



**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

EDMUR CRISTÓFORO NETO
Nº 12558492

**ELETROMAGNETISMO COMPUTACIONAL
POTENCIAIS E CAMPOS ELÉTRICOS**

São Carlos, SP
2023

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
2	DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	4
2.1	Prisma com Condutor Interno (Exercício 5.1)	4
2.2	Análise de Simetria (Exercício 5.2)	5
2.3	Capacitor (Exercício 5.3)	5
2.4	Análise da Separação das Placas (Exercício 5.4)	7
2.5	Análise da Precisão do Relaxamento (Exercício 5.5)	7
2.6	Haste Aterrada (Exercício 5.6)	9
2.7	Análise da Eficácia dos Métodos (Exercício 5.7)	10
2.8	Carga Pontual (Exercício 5.8)	12
2.9	Carga Pontual em Coordenadas Esféricas (Exercício 5.9)	13
2.10	Análise do Método SOR (Exercício 5.10)	15

1 INTRODUÇÃO

Este projeto tem o objetivo de resolver os Exercícios (5.1 a 5.10) do livro Computational Physics do autor Nicholas J. Giordano, os exercícios abordam o conteúdo de potenciais e campos elétricos em diferentes condições de contorno. Para a simulação das evoluções de potenciais utilizamos a equação de Laplace (1) e a equação de Poisson (2).

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

De forma discretizada em 2D:

$$\frac{V(i-1, j) + V(i+1, j) + V(i, j-1) + V(i, j+1) - 4V(i, j)}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{V(i-1, j) + V(i+1, j) + V(i, j-1) + V(i, j+1) - 4V(i, j)}{(\Delta x)^2} = -\frac{\rho(i, j)}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Com isso, resolvemos condições de contornos específicas para o potencial elétrico. Para a análise do campo elétrico por meio do potencial, utilizamos a equação abaixo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \approx -\frac{V(i+1, j) - V(i-1, j)}{2\Delta x} \quad (5)$$

Igualmente, de maneira simétrica para E_y .

O método de Jacobi foi escolhido para a simulação da evolução das condições de contorno do potencial, o método se baseia nos valores vizinhos do potencial de cada coordenada para determinar o valor da coordenada em questão, realizando essa dinâmica para toda a grade até que a diferença entre o potencial anterior se diferencie do potencial calculado por um erro, ou seja:

$$\Delta V = |V_{new}(i, j) - V_{old}(i, j)| \approx \epsilon \quad (6)$$

Em que V_{new} é discretizado da seguinte forma neste método:

$$V_{new}(i, j) = \frac{1}{4}[V_{old}(i-1, j) + V_{old}(i+1, j) + V_{old}(i, j-1) + V_{old}(i, j+1)] \quad (7)$$

2 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

2.1 Prisma com Condutor Interno (Execício 5.1)

Neste exercício, estamos interessados em estudar a evolução de um potencial numa grade 2D de dimensão $L \times L$ com um condutor quadrado no centro, os potenciais de contorno estão exemplificados na figura abaixo:

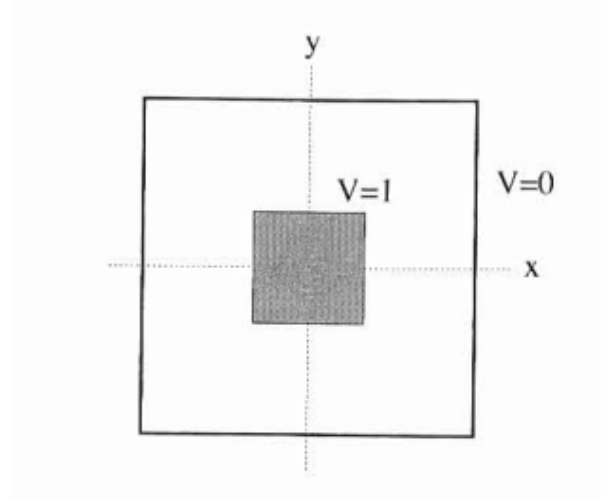


Figura 1: Condição de contorno (5.1)

Com a utilização do método de Jacobi, foi realizada as iterações com o erro de $\epsilon = 10^{-6} * L^2$, neste caso utilizamos uma grade com $L = 50$ e a dimensão do condutor $L_c = 10$.

Os resultados obtidos foram os valores de potenciais ao final de cada iteração e o potencial final após todas as iterações. Com isso, foi possível a elaboração de gráficos e de arquivos no formato Gif, os quais demonstram a evolução do potencial. Além disso, buscamos evidenciar o campo elétrico resultante e as linhas de equipotenciais. Os gráficos estão dispostos abaixo:

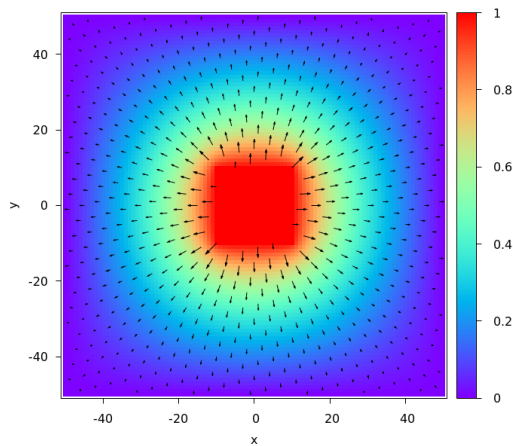


Figura 2: Campo Elétrico e Potencial

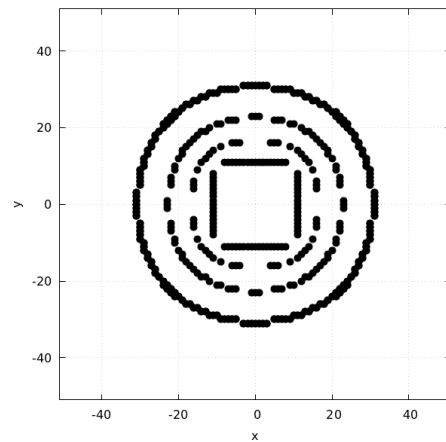


Figura 3: Linhas de Equipotenciais

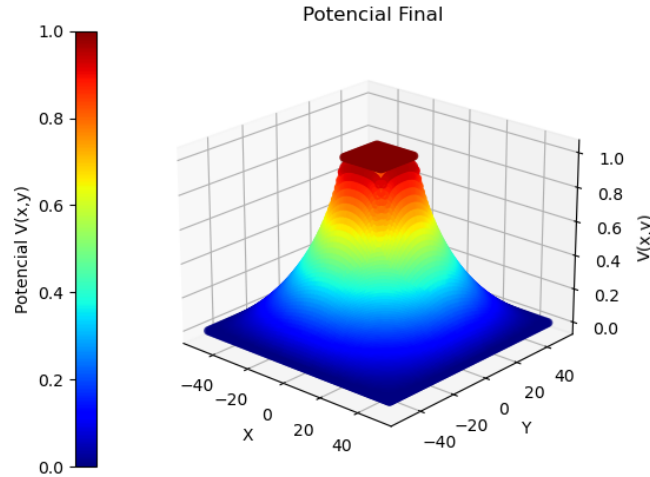


Figura 4: Potencial Final

Além dos gráficos, assim como foi citado acima, houve a elaboração de um arquivo .gif, que se encontra no link [Potencial - Gif](#), no arquivo é possível observar a evolução do potencial com o processo descrito como "relaxamento", outra possível observação dos potenciais do projeto é executando os códigos do gráfico presente no link [Códigos Gráfico](#), os códigos estão compactados junto com os respectivos dados.

2.2 Análise de Simetria (Exercício 5.2)

No exercício 5.2, foi pedido para analisar uma outra maneira de resolução do exercício 5.1, se aproveitando da simetria entre os quadrantes da grade, ou seja, realizar as iterações em apenas um quadrante e por simetria determinar os potenciais que faltaram.

Neste exercício, medimos o tempo de programação utilizando os dois métodos para analisar a performance. Obtemos os seguintes resultados:

```
Tempo de programação (1º Quadrante): 0.179s
Tempo de programação (Total): 0.352s
```

Desse modo, podemos afirmar que, devido haver menos iterações no código utilizando o método do 1º quadrante, temos um resultado operacional mais otimizado, com um tempo de operação caindo praticamente pela metade.

2.3 Capacitor (Exercício 5.3)

Neste programa, estudamos o desenvolvimento do potencial de um capacitor, aplicando condições de contorno para sua borda e duas faixas de potenciais diferentes, simulando as placas paralelas do capacitor, as condições iniciais estão exemplificadas abaixo:

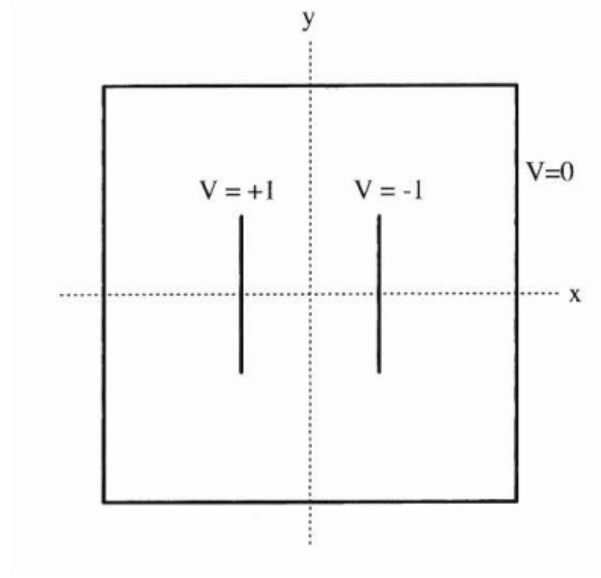


Figura 5: Condições de Contorno (5.3)

Utilizamos novamente o método de Jacobi, para o mesmo erro anterior $\epsilon = 10^{-6} * L^2$, e para uma grade com a mesma dimensão $L = 50$ e placas de comprimento $L_p = 10$.

Os valores obtidos dos potenciais e do campo foram utilizados para a elaboração dos gráficos abaixo:

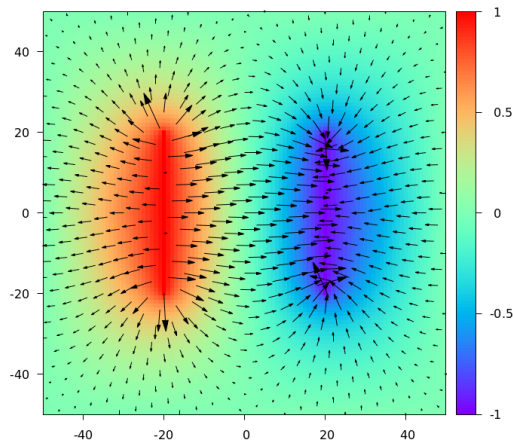


Figura 6: Campo Elétrico e Potencial

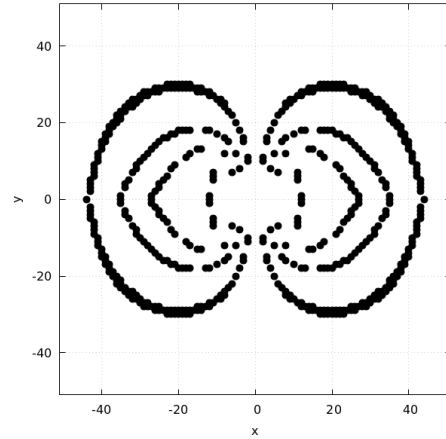


Figura 7: Linhas de Equipotenciais

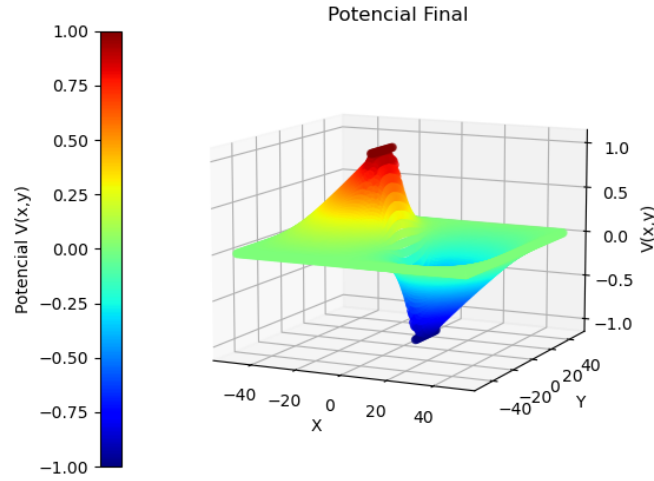
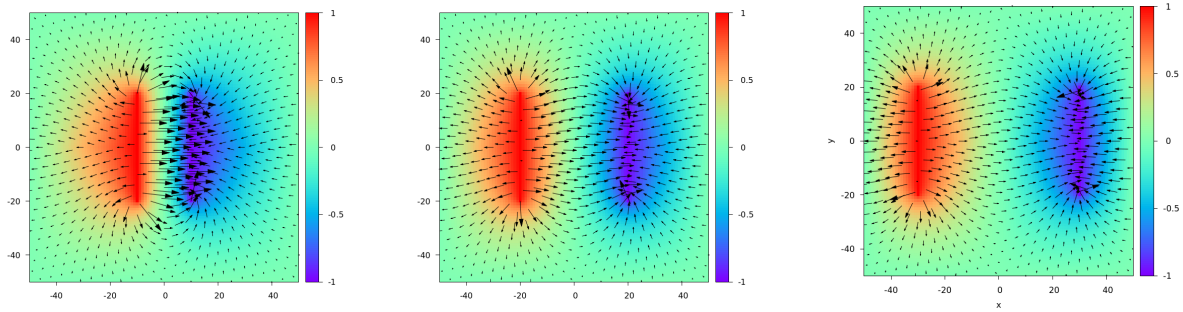


Figura 8: Potencial Final

Além dos gráficos, também foi elaborado um arquivo .gif do potencial evoluindo, presente no link [Potencial - Gif](#). Vemos que os resultados estão dentro do esperado, havendo o relaxamento do potencial.

2.4 Análise da Separação das Placas (Exercício 5.4)

Neste exercício, utilizamos o problema anterior para observar as mudanças no campo elétrico dentro e fora de um capacitor em função da separação das placas. Com esse intuito, elaboramos um arquivo .Gif, disposto no link [Campo - Gif](#), para tornar mais notável as alterações do campo. Alguns pontos de separação das placas estão apresentadas abaixo:



Observamos que as alterações do campo estão condizentes com a teoria, dado que o campo elétrico entre as placas de um capacitor de placas paralelas varia da seguinte forma $E \propto \frac{1}{d}$, sendo d a distância entre as placas.

2.5 Análise da Precisão do Relaxamento (Exercício 5.5)

Neste estudo, buscamos analisar a precisão dos métodos de relaxamento. Tratamos então com outros métodos, pois, além do método de Jacobi, explicado na equação (7), temos o método de Gauss-Seidel e o método *Simultaneous Over-Relaxation* (SOR). Estes, estão explicados nas equações abaixo.

Método de Gauss-Seidel:

$$V_{new}(i,j) = \frac{1}{4}[V_{old}(i+1,j) + V_{new}(i-1,j) + V_{old}(i,j+1) + V_{new}(i,j+1)] \quad (8)$$

Uma vantagem do método de Gauss-Seidel é que para iterações que começam no início da grade, ou seja, começam com i_{minimo} e j_{minimo} , evoluindo para o restante da grade, pode ser realizado este método com apenas uma grade, sem que haja uma variável V_{new} e V_{old} , apenas V . Então, ficamos com:

$$V(i, j) = \frac{1}{4}[V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1)] \quad (9)$$

Agora, o método SOR tem como objetivo a otimização do método de Gauss-Seidel, colocando alguns parâmetros no cálculo do valor do potencial, para mostrar a equação, vamos definir $\Delta V \equiv V^*(i, j) - V_{\text{old}}(i, j)$, sendo $V^*(i, j)$ o potencial obtido pelo método de Gauss-Seidel. Com isso, determinamos a seguinte equação:

$$V_{\text{new}}(i, j) = \alpha \Delta V(i, j) + V_{\text{old}}(i, j) \quad (10)$$

Vemos que, se $\alpha = 1$ voltaremos ao método de Gauss-Seidel. O valor adequado para α , neste caso, seria $\alpha \approx \frac{2}{1+\pi/L}$.

Visto isso, a primeira etapa do estudo é aplicar o método de Jacobi nas condições do exercício (5.1), para diferentes limites de convergência (erro), e observar a variação dos resultados obtidos para V e \vec{E} . Optamos pela medição da média destes parâmetros para avaliar a variação, com isso, obtemos os seguintes resultados:

Limite de Convergência	Valor Potencial	Erro Potencial	Valor Campo	Erro Campo
0.1E-02	0.052480284	0.5E-01	0.008654069	0.9E-02
0.1E-03	0.175928742	0.1E+00	0.013639972	0.5E-02
0.1E-04	0.249703854	0.7E-01	0.016053738	0.2E-02
0.1E-05	0.273566455	0.2E-01	0.016929030	0.9E-03
0.1E-06	0.284446269	0.1E-01	0.017384913	0.5E-03
0.1E-07	0.315949410	0.3E-01	0.019785877	0.2E-02
0.1E-08	0.345604062	0.3E-01	0.021836817	0.2E-02
0.1E-09	0.357465923	0.1E-01	0.022657193	0.8E-03
0.1E-10	0.371802896	0.1E-01	0.023648750	0.1E-02
0.1E-11	0.371989697	0.2E-03	0.023661669	0.1E-04
0.1E-12	0.371989697	0.0E+00	0.023661669	0.0E+00

Para o método de Jacobi vemos que não há uma possível correlação entre o limite de convergência e o erro dos parâmetros, essa propriedade se deve muito ao modo que o método realiza a relaxamento, abaixo observamos os dados para o método de Gauss-Seidel.

Limite de Convergência	Valor Potencial	Erro Potencial	Valor Campo	Erro Campo
0.1E-01	0.050749637	0.5E-01	0.008614440	0.9E-02
0.1E-02	0.062513232	0.1E-01	0.009248978	0.6E-03
0.1E-03	0.200925156	0.1E+00	0.014452434	0.5E-02
0.1E-04	0.260296196	0.6E-01	0.016348327	0.2E-02
0.1E-05	0.281712979	0.2E-01	0.017030092	0.7E-03
0.1E-06	0.291079909	0.9E-02	0.017458046	0.4E-03
0.1E-07	0.295701504	0.5E-02	0.017667577	0.2E-03
0.1E-08	0.296446770	0.7E-03	0.017701764	0.3E-04
0.1E-09	0.296957582	0.5E-03	0.017732844	0.3E-04
0.1E-10	0.297001511	0.4E-04	0.017742487	0.1E-04
0.1E-11	0.297003031	0.2E-05	0.017742820	0.3E-06
0.1E-12	0.297003031	0.0E+00	0.017742820	0.0E+00

Com este método observamos que o potencial converge gradativamente diante da diminuição do limite de convergência.

Outra abordagem proposta neste exercício, é a análise da quantidade de iterações em função do limite de convergência para cada método. Abaixo estão dispostos os dados encontrados para cada método de relaxamento.

Erro	Iterações	Erro	Iterações	Erro	Iterações
0.1E-02	7	0.1E-02	15	0.1E-02	24
0.1E-03	1050	0.1E-03	857	0.1E-03	43
0.1E-04	2751	0.1E-04	1994	0.1E-04	61
0.1E-05	4309	0.1E-05	3116	0.1E-05	80
0.1E-06	5824	0.1E-06	4235	0.1E-06	98
0.1E-07	7090	0.1E-07	5130		
0.1E-08	7725	0.1E-08	5311		
Método Jacobi		Método Gauss-Seidel		Método SOR	

Notamos que existe uma proporcionalidade entre o número de dígitos significativos e o número de iterações, assim como esperado com base na teoria. Mas, além disso, notamos a grande eficácia do método SOR, comparado aos outros métodos.

2.6 Haste Aterrada (Exercício 5.6)

Neste exercício, buscamos simular um objeto similar ao para-raios, as condições de contorno propostas seriam colocar um potencial negativo na grade e deixar um lado da grade aterrado e uma barra, com largura de um intervalo, ligada a este lado da grade. Abaixo está uma exemplificação:

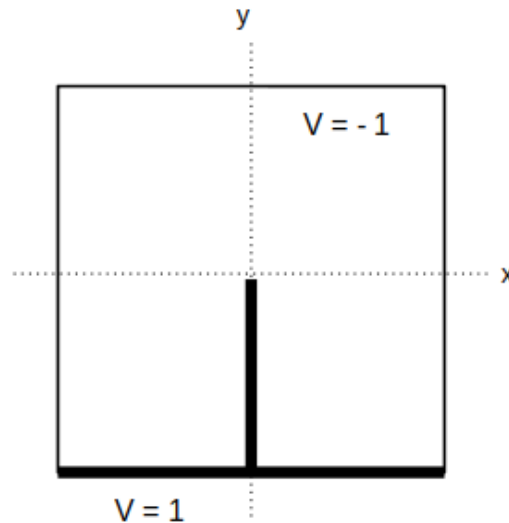


Figura 9: Condições de Contorno (5.6)

Utilizando o método de Jacobi somente no primeiro quadrante com dimensões $x = [0; L]$ e $y = [0; L]$, com $L = 81$ e posicionando a barra em $x = L/2$, dos exercícios anteriores, obtemos o seguinte potencial e campo:

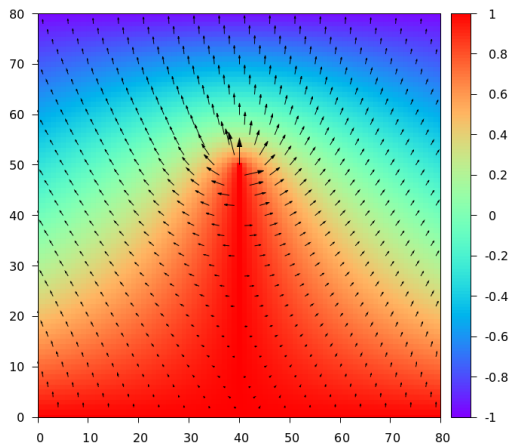


Figura 10: Campo Elétrico e Potencial

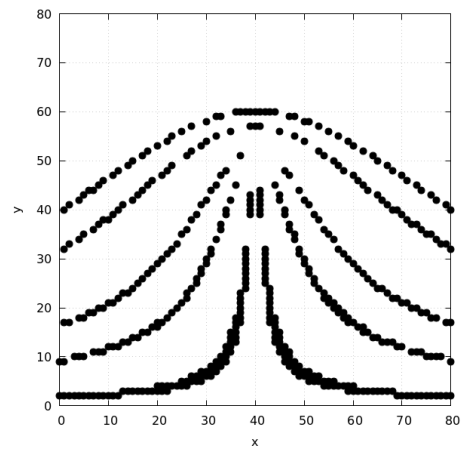


Figura 11: Linhas de Equipotenciais

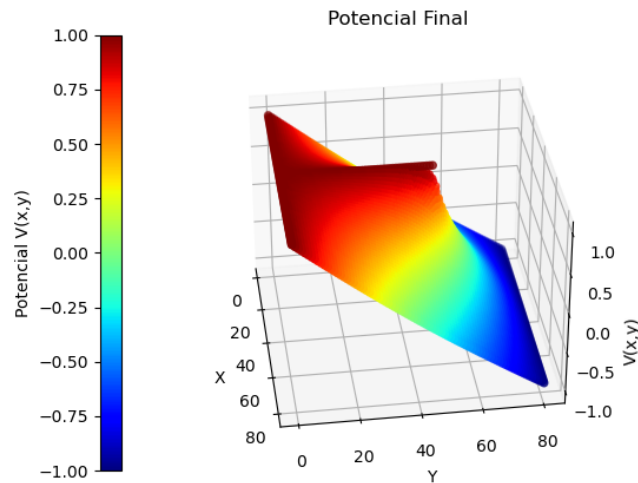


Figura 12: Potencial Final

Com base nos resultados, vemos que o potencial se ajusta em torno da barra, e ainda, conseguimos observar o efeito do "Poder das Pontas" no gráfico da figura (10), propriedade que ocorre em condutores quando são suscetíveis a potenciais diferentes do meio causando o surgimento de um campo elétrico de maior magnitude no extremo do condutor.

2.7 Análise da Eficácia dos Métodos (Exercício 5.7)

Neste programa, temos como objetivo comparar a eficácia de relaxamento entre o método de Jacobi e o método SOR para o problema do capacitor (Exercício 5.3). Para realizar esta análise, contabilizamos o número de iterações do método para diferentes dimensões da grade, com isso, obtemos os seguintes resultados:

L (Dimensão)	Iterações
10	83
20	478
30	1105
40	1841
50	2622
60	3399
70	4129
80	4769

Figura 13: Método de Jacobi

L (Dimensão)	Iterações
10	93
20	174
30	315
40	545
50	803
60	1087
70	1383
80	1683

Figura 14: Método SOR

Fica evidente que as iterações crescem mais abruptamente no método de Jacobi. Teoricamente, o número de iterações N_{ite} no método de Jacobi segue a relação $N_{ite} \sim L^2$, já para o método SOR temos que $N_{ite} \sim L$. Para confirmar essa relação, elaboramos o seguinte gráfico:

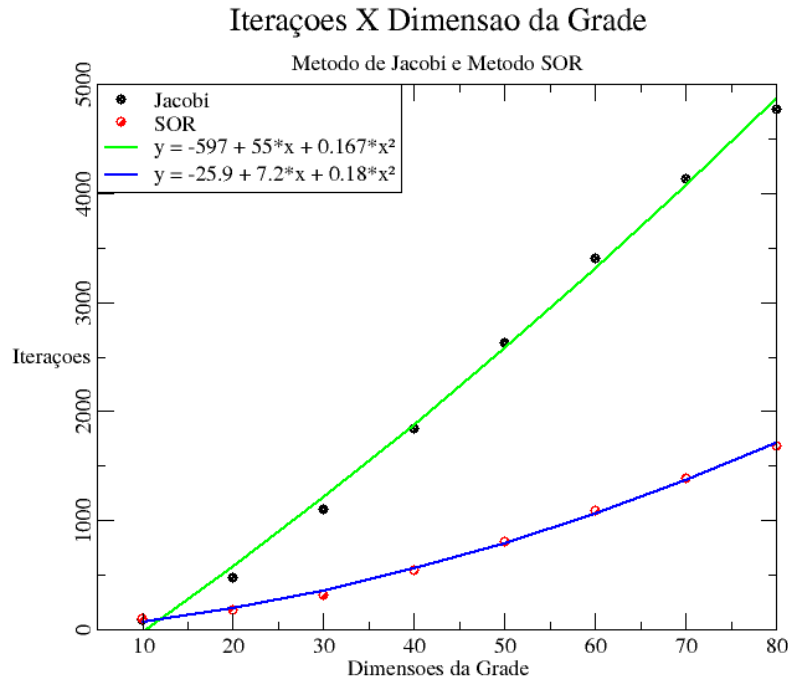


Figura 15: Análise da eficácia

Desse modo, vemos que para os dois métodos há coeficientes quadráticos na regressão, por mais que a curva do gráfico para o método de Jacobi seja mais abrupta, isso é devido ao coeficiente linear e não a parte quadrática. Porém, podemos ressaltar que a análise contém poucos pontos e, sendo assim, pode não remeter fielmente à teoria.

2.8 Carga Pontual (Exercício 5.8)

Neste programa, estudamos o comportamento do potencial quando submetemos uma carga no espaço. Mais precisamente, utilizamos uma caixa em formato de cubo com potencial $V = 0$ nas faces e uma carga pontual q no centro, assim como apresentado na figura abaixo:

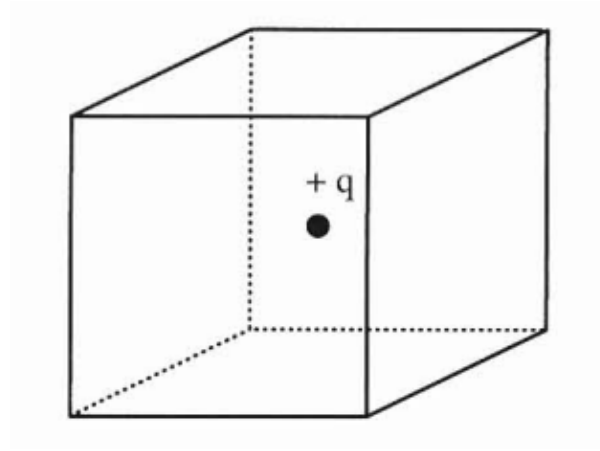


Figura 16: Condições de Contorno (5.8)

Dado as condições, é notável que será necessária a utilização da equação de Poisson para este problema. Portanto, implementamos a equação (4) para 3 dimensões, vemos a equação (11) abaixo. O cubo utilizado tem dimensões L^3 com $L = 51$, além disso, colocamos uma carga cujo valor seria apropriado para o cálculo $\frac{q}{\epsilon_0} = 1$, desse modo, somente $\frac{\rho(26,26,26)}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0(\Delta x)^3} = 1$, pois o passo Δx neste relatório é igual a 1.

$$V(i, j, k) = \frac{1}{6} [V(i-1, j, k) + V(i+1, j, k) + V(i, j-1, k) + V(i, j+1, k) + V(i, j, k-1) + V(i, j, k+1)] + \frac{\rho(i, j, k)}{6} \quad (11)$$

Outra propriedade alterada neste exercício é o fato de que não foi proposto um limite de convergência, visto que o potencial da um salto próximo a carga e assim demoraria muito até alcançar o relaxamento. Para resolver este problema, foi analisado um número mínimo de iterações para que o cálculo do potencial fosse suficientemente preciso. Com isso, podemos elaborar os seguintes gráficos:

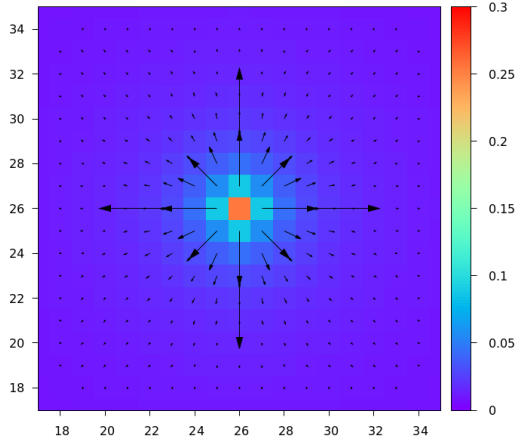


Figura 17: Campo Elétrico e Potencial

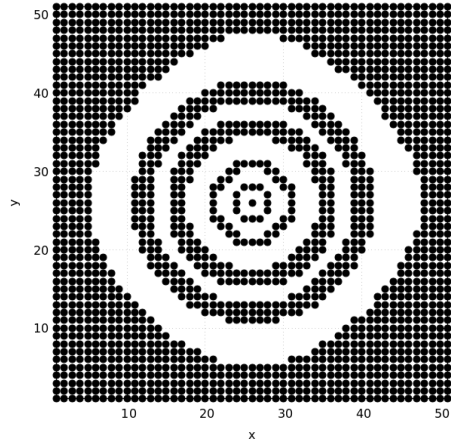


Figura 18: Linhas de Equipotenciais

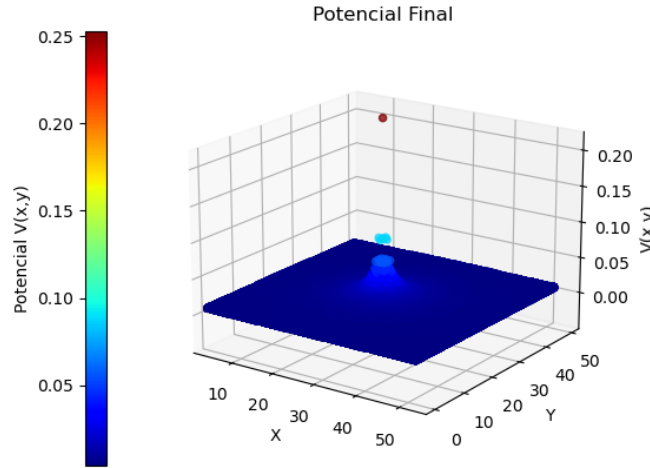


Figura 19: Potencial Final

Vemos que os gráficos são condizentes com o esperado, apesar que o campo elétrico tenha uma certa distorção que pode ser considerado levando em conta a simetria do problema. Outra forma de observar o relaxamento, é por meio do Gif disposto no link .

2.9 Carga Pontual em Coordenadas Esféricas (Exercício 5.9)

Este exercício é um aprofundamento do anterior, no sentido de tentar aprimorar o relaxamento do potencial utilizando as coordenadas esféricas. Portanto, partimos da equação de Poisson em coordenadas esféricas, $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ e a discretizamos, obtendo:

$$V(r) = \frac{1}{2} [V(r+1) \left[\frac{\Delta r + r}{r} \right] + V(r-1) \left[\frac{r - \Delta r}{r} \right]] + \frac{\rho(r) \Delta r^2}{2\epsilon_0} \quad (12)$$

Utilizamos uma esfera infinitesimal de raio $r_{min} = 0.25$ carregada, de mesma carga que no exercício anterior, simbolizando a carga pontual na origem, o contorno foi dado por uma esfera de raio $r = 5$ com

potencial $V = 0$. Dessa forma, as iterações do método só envolviam a coordenada r , então o formato 2D ou 3D é dado ao escrever os dados no arquivo, pois sabemos que a simetria é radial e, consequentemente, o potencial tem o mesmo valor para todos os ângulos ϕ e θ para um mesmo r .

A partir da aplicação do método, obtemos os seguintes gráficos:

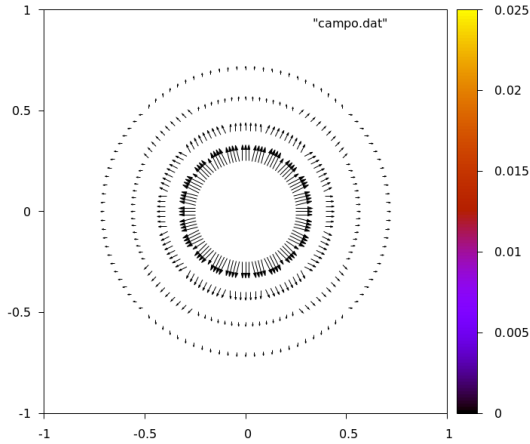


Figura 20: Campo Elétrico

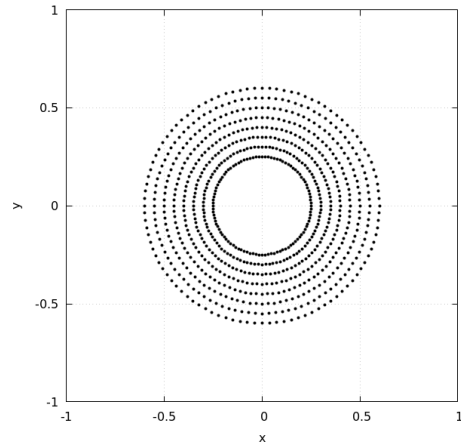


Figura 21: Linhas de Equipotenciais

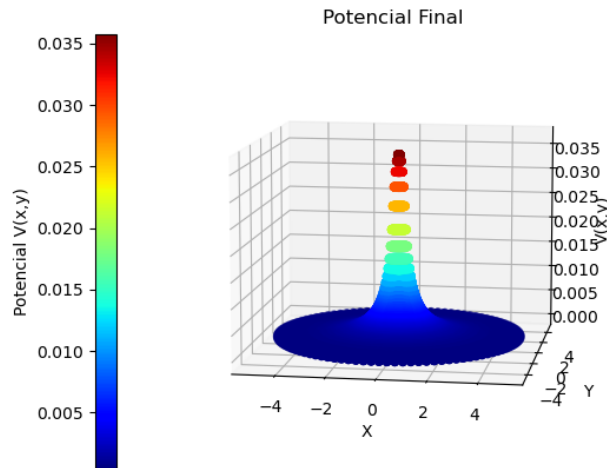
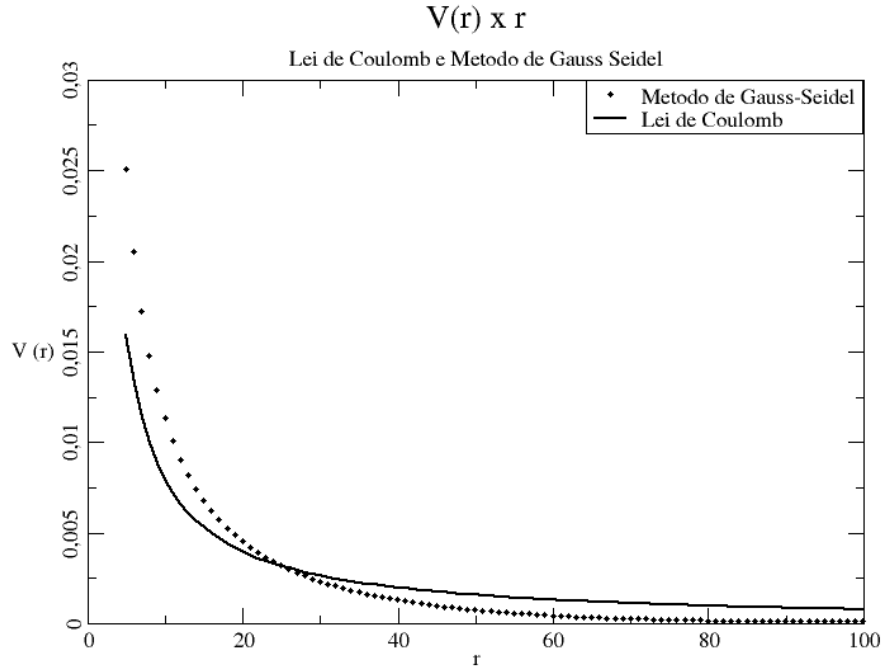


Figura 22: Potencial Final

Observamos que os gráficos estão como esperado, evidenciando a simetria radial proposta e o salto existente no potencial perto de $r = 0$, além disso, foi elaborado um Gif para melhor visualização do processo, presente no link [Potencial - Gif](#). Outra análise proposta, foi a comparação entre o potencial obtido em função de r e a equação exata da lei de Coulomb $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, apresentamos o resultado no gráfico abaixo:



Vemos que o potencial segue sim uma relação de proporcionalidade em que $V(r) \propto 1/r$, porém, possui um decaimento mais rápido que a lei de Coulomb. Este comportamento ocorre devido as condições de contorno impostas no exercício, pois, apesar de $r > r_{min}$, espera-se que $V(r) = 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

2.10 Análise do Método SOR (Exercício 5.10)

Neste exercício foi proposto a análise do método SOR para o caso da carga pontual em coordenadas esféricas, além disso, foi requisitado a avaliação de um melhor parâmetro α do método para coordenadas 3D. Porém, da forma em que foi implementado o relaxamento, teríamos apenas um melhor α , pois o código pode ser interpretado tanto em 2D como em 3D. Sendo assim, avaliamos alguns parâmetros e infelizmente o único parâmetro de α no intervalo de $[1;2]$ que permitiu o cálculo do potencial foi $\alpha = 1$, ou seja, só conseguimos aplicar o método de Gauss-Seidel. Este problema pode ter ocorrido pela forma de tratamento da simetria.