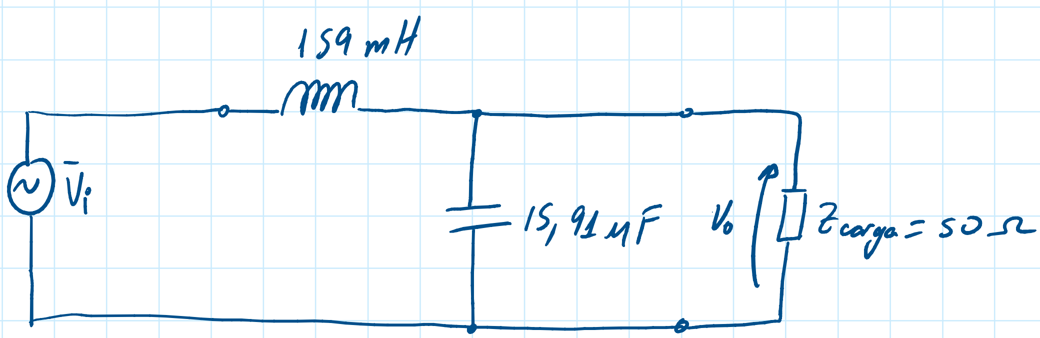
Vimos que os indutores e capacitores apresentam valores de impedância e admitância que dependem da frequência. Isso significa que um circuito RLC possui uma resposta diferente para cada frequência. Esse fenômeno recebe o nome de resposta em frequência do circuito.

Exemplo 1: Encontre a resposta em frequência, definida como $H(\omega) = \bar{V}_o/\bar{V}_i$ do circuito abaixo, assumindo as frequências de 1 Hz, 100 Hz e 1 kHz.



$$\bar{Z}_L = j\,2\pi f L = j\,2\pi \times 159m\,f = j f.$$

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{2\pi f C} = \frac{-j}{2\pi \cdot 15{,}91\mu\, C} = -j\frac{10^4}{f}$$

• Para $f = 1$ Hz : $Z_L = j$ e $\bar{Z}_C = -j\,10^4$

• Para $f = 1\ Hz$: $\bar{Z}_L = j$ e $\bar{Z}_C = -j\,10^4$

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_C // \bar{Z}_{carg} = \frac{-j\,10^4 \cdot 50}{50 - j\,10^4} = 50 - j\,0{,}25\ \Omega.$$

$$\bar{V}_o(1) = \frac{\bar{V}_i\,\bar{Z}_{eq}}{\bar{Z}_{eq} + \bar{Z}_L} = \bar{V}_i \cdot \frac{50 - j\,0{,}25}{50 - j\,0{,}25 + j}$$

$$\frac{\bar{V}_o(1)}{\bar{V}_i} = H(1) = 1\ \angle -1{,}15^\circ$$

↳ A tensão de saída é praticamente igual a tensão de entrada.

• Para $f = 100\ Hz$: $\bar{Z}_L = j\,100$ e $\bar{Z}_C = -j\,100$

$$\bar{Z}_{eq} = -j\,100 // 50 = 44{,}72\ \angle -26{,}56^\circ\ \Omega$$

$$\frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = H(100) = \frac{44{,}72\ \angle -26{,}56}{44{,}72\ \angle -26{,}56 + j\,100}$$

$$H(100) = 0{,}5\ \angle -90^\circ$$

↳ Metade da tensão de entrada estará presente na saída e a tensão de saída está atrasada de 90° em relação a tensão de entrada

• Para $f = 1000\ Hz$: $\bar{Z}_L = j\,1000$ $\bar{Z}_C = -j\,10$

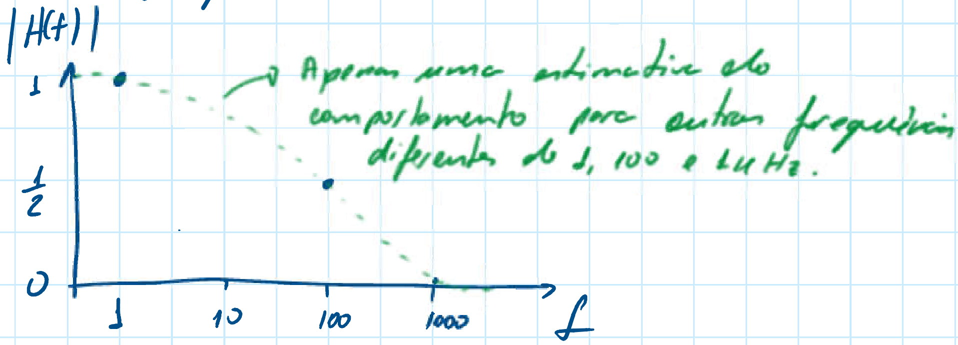
$$\bar{Z}_{eq} = -j\,10 // 50 = 9{,}8\ \angle -78{,}7^\circ$$

$$\frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = H(1000) = \frac{9{,}8\ \angle -78{,}7^\circ}{9{,}8\ \angle -78{,}7^\circ + j\,1000}$$

$$H(1000) = 0{,}01\ \angle -168^\circ$$

↳ Praticamente não há tensão de saída, neste caso.

Podemos fazer um gráfico aproximado de como o circuito responde ao longo da frequência

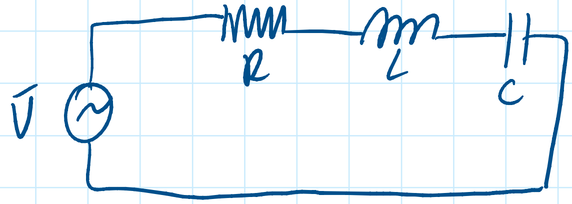


Circuitos RLC podem ser projetados para ter curvas de respostas específicas, de modo que a tensão de saída pode ser elevada para frequências específicas, e nula para outras frequências. Pode-se afirmar que o circuito está sintonizado em uma frequência desejada (aquela que leva a um alto valor de tensão na saída).

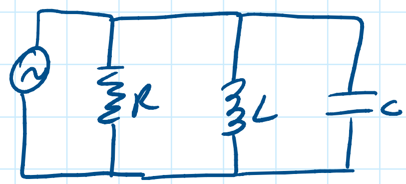
Todo circuito RLC possui uma frequência natural, na qual a troca de energia entre o capacitor e o indutor é mais

eficiente. Essa frequência, na qual o circuito oscila naturalmente, é chamada de frequência de ressonância. Essa frequência é muito útil para a construção de filtros. Num circuito LC ideal, operando na frequência de ressonância, a energia fornecida por um elemento reativo é totalmente absorvida pelo o outro elemento, num ciclo perene. Isso resulta em uma oscilação auto_sustentável, onde não é necessário fornecer mais energia para o sistema.
Na prática, no entanto, resistências parasitas presentes nos componentes acabam dissipando a energia na forma de calor, resultando na atenuação do sinal, caso não haja injeção periódica de energia no sistema.

Os circuitos ressonantes podem ser do tipo série, onde os elementos R, L e C são tipo série, onde os elementos R, L e C são inseridos em série no circuito, ou pode ser do tipo paralelo, onde os elementos são inseridos em paralelo entre si:



circuito ressonante série



circuito ressonante paralelo.

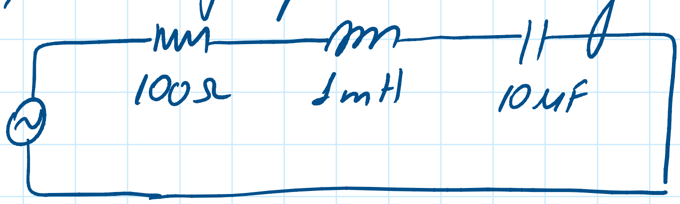
Circuitos Ressonantes em Série.

Em um circuito ressonante série, a impedância vista pela fonte é dada por:

$$\bar{Z}_T = R + Z_L + Z_C$$

$$\bar{Z}_T = R + jX_L - jX_C$$

Exemplo 2: Encontre a impedância do circuito RLC série a seguir em função da frequência angular ω. O que acontece se $\omega = 10\,k\,\frac{rad}{s}$



$$Z_T = 100 + j\omega\cdot 10^{-3} - \frac{j}{\omega\cdot 10^{-5}} = 100 + j\left[10^{-3}\omega - \frac{10^{+5}}{\omega}\right]$$

$$Z_T = 100 + j\left[\frac{10^{-3}\omega^2 - 10^5}{\omega}\right]$$

$$Z_T = 100 + j\,10^{-3}\cdot\left[\frac{\omega^2 - 10^8}{\omega}\right]$$

Para $\omega = 10^4$, $Z_T = 100 + j\,10^{-3}\left[\frac{(10^4)^2 - 10^8}{10^4}\right]$

$Z_T = 100\,\Omega$. A impedância é puramente real.

O circuito está em ressonância quando a fonte percebe uma impedância puramente real, ou seja, quando

$$\bar{Z}_T = R.$$

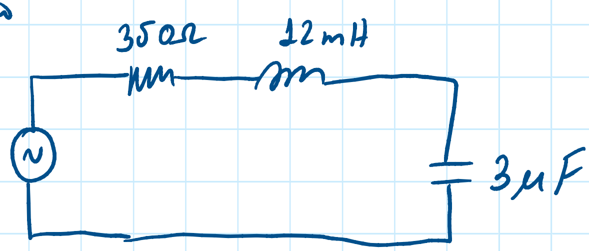
Para que isso ocorra, é necessário que

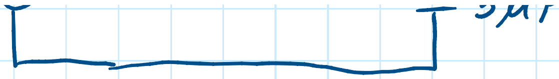
$$X_L = X_C$$

$$\omega_R L = \frac{1}{\omega_R C} \quad \therefore \quad \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Exemplo 3: Calcule a frequência de ressonância do circuito abaixo e a impedância vista pela fonte nesta condição.





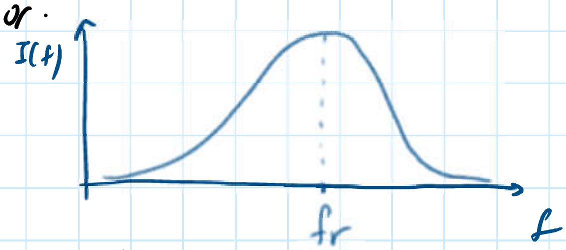
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{12m \cdot 3u}} = 5{,}27\ k\ rad/s \quad \therefore f = 838{,}8\ Hz$$

$Z_T = 350\,\Omega$, já que $X_L = X_C$.

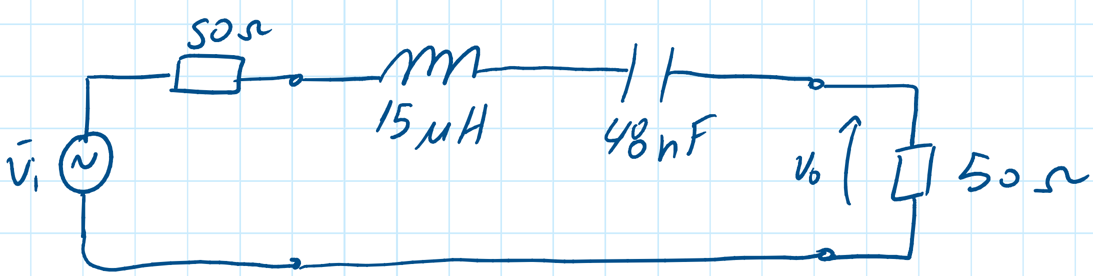
Na condição de ressonância, a corrente no circuito é

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R}.$$

Note que tensão e corrente estão em fase e que este é o maior valor que a corrente pode assumir. Para qualquer outra frequência, o valor da corrente será menor.



Exemplo 4: Encontre a resposta do circuito a tensão $\bar{V}_o$ em função de $\bar{V}_i$, assumindo que o mesmo opera com frequências dadas por $0{,}1\,f_r$, f_r e $10\,f_r$.



$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15 \cdot 10^{-6} \cdot 48 \cdot 10^{-9}}} = 1{,}18\ \frac{Mrad}{s}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15\cdot 10^{-6} \times 48\cdot 10^{-9}}} = 1{,}18 \ \frac{Mrad}{s}$$

- Para $\omega = 0{,}1\,\omega_r = 118 \times rad/s$

circuito capacitivo

$$Z_T = 50 + 50 + j\,118\cdot 10^{3} \times 15\cdot 10^{-6} - \frac{j}{118\cdot 10^{3}\cdot 48\cdot 10^{-9}} = 100 - j\,174{,}6\ \Omega$$

$$I_T = \frac{V_i}{Z_T} = 4{,}97\cdot 10^{-3}\,\angle 60{,}2° \cdot V_i$$

$$V_0 = I_T \times 50 \quad \therefore \quad V_0 = 50 \times 4{,}97\cdot 10^{-3}\,\angle 60{,}2° \ V_i$$

$$\frac{V_0}{V_i} = 0{,}25\,\angle 60{,}2°$$

- Para $\omega = \omega_r = 1{,}18\ Mrad/s$

$$Z_T = 50 + 50 + j\,1{,}18\cdot 10^{6} \cdot 15\cdot 10^{-6} - \frac{j}{1{,}18\cdot 10^{6} \times 48\cdot 10^{-9}}$$

Circuito puramente resistivo

$$Z_T = 100\ \Omega$$

$$I_T = \frac{V_i}{Z_T} = \frac{V_i}{100} = 0{,}01\,V_i$$

$$V_0 = I_T \times 50 = 0{,}01\,V_i \times 50 \quad \therefore \quad \frac{V_0}{V_i} = 0{,}5$$

- Para $\omega = 10\,\omega_r = 11{,}8\ Mrad/s$

$$Z_T = 50 + 50 + j\,11{,}8\cdot 10^{6} \times 15 \times 10^{-6} - \frac{j}{11{,}8\cdot 10^{6} \times 48 \times 10^{-9}}$$

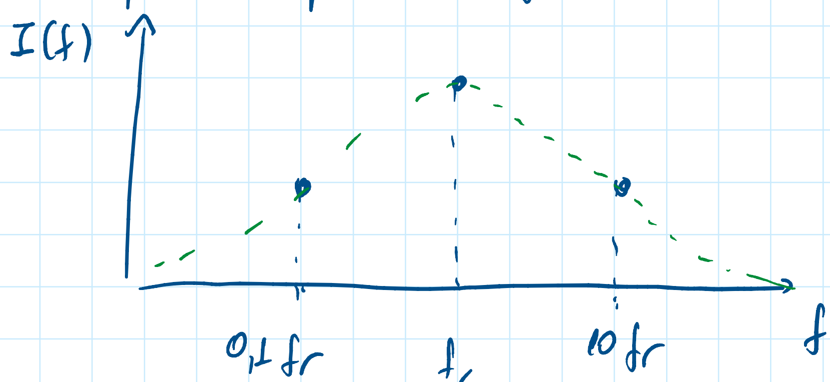
circuito indutivo

$Z_T = 100 + j\,175,2\ \Omega$

$I_T = \frac{V_i}{Z_T} = \frac{V_i}{100 + j\,175,2} = 4,97 \times 10^{-3}\ V_i$

$V_o = 50 \cdot I_T = 0,25 \angle -60,2^\circ$

O resultado deste exemplo mostra que a máxima corrente ocorre em fr e que o seu módulo cai a partir deste valor tanto para a esquerda quanto para a direita.



Outra conclusão importante é que o circuito tem um comportamento capacitivo para frequências abaixo de fr e um comportamento indutivo para freq. acima de fr.

A resposta da corrente em função da frequência mostra que há uma largura frequência mostra que há uma largura de faixa, ou seja, uma gama de frequências, onde a potência dissipada no circuito é significativa. A potência irradiada pelo resistor é dada por

$$P(f) = R I^2(f).$$

A potência será máxima na frequência de ressonância, quando

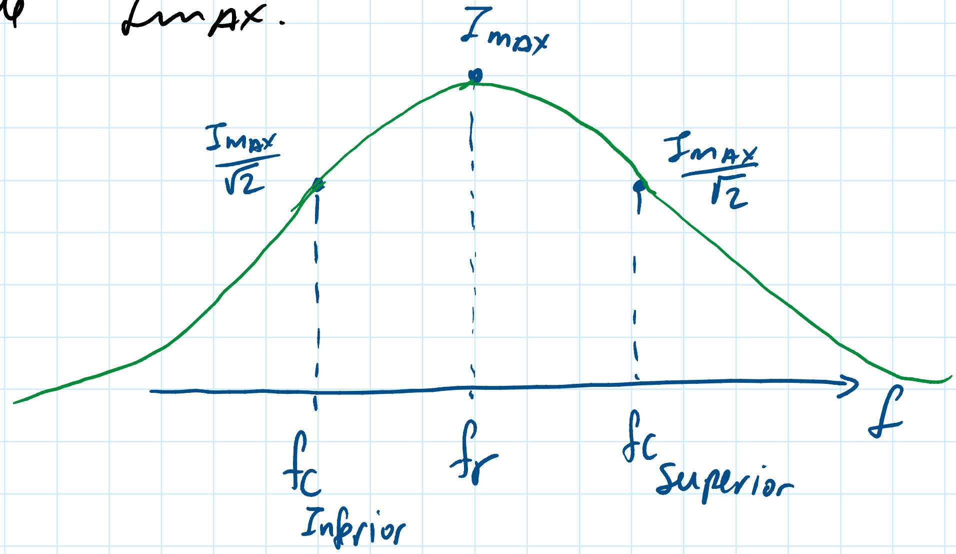
$$P_{MAX} = P(f_r) = R I_{MAX}^2$$

A frequência de corte do circuito é definida como sendo a frequência que leva a potência dissipada no resistor a ser metade da máxima potência dissipada, ou seja.

$$P_{corte} = \frac{P_{MAX}}{2} = \cancel{R} I_{corte}^2 = \cancel{R} \frac{I_{MAX}^2}{2}$$

$$I_{corte} = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}$$

Logo, a frequência de corte do circuito ressonante série é aquela em que resulta em uma corrente $\sqrt{2}$ vezes menor do que I_{max}.



Como a curva da corrente pela frequência tem valor máximo na frequência de ressonância f_r, existem duas frequências que levam a corrente a assumir o valor de $I_{max}/\sqrt{2}$, que são a frequência de corte superior e a frequência de corte inferior.

A frequencia de corte inferior é obtida quando $I = I_{max}/\sqrt{2}$ e o circuito é predominantemente capacitivo. A frequência de corte superior é obtida quando $I = I_{max}/\sqrt{2}$ e o circuito é predominantemente indutivo.

Sabemos que $I(\omega) = \dfrac{V_i}{Z_T(\omega)}$ e $I_{max} = \dfrac{V_i}{R}$.

Então ω_c será obtido fazendo

$$|I(\omega_c)| = \left|\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{\cancel{V_i}}{R\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{\cancel{V_i}}{R + j\,(X_L(\omega_c) - X_C(\omega_c))}\right|$$

$$R\sqrt{2} = |R + j\,(X_L - X_C)|$$

$$R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + (X_C - X_C)^2}$$

$$2R^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \quad \therefore \quad (X_L - X_C)^2 = R^2$$

Assumindo que $X_L > X_C$, ou seja, que o circuito opera com frequência superior a f_r, então

$$X_L - X_C = R \quad \therefore \quad \omega_{c_s} L - \frac{1}{\omega_{c_s} C} = R$$

$$\omega_{c_s}^2 LC - RC\,\omega_{c_s} - 1 = 0$$

$$\omega_{c_s}^2 - \frac{R}{L}\,\omega_{c_s} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega_{c_s} = \frac{+\dfrac{R}{L} + \sqrt{\dfrac{R^2}{L^2} + \dfrac{4}{LC}}}{2}$$

Em Hertz, temos:

$$f_{c_{Superior}} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right]$$

Agora, assumindo que $X_C > X_L$, ou seja, que o circuito é predominantemente capacitivo, o que significa que ele opera em uma frequência menor que f_r, então.

$$X_C - X_L = R$$

$$\frac{1}{\omega_{C_I} C} - \omega_{C_I} L - R = 0 \quad \therefore \; -\omega_{C_I}^2 LC - RC\omega_{C_I} + 1 = 0$$

$$\omega_{C_I}^2 + \frac{R}{L}\omega_{C_I} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega_{C_I} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}{2}$$

E Hertz, temos

$$f_{C_I} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right]$$

A largura de faixa do circuito consiste na gama de frequências entre as frequências de corte superior e inferior.

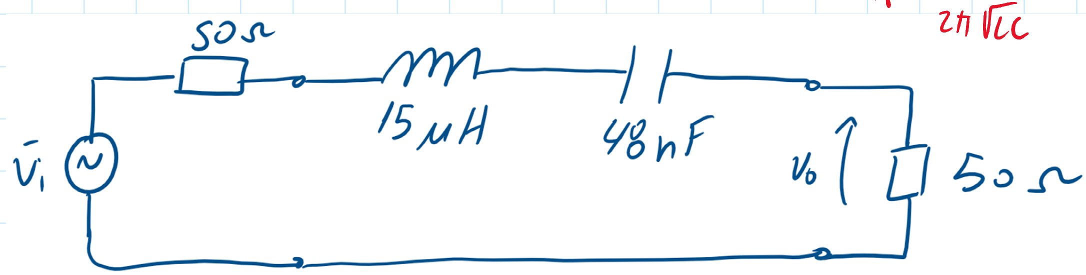
$$B_W = \Delta f = f_{c_S} - f_{c_I}$$

$$BW = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right] - \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right]$$

$$BW = \frac{1}{4\pi}\frac{R}{L} + \frac{1}{4\pi}\frac{R}{L} = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L}$$

Exemplo 6: Encontre as frequências de corte e a BW do circuito abaixo

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 187,57\,kHz$$



$$f_{cS} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{100}{15\mu} + \sqrt{\left(\frac{100}{15\mu}\right)^2 + \frac{4}{15\mu \times 48n}}\right]$$

$$f_{cS} = \frac{1}{4\pi}\left[6,67M + 7,07M\right] \therefore f_{cS} = 1,09\,MHz$$

$$f_{cI} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[-6,67M + 7,07M\right] = 32,2\,kHz$$

$$BW = 1,09M - 32,2\,k = 1,06\,MHz.$$

As tensões no capacitor e no indutor são

$$V_{C_R} = -j\,I_R X_C = -j\,\frac{V}{R} X_C = \frac{V}{R} X_C \underline{/-90^\circ}$$

$$V_{LR} = +j\,I_R X_L = +j\,\frac{V}{R} X_L = \frac{V}{R} X_L \underline{/+90^\circ}$$

Como $X_C = X_L$, ambas as tensões possuem o mesmo módulo, mas estão em contrafase; de modo que

$$V_{CR} + V_{LR} = 0$$

Os valores individuais das tensões no capacitor e no indutor podem assumir valores elevados na frequência de ressonância, em função do Fator de Mérito do circuito. Mas iremos explorar essa característica futuramente