z_{21} = 2\Omega$, $Z_{22} = (2s+3)/s\ \Omega$.



2) Calcular os parâmetros Z do circuito. Resp: $Z_{11} = (6/s) + 4\ \Omega$, $Z_{12} = (2/s) + 2\ \Omega$, $Z_{21} = (2/s)\ \Omega$, $Z_{22} = (4/s) + 6\ \Omega$.



3) Calcular os parâmetros Z do circuito. Resp: $Z_{11} = (3s^2+2)/3s\ \Omega$, $Z_{12} = 2/3s\ \Omega$, $Z_{21} = 2/3s\ \Omega$, $Z_{22} = (6s^2+2)/3s\ \Omega$.

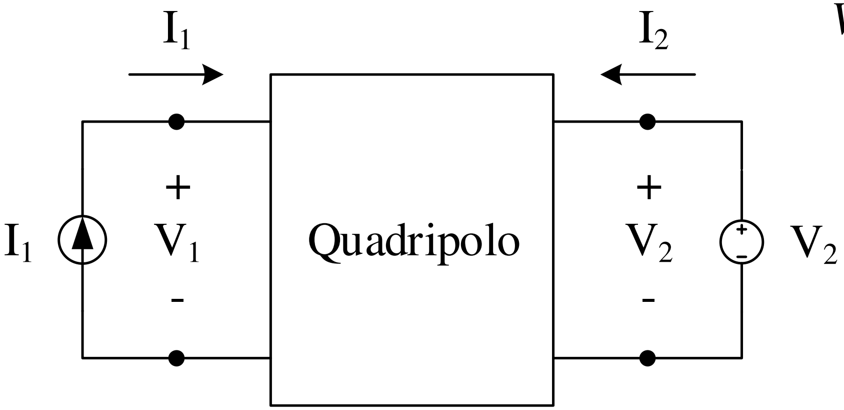


Parâmetros *H*

São os parâmetros híbridos, os quais consideram os parâmetros *Z* e *Y*. As equações que regem o modelo são

$V_1 = f\left(I_1, V_2\right)$ $\qquad$ $I_2 = f\left(I_1, V_2\right)$

I_1 e V_2 são as variáveis de entrada da função (independentes)
V_1 e I_2 são as variáveis de saída da função (dependentes)



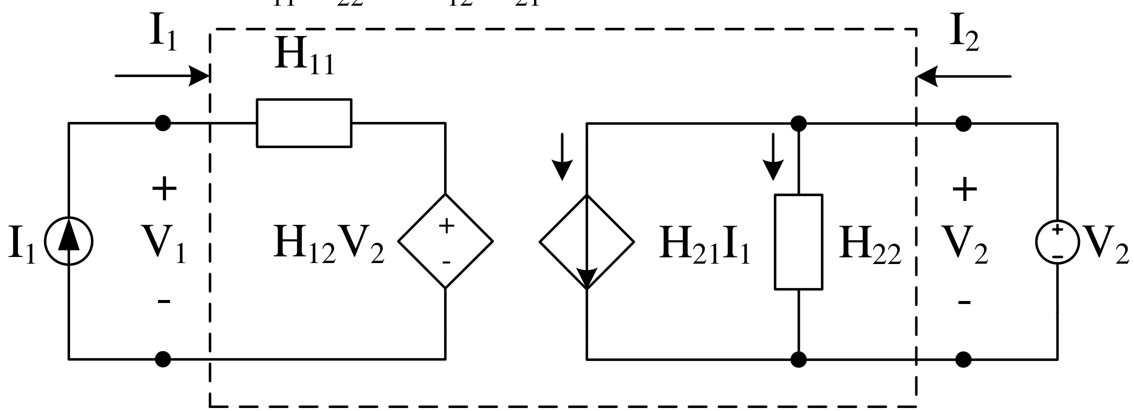
Assim
$$V_1 = H_{11}I_1 + H_{12}V_2$$
$$I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}V_2$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Matriz dos parâmetros *H*

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \det H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$$



$H_{11}I_1$: parcela de V_1 produzida por I_1 passando por H_{11}
$H_{12}V_2$: fonte de tensão dependente de V_2 (FTCT)
$H_{21}I_1$: fonte de corrente dependente de I_1 (FCCC)
$H_{22}V_2$: parcela de I_2 produzida por V_2 em H_{22}

Significados dos parâmetros:

$$H_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \equiv \text{impedância de entrada com a saída em curto, } \Omega$$

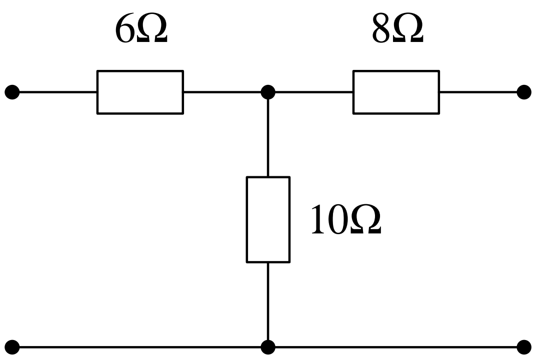
$$H_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} \equiv \text{ganho de tensão reverso com a entrada aberta}$$

$$H_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \equiv \text{ganho de corrente direto com a saída em curto}$$

$$H_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \equiv \text{admitância de saída com a entrada aberta, S}$$

<u>Exemplo</u>

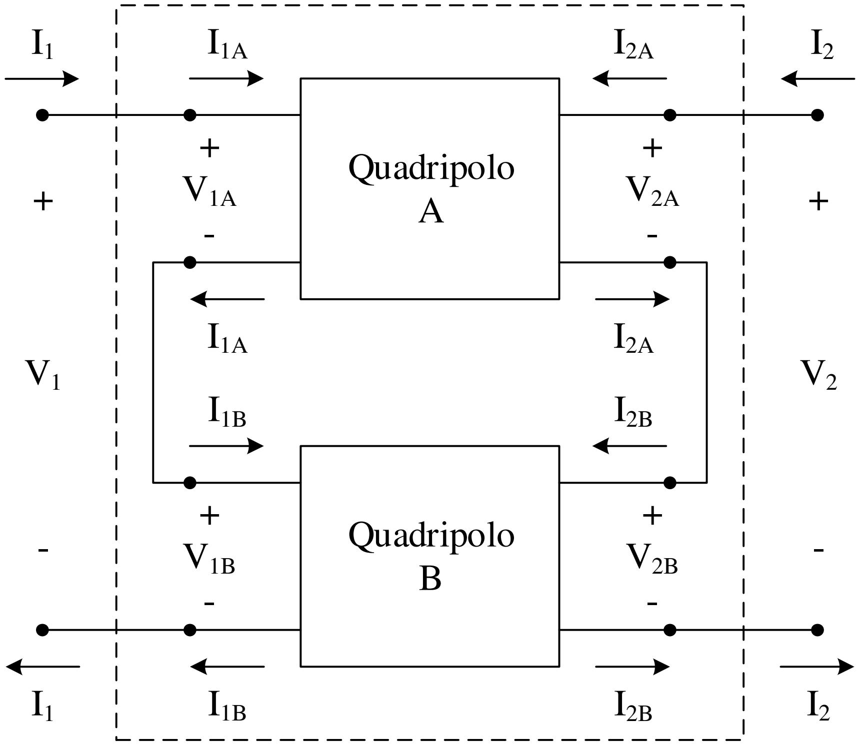
Determinar os parâmetros H do circuito a seguir. Resp: $H_{11} = 10{,}44\Omega$, $H_{12} = 0{,}56$, $H_{21} = -0{,}56$, $H_{22} = 55{,}56\text{mS}$.



Relação entre os parâmetros *Z, Y* e *H*

Para / **De**	***Z***	***Y***	***H***
Z	-	$Y_{11}=\frac{Z_{22}}{\det Z}$ $Y_{12}=\frac{-Z_{12}}{\det Z}$ $Y_{21}=\frac{-Z_{21}}{\det Z}$ $Y_{22}=\frac{Z_{11}}{\det Z}$	$H_{11}=\frac{\det Z}{Z_{22}}$ $H_{12}=\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $H_{21}=\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$ $H_{22}=\frac{1}{Z_{22}}$
Y	$Z_{11}=\frac{Y_{22}}{\det Y}$ $Z_{12}=\frac{-Y_{12}}{\det Y}$ $Z_{21}=\frac{-Y_{21}}{\det Y}$ $Z_{22}=\frac{Y_{11}}{\det Y}$	-	$H_{11}=\frac{1}{Y_{11}}$ $H_{12}=\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ $H_{21}=\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$ $H_{22}=\frac{\det Y}{Y_{11}}$
H	$Z_{11}=\frac{\det H}{H_{22}}$ $Z_{12}=\frac{H_{12}}{H_{22}}$ $Z_{21}=\frac{-H_{21}}{H_{22}}$ $Z_{22}=\frac{1}{H_{22}}$	$Y_{11}=\frac{1}{H_{11}}$ $Y_{12}=\frac{-H_{12}}{H_{11}}$ $Y_{21}=\frac{H_{21}}{H_{11}}$ $Y_{22}=\frac{\det H}{H_{11}}$	-

Associação de quadripolos em série



$$V_{1A} = Z_{11A} I_{1A} + Z_{12A} I_{2A} \quad (1) \qquad V_{1B} = Z_{11B} I_{1B} + Z_{12B} I_{2B} \quad (3)$$

$$V_{2A} = Z_{21A} I_{1A} + Z_{22A} I_{2A} \quad (2) \qquad V_{2B} = Z_{21B} I_{1B} + Z_{22B} I_{2B} \quad (4)$$

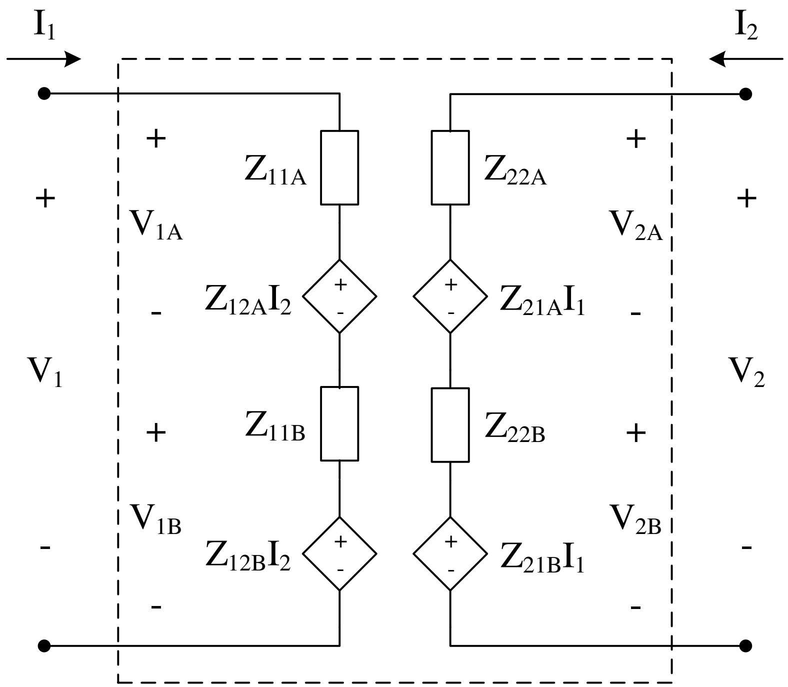
$$I_1 = I_{1A} = I_{1B} \quad (5) \qquad V_1 = V_{1A} + V_{1B} \quad (7)$$

$$I_2 = I_{2A} = I_{2B} \quad (6) \qquad V_2 = V_{2A} + V_{2B} \quad (8)$$

Substituindo (5) e (6) em (1), (2), (3) e (4), e depois em (7) e (8)

$$V_1 = Z_{11A} I_1 + Z_{12A} I_2 + Z_{11B} I_1 + Z_{12B} I_2 = (Z_{11A} + Z_{11B}) I_1 + (Z_{12A} + Z_{12B}) I_2$$

$$V_2 = Z_{21A} I_1 + Z_{22A} I_2 + Z_{21B} I_1 + Z_{22B} I_2 = (Z_{21A} + Z_{21B}) I_1 + (Z_{22A} + Z_{22B}) I_2$$



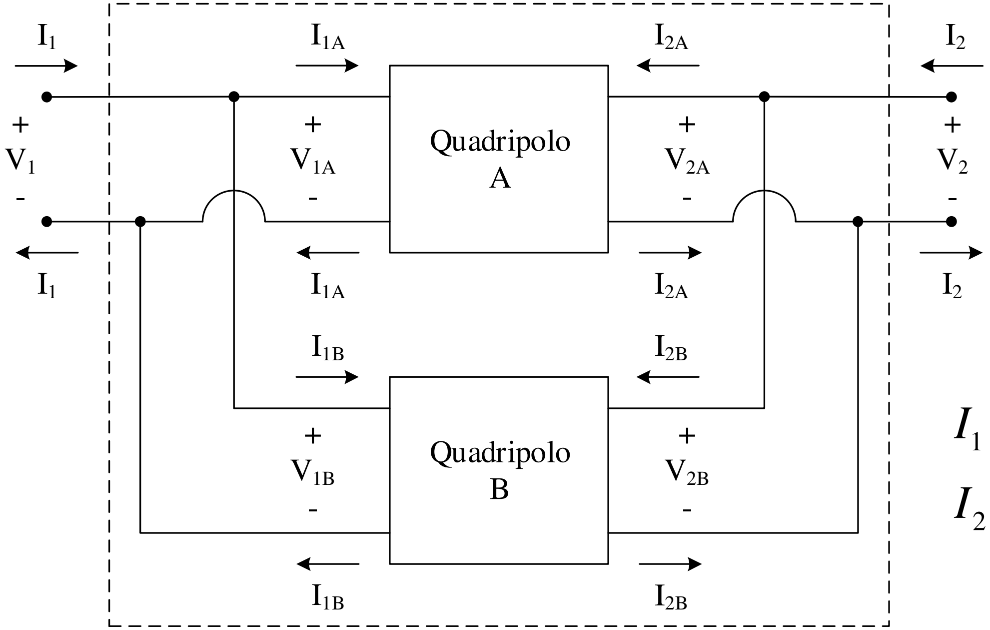
Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11A} + Z_{11B} & Z_{12A} + Z_{12B} \\ Z_{21A} + Z_{21B} & Z_{22A} + Z_{22B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Matriz dos parâmetros Z

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11A} + Z_{11B} & Z_{12A} + Z_{12B} \\ Z_{21A} + Z_{21B} & Z_{22A} + Z_{22B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

Associação de quadripolos em paralelo



$$I_{1A} = Y_{11A}V_{1A} + Y_{12A}V_{2A} \quad (1) \qquad I_{1B} = Y_{11B}V_{1B} + Y_{12B}V_{2B} \quad (3)$$

$$I_{2A} = Y_{21A}V_{1A} + Y_{22A}V_{2A} \quad (2) \qquad I_{2B} = Y_{21B}V_{1B} + Y_{22B}V_{2B} \quad (4)$$

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B} \quad (5) \qquad V_1 = V_{1A} = V_{1B} \quad (7)$$

$$I_2 = I_{2A} + I_{2B} \quad (6) \qquad V_2 = V_{2A} = V_{2B} \quad (8)$$

Substituindo (7) e (8) em (1), (2), (3) e (4), e depois em (5) e (6)

$$I_1 = Y_{11A}V_1 + Y_{12A}V_2 + Y_{11B}V_1 + Y_{12B}V_2 = \left(Y_{11A} + Y_{11B}\right)V_1 + \left(Y_{12A} + Y_{12B}\right)V_2$$

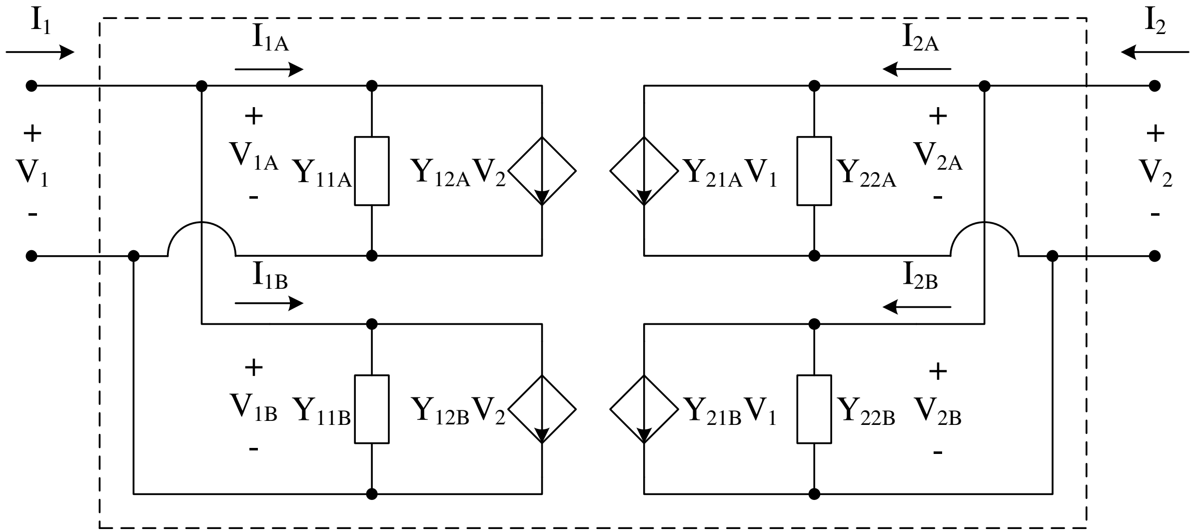
$$I_2 = Y_{21A}V_1 + Y_{22A}V_2 + Y_{21B}V_1 + Y_{22B}V_2 = \left(Y_{21A} + Y_{21B}\right)V_1 + \left(Y_{22A} + Y_{22B}\right)V_2$$

Na forma matricial tem-se

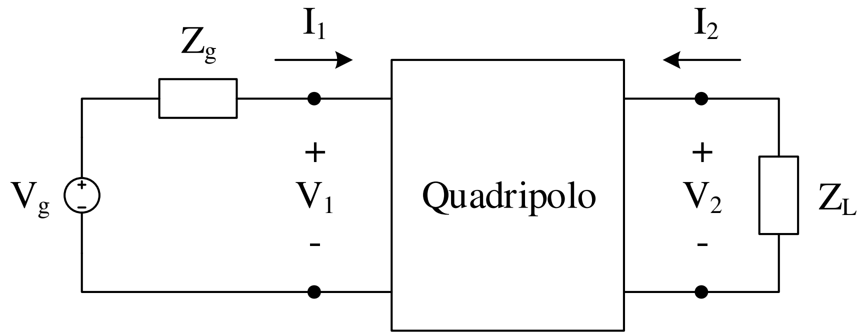
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11A} + Y_{11B} & Y_{12A} + Y_{12B} \\ Y_{21A} + Y_{21B} & Y_{22A} + Y_{22B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Matriz dos parâmetros *Y*

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11A} + Y_{11B} & Y_{12A} + Y_{12B} \\ Y_{21A} + Y_{21B} & Y_{22A} + Y_{22B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$



<u>Quadripolos com terminações de entrada e de saída</u>



Ganho de tensão

$$A_v = \frac{V_2}{V_g} \begin{cases} A_{vZ} = \dfrac{Z_L Z_{21}}{\left(Z_L + Z_{22}\right)\left(Z_g + Z_{11}\right) - Z_{12} Z_{21}} \\[2ex] A_{vY} = -\dfrac{Y_{21}}{\left(Y_L + Y_{22}\right)\left(1 + Z_g Y_{11}\right) - Z_g Y_{12} Y_{21}} \\[2ex] A_{vH} = -\dfrac{H_{21}}{\left(Y_L + H_{22}\right)\left(Z_g + H_{11}\right) - H_{12} H_{21}} \end{cases}$$

Ganho de corrente

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} \begin{cases} A_{iZ} = -\dfrac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} \\[2ex] A_{iY} = \dfrac{Y_L Y_{21}}{Y_{11}\left(Y_L + Y_{22}\right) - Y_{12} Y_{21}} \\[2ex] A_{iH} = \dfrac{Y_L H_{21}}{Y_L + H_{22}} \end{cases}$$

Ganho de potência

$$A_p = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \left|\frac{V_2 I_2}{V_g I_1}\right| = \left|A_v\right|\left|A_i\right|$$

$$P_{out} < P_{in} \rightarrow A_p < 1 \therefore \text{circuito passivo}$$

$$P_{out} > P_{in} \rightarrow A_p > 1 \therefore \text{circuito ativo}$$

Impedância de entrada

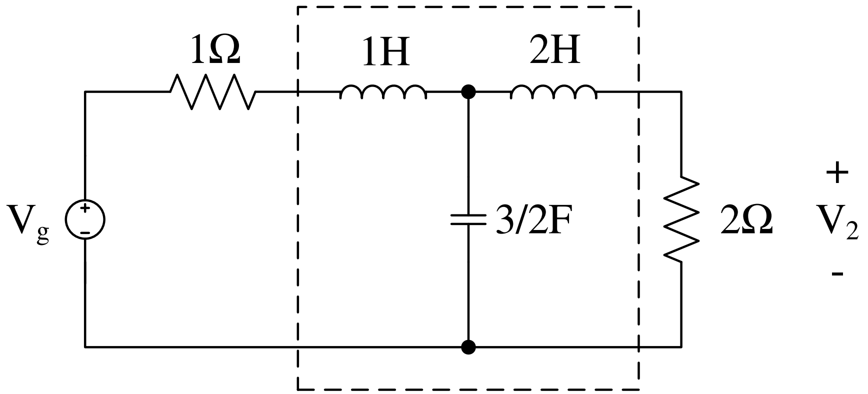
$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_1} \begin{cases} Z_{inZ} = Z_g + Z_{11} - \dfrac{Z_{12} Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} \\[2ex] Z_{inY} = \dfrac{\left(1 + Z_g Y_{11}\right)\left(Y_{22} + Y_L\right) - Z_g Y_{12} Y_{21}}{Y_{11}\left(Y_{22} + Y_L\right) - Y_{12} Y_{21}} \\[2ex] Z_{inH} = Z_g + H_{11} - \dfrac{Z_L H_{12} H_{21}}{1 + Z_L H_{22}} \end{cases}$$

Impedância de saída

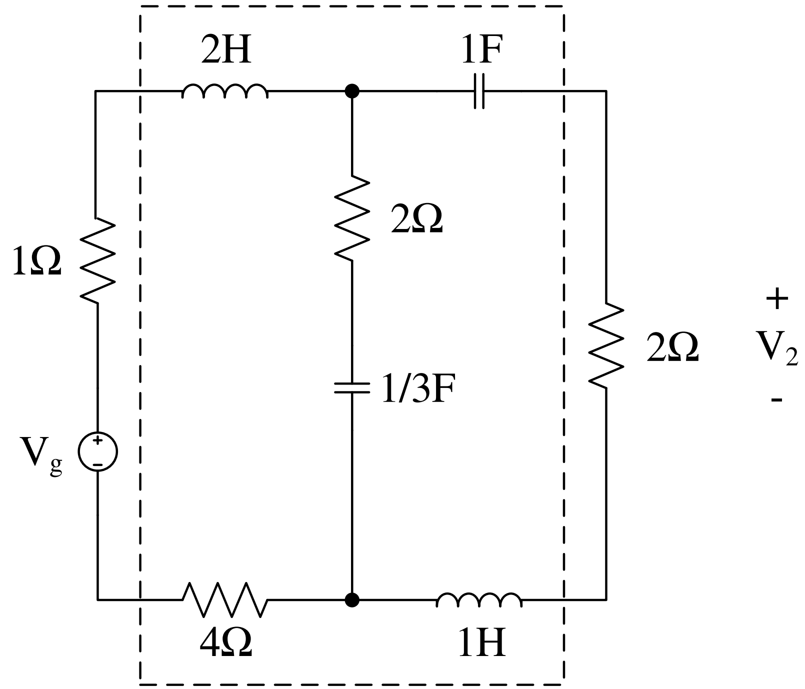
$$Z_{out} = \frac{V_2}{I_2} \begin{cases} Z_{outZ} = Z_{22} - \dfrac{Z_{12} Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} \\[2ex] Z_{outY} = \dfrac{1 + Z_g Y_{11}}{\left(1 + Z_g Y_{11}\right) Y_{22} - Z_g Y_{12} Y_{21}} \\[2ex] Z_{outH} = \dfrac{Z_g + H_{11}}{\left(Z_g + H_{11}\right) H_{22} - H_{12} H_{21}} \end{cases}$$

Exercícios

1) Utilizando os parâmetros Z, determinar os ganhos de tensão (A_v) e de corrente (A_i), e as impedâncias de entrada (Z_{in}) e de saída (Z_{out}). Resp: $A_v = (2/3)/(s^3+2s^2+2s+1)$, $A_i = -1/(3s^2+3s+1)$, $Z_{in} = (s^3+2s^2+2s+1)/(s^2+s+1/3)\Omega$, $Z_{out} = (s^3+s^2+s+1/3)/(1/2s^2+1/2s+1/3)\Omega$



2) Utilizando os parâmetros Z, determinar o ganho de tensão A_v. Resp: $A_v = (4s^2 + 6s)/(2s^4 + 15s^3 + 35s^2 + 28s + 3)$



3) Determinar os parâmetros Y do circuito a seguir, chamado de *Pi*-híbrido. Dica: utilizar a associação de quadripolos em paralelo, sendo que uma estrutura é composta pelas admitâncias e a outra estrutura é composta pelas FCCT. Resp: $Y_{11} = Y_A + Y_B$, $Y_{12} = g_r - Y_B$, $Y_{21} = g_m - Y_B$, $Y_{22} = Y_B + Y_C$