Problemas Introductorios

para la

35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
José Antonio Gómez Ortega
María Luisa Pérez Seguí

2021

Luis Miguel García Velázquez

Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia,
Universidad Nacional Autónoma de México

José Antonio Gómez Ortega

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2022: la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en Noruega durante el mes de julio, la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en Ecuador, la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en el mes de junio y la 11^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas a realizarse en el mes de abril en Hungría.

En la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 2002. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2020-2021, y para el 1^o de julio del año 2022 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los problemas que se incluyen en este folleto se propusieron por parte del Canguro Matemático Mexicano y tienen distintos niveles. Los comités estatales utilizaron los problemas a su conveniencia. En muchos estados los problemas aquí presentados fueron aplicados en los exámenes de diferentes etapas del proceso estatal.

Los primeros 20 problemas que aparecen en esta publicación formaron parte de los niveles básicos del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos con los conocimientos mínimos de 5^o de primaria. El resto de los problemas de opción múltiple (del 21 al 40) formaron parte del Examen Eliminatorio del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de 2 horas, como un examen eliminatorio, por estudiantes de 3^o de secundaria o grados más avanzados. Los últimos cinco problemas corresponden a la siguiente fase de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

Para continuar con la preparación, a partir del 18 de abril -y durante un mes- se distribuirán los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página: `http://canguro.deltagauge.info/`

Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el mes de noviembre de 2021. La Ciudad donde se realizará es Guanajuato. En él se elegirán a las preselecciones mexicanas.

Entrenamientos. A los alumnos de las preselecciones que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2022. También se aplicarán exámenes para determinar a los concursantes que representarán a México en las diferentes Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca, Toluca, Guadalajara, Acapulco, Monterrey, Campeche, Ciudad de México y en el año 2020 en forma virtual.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México en Concursos Internacionales

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31
2013	Colombia	97	17
2014	Sudáfrica	101	26
2015	Tailandia	104	19
2016	Hong Kong	109	23
2017	Brasil	112	43
2018	Rumania	107	36
2019	Reino Unido	112	41
2020	Rusia	105	45

En 2020, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Tomás Francisco Cantú Rodríguez de la Ciudad de México (medalla de oro), Pablo Alhui Valeriano

Quiroz de Nuevo León (medalla de bronce), Omar Fraid Astudillo Marban de Guerrero (medalla de bronce), Carlos Emilio Ramos Aguilar de Sinaloa (medalla de bronce), Ana Paula Jiménez Díaz de la Ciudad de México (medalla de bronce), Daniel Alejandro Ochoa Quintero de Tamaulipas (mención honorífica). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 4 medallas de oro, 26 medallas de plata, 68 medallas de bronce y 39 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6
2013	Panamá	20	3
2014	Honduras	22	1
2015	Puerto Rico	23	4
2016	Chile	22	4
2017	Argentina	22	4
2018	España-Portugal	22	4
2019	México	23	4
2020	Perú	23	2

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en 2020 obtuvieron medalla: Tomás Francisco Cantú Rodríguez de la Ciudad de México (medalla de oro), Pablo Alhui Valeriano Quiroz de Nuevo León (medalla de plata), Omar Fraid Astudillo Marban de Guerrero (medalla de plata), Daniel Alejandro Ochoa Quintero de Tamaulipas (medalla de plata). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 29 medallas de oro, 54 medallas de plata, 37 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1
2013	Nicaragua	13	1
2014	Costa Rica	12	1
2015	México	13	1
2016	Jamaica	13	1
2017	El Salvador	14	1
2018	Cuba	12	1
2019	República Dominicana	12	1
2020	Panamá	13	1

En la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo dos medallas de oro: Omar Fraid Astudillo Marban de Guerrero y David García Maldonado de Oaxaca y dos medallas de plata: Víctor Manuel Bernal Ramírez de Sinaloa y Eric Ranson Treviño de Nuevo León. La delegación nacional obtuvo el primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 42 medallas de oro, 24 de plata y 3 de bronce.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
2014	Turquía	28	17
2015	Bielorusia	30	9
2016	Rumania	39	13
2017	Suiza	44	14
2018	Italia	56	7
2019	Ucrania	50	10
2020	Holanda	53	6

En abril de 2020 México participó en la 9^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Holanda (virtual). Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. El equipo mexicano fue integrado por Ana Paula Jiménez Díaz de la Ciudad de México (medalla de oro), Karla Rebeca Munguía Romero de Sinaloa (medalla de plata), Ana Illanes Martínez de la Vega de la Ciudad de México (medalla de plata) y Nathalia del Carmen Jasso Vera de Guanajuato (medalla de plata). En total, en la Olimpiada Europea Femenil, México ha obtenido 3 medallas de oro, 12 medallas de plata, 9 medallas de bronce y una mención honorifica.

Resultados en el Concurso Nacional de la 34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2020 se llevó a cabo en forma virtual el Concurso Nacional de la 34^a OMM, con la participación de treinta y un Estados de la República. Los 19 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
José Alejandro Reyes González (Morelos),
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León),
Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas),
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México),
Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México),
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa),
Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa),
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León),
Juan Carlos Tapia Baeza (Quintana Roo),
Eric Ransom Treviño (Nuevo León),
Kevin Brian Rodríguez Sánchez (Baja California),

Isaac Pancardo Botello (Guanajuato),
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León),
Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes),
Pedro Antonio González Soto (Nuevo León),
Manuel Isaac González Chi (Yucatán),
Jorge Hiram Arroyo Almeida (Zacatecas).

Los 9 alumnos pre seleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes),
Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur),
Mateo Iván Latapi Acosta (Ciudad de México),
Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León),
Itzel Cano Rivas (Guanajuato),
Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas),
Isaac Montaño Manríquez (Baja California Sur),
Bruno Ancona Sala (Yucatán).

Las 9 alumnas pre seleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México),
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa),
Katia García Orozco (Chihuahua),
Samantha Ruelas Valtierra (Querétaro),
Alexandra Valdepeñas Ramírez (Coahuila),
Vianey Guadalupe Cortes Hernández (Tlaxcala),
Cynthia Naely López Estrada (Jalisco),
Adriana García Arias (Chihuahua),
Andrea Escalona Contreras (Morelos).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 34º Concurso Nacional de la OMM:

1. Ciudad de México
2. Nuevo León
3. Sinaloa
4. Guanajuato
5. Jalisco
6. Aguascalientes
7. Morelos
8. Tamaulipas
9. Chihuahua
10. Zacatecas.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Baja California Sur. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Aguascalientes y Guerrero.

Material de estudio e información sobre la OMM

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar otro material de estudio disponible, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://ommenlinea.org/`

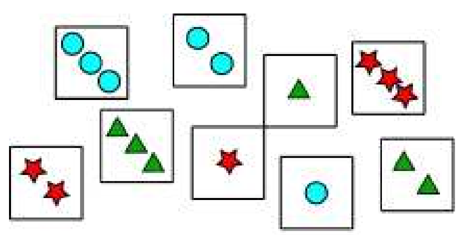
Este folleto se edita con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

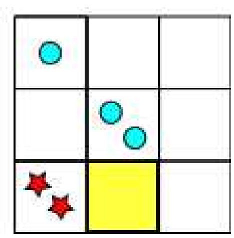
EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Febrero 2021

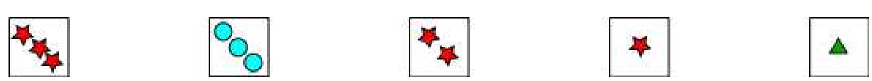
Enunciados de los problemas

Los siguientes problemas son de nivel introductorio y son de calentamiento. Los conocimientos necesarios para resolverlos no pasan de aquellos del programa escolar de quinto de primaria, sin embargo debes leerlos con cuidado para entender qué se pide en cada caso.

Problema 1. Tomás tiene las cartas que se muestran. Debe colocarlas en la cuadrícula de manera que en cada renglón y cada columna haya una carta con cada una de las figuras y con cada una de las cantidades. Ya se han puesto 3 cartas. ¿Cuál carta va en el cuadro sombreado?







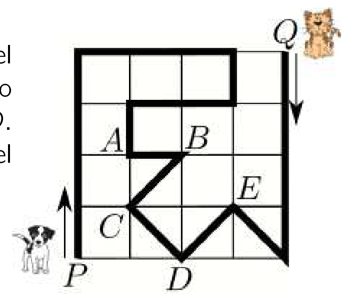
(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 2. La suma de 3 números es 50. Karen resta el mismo número a cada uno de los 3 y obtiene los resultados: 24, 13 y 7. ¿Cuál de los siguientes números es uno de los originales?

(a) 9 (b) 11 (c) 13 (d) 17 (e) 23

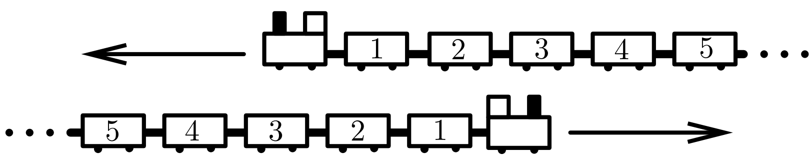
Problema 3.

Un perro y un gato caminan en el parque por el camino marcado con la línea gruesa. Al mismo tiempo el perro empieza en P y el gato en Q. Si el perro camina tres veces más rápido que el gato, ¿en qué punto se encuentran?



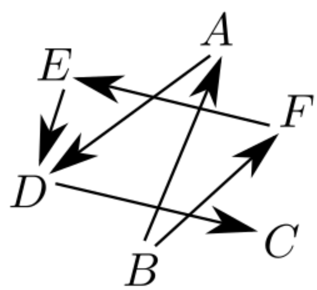
(a) en A (b) en B (c) en C (d) en D (e) en E

Problema 4. Dos trenes idénticos, cada uno con 31 vagones, viajan en direcciones opuestas. Cuando los vagones con número 19 de cada uno de los dos trenes están uno frente al otro, ¿qué vagón del segundo tren está enfrente del que lleva el número 12 en el primer tren?



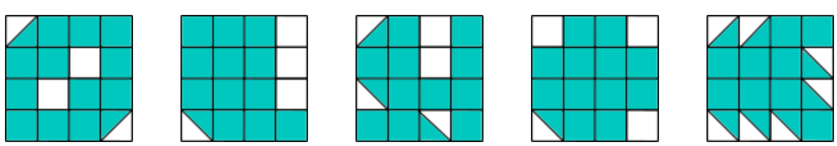
(a) 7 (b) 12 (c) 21 (d) 26 (e) 31

Problema 5. En el esquema cada letra representa una persona y hay una flecha de una a otra si la segunda persona es más alta que la primera; por ejemplo, la persona A es más alta que la persona B. ¿Quién es la persona más alta de las seis?



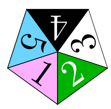
(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

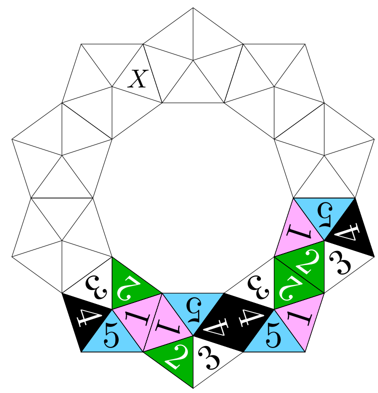
Problema 6. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene la mayor área sombreada?



(a) (b) (c) (d) (e)

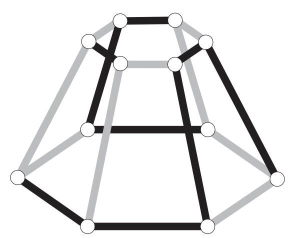
Problema 7. Con fichas en forma de pentágono (todas idénticas) como las que se muestran a la izquierda se quiere formar la corona que se muestra a la derecha, de manera que al pegar dos pentágonos, las caras adyacentes tengan el mismo número. Ya se han colocado 4 fichas. ¿Qué número queda en la casilla marcada con X?

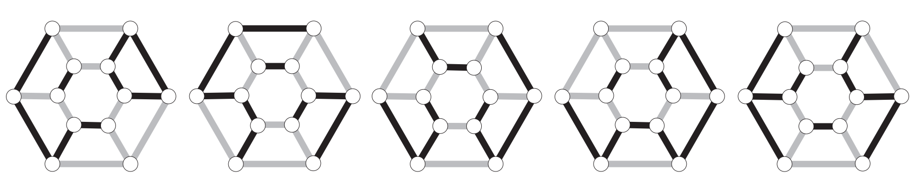




(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

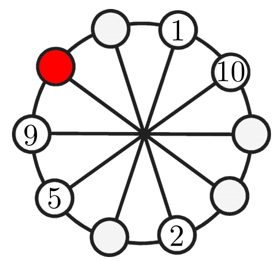
Problema 8. ¿Cómo se ve desde arriba el objeto que se muestra?





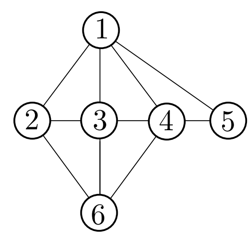
(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 9. En cada uno de los círculos debe colocarse un número del 1 al 10 de manera que cada número aparezca una vez y que en los números que aparezcan en cada dos círculos adyacentes sumen lo mismo que los dos números de los dos círculos adyacentes diametralmente opuestos a ellos. Ya se pusieron algunos números. ¿Qué número debe ir en el círculo sombreado?



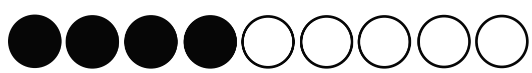
(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 10. Cada uno de los números de la figura debe sustituirse por el nombre de una chica de un grupo, de manera que si dos círculos están unidos por un segmento es porque las chicas que aparecen en los círculos correspondientes son amigas. Se sabe que cada una de Clotilde, Diana y Fany tiene 4 amigas en el grupo; que ambas, Clotilde y Diana, son amigas de Beatriz, y que Beatriz ya no tiene otras amigas. ¿A cuál de los números va a sustituir Fany?



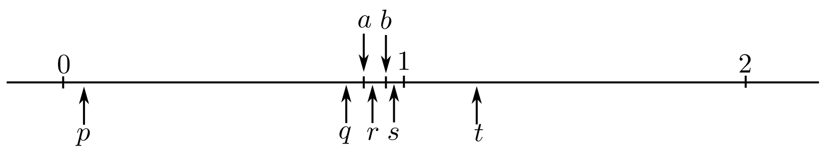
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 11. Nueve fichas son negras de un lado y blancas del otro. Al principio, 4 de las fichas muestran su lado negro y las otras 5 muestran su lado blanco (ver la figura). En cada turno se pueden voltear exactamente 3 fichas. ¿Cuál es el mínimo número de turnos en los que se puede lograr que todas las fichas muestren el mismo color?



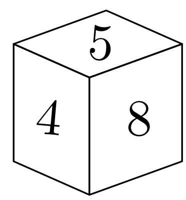
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 12. Sobre la recta numérica están marcados con buena precisión los números 0, 1, 2, a, b, p, q, r, s y t. ¿Cuál de los números p, q, r, s o t es el producto ab?



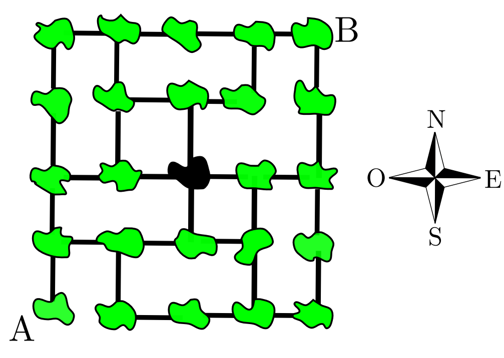
(a) p (b) q (c) r (d) s (e) t

Problema 13. En cada una de las caras de un cubo está escrito algún número del 1 al 9 de manera que todos los números son distintos. Además, la suma de los números en cada pareja de caras opuestas es la misma. ¿Qué número queda opuesto al 5?



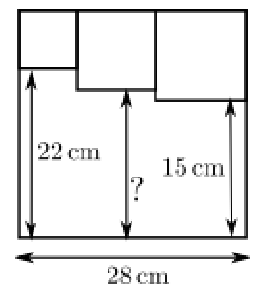
(a) 3 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 9

Problema 14. La figura muestra un mapa de islas y cómo están conectadas por puentes. El cartero tiene que visitar cada isla exactamente una vez. Empieza en la isla marcada con A y debe terminar en la isla marcada con B. Ya llegó a la isla negra en el centro del mapa. ¿Cómo debe moverse en su siguiente paso?



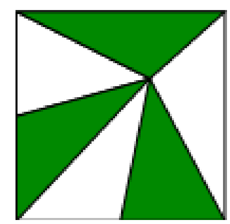
(a) Hacia el Norte (b) Hacia el Este (c) Hacia el Sur (d) Hacia el Oeste (e) No es posible

Problema 15. Tres cuadrados pequeños están dibujados dentro de un cuadrado grande, como se muestra. ¿Cuál es la longitud del segmento marcado con el signo de interrogación?



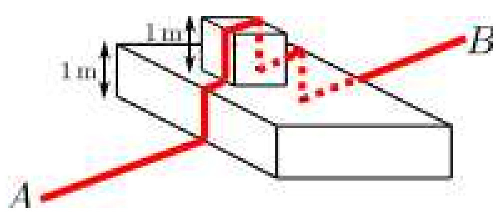
(a) 18.5 cm (b) 19 cm (c) 19.5 cm (d) 20 cm (e) 20.5 cm

Problema 16. Un cuadrado de área $81\,\mathrm{cm}^2$ está dividido en 6 triángulos de igual área como se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia del vértice común de los triángulos al lado inferior del cuadrado?



(a) 3 cm (b) 5 cm (c) 5.5 cm (d) 6 cm (e) 7.5 cm

Problema 17. Una hormiga camina cada día en un camino recto horizontal del punto A al punto B que están separados entre sí 5 m. Un día se encontró en su camino dos obstáculos de 1 m de altura cada uno. Mañana caminará otra vez de A a B en forma recta, sólo que ahora tendrá que subir y bajar verticalmente por los obstáculos como se ve en la figura. ¿Cuál es la longitud del camino que tomará?

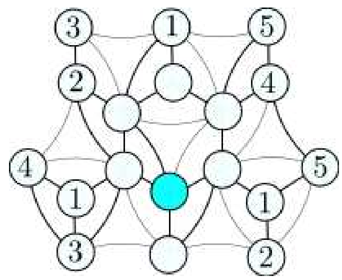


(a) 7 m (b) 9 m (c) $5+4\sqrt{2}$ m (d) $9-2\sqrt{2}$ m (e) Falta información

Problema 18. A Julián le toma 3 horas llegar a su escuela si va en autobús y regresa caminando. Sin embargo, sólo le toma 1 hora si va en autobús y también regresa en autobús. ¿Cuánto le toma si sólo camina?

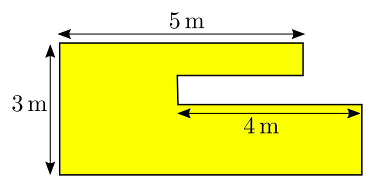
(a) 3.5 horas (b) 4 horas (c) 4.5 horas (d) 5 horas (e) 5.5 horas

Problema 19. Se quiere poner en cada uno de los circulitos de la figura cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, o 5 de manera que circulitos que estén unidos mediante una línea tengan distinto número. Ya se han puesto algunos. ¿Qué número debe ir en el círculito sombreado?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 20. El jardín de Sasha tiene la forma que se muestra. Todos los lados son paralelos o perpendiculares entre sí. Algunas de las dimensiones se muestran en el diagrama. ¿Cuál es el perímetro del jardín?

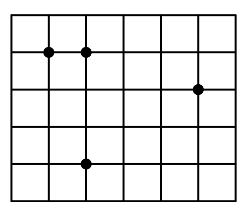


(a) 22 m (b) 23 m (c) 24 m (d) 25 m (e) 26 m

Problema 21. Andrés tiene 27 cubos idénticos pequeños, Cada uno de los 27 cubitos están pintados de rojo en dos caras adyacentes. Con estos cubos va a construir un cubo. ¿Cuál es el máximo número de caras completas rojas que puede lograr en el cubo grande?

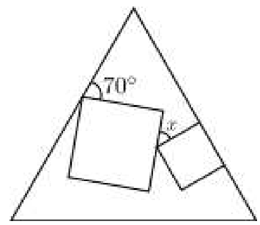
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 22. La cuadrícula está formada por cuadritos de lado 1 cm. En ella se marcaron 4 puntos. ¿Cuál es el área más pequeña que puede tener un triángulo que tenga por vértices a 3 de los puntos marcados?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2 (e) $\frac{5}{2}$

Problema 23. Dos cuadrados de distinto tamaño se dibujaron dentro de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con x?



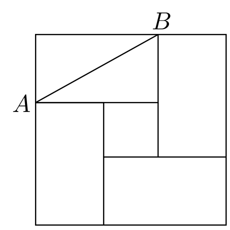
(a) 25° (b) 30° (c) 35° (d) 45° (e) 50°

Problema 24. En cada cuadrito de la cuadrícula que se muestra se debe poner un número de manera que las sumas de cada renglón y de cada columna sean todas el mismo número. ¿Qué debe escribirse en la casilla sombreada?

1		6	3
	2		8
	7		4
		7	

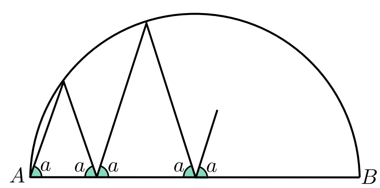
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 25. Un cuadrado grande consiste de cuatro rectángulos idénticos y un cuadrado pequeño, como se muestra en la figura. El área del cuadrado grande es $81\,\text{cm}^2$ y la longitud de la diagonal AB de uno de los rectángulos es $7\,\text{cm}$. ¿cuál es el área del cuadrado pequeño?



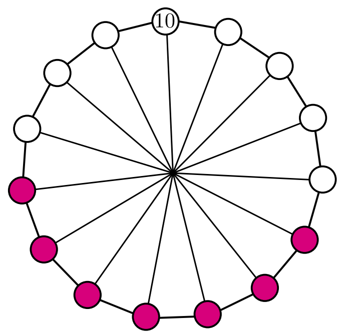
(a) $17\,\text{cm}^2$ (b) $18\,\text{cm}^2$ (c) $19\,\text{cm}^2$ (d) $20\,\text{cm}^2$ (e) $21\,\text{cm}^2$

Problema 26. Una línea va en zig-zag entre los extremos A y B del diámetro de una circunferencia tocando puntos de la circunferencia como se muestra en el esquema. Si, aparte de A y B tocó exactamente 4 veces a la circunferencia, ¿cuánto mide el ángulo a?



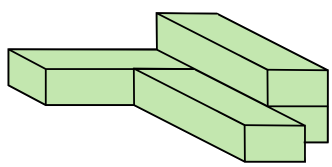
(a) 60° (b) 72° (c) 75° (d) 80° (e) otra respuesta

Problema 27. En una rueda hay 15 números. Sólo el número 10 es visible. La suma de cualesquiera 7 números consecutivos en la rueda es la misma. ¿Exactamente cuántos de los números 75, 216, 365 y 2020 pueden ser la suma de los 15 números?



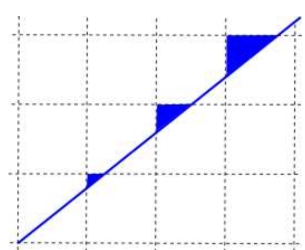
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 28. Cuatro cajas iguales se pegan para formar la figura que se muestra. Se necesita un litro de pintura para pintar el exterior de cualquiera de las cajas. ¿Cuántos litros se necesitan para pintar la figura?



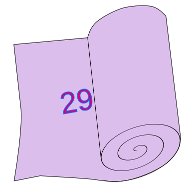
(a) 2.5 (b) 3 (c) 3.25 (d) 3.5 (e) 4

Problema 29. En una cuadrícula está dibujada una línea recta y están sombreados los triángulos que se forman con las líneas de la cuadrícula, como se muestra. ¿Cuál de las siguientes puede ser la razón entre las áreas de los triángulos?



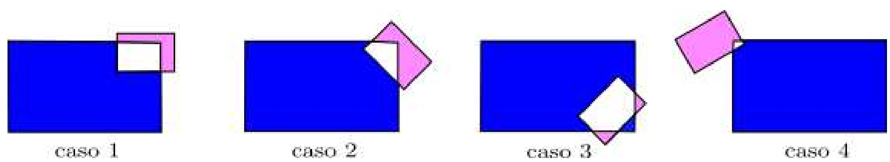
(a) 1 : 2 : 3 (b) 1 : 2 : 4 (c) 1 : 3 : 9 (d) 1 : 4 : 8 (e) Otra

Problema 30. En una tela está escrito un número de 100 dígitos. Sin embargo, la tela se encuentra doblada y sólo se ven los primeros dos dígitos. ¿Cuántas cifras tiene el cuadrado del número que está escrito?



(a) 101 (b) 199 (c) 200 (d) 201 (e) No puede determinarse

Problema 31. Un rectángulo pequeño y otro más grande se traslapan. La figura muestra 4 casos distintos de la situación. Si R es el área de la parte del rectángulo pequeño no común al rectángulo grande, y A es el área del rectángulo grande no común al rectángulo pequeño, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?



(a) En el caso 1, $A - R$ es mayor que en los otros casos.

(b) En el caso 2, $A - R$ es mayor que en los otros casos.

(c) En el caso 3, $A - R$ es mayor que en los otros casos.

(d) En el caso 4, $A - R$ es mayor que en los otros casos.

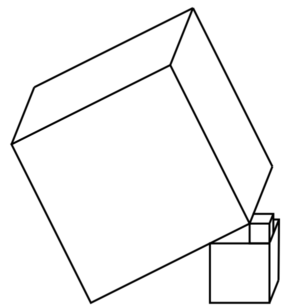
(e) En todos los casos, $A - R$ es lo mismo.

Problema 32. ¿A qué es igual

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020}?$$

(a) 2020 (b) 3030 (c) 4040 (d) 6060 (e) 7070

Problema 33. La figura muestra tres cubos que están en una mesa, en equilibrio. Si cada lado del cubo pequeño mide 1 cm y cada lado del cubo mediano mide 3 cm, cuánto mide el lado del cubo grande?



(a) 7 (b) $4\sqrt{5}$ (c) 8 (d) $6\sqrt{3}$ (e) 9

Problema 34. La suma de 101 enteros consecutivos es 2020. ¿Cuánto vale la suma del menor con el mayor?

(a) 20 (b) 40 (c) 101 (d) 202 (e) 303

Problema 35. Sonia escribe un número entero positivo en cada lado de un cuadrado y luego escribe en cada vértice el producto de los números de los dos lados que llegan a ese vértice. Si la suma de los números de los vértices es 15, ¿cuál es la suma de los números en los lados del cuadrado?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 10 (e) 15

Problema 36. En la mesa se encuentran varios cuadrados y varios triángulos equiláteros. Se sabe que algunas figuras son rojas y las demás son azules. También se sabe que algunas figuras son grandes y las demás son pequeñas. Además se sabe que:

Si una figura es grande, entonces es un cuadrado y que si una figura es azul, entonces es un triángulo.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones debe ser cierta?

(a) Todas las figuras rojas son cuadrados.

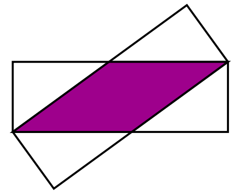
(b) Todos los cuadrados son grandes.

(c) Todas las figuras pequeñas son azules.

(d) Todos los triángulos son azules.

(e) Todas las figuras azules son pequeñas.

Problema 37. Dos rectángulos iguales de lados 3 cm y 9 cm están encimados, de manera que dos de sus vértices coinciden, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área sombreada?

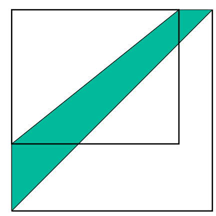


(a) 12 cm^2 (b) 13.5 cm^2 (c) 14 cm^2 (d) 15 cm^2 (e) 16 cm^2

Problema 38. Alicia, Bere y Caty están jugando vencidas. Cada vez compiten dos de ellas y la otra descansa. Después de cada competencia la que gana juega el siguiente juego contra la que descansó. Se sabe que Alicia jugó 10 veces, Bere jugó 15 y Caty jugó 17. ¿Quién perdió el segundo juego?

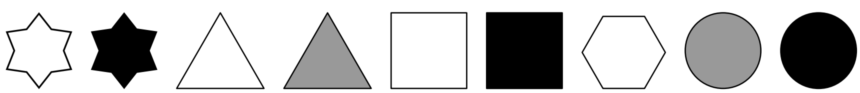
(a) Alicia (b) Bere (c) Caty (d) cualquiera de Alicia o Bere (e) cualquiera de Bere o Caty.

Problema 39. La longitud de uno de los lados de un jardín en forma de rectángulo aumentó un 20% y la longitud del otro aumentó un 50%, de manera que al final el jardín quedó en forma de cuadrado, como se muestra en la figura. Si el área sombreada mide 30 m^2, ¿cuánto mide el área del rectángulo original?

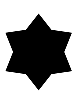
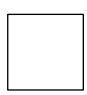
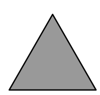
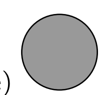


(a) 60 m^2 (b) 65 m^2 (c) 70 m^2 (d) 75 m^2 (e) 80 m^2

Problema 40. Adela y Benjamín están tratando de adivinar cuál de las figuras que se muestran es la favorita de Rubén.



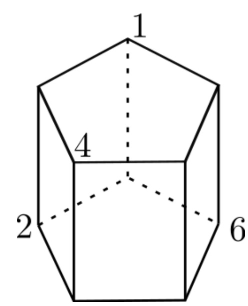
Adela sabe que Rubén le dijo a Benjamín la forma. Benjamín sabe que Rubén le dijo a Adela el color. Adela dice: "No sé cuál es la figura favorita de Rubén y sé que tampoco Benjamín lo sabe." Después Benjamín dice: "Yo no sabía cuál era la figura favorita de Rubén pero ahora ya lo sé." Finalmente Adela dice "Ahora yo también sé cuál es la favorita de Rubén." ¿Cuál es la figura favorita de Rubén?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Los problemas que se incluyen aquí formaron parte del examen semifinal de la 34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que se aplicó en varios estados de la república. Al final encontrarás las respuestas.

Problema 41. ¿Cuántos números entre 1500 y 1900 cumplen que al poner el signo de multiplicación entre la segunda y tercera cifras y realizar la multiplicación de los números de dos cifras que se forman, éste es un cuadrado perfecto? (Por ejemplo, dos números que cumplen la condición son: 1700 y 1872 pues $17 \times 0 = 0 = 0^2$ y $18 \times 72 = 1296 = 36^2$.)

Problema 42. Los vértices del prisma pentagonal que se muestra en la figura se etiquetan con los números del 1 al 10, uno en cada vértice, sin repetir; ya se han etiquetado cuatro vértices. Si en cada una de las 5 caras laterales las sumas de los 4 vértices que las forman son todas iguales, ¿cuántas posibilidades para la suma de la cara pentagonal superior hay?



Problema 43. Con los números del 1 al 26 se quieren formar 13 fracciones, usando los números disponibles como numerador o denominador de manera que cada uno de ellos se use sólo una vez. Luego, cada fracción se simplifica. ¿Cuál es la máxima cantidad de enteros que se pueden obtener después de la simplificación?

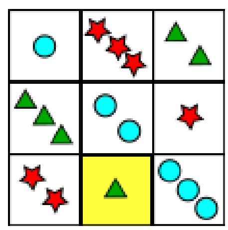
Problema 44. Un niño puso los números del 1 al 9 en un tablero de 3×3 de manera que cada número se usó una vez. Para cada renglón, él coloreó la mediana de los tres números en ese renglón y se dio cuenta que la mediana de los tres números coloreados es 5. ¿De cuántas maneras se pudo haber llenado el tablero?

Nota. La mediana de tres números es el que está en medio; es decir, si los números son a, b y c y $a < b < c$ entonces b es la mediana.

Problema 45. Sea n un número entero mayor que 100 tal que el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, 3, \ldots, n$ es igual que el mínimo común múltiplo de los números $101, 102, 103, \ldots, n$. Encontrar el menor valor posible de n.

Soluciones de los Problemas

Solución 1. Arriba en el centro debe ir una carta con tres figuras, así que en el cuadro sombreado va una carta con una sola figura. Por otro lado, no puede ir ni un círculo ni una estrella así que debe ir un triángulo. La cuadrícula completa se llena como se muestra en la figura de abajo. La respuesta es (e).



Solución 2. La suma de los resultados es: $24 + 13 + 7 = 44$. La diferencia con 50 es 6, así que lo que restó Karen a cada número es $6/3 = 2$. Los números originales eran: 26, 15 y 9. La respuesta es (a).

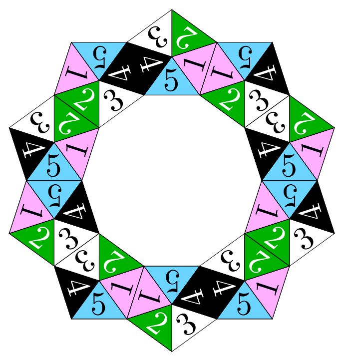
Solución 3. Notamos que hay 4 líneas diagonales así que el perro debe haber avanzado 3 de éstas, mientras el gato sólo 1. El único lugar en que esto ocurre es en E (y, efectivamente, también el número de líneas sobre la figura que recorre el perro en este caso es 12. que es el triple de 4, que es lo le toca al gato para llegar a E). La respuesta es (e).

Solución 4. Como $19 - 12 = 7$, tenemos que sumar 7 a 19 y el vagón es el que lleva el número 26. La respuesta es (d).

Solución 5. La única letra de la que no salen flechas es la C, así que debe ser la más alta. La respuesta es (c).

Solución 6. Es más fácil revisar cuál tiene la menor área no sombreada, tomando en cuenta que cada cuadrado equivale a dos triángulos. La figura (a) tiene 6 triángulos no sombreados mientras que todas las demás tienen 7. La respuesta es (a).

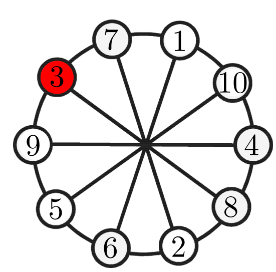
Solución 7. En el sentido contrario a las manecillas del reloj, los números que van quedando adyacentes en cada par de pentágonos son 3, 1, 4, 2, 5, y esto se repite, de manera que en la posición que aparece la X va 4. Se completa la corona como se muestra.



La respuesta es (d).

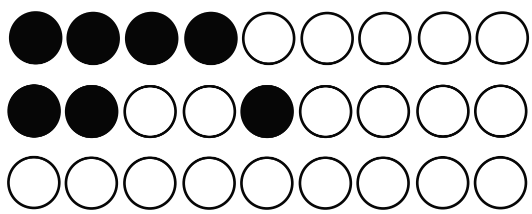
Solución 8. En el objeto sigamos la línea oscura que usa cinco segmentos. Vemos que en el sentido de las manecillas del reloj va de los vértices en la parte más grande, G, a los de la pequeña, P, como sigue: $G - P - P - G - G - G$. La única opción que cumple lo mismo es la (b). La respuesta es (b).

Solución 9. Vemos que junto al 5 debe ir el 6 porque diametralmente opuestos están los números 1 y 10, que suman 11. Entonces, como $6 + 2 = 8$, junto al 1 debe ir un 7. Ahora, recorriendo en el sentido de las manecillas del reloj tenemos que junto al 10 debe ir un 4 porque $9 + 5 = 14$. Faltan por colocar el 3 y el 8. Es claro que el 8 debe ir entre el 4 y el 2, y el 3 debe ir en la círculo sombreado. En la figura se muestran los círculos ya con todos sus números. La respuesta es (a).



Solución 10. Los círculos que tienen 4 segmentos son 1, 3 y 4, así que a Fany le corresponde uno de éstos. Por otro lado, el único círculo que tiene exactamente 2 segmentos es el que lleva el número 5, de manera que ése le corresponde a Beatriz; a sus dos amigas: Clotilde y Diana, les corresponden los círculos con 1 y 4 (en algún orden). De esta manera vemos que a Fany le toca el número 3 (y a Elisa y a Ana les tocan los números 2 y 6, en algún orden). La respuesta es (b).

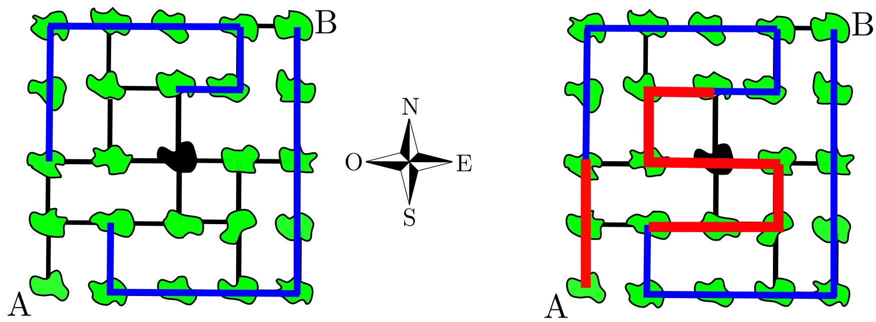
Solución 11. Es claro que con un solo movimiento no es posible. Sin embargo, si volteamos dos negras y una blanca, nos quedan 6 blancas y 3 negras, de manera que con un solo movimiento más: volteando las negras, logramos que todas sean blancas. En la figura, en el primer renglón se muestra la posición original, en el segundo la posición después del primer movimiento, y tercer renglón la posición después del segundo movimiento. La respuesta es (b).



Solución 12. Como a y b son menores que 1, su producto es menor que ellos; los únicos que cumplen esto son p y q. Por otro lado, ambos son mayores a $1/2$, así que su producto es mayor a $1/4$ y entonces es claro que debe ser q. La respuesta es (b).

Solución 13. Lo más que puede haber opuesto al 4 es el 9, y la suma de estas dos caras sería 13; análogamente, lo menos que puede haber opuesto al 8 es el 1, y esa suma sería 9. Entonces las posibles sumas van del 9 al 13. Sin embargo, para que opuesto al 5 la suma fuera 9, debería haber un 4 que ya está usado y, de la misma manera, para que la suma con 5 fuera 13, el número opuesto al 5 debería ser el 8 que ya está usado. Tampoco es posible que la suma con 5 sea 10, pues debería usarse otra vez el 5. Entonces las posibles sumas son 11 o 12 pero no puede ser 12 porque entonces opuesto al 4 iría el 8 que ya se usó. Deducimos que la suma es 11 y entonces opuesto al 5 va el 6 (también tenemos que opuesto al 8 va el 3, y opuesto al 4 va el 7). La respuesta es (c).

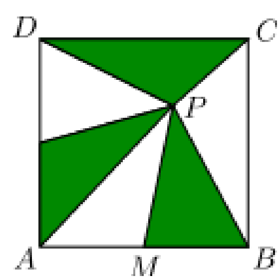
Solución 14. No se trata del dibujar todo el camino desde el principio sino de analizar porciones del camino que deben ser forzadas. Por ejemplo, hay islas que sólo están conectadas con otras 2, así que el camino a través de ellas está totalmente determinado (aunque no se sepa el sentido ahí). Si marcamos en un dibujo estas porciones, ya es fácil completar todo el camino, como mostramos en la figura.



La respuesta es (b).

Solución 15. Como la longitud del lado del cuadrado grande es 28, entonces la del más chico es $28 - 22 = 6$, y la del que se encuentra arriba a la derecha es $28 - 15 = 13$. Entonces la longitud del lado del cuadrado intermedio es $28 - 6 - 13 = 9$, y el segmento que tiene la interrogación mide $28 - 9 = 19$. La respuesta es (b).

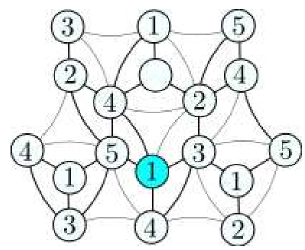
Solución 16. Llamemos A, B, C y D a los vértices del cuadrado, P al vértice común de los triángulos y M al otro vértice que comparten los triángulos que tienen una base sobre el lado inferior al cuadrado (ver la figura). Como las áreas de $\triangle APM$ y $\triangle MPB$ son iguales, entonces M es el punto medio de AB. Por otro lado, también son iguales las áreas de $\triangle CDP$ y $\triangle MPB$ y entonces las respectivas alturas desde A están en razón $1:2$, es decir, la distancia de P al lado superior del cuadrado es la mitad de la distancia de P al lado inferior, pero el lado del cuadrado mide 9 cm, así que la distancia buscada es 6 cm. La respuesta es (d).



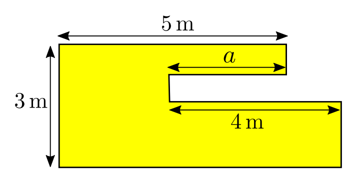
Solución 17. La parte horizontal es la misma que en el camino original. La única diferencia es lo que tiene que subir y bajar que son 4 metros más. La respuesta es (b).

Solución 18. El camino en autobús en un solo sentido es de media hora; como $3 - \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, el regreso caminando le toma dos horas y media. Entonces ida y vuelta son 5 horas caminando. La respuesta es (d).

Solución 19. Observamos que justo arriba del circulito sombreado deben ir 5 y 3, como se muestra en la figura. Luego observamos que más arriba deben ir 4 y 2. Finalmente, en el circulito sombreado sólo puede ir el 1. Abajo de él debe ir 4 y en el circulito que está vacío en la figura puede ir cualquiera de 3 o 5. La respuesta es (a).

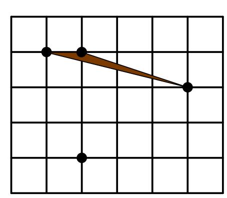


Solución 20. Las partes verticales del lado derecho miden en total lo mismo que el izquierdo: 3. Por otro lado, si llamamos "a" a la porción horizontal, como se muestra en la figura, tenemos que la parte horizontal de abajo mide $5 + 4 - a$. El perímetro es $3+3+5+a+4+5+4-a = 24$. La respuesta es (c).

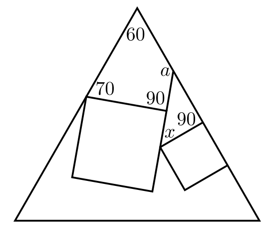


Solución 21. El cubo tiene 6 caras. Si se pudieran colorear 5 o 6 caras, entonces habría al menos una esquina con sus 3 caras rojas, así que el cubito en esa esquina tendría tres caras rojas, lo cual no es posible. Es claro que es posible lograr que 4 caras sean rojas (quedando opuestas las dos caras no rojas). La respuesta es (c).

Solución 22. Notamos que, tanto la base como la altura de cualquiera de los triángulos debe medir al menos 1 cm, así que por lo menos el área debe ser de $\frac{1}{2}$. Efectivamente, hay un triángulo que tiene esa área, como se muestra en la figura. La respuesta es (a).



Solución 23. Prolonguemos uno de los lados de uno de los cuadrados como se muestra. Como cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60° y la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°, el ángulo marcado con a mide 140° así que $x + 90^\circ = 140^\circ$, de donde $x = 50^\circ$. La respuesta es (e).

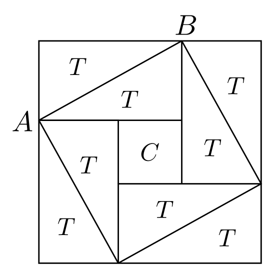


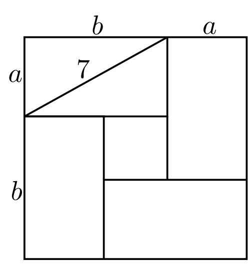
Solución 24. El primer renglón y la segunda columna comparten un cuadro vacío, de manera que la suma de los que tienen número es la misma y así vemos que en el cuarto renglón y segunda columna debe ir un 1. El mismo razonamiento lo aplicamos al cuarto renglón y cuarta columna para ver que lo que va en el cuadro sombreado debe sumar lo mismo con 1 y 7 que $3+8+4 = 15$, o sea que en ese cuadro va un 7.

1	5	6	3
3	2	2	8
4	7	0	4
7	1	7	0

Podemos llenar toda la cuadrícula escogiendo cualquier número para el cuadro inferior derecho. Por ejemplo, si escogemos poner ahí un 0 obtenemos la cuadrícula completa que se muestra en la figura. La respuesta es (d).

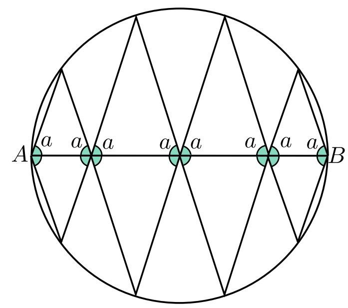
Solución 25. *Primera forma.* Partamos cada rectángulo a través de su diagonal, como se muestra en la figura. Llamemos T al área de cada uno de los 8 triángulos y C al área del cuadrado pequeño. Por un lado tenemos que las diagonales de los rectángulos forman un cuadrado de área $49\,\text{cm}^2$. Pero el área de este cuadrado se puede calcular de otras dos formas: $4T+C$ y $81-4T$. Al sumar las dos ecuaciones $4T+C = 49$ y $81-4T = 49$ obtenemos $81+C = 98$, de donde $C = 17$.





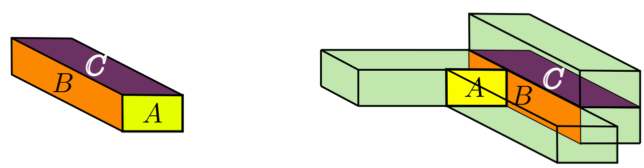
Segunda forma. Llamemos a y b a los lados del rectángulo, como se muestra. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 + b^2 = 49$. También tenemos que $a + b = 9$. Si elevamos esta ecuación al cuadrado obtenemos el área del cuadrado grande: $81 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 49 + 2ab$, de aquí que $ab = \frac{81-49}{2} = 16$. Entonces el área del cuadrado chico es $81 - 4ab = 81 - 64 = 17$. La respuesta es (a).

Solución 26. Reflejemos al figura a través de su diámetro. Tenemos rectas paralelas que forman los mismos ángulos, así que todos los arcos de circunferencia son iguales. El ángulo buscado es la mitad del ángulo interno en un decágono regular, es decir, $\frac{8\cdot 180°}{2\cdot 10} = 72°$. La respuesta es (b).



Solución 27. Notemos que cada 8 posiciones debe repetirse el 10; esto es porque el primero junto con los 6 que le siguen suman lo mismo que esos 6 con el octavo. Pero 8 y 15 no tienen factores en común, así que al ir de 8 en 8 recorriendo, digamos, en el sentido de las manecillas del reloj, abarcamos todas las posiciones. Entonces concluimos que todos los números son iguales a 10. La única suma posible es 150, que no aparece en la lista. La respuesta es (a).

Solución 28. Digamos que las áreas de las distintas caras de las cajas son A, B y C como se muestra en la figura a la izquierda. A los 4 litros que se necesitarían para pintar todas las cajas si estuvieran separadas hay que restarle las porciones que quedan pegadas. Notamos que son justo dos de cada tipo, como se muestra en la figura, así que la respuesta es $4 - 1 = 3$ litros.



La respuesta es (b).

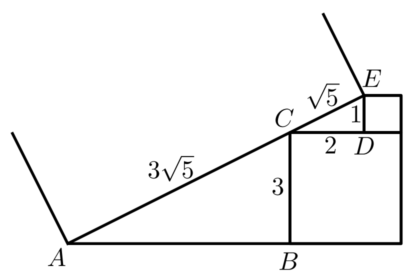
Solución 29. Los triángulos son semejantes en razón $1 : 2 : 3$, de manera que sus áreas están en razón $1 : 4 : 9$. La respuesta es (e).

Solución 30. Llamemos x al número. Tenemos que $20\times 10^{98} < x < 30\times 10^{98}$, de manera que $400 \times 10^{196} < x^2 < 900 \times 10^{196}$. Ambos extremos de la desigualdad tienen 199 cifras así que también x^2 tiene 199 cifras. La respuesta es (b).

Solución 31. Digamos que B es el área común. En todos los casos se tiene que $A - R = (A + B) - (B + R)$, que es el área del rectángulo grande más el área del rectángulo pequeño, lo cual es constante. La respuesta es (e).

Solución 32. Es igual a $\frac{1010^2+2^2\cdot 1010^2+3^2\cdot 1010^2}{2\cdot 1010} = \frac{(1+2^2+3^2)\cdot 1010^2}{2\cdot 1010} = \frac{14}{2}1010 = 7070$. La respuesta es (e).

Solución 33. Nos fijamos sólo en la la parte plana del frente y llamamos A, B, C, D, E a los vértices de los triángulos que se forman, como se muestra en la figura.

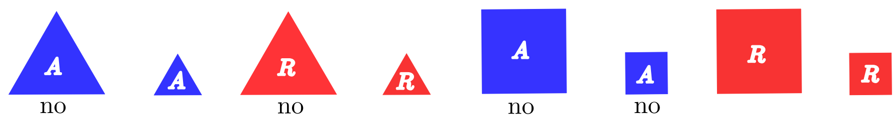


Tenemos que BC mide 3 y DE mide 1, de donde CD mide 2. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CDE obtenemos que CE mide $\sqrt{5}$. Ahora, los triángulos CDE y ABC son semejantes y, como $|BC| = 3|DE|$, entonces $|AC| = 3|CE| = 3\sqrt{5}$. Entonces el lado del cuadrado grande mide $4\sqrt{5}$. La respuesta es (b).

Solución 34. El número del centro debe ser el promedio de todos, es decir, $2020/101 = 20$. Los extremos son $20-50$ y $20+50$ así que la suma es $2\cdot 20 = 40$. La respuesta es (b).

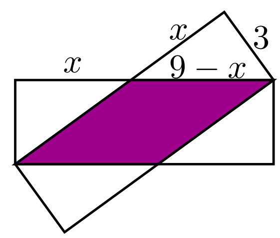
Solución 35. Digamos que los números en los lados son a, b, c y d, así que los números de los vértices son ab, bc, cd y da. Entonces $15 = ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$. Como los números son positivos, las únicas posibilidades para los factores son 3 y 5, de manera que $a + b + c + d = 8$. La respuesta es (c).

Solución 36. Analizamos cada una de las combinaciones si puede o no pertenecer al conjunto de figuras sin violar ninguna condición:



La respuesta es (e).

Solución 37. Llamenos x a la distancia de un vértice del rectángulo al punto de intersección con el otro, como se muestra en la figura. Entonces, cualquiera de los lados del paralelogramo sombreado mide $9-x$. Por el teorema de Pitágoras, $x^2+3^2=(9-x)^2$, de donde $18x=72$, así que $x=4$. Entonces el área de cualquiera de los triángulos es $3 \cdot 4/2 = 6$ y el área sombreada es $27-2 \cdot 6 = 15$. La respuesta es (d).

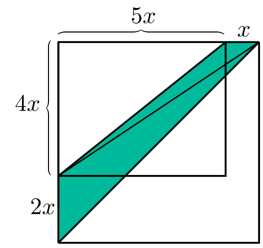


Solución 38. En total hubo $\frac{10+15+17}{2} = 21$ juegos. Como Alicia jugó 10 juegos, quiere decir que descansó en 11 juegos. Sabemos que ninguna descansó en dos juegos consecutivos así que la única posibilidad es que Alicia hubiera descansado en todos los juegos impares, lo cual quiere decir que jugó el segundo juego y lo perdió. La respuesta es (a).

Nota: Una forma en la que se cumplen todas las condiciones se muestra en el siguiente esquema en el que se mencionan las parejas que se enfrentan en cada juego, abreviando A por Alicia, B por Bere y C por Caty.

1) (B,C)	5) (B,C)	9) (B,C)	13) (B,C)	17) (B,C)	21) (B,C)
2) (A,B)	6) (A,B)	10) (A,C)	14) (A,C)	18) (A,C)	
3) (B,C)	7) (B,C)	11) (B,C)	15) (B,C)	19) (B,C)	
4) (A,B)	8) (A,B)	12) (A,C)	16) (A,C)	20) (A,C)	

Solución 39. Digamos que el lado del rectángulo original que se incrementó en 20% mide $5x$. Entonces el cuadrado mide $6x$ de lado, así que el otro lado del rectángulo mide $4x$. Partamos la región sombreada en dos triángulos, como se indica en la figura.



Entonces el área sombreada es

$$30 = \frac{2x \cdot 6x}{2} + \frac{x \cdot 4x}{2} = \frac{16x^2}{2} = 8x^2,$$

de manera que $x^2 = 15/4$ y así el área del rectángulo original es

$$5x \cdot 4x = 20x^2 = \frac{20 \cdot 15}{4} = 75\, m^2.$$

La respuesta es (d).

Solución 40. Si fuera blanco, habría la posibilidad de que fuera el hexágono, pero entonces Benjamín ya conocería la figura favorita de Rubén desde el principio, porque sólo hay un hexágono. Entonces el color es gris o negro. Pero entonces no puede ser un círculo porque Benjamín en la segunda oportunidad no habría sabido cuál es. Hasta aquí sabemos que es la estrella negra o el triángulo gris o el cuadrado negro. Pero en ese momento Benjamín dice que ya sabe y después Adela dice que también, así que la única posibilidad es que sea el triángulo gris porque si fuera cualquiera de los otros dos, por ser del mismo color, Adela todavía tendría la duda. La respuesta es (c).

Solución 41. Entre 1500 y 1599 hay 3 números pues $15 = 3 \times 5$, así que el número debe ser de la forma $15n^2$ y debe cumplir $0 \leq 15n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < \sqrt{100/15}$ y entonces $n = 0, 1, 2$.

Entre 1600 y 1699 hay 10 números pues 16 es cuadrado así que el número debe ser de la forma n^2 y debe cumplir $0 \leq n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < 10$ y entonces $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

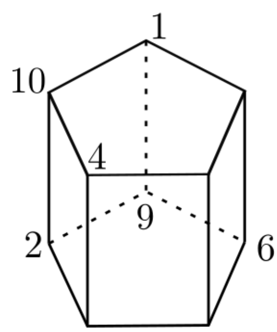
Entre 1700 y 1799 hay 3 números pues 17 es primo así que el número debe ser de la forma $17n^2$ y debe cumplir $0 \leq 17n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < \sqrt{100/17}$ y entonces $n = 0, 1, 2$.

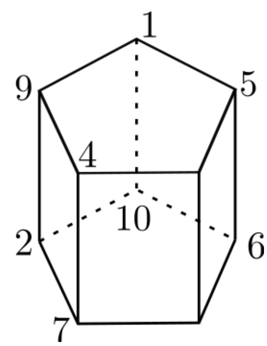
Entre 1800 y 1899 hay 8 números pues $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ así que el número debe ser de la forma $2n^2$ y debe cumplir $0 \leq 2n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < \sqrt{100/2} = \sqrt{50}$ y entonces $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Finalmente el número 1900 cumple la propiedad.

En total son: $3+10+3+8+1=25$ números. La respuesta es (25).

Solución 42. Sea S la suma de los 4 vértices de cualquiera de las caras laterales. Notemos que $5S = 2(1+2+\cdots+10)$ pues cada número aparece en dos de las caras. De aquí tenemos que $5S = 2\cdot 55$, es decir, $S = 22$. Ahora, sean x y y los números que aparecen en la cara lateral que tiene al 1 y al 2. Tenemos que $x+y$ debe ser $22-1-2=19$, de manera que la única posibilidad es que uno de x o y sea 9 y el otro sea 10. Trabajemos las dos posibilidades:





Notamos que la de la izquierda es imposible pues en la cara que tiene a 2, 4 y 10 iría 6, que ya se usó. La de la derecha se completa como se muestra, de forma que en la cara superior puede ir cualquiera de 3 u 8. Entonces las posibilidades para la suma de la cara superior son $5+1+9+4+3=22$ y $5+1+9+4+8=27$. La respuesta es (2).

Solución 43. Los números 17, 19 y 23 son números primos y sus dobles se pasan de 26. Por lo tanto, si uno de estos números va a estar en una fracción que se reduce a un entero, debería estar acompañada por el 1. Como sólo tenemos un 1 disponible, tendremos al menos dos números que no podrán estar en una fracción que se simplifique a un entero. Por lo tanto, es imposible que las 13 fracciones se reduzcan a un entero. Con el siguiente ejemplo podemos concluir que el máximo es 12:

$$\frac{23}{1}, \frac{14}{2}, \frac{15}{3}, \frac{12}{4}, \frac{25}{5}, \frac{24}{6}, \frac{21}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}, \frac{22}{11}, \frac{26}{13}, \frac{19}{17}.$$

La respuesta es (12).

Solución 44. Hay 9 maneras de poner el número 5 en el tablero. Luego, tenemos que elegir un número menor que 5 y otro mayor que 5 en ese renglón. Esto se puede hacer de $4 \times 4 \times 2 = 32$ maneras. Esto hace que el 5 sea uno de los números coloreados.

Sin importar cómo rellenemos el resto de las 6 casillas, este acomodo cumplirá el problema. Para ver esto, supongamos que es falso. Entonces el 5 debe ser el mayor o el menor de los números coloreados.

Si el 5 fuese el menor, quiere decir que los otros dos números coloreados son mayores que 5. Pero esto implica que en esos dos renglones hay 4 números mayores que 5. Como en el renglón del 5 ya hay otro número mayor que 5, tendríamos 5 números mayores a 5 y no hay tantos. Si el 5 es el mayor de los coloreados el procedimiento es similar.

El resto de los números se pueden acomodar de 6! maneras. Por lo tanto el número buscado es $9 \times 32 \times 6! = 207\,360$. La respuesta es (207360).

Solución 45. Sean a el MCM de $1, 2, 3, \ldots, n$ y b el MCM de $101, 102, 103, \ldots, n$. Como 97 es un factor de a, también tiene que ser un factor de b, pero el primer múltiplo de 97 después de 101 es $2 \times 97 = 194$, así que $n \geq 194$.

Veamos que si $n = 194$ entonces $a = b$. Para ello basta que los números del 1 al 100 sean factores de b. Esto es cierto para los números del 1 al 97 pues cada uno de éstos tiene al menos un múltiplo entre el 101 y el 194. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} 98 &= 2 \times 7^2, \\ 99 &= 3^2 \times 11, \\ 100 &= 2^2 \times 5^2. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que ver que $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$ es divisor de b. Esto es cierto pues cada uno de los números 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 y 11 se encuentran como factores entre los números del 101 al 194. La respuesta es (194).

Concentrado de Respuestas

1. (e)
2. (a)
3. (e)
4. (d)
5. (c)
6. (a)
7. (d)
8. (b)
9. (a)
10. (b)
11. (b)
12. (b)
13. (c)
14. (b)
15. (b)
16. (d)
17. (b)
18. (d)
19. (a)
20. (c)
21. (c)
22. (a)
23. (e)
24. (d)
25. (a)
26. (b)
27. (a)
28. (b)
29. (e)
30. (b)
31. (e)
32. (e)
33. (b)
34. (b)
35. (c)
36. (e)
37. (d)
38. (a)
39. (d)
40. (c)
41. (25)
42. (2)
43. (12)
44. (207360)
45. (194)

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
Ciudad de México
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: http://www.ommenlinea.org/

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

David Cossío Ruíz

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Leonardo Martínez Sandoval

Mónica Mateos Cisneros

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez.