# Problemas Introductorios

para la

**33**ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
José Antonio Gómez Ortega
Isabel Hubard Escalera
María Luisa Pérez Seguí

2019

**Luis Miguel García Velázquez**

Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia,
Universidad Nacional Autónoma de México

**José Antonio Gómez Ortega**

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

**Isabel Hubard Escalera**

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

**María Luisa Pérez Seguí**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

# Contenido

# Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la $33^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2020: la $61^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en el Rusia durante el mes de julio, la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en Peru, la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Guatemala en el mes de junio y la $9^a$ Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas a realizarse en el mes de abril en Holanda.

En la $33^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del $1^o$ de agosto de 2000. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2018-2019, y para el $1^o$ de julio del año 2020 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los problemas que se incluyen en este folleto se propusieron por parte del Canguro Matemático Mexicano y tienen distintos niveles. Los comités estatales utilizaron los problemas a su conveniencia. En muchos estados los problemas aquí presentados fueron aplicados en los exámenes de diferentes etapas del proceso estatal.

Los primeros 20 problemas que aparecen en esta publicación formaron parte de los niveles básicos del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos con los conocimientos mínimos de $5^o$ de primaria. El resto de los problemas de opción múltiple (del 21 al 40) formaron parte del Examen Eliminatorio del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de 2 horas, como un examen eliminatorio, por estudiantes de $3^o$ de secundaria o grados más avanzados. Los últimos cinco problemas corresponden a la siguiente fase de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

Para continuar con la preparación, a partir del 21 de abril -y durante un mes- se distribuirán los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página: `http://canguro.deltagauge.info/`

Este folleto se edita con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

## Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

**Exámenes Estatales.** Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

**Concurso Nacional.** Este concurso se llevará a cabo en el mes de noviembre de 2019. La Ciudad donde se realizará por ahora no está confirmada. En él se elegirán a las preselecciones mexicanas.

**Entrenamientos.** A los alumnos de las preselecciones que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2020. También se aplicarán exámenes para determinar a los concursantes que representarán a México en las diferentes Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

## Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca, Toluca, Guadalajara, Acapulco, Monterrey y Campeche.

## Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en los concursos internacionales donde participa han sido los siguientes:

| **Olimpiada Internacional de Matemáticas** | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 1988 | Australia | 49 | 37 |
| 1989 | Rep. Fed. de Alemania | 50 | 31 |
| 1990 | Rep. Popular de China | 54 | 36 |
| 1991 | Suecia | 55 | 35 |
| 1992 | Rusia | 56 | 49 |
| 1993 | Turquía | 73 | 63 |
| 1994 | Hong Kong | 69 | 65 |
| 1995 | Canadá | 74 | 59 |
| 1996 | India | 75 | 53 |
| 1997 | Argentina | 82 | 32 |
| 1998 | Taiwan | 75 | 44 |
| 1999 | Rumania | 81 | 52 |
| 2000 | Corea | 82 | 30 |
| 2001 | Estados Unidos | 83 | 46 |
| 2002 | Escocia | 84 | 46 |
| 2003 | Japón | 82 | 41 |
| 2004 | Grecia | 84 | 37 |
| 2005 | México | 91 | 31 |
| 2006 | Eslovenia | 90 | 24 |
| 2007 | Vietnam | 92 | 37 |
| 2008 | España | 97 | 37 |
| 2009 | Alemania | 104 | 50 |
| 2010 | Kasajistán | 97 | 33 |
| 2011 | Holanda | 101 | 22 |
| 2012 | Argentina | 100 | 31 |
| 2013 | Colombia | 97 | 17 |
| 2014 | Sudáfrica | 101 | 26 |
| 2015 | Tailandia | 104 | 19 |
| 2016 | Hong Kong | 109 | 23 |
| 2017 | Brasil | 112 | 43 |
| 2018 | Rumania | 107 | 36 |

En 2018, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Víctor Antonio Domínguez Silva de Nuevo León (medalla de plata), Oriol Andreu Solé Pi de la Ciudad de México (medalla de bronce), Isaac Jair Jiménez Uribe de Sinaloa (medalla de bronce), Pablo Alhui Valeriano Quiroz de Nuevo León (medalla de bronce), Alfredo Alef Pineda Reyes del Estado de México (medalla de bronce), Eric Iván Hernández Palacios de Nuevo León (mención honorifica). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de oro, 25 medallas de plata, 60 medallas de bronce y 37 menciones honoríficas.

| **Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas** | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 1989 | Cuba | 13 | 3 |
| 1990 | España | 15 | 3 |
| 1991 | Argentina | 16 | 5 |
| 1992 | Venezuela | 16 | 6 |
| 1993 | México | 16 | 9 |
| 1994 | Brasil | 16 | 6 |
| 1995 | Chile | 18 | 9 |
| 1996 | Costa Rica | 17 | 2 |
| 1997 | México | 17 | 3 |
| 1998 | República Dominicana | 18 | 5 |
| 1999 | Cuba | 20 | 3 |
| 2000 | Venezuela | 21 | 2 |
| 2001 | Uruguay | 21 | 3 |
| 2002 | El Salvador | 22 | 3 |
| 2003 | Argentina | 19 | 4 |
| 2004 | España | 22 | 5 |
| 2005 | Colombia | 22 | 2 |
| 2006 | Ecuador | 21 | 1 |
| 2007 | Portugal | 22 | 4 |
| 2008 | Brasil | 21 | 6 |
| 2009 | México | 21 | 5 |
| 2010 | Paraguay | 21 | 3 |
| 2011 | Costa Rica | 21 | 1 |
| 2012 | Bolivia | 19 | 6 |
| 2013 | Panamá | 20 | 3 |
| 2014 | Honduras | 22 | 1 |
| 2015 | Puerto Rico | 23 | 4 |
| 2016 | Chile | 22 | 4 |
| 2017 | Argentina | 22 | 4 |
| 2018 | España-Portugal | 22 | 4 |

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en 2018 obtuvieron medalla: Oriol Andreu Solé Pi de la Ciudad de México, Víctor Antonio Domínguez Silva de Nuevo León y

Diego Hinojosa Tallez de Jalisco (los tres medallas de plata) y Eric Iván Hernández Palacios (medalla de bronce). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 28 medallas de oro, 49 medallas de plata, 35 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

| **Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe** | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 1999 | Costa Rica | 10 | 2 |
| 2000 | El Salvador | 9 | 2 |
| 2001 | Colombia | 10 | 2 |
| 2002 | México | 8 | 1 |
| 2003 | Costa Rica | 11 | 1 |
| 2004 | Nicaragua | 12 | 1 |
| 2005 | El Salvador | 12 | 1 |
| 2006 | Panamá | 12 | 1 |
| 2007 | Venezuela | 12 | 1 |
| 2008 | Honduras | 12 | 2 |
| 2009 | Colombia | 12 | 1 |
| 2010 | Puerto Rico | 16 | 1 |
| 2011 | México | 12 | 1 |
| 2012 | El Salvador | 12 | 1 |
| 2013 | Nicaragua | 13 | 1 |
| 2014 | Costa Rica | 12 | 1 |
| 2015 | México | 13 | 1 |
| 2016 | Jamaica | 13 | 1 |
| 2017 | El Salvador | 14 | 1 |
| 2018 | Cuba | 12 | 1 |

En la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo dos medallas de oro: Tomás Francisco Cantú Rodríguez de la Ciudad de México y Diego Alfonso Villarreal Grimaldo de Nuevo León y dos medallas de plata: Katia García Orozco de Chihuahua y Darío Hinojosa Delgadillo de Nuevo León. La delegación nacional obtuvo el primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 38 medallas de oro, 20 de plata y 3 de bronce.

| **Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas** | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 2014 | Turquía | 28 | 17 |
| 2015 | Bielorusia | 30 | 9 |
| 2016 | Rumania | 39 | 13 |
| 2017 | Suiza | 44 | 14 |
| 2018 | Italia | 56 | 7 |

En abril de 2018 México participó en la $7^a$ Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Florencia, Italia. Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. El equipo mexicano fue integrado por Marcela Cruz Larios de Campeche, Violeta Alitzel Martínez Escamilla de Morelos, Ana Paula Jiménez Díaz y Nuria Sydykova Méndez, las dos de la Ciudad de México. Cada una de ellas obtuvo una medalla de plata. En total, en la Olimpiada Europea Femenil, México ha obtenido 1 medalla de oro, 7 medallas de plata y 9 medallas de bronce.

## Resultados en el Concurso Nacional de la 32ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2018 se llevó a cabo en la Ciudad de Campeche el Concurso Nacional de la $32^a$ OMM, con la participación de los treinta y dos Estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Diego Hinojosa Téllez (Jalisco),
Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León),
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León),
Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato),
Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México),
Ricardo de Jesús Balam Ek (Yucatán),
Bruno Gutiérrez Chávez (Colima),
Carlos Alberto Páez De la Cruz (Querétaro),
Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas),
Isaac Pancardo Botello (Guanajuato),
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),
Rigoberto Concepción Rodríguez Cruz (Hidalgo),
Jonatan Alejandro González Cázares Jalisco),
Iván García Mestiza (Veracruz) y
Fabián Domínguez López (Chiapas),

Los 11 alumnos pre seleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas),
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa),
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León),
Jacobo de Juan Millón (Yucatán),
Ana Illanes Martínez de la Vega, (Ciudad de México),

Isaac Pancardo Botello (Guanajuato),
David García Maldonado (Oaxaca),
Mónica Isabel Casillas Rodríguez (Querétaro),
Kevin Brian Rodríguez Sánchez (Baja California),
Leonardo Mikel Cervantes Mateos, (Ciudad de México),
Omar Farid Astudillo Marbán (Oaxaca) y
Saúl Villalobos Fajardo (Oaxaca).

Las 12 alumnas pre seleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México),
Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas),
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),
Mirena Flores Valdez (Ciudad de México),
Karla Rebeca Mungua Romero (Sinaloa),
Ana Teresa Calderón Juárez (Zacatecas),
Ana Illanes Martínez de la Vega, (Ciudad de México),
Katia García Orozco (Chihuahua),
Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato),
Ana Paula Ramírez Sánchez (Jalisco),
Laura Itzel Rodríguez Dimayuga (Morelos) y
Mónica Isabel Casillas Rodríguez (Querétaro).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 32º Concurso Nacional:

1. Ciudad de México
2. Guanajuato
3. Nuevo León
4. Jalisco
5. Sinaloa
6. Yucatán
7. Chihuahua
8. Chiapas
9. Veracruz
10. San Luis Potosí

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Guanajuato. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Sinaloa y Veracruz.

## Material de estudio e información sobre la OMM

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar otro material de estudio disponible, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://ommenlinea.org/`

**EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA**
**OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**
Febrero 2019

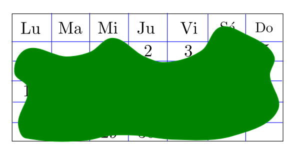
# Enunciados de los problemas

**Los siguientes problemas son de nivel introductorio y son de calentamiento. Los conocimientos necesarios para resolverlos no pasan de aquellos del programa escolar de quinto de primaria, sin embargo debes leerlos con cuidado para entender qué se pide en cada caso.**

**Problema 1.** Las longitudes de los lados de un triángulo son 6, 10 y 11. Se dibuja un triángulo equilátero que tiene el mismo perímetro que el triángulo anterior. ¿Cuánto mide cada lado del triángulo equilátero?

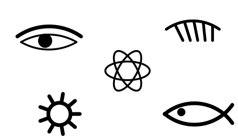
(a) 9 (b) 9.5 (c) 10 (d) 10.5 (e) 11

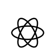
**Problema 2.** La figura muestra el calendario de cierto mes del año. Desafortunadamente le cayó tinta encima. ¿En qué día de la semana cayó el 27 de ese mes?



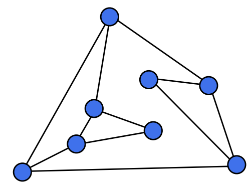

(a) lunes (b) miércoles (c) jueves (d) sábado (e) domingo

**Problema 3.** En un lenguaje antiguo los símbolos que se muestran a la derecha, representan los números 1, 2, 3, 4, y 5, en algún orden. ¿Cuál de los símbolos representa el número 3 si se sabe que se cumplen las siguientes tres igualdades?



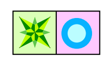
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

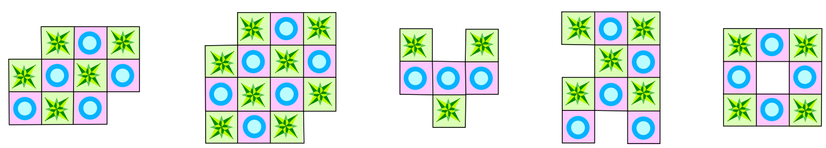
**Problema 4.** En la figura se muestran varios focos que están conectados entre sí. Al inicio todos los focos están apagados. Cuando Javier toca un foco, ese foco y sus vecinos se encienden. ¿Cuál es la menor cantidad de focos que puede tocar Javier para encenderlos todos?



(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3 (e) 2

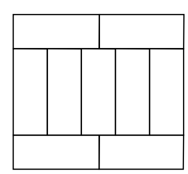
**Problema 5.** ¿Cuántas de las 5 figuras que se muestran abajo se pueden construir usando fichas de $2 \times 1$ como la que se muestra a la derecha?





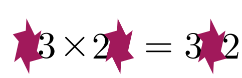
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

**Problema 6.** Marisol tiene 9 rectángulos iguales, con los que forma el rectángulo más grande que se muestra en la figura. Si el lado mayor de cada uno de los rectángulos pequeños mide 10 cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo más grande?



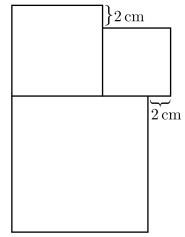
(a) 40 cm (b) 48 cm (c) 76 cm (d) 81 cm (e) 90 cm

**Problema 7.** Mónica multiplicó correctamente dos números de dos dígitos en una hoja de papel. Luego puso unas calcomanías encima de tres dígitos como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los tres dígitos que quedaron tapados?



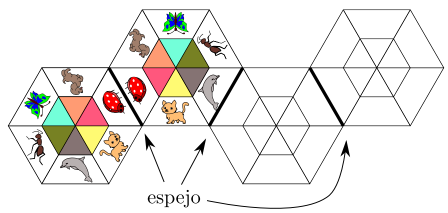
(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 14

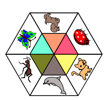
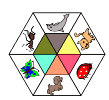
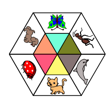
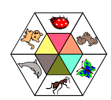
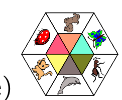
**Problema 8.** En la figura hay 3 cuadrados. La longitud del lado cuadrado más pequeño es 6 cm. ¿Cuál es la longitud del lado cuadrado más grande?




(a) 8 cm (b) 10 cm (c) 12 cm (d) 14 cm (e) 16 cm

**Problema 9.** Los hexágonos de la figura están separados por un espejo. Se muestra una de las reflexiones. ¿Cómo queda la reflexión en el hexágono de la derecha?

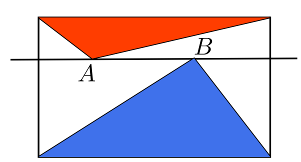



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

**Problema 10.** A una competencia se inscribieron inicialmente 19 hombres y 11 mujeres. Deben formarse 8 equipos de tal forma que cada equipo tenga el mismo número de personas y además cada equipo debe tener el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántas personas deben inscribirse al club, como mínimo, para que eso sea posible?

(a) 2 (b) 8 (c) 10 (d) 18 (e) 26

**Problema 11.** El diagrama muestra un rectángulo y una recta paralela a la base, en la que se han elegido dos puntos $A$ y $B$, como se muestra en la figura. La suma de las áreas de los triángulos sombreados es $10\,\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área del rectángulo?

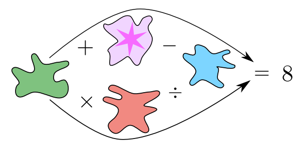



(a) 18 $\text{cm}^2$ (b) 20 $\text{cm}^2$ (c) 22 $\text{cm}^2$ (d) 24 $\text{cm}^2$ (e) Depende de la posición de $A$ y $B$

**Problema 12.** Un rectángulo está dividido en 40 cuadritos iguales. Sunya eligió una columna y la coloreó toda. Quedaron varios cuadritos sin colorear y la cantidad de columnas que no quedaron coloreadas es par. ¿Cuántos cuadritos quedaron sin colorear?

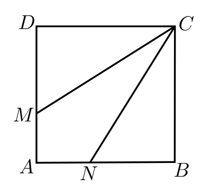
(a) 20 (b) 30 (c) 32 (d) 35 (e) 39

**Problema 13.** En cada mancha debe escribirse un número entero entre el 1 y el 5 de manera que al seguir cualquiera de las dos flechas el resultado sea 8. ¿Qué número va la mancha que tiene la estrella?




(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

**Problema 14.** El cuadrado $ABCD$ tiene lados de longitud 3 cm. Los puntos $M$ y $N$ están sobre $AD$ y $AB$, respectivamente, de forma que $CN$ y $CM$ dividen al cuadrado en tres regiones de la misma área. ¿Cuál es la longitud de $NB$?

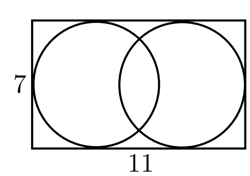



(a) 2.5 cm (b) 2 cm (c) 1.5 cm (d) 1 cm (e) 0.5 cm

**Problema 15.** Un león se esconde en una de tres habitaciones. Una nota en la puerta de la habitación 1 dice "El león está aquí". Una nota en la puerta de la habitación 2 dice "El león no está aquí". Una nota en la puerta de la habitación 3 dice "$2 + 2 = 2 \times 3$". Sabiendo que solamente una de esas afirmaciones es verdadera, ¿en qué habitación está el león?

(a) En la 1 (b) En la 2 (c) En la 3 (d) Puede estar en cualquiera (e) Puede estar en la 1 o en la 2

**Problema 16.** El diagrama muestra un rectángulo de dimensiones $7 \times 11$ que contiene dos circunferencias. Cada una de las circunferencias toca al rectángulo en tres de sus lados. ¿Cuál es la distancia entre los centros de las circunferencias?

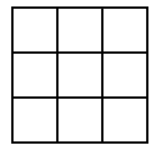



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

**Problema 17.** María escribió en su cuaderno una lista de números primos menores que 100. Se dio cuenta de que al hacerlo escribió exactamente una vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, y ningún otro. ¿Cuál de los siguientes números primos forzosamente debe estar en su lista?

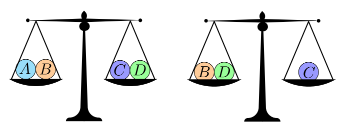
(a) 2 (b) 5 (c) 31 (d) 41 (e) 53

**Problema 18.** Víctor escribió los números del 1 al 9, uno en cada cuadrito de la cuadrícula que se muestra. Calculó la suma de los enteros por cada una de los renglones y de las columnas de la cuadrícula. Cinco de los resultados que obtuvo son 13, 14, 15, 16 y 17, en algún orden. ¿Cuál es el sexto resultado?



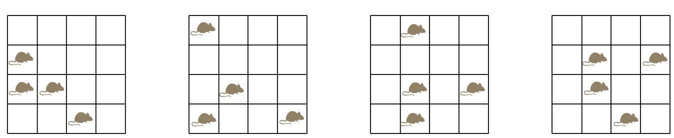
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

**Problema 19.** Hay 4 pelotas marcadas con las letras A,B,C y D, una de ellas pesa 100 g, otra pesa 200 g, otra 300 g y otra 400 g. Si las balanzas del dibujo están en equilibrio, ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

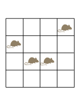
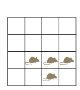
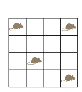
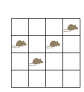
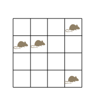



(a) La bola A pesa 100 g (b) La bola A pesa 300 g (c) La bola A pesa el doble que la bola B (d) La bola A pesa el doble que la bola C (e) La bola A pesa el doble que la bola D

**Problema 20.** Cuatro ratones están en una caja dividida en $4 \times 4$ celdas. Uno de ellos está dormido y no se mueve. Cada vez que Carmela silba, los otros tres se mueven a una celda que comparte un lado con la que está en ese momento, pero no regresan inmediatamente a la celda de la que vienen. En la figura se muestran los tres primeros movimientos. ¿Cuál de las imágenes puede representar el resultado después del cuarto silbido?



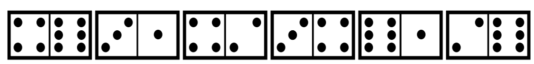
posición inicial $1^{\text{er}}$ silbido $2^{\text{o}}$ silbido $3^{\text{er}}$ silbido

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

**Problema 21.** Se hicieron 5 predicciones sobre el partido de futbol entre el equipo $A$ y el equipo $B$: (1) El partido no terminará en empate. (2) El equipo $A$ anotará. (3) El equipo $A$ ganará. (4) El equipo $A$ no perderá. (5) Se anotarán 3 goles. Se sabe que exactamente 3 de las predicciones fueron ciertas. ¿Cuál fue el resultado del encuentro entre $A$ y $B$?

(a) 0-1 (b) 1-1 (c) 2-1 (d) 1-2 (e) 0-3

**Problema 22.** En el dibujo se muestran 6 fichas de dominó. Cada una está formada por dos cuadritos y en cada cuadrito hay determinado número de puntos. Se quiere reacomodar las fichas de tal manera que sigan en la misma línea pero que para cada pareja de fichas que queden juntas, el número de puntos del cuadrito que quede uno al lado del otro sea el mismo. Hay dos tipos de movimientos permitidos; uno de ellos es girar cualquier ficha; el otro es intercambiar de lugar dos fichas. ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que hay que hacer para lograr un reacomodo como el descrito arriba?

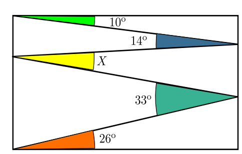


(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

**Problema 23.** Lupita está practicando el salto de longitud. El promedio de las distancias que saltó en los primeros intentos de hoy es 3.80 m. En su siguiente intento saltó 3.99 m y su promedio alcanzó los 3.81 m. ¿Qué distancia debe alcanzar en su siguiente salto para aumentar su promedio a 3.82 m?

(a) 3.97 m (b) 4.00 m (c) 4.01 m (d) 4.03 m (e) 4.04 m

**Problema 24.** Se dibujaron varias líneas dentro de un rectángulo creando ángulos de $10^\circ, 14^\circ, 33^\circ$ y $26^\circ$, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con $X$?

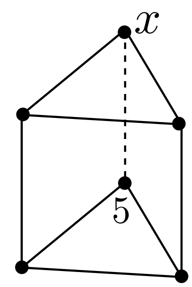



(a) 11° (b) 12° (c) 16° (d) 17° (e) 33°

**Problema 25.** Se han marcado once puntos sobre una línea recta. Fijándose de izquierda a derecha, la suma de las distancias entre el primer punto y los demás es 2018. La suma de todas las distancias entre el segundo punto y los demás, incluyendo el primero, es 2000. ¿Cuál es la distancia entre el primero y el segundo punto?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

**Problema 26.** El prisma de la figura está formado por 2 triángulos y 3 cuadrados. Se quiere numerar los vértices del prisma usando los números enteros del 1 al 6 de manera que el resultado de sumar los cuatro números de cada uno de los 3 cuadrados sea el mismo. Se ha colocado ya el número 5. ¿Qué número va en el vértice marcado con $x$?

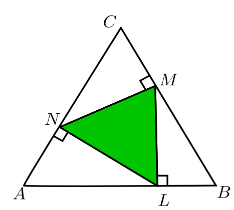



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) no es posible

**Problema 27.** Armando, Daniele y Joaquín fueron de compras. Daniele gastó solamente el 15% de lo que gastó Joaquín. Sin embargo, Armando gastó 60% más que Joaquín. Juntos gastaron $\$5,500$. ¿Cuánto gastó Armando?

(a) $\$300$ (b) $\$2,000$ (c) $\$2,500$ (d) $\$2,600$ (e) $\$3,200$

**Problema 28.** Los puntos $L$, $M$ y $N$ están sobre los lados de un triángulo equilátero $ABC$, de forma tal que cada uno de los ángulos $NMC$, $LNA$ y $BLM$ miden 90º. El área del triángulo $ABC$ es 36. ¿Cuál es el área del triángulo $LMN$?

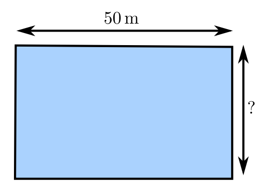



(a) 9 (b) 12 (c) 15 (d) 16 (e) 18

**Problema 29.** Ramiro tenía dibujada una línea en la computadora; pensó que era demasiado grande así que la redujo un 60%. Sin embargo él quería que el tamaño fuera el promedio entre la original y como le quedó después de la reducción. ¿En qué porcentaje debe aumentar el tamaño?

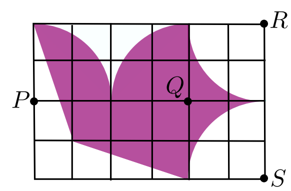
(a) 40% (b) 45% (c) 50% (d) 60% (e) 75%

**Problema 30.** Miguel y Tere deciden jugar una carrera. Miguel corre alrededor del perímetro de la alberca que se muestra en la figura, mientras que Tere nada a lo largo de la alberca. Miguel corre tres veces más rápido que lo que nada Tere. Tere nadó seis veces la longitud de la alberca en el mismo tiempo en que Miguel corrió cinco veces alrededor de la alberca. ¿Cuál es el ancho de la alberca?



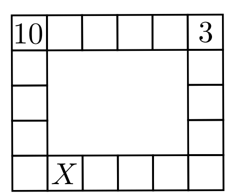

(a) 180 m (b) 80 m (c) 50 m (d) 40 m (e) 25 m

**Problema 31.** En la figura se muestra un rectángulo dividido en varios cuadraditos iguales. La figura sombreada está delimitada por 4 sectores de círculo con centros en los vértices $P$, $Q$, $R$ y $S$ de la cuadrícula (marcados con • en la figura), y 2 segmentos de recta. Si el área de la región sombreada es $192\,\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área del rectángulo?



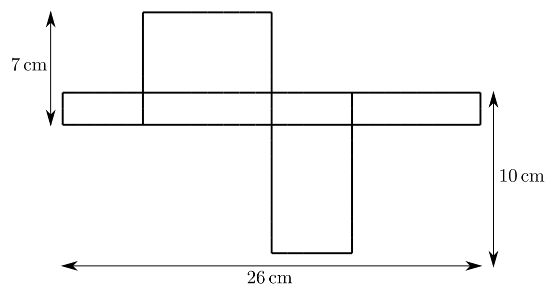

(a) $384\,\text{cm}^2$ (b) $360\,\text{cm}^2$ (c) $280\,\text{cm}^2$ (d) $246\,\text{cm}^2$ (e) $240\,\text{cm}^2$

**Problema 32.** Mónica quiere escribir un número en cada cuadrito del tablero que se muestra en la figura, de manera que el número escrito en cada cuadrito sea la suma de los números escritos en los dos cuadritos que comparten un lado. ¿Qué número va a escribir en el cuadrito marcado con $X$?




(a) 10 (b) -3 (c) 13 (d) -13 (e) 7

**Problema 33.** El diagrama muestra una caja desarmada. ¿Cuál es el volumen de la caja?

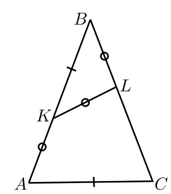



(a) $43\,\text{cm}^3$ (b) $70\,\text{cm}^3$ (c) $80\,\text{cm}^3$ (d) $100\,\text{cm}^3$ (e) $1820\,\text{cm}^3$

**Problema 34.** Para armar 300 llaveros trabajan 4 personas durante 9 horas. ¿En cuánto tiempo arman los mismos 300 llaveros 6 personas?

(a) 3 h (b) 4.5 h (c) 5 h (d) 6 h (e) 7.5 h

**Problema 35.** En el triángulo de la figura $AB = BC$. Los puntos $K$ y $L$ se han marcado en los lados $AB$ y $BC$, respectivamente, de forma que $AK = KL = LB$ y $KB = AC$. ¿Cuál es la medida del ángulo $ABC$?




(a) 30º (b) 35º (c) 36º (d) 40º (e) 45º

**Problema 36.** ¿Cuál es la máxima suma de todos los números que pueden colocarse en los cuadritos de una cuadrícula de $5 \times 5$ si sólo pueden escribirse números 0 y números 1 y además debe cumplirse la siguiente condición: En cada cuadrado de $2 \times 2$ de la cuadrícula debe haber exactamente 3 números iguales.

Nota. En la figura siguiente se da un ejemplo en el que la condición se cumple y la suma es 12.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

(a) 22 (b) 21 (c) 20 (d) 19 (e) 18

**Problema 37.** ¿A cuál de los siguientes números es igual $8^8 + 8^8$?

(a) $2^{25}$ (b) $8^9$ (c) $8^{16}$ (d) $4^9$ (e) $16^8$

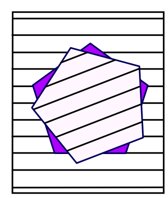
**Problema 38.** Una computadora produjo una fila de números 0 y de números 1. Se sabe que hay mil ceros y cien unos. ¿Cuál es la mínima longitud de una secuencia dentro de la fila que seguro tiene dos ceros seguidos?

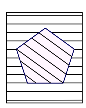
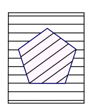
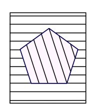
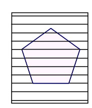
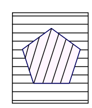
(a) 100 (b) 101 (c) 200 (d) 201 (e) 202

**Problema 39.** La suma de 5 enteros consecutivos es $10^{2018}$. ¿Cuál es el número de enmedio?

(a) $10^{2013}$ (b) $5^{2017}$ (c) $10^{2017}$ (d) $2^{2018}$ (e) $2 \cdot 10^{2017}$

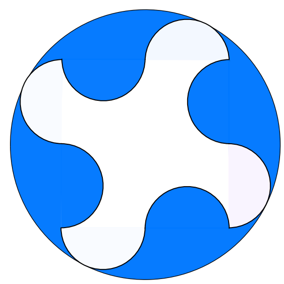
**Problema 40.** Se cortó un pentágono regular de una hoja de papel con líneas. Queda un hoyo en el papel. En cada paso se rota el pentágono 21° alrededor de su centro. Se muestra cómo queda la figura después del primer paso. ¿Cómo se verá la figura la primera vez que el pentágono se empalme justo con del agujero?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

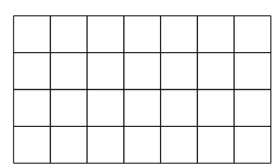
**En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Los problemas que se incluyen aquí formaron parte del examen semifinal de la 31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que se aplicó en varios estados de la república. Al final encontrarás las respuestas.**

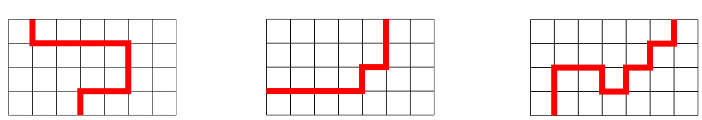
**Problema 41.** Inscrita en un círculo está dibujada una figura cuyo contorno consta de 8 semicírculos como se ve en la figura. Si el radio de cada semicírculo es 1, ¿cuánto mide el área sombreada?



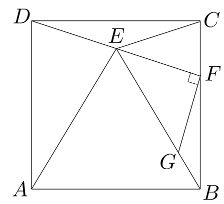
**Problema 42.** Romeo no se acuerda del número secreto de su caja fuerte. Sólo recuerda que es un número de 7 cifras, que usa cada uno de los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 exactamente una vez, y que es el menor número que cumple que la suma de cada 3 cifras consecutivas no es múltiplo ni de 2 ni de 3. ¿Cuál es el número secreto de su caja fuerte?

**Problema 43.** Un papel cuadriculado de $4 \times 7$ como el que se muestra a la derecha se va a cortar con unas tijeras siguiendo algunas líneas de la cuadrícula. Se va a empezar en el borde inferior y se terminará en el borde superior, siempre hacia arriba y hacia los lados pero no hacia abajo, y no es válido empezar (ni terminar) por un lado. ¿De cuántas formas es posible hacerlo si las dos partes deben quedar con la misma área? (*Nota:* Por ejemplo, un corte como el que se muestra abajo a la izquierda es válido, pero el central y el de la derecha no lo son.)

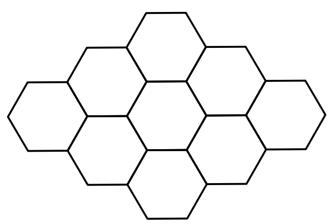


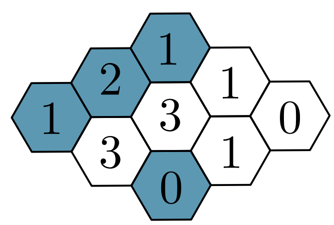


**Problema 44.** En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y $ABE$ es un triángulo equilátero. La recta $DE$ corta a $BC$ en $F$, y $G$ es el punto sobre $EB$ para el cual $FG$ y $DF$ son perpendiculares. Encuentre $\frac{|FG|}{|EC|}$.




**Problema 45.** Algunos de los hexágonos de la figura que se muestra abajo a la izquierda se sombrean. Luego, en cada uno de los hexágonos se pone la cantidad de hexágonos sombreados que comparten al menos un lado con ese hexágono, y se considera la suma de todos los números (ver el ejemplo en la figura de la derecha en que la suma es $12 = 1+2+3+1+3+0+1+1+0$). ¿De cuántas formas es posible sombrear algunos de los hexágonos de tal forma que la suma sea 12?

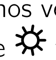




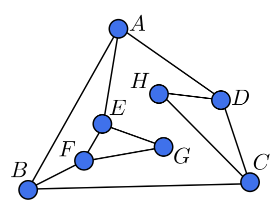
# Soluciones de los Problemas

**Solución 1.** El perímetro del triángulo original es $6+10+11=27$, así que cada lado del triángulo equilátero mide $\frac{27}{3}=9$. La respuesta es (a).

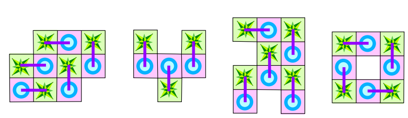
**Solución 2.** Como el jueves es 2, también caen en jueves los días $2+7=9$, $2+14=16$, $2+21=23$ y $2+28=30$. El 27 cae en lunes. La respuesta es (a).

**Solución 3.** Tenemos que  y  son números pares pues cada uno es la suma de dos números iguales. Entonces de la primera igualdad deducimos que  vale 2 y  vale 4. De aquí ya podemos ver, gracias a la segunda igualdad y a que los números varían entre 1 y 5, que  vale 1 y  vale 5 (observamos aquí que también la tercera igualdad se cumple). Entonces, el que vale 3 es . La respuesta es (a).

**Solución 4.** Etiquetemos los focos como se muestra en la figura. Los focos $G$ y $H$ tienen solamente dos vecinos, lo que implica que debe tocarse un foco en cada uno de los triángulos en los que ellos se encuentran. Entonces se tienen que tocar dos focos o más. Por otro lado, bastan 2 focos porque es fácil verificar que tocando $E$ y $C$ es posible encender todos los focos. La respuesta es (e).




**Solución 5.** La segunda figura es imposible puesto que tiene 8 estrellas y sólo 6 cuadros sombreados. Las demás son posibles y en el dibujo aquí abajo se ha esquematizado cómo lograrlo poniendo un segmento sobre la ficha. La respuesta es (d).

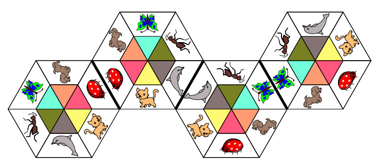


**Solución 6.** El lado mayor del rectángulo grande mide 20 cm, que equivale a cinco veces la longitud del lado menor de cada rectángulo pequeño; así, el lado menor de cada rectángulo pequeño mide 4 cm. El perímetro del rectángulo grande mide $6 \times 10 + 4 \times 4 = 76$ cm. La respuesta es (c).

**Solución 7.** Escribamos $A$, $B$ y $C$ en lugar de los números tachados, de forma que la operación quede $A3 \times 2B = 3C2$, donde debemos sustituir $A$, $B$ y $C$ por dígitos. Observemos que la única posibildidad para que el resultado de la multiplicación termine en 2 es sustituir $B$ por 4. Como el único número de la forma $A3$ que al multiplicarse por 24 su resultado está entre 300 y 399 es 13, tenemos que $A$ es 1. Como $13 \times 24 = 312$ se tiene también que $C = 1$. Luego, la suma de los números tachados es $1 + 4 + 1 = 6$. La respuesta es (a).

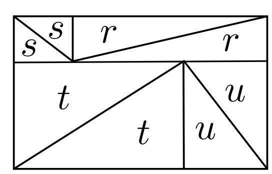
**Solución 8.** La longitud del lado del cuadrado mediano es de $6 + 2 = 8$ cm. La longitud del lado del cuadrado más grande es de $8 + 6 - 2 = 12$ cm. La respuesta es (c).

**Solución 9.** Se muestra en la figura cómo quedan las reflexiones. La respuesta es (b).



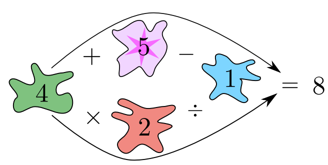
**Solución 10.** Para lograr en un principio el mismo número de hombres que de mujeres hacen falta 8 mujeres. Así habrá 38 personas. Como debe haber 8 equipos, el número de personas debe ser múltiplo de 8, pero $\frac{40}{8} = 5$ así que no podría haber el mismo número de hombres que de mujeres. Entonces deben juntarse 48 personas y así en cada uno de los 8 equipos quedarían 3 hombres y 3 mujeres. Entonces faltan $48 - (19 + 11) = 18$ personas (5 hombres y 13 mujeres). La respuesta es (d).

**Solución 11.** Dividiendo la figura como se muestra, es fácil ver que la región sombreada es igual a la región blanca (los triángulos marcados con las mismas letras son iguales). Así, el área del rectángulo es el doble que la suma de las áreas de los triángulos, es decir, es $20\,\text{cm}^2$. La respuesta es (b).



**Solución 12.** Las únicas posibilidades para dividir el rectángulo en 40 cuadritos iguales es a partir de cuadrículas de $1 \times 40$, $2 \times 20$, $4 \times 10$ y $5 \times 8$, donde una de las dimensiones es la cantidad de renglones y la otra la cantidad de columnas. Como la cantidad de columnas debe ser impar y mayor que 1, la única posibilidad es que se haya dividido en 5 columnas y 8 renglones. De esta manera, tenemos que Sunya iluminó una columna con 8 cuadritos. La respuesta es (c).

**Solución 13.** El número que se resta debe ser 1 o 2 porque la suma máxima de dos números entre 1 y 5 es $5 + 5 = 10$. Por otro lado, el número arriba a la izquierda no puede ser 5, porque al multiplicar 5 y luego dividir no podría obtenerse 8. Entonces la única posibilidad es que el número que se resta sea 1 y que la operación arriba sea $4 + 5 - 1 = 8$. La figura completa queda como se muestra en la figura y la respuesta es 5.




La respuesta es (e).

**Solución 14.** La diagonal $AC$ divide al cuadrilátero $AMCN$ en dos triángulos iguales. Así, el área del triángulo $ANC$ es la mitad del área de $NBC$. Como ambos triángulos tienen la misma altura desde $C$, $AN$ debe medir la mitad de $NB$. Dado que $AB$ mide 3, tenemos que $NB = 2$. La respuesta es (b).

**Solución 15.** Si la afirmación de la primera puerta es verdadera también lo es la de la segunda, lo cual no puede suceder. Luego, el león no está tras la primera puerta. Como sabemos que la tercera afirmación es falsa, la segunda debe ser la verdadera. De lo anterior deducimos que el león no está tras la segunda puerta. La única posibilidad es que el león esté tras la tercera puerta. La respuesta es (c).

**Solución 16.** Dada una circunferencia, la distancia de su centro a cada uno de los lados del rectángulo que toca es la medida de su radio, que resulta ser $\frac{7}{2}$. Entonces, la distancia entre los centros mide $11 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 4$. La respuesta es (d).

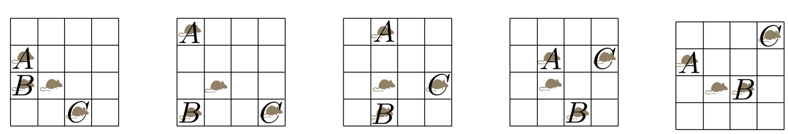
**Solución 17.** Como ningún número primo termina en 4, uno de los números de la lista debe ser de dos cifras y empezar con 4, es decir, debe ser 41 o 43. Si 43 está en la lista, con los números restantes no hay posibilidad de escribir ningún número primo que contenga al 1 porque 21 y 51 no son primos, y 31 repetiría el 3 con 43. Así, 41 debe estar en la lista, y ésta se puede completar, por ejemplo, con 2, 3 y 5. La respuesta es (d).

**Solución 18.** Si sumamos todos los resultados de los renglones y todos los resultados de las columnas obtendremos dos veces la suma de los números del 1 al 9, es decir, 90. Como entre los 5 resultados que se mencionan la suma es 75, el resultado faltante debe ser 15. En la figura se muestra un posible acomodo en el que aparecen las sumas mencionadas. La respuesta es (c).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 |
| 3 | 5 | 6 |
| 9 | 4 | 2 |

**Solución 19.** Como $A + B = C + D$, estas sumas deben ser 500. Además $C$ es más grande que $B$ y $D$, de donde $C$ es 300 o 400. Si $C = 300$, como $C + D = 500$, entonces $D = 200$. Como $B + D = C$ tenemos que $B = 100$, así que $A = 400$ (pues $A + B = 500$). Si $C = 400$, entonces $D = 100$, $B = 300$ y $A = 200$. En ambos casos resulta que la bola $A$ pesa el doble que la bola $D$. Ninguna de las otras afirmaciones es verdadera, en ningún caso. La respuesta es (e).

**Solución 20.** Sólo hay una celda que está siempre ocupada y es la que está en la segunda columna y tercer renglón, de manera que ésa corresponde al ratón dormido y la opción (e) es imposible. La opción (b) tampoco es posible pues el ratón en el cuarto renglón no tiene de dónde haber llegado, y lo mismo ocurre con la opción (c) con respecto al ratón de la primera columna. La opción (d) no es posible pues, para ella, el ratón de la segunda columna y segundo renglón debería haberse movido hacia la izquierda, y entonces no habría habido forma de cubrir ambas posiciones de la tercera y cuarta columnas. Abajo se muestran los movimientos posibles para llegar a la opción (a). La respuesta es (a).




posición inicial   1$^{er}$ silbido   2$^{o}$ silbido   3$^{er}$ silbido   4$^{o}$ silbido

**Solución 21.** Analicemos las distintas posibilidades de acuerdo a si $A$ gana, empata o pierde.

Si $A$ gana, entonces son seguro ciertas (1), (2), (3) y (4), de manera que no es posible esto.

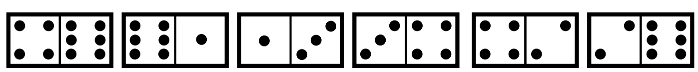
Si $A$ empata, las únicas que pueden ser ciertas son (2) y (5), de manera que tampoco es posible.

La conclusión es que $A$ pierde. Como sabemos que 3 afirmaciones son ciertas, entonces éstas son (1), (2) y (5). Entonces se anotaron 3 goles y, como $A$ perdió pero sí anotó, el resultado fue 1-2. La respuesta es (d).

**Solución 22.** Los únicos puntos que aparecen una cantidad impar de veces son 4 y 6, así que esos deben ser los extremos de la cadena de fichas. Así, las fichas que tienen 1 punto deben ir juntas, pero acomodarlas requiere dos movimientos cuando menos, que no son suficientes para arreglar toda la cadena. Entonces se necesitan cuando menos tres movimientos para arreglar la cadena de fichas.

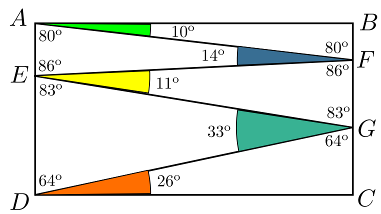
Es posible arreglar la secuencia intercambiando primero la ficha que tiene 4 y 2 puntos con la ficha que tiene 6 y 1, después la ficha que tiene 3 y 1 puntos con la que tiene 6 y 1 y, finalmente invirtiendo la ficha que tiene 3 y 1 puntos.

En el dibujo se muestra cómo quedan las fichas después de estos movimientos. La respuesta es (c).



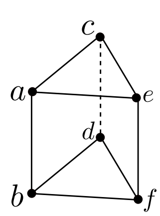
**Solución 23.** Llamemos $s$ la cantidad de intentos que hizo Lupita cuando su promedio era 3.8. Tenemos que $\frac{3.8s+3.99}{s+1} = 3.81$, de donde $s = 18$. Llamemos $d$ a la distancia que debe alcanzar en su siguiente salto, tenemos que $\frac{3.81\cdot 19+d}{20} = 3.82$, de donde $d = 4.01$. La respuesta es (c).

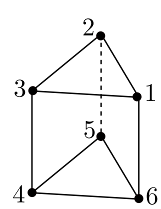
**Solución 24.** Como el ángulo $DAB$ es recto, el ángulo $EAF$ mide $90^o - 10^o = 80^o$. Fijándonos en el triángulo $AFE$, tenemos que el ángulo $AEF$ mide $180^o - 14^o - 80^o = 86^o$. Como el ángulo $ADC$ es recto, el ángulo $EDG$ mide $90^o - 26^o = 64^o$. Ahora, en el triángulo $EGD$ tenemos que el ángulo $DEG$ mide $180^o - 33^o - 64^o = 83^o$. Luego, el ángulo $FEG$ mide $180^o - 86^o - 83^o = 11^o$. La respuesta es (a).




**Solución 25.** Sea $d$ la distancia entre el primero y el segundo punto. Dado un punto $x$ que no es ninguno de los dos primeros, la distancia del primer punto a $x$ es más larga por $d$ que la distancia del segundo punto a $x$. Así, si restamos la suma de todas las distancias desde el primer punto a la suma de las distancias desde el segundo punto obtendremos $9d$. Luego, $d = \frac{2018-2000}{9} = 2$. La respuesta es (b).

**Solución 26.** Supongamos que un reordenamiento de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 que funciona está dado por $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ como se muestra en la figura de la izquierda de abajo (sabemos que $d = 5$). Entonces $a+b+c+d = c+d+e+f$, de donde $a+b = e+f$. De la misma manera tenemos que este valor también coincide con $c+d$. Pero $a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21$, así que $a+b = c+d = e+f = 7$, y de aquí que $c = 2$. Un acomodo que funciona aparece en la figura de la derecha.
La respuesta es (a).



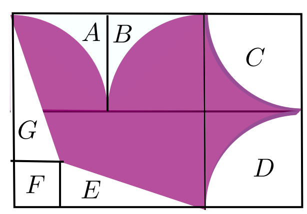
**Solución 27.** Juntos gastaron 15% + 100 % + 160 % = 275 % de lo que gastó Joaquín. Así, Joaquín gastó $\frac{5{,}500 \times 100}{275} = 2,000$. Como Armando gastó el 60% más, gastó \$3,200. La respuesta es (e).

**Solución 28.** Observemos primero que $LMN$ también es un triángulo equilátero, pues sus lados son perpendiculares a los de $ABC$. Llamemos $d$ a la longitud de $LB$. Como el ángulo $LBM$ es de 60º, el triángulo $LBM$ es la mitad de un triángulo equilátero, de donde obtenemos que $MB = 2d$. Usando Pitágoras, tenemos que $LM$ mide $\sqrt{3}d$. Tenemos entonces que cada lado del triángulo equilátero mayor mide $3d$, mientras que cada lado del triángulo equilátero menor mide $\sqrt{3}d$. Así, la razón de sus lados es $\sqrt{3}$, por lo que la razon de sus áreas es $(\sqrt{3})^2$, y de aquí que el área del triángulo sombreado es 12. La respuesta es (b).

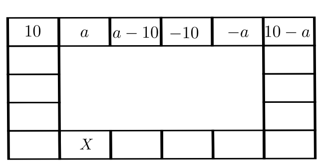
**Solución 29.** Digamos que la longitud original es $L$, y entonces, la segunda longitud es $0.4L$. La longitud que Ramiro desea conseguir es $\frac{.4+1}{2}L = 0.7L$, así que el factor que estamos buscando es $\frac{0.7}{0.4} = 1.75$. La respuesta es (e).

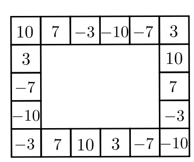
**Solución 30.** Tere recorrió $6 \times 50 = 300\,\text{m}$. Miguel recorrió el triple, o sea, 900 m. Como Miguel dio cinco vueltas a la alberca, recorrió 10 veces la suma del largo y el ancho de la alberca. Así, el ancho de la alberca es $\frac{900}{10} - 50 = 40\,\text{m}$. La respuesta es (d).

**Solución 31.** En la figura, las regiones $A$ y $C$ tienen juntas la misma área que 4 cuadritos. Lo mismo pasa con las regiones $B$ y $D$. Las regiones $G$ y $E$, juntas, tienen la misma área que 3 cuadritos. Así, el área que no está sombreada es igual al área de $4 + 4 + 3 + 1 = 12$ cuadritos. Luego, el área sombreada debe ser igual al área de $24 - 12 = 12$ cuadritos. Así, el rectángulo tiene el doble de área que la región sombreada, es decir, 384 cm$^2$.
La respuesta es (a).

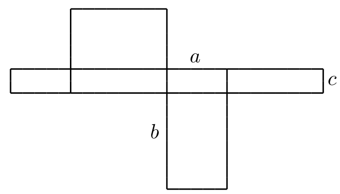



**Solución 32.** Llamemos $a$ al número a la derecha del 10. Es fácil ver que el número a la derecha de $a$ debe ser $a - 10$. Completemos así el primer renglón del tablero. De esto se deduce que $a = 7$. La figura completa se muestra a la derecha. La respuesta es (e).



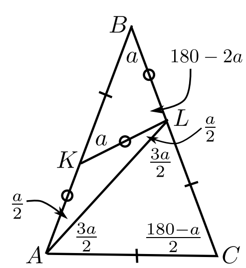
**Solución 33.** Llamemos $a$, $b$ y $c$ a las dimensiones de la caja, según se muestra en el dibujo. Tenemos que $2a+2b=26$, así que $a+b=13$. Tenemos también que $10+7=(b+c)+(c+a)=13+2c$, de donde $c=2$. Luego, $b=10-2=8$, $a=7-2=5$ y el volumen de la caja es $8\times 5\times 2=80$ cm$^3$.
La respuesta es (c).




**Solución 34.** *Primera forma.* Cada persona hace 75 llaveros en 9 horas, de manera que cada hora hace $\frac{75}{9}$ llaveros. Entonces 6 personas logran $\frac{6\times 75}{9}=50$ llaveros por hora. Para producir 300 llaveros necesitan trabajar 6 horas.

*Segunda forma.* El número de personas se incrementó en 50%, de manera que el número de horas debe reducirse de manera que al aumentar 50% sea 9, así que es el resultado es 6 horas pues $\frac{9}{1.5}=6$.
La respuesta es (d).

**Solución 35.** Llamemos $a$ a la medida del ángulo $ABC$. Como $BL=LK$ tenemos que $BKL$ mide $a$, $BLK$ mide $180^o-2a$ y $LKA$ mide $180^o-a$. Tracemos el segmento $LA$. Como la suma de los ángulos del triángulo $AKL$ es $180^o$, el ángulo $KAL$ mide $\frac{a}{2}$, al igual que el ángulo $KLA$ (pues $KL=KA$).




Restando a $180^o$ las medidas de los ángulos $BLK$ y $KLA$, se obtiene que $ALC$ mide $\frac{3a}{2}$. Como $AB=BC$, tenemos que $LC=BK=AC$ y, por tanto, el ángulo $LAC$ mide también $\frac{3a}{2}$. Como la suma de los ángulos del triángulo $LAC$ es $180^o$, el ángulo $LCA$ mide $180-3a$. Finalmente, dado que $a+(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2})+180-3a=180^o$, obtenemos que $a=36^o$.
La respuesta es (c).

**Solución 36.** Forzosamente en cada uno de las subcuadrículas de $2 \times 2$ de las esquinas debe haber al menos un 0, así que la máxima suma es menor o igual que 21. Vemos que sí es posible lograr 21 como suma en la configuración mostrada a la derecha.
La respuesta es (b).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Solución 37.** $8^8 + 8^8 = 2 \cdot 8^8 = 2 \cdot (2^3)^8 = 2 \cdot 2^{24} = 2^{25}$. La respuesta es (a).

**Solución 38.** Cuando no hay ceros juntos es porque al menos un 1 está entre ellos. El uso más eficiente de los números 1 que separe a los ceros es cuando los unos también están separados. De esta manera, si se alternan los ceros con los unos empezando y terminando con 0, se produce una cadena lo más larga posible sin ceros juntos. Una secuencia $0101\cdots010$ que repita 01 cien veces y termine en 0 es lo más largo posible sin ceros consecutivos y tiene 201 términos. Cualquier secuencia con 202 términos contendrá dos ceros seguidos.
La respuesta es (e).

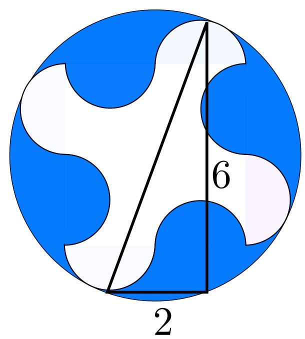
**Solución 39.** Podemos escribir los números como $\frac{10^{2018}}{5} - 2$, $\frac{10^{2018}}{5} - 1$, $\frac{10^{2018}}{5}$, $\frac{10^{2018}}{5} + 1$, $\frac{10^{2018}}{5} + 2$. El de enmedio es

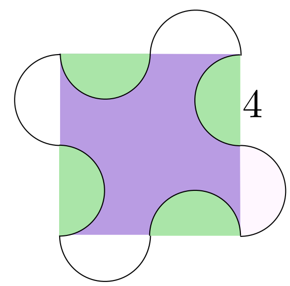
$$\frac{10^{2018}}{5} = 2 \cdot \frac{10^{2018}}{2 \cdot 5} = 2 \cdot 10^{2017}.$$

La respuesta es (e).

**Solución 40.** Como $\frac{360}{5} = 72$, cada vez que el pentágono gira un múltiplo de 72º, queda empalmado en el hoyo. Veamos cuál es el primer número entero $k > 0$ para el que $21k$ es múltiplo de 72. Como $21 = 3 \times 7$ y $72 = 2^3 \times 3^2$, ese número es $k = 2^3 \times 3 = 24$. Entonces se necesitan 24 pasos para que el pentágono vuelva a empalmar con el hoyo. Ahora necesitamos saber dónde queda el vértice superior del pentágono a los 24 pasos, es decir, necesitamos saber cuál es el entero $r$ tal que $72r = 21 \times 24$. Esta ecuación la reescribimos como $2^3 \times 3^2 r = 3 \times 7 \times 3 \times 2^3$ y, cancelando, $r = 7$. Entonces el vértice queda girado 2 veces 72º es decir, en la posición (a).
La respuesta es (a).

**Solución 41.** Consideremos el triángulo rectángulo que se muestra en la figura y observamos que es un triángulo rectángulo cuyos lados miden 2 y 6, como se muestra. Entonces, por el teorema de Pítágoras, la hipotenusa del triángulo mide $\sqrt{4+36}\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, así que el radio del círculo es $\sqrt{10}$ y el área del círculo es $10\pi$. Por otro lado, moviendo medios círculos como se muestra en la figura, formamos un cuadrado de lado 4, de manera que el área de la parte no sombreada interior al círculo es 16. El área sombreada es $10\pi - 16$. La respuesta es $(10\pi - 16)$.




**Solución 42.** Escribamos $i$ por cada uno de los dígitos impares y $p$ por cada dígito par. Para que la suma de 3 números consecutivos no sea par, se necesita que los 3 sean impares o que 2 sean pares y el otro impar. Entre los números del 2 al 8 hay 4 pares y 3 impares, de manera que la única posibilidad es que el número sea $ippippi$. Ahora, digamos que un número es del tipo $\overline{0}$ si deja deja residuo 0 al dividirlo entre 3 (en nuestro caso, son los dígitos 3 y 6). De igual manera, consideramos los números del tipo $\overline{1}$ (aquí son 4 y 7) y los del tipo $\overline{2}$ (5 y 8). Las únicas posibilidades de que tres números consecutivos sumen múltiplo de 3 son cuando aparecen juntos $\overline{0}$, $\overline{1}$ y $\overline{2}$ en algún orden, o cuando los tres números tienen el mismo residuo.

Buscamos el menor de los números $ippippi$, así que probemos con los números de la forma $3pp5pp7$. Observemos que 3 es del tipo $\overline{0}$, 5 es del tipo $\overline{2}$, y 7 es del tipo $\overline{1}$. Considerando que entre los dígitos pares hay uno del tipo $\overline{0}$ (el 6), uno del tipo $\overline{1}$ (el 4) y dos del tipo $\overline{2}$ (el 2 y el 8), entonces 12 posibilidades para los tipos de los números:

$$
\begin{array}{rc}
(1) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1} \\
(2) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{1} \\
(3) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{1} \\
(4) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1} \\
(5) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(6) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(7) & \overline{0}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{1} \\
(8) & \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1} \\
(9) & \overline{0}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(10) & \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(11) & \overline{0}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(12) & \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}
\end{array}
$$

Observamos que en los casos (3) y (9) son los únicos que no tienen tres números del tipo $\overline{2}$ juntos ni tres números seguidos de distinto tipo. Como buscamos el menor de los números, éste está dado por el caso (3) eligiendo 2 como el primer número par de tipo $\overline{2}$. El número buscado es 3265847. La respuesta es (3265847).

**Solución 43.** Buscamos que las piezas tengan área $\frac{28}{2} = 14$. Podemos notar entonces que el problema equivale a ver de cuántas maneras puede escribirse el número 14 como suma de 4 enteros entre 1 y 6: el primer número nos diría cuántos cuadros quedan a la izquierda en el renglón inferior, el segundo número los que quedan a la izquierda en el renglón que le sigue, etcétera (los números en el ejemplo válido que se da en el enunciado serían $(3, 5, 5, 1)$). Las colecciones de 4 números que cumplen esto en los que los números están ordenados de mayor a menor son las siguientes:

$$
\begin{array}{lcl}
(A) & \cdots & (6, 6, 1, 1) \\
(B) & \cdots & (6, 5, 2, 1) \\
(C) & \cdots & (6, 4, 3, 1) \\
(D) & \cdots & (6, 4, 2, 2) \\
(E) & \cdots & (6, 3, 3, 2) \\
(F) & \cdots & (5, 5, 3, 1) \\
(G) & \cdots & (5, 5, 2, 2) \\
(H) & \cdots & (5, 4, 4, 1) \\
(I) & \cdots & (5, 4, 3, 2) \\
(J) & \cdots & (5, 3, 3, 3) \\
(K) & \cdots & (4, 4, 4, 2) \\
(L) & \cdots & (4, 4, 3, 3).
\end{array}
$$

Ahora tenemos que contar el orden posible de los números en cada caso.

Cuando todos los números son distintos, entonces hay $4! = 24$ formas distintas de acomodarlos, lo cual ocurre en (B), (C) e (I), así que tenemos $24 \cdot 3 = 72$ posibilidades.

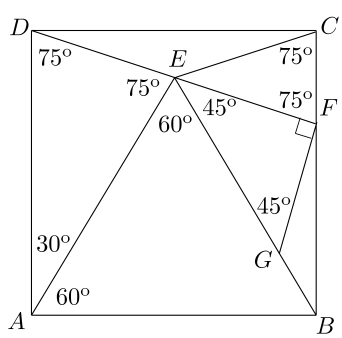
Cuando hay dos números distintos y cada uno se repite dos veces, como es el caso de (A), (G) y (L), entonces las posibilidades de orden son 6, de manera que aquí hay $6 \cdot 3 = 18$ más.

Cuando hay tres números distintos (y uno de ellos aparece dos veces), como es el caso de (D), (E), (F) y (H), entonces las posibilidades de orden son 12, de manera que aquí hay $12 \cdot 4 = 48$ posibilidades.

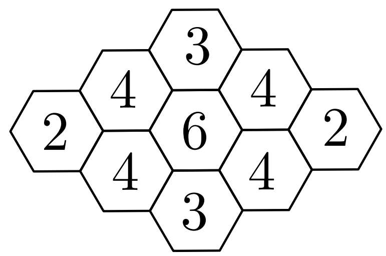
El último caso es cuando hay dos números distintos y uno aparece 3 veces, como en (J) y (K), en cada uno de los cuales hay 4 posibilidades de orden y tenemos $4 \cdot 2 = 8$ más.

En total hay $72 + 18 + 48 + 8 = 146$.
La respuesta es (146).

**Solución 44.** Primero recordemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden 60º.
Ahora observemos que $|AD| = |AE|$, así que el triángulo $ADE$ es isósceles y, como $\angle DAE = 30º$, entonces $\angle ADE = \angle DEA = \frac{180º-30º}{2} = 75º$.
También tenemos que $\angle FEB = 180º - 75º - 60º = 45º$. Como $EF$ y $FG$ son perpendiculares, deducimos que $\angle FGE = 45º$ y entonces $|FG| = |EF|$. Por otro lado, por simetría, $\angle ECB = 75º$. También, por ángulos entre paralelas tenemos que $\angle EFC = 75º$, así que el triángulo $ECF$ es isósceles con $|EC| = |EF|$ y, por lo que, $|EC| = |FG|$. La respuesta es (1).



**Solución 45.** Cada hexágono sombreado contribuye en 1 a los hexágonos con los que comparte un lado, así que si a cada hexágono le asignamos el número de hexágonos con los que comparte lado, entonces el problema es equivalente a ver de cuántas formas se puede sumar 12 con esas asignaciones. Las asignaciones se muestran en la figura de la derecha.




Las formas de sumar 12 usando a lo más dos números 2, dos números 3, cuatro números 4 y un número 6 son las siguientes:

* Tipo 1. $6+4+2$. Aquí hay cuatro formas de escoger el 4 y dos formas de escoger 2, así que en total son 8.

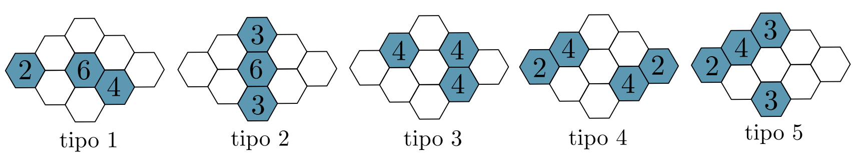
* Tipo 2. $6+3+3$. Sólo hay una forma.

* Tipo 3. $4+4+4$. Hay 4 formas.

* Tipo 4. $4+4+2+2$. Hay 6 formas de escoger los números 4 y una forma de escoger los números 2, de manera que de este tipo hay 6.

* Tipo 5. $4+3+3+2$. Hay 4 formas de escoger el 4, una única de escoger los dos números 3 y 2 formas de escoger el 2, de manera que de este tipo hay 8.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de cada tipo.




En total hay $8+1+4+6+8=27$. La respuesta es (27).

# Concentrado de Respuestas

1. (a)
2. (a)
3. (a)
4. (e)
5. (d)
6. (c)
7. (a)
8. (c)
9. (b)
10. (d)
11. (b)
12. (c)
13. (e)
14. (b)
15. (c)
16. (d)
17. (d)
18. (c)
19. (e)
20. (a)
21. (d)
22. (c)
23. (c)
24. (a)
25. (b)
26. (a)
27. (e)
28. (b)
29. (e)
30. (d)
31. (a)
32. (e)
33. (c)
34. (d)
35. (c)
36. (b)
37. (a)
38. (e)
39. (e)
40. (a)
41. ($10\pi - 16$)
42.( 3265847)
43.( 146)
44.( 1)
45.( 27)

# Información de Contacto

**Olimpiada Mexicana de Matemáticas:**
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
Ciudad de México
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: http://www.ommenlinea.org/

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

# Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Victor Manuel Barrero Calderón

José Alfredo Cobián Campos

David Cossío Ruiz

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Leonardo Ariel García Morán

Luis Miguel García Velázquez

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Leonardo Martínez Sandoval

Daniel Perales Anaya

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Carlos Jacob Rubio Barrios

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Rita Vázquez Padilla

Hugo Villanueva Méndez.