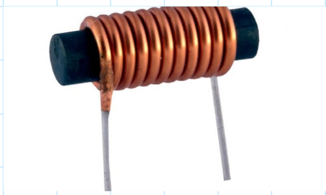
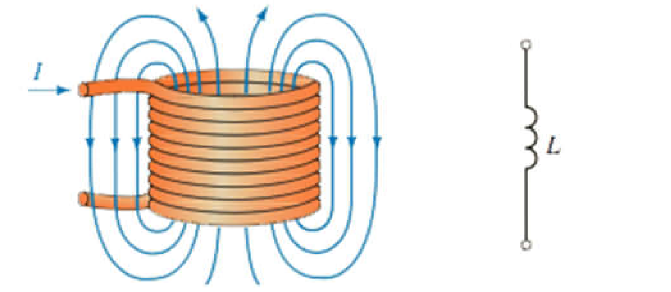
Aula 04 - Componentes RL

terça-feira, 4 de agosto de 2020   17:15

Indutores: os indutores são componentes que consistem em bobinas formadas por um fio envolto em um núcleo. Esse núcleo pode ser o ar ou algum material ferromagnético que ajude na transferência do campo magnético

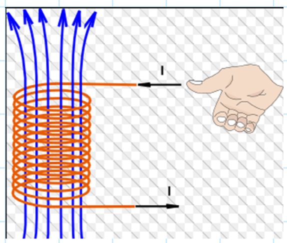


Ao ser submetido a uma corrente $iL(t)$, o indutor gera um campo magnético em seus terminais. A tensão elétrica induzida no indutor é proporcional a taxa de variação do campo magnético. Como o campo magnético depende da corrente, pode-se afirmar que a tensão nos terminais do indutor depende da taxa de variação da corrente elétrica aplicada.

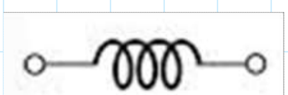


Indutor básico   Símbolo do indutor ideal

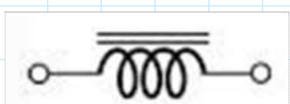
O sentido do campo magnético armazenado no indutor pode ser determinado usando a regra da mão direita.



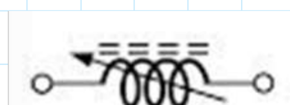
A simbologia usada para representar o indutor determina o material de seu núcleo.



Núcleo de Ar

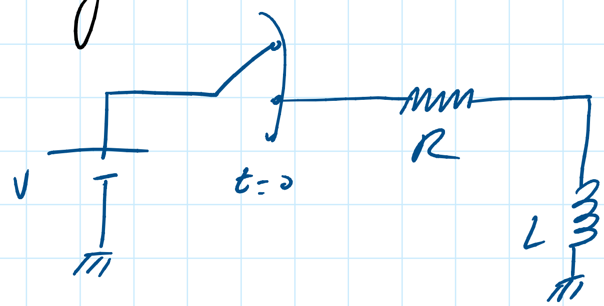


Núcleo de Ferro



Variável

A variação da corrente pelo indutor resulta em uma tensão nos seus terminais. Se a tensão variar abruptamente, a tensão induzida no indutor será máxima, impedindo a circulação imediata da corrente. Considere que a chave no circuito abaixo feche no instante $t=0\,s$ e que o indutor está inicialmente descarregado.



No instante em que a chave é fechada, a fonte de tensão força o deslocamento de cargas no indutor. Essa variação da corrente irá resultar em um campo magnético repentino no indutor e, consequentemente em uma tensão máxima $v_L(0^+) = V$ volts nos terminais do indutor.

Com isso, a corrente inicial será

$$i_L(0^+) = \frac{V - v_L(0^+)}{R} = 0\ A.$$

Isso significa que o indutor não permite variações abruptas de corrente. No instante inicial, o indutor se comporta como inicial, o indutor se comporta como um circuito aberto.

A medida que o indutor armazena energia na forma de um campo magnético, a taxa de variação do fluxo magnético começa a diminuir, até se tornar constante. Quando isso acontece, a tensão nos terminais do indutor passa a ser nula, ou seja, $v_L(\infty) = 0\,V$, e a corrente é dada por

$$i_L(\infty) = \frac{V - v_L(\infty)}{R} = \frac{V}{R}\ A.$$

Logo, o indutor se comporta como um curto-circuito depois de totalmente carregado.

t	$v_L(t)$	$i_L(t)$
0^+	V	0
∞	0	V/R

A indutância é a capacidade do indutor de armazenar energia, e é dada por:

$$L = \mu \frac{A N^2}{l}$$

onde A é a área da bobina, l é o seu comprimento, N é o número de voltas e μ é a permeabilidade do núcleo.

Exercício: um indutor é formado por uma bobina de 2cm de comprimento, raio de 0,7cm e com 20 voltas em torno de um núcleo de ferrita com permeabilidade de 1n H/m. Qual é a indutância deste componente?

$$A = \pi r^2 = \pi \left(0{,}7 \times 10^{-2}\right) = 153{,}94 \, \mu m^2$$

$$L = \frac{10^{-9} \times 153{,}94 \times 10^{-6} \times 20^2}{2 \times 10^{-2}} = \underline{3{,}1 \, nH}$$

A tensão nos terminais de um indutor é dada por

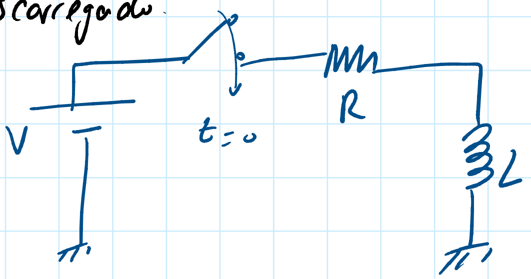
$$v_l(t) = L \frac{d i_l(t)}{dt},$$

enquanto que a corrente é dada por

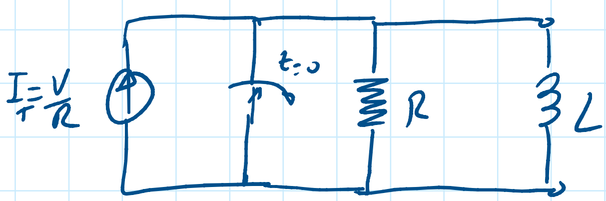
$$i_l(t) = \frac{1}{L} \int v_l(t) \, dt.$$

Observe que se não houver uma variação na corrente circulando pelo indutor, a tensão em seus terminais será nula

Para determinar a tensão e a corrente de carga em um circuito RL, assuma o esquemático a seguir, com o indutor descarregado.



O equivalente usando fonte de corrente é



Neste caso, a chave é aberta em $t=0$, permitindo que a corrente circule pelo circuito

Sabe-se que $I_T = i_R(t) + i_L(t)$

No instante que a chave abre, o indutor se comporta como um circuito aberto, de modo que $i_L(0^+) = 0\,A$ e $i_R(0^+) = I_T = \frac{V}{R}$. A tensão nos terminais do indutor neste instante do tempo é $v_\ell(0^+) = R\, I_T = R\dfrac{V}{R} = V$.

Retomando de

$$I_T = i_R(t) + i_\ell(t)$$

e sabendo que $i_R(t) = \dfrac{v_\ell(t)}{R}$, pode-se escrever que

$$I_T = \frac{v_\ell(t)}{R} + i_\ell(t)$$

Derivando de ambos os lados, tem-se

$$\frac{d}{dt} I_T = \frac{1}{R}\frac{d}{dt} v_\ell(t) + \frac{d}{dt} i_\ell(t) = 0$$

onde $\dfrac{d\, i_\ell(t)}{dt} = \dfrac{v_\ell(t)}{L}$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dt} v_\ell(t) = -\frac{v_\ell(t)}{L} \therefore \int \frac{d\, v_\ell(t)}{v_\ell(t)} = \int -\frac{R}{L}\, dt$$

$$\ln[v_\ell(t)] = -\frac{Rt}{L} + C \therefore v_\ell(t) = K e^{-\frac{R}{L}t}$$

Usando as condições iniciais,

$$v_\ell(0^+) = K e^{-0} = V \therefore \quad K = V$$

$\boxed{v_\ell(t) = V e^{-\frac{R}{L}t}}$ // que é a tensão de carga do indutor

A corrente de carga do indutor é dada por

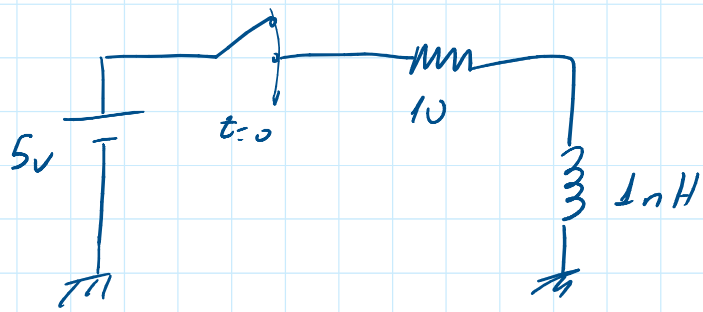
$$i_\ell(t) = \frac{1}{L}\int^t V e^{-\frac{R}{L}u}\, du = \frac{V}{L}\,\frac{e^{-\frac{R}{L}u}}{-R/L}\Bigg|_0^t$$

$$= -\frac{V}{R}\left[e^{-\frac{R}{L}t} - e^{0}\right]$$

$$\boxed{i_L(t) = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-R/L\, t}\right]}$$

que é a corrente de carga do indutor.

Exemplo: encontre a tensão e a corrente de carga no indutor do circuito abaixo, sabendo que este componente está totalmente descarregado no instante em que a chave está fechada.



$$i_L(t) = \frac{5}{10}\left[1 - e^{-10/10^{-9}\, t}\right] = 0,5\left[1 - e^{-10^{10}t}\right] \text{ A}$$

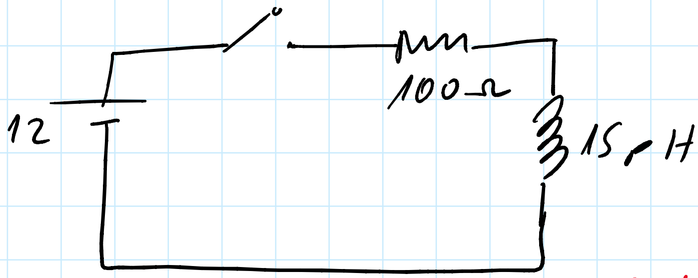
$$v_L(t) = 5\, e^{-10^{10}t} \text{ V}$$

$$\tau = \frac{10^{-9}}{10} = 10^{-10}\text{ s}$$

$\therefore$ O indutor estará totalmente carregado depois de 500ps

Exemplo: Trace os gráficos da tensão e da corrente de carga do indutor no circuito abaixo.

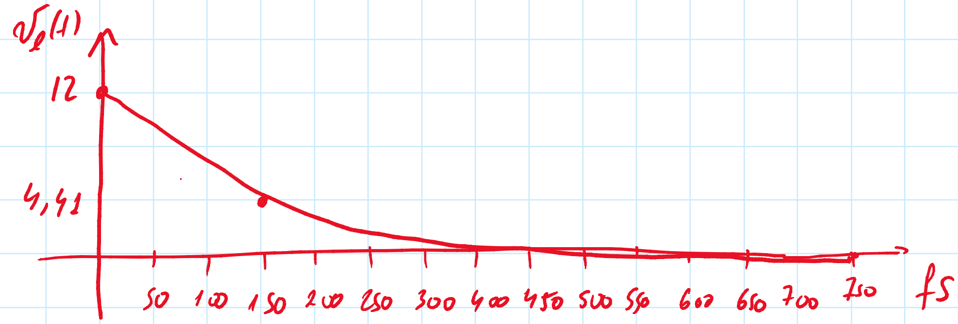
corrente de carga do indutor no circuito abaixo.



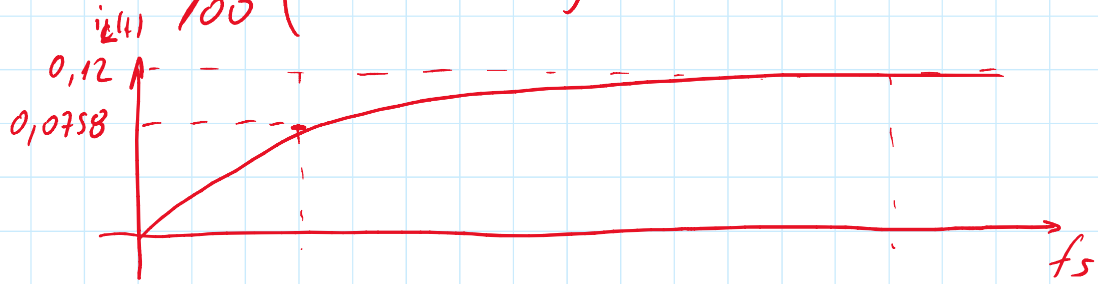
$1{,}5 \cdot 10^{-13}$

$$v_\ell(t) = 12\, e^{-\frac{100}{15p}t} = 12\, e^{-\frac{2}{3}10^{13}t} \text{ V}$$

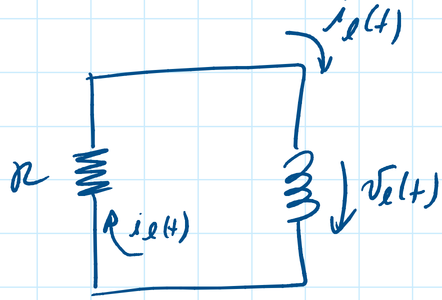
$$\tau = \frac{3}{2}10^{-13} = 0{,}15\,ps$$



$$i_\ell(t) = \frac{12}{100}\left(1 - e^{-\frac{100}{15p}t}\right) = 0{,}12\left(1 - e^{-\frac{2}{3}\cdot 10^{13}t}\right) \text{ A.}$$



Considere agora que a fonte de tensão assume um valor de tensão nulo, ou seja, que ela se comporte como um curto, depois que o indutor estiver plenamente carregado. O circuito equivalente neste caso será:



Observe que a corrente não pode variar abruptamente. Por isso, a tensão no indutor precisa mudar de polarização para que a corrente continue fluindo no mesmo sentido.

No instante $t=0^+$, $i_\ell(0^+) = \frac{V}{R}$, pois a corrente não pode variar bruscamente no indutor. A tensão no indutor precisa ser invertida!

Pela lei de Kirchhof para tensão, tem-se:

$$v_\ell(t) + v_R(t) = 0 \;\therefore\; v_\ell(t) = -v_R(t)$$

$$L\frac{di_\ell(t)}{dt} = -R\,i_\ell(t)$$

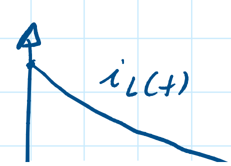
$$\int \frac{di_\ell(t)}{i_\ell(t)} = \int -\frac{R}{L}\,dt \to \ln[i_\ell(t)] = -\frac{R}{L}t + C$$

$i_\ell(t) = K e^{-\frac{R}{L}t}$ p/ $t=0^+$ – $\frac{V}{R} = K e^{-0} \therefore K = \frac{V}{R}$

$$\boxed{i_\ell(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}$$

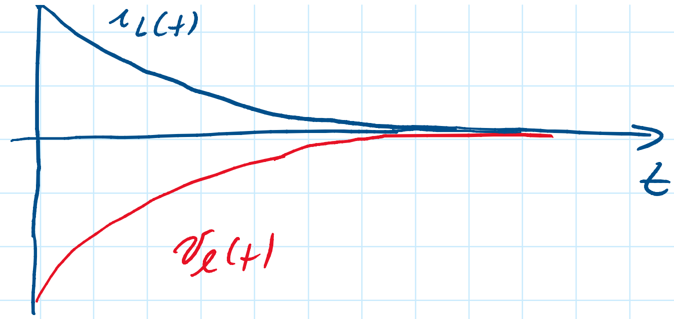
$$v_\ell(t) = L\frac{di_\ell(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

$$v_\ell(t) = \frac{\cancel{L}V}{\cancel{R}} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left(-\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}}\right)$$

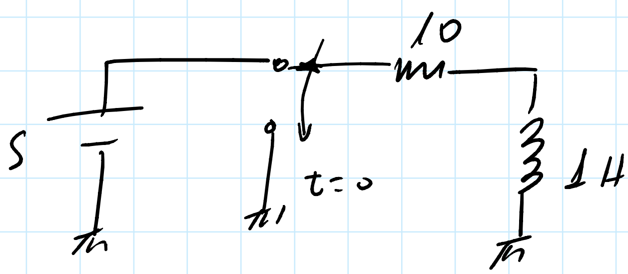


$v_L(t) = \frac{L V}{\cancel{R}} e^{t} \cdot \left(-\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}}\right)$

$$\boxed{v_L(t) = -V e^{-\frac{R}{L} t}}$$



Exemplo: encontre tensão e corrente de descarga no indutor do circuito abaixo, assumindo que a chave muda de posição depois que o mesmo encontra-se totalmente carregado.



Com o indutor totalmente carregado, tem-se

$i_L(0^+) = \frac{V}{R} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Após abrir a chave

$i_L(t) = I_0 \, e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{1}{2} e^{-10 t}$

$v_L(t) = -V e^{-\frac{R}{L} t} = -5 e^{-10 t}$