Aula 02 - Sinais Senoidais

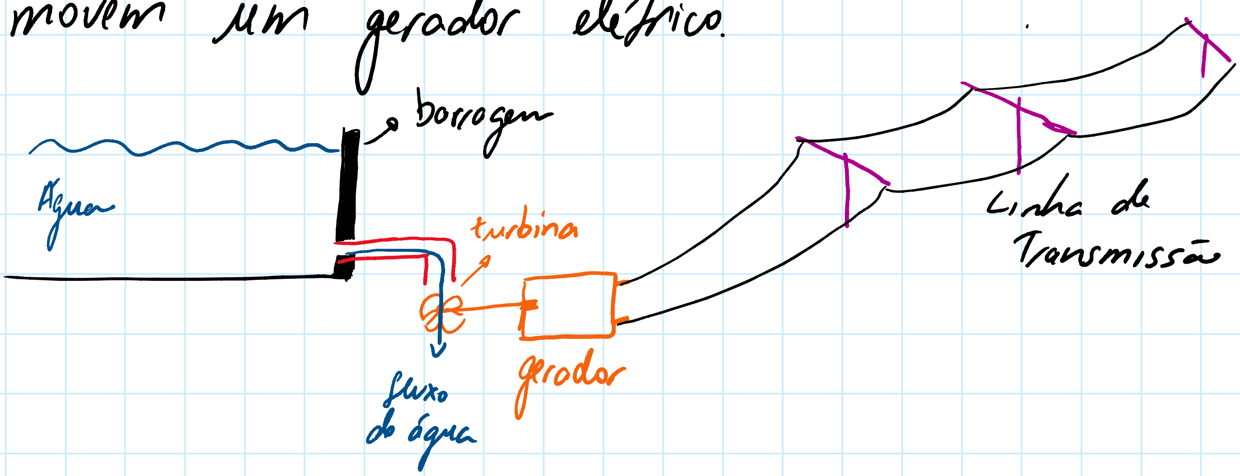
segunda-feira, 27 de julho de 2020 18:31

Sinais Senoidais

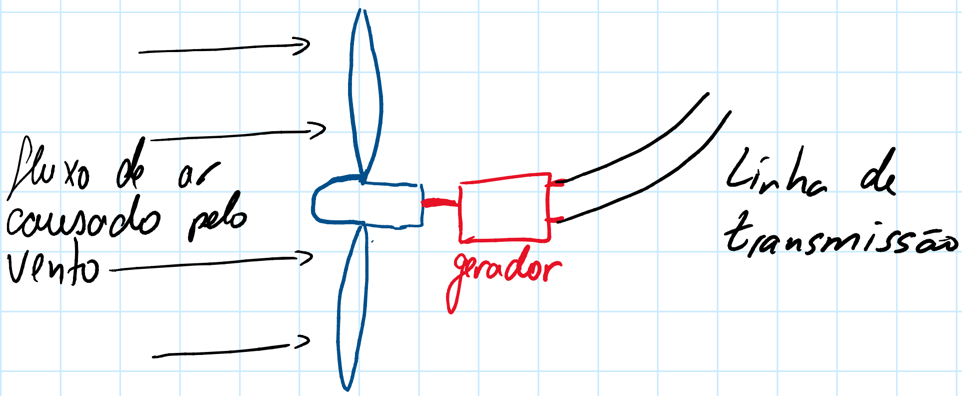
Os sinais senoidais formam uma classe especial de sinais, pois são amplamente utilizados em diversos ramos da Engenharia Elétrica. Os sinais senoidais são empregados para o transporte de energia elétrica, uma vez que as perdas que este sinal sofre nas linhas de transmissão são muito menores do que aquelas observadas em sinais D.C. Os sinais senoidais também são empregados como portadoras em sistemas de telecomunicações, sendo responsáveis pelo transporte de informação em meios cabeados ou em canais sem fio. Em sistemas de comunicação digital, os tons senoidais são usados como referência para sincronismo, estimação de canal e outros processos necessários para recuperar a Informação.

Os sinais senoidais gerados para o transporte de energia são provenientes de usinas de diferentes natureza: hidrelétricas, eólicas, térmicas ou nucleares.

Embora a natureza da fonte de energia seja diferente, o princípio é o mesmo em todos os casos. Na hidrelétrica, a água armazenada em uma barragem é canalizada até as pás que movem um gerador elétrico.

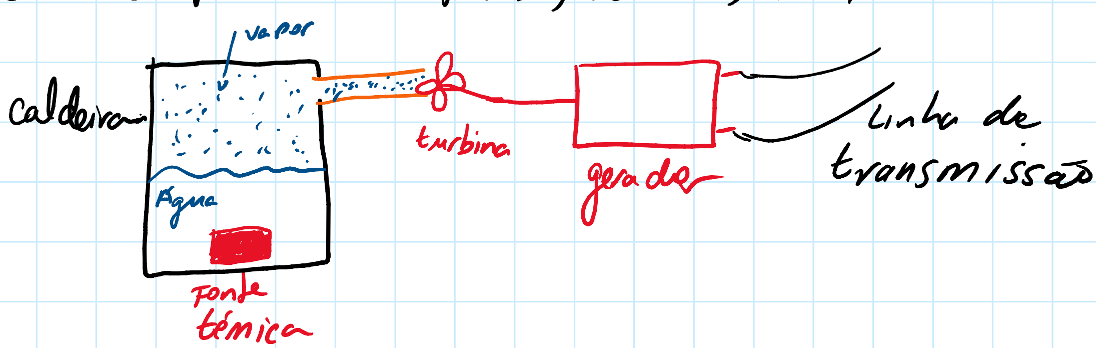


Na energia eólica, o fluxo de ar provocado pelo vento gira as pás da turbina, que está conectada ao eixo do gerador.



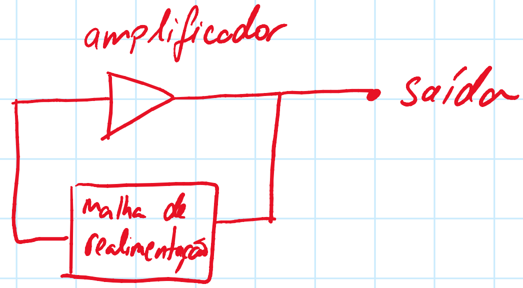
Nas usinas térmicas ou nucleares, uma fonte de energia é usada para evaporar a água. O vapor resultante, em alta pressão, é usado para girar a turbina, que está conectada no gerador.

No caso de uma usina térmica, a fonte de calor pode ser oriunda pela queima de gás natural ou carvão mineral. No caso das usinas nucleares, a fonte de calor advém da fissão nuclear de elementos radioativos, como urânio.



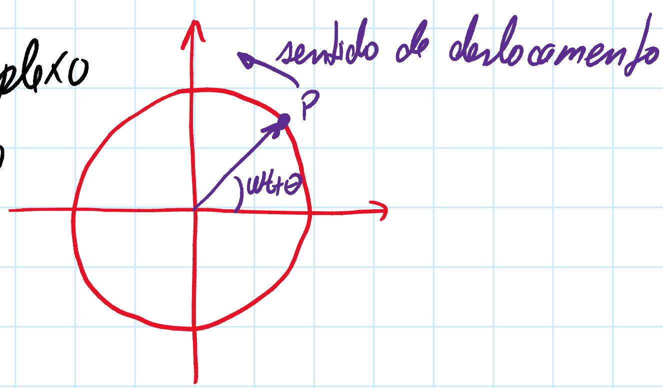
Os sinais senoidais gerados para sistemas de baixa

Os sinais senoidais gerados para sistemas de baixa potência, como sistemas de telecomunicações, por exemplo, são obtidos a partir de osciladores. Estes são circuitos realimentados, que entram em ressonância em uma frequência específica. Em termos gerais o oscilador é um amplificador realimentado que responde em uma frequência específica.



Os sinais senoidais são naturalmente obtidos a partir de movimentos circulares uniformes.

Plano complexo



O ponto P gira em torno do centro com velocidade o ponto P gira ao redor do centro com velocidade angular de ω radianos/segundo. θ é a fase na qual o ponto P se encontra no instante $t=0$, e recebe o nome de fase inicial.

A projeção do vetor no eixo das ordenadas assume a função seno ao longo do tempo, enquanto que a projeção ao longo da abscissa assume a função cosseno.

$$y(t) = P\,\text{sen}(\omega t + \theta)$$

$$x(t) = P\cos(\omega t + \theta)$$

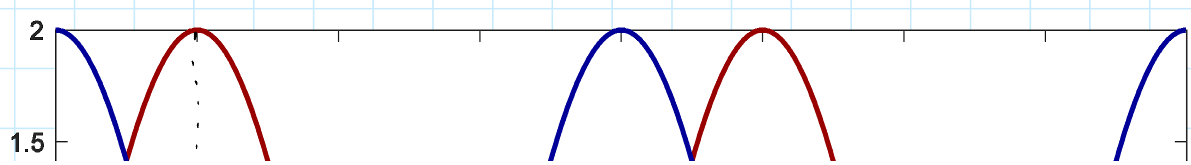
As funções seno e cosseno são relacionadas pela lei de Euler:

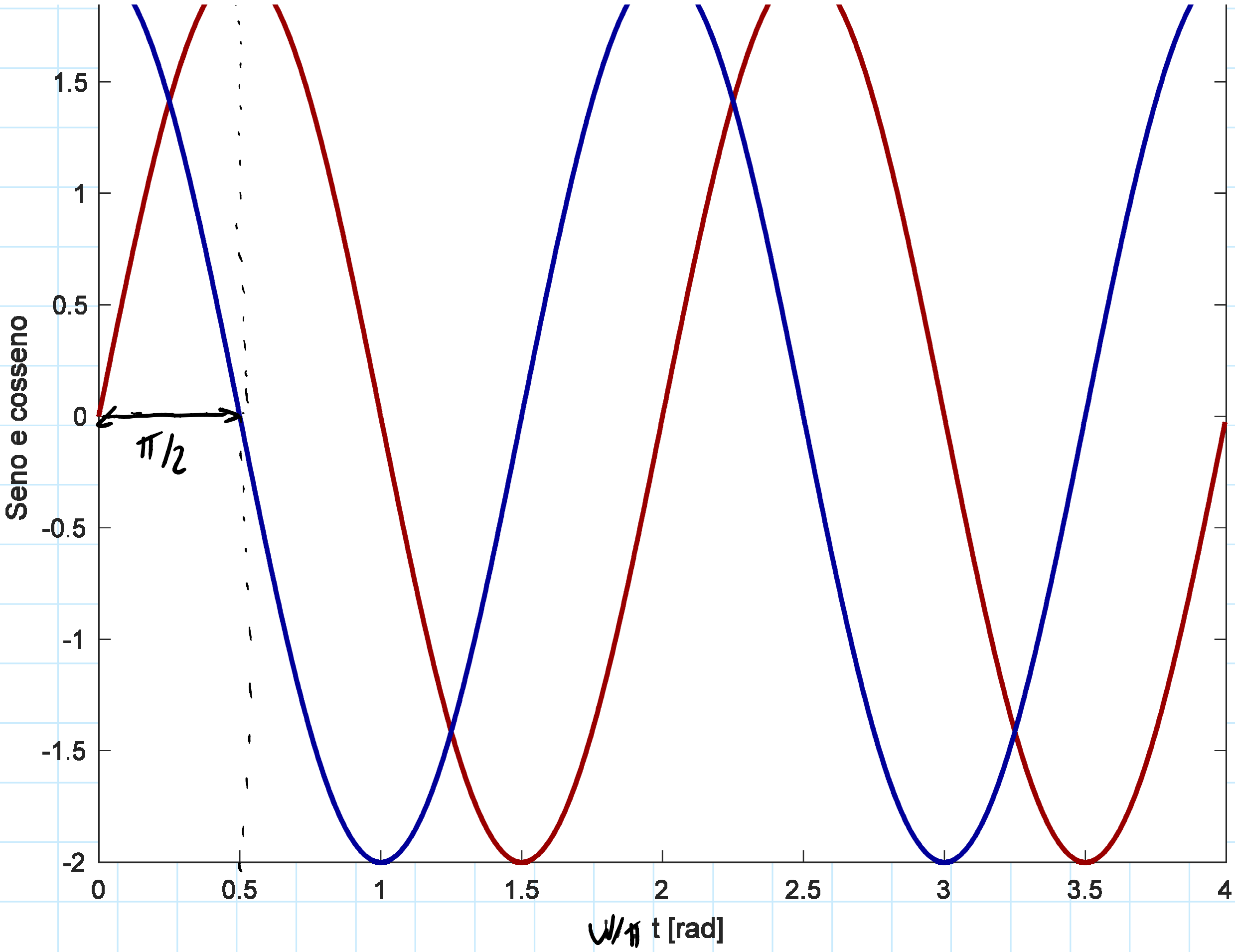
$$Pe^{j\omega t + \theta} = P\cos(\omega t + \theta) + j\,\text{sen}(\omega t + \theta)$$

A frequência angular do sinal senoidal determina a velocidade com que os sinais senoidais e cosseniodais variam ao longo do tempo. Em suma ω determina o tempo do tempo. Em suma, ω determina o tempo necessário para que o ponto P percorra uma volta completa no círculo, ou seja, para ele completar 2π radianos. Isso equivale a um ciclo dos sinais senoidais. Como já foi visto, o número de ciclos por segundo é a frequência do sinal. Logo,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

O seno e o cosseno estão defasados entre si de 90 graus. Considere o gráfico a seguir, onde a abscissa representa o ângulo dos sinais senoidal e cossenoidal ao longo do tempo, tendo sido este ângulo normalizado por π para facilitar a interpretação.





O seno assume seu pico $\pi/2$ radianos depois do cosseno, ou seja, o seno está atrasado $\pi/2$ radianos em relação ao cosseno.

$$\mathrm{sen}(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$$

Da mesma forma, pode-se concluir que o cosseno assume seu pico $\pi/2$ radianos antes que o seno, ou seja, o cosseno está $\pi/2$ radianos adiantado em relação ao seno.

adiantado em relação ao seno.

$$\cos(\omega t) = \text{sen}(\omega t + \pi/2)$$

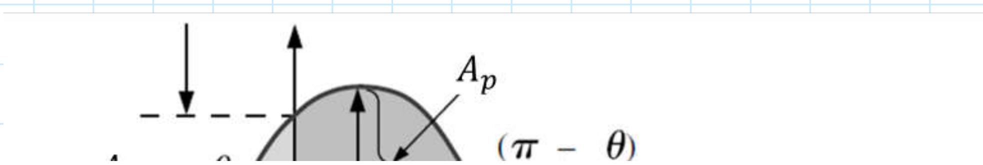
De uma forma genérica, um sinal está θ radianos adiantado em relação ao seno ou ao cosseno quando este valor θ aparece somado ao argumento da função: $\text{sen}(\omega t + \theta)$ ou $\cos(\omega t + \theta)$.

O sinal estará atrasado em relação ao seno ou ao cosseno, se este valor θ for subtraído do argumento da função: $\text{sen}(\omega t - \theta)$ ou $\cos(\omega t - \theta)$

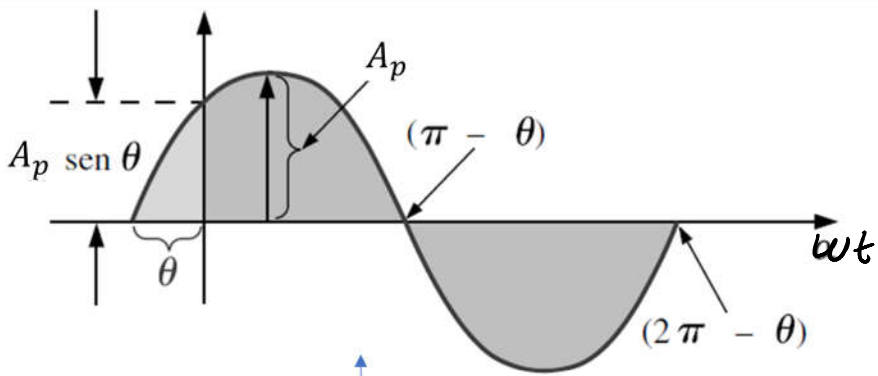
Como visto anteriormente, este valor θ é a fase inicial do sinal, que é o ângulo presente no argumento da função quando $t = 0s$.

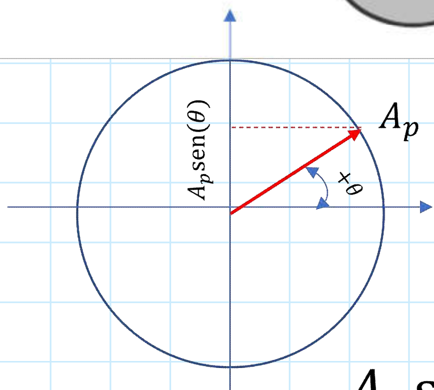
Para o caso da função seno adiantada, tem-se a seguinte situação.

seno adiantado de θ graus



seno adiantado de θ graus



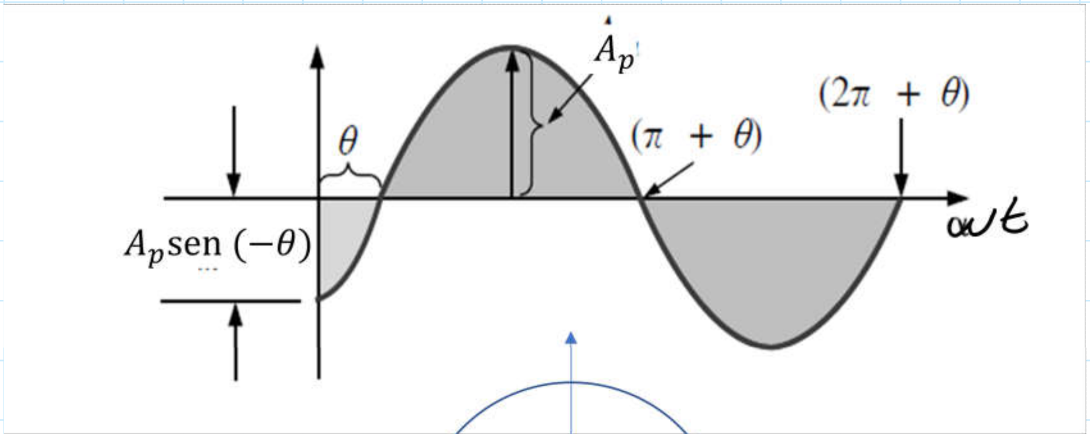


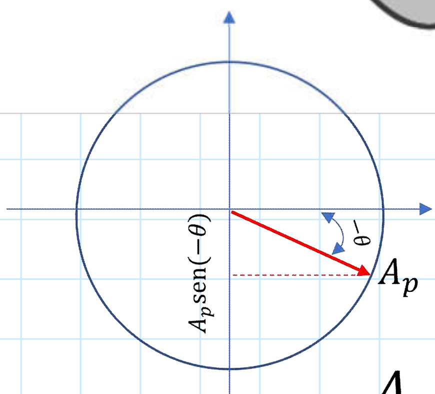
$$A_p\text{sen}(\omega t + \theta)$$

Observe que a função foi deslocada para a esquerda em θ radianos e que o valor em $t=0$ é $A_p\,\text{sen}(\theta)$. Isso pode ser visto também no plano complexo, onde a fase inicial de $+\theta$ resulta em uma projeção no eixo das ordenadas de $A_p\,\text{sen}(\theta)$

Para o caso de uma função seno atrasada, tem-se a seguinte situação.

seno atrasado de θ graus



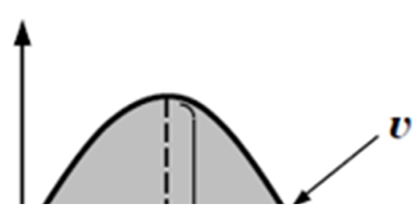


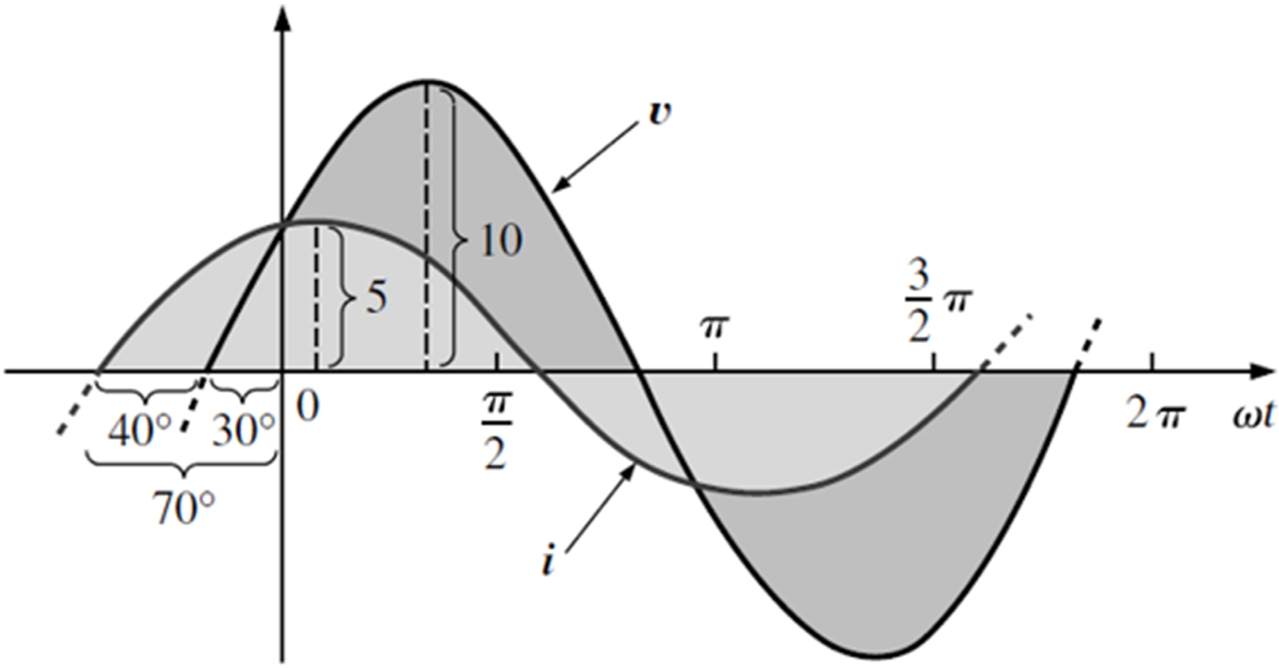
$$A_p\text{sen}(\omega t - \theta)$$

Neste caso, o sinal é deslocado em θ radianos para direita, resultando em $A_p\,\text{sen}(-\theta) = -A_p\,\text{sen}(\theta)$

O mesmo pode ser observado no plano complexo, onde a fase inicial de $-\theta$ tem uma projeção de $A_p\,\text{sen}(-\theta) = -A_p\,\text{sen}(\theta)$ no eixo das ordenadas

Exercício: encontre as expressões para os sinais de tensão e corrente a seguir





Podemos ver que o sinal $v(t)$ é um sinal senoidal que está adiantado de 30° em relação ao sen(ωt). Como

$$\begin{aligned} 180 &- \pi \\ 30 &- x \end{aligned} \quad \therefore \quad x = \frac{\pi}{6}$$

Logo: $v(t) = 10\ \text{sen}(\omega t + \pi/6)$ V

O sinal de corrente está 70° adiantado em relação ao seno, ou seja,

$$\begin{aligned} 180 &- \pi \\ 70 &- x \end{aligned} \quad \therefore \quad x = \frac{7}{18}\pi$$

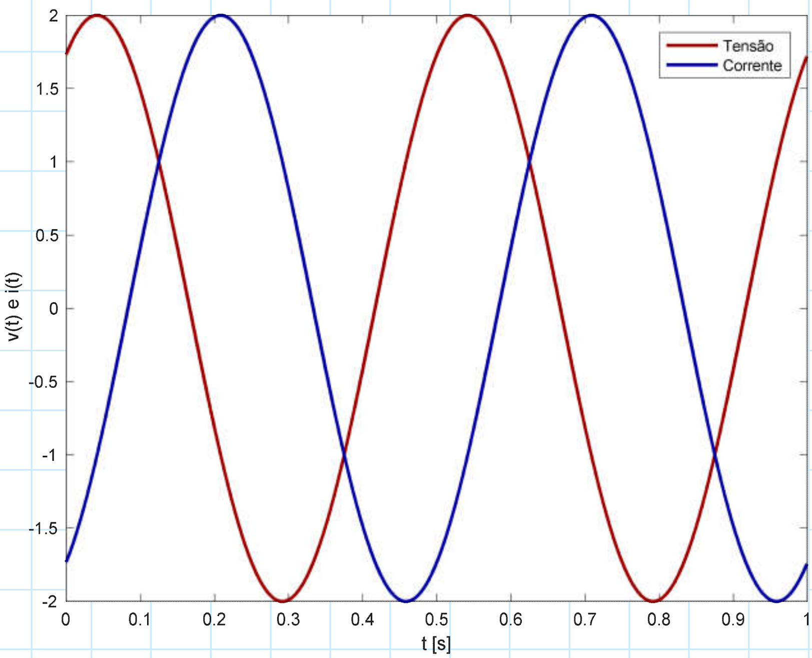
Logo: $i(t) = 5\ \text{sen}(\omega t + 7\pi/18)$ A

Logo: $i(t) = 5\,\text{sen}(\omega t + 7\pi/18)$ A

Exercício: qual é a relação de fase entre a tensão e a corrente?

No gráfico, pode-se ver que há uma defasagem de 40° ou $2\pi/9$ radianos entre a corrente e a tensão. Como a corrente está mais à esquerda, pode-se afirmar que ela está 40° adiantada da tensão, que é o mesmo que afirmar que a tensão está 40° atrasada da corrente.

Exercício: Encontre as expressões para a tensão e corrente a partir dos gráficos abaixo



Dica:

$$v(0) = 1{,}7321$$
$$i(0) = -1{,}7321$$

A partir do gráfico, é possível observar que ambos os sinais possuem 2 ciclos no intervalo de 1 segundo, ou seja, $f = 2Hz$.

A amplitude máxima dos sinais é de 2V e 2A.

Com isso, pode-se escrever que

$$v(t) = 2\,sen(2\pi \times 2t + \theta_1) = 2\,sen(4\pi t + \theta_1)$$

$$i(t) = 2\,sen(2\pi \times 2t + \theta_2) = 2\,sen(4\pi t + \theta_2).$$

A única diferença entre os sinais é a fase inicial. Do gráfico, sabemos que

$$v(0) = 2\,sen(\theta_1) = 1{,}7321 \therefore \theta_1 = arcsen\left(\frac{1{,}7321}{2}\right)$$

$v(0) = 2\,\text{sen}(\theta_1) = 1{,}7321 \therefore \theta_1 = \text{arcsen}\left(\frac{1{,}7321}{2}\right)$

$\theta_1 = 1{,}047$ radianos ou $60°$

Portanto, $v(t) = 2\,\text{sen}(4\pi t + 1{,}047)$

Para a corrente, temos:

$i(0) = 2\,\text{sen}(\theta_2) = -1{,}7321 \therefore \theta_2 = \text{arcsen}\left(-\frac{1{,}7321}{2}\right)$

$\theta_2 = -1{,}047$ ou $-60°$

Portanto, $i(t) = 2\,\text{sen}(4\pi t - 60°)$

Assim, pode-se afirmar que a tensão $v(t)$ está $120°$ adiantada da corrente.

Exercício: um resistor pode ser o elemento que relaciona esta tensão e esta corrente?

Não. A relação entre tensão e corrente em um resistor é sempre em fase, ou seja, não é possível que um resistor cause uma defasagem entre a tensão aplicada em seus terminais e a corrente que circula pelo mesmo. Algum e a corrente que circula pelo mesmo. Algum outro componente é responsável por esta relação.

Como já visto, o sinal senoidal na forma

$$v(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

possui média $V_m = 0$ e valor RMS $V_{RMS} = V_P/\sqrt{2}$

Caso um sinal senoidal apresente nível DC, ou seja, valor médio diferente de 0, então ele irá assumir a forma

$$v(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t + \theta) + A,$$

de modo que

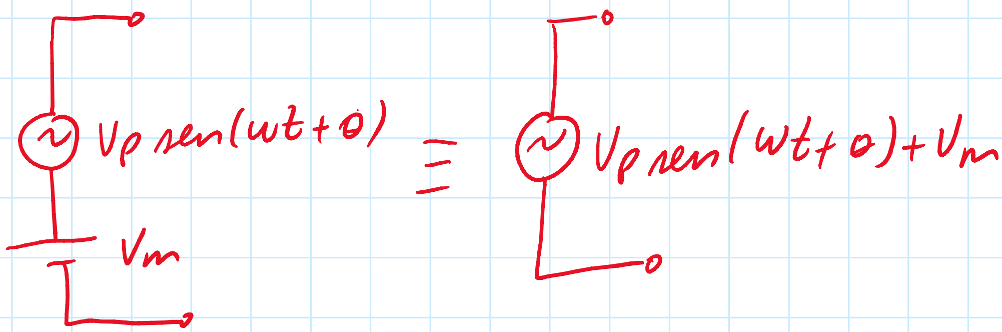
$$V_m = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_p \operatorname{sen}(\omega t+\theta)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T A\,dt = A \text{ e}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \left(V_p \operatorname{sen}(\omega t+\theta) + A\right)^2 dt\right)^{1/2} =$$

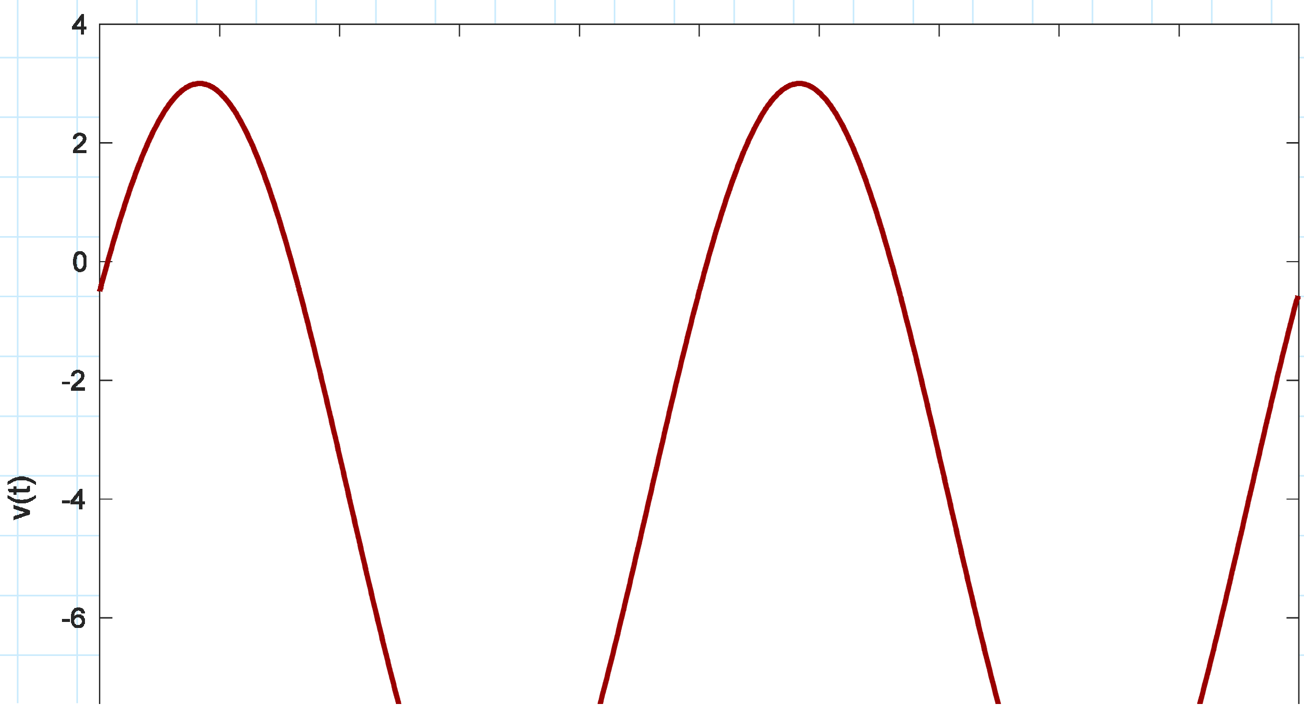
$$= \left(\frac{1}{T}\int_0^T V_p^2 \operatorname{sen}^2(\omega t+\theta) + \frac{2A}{T}\cancel{\int_0^T V_p \operatorname{sen}(\omega t+\theta)\,dt}^{\,0} + \frac{A^2}{T}\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

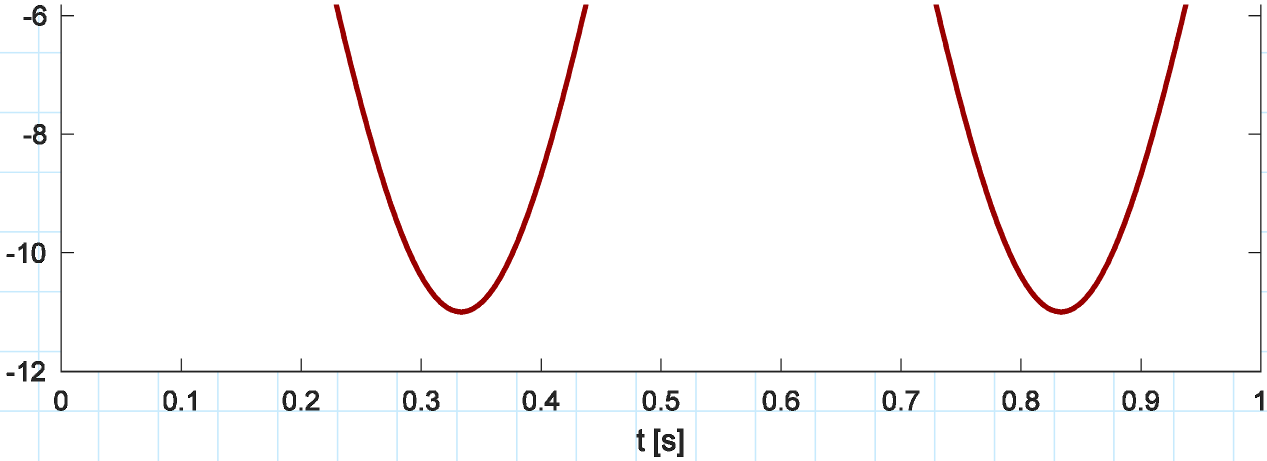
$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_P^2}{2} + A^2}$$

Esse resultado expande a conclusão sobre o valor rms do sinal senoidal com média diferente de 0, pois o mesmo pode ser visto como sendo uma associação em série de um sinal senoidal de média nula com uma fonte DC



Exercício: Encontre o valor médio e o valor RMS para o gráfico a seguir.





$V_{MAX} = 3V \qquad V_{min} = -11V \qquad f = 2\,Hz$

$$V_m = \frac{V_{MAX} + V_{min}}{2} \quad \therefore \quad V_m = -4V$$

$$v(t) = 7\,sen(4\pi t + \phi) - 4$$

$v(0) = -1/2 \rightarrow$ obtido do gráfico

$$v(0) = -1/2 = 7\,sen(\phi) - 4$$

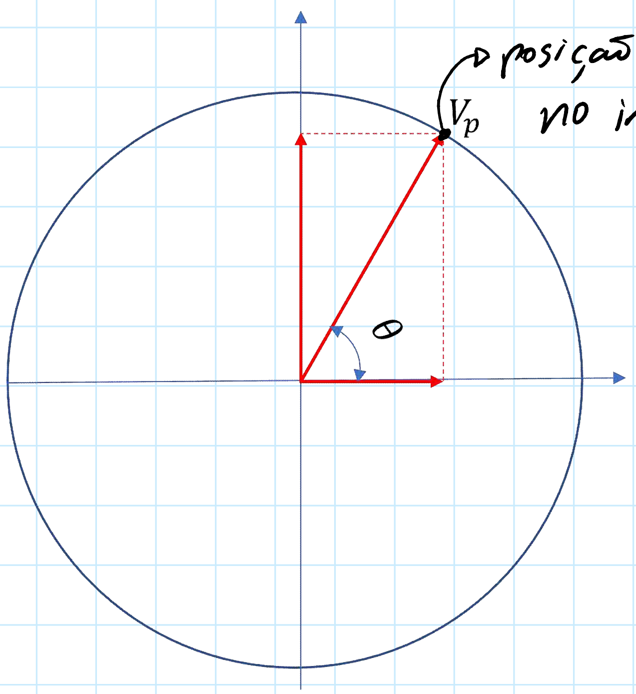
$$\phi = arcsen\left(\frac{3,5}{7}\right) \quad \therefore \quad \phi = \frac{\pi}{6}$$

$$v(t) = 7\,sen(4\pi t + \pi/6) - 4$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2} + V_m^2} = \sqrt{\frac{7^2}{2} + 4^2} = 6,37\,V$$

As tensões e correntes senoidais são grandezas vetoriais, cuja fase varia ao longo do tempo de acordo com a frequência angular. No entanto, estas grandezas frequência angular. No entanto, estas grandezas podem ser representadas pelo fasor inicial, ou seja, aquele em $t=0s$, desde que somente haja uma frequência no circuito em análise. Neste cenário, a frequência angular pode ser suprimida da notação e apenas o valor de pico e a fase inicial são usados para representar o sinal.

posição do vetor que representa $v(t)$ no instante $t=0$.



$$v(t) = V_p \, sen(\omega t + \theta) \equiv V_p \angle \theta = \bar{V}$$

Alguns autores usam V_{rms} ao invés de V_p! Neste caso, há uma diferença de $1/\sqrt{2}$ no valor do módulo do vetor. Neste curso vamos usar V_p, pois é matematicamente mais coerente.

A notação fasorial facilita encontrar a defasagem entre tensão e corrente, pois basta encontrar a

razão V/I e observar a fase resultante.
É importante ressaltar que essa notação somente pode ser usada quando as frequências envolvidas são fixas ao longo do tempo. Outro ponto importante é que a notação fasorial não considera o nível DC, que seria equivalente a frequência nula. A notação fasorial pode ser usada tanto para representar os sinais senoidais quanto os sinais cossenoidais. O importante é usar uma mesma função para representar todos os fasores, transformando todos os senos em cossenos ou vice-versa. Em algumas situações, a notação fasorial pode ser usada para representar a função exponencial complexa, dada por:

$$v(t) = V_p e^{j\omega t + \theta} = V_p \angle \theta = \bar{V}$$

Essa representação é interessante para analisar a resposta de um circuito para uma dada frequência. Alterando-se o valor de ω, pode-se determinar como o circuito funciona para cada frequência.

Exercício: Encontre as notações fasoriais para os seguintes sinais

$v(t) = 170,6 \, sen(120\pi t + \pi/12)$ $\quad$ $i(t) = 13,5 \, sen(120\pi t - \pi/4)$

$\bar{V} = 170,6 \angle \pi/12$ $\quad$ e $\quad$ $\bar{I} = 13,5 \angle -\pi/4$

Uma o termo $\omega t = 2\pi f t$ sempre representa um ângulo em radianos, diversos autores denotam o fasor em graus. É importante lembrar que, se a fase inicial for representada em graus, a mesma deve ser convertida em radianos para ser somada com o termo ωt na notação trigonométrica. Assim, os sinais notação trigonométrica. Assim, os sinais $v(t)$ e $i(t)$ também podem ser representados por

$$\bar{V} = 170{,}6 \angle 15^\circ \qquad \bar{I} = 13{,}5 \angle -45^\circ$$

Exercício: qual é a defasagem entre a tensão e a corrente?

Para chegarmos a esta resposta, basta fazer

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = 12{,}64 \angle 60^\circ \text{ ou } 12{,}64 \angle \pi/3$$

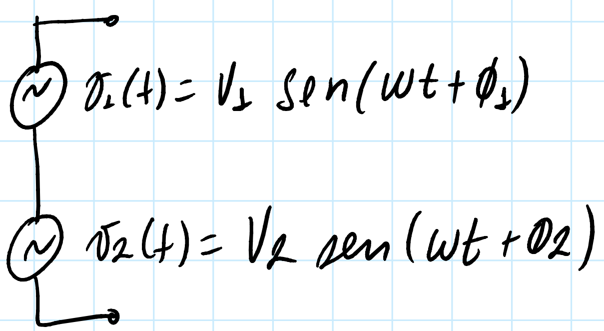
e observar a fase resultante.

Neste caso, podemos afirmar que a tensão está adiantada em $\pi/3$ radianos ou 60° em relação a corrente

Exercício: sabendo que $f = 60\ Hz$, encontre a representação trigonométrica dos mesmos.

$v(t) = 311{,}13 \operatorname{sen}(120\pi t + \pi/4)$ e $i(t) = 0{,}72 \operatorname{sen}(120\pi t - \pi/6)$

A notação fasorial simplifica diversas operações com sinais senoidais. Por exemplo, considere o circuito a seguir, onde deseja-se obter a tensão total:



Esse resultado pode ser facilmente obtido fazendo-se $\bar{V}_T = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ onde $\bar{V}_1 = V_1 \angle \phi_1$ e $\bar{V}_2 = V_2 \angle \phi_2$

Note que é possível representar os sinais na forma retangular, uma vez que

$\bar{V}_1 = V_1 \cos(\phi_1) + j V_1 \, sen(\phi_1)$ e $\bar{V}_2 = V_2 \cos(\phi_2) + j V_2 \, sen(\phi_2)$

Logo:

$\bar{V}_T = V_1 \cos(\phi_1) + V_2 \cos(\phi_2) + j\left[V_1 \, sen(\phi_1) + V_2 \, sen(\phi_2)\right]$

A tensão total pode ser representada na forma Fasorial calculando-se o módulo e a fase do número complexo obtido número complexo obtido.

$$|\bar{V}_T| = \sqrt{Re\{\bar{V}_T\}^2 + Im\{\bar{V}_T\}^2} \qquad \phi_T = arctg\left(\frac{Im(V_T)}{Re(V_T)}\right)$$

$$\bar{V}_T = |\bar{V}_T| \angle \theta_T$$

Exercício: Sejam

$$x(t) = 10\, sen(10\pi t + \pi/2) \qquad y(t) = 2\, sen(10\pi t - \pi)$$

Encontre

a) $z(t) = x(t) + y(t)$

$$\bar{X} = 10 \angle \pi/2 = 10\cos(\pi/2) + j\,10\, sen(\pi/2) = j10$$

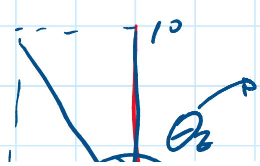
$$\bar{Y} = 2 \angle -\pi = 2\cos(-\pi) + j\,2\, sen(-\pi) = -2$$

$$\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y} = -2 + j10$$

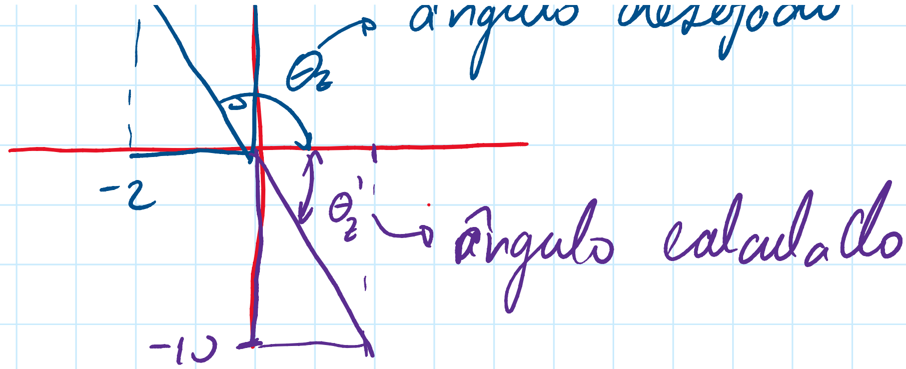
$$|\bar{Z}| = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10,2$$

$$\theta_z' = arctag\left(\frac{10}{-2}\right) = -1,37 \text{ rad ou } -78,69°$$

Esse resultado equivale ao ângulo no 4.º quadrante que tem a mesma tangente que o ângulo que desejamos no terceiro quadrante



ângulo desejado



Logo $\theta_z = \theta_z' + \pi$ $\therefore$ $\theta_z = 1{,}77$ ou $101{,}5^\circ$

Assim, tem-se que $\bar{Z} = 10{,}2\,\underline{/1{,}77}$

$z(t) = 10{,}2 \operatorname{sen}(10\pi t + 1{,}77)$

b) $g(t) = x(t) - y(t)$

$\bar{G} = \bar{X} - \bar{Y} = j10 - (-2) = 2 + j10$

$|\bar{G}| = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10{,}2$

$\phi_g = \operatorname{arctg}\left(\frac{10}{2}\right) = 1{,}37 \text{ rad}$ ou $78{,}69^\circ$

$G = 10{,}2\,\underline{/1{,}37}$ $\therefore$ $g(t) = 10{,}2 \operatorname{sen}(10\pi t + 1{,}37)$