



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

EDMUR CRISTÓFORO NETO
Nº 12558492

ELETROMAGNETISMO COMPUTACIONAL
CÁLCULO NUMÉRICO E CAMPOS MAGNÉTICOS

São Carlos, SP
2023

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
2	DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	3
2.1	Fio Retilíneo (Exercício (5.11 e 5.12)	3
2.2	Estimativa do Número pi (Exercício 5.13)	9
2.3	Campo Magnético de Espiras (Exercício 5.14)	10
2.4	Campo Magnético em Bobinas Helmholtz (Exercício 5.15)	12
2.5	Bobina Enrolada em Toroide (Exercício 5.16)	13

1 INTRODUÇÃO

Este projeto tem o objetivo de resolver os Exercícios (5.11 a 5.16) do livro Computational Physics do autor Nicholas J. Giordano, os exercícios abordam o conteúdo de cálculo numérico e campos magnéticos em diferentes configurações de corrente. Para o cálculo dos campos magnéticos nas diferentes configurações, vamos utilizar lei a de Biot-Savart, abaixo, discretizadamente.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

A fim de tornar a análise mais simplificada, assumimos que $\mu_0 I = 1$, para todas as configurações.

2 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

2.1 Fio Retilíneo (Exercício (5.11 e 5.12))

Neste problema, a configuração escolhida é de um fio retilíneo de tamanho $2L$, assim como mostra a figura abaixo:

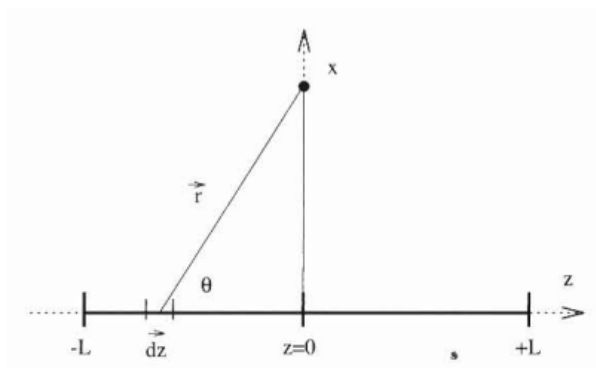


Figura 1: Configuração (5.1)

Dessa forma, vemos que a lei de Biot-Savart, pode ser resumida na seguinte equação:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{xdz}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Para realizar a discretização, transformamos o infinitesimal dz em pequenas diferenças Δz , calculando o campo B por meio de um somatório em z , descrito abaixo, o qual soma a contribuição dB de todos os elementos de corrente Δz do fio.

$$B \approx \sum \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{xdz}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Além do somatório, outra análise proposta é realizar a soma das contribuições por meio de uma integral numérica, o método de integração escolhido segue a regra de Simpson, em que transforma uma integral em um somatório particular:

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_i+h) + 4f(x_i) + f(x_i-h)) \quad (4)$$

Substituindo, $f(x)$ pela expressão do campo $B(z)$ onde $x = z$ e $h = \Delta z$, ao final calculamos o campo magnético do fio a uma distância x . Abaixo podemos observar as implementações do código para tornar mais lúcido o desenvolvimento do problema.

Listing 1: Implementação do Somatório

```

1      do i = 0, N
2          z = z_i + i*dz
3          campo_sum = campo_sum + B(z,x)
4      enddo

```

Listing 2: Implementação da Integral

```

1      do i = 0, N, 2
2          z = z_i + i*dz
3          campo_int = campo_int + (1.e0/3.e0)*
4          $(B(z+dz,x) + 4.e0*B(z,x) + B(z-dz,x))
5      enddo

```

Listing 3: Implementação do Campo Magnético

```

1      real function B(z,x)
2          parameter (pi = acos(-1.e0))
3
4          dz = 0.1e0
5          b = z**2.e0
6          a = x**2.e0
7          soma = (a + b)**1.5e0
8          B = x*dz/((4.e0*pi)*soma)
9
10     end function

```

Dessa forma, realizamos o cálculo do campo magnético de um fio de comprimento $L = 10$ e $\Delta z = 0.1$, variando a distância x do fio, construímos os seguintes gráficos para análise dos dois métodos:

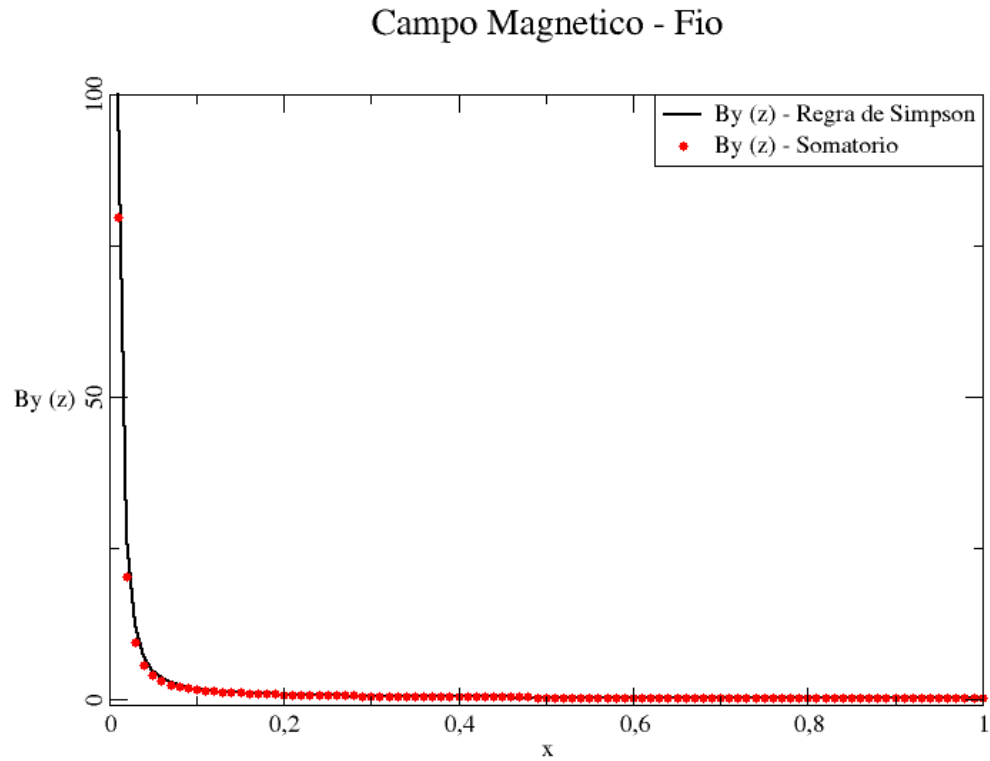


Figura 2: Campo Magnético para $\Delta z = 0.1$

Vemos que o campo calculado por ambos os métodos correspondem ao comportamento esperado, além de terem erros muito pequenos entre si. Elaboramos outro gráfico para o campo no mesmo fio, agora utilizando $\Delta z = 0.01$.

Campo Magnetico - Fio

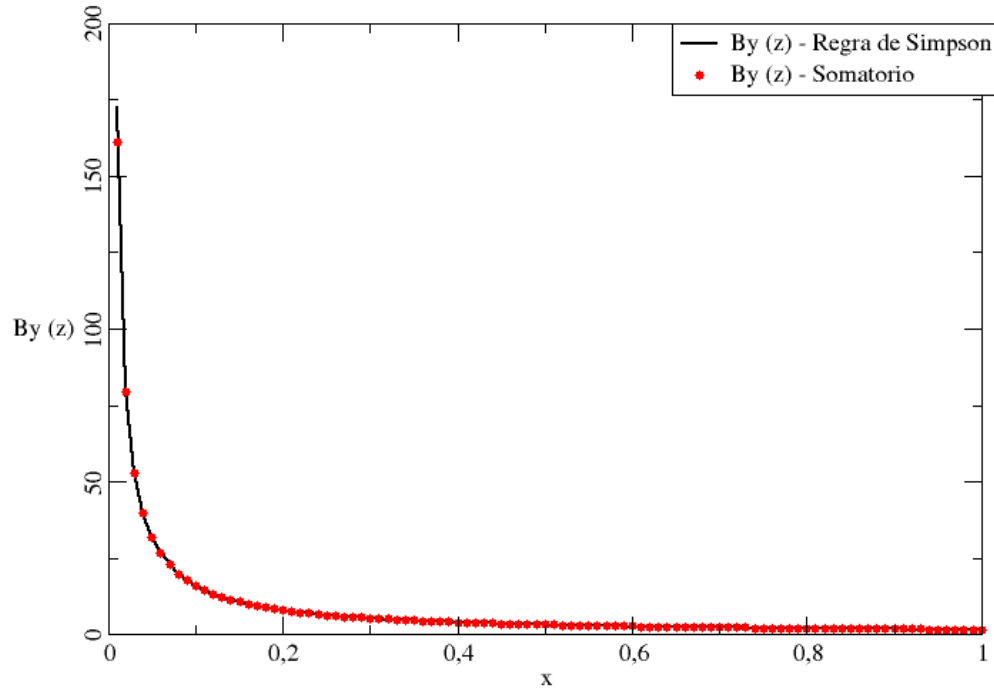


Figura 3: Campo Magnético para $\Delta z = 0.01$

Neste segundo gráfico vemos que a curva do campo magnético está mais suave, e para distâncias próximas do fio, o campo está mais condizente entre os dois métodos.

O próximo exercício, (5.12), utiliza a mesma configuração de corrente para analisar a variação do campo magnético calculado pelo somatório comparado ao campo magnético obtido pela lei de Ampère, equação (5), para diferentes Δz .

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (5)$$

Abaixo, temos a tabela elaborada com valores do tamanho da grade (N), sendo $N = 2L/\Delta z$, e o valor do erro entre o campo do somatório e o campo pela Lei de Ampère para $x = 0.2$.

Tamanho da Grade	Erro
5	0.97940
10	4.01170
15	0.83279
20	1.54553
25	0.61734
30	0.76331
35	0.41367
40	0.40885
45	0.25906
50	0.22597
55	0.15540
60	0.12635
65	0.09075
70	0.07083
75	0.05211
80	0.03964

Figura 4: Erro do campo para $x = 0.2$

Aqui vemos que, ao aumentarmos o número de pontos que pegamos do fio, menor o erro do valor absoluto do campo, para tentar estimar um tamanho de grade ideal por meio de uma lei prática, geramos alguns valores de diferentes tamanho de grades ideais para distâncias diferentes do fio.

Tamanho da Grade	Distância x	Erro
308	0.05	0.04877
156	0.10	0.04734
104	0.15	0.04867
80	0.20	0.04453
64	0.25	0.04574
54	0.30	0.04429
46	0.35	0.04681
40	0.40	0.04946
36	0.45	0.04783
34	0.50	0.03866
30	0.55	0.04599
28	0.60	0.04306
26	0.65	0.04279
24	0.70	0.04516
24	0.75	0.03190
22	0.80	0.03695
20	0.85	0.04556
20	0.90	0.03399
18	0.95	0.04625
18	1.00	0.03545

Figura 5: Erro do campo para diferentes x

Dessa forma, podemos estimar qual seria a relação entre o tamanho da grade e a distância do fio. Ainda, elaboramos o gráfico para evidenciar o comportamento.

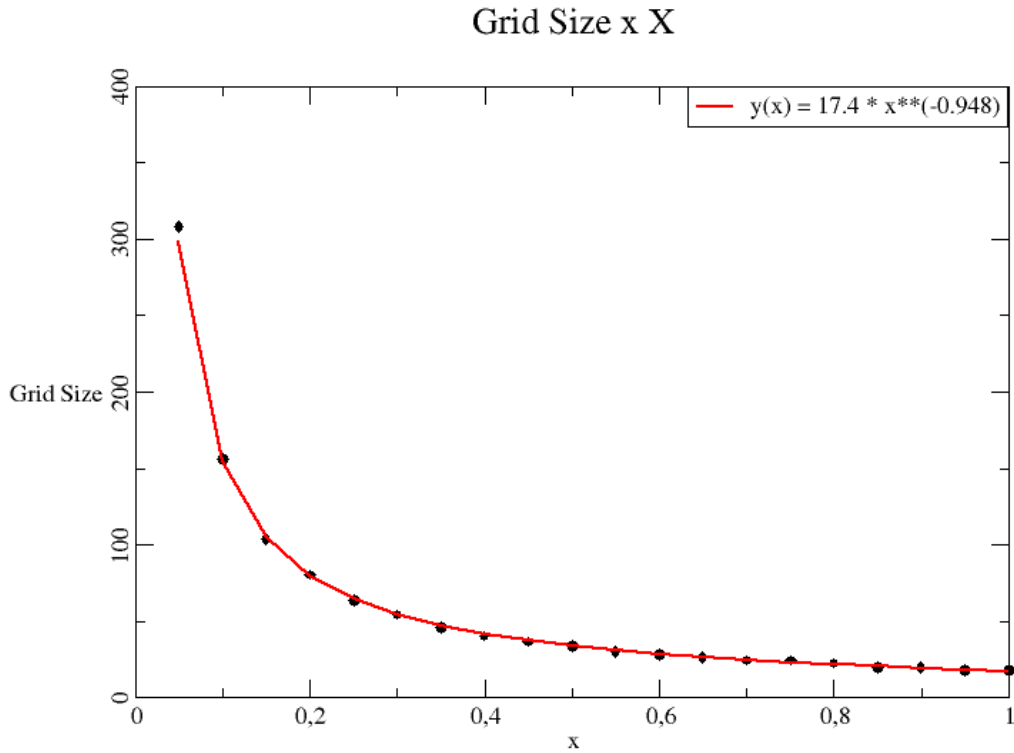


Figura 6: Relação do tamanho da grade com a distância x

Vemos que o tamanho da grade é proporcional a $\frac{1}{x}$, ainda, podemos verificar com os dados da tabela que uma regra eficaz para prever o tamanho ideal da grade seria $N \approx 15\frac{1}{x}$

2.2 Estimativa do Número pi (Exercício 5.13)

Neste programa, utilizamos o método de integral numérica para estimar o número pi, para esse processo, vamos calcular a área de um círculo unitário, pois $A = \pi r^2 = \pi$. A função escolhida para o cálculo da integral foi $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ com $0 < x < 1$, a qual representa o primeiro quadrante de um círculo unitário no plano x-y.

Desenvolvemos o processo da mesma maneira que calculamos o campo e obtemos os seguintes resultados.

Iterações	Método de Simpson	Método de Boole	Pi
1000	3.1454732	3.1492554	3.1415927
10000	3.1419889	3.1423820	3.1415927
100000	3.1416325	3.1416723	3.1415927
1000000	3.1415966	3.1416006	3.1415927
10000000	3.1415931	3.1415935	3.1415927
100000000	3.1415927	3.1415927	3.1415927

Figura 7: Tabela da estimativa de pi

Conseguimos alcançar até algumas casas decimais de pi, porém o custo de iterações é muito alto, mesmo utilizando métodos de integração numérica mais otimizados como o método de Boole.

2.3 Campo Magnético de Espiras (Exercício 5.14)

Neste exercício vamos explorar configurações de correntes com espiras, primeriamente vamos apresentar como seriam os vetores dentro desta configuração:

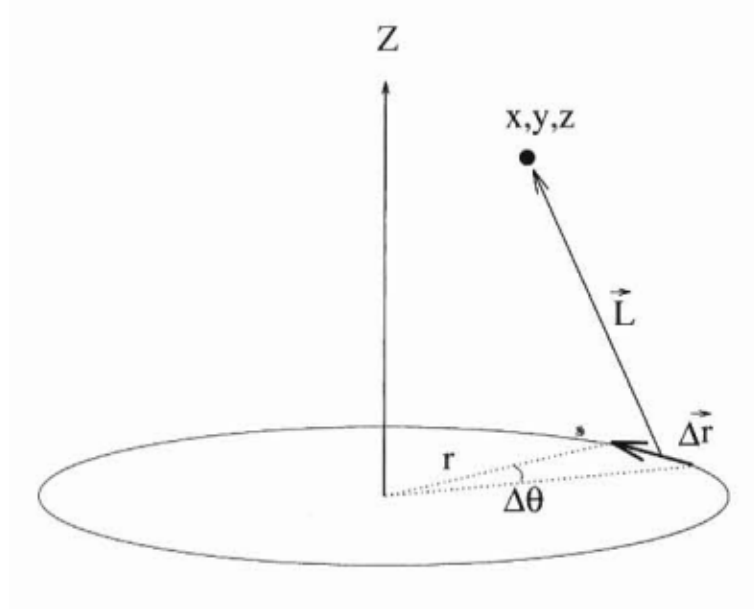


Figura 8: Configuração Espira

Logo, os vetores que estão submetidos no cálculo do campo magnético \vec{dr} e \vec{L} , podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= (x - x_e, y - y_e, z) \\ \vec{\Delta r} &= (-r \sin \theta \Delta \theta, r \cos \theta \Delta \theta, 0)\end{aligned}\tag{6}$$

Para uma espira de raio r no plano x - y , onde $x_e = r \cos \theta$ e $y_e = r \sin \theta$.

Dessa forma, realizando o produto vetorial, resultamos nas componentes do campo magnético desta espira.

$$\begin{aligned}\vec{dB}_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r \cos \theta \Delta \theta z}{L^3} \hat{i} \\ \vec{dB}_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r \sin \theta \Delta \theta z}{L^3} \hat{j} \\ \vec{dB}_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-r \sin \theta (y - r \sin \theta) - r \cos \theta (x - r \cos \theta)) \Delta \theta}{L^3} \hat{k}\end{aligned}\tag{7}$$

Com isso, podemos aplicar a iteração sobre todos os pontos do espaço próximo a espira, e iterar o campo sobre θ . Então, elaboramos um gráfico do campo para $-1 < z < 1$, demonstrando o campo magnético de uma espira.

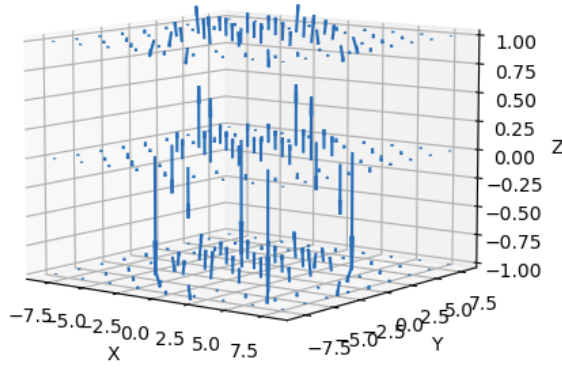


Figura 9: Campo espira em x-y

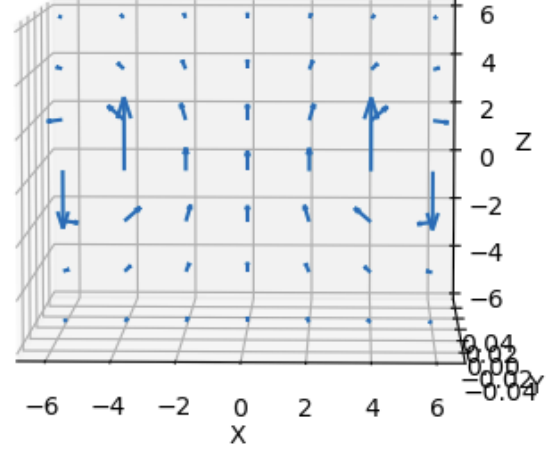


Figura 10: Campo espira em x-y (Corte 2D)

Vemos que o campo está condizente com o esperado. Agora, vamos calcular o campo gerado por uma espira no eixo x-z, cujos vetores serão:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= (x - x_e, y, z - z_e) \\ \vec{\Delta r} &= (-r \sin \theta \Delta \theta, 0, r \cos \theta \Delta \theta)\end{aligned}\quad (8)$$

Sendo assim, ficamos com as seguintes componentes do campo magnético:

$$\begin{aligned}\vec{dB}_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-r \cos \theta \Delta \theta y}{L^3} \hat{i} \\ \vec{dB}_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r \cos \theta (x - r \cos \theta) + r \sin \theta (z - r \cos \theta) \Delta \theta}{L^3} \hat{j} \\ \vec{dB}_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-r \sin \theta \Delta \theta y)}{L^3} \hat{k}\end{aligned}\quad (9)$$

Realizando o mesmo processo de integração, chegamos no seguinte campo para esta espira no plano x-z:

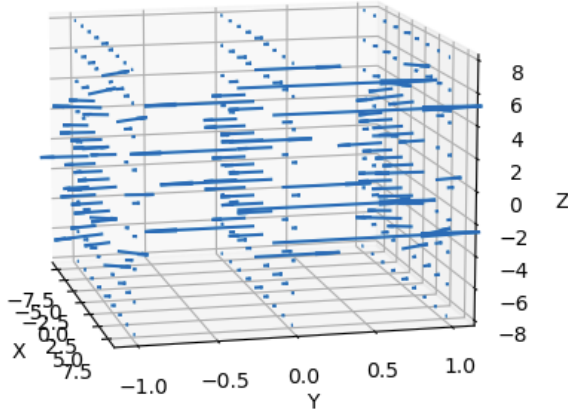


Figura 11: Campo espira em x-z

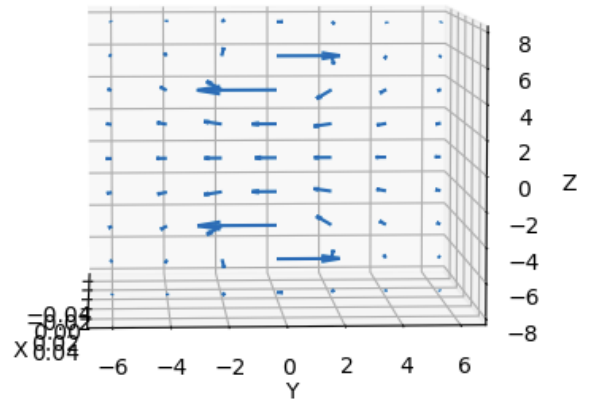


Figura 12: Campo espira em x-z (Corte 2D)

Após o cálculo dos campos individuais de cada espira, o exercício propunha calcular o campo de ambas no mesmo espaço, então foi posicionado as duas espiras centradas na origem, com mesmo raio e perpendiculares entre si, o campo obtido está representado abaixo:

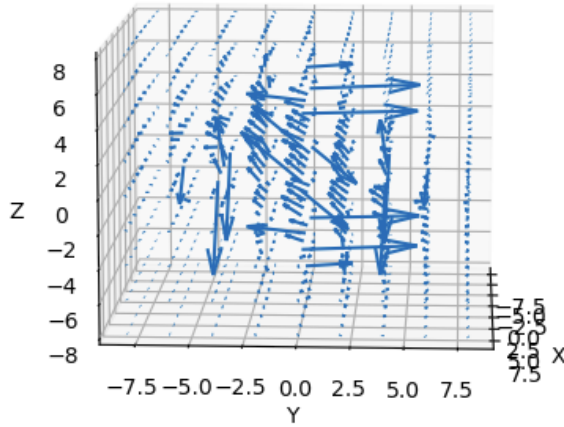


Figura 13: Campo espiras perpendiculares

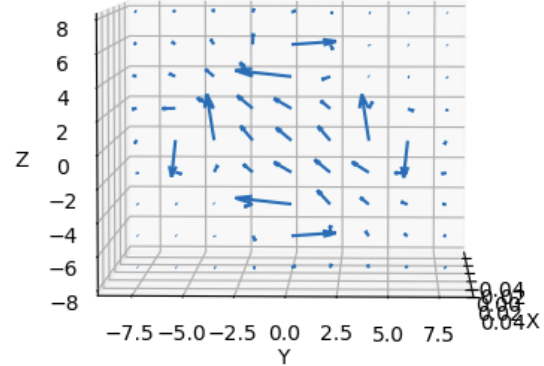


Figura 14: Campo espiras perpendiculares (Corte 2D)

Vemos que os campos das espiras se somam assim como esperado, gerando um campo na diagonal.

2.4 Campo Magnético em Bobinas Helmholtz (Exercício 5.15)

Neste problema, estudamos a configuração de corrente em um par de bobinas Helmholtz, este modelo consiste em duas espiras afastadas a uma distância r entre si com correntes na mesma direção, assim como demonstrado abaixo:

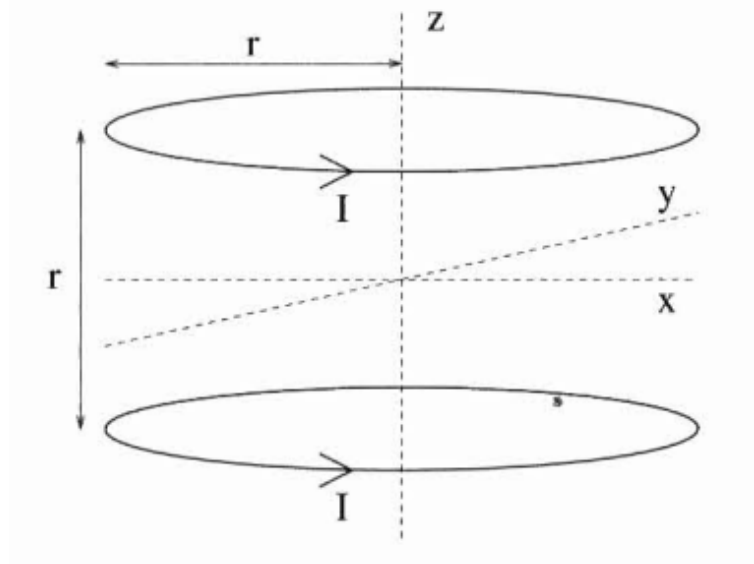


Figura 15: Configuração Espira

Colocamos as duas bobinas a uma mesma distância da origem do espaço no plano x-y, utilizamos os mesmos vetores do caso da espira única em x-y, porém adicionamos um termo $z_e = \pm r/2$, obtemos os seguintes gráficos do campo:

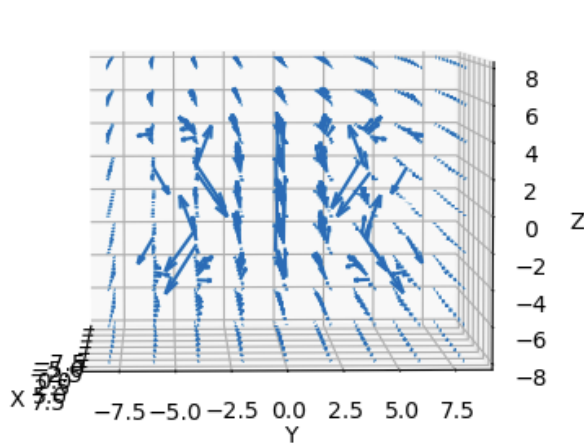


Figura 16: Campo espiras perpendiculares

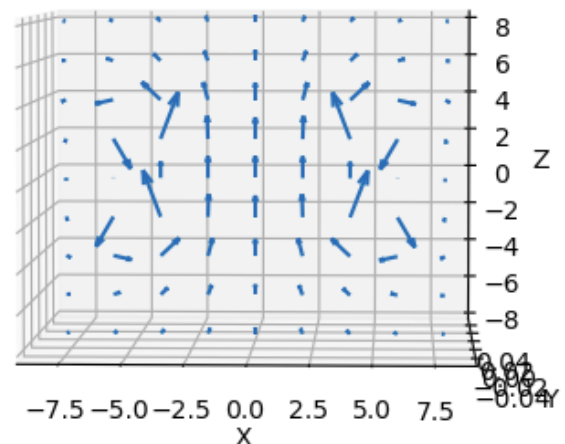


Figura 17: Campo espiras perpendiculares (Corte 2D)

Vemos que o campo magnético corresponde ao esperado, além disso, uma propriedade particular desta configuração é o surgimento de um campo magnético uniforme entre as bobinas. Outra análise proposta é a comparação do valor do campo na coordenada (0,0,0), para isso, vamos utilizar a equação abaixo para estimar o campo teórico.

$$B_z = \frac{\mu_0 I r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (10)$$

Então, utilizando $z = r/2$, chegamos aos seguintes resultados:

Campo Teórico	Campo Simulação
0,14311	1,4124

Figura 18: Configuração Espira

Apesar do gráfico apresentar um campo condizente com o esperado, vemos que os valores do campo não estão iguais ao teórico, com uma ordem de grandeza de diferença.

2.5 Bobina Enrolada em Toroide (Exercício 5.16)

Neste exercício, montamos uma configuração de corrente baseada nas anteriores, colocando bobinas uma ao lado da outra formando um toroide, assim como na figura abaixo. Desse modo, esperamos que o campo se concentre no interior do toroide passando por meio das espiras.

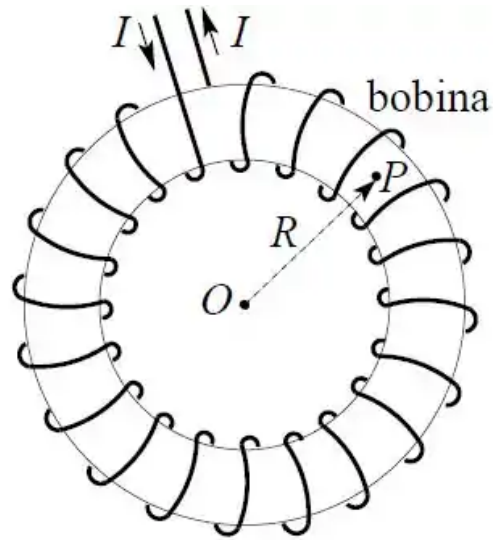


Figura 19: Configuração Toroide

Para realizar isso, exploramos a simetria entre as espiras de mesmo eixo, de modo a otimizar o código. Com isso, encontramos o seguinte campo:

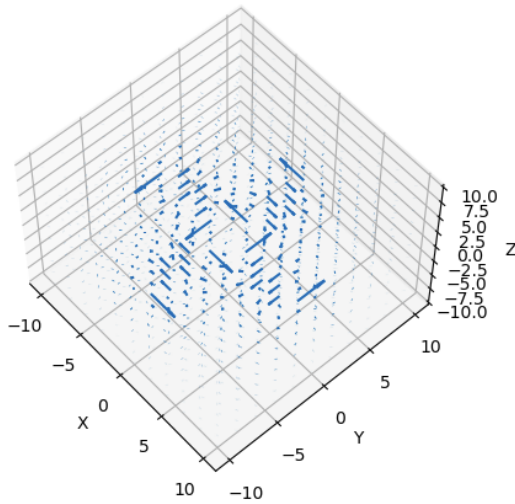


Figura 20: Campo toroide 3D

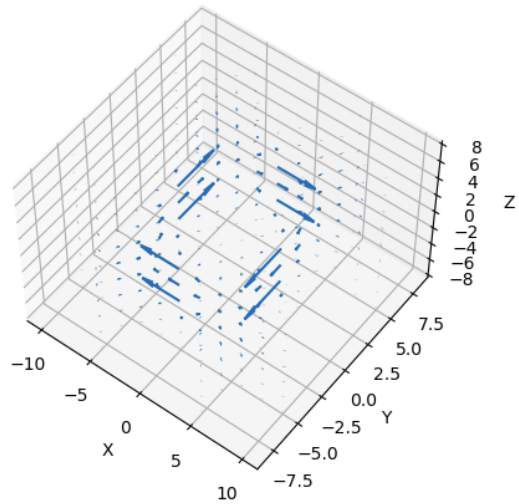


Figura 21: Campo toroide simplificado 3D

Vemos que o campo de alguma forma se concentrou dentro do toroide, mas, pelo fato da quantidade de bobinas ser discreta, um pouco do campo se dispersou e não se manteve uniforme.