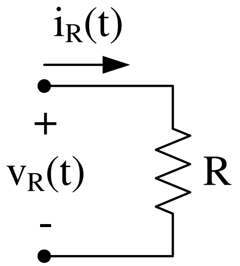
Solução de circuitos no domínio da frequência

- Resistor

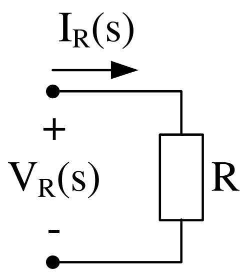
No domínio do tempo:



$$v_R(t) = R i_R(t) \qquad i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$$

No domínio da frequência:

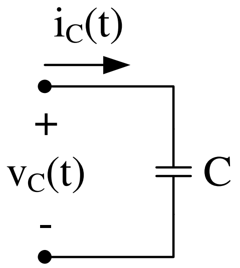
$$V_R(s) = R I_R(s) \qquad I_R(s) = \frac{V_R(s)}{R}$$



$$Z_R(s) = \frac{V_R(s)}{I_R(s)} = R \equiv \text{impedância resistiva}$$

- <u>Capacitor</u>

No domínio do tempo:



$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

No domínio da frequência:

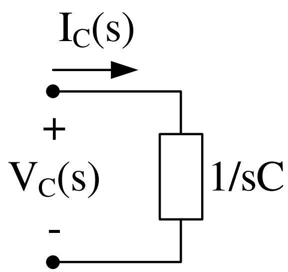
$$I_C(s) = C\left[sV_C(s) - v_C(0)\right] = sCV_C(s) - Cv_C(0)$$

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{Cv_C(0)}{sC} = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}$$

onde $v_C(0)$ é a condição inicial (tensão armazenada).

Para $v_C(0) = 0V$, tem-se:

$$I_C(s) = sCV_C(s)$$

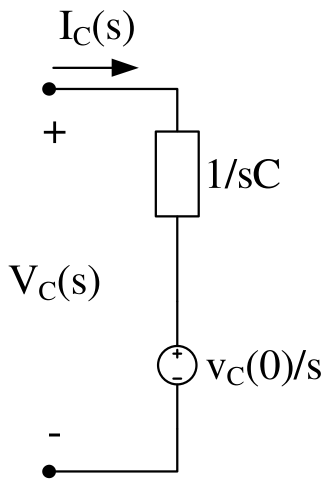


$$Z_C(s) = \frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC} \equiv \text{impedância capacitiva}$$

Circuito equivalente transformado:

Do ponto de vista da corrente o circuito equivalente é

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}$$

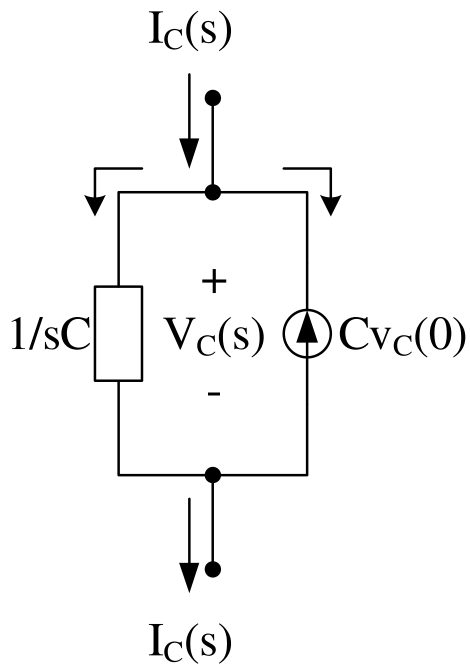


$\mathcal{L}[Cv_C(0)\delta(t)] = Cv_C(0)$

Portanto, $Cv_C(0)$ é uma fonte do tipo impulsiva.

Do ponto de vista da tensão o circuito equivalente é

$$I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0)$$

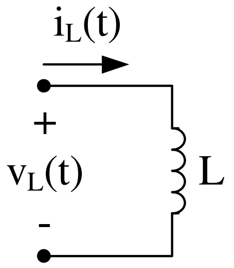


$\mathcal{L}[v_C(0)u(t)] = v_C(0)/s$

Portanto, $v_C(0)/s$ é uma fonte do tipo degrau.

- Indutor

No domínio do tempo:



$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

No domínio da frequência:

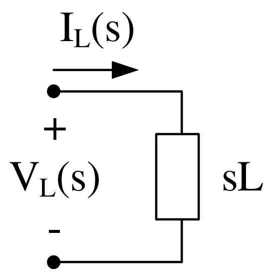
$$V_L(s) = L\left[sI_L(s) - i_L(0)\right] = sLI_L(s) - Li_L(0)$$

$$I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{Li_L(0)}{sL} = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}$$

onde $i_L(0)$ é a condição inicial (corrente armazenada).

Para $i_L(0) = 0$A, tem-se

$$V_L(s) = sLI_L(s)$$

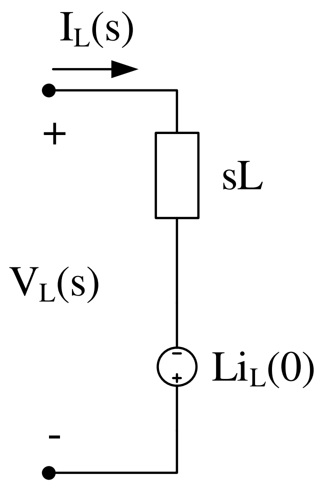


$$Z_L(s) = \frac{V_L(s)}{I_L(s)} = sL \equiv \text{impedância indutiva}$$

Circuito equivalente transformado

Do ponto de vista da tensão o circuito equivalente é

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0)$$

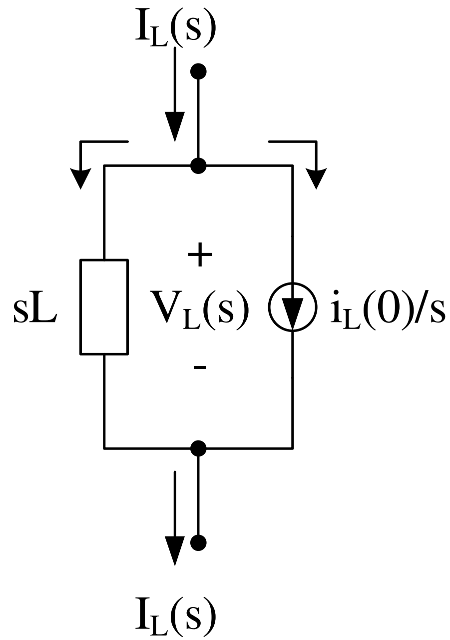


$\mathcal{L}[Li_L(0)\delta(t)] = Li_L(0)$

Portanto, $Li_L(0)$ é uma fonte do tipo impulsiva.

Do ponto de vista da corrente o circuito equivalente é

$$I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}$$

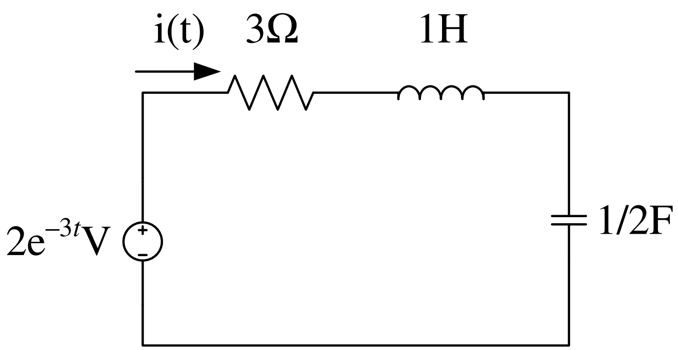


$\mathcal{L}[i_L(0)\mathrm{u}(t)] = i_L(0)/s$

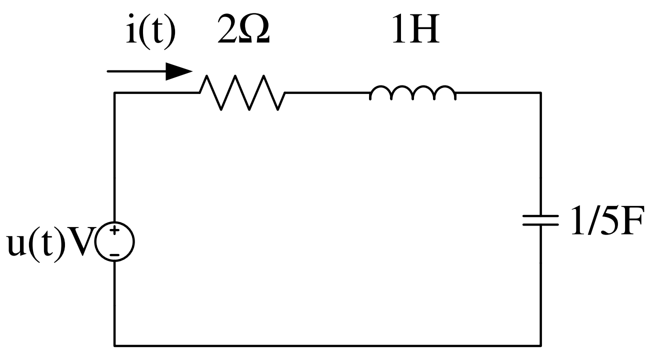
Portanto, $i_L(0)/s$ é uma fonte do tipo degrau.

Exemplos

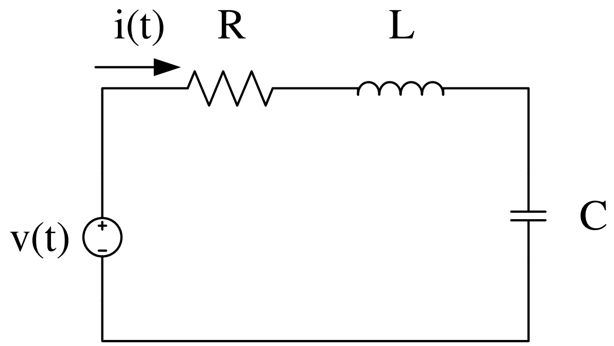
1) Calcular $i(t)$, $v_R(t)$, $v_L(t)$ e $v_C(t)$ para $t > 0$s com $i_L(0) = 4$A e $v_C(0) = 8$V. Resp: $i(t) = -13e^{-t} + 20e^{-2t} - 3e^{-3t}$ A p/ $t > 0$s, $v_R(t) = -39e^{-t} + 60e^{-2t} - 9e^{-3t}$ V p/ $t > 0$s, $v_L(t) = 13e^{-t} - 40e^{-2t} + 9e^{-3t}$ V p/ $t > 0$s, $v_C(t) = 26e^{-t} - 20e^{-2t} + 2e^{-3t}$ V p/ $t > 0$s.



2) Calcular $i(t)$ para $t > 0$s e considerando as condições iniciais nulas. Resp: $i(t) = 0{,}5e^{-t}\text{sen}(2t)$A p/ $t > 0$s.



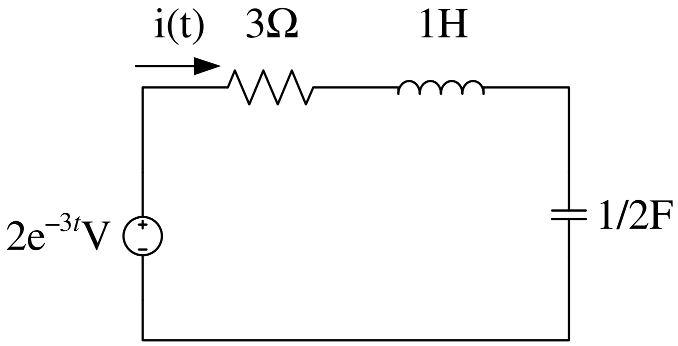
- Resposta completa



$$Y(s) = Y_f(s) + Y_n(s)$$

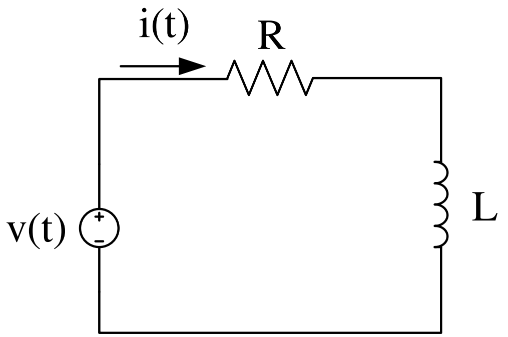
onde:
$Y(s)$ é a resposta completa do sistema (tensão ou corrente)
$Y_f(s)$ é a resposta permanente do sistema (forçada ou particular), depende da excitação e condições iniciais nulas
$Y_n(s)$ é a resposta transitória do sistema (natural ou homogênea), depende das condições iniciais e excitação nula

Exemplo
Determinar as respostas natural, forçada e completa para $i(t)$ para $t > 0$s com $i_L(0) = 4$A e $v_C(0) = 8$V. Resp: $i_n(t) = -12e^{-t} + 16e^{-2t}$ A p/ $t > 0$s; $i_f(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$ A p/ $t > 0$s; $i(t) = -13e^{-t} + 20e^{-2t} - 3e^{-3t}$ A p/ $t > 0$s.

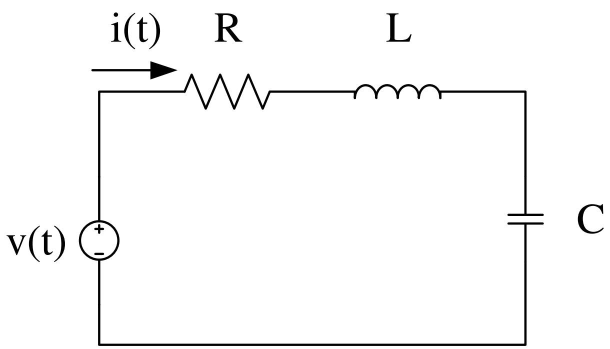


Exercícios

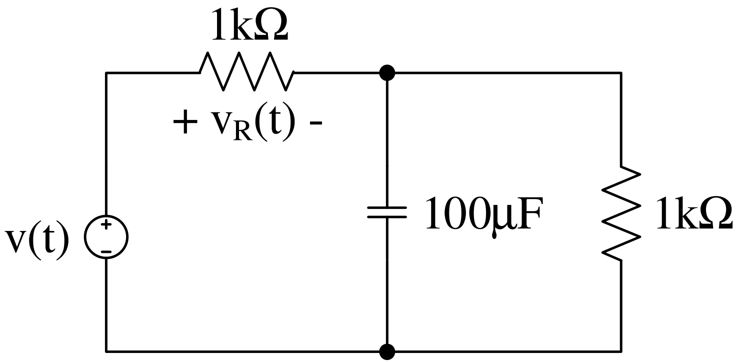
1) Determinar as respostas natural, forçada e completa para $i(t)$ para t > 0s, em resposta à tensão aplicada $v(t)$, com R = 1Ω, L = 1/2H, $i_L(0)$ = 2A e $v(t) = e^{-t}$V. Resp: $i_n(t) = 2e^{-2t}$ A p/ t > 0s; $i_f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ A p/ t > 0s; $i(t) = 2e^{-t}$ A p/ t > 0s.



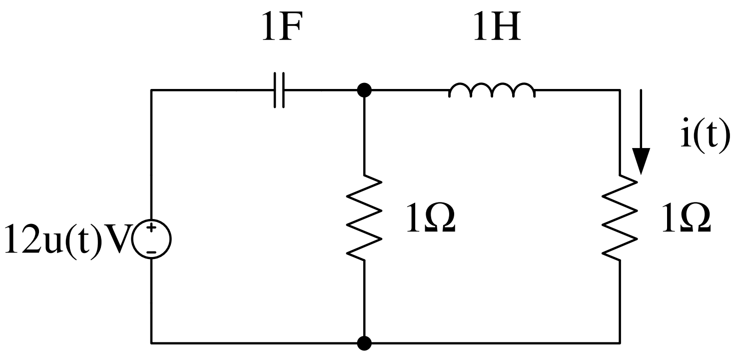
2) Determinar as respostas natural, forçada e completa para a saída $i(t)$ em resposta à entrada $v(t)$ para t > 0s, com R = 3Ω, L = 1H, C = 1/2F, $i_L(0)$ = 2A , $v_C(0)$ = 1V e $v(t) = e^{-3t}$V. Resp: $i_n(t) = -3e^{-t} + 5e^{-2t}$ A p/ t > 0s; $i_f(t) = -0{,}5e^{-t} + 2e^{-2t} - 1{,}5e^{-3t}$ A p/ t > 0s; $i(t) = -3{,}5e^{-t} + 7e^{-2t} - 1{,}5e^{-3t}$ A p/ t > 0s.



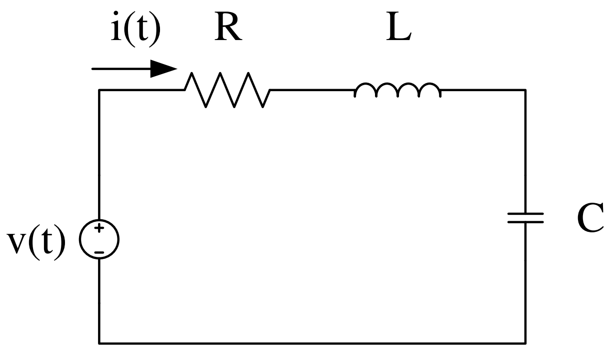
3) Determinar $v_R(t)$ para $t > 0$s com $v_C(0) = 5$V e $v(t) = 2e^{-10t}$V. Resp: $v_R(t) = -3e^{-20t}$ V p/ $t > 0$s.



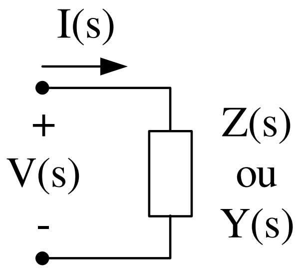
4) Determinar $i(t)$ para $t > 0$s com $i_L(0) = 2$A e $v_C(0) = 4$V. Resp: $i(t) = 2e^{-t}\cos(t) + 8e^{-t}\text{sen}(t)$ A p/ $t > 0$s.



5) Determinar as respostas natural, forçada e completa para $i(t)$ para $t > 0$s com $R = 2\Omega$, $L = 1$H, $C = 1/5$F, $i_L(0) = 2$A, $v_C(0) = 1$V, $v(t) = 2e^{-t}$V. Resp: $i_n(t) = 2e^{-t}\cos(2t) - 1,5e^{-t}\text{sen}(2t)$ A p/ $t > 0$s; $i_f(t) = -0,5e^{-t} + e^{-t}\text{sen}(2t) + 0,5e^{-t}\cos(2t)$ A p/ $t > 0$s; $i(t) = -0,5e^{-t} - 0,5e^{-t}\text{sen}(2t) + 2,5e^{-t}\cos(2t)$ A p/ $t > 0$s.



- Impedância e admitância



$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=R(s)\pm jX(s)$$

$Z(s)$ é a impedância [Ω]
$R(s)$ é a resistência [Ω]
$X(s)$ é a reatância [Ω].

$$Y(s)=\frac{1}{Z(s)}=\frac{I(s)}{V(s)}=G(s)\pm jB(s)$$

$Y(s)$ é a admitância [S]
$G(s)$ é a condutância [S]
$B(s)$ é a susceptância [S].

Em regime permanente senoidal: $s = j\omega$

. Resistor

$$Z_R(j\omega)=R$$

$$Y_R(j\omega)=\frac{1}{Z_R(j\omega)}=\frac{1}{R}=G$$

. Capacitor

$$Z_C(j\omega)=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ \quad\rightarrow\quad Z_C(j\omega)=jX_C(j\omega)\therefore X_C(j\omega)=-\frac{1}{\omega C}\equiv \text{reatância capacitiva}$$

Para ω = 0rad/s: $Z_C(j0) = \infty\Omega$ → circuito aberto
Para ω = ∞rad/s: $Z_C(j\infty) = 0\Omega$ → curto-circuito

$$Y_C(j\omega)=\frac{1}{Z_C(j\omega)}=\frac{1}{1/j\omega C}=j\omega C=\omega C\angle 90^\circ \quad\rightarrow\quad Y_C(j\omega)=jB_C(j\omega)\therefore B_C(j\omega)=\omega C\equiv \text{susceptância capacitiva}$$

Para ω = 0rad/s: $Y_C(j0) = 0S$ → circuito aberto
Para ω = ∞rad/s: $Y_C(j\infty) = \infty S$ → curto-circuito

. Indutor

$$Z_L(j\omega)=j\omega L=\omega L\angle 90^\circ \quad\rightarrow\quad Z_L(j\omega)=jX_L(j\omega)\therefore X_L(j\omega)=\omega L\equiv \text{reatância indutiva}$$

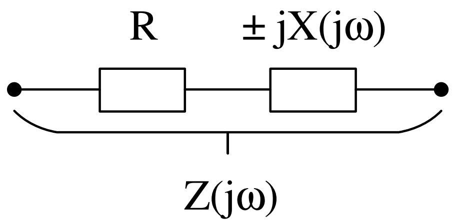
Para ω = 0rad/s: $Z_L(j0) = 0\Omega$ → curto-circuito
Para ω = ∞rad/s: $Z_L(j\infty) = \infty\Omega$ → circuito aberto

$$Y_L(j\omega)=\frac{1}{Z_L(j\omega)}=\frac{1}{j\omega L}=-j\frac{1}{\omega L}=\frac{1}{\omega L}\angle -90^\circ \quad\rightarrow\quad Y_L(j\omega)=jB_L(j\omega)\therefore B_L(j\omega)=-\frac{1}{\omega L}\equiv \text{susceptância indutiva}$$

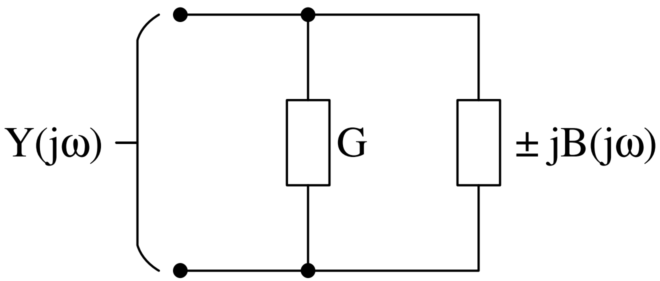
Para ω = 0rad/s: $Y_L(j0) = \infty S$ → curto-circuito
Para ω = ∞rad/s: $Y_L(j\infty) = 0S$ → circuito aberto

Portanto

$$Z(j\omega) = R \pm jX(j\omega) \begin{cases} +\text{: indutivo} \\ -\text{: capacitivo} \end{cases}$$



$$Y(j\omega) = G \pm jB(j\omega) \begin{cases} -\text{: indutivo} \\ +\text{: capacitivo} \end{cases}$$



$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2(j\omega)}}_{G} \mp j\underbrace{\frac{X(j\omega)}{R^2 + X^2(j\omega)}}_{B} = G \pm jB$$

Exercício:

Determinar a admitância Y de uma impedância $Z = (4 + j3)\Omega$. Desenhar o circuito equivalente para Z e Y. Resp: $Y = (0{,}16 - j0{,}12)\text{S}$.

Alguns pares da Transformada de Laplace

$$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s)$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}$$

$$e^{-at} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$$

$$\text{sen}(\omega t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}\text{sen}(\omega t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}\cos(\omega t) \xleftrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$2|K|e^{-\sigma_o t}\cos(\omega_o t+\varphi) \xleftrightarrow{L} \frac{K}{s+\sigma_o-j\omega_o}+\frac{K^*}{s+\sigma_o+j\omega_o}$$