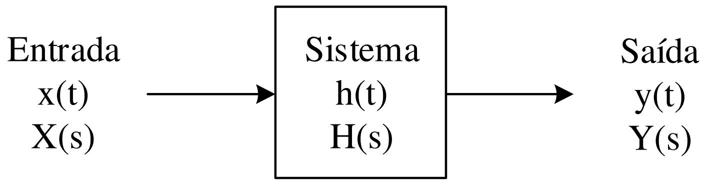
Função de transferência



É a relação entre a variável de saída pela variável de entrada do sistema (circuito ou dispositivo), no domínio da frequência.

$H(s)$ é a função de transferência
$Y(s)$ é a variável de saída
$X(s)$ é variável de entrada

$$y(t) = h(t) * x(t) \xrightarrow{L} Y(s) = H(s)X(s) \therefore H(s) \overset{\Delta}{=} \frac{Y(s)}{X(s)}$$

<u>Resposta ao impulso:</u> É a resposta de um circuito inicialmente em repouso a uma excitação de um impulso unitário:

$$L\left[\delta(t)\right] = 1 \rightarrow X(s) = 1 \therefore Y(s) = H(s) \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = h(t) \quad \text{ou} \quad y(t) = L^{-1}\left[H(s)\right] = h(t) \qquad L\left[h(t)\right] = H(s)$$

Portanto, a transformada da resposta ao impulso é a função de transferência e desta forma, pode-se calcular a resposta a qualquer excitação.

. Resposta ao impulso unitário $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases} \qquad L\left[\delta(t)\right] = 1 \rightarrow X(s) = 1 \qquad Y(s) = H(s)X(s) \therefore Y(s) = H(s) \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = h(t)$$

. Resposta ao degrau unitário $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \qquad L\left[u(t)\right] = \frac{1}{s} \rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \qquad Y(s) = H(s)X(s) \therefore Y(s) = \frac{H(s)}{s} \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = h(t) * u(t)$$

Tipos de funções de transferência

. Ganho de tensão: $$A_v(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s)$$

. Ganho de corrente: $$A_i(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} = H(s)$$

. Ganho de potência: $$A_p(s) = \frac{P_o(s)}{P_i(s)} = H(s)$$

. Impedância de transferência [Ω]: $$Z(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)} = H(s)$$

. Admitância de transferência [S]: $$Y(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} = H(s)$$

Forma padronizada e forma fatorada da função de transferência

Em um sistema linear de ordem n, a equação representativa é dada pela seguinte equação diferencial no domínio do tempo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

onde a e b são constantes reais, e a ordem n representa o número de elementos armazenadores de energia do circuito.

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, com condições iniciais nulas, no domínio da frequência fica

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \cdots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

que é a forma padronizada da função de transferência. Considera-se $m \leq n$ para que se tenha um circuito realizável, função ou fração racional própria, existência da transformada unilateral.

E a <u>forma fatorada</u> fica

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

onde

$k = b/a$ é um número real (constante),

z_i são as raízes do numerador, zeros da função de transferência

p_j são as raízes do denominador, pólos da função de transferência

<u>Pólos, zeros e representação no plano complexo *s*</u>

Frequência complexa:

$s = \sigma + j\omega$

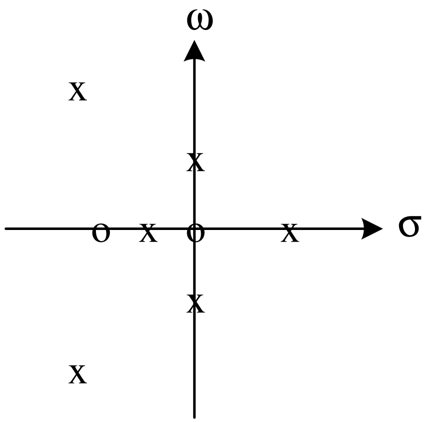
$\mathrm{Re}(s) = \sigma$

$\mathrm{Im}(s) = \omega$

Diagrama do lugar das raízes (*root-locus*):

o: zeros

x: pólos



Frequências naturais

As frequências naturais de um circuito linear são aquelas que ocorrem naturalmente em sua função de transferência, ou seja, determinam a resposta natural (transitória ou homogênea) do circuito.

. Frequências naturais associadas aos zeros:

$\omega_{zi} = |z_i|$ rad/s

. Frequências naturais associadas aos pólos:

$\omega_{pj} = |p_j|$ rad/s

Relação entre constante de tempo e frequêncial natural

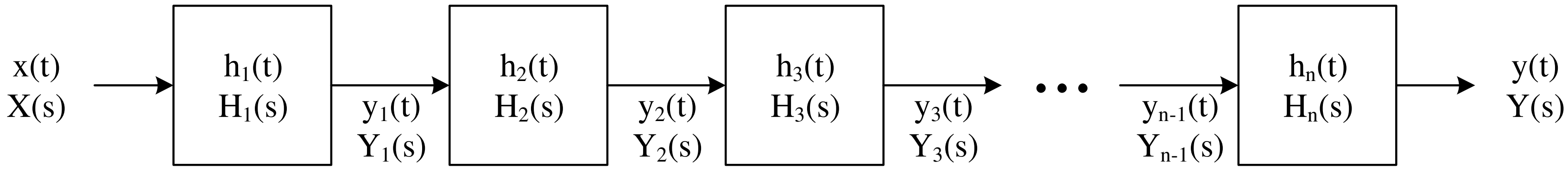
A constante de tempo (τ) estima a duração da resposta natural (homogênea ou transitória) do sistema.

$$\tau = \frac{1}{\omega_{pj}} \quad [\mathrm{s}]$$

$$h_n(t) = Ke^{-t/\tau} = Ke^{-\omega_{pj} t}$$

Função de transferência de sistemas em cascata e em paralelo

. Sistemas em cascata:



$$y_1(t) = h_1(t) * x(t) \xrightarrow{L} Y_1(s) = H_1(s)X(s)$$

$$y_2(t) = h_2(t) * y_1(t) \xrightarrow{L} Y_2(s) = H_2(s)Y_1(s) = H_2(s)H_1(s)X(s)$$

$$y_3(t) = h_3(t) * y_2(t) \xrightarrow{L} Y_3(s) = H_3(s)Y_2(s) = H_3(s)H_2(s)H_1(s)X(s)$$

$$\vdots$$

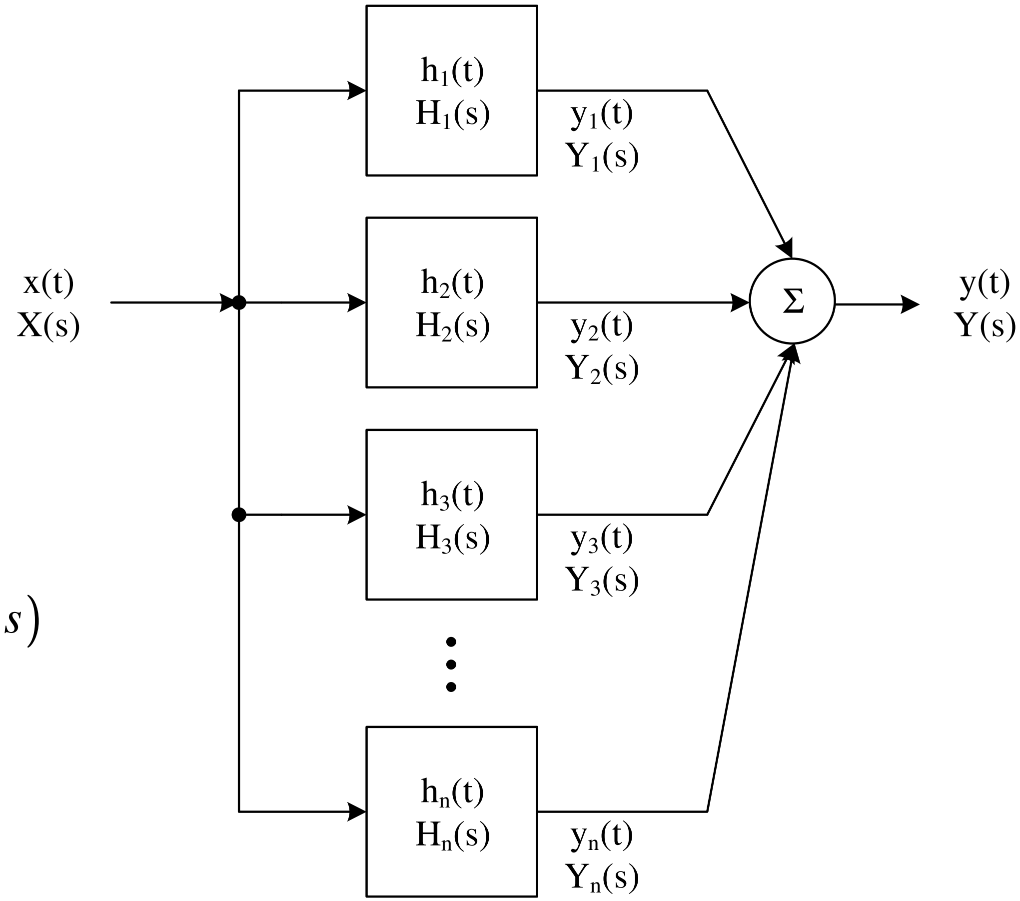
$$y(t) = h_n(t) * y_{n-1}(t) \xrightarrow{L} Y(s) = H_n(s)Y_{n-1}(s) = H_n(s)\cdots H_3(s)H_2(s)H_1(s)X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)H_3(s)\cdots H_n(s)$$

. Sistemas em paralelo:

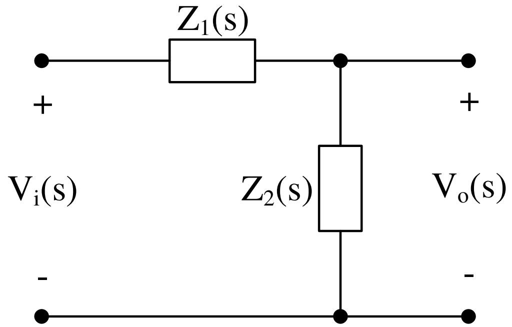
$$y_1(t) = h_1(t) * x(t) \xrightarrow{L} Y_1(s) = H_1(s)\, X(s)$$
$$y_2(t) = h_2(t) * x(t) \xrightarrow{L} Y_2(s) = H_2(s)\, X(s)$$
$$y_3(t) = h_3(t) * x(t) \xrightarrow{L} Y_3(s) = H_3(s)\, X(s)$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = h_n(t) * x(t) \xrightarrow{L} Y_n(s) = H_n(s)\, X(s)$$
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \cdots + y_n(t)$$
$$\downarrow L$$
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + \cdots + Y_n(s)$$
$$Y(s) = H_1(s)\, X(s) + H_2(s)\, X(s) + H_3(s)\, X(s) + \cdots + H_n(s)\, X(s)$$
$$Y(s) = \left[H_1(s) + H_2(s) + H_3(s) + \cdots + H_n(s) \right] X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s) + H_2(s) + H_3(s) + \cdots + H_n(s)$$

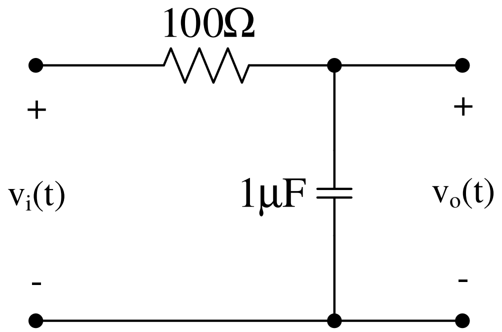


Exemplos

1) Determinar a função de transferência em termos do ganho de tensão $A_v(s)$.

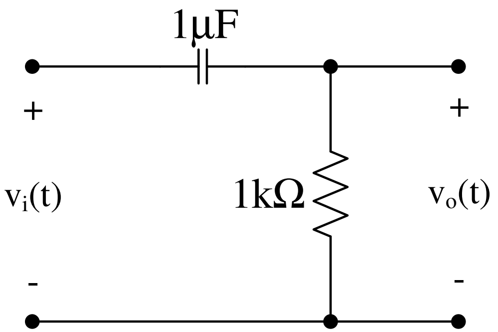


2) Obter a função de transferência em termos do ganho de tensão $A_v(s)$. Esboçar o *root-locus* da função de transferência. Determinar as respostas ao impulso e ao degrau. Analisar o comportamento do circuito em baixa e em alta frequência.

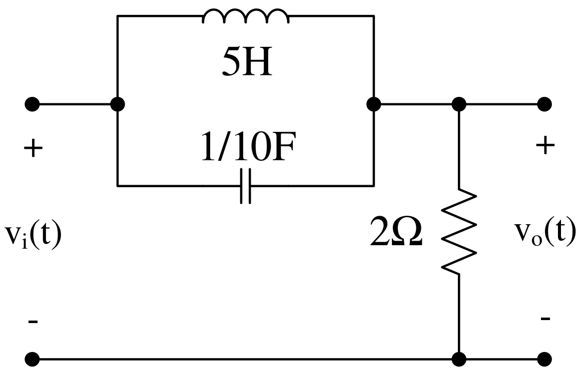


Exercícios

1) Obter a função de transferência em termos do ganho de tensão $A_v(s)$. Esboçar o *root-locus* da função de transferência. Determinar as frequências naturais e a constante de tempo, as respostas ao impulso e ao degrau. Analisar o comportamento do circuito em baixa e em alta frequência. Resp: $z_1 = 0$, $p_1 = -10^3$, $\omega_{z1} = 0$rad/s, $\omega_{p1} = 10^3$rad/s, $\tau =$ 1ms, $v_o(t) = \delta(t) - 10^3 e^{-10^3 t}$ V, $v_o(t) = e^{-10^3 t}$ V



2) Obter a função de transferência em termos do ganho de tensão $A_v(s)$. Esboçar o *root-locus* da função de transferência. Determinar as frequências naturais. Resp: $z_1 =$ j1,41, $z_1 =$ –j1,41, z0, $p_1 = -0{,}44$, $p_2 = -4{,}56$, $\omega_{z1} = \omega_{z1} = 1{,}41$rad/s, $\omega_{p1} =$ 0,44rad/s, $\omega_{p2} =$ 4,56rad/s, $A_v(s) = (s^2 + 2)/(s^2 + 5s + 2)$



Circuitos de 1ª ordem

A função de transferência possui apenas um pólo real (ou uma raiz real):

$$H(s)=\frac{N(s)}{s-p_1}=\frac{N(s)}{s+\omega_{p1}}$$

onde $N(s)$ é o numerador da função de transferência. Para um circuito estável $p_j < 0$.

De uma forma mais geral, a função de transferência é dada por:

$$H(s)=\frac{As+B}{s+\omega_{p1}}$$

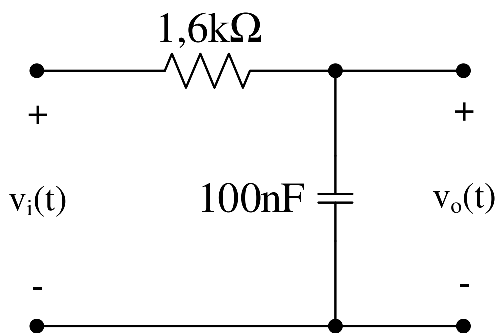
Como $m = n$ faz-se a divisão de polinômios e chega-se a: $H(s)=A+\frac{B-A\omega_{p1}}{s+\omega_{p1}}$

Fazendo a transformada inversa de Laplace obtém-se a resposta ao impulso:

$$y(t)=h(t)=\underbrace{A\delta(t)}_{h_f(t)}+\underbrace{\left(B-A\omega_{p1}\right)e^{-\omega_{p1}t}}_{h_n(t)}$$

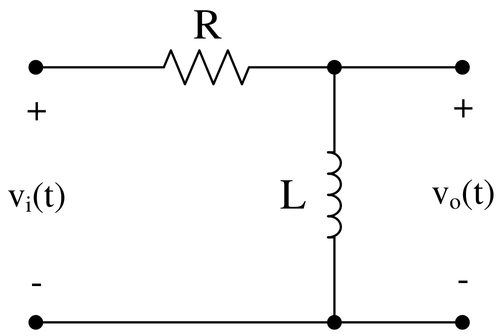
Com $A \neq 0$ tem-se a ocorrência do impulso, que corresponde a existência de um zero na função de transferência.

Exemplo: Determinar as frequências naturais, a constante de tempo e a resposta ao impulso. Resp: ω_{p1} = 6250rad/s, τ = 160μs, $v_o(t) = 6250e^{-6250t}$ V

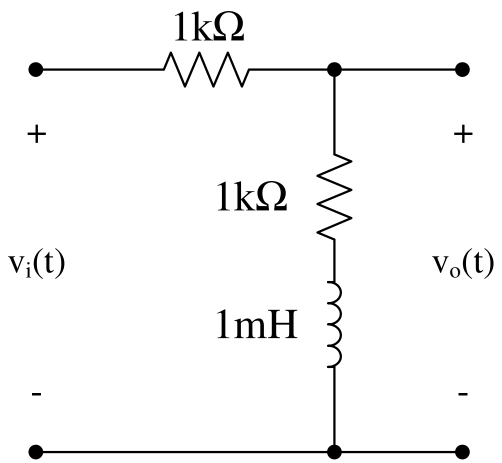


Exercícios

1) Determinar as frequências naturais, a constante de tempo e a resposta ao impulso. Resp: $\omega_{z1} = 0$rad/s, $\omega_{p1} = R/L$ rad/s, $\tau = L/R$ s, $v_o(t) = \delta(t) - R/Le^{-R/Lt}$ V



2) Determinar as frequências naturais, a constante de tempo e as respostas ao impulso e ao degrau. Resp: $\omega_{z1} = 10^6$rad/s, $\omega_{p1} = 2\text{x}10^6$rad/s, $\tau = 0{,}5\mu$s, $v_o(t) = \delta(t) - 10^6 e^{-2\text{x}10^6 t}$ V, $v_o(t) = 0{,}5 + 0{,}5e^{-2\text{x}10^6 t}$ V



Circuitos de 2ª ordem

A função de transferência possui dois pólos (ou duas raízes) ambos reais ou complexos conjugados e é dada por

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})} = \frac{N(s)}{s^2 + (\omega_{p1}+\omega_{p2})s + \omega_{p1}\omega_{p2}}$$

Fazendo

$$\omega_{p1}\omega_{p2} = \omega_n^2$$

$$\omega_{p1} + \omega_{p2} = 2\xi\omega_n$$

a função de transferência fica

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

As raízes são dadas por

$$s = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

onde

$\omega_n = \sqrt{(\omega_{p1}\omega_{p2})}$ é a média geométrica entre as frequências naturais ω_{p1} e ω_{p2}.

ξ é o fator de amortecimento.

ω_n e ξ são números reais e positivos.

- Circuito superamortecido: $\xi^2 - 1 > 0 \rightarrow \xi^2 > 1 \rightarrow \xi > 1$

2 pólos reais e distintos → resposta lenta

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \rightarrow \omega_{P1} = |p_1| \\ p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \rightarrow \omega_{P2} = |p_2| \end{array}\right\} p_1 \text{ e } p_2 < 0 \text{ para um circuito estável}$$

A função de transferência é:

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})} = \frac{A}{s+\omega_{p1}} + \frac{B}{s+\omega_{p2}}$$

e a resposta ao impulso é dada por

$$y(t) = h(t) = \underbrace{A\delta(t)}_{y_f(t)=h_f(t)} + \underbrace{Ae^{-\omega_{p1}t} + Be^{-\omega_{p2}t}}_{y_n(t)=h_n(t)}$$

As constantes de tempo são dadas por

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_{p1}} \qquad \tau_2 = \frac{1}{\omega_{p2}}$$

A constante de tempo predominante é o maior valor entre τ_1 e τ_2, que corresponde ao menor valor entre ω_{p1} e ω_{p2}.

- Circuito subamortecido: $\xi^2 - 1 < 0 \rightarrow \xi^2 < 1 \rightarrow \xi < 1$ $\qquad (0 < \xi < 1)$

2 pólos complexo e conjugados → resposta rápida (apresenta elevação antes de anular)

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow \omega_{P1} = |p_1| \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow \omega_{P2} = |p_2| \end{array}\right\} \omega_{P1} = \omega_{P2} = \omega_n = |p_j| \rightarrow |p_j| = \sqrt{(-\xi\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2}$$

Fazendo
$$\left.\begin{array}{l} \xi\omega_n = \sigma_0 \\ \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p_1 = -\sigma_0 + j\omega_0 \\ p_2 = -\sigma_0 - j\omega_0 \end{array}$$

tem-se a seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s+\sigma_0 - j\omega_0)(s+\sigma_0 + j\omega_0)} = \frac{K_1}{(s+\sigma_0 - j\omega_0)} + \frac{K_1^*}{(s+\sigma_0 + j\omega_0)}$$

A resposta ao impulso é dada por

$$y(t) = h(t) = \underbrace{A\delta(t)}_{y_f(t)=h_f(t)} + \underbrace{2|K_1|e^{-\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{y_n(t)=h_n(t)}$$

A constante de tempo é dada por $\tau = \dfrac{1}{\sigma_0} = \dfrac{1}{\xi\omega_n}$

- Outro casos: $s = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

$\xi = 1$: pólos reais e iguais → resposta mais rápida (possível sem elevação)

$\xi = 0$: pólos imaginários e conjugados → oscilatório e não amortecido

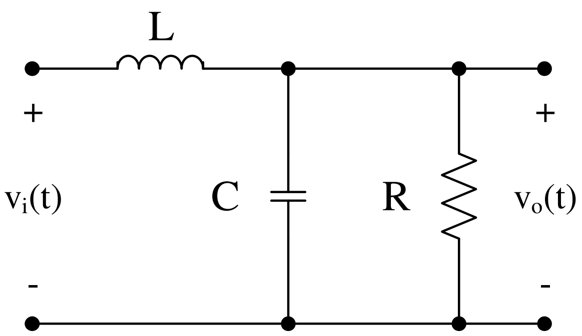
$-1 < \xi < 0$: pólos complexos e conjugados com partes reais positivas → instabilidade oscilatória

$\xi \leq -1$: pólos reais e positivos → instabilidade divergente

<u>Exemplo</u>

Determinar as respostas ao impulso e ao degrau unitário, com R = 25Ω, L = 100μH e C = 10nF.

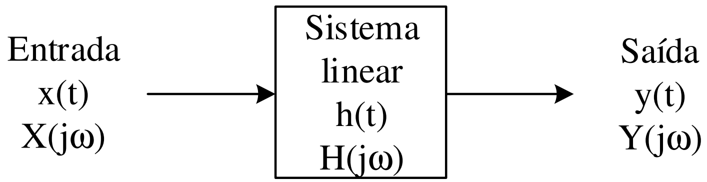
Resp: $v_o(t) = 2{,}88\text{x}10^5(e^{-268\text{x}10^3 t} - e^{-3{,}73\text{x}10^6 t})$ V, $v_o(t) = 1 - 1{,}07e^{-268\text{x}10^3 t} + 0{,}07e^{-3{,}73\text{x}10^6 t}$ V



<u>Exercício</u>

Repetir o exemplo anterior com R = 500Ω. Resp: $v_o(t) = 10^6 e^{-10^5 t}\text{sen}(10^6 t)$ V, $v_o(t) = 1 + e^{-10^5 t}\cos(10^6 t + 3{,}041)$ V

Resposta em frequência



Em regime permanente senoidal ($s = j\omega$), a resposta em frequência de uma função de transferência é

$$H(s)\Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \rightarrow H(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{H(j\omega)\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{H(j\omega)\right\} = \left|H(j\omega)\right|\angle\varphi(\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

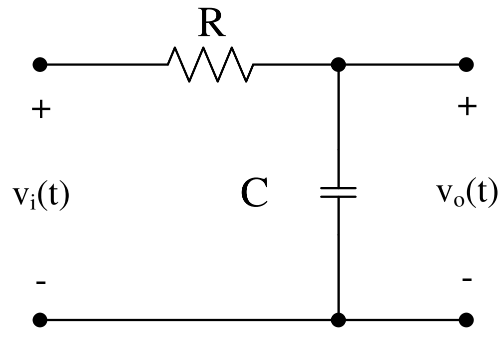
Na forma fatorada

$$H(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \rightarrow H(j\omega) = k\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n)}$$

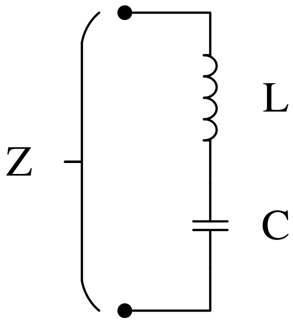
Respostas da amplitude (magnitude) e da fase (argumento) em função da frequência

$$\left|H(j\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{H(j\omega)\right\} + \mathrm{Im}^2\left\{H(j\omega)\right\}} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}\left\{H(j\omega)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{H(j\omega)\right\}}\right]$$

<u>Exemplo:</u> Determinar a resposta em frequência para $A_v(s)$ nas frequências angulares $\omega = 0$rad/s, $\omega = 10^3$rad/s e $\omega = 10^4$rad/s, com $R = 1\mathrm{k}\Omega$ e $C = 1\mu\mathrm{F}$.



Ressonância série



$$Z(j\omega) = Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j\left(X_L + X_C\right)$$

ω = 0rad/s: $Z(j0) = \infty\Omega$ (circuito aberto) $\omega = \infty$rad/s: $Z(j\infty) = \infty\Omega$ (circuito aberto)

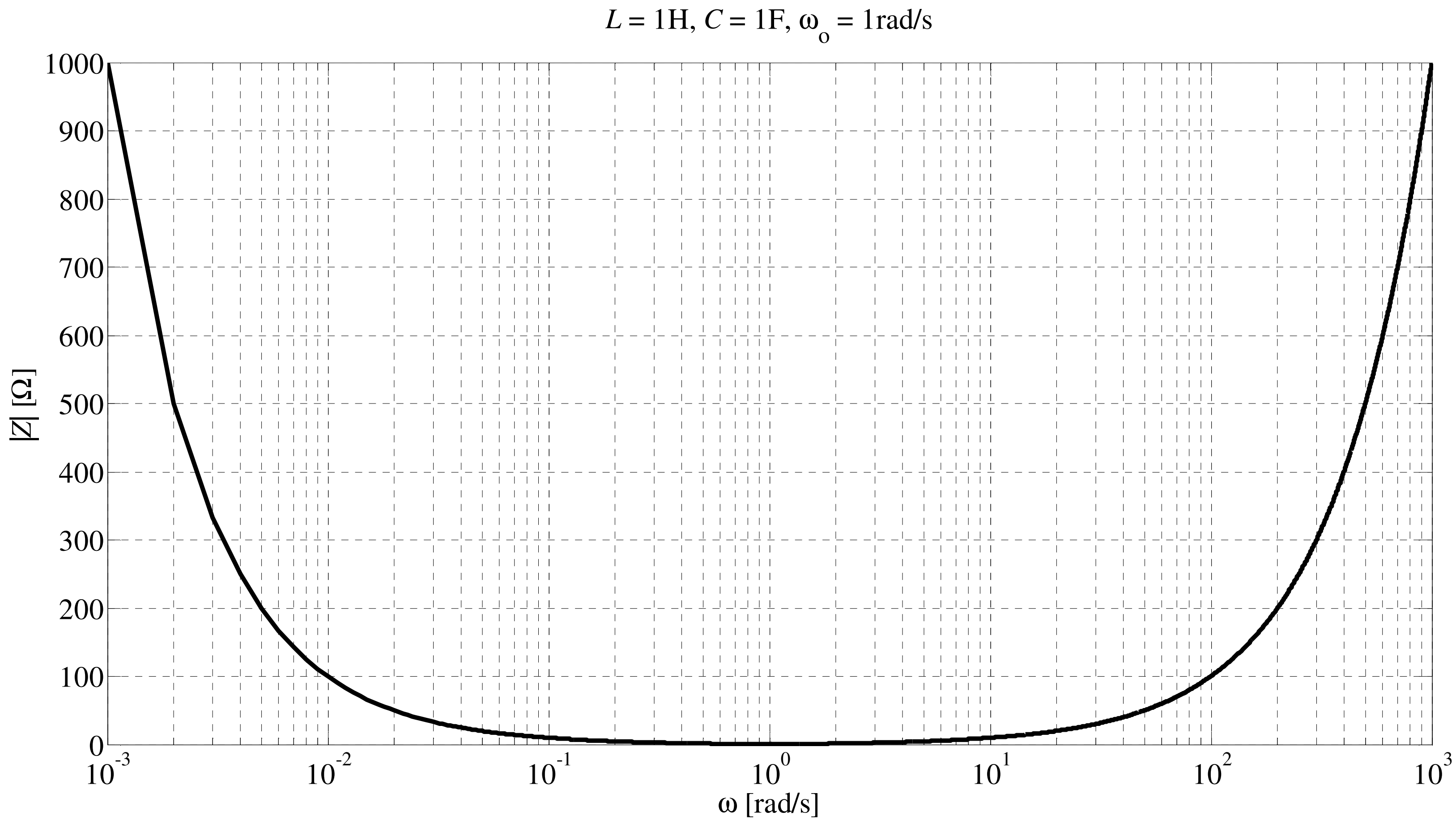
Se $X_L + X_C = 0$ (ou $X_L = -X_C$):

$Z(j\omega) = 0\Omega$ (curto-circuito)

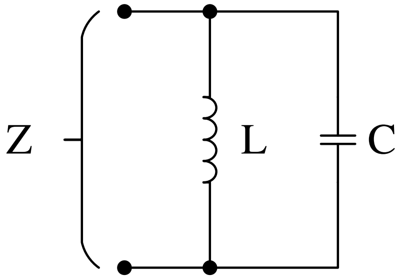
Nesta condição, tem-se a frequência de ressonância:

$$X_L = -X_C \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Ressonância paralela



$$Z(j\omega)=Z_L(j\omega)//Z_C(j\omega)=j\omega L//\frac{1}{j\omega C}=\frac{j\omega L}{j\omega L j\omega C+1}=j\left(\frac{X_L X_C}{X_L+X_C}\right)$$

ω = 0rad/s: $Z(j0)$ = 0Ω (curto-circuito) ω = ∞rad/s: $Z(j\infty)$ = 0Ω (curto-circuito)

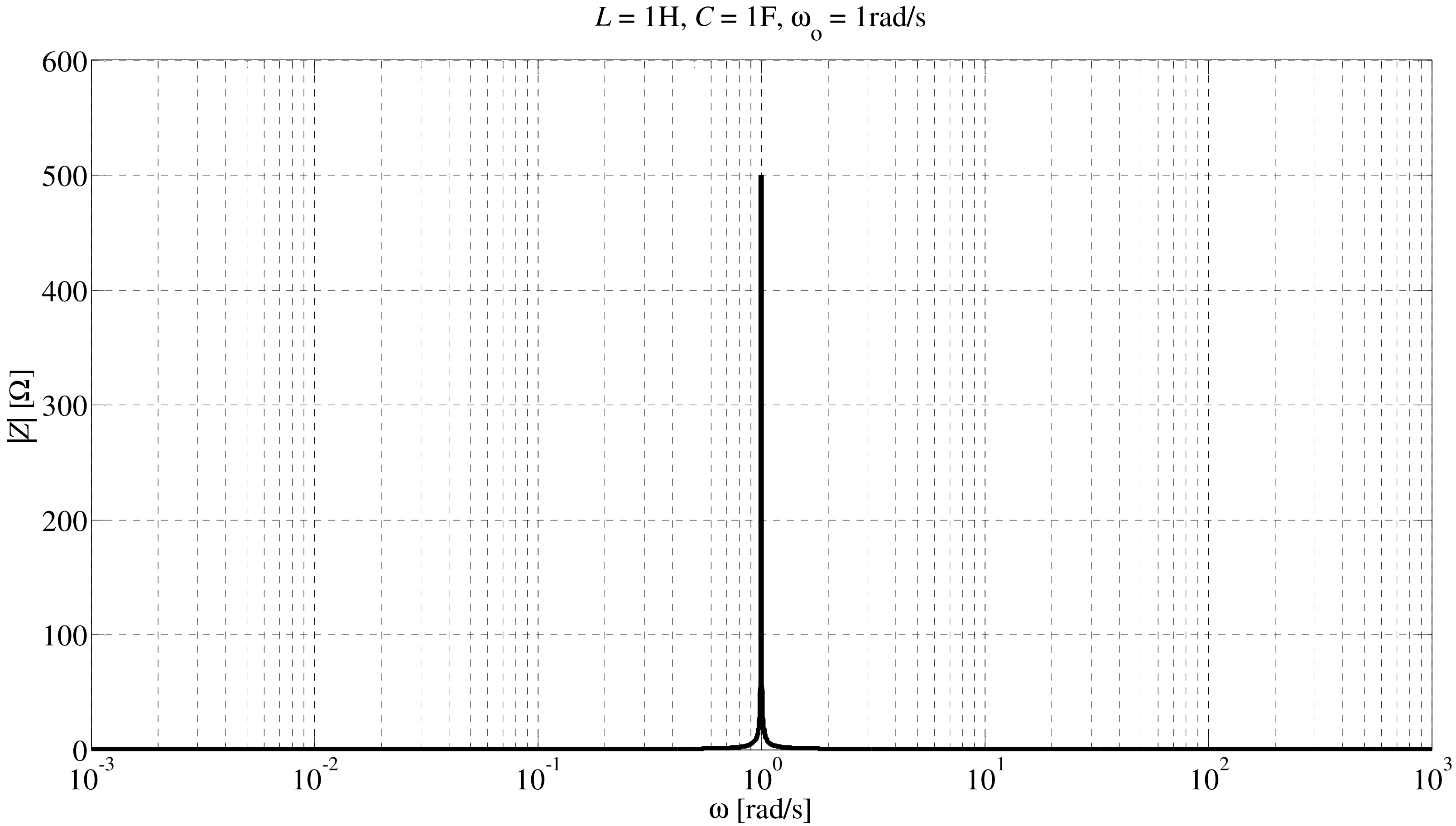
Se $X_L + X_C = 0$ (ou $X_L = -X_C$):

$Z(j\omega_0) = \infty\Omega$ (circuito aberto)

Nesta condição, tem-se a frequência de ressonância:

$$X_L=-X_C \rightarrow \omega L=\frac{1}{\omega C}$$

$$\rightarrow \omega^2=\frac{1}{LC}\rightarrow \omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Exercício

Determinar o valor do módulo da impedância equivalente ($|Z|$) em baixa frequência ($\omega \rightarrow 0$), em alta frequência ($\omega \rightarrow \infty$), e na frequência de ressonância ($\omega = \omega_o$). Esboçar o gráfico. Verificar o efeito da resistência no circuito.