UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

EDMUR CRISTÓFORO NETO
Nº 12558492

ELETROMAGNETISMO COMPUTACIONAL
PROPAGAÇÃO DE ONDAS

São Carlos, SP
2023

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este projeto tem o objetivo de resolver os Exercícios (6.1 a 6.8) do livro Computational Physics do autor Nicholas J. Giordano, os exercícios abordam a propagação de ondas em diferentes configurações. Para o cálculo numérico da propagação, utilizamos da equação de onda discretizada descrita e suas propriedades descritas abaixo.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

Discretizamos esta equação com base no método de derivada para traz de 2 pontos, assim ficamos com a seguinte expressão, sendo $x = i\Delta x$ e $y = n\Delta t$, com $i = 1, 2, 3, ...$ e $n = 1, 2, 3, ...$

$$\frac{y(i, n+1) + y(i, n-1) - 2y(i, n)}{\Delta t^2} = c^2 \frac{y(i+1, n) + y(i-1, n) - 2y(i, n)}{\Delta x^2} \tag{2}$$

Definindo $r \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$,

$$y(i, n+1) = 2(1 - r^2)y(i, n) + r^2[y(i+1, n) + y(i-1, n)] - y(i, n-1) \tag{3}$$

Desse modo, precisamos de condições inicias da onda e condições de contorno para a corda, a princípio optamos por estabelecer um pulso inicial em $Y(x, 0) = Y_0(x)$ que esteja em repouso $\dot{Y}(x, 0) = 0$. Assim, iteramos sobre o espaço i e sobre o tempo n, de acordo com a equação (3), para realizar a propagação da onda.

2 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

2.1 Pacote Gaussiano - Pontas Livres (Exercício (6.1))

As condições iniciais desse problema impõem um pulso gaussiano que segue a expressão $Y_0(x) = exp[-k(x-x_0)^2]$, consideramos nesse caso, $x_0 = L/3$ e k = $L/30$, com L = 1m. Dessa forma, para satisfazer a condição $\dot{Y}(x,0)$, colocamos $Y(x,-1) = Y(x,0)$ assim a velocidade inicial será nula.

Listing 1: Pacote Inicial

```
      x0 = L/3.d0
      s = L/30.d0

      do i = 0,100
           y(i,-1) = exp(-(i*dx-x0)**2.d0/s**2.d0)
           y(i,0) = exp(-(i*dx-x0)**2.d0/s**2.d0)
      enddo
```

Agora, impomos as condições de contorno, propondo que as pontas da corda fiquem livres, nesse caso, assumimos que as alterações das amplitudes das pontas serão ditas com base em sua amplitude anterior e de sua vizinha mais próxima, ou seja, sendo $Y(100, n)$ a amplitude de uma das pontas, então $Y(100 + 1, n) = Y(100, n)$.

Listing 2: Condições de Contorno

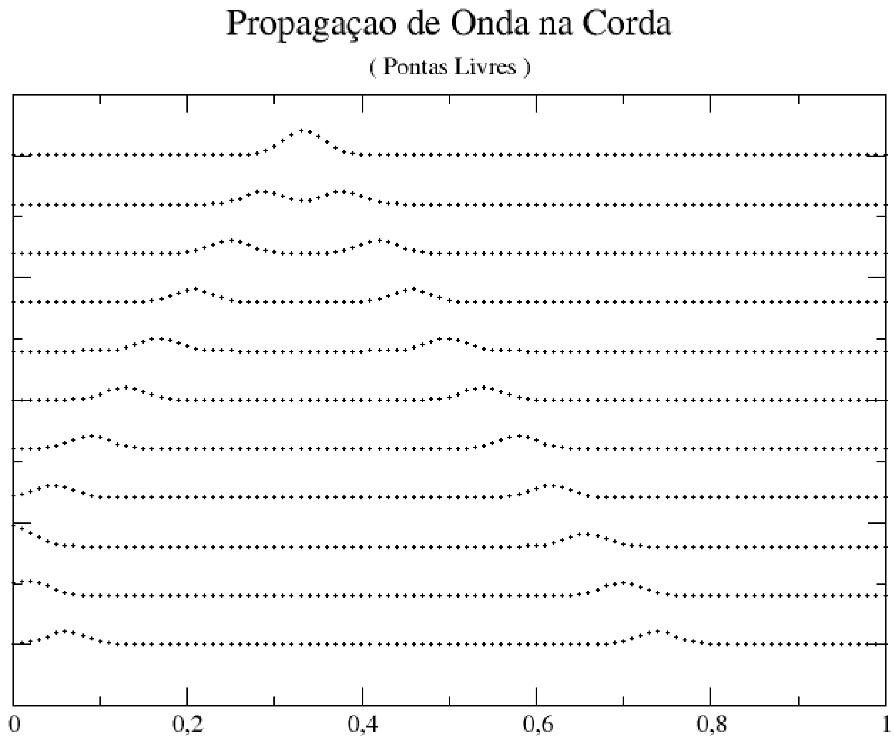
```
      do i = 1,99
        iplus(i) = i+1
        iminus(i) = i-1
      enddo

      iplus(0) = 1
      iminus(0) = 0
      iplus(100) = 100
      iminus(100) = 99
```

Por fim, a implementação do código da propagação, leva em conta a equação (3), com $r = 1$.

Listing 3: Propagação do Pulso

```
      do n = 0,200
        do i = 0,100

           y(i,n+1) = 2.d0*(1-r**2.d0)*y(i,n)+r**2.d0*
     $(y(iplus(i),n)+y(iminus(i),n))-y(i,n-1)

        enddo
      enddo
```

Os resultados da propagação estão demonstrados no gráfico abaixo e no arquivo .gif, presente no link 6.1.gif.



Vemos que o pulso se divide, e ao chegar às pontas não inverte ao refletir.

2.2 Pacote Gaussiano - Diferentes r (Exercício (6.2))

Neste problema estudamos como se comportam os pulsos quando mudamos a relação entre $c\Delta t$ e Δx, fazendo $r \neq 1$. Para casos em que $r > 1$, temos que $\frac{\Delta x}{\Delta t} < c$, dessa forma, a "velocidade"da iteração será menor que a velocidade da onda, portanto, serão somados mais pontos que a iteração normal, logo, o gráfico apresentará erros nas primeiras iterações.

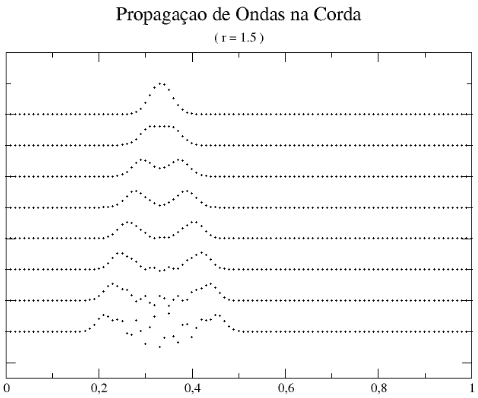


Figura 1: Onda com (r=1.5)

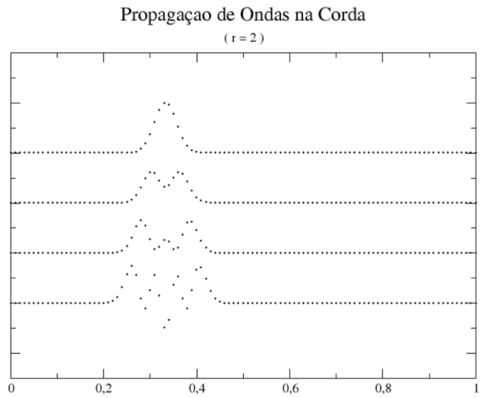
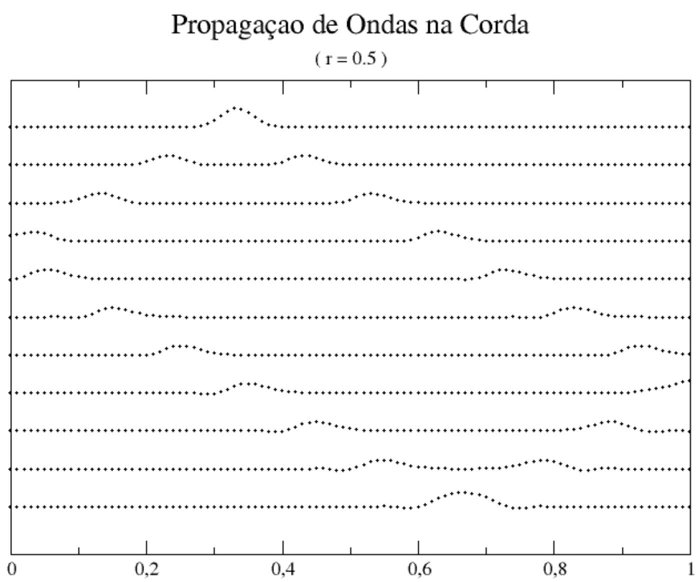


Figura 2: Onda com (r=2)

Como vemos no gráfico acima, houveram deformações nas ondas, que ficam mais evidentes no gif 6.2(r=1.5).gif e 6.2(r=2).gif.

Agora, para casos em que $r < 1$, temos que $\frac{\Delta x}{\Delta t} > c$, nessa condição alguns erros da discretização minimizados para r = 1, começam a se tornar relevantes e aparecer na propagação da onda, veremos abaixo acréscimos decorrentes destes erros.



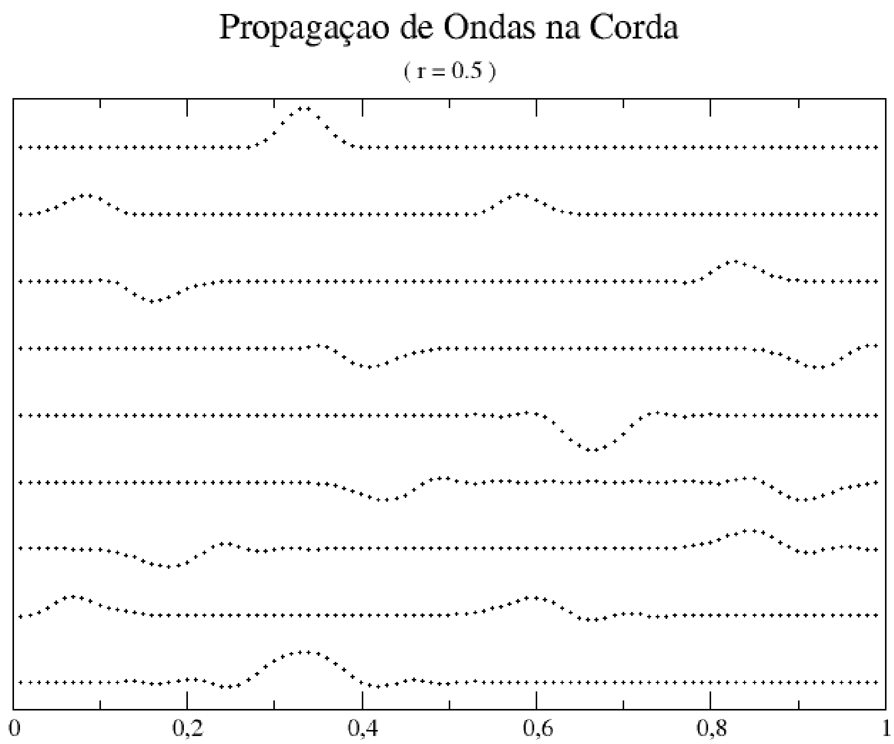
A evidência de maiores surgimentos de erros, ocorre quando fixamos as pontas da corda, assim, quando o pulso refletir são causados erros maiores. Para fixar as pontas das cordas impomos que $Y(0,n) = 0$ e $Y(100,n) = 0$ para todas iterações. A implementação do código está apresentada abaixo.

Listing 4: Propagação do Pulso

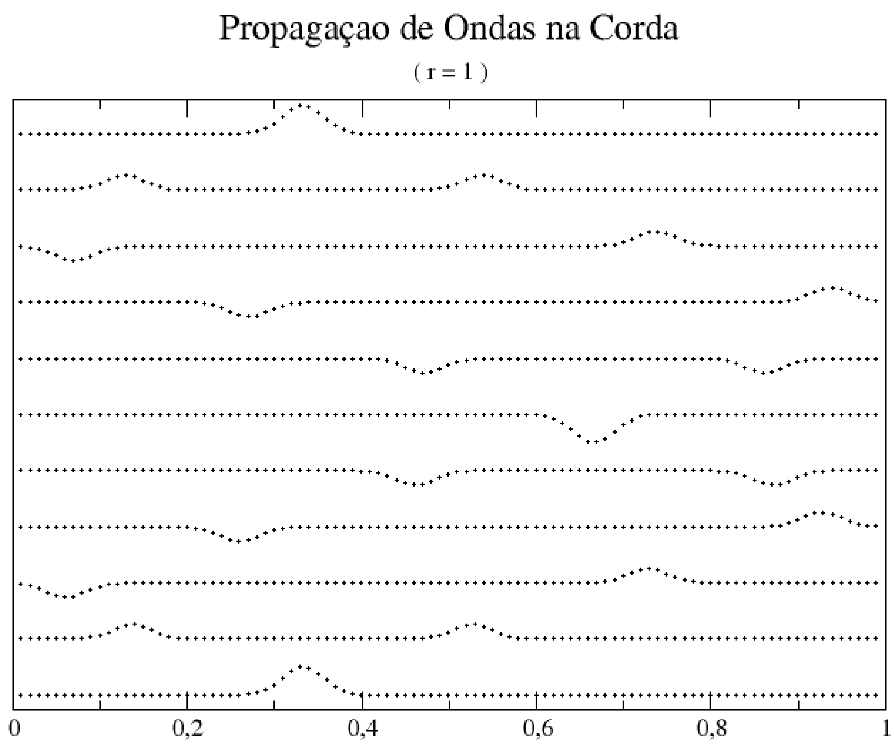
```
        do n = 0,410

```

```
        y(0,n) = 0.e0
        y(100, n) = 0.e0

        do i = 1,99

                y(i,n+1) = 2.d0*(1-r**2.d0)*y(i,n)+r**2.d0*
     $(y(iplus(i),n)+y(iminus(i),n))-y(i,n-1)

        enddo
       enddo
```

Observamos os resultados obtidos:



A propagação normal do pulso, para $r = 1$, quando as pontas das cordas estão fixas está demonstrada no gráfico abaixo:



Logo, percebemos as alterações na propagação, outra forma de visualizar esse caso é por meio dos gifs 6.2(r=1).gif e 6.2(r=0.5).gif.

2.3 Pacote Gaussiano - Pulso Único (Exercício (6.3))

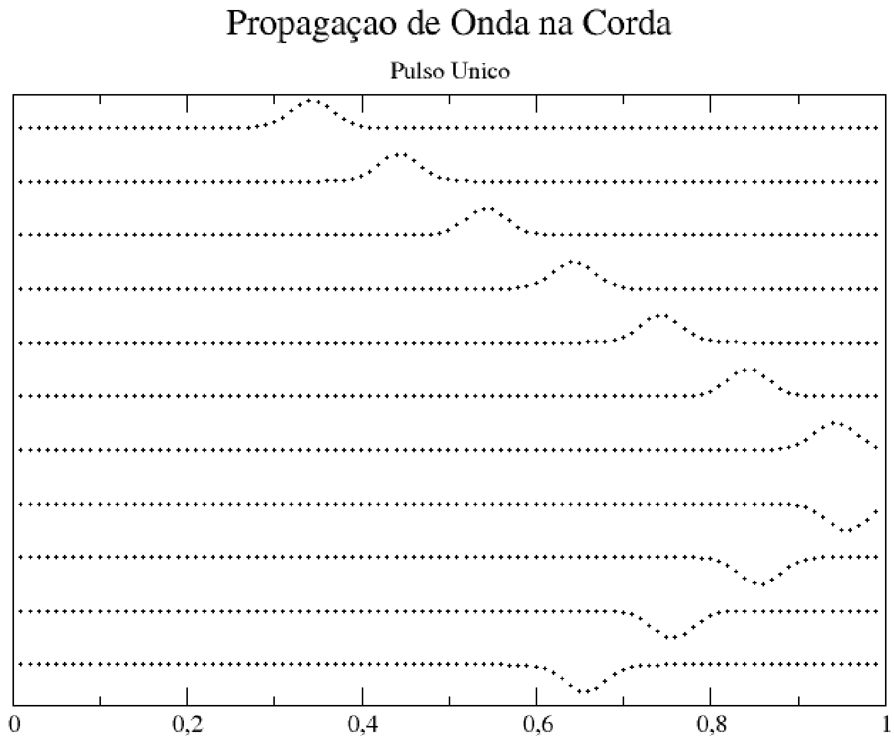
O objetivo deste problema é alterar as condições iniciais do pulso para que o pacote se propague na corda sem que haja divisões no início da iteração. Uma maneira de realizar isso, seria colocar o pacote inicial com velocidade $\dot{Y}(0)$ diferente de zero, assim o pulso se propagaria inteiramente na corda.

Para implementar isso, mudamos o código da condição inicial para que $Y(-1, n) \neq Y(0, n)$, como vemos abaixo:

Listing 5: Condições Iniciais do Pulso Único

```
      do i = 0,100
                y(i,-1) = exp(-(i*dx-x0)**2.d0/s**2.d0)
                y(i,0)  = exp(-(i*dx-(x0+dx))**2.d0/s**2.d0)
      enddo
```

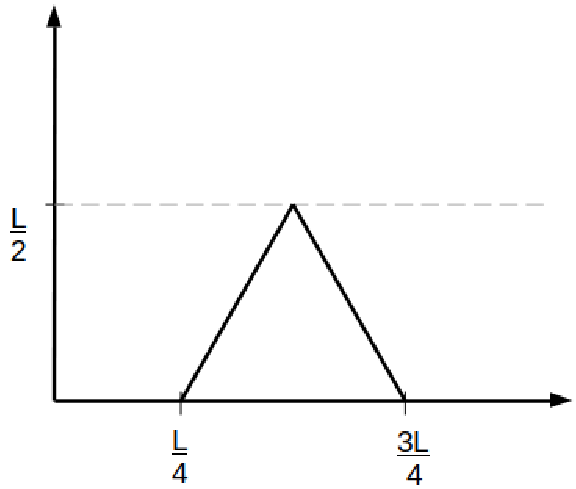
Como vemos, foi adicionado um termo dx na posição do pacote, fazendo com que este se movimente dentre as condições iniciais. Os resultados obtidos estão apresentados abaixo no gráfico e no gif presente no link 6.3.gif.



Obtivemos o resultado esperado para a propagação do pulso único.

2.4 Pacote "Guitarra"(Exercício (6.4))

Neste exercício, buscamos implementar um pacote de onda diferente dos anteriores, um pacote que exemplifique algo como o tocar de uma corda de guitarra, onde "puxamos"a corda com a extremidade fixa. Modelamos este pulso da seguinte forma.

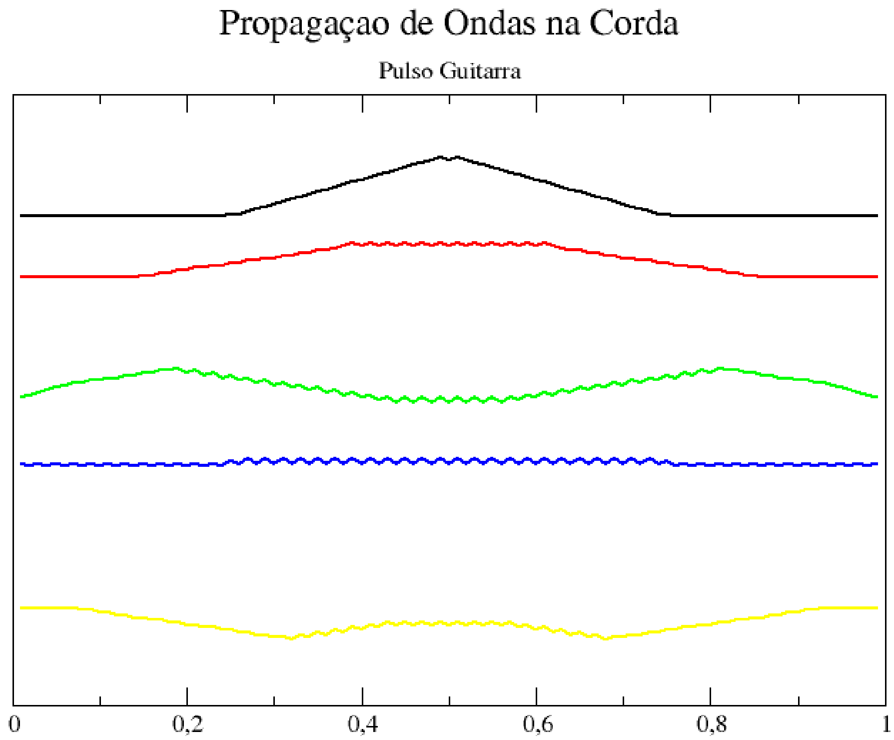


Desse modo, devemos dividir as condições iniciais em duas retas $y(x) = 2x - 0.5$ e $y(x) = -2x + 1.5$, sendo a primeira compreendendo aos valores de $25 < i < 50$ e a segunda de $26 < i < 75$, assim como implementado no código abaixo.

Listing 6: Condições Iniciais do Pacote "Guitarra"

```
        y = 0
        do i = 25,50
                y(i,-1) = 2.e0*i*dx - 0.5e0
                y(i,0) = 2.e0*i*dx - 0.5e0
        enddo
        do i = 51,75
                y(i,-1) = -2.e0*i*dx + 1.5e0
                y(i,0) = -2.e0*i*dx + 1.5e0
        enddo
```

Realizando as iterações do método com este pacote inicial, obtemos os seguintes resultados presente no gráfico abaixo e no gif no link 6.4.gif



Vemos que, por mais que seja um pacote de formato diferente, ainda há a reflexão quando passa pelos pontos fixos e a inversão também nas pontas. Mas, observamos alguns pequenos erros nas iterações, podendo ser ocasionados pela discretização.

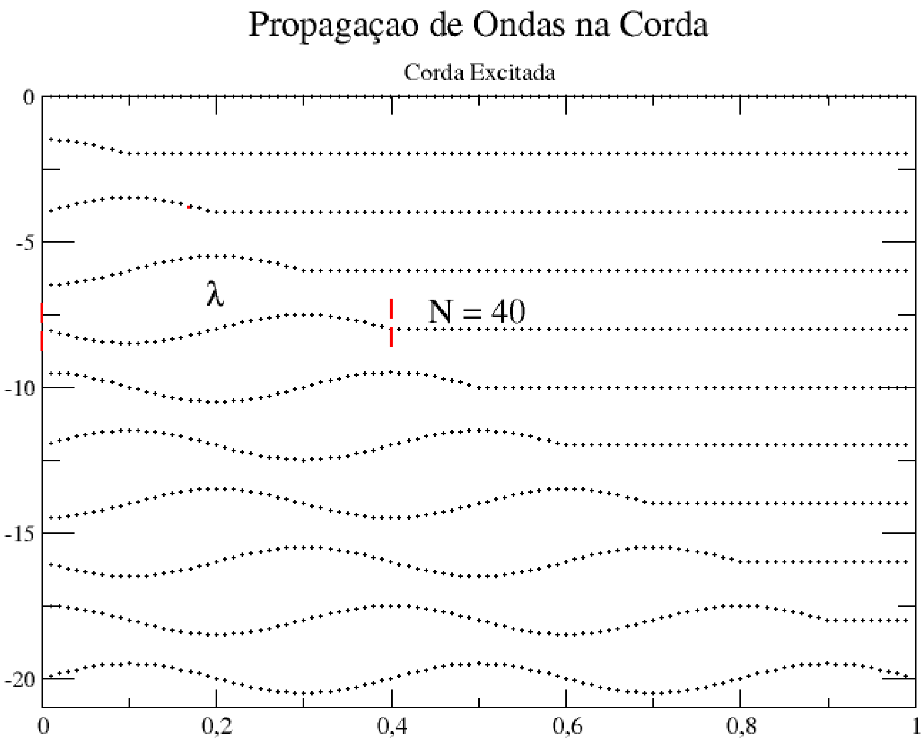
2.5 Ponta Oscilatória (Exercício (6.5))

Este exercício propõe a implementação de uma corda cuja uma ponta está oscilando com amplitude $Y(0,n) = A\sin(wt)$ e a outra se encontra fixa em uma parede. Escolhemos $\omega = \frac{\pi}{20}$ e $A = 0.5$ e iteramos sobre a corda com o código da seguinte forma:

Listing 7: Condições de Contorno - Ponta Oscilante

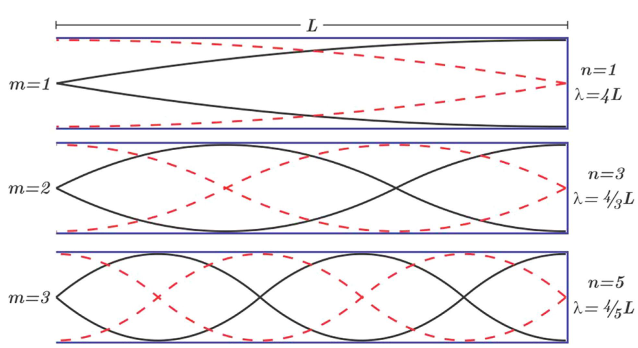
```
        w = pi*0.01e0/2.e0
        A = 0.5e0
        !Propagacao do Pulso
        do n = 0,400

                y(0,n) = A*sin(w*n)
                y(100, n) = 0.e0

                do i = 1,99

                y(i,n+1) = 2.d0*(1-r**2.d0)*y(i,n)+r**2.d0*
     $(y(iplus(i),n)+y(iminus(i),n))-y(i,n-1)

                enddo
        enddo
```

Os resultados estão explícitos no gráfico abaixo e no gif no link 6.5.gif.

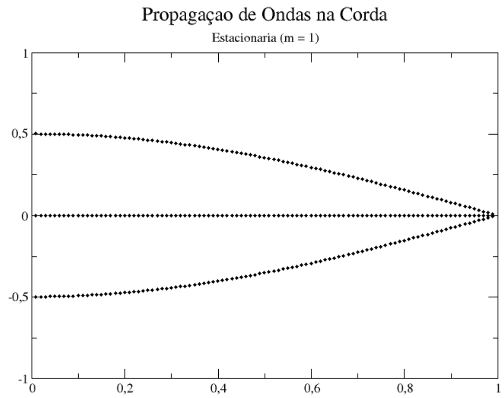


Para o cálculo da frequência f, utilizamos uma aproximação do gráfico que evidencia o surgimento de 1 comprimento de onda quando $t = 40$, com isso, temos o período da onda. Logo, sabemos que $f = 1/40$, para testar a equação $f = \omega/2\pi$ fazemos $\omega = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$, portanto, vemos que os resultados estão de acordo com a teoria.

Notamos que as ondas surgem e percorrem a corda até refletirem, assim, elas sofrem inversão e interferem nas ondas sucessores, em alguns casos, isso pode fazer surgir um padrão chamado de ondas estacionárias, as ondas estacionárias em uma corda de tamanho L com uma ponta livre oscilando segue as formas abaixo:



Então, podemos estipular os valores de ω em que teremos ondas estacionárias, como estamos utilizando $r = 1 = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$, com $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 1$, então, temos que $c = 0.01$, dessa forma, deduzimos que $\omega_m = \frac{\pi c n}{2L}$, com $n = 2k - 1$, sendo $k = 1, 2, 3, \ldots$, testamos alguns valores de ω e representamos abaixo os gráficos obtidos.



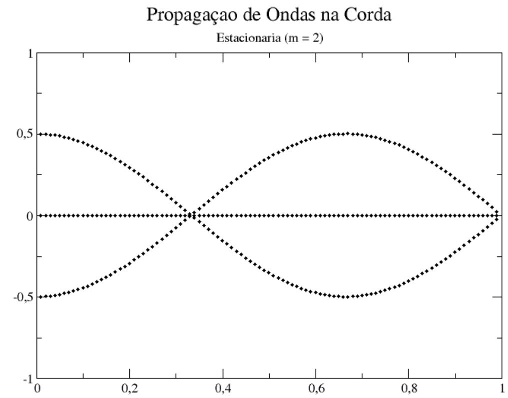


Figura 3: Propagação de Ondas com $\omega = \frac{0.01\pi}{2}$

Figura 4: Propagação de Ondas com $\omega = \frac{0.01\pi 3}{2}$

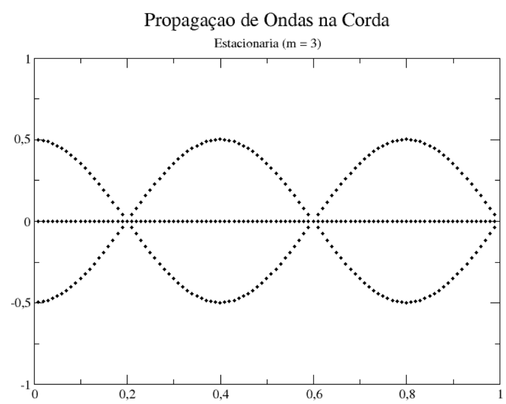


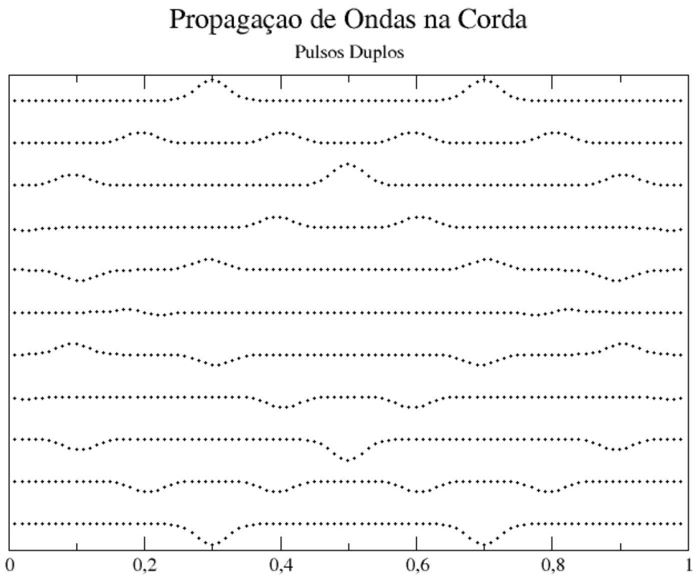
Figura 5: Propagação de Ondas com $\omega = \frac{0.01\pi 5}{2}$

Vemos que os gráficos estão condizentes com a teoria, representando o estado estacionário de ondas geradas por alguns específicos valores de ω.

2.6 Pacote Gaussiano - Pulso Duplo (Exercício (6.6))

Neste problema, estudamos a propagação de dois pulsos gaussianos soltos ao mesmo tempo em lugares diferentes da corda, o resultado esperado é que os pulsos interfiram entre si, porém, não se afetem, demonstrando a linearidade da equação de onda, em que a soma de duas soluções também é uma solução.

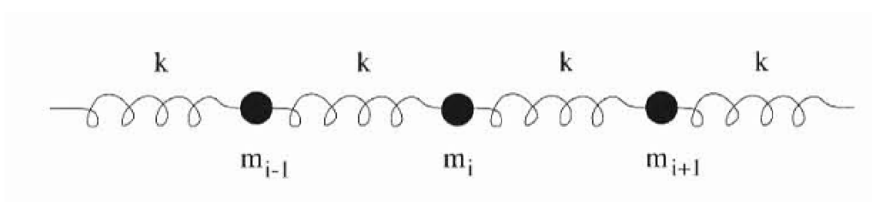
Os resultados obtidos foram:



Observamos que os pulso passam entre si, sem afetar forma ou velocidade, com isso, mostramos que não houveram rupturas na equação de onda para esta diferente solução. Outra forma de observar este resultado é por meio do gif no link 6.6.gif.

2.7 Osciladores Acoplados (Exercício (6.7))

Neste exercício, vamos estudar uma outra forma de se interpretar uma onda, a corda agora é composta por várias partículas de massa m, ligadas por molas de constante k, então, é proposto que calculássemos como seria a velocidade de propagação desta onda. A corda está exemplificada abaixo:



Dessa forma, para se obter a velocidade da corda, vamos utilizar as forças aplicadas a cada partícula.

$$m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = (F_{i-1}) + (F_{i+1}) = -k(y_i - y_{i-1}) - k(y_i - y_{i+1}) \tag{4}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \frac{k}{m_i}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \frac{k\Delta x^2}{m_i} \frac{(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{\Delta x^2} = \frac{k\Delta x^2}{m_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \tag{5}$$

Então, pela equação (1), temos que:

$$c = \Delta x \sqrt{\frac{k}{m_i}} \tag{6}$$

2.8 Pulso Gaussiano - Diferentes Cordas (Exercício (6.8))

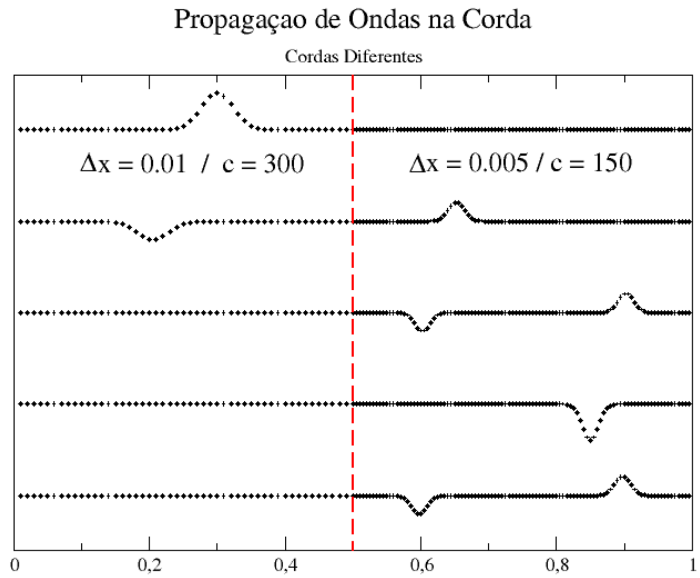
Neste caso, iremos utilizar duas cordas diferentes para a propagação de um pulso gaussiano, o pulso irá se propagar com velocidade diferente para cada corda, exemplificando uma mudança de meios. Como a velocidade é diferente em cada meio, então necessitamos alterar o Δx para cada corda, afim de manter $r = 1$.

Foi mantido $\Delta x = 0.01$ na primeira corda, e decidimos reduzir pela metade a velocidade do pulso na segunda corda, então, passamos a considerar $\Delta x = 0.005$, desse modo, nossa implementação do código da propagação ficou da seguinte forma:

Listing 8: Condições de Contorno - Ponta Oscilante

```
        do n = 0,600

                y(0,n) = 0.e0

                write(1,*) 0, y(0,n)

                do i = 1,50

                y(i,n+1) = 2.d0*(1-r**2.d0)*y(i,n)+r**2.d0*
     $(y(iplus(i),n)+y(iminus(i),n))-y(i,n-1)

                write(1,*) i*dx1, y(i,n)

                enddo

                y(200, n) = 0.e0

                do i = 101,199

                j = i - 50

                y(j,n+1) = 2.d0*(1-r**2.d0)*y(j,n)+r**2.d0*
     $(y(iplus(j),n)+y(iminus(j),n))-y(j,n-1)

                write(1,*) i*dx2, y(j,n)

                enddo

                write(1,*) 1, y(200,n)

        enddo
```

Com isso, obtemos a propagação apresentada na figura abaixo:



Vemos que não houve uma propagação de erros, pois o Δx estava ajustado, além disso, vemos que o pulso se propaga mais rápido na primeira corda, assim como esperado, este fato fica mais evidente no gif presente no link 6.8.gif.