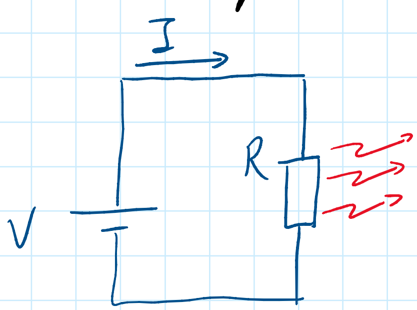
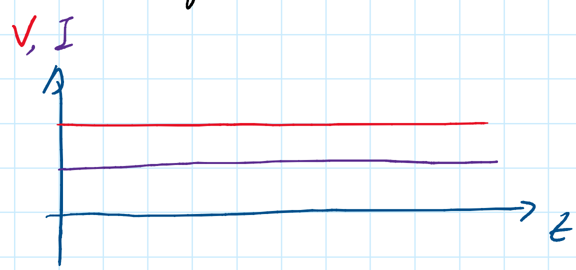
Fontes Alternadas

As fontes de tensão ou corrente contínuas, estudadas na disciplina de Circuitos Elétricos I, são caracterizadas por manterem um deslocamento de cargas elétricas contínua ao serem aplicadas em um resistor.



Tanto a corrente quanto a tensão neste circuito são constantes ao longo do tempo, e são relacionados pela Lei de Ohm.

$$V = RI$$



A potência dissipada no resistor R é dada pelo produto entre a tensão em seus terminais e a corrente que circula pelo mesmo.

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Grandezas DC são representadas por letras maiúsculas.

Numa fonte alternada, o fluxo de cargas elétricas tem seu sentido invertido de tempos em tempos.

Neste caso, as tensões e correntes aplicadas são funções do tempo, com seu valor instantâneo dependendo da forma de onda dessas fontes.

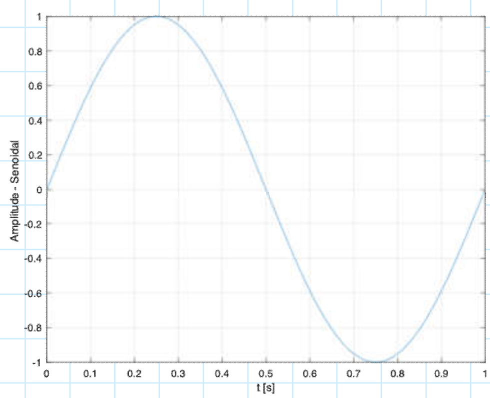
Assumindo um circuito resistivo, as relações observadas entre tensão e corrente instantâneas respeitam a lei de Ohm, ou seja

Grandezas AC são representadas por letras minúsculas.

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \qquad p(t) = v(t)\, i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R\, i^2(t)$$

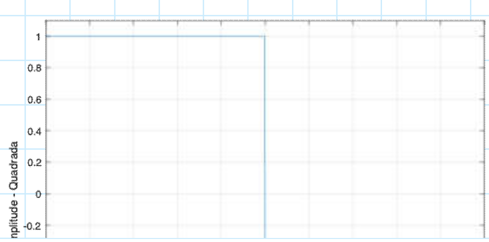
As fontes alternadas de tensão e corrente podem assumir diferentes formas de onda. As mais comuns são:

1) Senoidal: sinal periódico segue a função seno ao longo do tempo. É um dos tipos de fontes mais comuns em circuitos elétricos.

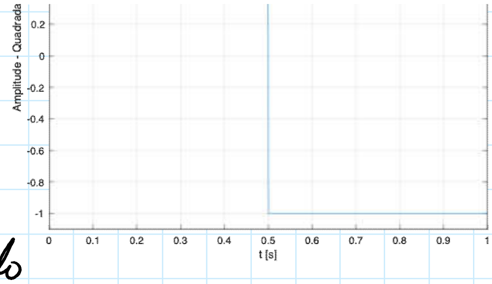


São caracterizadas pela sua amplitude, frequência e fase inicial. Esses parâmetros serão tratados em mais detalhes posteriormente neste curso.

2) Quadrada: sinal periódico que assume alternadamente dois valores: V_{max} e V_{min}.

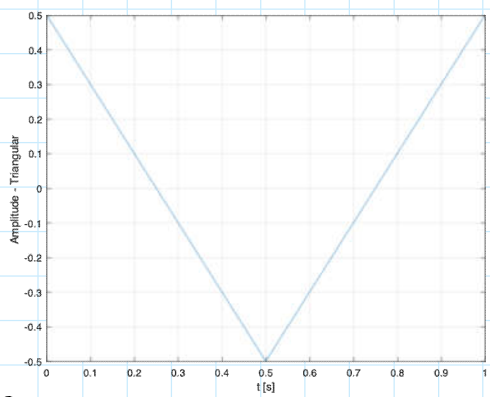


que assume alternadamente dois valores: V_{max} e V_{min}. Além destes valores, esse tipo de fonte é caracterizado

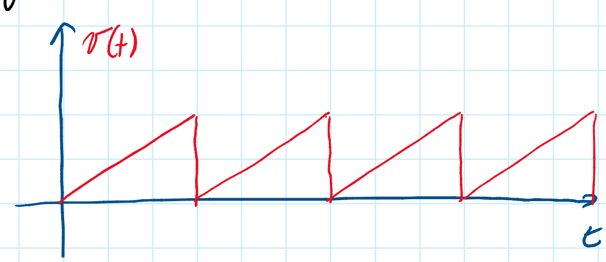


pelo período e pelo ciclo de trabalho, definido pela porcentagem de tempo no qual o sinal permanece em cada um dos valores. Esse tipo de fonte é muito utilizada em Circuito Digitais, e será tratado de forma detalhada em uma disciplina específica.

3) Triangular: ena forma de onda consiste em retas cujas derivadas possuem módulo constante, mas com sinal que se alterna ao longo do tempo.



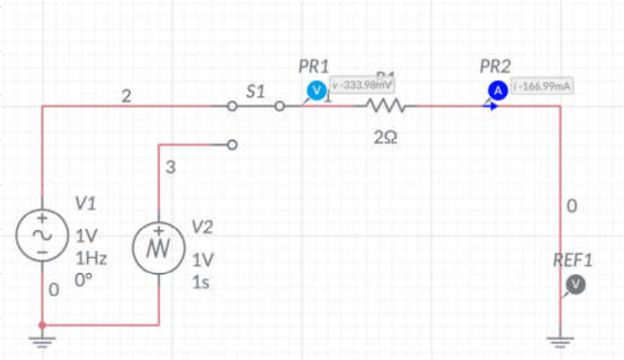
Uma derivação desta forma de onda é aplicada em sistemas de varredura. Essa derivação é chamada de dente de serra e consiste em uma reta que retorna ao valor de origem em intervalos de tempo uniformemente espaçado.

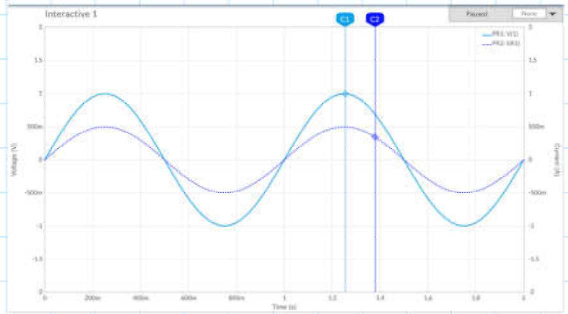


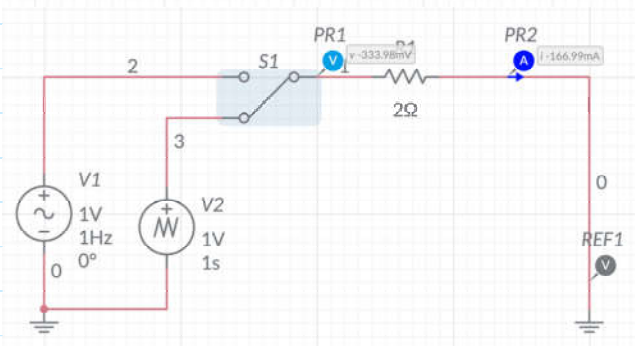
Uma das aplicações mais conhecidas desta forma de onda é circuitos de varredura de TVs analógicas.

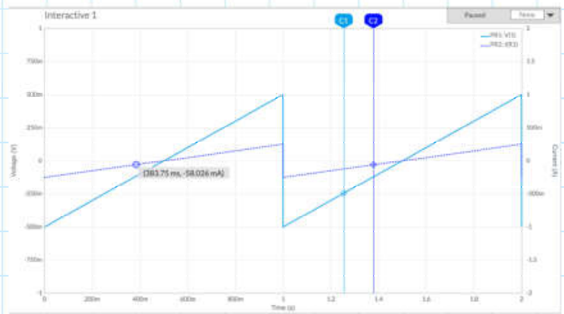
Exemplo da relação entre tensão e corrente em circuitos resistivos alimentados por fontes alternadas.

Em ambos os casos, a tensão e a corrente possuem a mesma forma de onda.

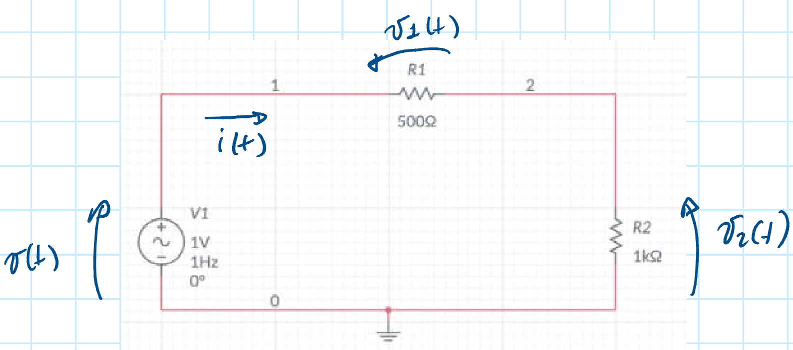








Exercício: Considere o circuito abaixo. Trace as curvas para a tensão nos resistores R1 e R2.



A tensão aplicada no circuito provém de uma fonte senoidal dada por

$$v(t) = sen(2\pi t)$$

A corrente total do circuito é dada por

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_t} = \frac{v(t)}{R_1+R_2} = \frac{1}{1500}\,\text{sen}\,(2\pi t)$$

A tensão em R1 é dada por

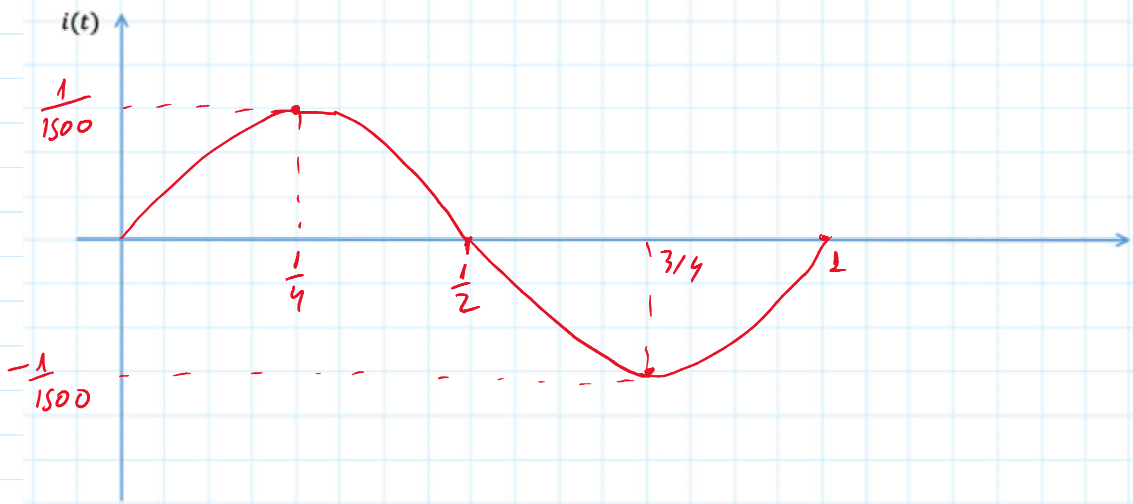
$$v_1(t) = i(t)\,R_1 = \frac{500}{1500}\,\text{sen}\,(2\pi t) = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(2\pi t)$$

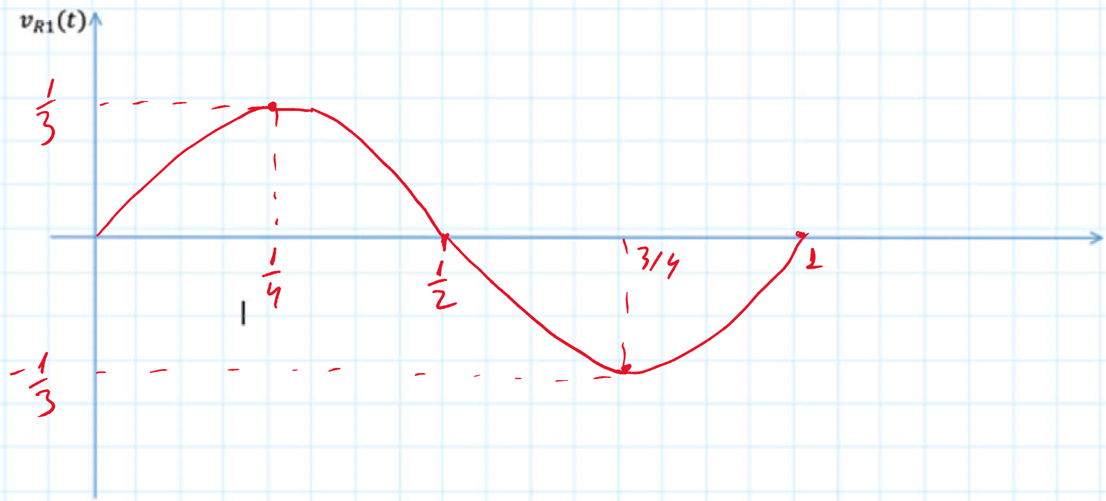
A tensão em R2 é dada por

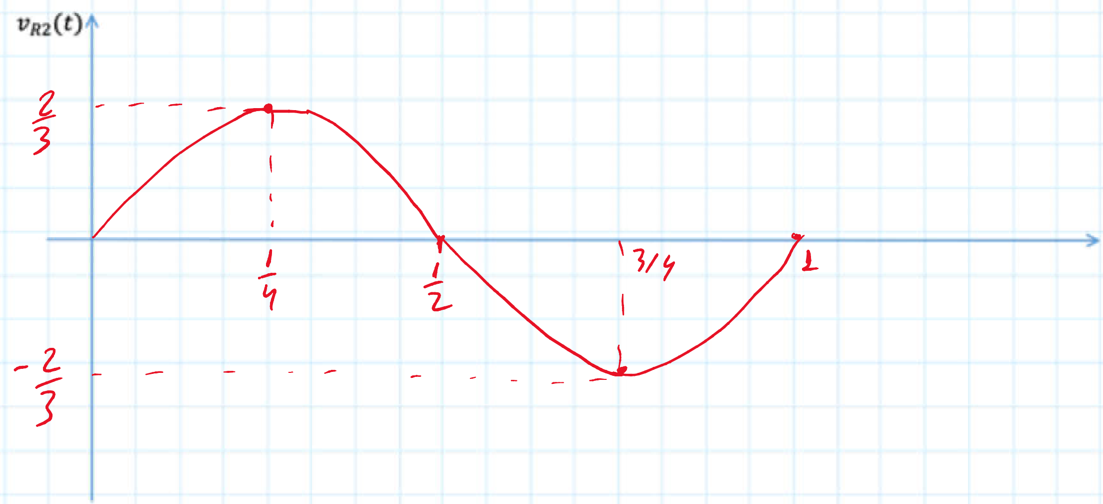
$$v_2(t) = i(t)\,R_2 = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3}\,\text{sen}\,(2\pi t)$$

Observe que a lei de Kirchoff para tensões é respeitada, ou seja.

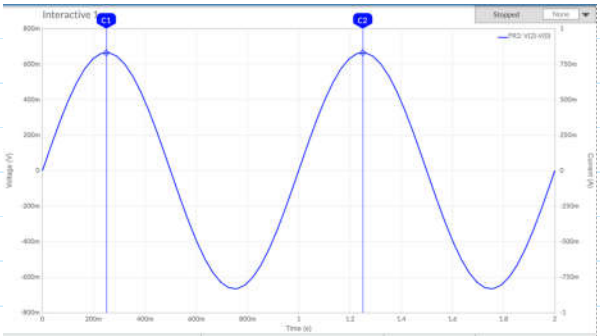
$$v(t) - v_1(t) - v_2(t) = 0$$

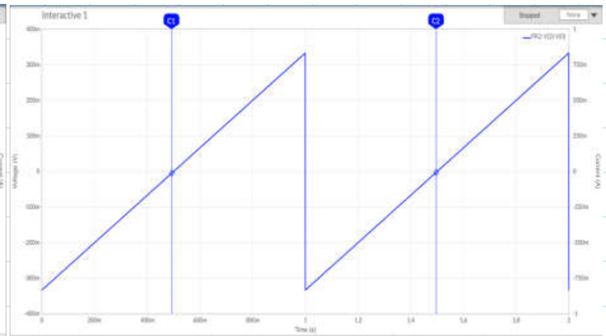






As fontes alternadas são, normalmente, periódicas, ou seja, seus valores se repetem a cada intervalo de tempo, denominado de período.





Uma forma simples de se obter o período de uma forma de onda é observar o intervalo de tempo entre dois picos sucessivos da função.

Para as formas de onda periódicas, pode-se afirmar que:

$$x(t) = x(t + nT),$$

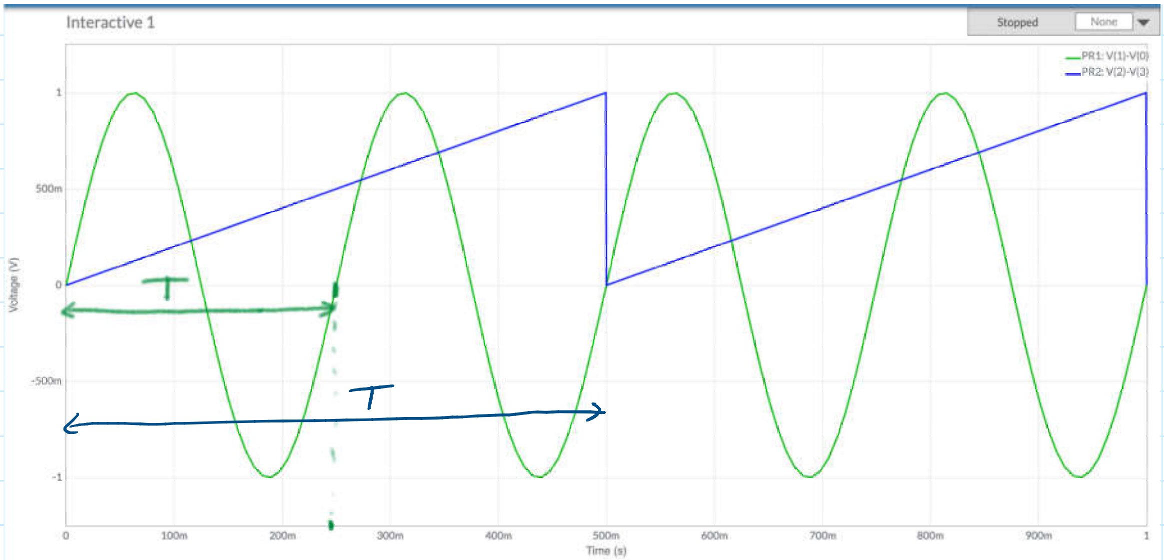
onde n é um número inteiro qualquer e T é o período da função.

A frequência de um sinal periódico é definida como o número de ciclos que o sinal possui no intervalo de 1 segundo e pode ser calculada como

$$f = \frac{1}{T}$$

O período e a frequência são duas grandezas fundamentais para caracterizar fontes alternadas.

Exemplo: Determine o período e a frequência das fontes de tensão abaixo

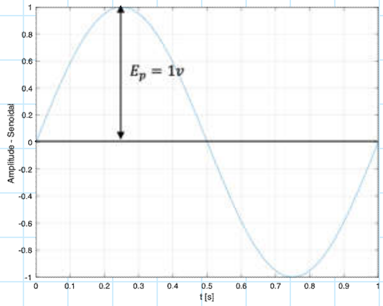


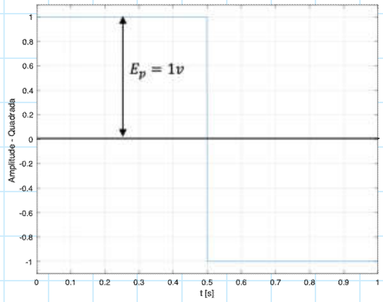
$T = 250\,ms \;\therefore\; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{250\times10^{-3}} = 4\,Hz$ → Existem 4 ciclos em 1 segundo

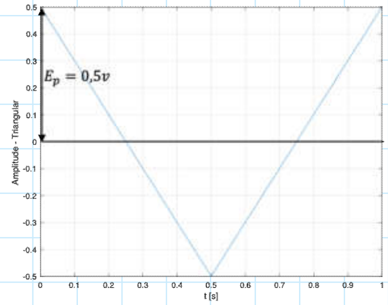
$T = 0{,}5\,s \;\therefore\; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,Hz$ → Existem 2 ciclos em 1 segundo.

Além do período e da frequência, as amplitudes das fontes alternadas são importantes para sua caracterização. Como o nível da fonte varia ao longo do tempo, seu valor instantâneo irá depender da forma de onda e do instante de tempo. No entanto, há alguns parâmetros relacionados com a amplitude do sinal, que são constantes. Os principais são os seguintes:

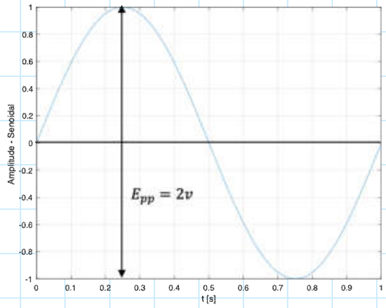
Valor de Pico: corresponde ao máximo valor que a fonte pode apresentar. Normalmente é denotado por V_p ou E_p, quando o sinal representa uma tensão, ou I_p quando o sinal representa uma corrente.

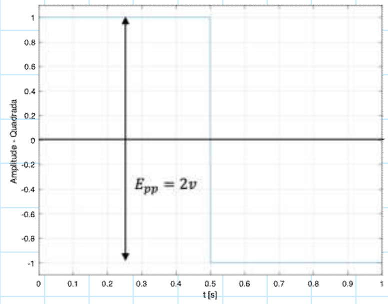


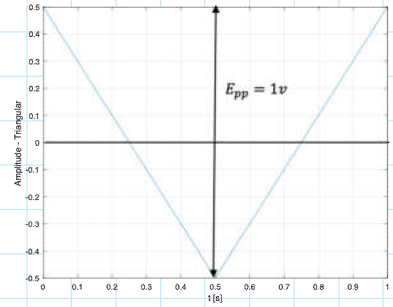




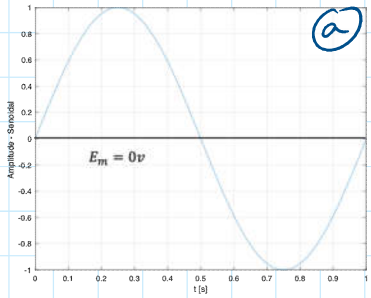
Valor de Pico-à-Pico: corresponde à diferença entre o valor máximo e o valor mínimo apresentado pela forma de onda. Normalmente é representado por V_{pp} ou E_{pp} quando o sinal é uma tensão e por I_{pp} quando o sinal é uma corrente.

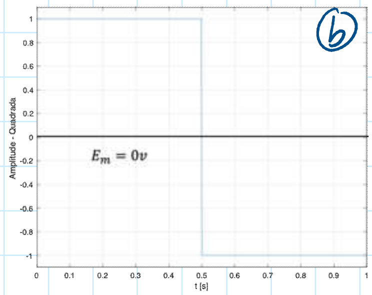


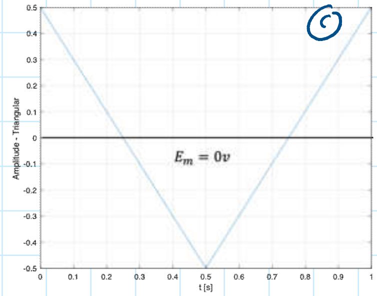




Valor Médio: este é o valor em torno do qual o sinal varia ao longo do tempo. É representado por V_m ou E_m, quando se trata de uma tensão, ou I_m para o caso de corrente.







O valor médio é dado pela área sob a curva

O valor médio é dado pela área sob a curva da função em um período, normalizado pelo período.

$$V_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt.$$

Exercício: Determine o valor médio dos sinais apresentados nos gráficos acima.

a) $x(t) = sen(2\pi t)$ onde $T = 1$

$$V_m = \frac{1}{1}\int_0^1 sen(2\pi t)\,dt = -\frac{\cos(2\pi t)\,dt}{2\pi}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi) - \cos(0)\right] = -\frac{1}{2\pi}\left[1 - 1\right]$$

$$= 0\ V$$

b) $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$ onde $T = 1$

$$V_m = \frac{1}{1}\int_0^{1/2} 1\,dt + \frac{1}{1}\int_{1/2}^{1} (-1)\,dt = t\Big|_0^{1/2} - t\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= (1/2 - 0) - (1 - 1/2) = 1/2 - 1/2$$

$$= 0\ V$$

c) $x(t) = \begin{cases} a_0 t + b_0 & 0 \leq t < 1/2 \\ + a_1 t + b_1 & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$ onde $T = 1\,s$

para $t = 0 \Rightarrow \quad a_0 \cdot 0 + b_0 = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad b_0 = 1/2$

para $t = 1/2 \Rightarrow \quad a_0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad a_0 = -2$

para $t = 1/2 \Rightarrow \frac{a_1}{2} + b_1 = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad b_1 = -\frac{1}{2} - \frac{a_1}{2}$

para $t = 1 \Rightarrow a_1 + b_1 = 1/2 \quad \therefore \quad b_1 = \frac{1}{2} - a_1 \quad (-1)$

$$0 = -1 + \frac{a_1}{2} \therefore a_1 = 2$$

$$b_1 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x(t) = \begin{cases} -2t + 1/2 & 0 \leq t < 1/2 \\ 2t - 3/2 & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$$

$$Vm = \frac{1}{1} \int_0^{1/2} \left(-2t + \frac{1}{2}\right) dt + \frac{1}{1} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t - 3/2)\, dt$$

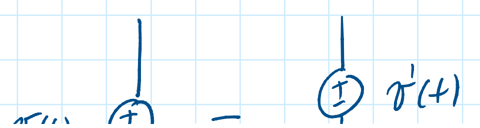
$$= -\cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{3}{2} t \Big|_{1/2}^{1}$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] + \left[1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \frac{3}{2}\left[1 - 1/2\right]$$

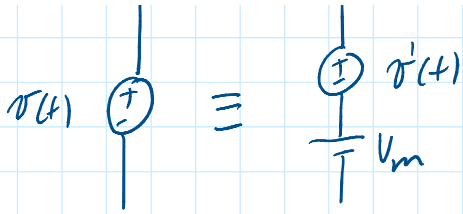
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= 0\,V$$

O princípio da superposição pode ser usado para desacoplar o valor médio da fonte alternada. Uma fonte de tensão AC com valor médio Vm pode ser representada por uma fonte alternada de média nula em série com uma fonte DC de valor Vm.

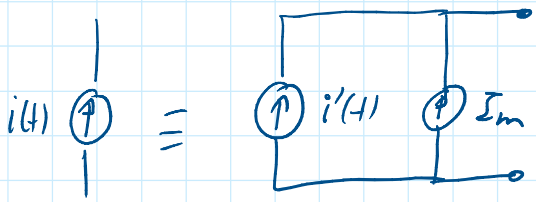


onde $v(t)$ é o sinal de tensão com valor médio Vm e



onde $v(t)$ é o sinal de tensão com valor médio V_m e $v'(t)$ é o sinal de tensão com valor médio nulo.

Para o caso de uma fonte de corrente AC com valor médio I_m, este pode ser representada por uma fonte de corrente alternada de média nula em paralelo com uma fonte de corrente DC com valor I_m.



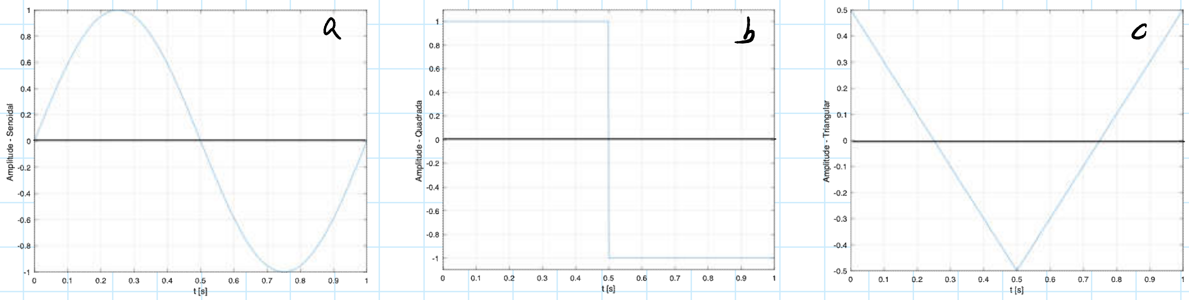
onde $i(t)$ é o sinal de corrente com valor médio I_m e $i'(t)$ é o sinal de corrente com valor médio nulo.

Valor RMS: RMS significa root-mean-square, ou seja raiz do valor médio quadrático. Este valor representa a tensão ou corrente equivalente a uma fonte DC que, ao ser aplicada em uma resistência R, irá dissipar a mesma potência que o sinal AC. Ou seja, do ponto de vista de potência dissipada numa carga resistiva, uma fonte alternada e uma fonte DC com seu valor RMS são equivalentes.

O valor RMS de um sinal é representado por V_{rms} ou E_{rms}, no caso de tensão, e por I_{rms}, no caso de corrente. O valor RMS de um sinal é dado por

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt}$$

Exercício: calcule o valor RMS dos seguints sinais



Neste exercício, vamos generalizar a solução para qualquer amplitude de pico A e qualquer período T para as 3 formas de onda.

a) $x(t) = V_p \,\text{sen}(2\pi f t)$

$$V_{RMS} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T V_p^2 \,\text{sen}^2(2\pi f t)\,dt\right)^{1/2}$$

$$V_{RMS} = \left(\frac{V_p^2}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f t)\right]dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{V_p^2}{T}\left[\frac{1}{2}t\Big|_0^T - \frac{1}{2}\frac{\text{sen}(4\pi f t)}{4\pi f}\Big|_0^T\right]\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{V_p^2}{T}\left[\frac{T}{2} - \frac{1}{8\pi f}\left(\text{sen}(4\pi f T) - \text{sen}(0)\right)\right]\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{V_p^2}{\cancel{T}}\left[\frac{\cancel{T}}{2} - \frac{1}{8\pi f}(0-0)\right]\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2}}$$

$$\boxed{V_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}}$$

Esta relação entre a amplitude de pico e o valor RMS é válido para qualquer sinal senoidal!!!

b) $x(t) = \begin{cases} V_p & 0 \leq t < t_0 \\ -V_p & t_0 \leq t < T \end{cases}$ onde t_0 é o valor que define o ciclo de trabalho do sinal.

$$V_{RMS} = \left(\frac{1}{T} \int_0^{t_0} V_p^2 \, dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} (-V_p)^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{T} V_p^2 t \Big|_0^{t_0} + \frac{1}{T} V_p^2 t \Big|_{t_0}^{T} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{V_p^2}{T} t_0 + \frac{V_p^2}{T} (T - t_0) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{V_p^2}{\cancel{T}} \cancel{T} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{V_{RMS} = V_p}$$

Para uma forma de onda quadrada bipolar, onde $U_{MAX} = -U_{min}$, o valor RMS é igual ao valor de pico para qualquer ciclo de trabalho.

c) $x(t) = \begin{cases} -\frac{4V_p}{T} t + V_p & 0 \leq t < T/2 \\ \frac{4V_p}{T} t - 3V_p & T/2 \leq t < T \end{cases}$

$$V_{RMS} = \left(\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(-\frac{4V_p t}{T} + V_p \right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T} \left(\frac{4V_p t}{T} - 3V_p \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_{RMS} = \left(\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{16 V_p^2 t^2}{T^2} - \frac{8 V_p^2 t}{T} + V_p^2 \right) dt +$$

$$V_{rms} = \left(\frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{[illegible]}{T^2} - \frac{[illegible]}{T} + [illegible]\; dt + \right.$$

$$\left.\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} \frac{16V_p^2t^2}{T^2} - \frac{24V_p^2t}{T} + 9V_p^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{16V_p^2}{T^3}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{T/2} - \frac{8V_p^2}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{T/2} + \frac{V_p^2}{T}\, t\Big|_0^{T/2} + \right.$$

$$\left.\frac{16V_p^2}{T^3}\frac{t^3}{3}\Big|_{T/2}^{T} - \frac{24V_p^2}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_{T/2}^{T} + \frac{9V_p^2}{T}\, t\Big|_{T/2}^{T}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\overset{2}{\cancel{16}}\, V_p^2}{3\cancel{T^3}}\left[\frac{\cancel{T^3}}{\cancel{8}}\right] - \frac{\cancel{4}V_p^2}{\cancel{T^2}}\frac{\cancel{T^2}}{\cancel{4}} + \frac{V_p^2}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{2} + \right.$$

$$\left.\frac{\overset{2}{\cancel{16}}\, V_p^2}{3\cancel{T^3}}\Big[\overbrace{T^3 - \frac{T^3}{8}}^{7\cancel{T^3}/8}\Big] - \frac{\overset{3}{\cancel{12}}\,V_p^2}{\cancel{T^2}}\Big[\overbrace{T^2 - \frac{T^2}{4}}^{3\cancel{T^2}/4}\Big] + \frac{9V_p^2}{\cancel{T}}\Big[\overbrace{T - T/2}^{\cancel{T}/2}\Big]\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2}{3}V_p^2 - V_p^2 + \frac{V_p^2}{2} + \frac{14V_p^2}{3} - 9V_p^2 + \frac{9V_p^2}{2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{4V_p^2 - 6V_p^2 + 3V_p^2 + 28V_p^2 - 54V_p^2 + 27V_p^2}{6}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2V_p^2}{6}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}}$$

Uma observação importante para todos os casos é que o valor rms não depende da frequência desses sinais.