Problemas para la

18^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
Julio César Aguilar Cabrera
María Luisa Pérez Seguí
María Elena Aguilera Miranda
David José Mireles Morales

2004

Luis Miguel García Velázquez

Profesor del Departamento de Matemáticas,
ITESM - Campus Morelia

Julio César Aguilar Cabrera

Egresado del Posgrado en Matemáticas,
UNAM - Universidad Michoacana

María Luisa Pérez Seguí

Profesora-Investigadora, Esc. Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana

María Elena Aguilera Miranda

Egresada del Posgrado en Matemáticas,
UNAM - Universidad Michoacana

David José Mireles Morales

Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas,
Facultad de Ciencias de la UNAM

Contenido

Presentación . . . . **i**

Etapas de la Olimpiada ii

Resumen de Resultados ii

Resultados de las Delegaciones que han representado a México ii

Resultados en el Concurso Nacional de la 17a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas v

Material de estudio e información sobre la Olimpiada. . . vii

Enunciados de los problemas **1**

Soluciones de los Problemas **23**

Concentrado de Respuestas **43**

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 18^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2005: la XLVI Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en México durante el mes de julio, la XX Olimpiada Iberoamericana a celebrarse en septiembre en Ecuador y la VII Olimpiada de Centroamérica y el Caribe que se llevará a cabo en Panamá en el mes de julio.

En la 18^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1985. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2004-2005, y para el 1^o de julio del año 2005 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

Algunos de los problemas que se presentan en este folleto aparecieron en las primeras etapas de las Olimpiadas de Matemáticas. La intención de este folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas Olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela. Son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Esta publicación incluye una selección de los problemas que formaron parte de los exámenes del Canguro Matemático Mexicano y de los propuestos por el Comité Nacional para las etapas semifinal y final de los Concursos Estatales. Otros problemas de los que aquí se presentan formaron parte de los publicados en los 5 problemarios de la Olimpiada Estatal de Matemáticas en Jalisco entre 1996 y 2000, o bien fueron inspirados por ellos.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el Estado de México en noviembre del 2004, y en él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2005. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Durante el mes de abril se distribuyen los Exámenes de Invitación y los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima y Guanajuato.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y Centroamericana y del Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	86	42

En 2003, la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional estuvo integrada por los alumnos: Marco Figueroa (de Sonora), Antonio Olivas (de Sonora), Ana Paula Estrada (de Jalisco), Yoalli Hidalgo (de Jalisco), Octavio Arizmendi (de Morelos) y Carlos Vargas (de Jalisco). Se obtuvieron tres medallas de bronce (Marco Figueroa, Antonio Olivas y Ana Paula Estrada) y una mención honorífica (Yoalli Hidalgo). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de plata, 21 medallas de bronce y 17 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2003 obtuvieron medalla: una de oro (Marco Figueroa de Sonora), una de plata (Antonio Olivas de Sonora) y dos de bronce (Adrián Chi de Yucatán y Carlos Vargas de Jalisco). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 10 medallas de oro, 22 medallas de plata, 21 medallas de bronce y 3 menciones honoríficas. En la 11ª Olimpiada Iberoamericana, celebrada en Costa Rica, México obtuvo la Copa Puerto Rico, que se da cada año al país con el mayor progreso relativo.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1

En la V Olimpiada Mexicana de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo dos medallas de oro (Joshua Hernández de Coahuila y Gonzalo Montalván de Puebla) y una de plata (Rosemberg Toalá de Chiapas) ubicándose así la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 7 medallas de oro, 6 de plata y 2 de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 17a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2003 se llevó a cabo en Guanajuato, Gto., el 17º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora,
Hector Daniel García Lara de Chihuahua,
Iván Joshua Hernández Máynez de Coahuila,
Rosemberg Toalá Enríquez de Chiapas,
Gonzalo Arturo Montalván Gámez de Puebla,
Carlos Vargas Obieta de Jalisco,
Federico Bribiesca Argomedo de Michoacán,
Rafael Díaz Cruz del Distrito Federal,
Guillermo Enrique Carro Prado de Nuevo León,
José Miguel Cisneros Franco de Veracruz,
Francisco Javier Ibarra Goycoolea de Baja California,
Cristos Alberto Ruíz Toscano de Jalisco,
Guevara Manuel Ángel Guevara López de Zacatecas,
Luis Alberto Martínez Chigo de Veracruz,
Arturo Aguirre Escobar del Distrito Federal y
David Guadalupe Torres Flores de Guanajuato.

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe fueron:

Iván Joshua Hernández Máynez de Coahuila,
David Guadalupe Torres Flores de Guanajuato,
Pablo Soberon Bravo de Morelos,
Isaac Buenrostro Morales de Jalisco y
Johnnatan Eliud Rincón Galván de Nuevo León.

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 17º Concurso Nacional:

1. Jalisco
2. Puebla
3. Chihuahua
4. Distrito Federal

5. Sonora
6. Morelos
7. Nuevo León
8. Guanajuato
9. Querétaro
10. Veracruz

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Premio Quanaxhuato y fue ganado por el Distrito Federal. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Veracruz y Tlaxcala.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://erdos.fciencias.unam.mx/omm`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Enero 2004

Enunciados de los problemas

Problema 1. En el salón de clase de mi hermanito hay 7 niños más que niñas. Si en su clase hay el doble de niños que de niñas, ¿cuántas compañeras de clase tiene mi hermanito?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

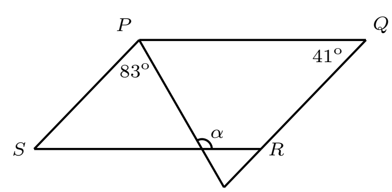
Problema 2. Paty escoge dos números de la lista $-9, -7, -5, 2, 4, 6$ y los multiplica. ¿Cuál es el menor resultado que puede obtener?

(a) -63 (b) -54 (c) -18 (d) -10 (e) 8

Problema 3. Si Carlitos tuviera 24 canicas más tendría el triple de las que tiene ahora. ¿Cuántas canicas tiene Carlitos?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 18

Problema 4. En la figura, $PQRS$ es un paralelogramo. ¿Cuánto vale α?



(a) 139° (b) 138° (c) 124° (d) 98° (e) 97°

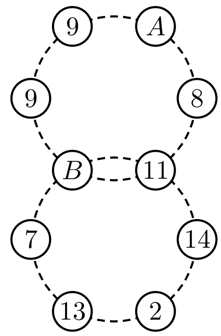
Problema 5. Verónica dibuja flores: una azul, una verde, una roja, una amarilla, una azul, una verde, etc. ¿De qué color es la 29a flor?

(a) azul (b) verde (c) rojo (d) amarillo (e) no se puede saber

Problema 6. La Señora Rodríguez tiene 5 hijas, cada una de ellas tiene 4 hijas y cada una de ellas tiene 3 pequeñas niñas. ¿Cuántas descendientes tiene la Señora Rodríguez?

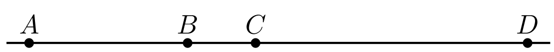
(a) 16 (b) 18 (c) 30 (d) 50 (e) 85

Problema 7. En la figura se escriben números en los lugares de A y B de manera que en cada círculo la suma sea la misma. ¿Qué número debe colocarse en el lugar de A?



(a) 9 (b) 10 (c) 13 (d) 16 (e) 17

Problema 8. En la figura las distancias son: $AC = 10$ m, $BD = 15$ m y $AD = 22$ m. Encuentra la distancia BC.

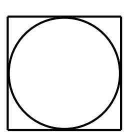


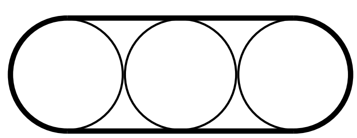
(a) 1 m (b) 2 m (c) 3 m (d) 4 m (e) 5 m

Problema 9. Edgar Rodrigo quiere comprar chocolates. Si comprara 5 chocolates le sobrarían 10 pesos, mientras que para comprar 7 chocolates tendría que pedir prestados 22 pesos. Si sabemos que todos los chocolates cuestan lo mismo, ¿Cuánto cuesta cada chocolate?

(a) 11 (b) 16 (c) 22 (d) 26 (e) 32

Problema 10. El área del cuadrado de la figura es a y el área de cada uno de los círculos es b. ¿Cuánto vale el área encerrada dentro de la línea gruesa?



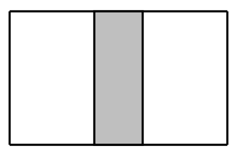


(a) $3b$ (b) $a + b$ (c) $a + 2b$ (d) $3a$ (e) $2a + b$

Problema 11. En un edificio se numeraron todas las puertas de las oficinas utilizando placas que contenían un dígito cada una (por ejemplo, al numerar la 14a puerta se usaron dos placas, una con el número 1 y otra con el 4). Si en total se utilizaron 35 placas, ¿cuántas puertas hay?

(a) 14 (b) 19 (c) 22 (d) 28 (e) 35

Problema 12. La figura representa dos cuadrados que miden 11×11 que se han encimado para formar un rectángulo de 11×18. ¿Cuál es el área de la región sombreada (en la que los dos cuadrados se traslapan)?

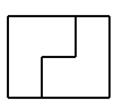


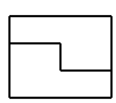
(a) 11 (b) 22 (c) 33 (d) 44 (e) 55

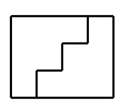
Problema 13. A la mitad de un partido de futbol el Morelia iba ganándole al América con un marcador de 3 goles a 2. Si en el segundo tiempo anotaron 7 goles entre ambos equipos, ¿cuál de los siguientes **NO** pudo ser el resultado del partido?

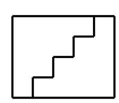
(a) Empate
(b) América ganó por 2 goles
(c) América ganó por 4 goles
(d) Morelia ganó por 3 goles
(e) Morelia ganó por 2 goles

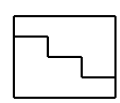
Problema 14. Un rectángulo de madera de 30cm $\times$ 24cm se cortó en dos piezas iguales, de manera que estas piezas puedan reensamblarse para formar otro rectángulo de 40cm $\times$ 18cm. ¿Cuál de las siguientes figuras muestra el rectángulo original dividido en las dos piezas?


(a)


(b)


(c)

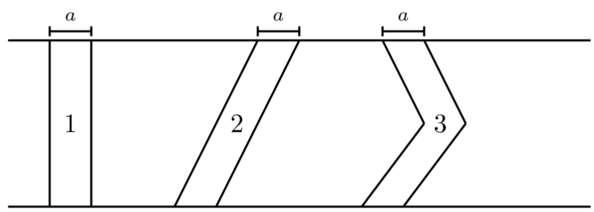

(d)


(e)

Problema 15. Un pedazo de papel tiene forma de octágono regular. ¿Cuál es el número máximo de veces que puede doblarse este papel de tal manera que en cada doblez las piezas dobladas empalmen perfectamente una sobre la otra?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 8

Problema 16. En la figura, las bandas 1, 2 y 3 que conectan las dos paralelas tienen la misma anchura horizontal a. ¿Cuál de estas bandas tiene mayor área?

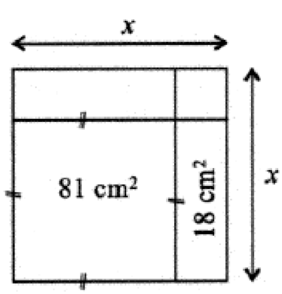


(a) Las tres bandas tienen la misma área
(b) La banda 1
(c) La banda 2
(d) La banda 3
(e) Depende de la medida a.

Problema 17. En un torneo la mitad de los competidores se eliminan en cada ronda (si al principio de la ronda el número de competidores es impar, uno de ellos se selecciona al azar y se queda para la siguiente ronda). Si empiezan 100 competidores, ¿cuántas rondas deben pasar para que quede un ganador final?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 18. ¿Cuánto vale x en la siguiente figura?

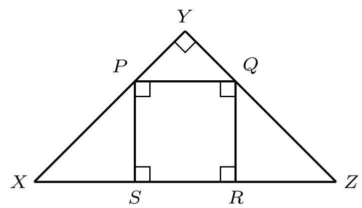


(a) 2 cm (b) 7 cm (c) 9 cm (d) 10 cm (e) 11 cm

Problema 19. Marisa tiene 4 blusas, 3 faldas y 2 pantalones. ¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer para vestirse?

(a) 9 (b) 10 (c) 20 (d) 22 (e) 24

Problema 20. El diagrama muestra un triángulo rectángulo isósceles XYZ con un cuadrado $PQRS$ en su interior. Si el área del triángulo XYZ es 1, ¿Cuál es el área del cuadrado $PQRS$?



(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$ (e) $\frac{2}{3}$

Problema 21. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener sumando dos números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$?

(a) 11 (b) 15 (c) 17 (d) 18 (e) 20

Problema 22. Tres amigos fueron a la dulcería. Miguel gastó 29 pesos y compró 1 caramelo y 2 paletas. Humberto gastó 43 pesos y compró 1 caramelo y 2 chocolates. ¿Cuánto gastó David si compró 1 caramelo, 1 paleta y 1 chocolate?

(a) 31 pesos (b) 33 pesos (c) 36 pesos (d) 38 pesos (e) 39 pesos

Problema 23. ¿Cuál de las siguientes es la máxima cantidad de puntos en los que se intersectan 4 líneas?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 24. ¿Cual de las siguientes expresiones es impar para cualquier entero n?

(a) $2003n$ (b) $n^2 + 2003$ (c) n^3 (d) $n + 2004$ (e) $2n^2 + 2003$

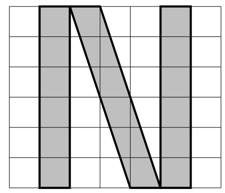
Problema 25. ¿De cuántas formas puedo elegir 7 números del 1 al 9 de manera que al sumarlos el resultado sea un múltiplo de 3?

(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Problema 26. Cuando a un barril le falta el 30% para llenarse contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta el 30%. ¿Cuántos litros le caben al barril?

(a) 60 (b) 75 (c) 90 (d) 100 (e) 120

Problema 27. Si la longitud del lado de cada cuadrito es 1 cm, ¿cuál es el área de la letra N?



(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17 (e) 18

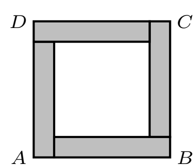
Problema 28. El precio promedio de 5 pinturas era \$6000. Cuando se vendió la más cara de las pinturas el precio promedio de las 4 restantes quedó en \$5000. ¿A cuánto se vendió la pintura más cara?

(a) \$1000 (b) \$2000 (c) \$5500 (d) \$6000 (e) \$10000

Problema 29. Rubén le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de 3 cifras lo más grande posible que sea divisible entre 8. Javier le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de 3 cifras lo menor posible y que sea divisible entre 8. ¿Cuánto vale la diferencia entre ambos números?

(a) 800 (b) 840 (c) 856 (d) 864 (e) 904

Problema 30. El cuadrado de la figura $ABCD$ está formado por 4 rectángulos grises y un cuadrado blanco. Si el perímetro de cada uno de los rectángulos mide 40 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$?.



(a) 70 cm (b) 75 cm (c) 80 cm (d) 85 cm (e) 90 cm

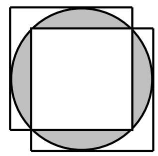
Problema 31. El promedio de estudiantes que ingresaron a una escuela durante los cuatro años del período 1999-2002 fue de 325 estudiantes por año. Si el promedio de ingreso durante los cinco años del período 1999-2003 es 20% más alto, ¿cuántos estudiantes entraron a la escuela en 2003?

(a) 390 (b) 455 (c) 520 (d) 600 (e) 650

Problema 32. Con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se forman enteros de dos cifras que sean múltiplos de 3 y de 5. ¿Cuántos enteros distintos se pueden formar?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 33. Dos cuadrados del mismo tamaño cubren a un círculo de radio 3, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?



(a) $8\pi - 8$ (b) $12\pi - 6$ (c) $9\pi - 25$ (d) $9\pi - 18$ (e) $\frac{6\pi}{5}$

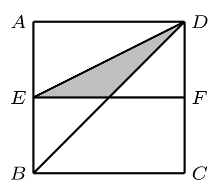
Problema 34. Isabel compró peras, manzanas y piñas (al menos una de cada una). Una pera cuesta una moneda, una manzana cuesta dos y una piña cuesta cuatro (todas las monedas tienen el mismo valor). Si compró 10 frutas y pagó con 16 monedas, ¿cuántas piñas compró?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 35. Entre los papeles del abuelo encontré una nota que dice que por 72 pavos pagó _67.9_ (la primera y la última cifra se borraron con el tiempo). ¿Cuál es la suma de los dígitos faltantes?

(a) 3 (b) 5 (c) 8 (d) 11 (e) 14

Problema 36. En la figura $ABCD$ es un cuadrado, E y F son los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y $AB = 1$. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

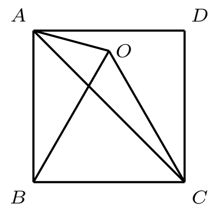


(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{7}$ (e) $\frac{1}{8}$

Problema 37. Merlín tocó con su varita mágica un mantel cuadrado y lo convirtió en un mantel rectángular. Sabiendo que dos de sus lados opuestos aumentaron un 25% y que los otros dos se redujeron un 20%, ¿en qué momento el área del mantel fue mayor?

(a) Cuando era cuadrado.
(b) Cuando se convirtió en rectángulo.
(c) Tenía la misma área siendo cuadrado que siendo rectangular.
(d) Depende del área original del mantel.
(e) No puede determinarse ni conociendo el área original del mantel.

Problema 38. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle OAC$?

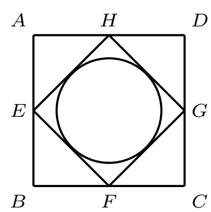


(a) 18º (b) 20º (c) 25º (d) 30º (e) 33º

Problema 39. Manejando por la carretera a velocidad constante encontré una señal que indicaba AB kilómetros (A y B son dígitos). Una hora después apareció la señal con BA kilómetros, y otra hora más tarde encontré la que indicaba $A0B$ kilómetros. Calcula $A+B$.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 40. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. Sabiendo que el círculo que está inscrito en el cuadrado $EFGH$ tiene área π, ¿cuál es el área de $ABCD$?

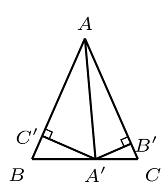


(a) $8-\pi$ (b) 8 (c) 8π (d) $\frac{\pi}{8}$ (e) $8+\pi$

Problema 41. En un jardín del zoológico hay jirafas y avestruces. Si en total hay 30 ojos y 44 patas, ¿cuántas avestruces hay en el zoológico?

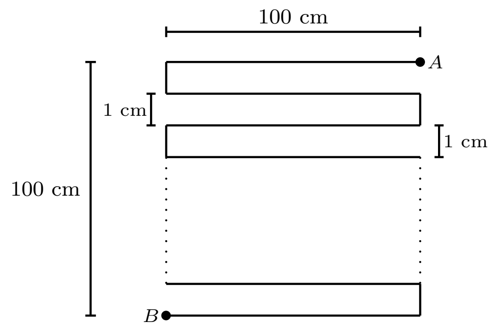
(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 42. En la figura ABC es un triángulo isóceles de área 1, $AC = 2$ y A' es cualquier punto sobre BC. Calcula $B'A' + A'C'$.



(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) 2

Problema 43. Una hormiga recorre el camino de A a B que se muestra en la figura. ¿Qué distancia caminó la hormiga?



(a) 909 cm (b) 2500 cm (c) 9900 cm (d) 10200 cm (e) 20000 cm

Problema 44. ¿Por cuál de los siguientes números debo multiplicar a 768 para que el resultado tenga la mayor cantidad de ceros al final?

(a) 2500 (b) 3125 (c) 5000 (d) 7500 (e) 10000

Problema 45. Con 6 palitos del mismo tamaño Sara Luz formó primero un hexágono regular y después un triángulo equilátero. ¿Cuántas veces es más grande el área del hexágono que la del triángulo?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{5}{2}$ (d) 4 (e) $\frac{7}{2}$

Problema 46. El código de barras de un libro está formados por barras blancas y dos tipos de barras negras: anchas y delgadas. Sabemos que el código comienza y termina con barras negras y que hay 3 barras negras anchas menos que barras blancas. ¿Cuántas barras negras delgadas hay?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

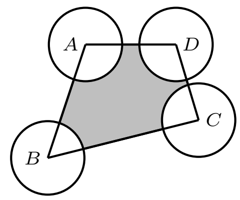
Problema 47. Luis y Mireya corren alrededor de una pista. Cada uno de ellos corre con velocidad constante: Luis corre 5 vueltas en 12 minutos, mientras que Mireya corre 3 vueltas en 10 minutos. Cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Luis se fijó que había pasado una cantidad entera de minutos. Entre los dos ¿cuántas vueltas dieron?

(a) 3 (b) 43 (c) 86 (d) 90 (e) 135

Problema 48. Utilizando muchos cuadritos idénticos entre sí se construyó un mosaico cuadrado de manera que:
I. Las diagonales del mosaico están formadas por 2001 cuadritos azules.
II. Todos los cuadritos que no están en las diagonales del mosaico son rojos.
¿Cuántos cuadritos rojos se utilizaron en el mosaico?

(a) 1000000 (b) 996000 (c) 250000 (d) 1006003 (e) 4002000

Problema 49. En la figura $ABCD$ es un cuadrilátero de área 5. Si los 4 círculos tienen radio 1 y centro en los vértices del cuadrilátero, ¿cuánto mide el área sombreada?



(a) π (b) $\frac{5}{3}$ (c) 4 (d) $5-\pi$ (e) 3π

Problema 50. Ruth escoge dos números del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y escribe en su libreta el elemento mayor de la pareja que escogió. Después de elegir todas las parejas posibles (sin repetir nunca una pareja), Ruth sumó todos los números que escribió. ¿Cuál es la suma que obtuvo?

(a) 250 (b) 330 (c) 350 (d) 430 (e) 450

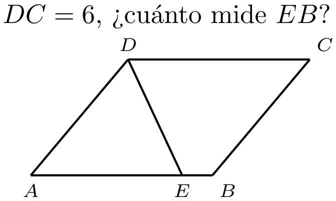
Problema 51. Considere un trapecio $ABCD$ con lados paralelos AB y CD, y M el punto medio de la diagonal BD. ¿Cuál de las siguientes parejas de triángulos podrían tener áreas distintas?

(a) $\triangle MBC$ y $\triangle MDC$ (b) $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$
(c) $\triangle ADC$ y $\triangle BDC$ (d) $\triangle AMD$ y $\triangle MBC$
(e) $\triangle MAB$ y $\triangle MAD$

Problema 52. Una jarra contiene un litro de agua y una botella un litro de naranjada. Una medida de naranjada se vacía al agua y se revuelve hasta que se mezcla perfectamente. Después, una medida de la mezcla de la jarra se vierte en la botella. ¿Qué hay más, agua en la botella o naranjada en la jarra?

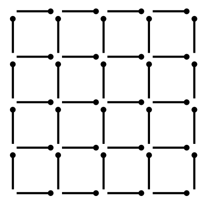
(a) Hay más agua en la botella.
(b) Hay más naranjada en la jarra.
(c) Hay tanta agua en la botella como naranjada en la jarra.
(d) Para determinarlo es necesario conocer la medida.
(e) No puede determinarse ni conociendo la medida.

Problema 53. En la figura $ABCD$ es un paralelogramo y $\angle ADE = \angle EDC$. Sabiendo que $AD = 5$ y $DC = 6$, ¿cuánto mide EB?



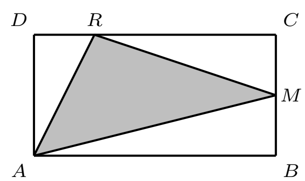
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{5}$ (e) 1

Problema 54. Con cerillos se formó la figura que se muestra. ¿Cuál es la mínima cantidad de cerillos que hay que quitar para que la figura resultante no tenga ningún cuadrado?



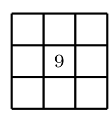
(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Problema 55. En la figura $ABCD$ es un rectángulo de área 32, M es punto medio de BC, $DR = BM$ y $2AD = AB$. ¿Cuál es el área del triángulo ARM?



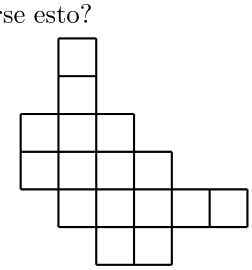
(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 18

Problema 56. ¿De cuántas formas es posible acomodar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en los cuadritos libres de la figura, de forma que los números de la primera fila sean impares y la suma de los números de cada fila y cada columna sea la misma?



(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 57. En el tablero de la figura cada cuadrito es de 1×1. Se quiere cubrir el tablero con rectángulos de 2×1 de manera que no haya dos rectángulos que se traslapen y que ningún rectángulo se salga del tablero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

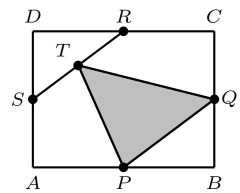


(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 6 (e) 12

Problema 58. ¿De cuántas maneras se puede escribir el número 400 como producto de dos factores enteros positivos?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 59. En la figura $ABCD$ es un rectángulo, P, Q, R y S son los puntos medios de sus lados y T es el punto medio del segmento RS. Si el área de $ABCD$ es 1, ¿cuál es el área del triángulo PQT?



(a) $\frac{5}{16}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{1}{4}$

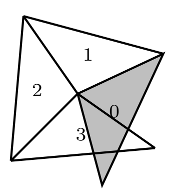
Problema 60. Yola, Tino, David, Gemma y Frank están sentados alrededor de una mesa circular de forma que la distancia entre cada dos vecinos es distinta. Cada uno dice en voz alta el nombre de su vecino más cercano. Si los nombres de Yola y Tino se escucharon dos veces (cada uno) y el de David una vez, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Yola y Tino no son vecinos.
(b) Gemma y Frank no son vecinos.
(c) Gemma y Frank son vecinos.
(d) La situación descrita es imposible.
(e) Ninguna de las anteriores es verdadera.

Problema 61. Guillermo estaba calculando el volumen de una esfera y por error usó el valor del diámetro en lugar del radio. ¿Qué debe hacer con su resultado para obtener el volumen correcto?

(a) Dividirlo entre dos. (b) Dividirlo entre cuatro.
(c) Dividirlo entre ocho. (d) Sacarle raíz cuadrada.
(e) Sacarle raíz cúbica.

Problema 62. Rodrigo tiene muchos triángulos iguales de papel (cada uno con ángulos interiores de 100º, 40º y 40º) y con ellos construye una espiral como se muestra en la figura. El primer triángulo que pone es el triángulo 0 y después va pegando los triángulos $1, 2, 3, \ldots$ sin importar si se sobreponen. ¿Qué número tendrá el primer triángulo que quede exactamente en la misma posición que el triángulo 0?

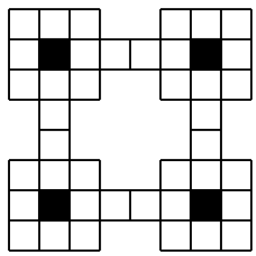


(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 18

Problema 63. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen que al dividir 399 entre n queda 14 de residuo?

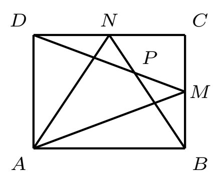
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 64. ¿Cuántas formas hay de cubrir todos los cuadritos blancos de la figura con piezas rectangulares de tamaño 2×1 sin que se traslapen y sin que se salgan del tablero?



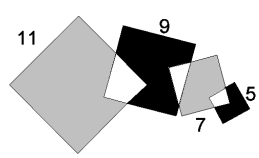
(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 64 (e) 100

Problema 65. En la figura $ABCD$ es un rectángulo, M y N son los puntos medios de BC y CD, y P es la intersección de DM y BN. Si sabemos que $\angle MAN = 30^o$, ¿cuánto vale $\angle BPM$?



(a) 15º (b) 30º (c) 45º (d) 60º (e) 70º

Problema 66. En la figura se muestran 4 cuadrados sobrepuestos con lados que miden 11, 9, 7 y 5. ¿Cuánto vale el área de las regiones grises menos el área de las regiones negras?

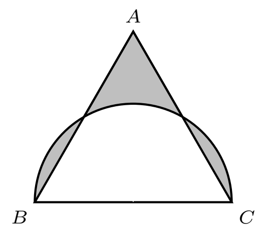


(a) 25 (b) 36 (c) 49 (d) 64 (e) 100

Problema 67. ¿Cuántos enteros n tienen la siguiente propiedad: entre los divisores positivos de n, distintos de 1 y n, el mayor es 15 veces el más pequeño.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Una infinidad (e) Otra respuesta

Problema 68. En la siguiente figura el triángulo ABC es equilátero, tiene lado 2 y la semicircunferencia tiene diámetro BC. ¿Cuánto vale el área sombreada?



(a) 1 (b) $\frac{2\pi}{5}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ (e) $\pi - 2$

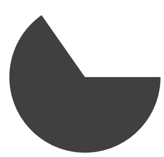
Problema 69. Mireya tiene 6 tarjetas y en cada una de ellas está escrito un número entero positivo (algunos de los números pueden ser iguales entre sí). Toma 3 tarjetas y suma los números correspondientes. Al hacer esto con las 20 posibles combinaciones de 3 tarjetas, obtiene 10 veces el resultado 18, y 10 veces el resultado 16. ¿Cuál es el número más pequeño de los que están escritos en las tarjetas?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 70. En un cuadrado de 4×4 se hace un corte con una línea recta que lo divide en dos cuadriláteros iguales. Si los cuadriláteros tienen perímetro 13, ¿cuál es la longitud del lado menor de los cuadriláteros?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{13}$ (e) 1

Problema 71. Un trozo de papel en forma de sector circular (como el que se muestra en la figura) se dobla para formar un cono. Si la altura del cono es 4 y la base es un círculo de perímetro 6π, ¿cuál es el área del trozo de papel?

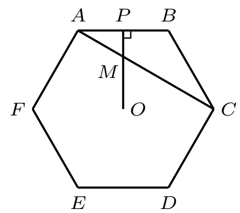


(a) 5π (b) 6π (c) 10π (d) 12π (e) 15π

Problema 72. En un calabozo hay dragones rojos y verdes. Cada dragón rojo tiene 6 cabezas, 8 patas y 2 colas. Cada dragón verde tiene 8 cabezas, 6 patas y 4 colas. Si sabemos que entre todos los dragones tienen 44 colas y que hay 6 patas verdes menos que cabezas rojas, ¿cuántos dragones verdes hay?

(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 11 (e) 13

Problema 73. En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular, O es su centro, $\angle OPB = 90^o$ y M es la intersección de AC y OP. Si $MC = 8$, ¿cuánto mide AB?

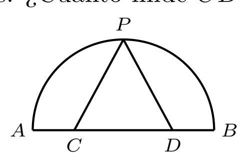


(a) $\sqrt{8}$ (b) 3 (c) $4\sqrt{3}$ (d) 4 (e) $\frac{7}{2}$

Problema 74. ¿Cuántos pares de números que no contienen ceros dan 90000 al multiplicarlos entre sí?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 75. El semicírculo de la figura tiene radio 2. El punto P es el punto medio del arco AB y los segmentos PC y PD dividen al semicírculo en tres regiones de áreas iguales. ¿Cuánto mide CD?

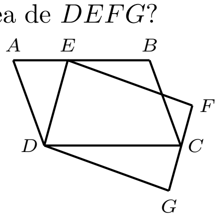


(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{4\pi}{5}$ (e) $\frac{5\pi}{6}$

Problema 76. ¿Cuántos enteros positivos menores que 100 cumplen que la suma de sus cifras es menor que 10?

(a) 34 (b) 39 (c) 44 (d) 49 (e) 54

Problema 77. En la figura $ABCD$ y $DEFG$ son paralelogramos. Si el área de $ABCD$ es 3, ¿cuál es el área de $DEFG$?

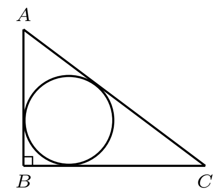


(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{11}{4}$ (d) 3 (e) $\frac{22}{3}$

Problema 78. Un conejo da 5 saltos en el mismo tiempo en que el perro que lo persigue da 4, pero 8 saltos del perro equivalen en distancia a 11 saltos del conejo. Si el conejo le lleva 66 saltos de ventaja, ¿cuántos saltos deberá dar el perro para alcanzar al conejo?

(a) 467 (b) 478 (c) 493 (d) 507 (e) 528

Problema 79. En la figura ABC es un triángulo rectángulo, $AB = 3$, $BC = 4$ y $AC = 5$. ¿Cuánto mide el radio del círculo?



(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{4}$ (e) $\sqrt{5}$

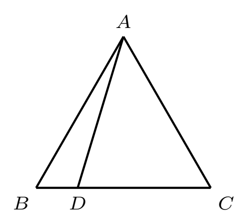
Problema 80. ¿Cuál de los siguientes números tiene raíz cuadrada exacta?

(a) 11022 (b) 11023 (c) 11025 (d) 11027 (e) 11028

Problema 81. Con varios cubos de arista 1 se arma un cubo mayor. Algunas caras del cubo mayor se pintan completamente de rojo y, cuando se desarma el cubo, se observa que hay 24 cubitos sin ninguna cara pintada. ¿Cuántos cubitos tiene el cubo grande?

(a) 27 (b) 64 (c) 125 (d) 216 (e) No se puede construir un cubo así.

Problema 82. En la figura el triángulo ABC es equilátero. Sabiendo que $AC = 21$ y $BD = 5$, ¿cuánto mide AD?



(a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 18 (e) 19

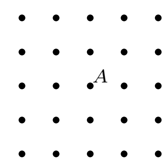
Problema 83. ¿Cuál es el valor más grande que puede tomar n de manera que el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se pueda dividir en dos subconjuntos y que ninguno de ellos contenga a dos números y a su diferencia?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 84. Cuando a mamá le preguntan su edad solamente responde que nació en el siglo XX. Papá dice que el año que ella nació era múltiplo de 5, pero no terminaba en 0. Abuelita dice que una vez mamá cumplió tantos años como el número formado por las dos últimas cifras invertidas de ese año. ¿Cuántos años cumplió mamá en 2003?

(a) 48 (b) 58 (c) 63 (d) 68 (e) 78

Problema 85. ¿Cuántos cuadriláteros con vértices sobre los puntitos de la figura cumplen que, al rotarlos 90º respecto al puntito marcado con A, caen sobre sí mismos?



(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

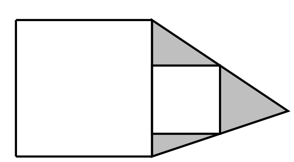
Problema 86. Dos lados de un triángulo acutángulo y la altura sobre el tercer lado tienen longitudes 12, 13 y 15 (tal vez no en ese orden). Encuentra el área del triángulo.

(a) 168 (b) 156 (c) 80 (d) 84 (e) No se puede saber

Problema 87. Carlos tiene 2003 tarjetas numeradas del 1 al 2003 y colocadas en orden de menor a mayor en una pila. Sin mirar, Carlos quita paquetes de tres tarjetas que están juntas (no necesariamente de arriba), hasta que sólo quedan 2 tarjetas. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser el número de alguna de las tarjetas restantes?

(a) 1000 (b) 1001 (c) 1002 (d) 1003 (e) 1004

Problema 88. Cada lado del cuadrado grande de la figura mide 2, mientras que cada lado del cuadrado pequeño mide 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) 1 (b) 2 (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4
(e) Depende de la posición de los cuadrados

Problema 89. Llamemos *capicúa* a un año si el número del año tiene al menos dos cifras y se lee igual al derecho que al revés (por ejemplo, 2002 fue un año capicúa). Un hombre nació un 1º de enero y vivió durante 12 años capicúa. ¿Cuál es la menor edad que pudo haber tenido cuando murió?

(a) 85 (b) 90 (c) 99 (d) 104 (e) 115

Problema 90. Una lista de números $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se construye como sigue: a_0 es un número entero positivo cualquiera menor o igual que 200 y, para $n \geq 1$, $a_n = 5a_{n-1} - 2$ (es decir, cada término de la sucesión se obtiene restándole 2 al resultado de multiplicar el término anterior por 5). ¿Cuál de los siguientes números puede ser parte de la lista?

(a) 1000 (b) 1501 (c) 2003 (d) 4005 (e) 6938

Problema 91. En un juego de computadora se empieza con un tablero de 3×2 coloreado de blanco y negro, como se indica en la figura A. En cada jugada se eligen dos cuadritos que comparten un lado y se les cambia el color de acuerdo a las siguientes reglas:
Negro cambia a rojo, rojo cambia a blanco y blanco cambia a negro.
¿Cuál es el menor número de jugadas que debe hacerse para convertir el tablero de la Figura A en el de la Figura B.

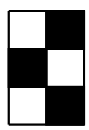


Figura A

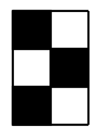


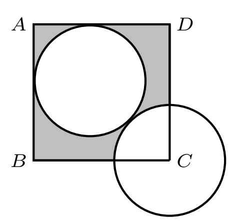
Figura B

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 10

Problema 92. ¿Cuántos números primos son a la vez la suma y la diferencia de dos números primos?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 93. En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ y dos círculos tangentes del mismo tamaño. Sabiendo que el círculo que sobresale del cuadrado tiene centro en el vértice C y que $AB = 1 + \sqrt{2}$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $3 + \frac{5}{4}\pi$ (b) $3 - \frac{5}{4}\pi$ (c) $3 + 2\sqrt{2}$ (d) 5π (e) $3 + 2\sqrt{2} - \frac{5}{4}\pi$

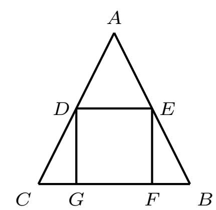
Problema 94. ¿Cuántos enteros positivos $n < 65$ cumplen que al dividir 65 entre n queda el mismo residuo que al dividir 142 entre n?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 95. Un entero es *tartamudo* si todas sus cifras son iguales a 1. ¿Cuántos enteros positivos menores que 10000000 cumplen que al multiplicarlos por 33 se obtiene un entero tartamudo?

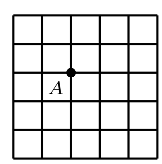
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 96. En la figura ABC es un triángulo de área 32, $AB = AC$ y $BC = 8$. ¿Cuál es el área del cuadrado $DEFG$?



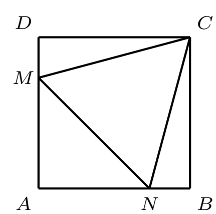
(a) 4 (b) 8 (c) 12 (d) 16 (e) 20

Problema 97. ¿Cuántos rectángulos con un vértice en A hay en la figura?



(a) 9 (b) 12 (c) 16 (d) 20 (e) 25

Problema 98. Cada lado del cuadrado $ABCD$ mide 1. ¿Cuánto vale el área del triángulo equilátero CMN?



(a) $3\sqrt{2} - 1$ (b) $\sqrt{3} + 2$ (c) $3\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3} - 3$ (e) $\sqrt{2} + 1$

Problema 99. María Eugenia está escribiendo listas de 5 números primos de manera que estén ordenados de menor a mayor y que la diferencia entre cualesquiera dos primos consecutivos es 6. ¿Cuántas listas diferentes puede escribir?

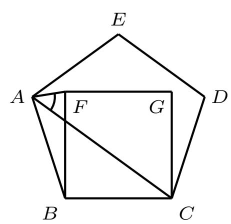
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 100. Un tablero de ajedrez se numera como se muestra en la figura y se colocan en él 8 torres de manera que ninguna de ellas sea capaz de capturar a la otra. Finalmente, se suman los números de las casillas donde se colocaron las torres. Considerando todos los posibles acomodos de las torres, ¿cuántas sumas distintas se pueden obtener?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	⋯					
						⋯	64

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

Problema 101. En la figura $ABCDE$ es un pentágono regular y $BCGF$ es un cuadrado. ¿Cuánto vale el ángulo FAC?

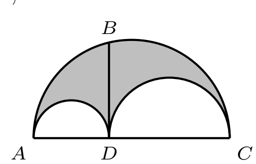


(a) 72º (b) 60º (c) 54º (d) 45º (e) 36º

Problema 102. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (n, p) cumplen que p es primo y $p^n - 9n = n^p$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 103. En la figura se muestran tres semicircunferencias. Sabiendo que $\angle BDA = 90^\circ$ y $BD = 1$, calcule el área de la región sombreada.



(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$ (e) $\frac{\pi}{5}$

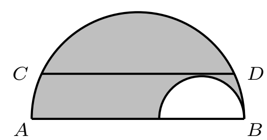
Problema 104. ¿Cuántos enteros n entre 1 y 855 cumplen que $n(n-1)$ es múltiplo de 34?

(a) 84 (b) 88 (c) 92 (d) 96 (e) 100

Problema 105. Cuatro de los vértices de un heptágono se colorean de azul y los restantes de verde. Sobre cada lado se escribe 2 si su dos vértices son azules, $\frac{1}{2}$ si sus dos vértices son verdes, o 1 si sus vértices tienen colores diferentes. Finalmente, se multiplican todos los números escritos en los lados del polígono. Considerando todas los posibles formas de colorear los 7 vértices, ¿cuántos productos distintos se pueden obtener?

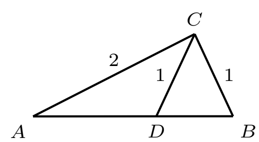
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 106. Los semicírculos de la figura tienen su centro sobre AB. Sabiendo que el segmento CD es paralelo a AB y que $CD = 24$. ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) 60π (b) 66π (c) 72π (d) 78π (e) 84π

Problema 107. De la siguiente figura sabemos que $AC = 2$, $BC = 1$ y CDB es un triángulo isósceles. Calcula $AD \cdot AB$.



(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 5

Problema 108. Diez gaviotas (dos blancas y ocho grises) iban volando sobre un río cuando de pronto se posaron al azar en un tronco, formando una hilera. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos gaviotas blancas estén juntas?

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{7}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{1}{5}$

Problema 109. Encuentra el resultado de la siguiente suma:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\ .$$

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 110. Considere la lista $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$ ¿Cuál es el número escrito en la posición 2004?

(a) 50 (b) 54 (c) 57 (d) 60 (e) 63

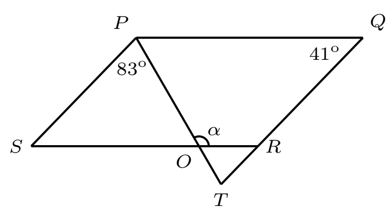
Soluciones de los Problemas

Solución 1. Sean m y n la cantidad de niñas y niños en la clase, respectivamente. Sabemos que $n = m + 7$ y $n = 2m$, de donde $m = 7$.
La respuesta es (c).

Solución 2. El menor resultado será el más negativo, que se obtiene al multiplicar el número mas pequeño y el más grande de la lista.
La respuesta es (b).

Solución 3. Como $x + 24 = 3x$ tenemos que $x = 12$. La respuesta es (b).

Solución 4. El $\angle PSR = \angle PQR$ (porque $PQSR$ es paralelogramo). Llamemos O a la intersección de SR con PT, como $\alpha + \angle POS = 180^o$ y $\angle POS + \angle PSO + \angle OPS = 180^o$ (pues la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^o), tenemos que $\alpha = 41^o + 83^o = 124^o$.



La respuesta es (c).

Solución 5. Los colores se repiten cada 4 flores. Como 28 es múltiplo de 4, la 29a flor será azul. La respuesta es (a).

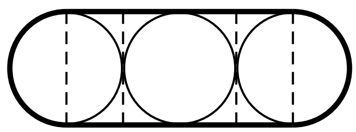
Solución 6. La Señora Rodríguez tiene 5 hijas, 20 nietas y 60 bisnietas, así que en total tiene 85 descendientes. La respuesta es (e).

Solución 7. La suma es la misma en cada círculo. Como B y 11 están en ambos círculos podemos ignorarlos, así que se debe cumplir que $9 + 9 + A + 8 = 14 + 2 + 13 + 7$, de donde $A = 10$. La respuesta es (b).

Solución 8. Claramente $AB = 22 - 15 = 7$ m, y $BC = AC - AB = 10 - 7 = 3$ m. La respuesta es (c).

Solución 9. Los dos chocolates que hay de diferencia entre comprar 5 y 7 cuestan 32 pesos, así que cada uno cuesta la mitad: 16 pesos.
La respuesta es (b).

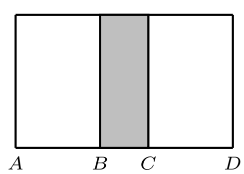
Solución 10. Si partimos la figura como se muestra es claro que el área está formada por dos cuadrados y un círculo, así que el área buscada es $2a + b$.



La respuesta es (e).

Solución 11. Los números del 1 al 9 utilizan 9 placas. A partir del 10 cada número utiliza dos placas, así que las 35-9=26 placas restantes se usaron para numerar 13 puertas más. En total hay 9+13=22 puertas.
La respuesta es (c).

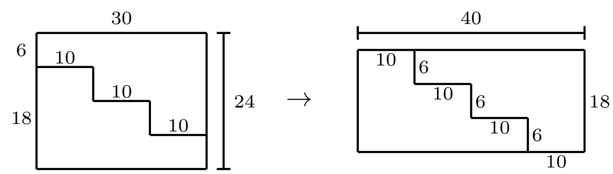
Solución 12. Si pusiéramos un cuadrado pegado junto a otro obtendríamos un rectángulo de área $121 \cdot 2 = 242$; al encimarlos lo que conseguimos fue un rectángulo de área 198, así que el área traslapada es de $242 - 198 = 44$.
Solución alternativa: En la figura AC y BD miden 11; como AD mide 18 tenemos que AB mide 7 y BC mide 4. El área buscada es $4 \cdot 11 = 44$.



La respuesta es (d).

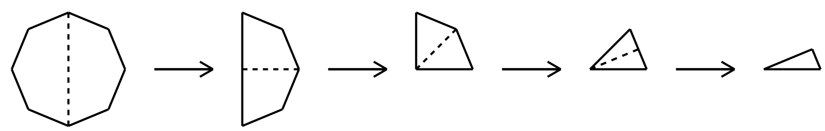
Solución 13. En total se anotaron 12 goles en todo el partido. Si hubiera un margen de 3 goles entre los dos equipos tendríamos que alguno anotó una cantidad par y el otro una cantidad impar de goles, lo cual no puede ser pues en todo el partido se anotaron 12 goles (que es par). Es fácil ver que los otros resultados son posibles. La respuesta es (d).

Solución 14. El largo del rectángulo se incrementará en un tercio, mientras que el ancho se reducirá en un cuarto. En la siguiente figura se muestra el corte que cumple con estas condiciones:



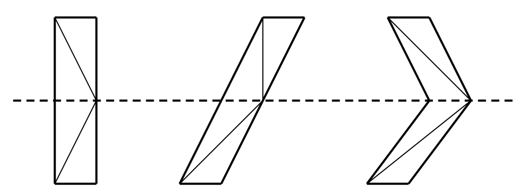
La respuesta es (e).

Solución 15. La siguiente figura indica los dobleces que tienen que realizarse:



La respuesta es (d).

Solución 16. Las bandas 1 y 2 tienen la misma área pues ambos son paralelogramos con la misma base y la misma altura. La banda 3 está formada por dos paralelogramos cuyas áreas suman lo mismo que las otras bandas.
Solución Alternativa: En la figura los 6 triangulitos sobre la línea punteada tienen la misma área, pues la base de cada uno mide a y todos tienen la misma altura. Como lo mismo sucede para los seis triangulitos abajo de la línea punteada, las tres bandas tienen la misma área.



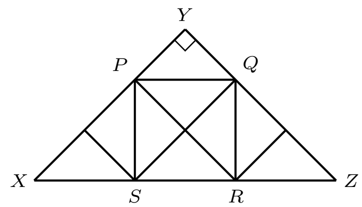
La respuesta es (a).

Solución 17. El torneo se desarrolla de la siguiente manera: $100 \to 50 \to 25 \to 13 \to 7 \to 4 \to 2 \to 1$. En total hay 7 rondas. La respuesta es (a).

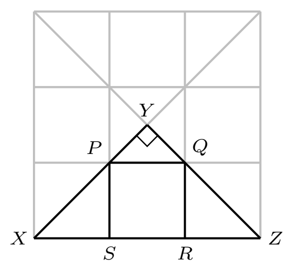
Solución 18. Los lados del cuadrado que tiene área 81 miden 9 y por lo tanto el lado pequeño del rectángulo con área 18 mide 2. La medida de x es $9 + 2 = 11$. La respuesta es (e).

Solución 19. Marisa puede vestirse con blusa y falda de $4 \times 3 = 12$ maneras y con blusa y pantalón de $4 \times 2 = 8$ maneras. En total puede hacer $12 + 8 = 20$ combinaciones. La respuesta es (c).

Solución 20. El diagrama muestra que el triángulo XYZ puede dividirse en 9 triángulos iguales, de manera que el cuadrado está formado por 4 de ellos.



Solución alternativa: El cuadrado de la figura está formado por 4 triángulos iguales a XYZ (y por tanto tiene área 4). Claramente el cuadradito $PQRS$ representa $\frac{1}{9}$ del área del cuadrado grande.



La respuesta es (a).

Solución 21. La más grande de las sumas es 19 y la más chica es 3. Es fácil ver que se pueden obtener todos los números entre esos dos.
La respuesta es (c).

Solución 22. David compró la mitad de lo que compraron juntos Miguel y Humberto, así que gastó $\frac{29+43}{2} = 36$. La respuesta es (c).

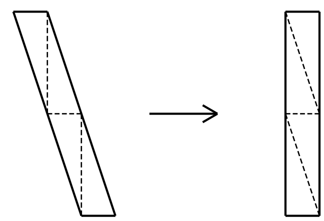
Solución 23. La máxima cantidad de puntos se obtiene haciendo un dibujo donde cada línea intersecta a todas las demás y no hay 3 líneas que se cruzan en el mismo punto. La respuesta es (d).

Solución 24. Tenemos que $2n^2$ siempre es par y, por tanto, $2n^2 + 2003$ es impar. Las expresiones (a), (c) y (d) son pares para $n = 2$ y (b) es par para $n = 1$. La respuesta es (e).

Solución 25. Observemos que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, que es múltiplo de 3, así que tenemos que quitar dos números cuya suma sea un múltiplo de 3. Hay 12 formas diferentes de hacer esto, tachando: 1 y 2; 1 y 5; 1 y 8; 2 y 4; 2 y 7; 3 y 6; 3 y 9; 4 y 5; 4 y 8; 5 y 7; 6 y 9; o 7 y 8. La respuesta es (d).

Solución 26. Tenemos que 30 litros son el $70\% - 30\% = 40\%$ del barril, así que en total le caben $\frac{30 \cdot 100}{40} = 75$ litros.
Solución alternativa: Sea x la cantidad de litros que le caben al barril, resolviendo la ecuación $0.3x + 30 = 0.7x$ obtenemos $x = 75$.
La respuesta es (b).

Solución 27. Los dos triángulos blancos pueden pegarse para formar un rectángulo de 6×2, de aquí se obtiene que el área de la N es $6 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 18$.
Solución Alternativa: Cada una de las 2 bandas verticales de la N tiene 6 cuadritos. Cortando y pegando como se muestra en la figura se puede ver que la diagonal tiene la misma área que una banda vertical de 6 cuadritos.



La respuesta es (e).

Solución 28. Si T es el costo de todas las pinturas y C el de la más cara, tenemos que $T = 6000 \times 5 = 30000$, y que $30000 - C = 5000 \times 4 = 20000$, así que $C = 10000$. La respuesta es (e).

Solución 29. El número de Rubén es 984, y el de Javier es 128; la diferencia es $984 - 128 = 856$. La respuesta es (c).

Solución 30. En cada rectángulo llamemos l al lado más chico y L al más grande. El perímetro que buscamos es $4l + 4L = 2(2l + 2L) = 2(40) = 80$ cm. La respuesta es (c).

Solución 31. Durante el periodo 1999-2002 ingresaron $325 \times 4 = 1300$ estudiantes y en el periodo 1999-2003 fueron $(325 \times 1.2) \times 5 = 1950$, así que durante 2003 entraron $1950 - 1300 = 650$. La respuesta es (e).

Solución 32. Los números que se forman deben terminar en 5 para ser múltiplos de 5. Además, para ser múltiplos de 3 la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 3, así que las únicas opciones son 15, 45 y 75.
La respuesta es (d).

Solución 33. El área de todo el círculo es $\pi r^2 = 9\pi$. Si cada lado del cuadradito blanco dentro del círculo mide l, tenemos que (por Teorema de Pitágoras) $l^2 + l^2 = 6^2 = 36$, de donde obtenemos el área del cuadradito: $l^2 = \frac{36}{2} = 18$. El área buscada es $9\pi - 18$. La respuesta es (d).

Solución 34. Isabel gastó 7 monedas en una pera, una manzana y una piña. Como quedan 9 monedas para las 7 frutas restantes no es posible que haya comprado otra piña más. La respuesta es (a).

Solución 35. Llamemos a a la primera cifra y b a la última. Como $a679b$ debe ser múltiplo de 8 (pues $72 = 9 \times 8$) tenemos que, en particular, $79b$ debe ser múltiplo de 8 y por lo tanto b=2. Como el precio debe ser múltiplo de 9, tenemos que $a + 6 + 7 + 9 + b = a + b + 22$ debe ser un múltiplo de 9 menor a 33 (puesto que $a \leq 9$ y $b = 2$), así que $a + b = 5$. La respuesta es (b).

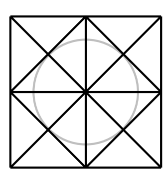
Solución 36. Observemos que tanto la base como la altura del triángulo sombreado miden $\frac{1}{2}$, así que su área es $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$. La respuesta es (e).

Solución 37. Llamemos l a la medida de cada lado del mantel cuadrado. El ancho del mantel rectangular mide $\frac{80l}{100}$, mientras que el largo mide $\frac{125l}{100}$, así que su área es $\frac{80l}{100} \cdot \frac{125l}{100} = l^2$, que era el área del mantel cuando era cuadrado. La respuesta es (c).

Solución 38. Tenemos que $\angle ABO = 90^o - 60^o = 30^o$. Como el triángulo ABO es isósceles, $\angle OAB = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$. Finalmente, $\angle OAC = 75^o - 45^o = 30^o$. La respuesta es (d).

Solución 39. En una hora avancé menos de 100 kilómetros (BA tiene dos cifras), así que $A = 1$. Como en dos horas recorrí $A0B - AB = 10B - 1B = 90$ kilómetros, entonces $B1 = 1B + 45$. De lo anterior concluimos que $B = 6$ y $A + B = 7$. La respuesta es (e).

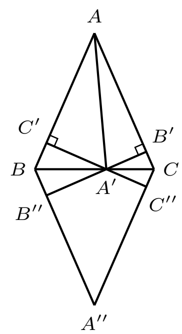
Solución 40. El radio del círculo es 1, puesto que su área es π. Cada triangulito de la figura tiene área $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, así que el área del cuadrado $ABCD$ es $16 \cdot \frac{1}{2} = 8$.



La respuesta es (b).

Solución 41. Como cada animal tiene 2 ojos en total hay 15 animales. Contando las patas traseras de las jirafas y todas las patas de las avestruces llegaríamos a 30, lo cual quiere decir que las 14 patas faltantes son 7 pares de patas delanteras. De lo anterior deducimos que hay 7 jirafas y 8 avestruces. La respuesta es (a).

Solución 42. El área del triángulo ABC es la suma de las áreas de los triángulos $AA'C$ y $AA'B$, o sea $1 = \frac{AB \cdot C'A'}{2} + \frac{AC \cdot A'B'}{2} = \frac{2 \cdot C'A'}{2} + \frac{2 \cdot A'B'}{2} = C'A' + A'B'$.
Solución Alternativa: Reflejando el triángulo ABC como se muestra en la figura obtenemos el paralelogramo $ABA''C$ donde $B'A' + A'C' = B'B''$. El área de $ABA''C$ es igual a $AC \cdot BB'$ y al mismo tiempo es igual al doble del área de ABC, o sea 2. Usando que $AC = 2$ obtenemos que $B'B = 1$.

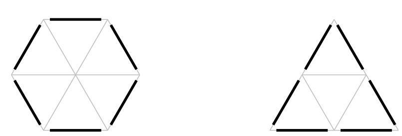


La respuesta es (a).

Solución 43. La hormiga caminó 101 líneas horizontales de 100 cm y 100 líneas verticales de 1 cm, así que recorrió en total $101 \times 100 + 100 = 10200$ cm. La respuesta es (d).

Solución 44. Tenemos que $768 = 2^8 \cdot 3$. Como queremos la mayor cantidad de ceros el número que buscamos es aquel que contenga la más alta potencia de 5 en su factorización; ese número es $3125 = 5^5$. La respuesta es (b).

Solución 45. En la figura se muestran el hexágono y el triángulo que formó Sara Luz. Todos los triangulitos son del mismo tamaño, así que claramente la proporción entre el área del hexágono y la del triángulo es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.



La respuesta es (a).

Solución 46. Debe haber una barra blanca menos que el total de barras negras y, por lo tanto, hay 4 cuatro barras negras anchas menos que el total de barras negras. Por lo tanto hay 4 barras negras delgadas en el código. La respuesta es (d).

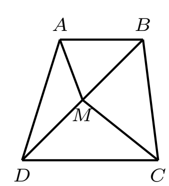
Solución 47. Luis y Mireya cruzarán la meta juntos después de n minutos si n es al mismo tiempo múltiplo de 12 y de 10. El mínimo común múltiplo de 12 y 10 es 60, y en 60 minutos Luis correrá $5\left(\frac{60}{12}\right) = 25$ vueltas, mientras que Mireya correrá $3\left(\frac{60}{10}\right) = 18$ vueltas. La respuesta es (b).

Solución 48. El total de cuadritos en las dos diagonales es impar, por la simetría de la figura debe haber un cuadrito azul que esté en las dos diagonales, y los otros 2000 deben estar repartidos mitad y mitad entre ambas diagonales. De lo anterior tenemos que cada diagonal del mosaico tiene 1001 cuadritos, así que el mosaico tiene 1001 cuadritos en cada lado y en total tiene $1001 \times 1001 - 2001 = 1000000$ cuadritos rojos. La respuesta es (a).

Solución 49. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360^{o}, así que entre los cuatro sectores circulares contenidos dentro del cuadrilátero se completa un círculo de radio 1. Así, el área sombreada es $5 - \pi$. La respuesta es (d).

Solución 50. Para un número n del conjunto, solamente hay $n-1$ números menores que él. Lo anterior quiere decir que cada número del conjunto aparece $n-1$ veces en la libreta, y entonces la suma es $1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2+\ldots+10\cdot 9 = 330$. La respuesta es (b).

Solución 51. (a) Los triángulos MBC y MDC tienen la misma altura y su base mide lo mismo (porque M es punto medio de BD), así que su área es la misma.
(b) Los triángulos ABD y ABC tienen la misma base y sus alturas miden lo mismo (pues AB es paralela a CD), así que su área coincide.
(c) Los triángulos ADC y BDC tienen la misma área porque su base coincide y sus alturas miden igual.
(d) A continuación se muestra una figura donde las áreas de los triángulos AMD y MBC son claramente distintas:

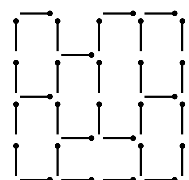


(e) Los triángulos MAB y MAD tienen la misma altura y su base mide lo mismo, así que su área es la misma. La respuesta es (d).

Solución 52. Notemos que tanto en la jarra como en la botella hay la misma cantidad de líquido (un litro). La cantidad de agua que tiene la botella debió provenir de la jarra, misma cantidad que en la jarra debió reemplazarse por naranjada. De esta forma la cantidad de agua que se pasó a la botella y la cantidad de naranjada que se pasó a la jarra debe ser la misma. La respuesta es (c).

Solución 53. Como DC es paralela a AB tenemos que $\angle AED = \angle EDC = \angle ADE$. Por lo anterior $AD = AE$ y entonces $EB = AB - AE = 6 - 5 = 1$. La respuesta es (e).

Solución 54. Para eliminar el cuadrado más grande es necesario quitar uno de los cerillos de la orilla; notemos que después de quitarlo nos quedarían 15 cuadraditos pequeños. Cada vez que se quita un cerillo se deshacen uno o dos cuadritos, así que es necesario quitar al menos otros 8 cerillos. En la figura se muestra que es suficiente quitar 9 cerillos.



La respuesta es (a).

Solución 55. Como el área del rectángulo es 32 tenemos que $32 = AD \cdot AB = AD \cdot 2AD$, y entonces $AD = 4$ y $CD = AB = 8$. Además, $DR = CM = MB = 2$ y $CR = 6$. El área sombreada es igual al área del rectángulo $ABCM$ menos el área de los triángulos DRA, RCM y MBA, o sea, $32 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 8}{2} = 14$. La respuesta es (c).

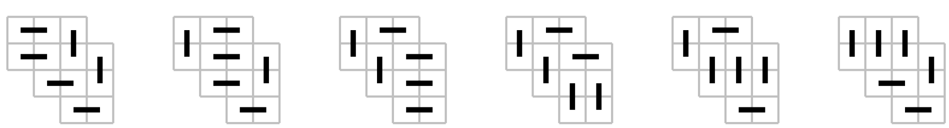
Solución 56. La suma de todos los cuadritos es $1+2+3+\ldots+9 = 45$, así que la suma en cada renglón debe ser 15. Como, además, los números del primer renglón deben ser impares, en el primer renglón escribiremos 3, 5 y 7 en algún orden. Es fácil ver que las únicas posibilidades son:

7	5	3
2	9	4
6	1	8

3	5	7
4	9	2
8	1	6

La respuesta es (c).

Solución 57. Los dos cuadritos más arriba del tablero tienen que cubrirse con un rectangulito, al igual que los dos cuadritos que están más a la derecha. Hay 6 formas distintas de cubrir el resto del tablero, como se muestra en la figura:

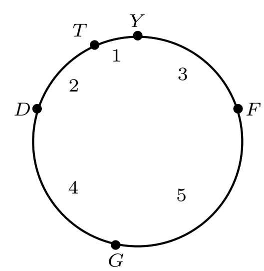


La respuesta es (d).

Solución 58. La raíz cuadrada de 400 es 20, así que una forma de descomponerlo es $20 \cdot 20$. Cualquier otra forma de hacerlo involucraría a alguno de los divisores de 400 que son menores o iguales a 20: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16 y 20. En total hay 8 formas distintas. La respuesta es (e).

Solución 59. El área del cuadrilátero $PQRS$ es $\frac{1}{2}$ (la mitad del área de $ABCD$). El área del triángulo PQT es $\frac{1}{4}$ (la mitad del área de $PQRS$). La respuesta es (e).

Solución 60. Solo uno entre Yola y Tino puede haber dicho "David", así que uno de los dos dijo el nombre del otro, y por tanto Tino y Yola son vecinos. Como David dijo "Tino" o dijo "Yola" está sentado cerca de alguno de ellos, así que Gemma y Frank tienen que estar sentados en los dos lugares restantes. Un acomodo como el de la figura (con las distancias señaladas) funciona.



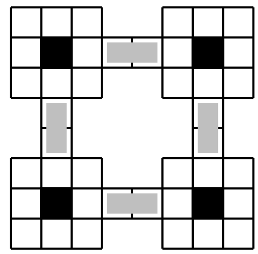
La respuesta es (c).

Solución 61. El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, así que el resultado de Guillermo debe ser $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi 8r^3$. La respuesta es (c).

Solución 62. Para que el triángulo n esté encima del triángulo 0 debe ocurrir que $100 \cdot n$ sea un múltiplo de 360. El múltiplo más pequeño de 100 y 360 es 1800, así que $n = \frac{1800}{100} = 18$. La respuesta es (e).

Solución 63. Buscamos los divisores de $399 - 14 = 385$ que sean mayores que 14. Como $385 = 5 \times 7 \times 11$ los divisores que nos sirven son 35, 55, 77 y 385. La respuesta es (d).

Solución 64. Es fácil ver que debemos poner piezas en los lugares indicados en la figura o no sería posible cubrir todos los cuadros blancos.



Como tenemos dos formas para llenar cada grupo alrededor de un cuadro negro, en total tenemos $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ formas. La respuesta es (b).

Solución 65. Sea Q la intersección entre NA y DM y O la intersección entre NB y MA. Por simetría $\angle NDM = \angle MAB$. Como DC y AB son paralelas tenemos $\angle DNA = \angle NAB$ y, como NAB es isósceles, $\angle NAB = \angle NBA$. Utilizando las igualdades que hemos conseguido obtenemos $\angle NQD = 180^o - \angle NDM - \angle DNA = 180^o - \angle MAB - \angle NAB = \angle BOA$. Usando que $\angle AQM = \angle NQD = \angle BOA = \angle POM$ llegamos a que $\angle BPM = 180^o - \angle POM - \angle PMO = 180^o - \angle AQM - \angle PMO = \angle NAM = 30^o$.

Solución Alternativa. Sea K el punto medio de AB. El segmento KD es paralelo a BN y entonces $\angle BPM = \angle KDM$. Por simetría $\angle KDM = \angle NAM$, así que $\angle BPM = 30^o$. La respuesta es (b).

Solución 66. Si sumamos y restamos las áreas blancas tenemos que la cantidad buscada es el área del primer y el tercer cuadrado menos el área del segundo y el cuarto. Por lo anterior el resultado es $11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 64$. La respuesta es (d).

Solución 67. Sea p el divisor más pequeño de n. Como 15 divide a n (pues divide a uno de sus divisores) tenemos que 3 divide a n. Por lo anterior, debe ocurrir que $p = 2$ o $p = 3$; así que $n = 60$ o $n = 135$.
Solución alternativa: Cuando quitamos a 1 y a n de los divisores positivos de n, tenemos que el mayor y el menor, multiplicados, deben dar n. Llamando a al menor divisor positivo de n, la condición del problema dice que $n = 15a^2$. Pero entonces 3 divide a n, así que $a \leq 3$. Sólo tenemos dos soluciones, cuando $a = 2, 3$. La respuesta es (c).

Solución 68. Llamemos O al punto medio de BC y M y N a las intersecciones del círculo y los lados AB y AC, respectivamente (como se muestra en la Figura 1). El triángulo BOM es equilátero pues $BO = OM$ y $\angle MBO = 60^o$. Análogamente el triángulo NOC es equilátero y por ende también lo son AMN y MNO . Dado que estos cuatro triángulos tienen lado 1, las partes sombreadas completan un sector de 60^o de un círculo con radio 1 (como se muestra en la figura 2), cuya área es $\frac{\pi}{6}$.

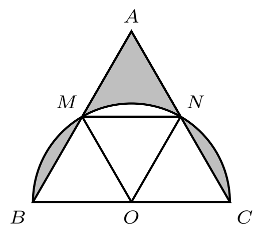


Figura 1

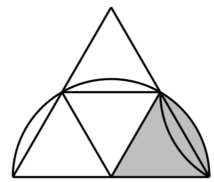
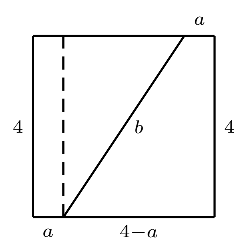


Figura 2

La respuesta es (d).

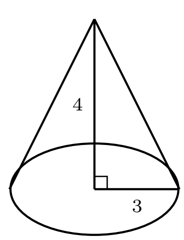
Solución 69. Claramente los 6 números no son iguales. A lo más hay 2 números distintos, digamos a y b, pues si hubiera 3 distintos podríamos encontrar 3 ternas con sumas diferentes. De alguno de ellos (digamos a) debe haber al menos 3 números iguales, así que $3a = 18$ (pues 16 no es múltiplo de 3). Se sigue que $2a + b = 16$ y $b = 4$. Para que las sumas sean las indicadas, 6 debe aparecer cinco veces y 4 solo una vez. La respuesta es (c).

Solución 70. La figura queda así:



Tenemos que $b = 13 - (4 + a + (4 - a)) = 5$. Por Pitágoras tenemos que el otro cateto del triángulo es 3, así que $a + 3 = 4 - a$ y entonces $a = \frac{1}{2}$. La respuesta es (a).

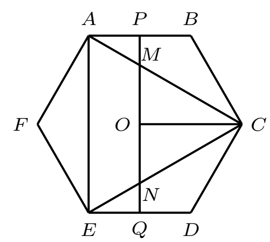
Solución 71. La base del cono es un círculo de radio 3 (pues su perímetro es 6π). La altura del cono, el radio de la base y el radio del sector circular forman un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura. Usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que el radio del sector circular es 5. El perímetro total del círculo sería 10π; como el borde del pedazo de papel mide solamente 6π el sector circular representa seis décimos del círculo total. De esta manera, el área buscada es $\frac{6}{10}25\pi = 15\pi$.



La respuesta es (e).

Solución 72. Hay 6 patas verdes menos que cabezas rojas, o sea que en el calabozo hay un dragón rojo más que el total de verdes. De las 44 colas 2 son del dragón rojo "extra" y el resto se reparten entre el mismo número de dragones rojos que de verdes, así que hay $\frac{42}{2+4} = 7$ dragones verdes. La respuesta es (b).

Solución 73. En la figura CAE es un triángulo equilátero, como PQ es paralela a AE, entonces CMN también es equilátero. Por Teorema de Pitágoras, $CO = \sqrt{CM^2 - MO^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Finalmente, $AB = CO = 4\sqrt{3}$.



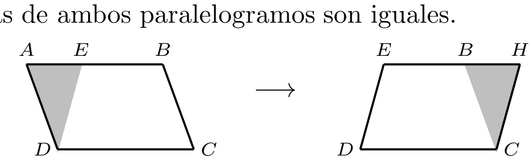
La respuesta es (c).

Solución 74. La factorización en primos de 90000 es $3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4$. Para obtener una pareja que cumpla basta repartir los factores primos de 90000 en dos números de manera que ningún 2 quede con ningún 5 (pues el número en que queden juntos terminaría en 0). Así, un número tendrá todos los 2's, otro todos los 5's, y la cantidad de parejas depende únicamente de las formas distintas de repartir los 3's, que en total son 3. La respuesta es (d).

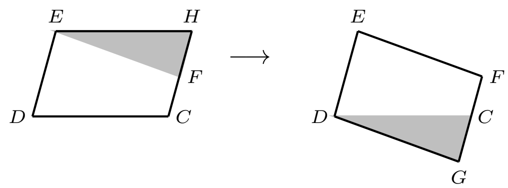
Solución 75. Como el radio es 2, el área del círculo completo es 4π y el área del triángulo PCD es $\frac{2\pi}{3}$. Llamemos O el centro de la circunferencia, tenemos que $\frac{2\pi}{3} = \frac{PO \cdot CD}{2} = \frac{2CD}{2} = CD$. La respuesta es (b).

Solución 76. Los 9 números de una cifra cumplen. Para los de dos cifras notemos que, si a es la primera cifra del número, hay $10 - a$ posibilidades para la última cifra. Como a puede ser cualquier número entre 1 y 9, en total hay $9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45$ enteros de dos cifras que cumplen. En total, hay 54 números. La respuesta es (e).

Solución 77. Cortando y pegando como se muestra a continuación podemos ver que las áreas de ambos paralelogramos son iguales.



Paso 1.



Paso 2.

La respuesta es (d).

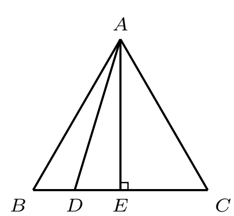
Solución 78. Cuando el perro ha dado 8 saltos el conejo ha dado 10, pero la distancia entre el perro y el conejo ha disminuido en lo equivalente a un salto de conejo (el perro avanzó 11 saltos de conejo mientras el conejo solo dio 10). Para que el perro alcance al conejo tiene que dar $8 \cdot 66 = 528$ saltos. La respuesta es (e).

Solución 79. Sea O el centro del círculo y r la medida de su radio. El triángulo ABC tiene área $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, que de otra manera puede calcularse sumando las áreas de los triángulos ABO, BCO y CAO, o sea que $6 = \frac{3 \cdot r}{2} + \frac{4 \cdot r}{2} + \frac{5 \cdot r}{2} = 6 \cdot r$, de donde $r = 1$. La respuesta es (a).

Solución 80. Los números que tienen raíz cuadrada exacta terminan siempre en 1, 4, 5, 6, 9 y 0, que es lo que se obtiene al elevar la cifra de las unidades de un número al cuadrado. La única posibilidad es 11025, cuya raíz cuadrada es 105. La respuesta es (c).

Solución 81. Como solo se pintan las caras externas del cubo todos los cubitos del interior quedan sin pintar, así que el cubo debe ser más pequeño que el de $5 \times 5 \times 5$ (en su interior hay 27 cuadritos). Claramente el cubo más pequeño que tiene sentido considerar es el de $3 \times 3 \times 3$, sin embargo no es posible pintarlo de forma que solamente 3 cubitos tengan algún lado pintado de rojo. Es fácil encontrar una forma de pintar un cubo de $4 \times 4 \times 4$ que cumpla con las condiciones. La respuesta es (b).

Solución 82. Sea E el pie de la perpendicular desde A hacia BC. Aplicando Pitágoras tenemos $AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{(BE - BD)^2 + (AB^2 - EB^2)} = \sqrt{\left(\frac{21}{2} - 5\right)^2 + \left((21)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2\right)} = 19$.

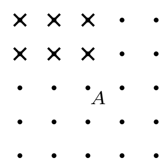


La respuesta es (e).

Solución 83. Tratemos de hacerlo para $n = 4$. En el conjunto del 1 no puede haber dos números consecutivos, así que 1 y 2 tienen que estar separados. Además, 4 y 2 no pueden estar juntos (su diferencia es 2), así que el 4 está con el 1. Como 3 y 4 son consecutivos 1, 4 y 3 no pueden estar juntos, así que el 3 está con el 2. Notemos que lo que hemos hecho debe cumplirse siempre para $n \geq 4$, pero no es posible colocar el 5 en ninguno de los subconjuntos sin romper las reglas. La respuesta es (b).

Solución 84. Abuelita dice que en un cierto año $19ab$ mamá cumplió ba años. Las últimas dos cifras del año de nacimiento de mamá podemos calcularlas restando $10a+b-(10b+a) = 9a-9b$, así que esas cifras forman un múltiplo de 9; como sabemos además que la última de esas cifras es 5 la primera tiene que ser 4. Así, mamá nació en 1945, cumplió 16 años en 1961 (que es el cumpleaños que recuerda Abuelita) y en 2003 cumplió 58. La respuesta es (b).

Solución 85. Pongamos el primer vértice sobre alguno de los puntitos marcados con cruces. Rotando ese vértice 90º, 180º y 270º respecto al puntito A obtenemos un cuadrilátero que cumple la condición. De hecho, todos los cuadriláteros que cumplen se pueden construir de esta manera (¿por qué?). En total, hay 6 cuadriláteros distintos.



La respuesta es (b).

Solución 86. La altura debe tener la longitud más corta, 12. Entonces podemos partir al triángulo en dos triángulos rectángulos a los que llamaremos A y B. El triángulo A tiene un cateto de longitud 12 y la hipotenusa mide 15, así que (por teorema de Pitágoras) el otro cateto mide 9 y A tiene un área igual a $\frac{12\times 9}{2} = 54$. Análogamente se obtiene que el otro cateto de B mide 5 y B tiene área 30. La respuesta es (d).

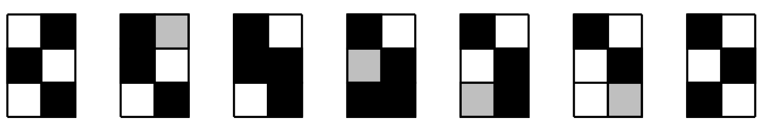
Solución 87. En los 2003 números hay 667 múltiplos de 3, 668 números que al dividirlos entre 3 dejan residuo 1, y 668 que al dividirlo entre 3 dejan residuo 2. Cada vez que Carlos quita tres tarjetas quita un número de cada categoría, así que las tarjetas sobrantes no pueden ser múltiplos de 3. La respuesta es (c).

Solución 88. Es claro que el triángulo más a la derecha tiene base 1 y es semejante al triángulo que contiene al cuadrado pequeño, que tiene base 2. Por lo tanto sus alturas son proporcionales y, si le llamamos x a la altura del triángulo pequeño, tenemos que $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$, de donde $x = 1$. Por lo anterior tenemos que el área del triángulo que contiene al cuadrado es 2 y el área de la región sombreada es 1. La respuesta es (a).

Solución 89. Es fácil convencerse de que hay que buscar entre los capicúas de 2 y 3 cifras (por ejemplo, la diferencia mínima entre 3113 y 3223 es 110, mientras que la diferencia entre 313 y 323 es 10). La diferencia entre los capicúas de dos cifras más cercanos es 11 (como 55 y 66). Con 3 dígitos la diferencia entre los más cercanos es 10 (como entre 747 y 757) y a lo más pasa 10 veces seguidas (por ejemplo de 707 a 797). Observemos que al pasar de 2 a 3 cifras o de 3 a 4 podemos encontrar capicúas con diferencia 2 (99 y 101 o 999 y 1001). Después de todas estas observaciones vemos que hay 3 posibilidades para los años en que vivió el hombre: entre 88 y 191, entre 99 y 202, y entre 898 y 1001. Las tres posibilidades producen la misma edad mínima: 104 años. La respuesta es (d).

Solución 90. Los números 1000, 1501 y 4005 no pueden ser parte de la lista pues son mayores que 200 y al sumarles 2 no se obtiene un múltiplo de 5. Como $2003 > 200$ no puede ser el a_0, si fuera parte de la lista el número que le precede debería ser $\frac{2003+2}{5} = 401$. Sin embargo, 401 no puede ser parte de la lista pues es mayor que 200 y 401+2=403 no es múltiplo de 5. Finalmente, haciendo el proceso inverso vemos que 6938 es parte de la lista que inicia en 56: 56, 278, 1388, 6938. La respuesta es (e).

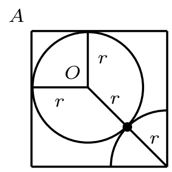
Solución 91. En la siguiente figura se muestran 6 jugadas para llegar al tablero B.



El mínimo número de movimientos es 6 puesto que cada cuadro negro requiere al menos 2 jugadas para cambiar a blanco, y ningún movimiento puede cambiar, al mismo tiempo, dos cuadros que originalmente eran negros. La respuesta es (c).

Solución 92. Sean p el primo que buscamos y q, r, s y t primos tales que $p = q + r$ y $p = s - t$. Como $s > t$ necesariamente s es impar. Si t es impar entonces p sería par y tendría que ser 2, pero entonces no podríamos poner a p como la suma de dos primos. Así, $t = 2$ y p es impar. Como q y r no pueden ser los dos impares alguno debe ser igual a 2, digamos q. Entonces $q = p - 2$ y $s = p + 2$, y como entre $p - 2$, p y $p + 2$ alguno debe ser múltiplo de 3, forzosamente $q = 3$, $p = 5$ y $s = 7$. La respuesta es (b).

Solución 93. En la figura O es el centro del círculo completo. Llamemos r al radio de cada círculo, usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $OA = \sqrt{2}r$. En la figura se observa que la medida de la diagonal del cuadrado es $\sqrt{2}r + 2r$ y es igual a $\sqrt{2} + 2$ (nuevamente por Teorema de Pitágoras). De esto último obtenemos $r = 1$, así que el área sombreada es $(1+\sqrt{2})^2 - \frac{5}{4}\pi(1)^2 = 3+2\sqrt{2} - \frac{5}{4}\pi$.

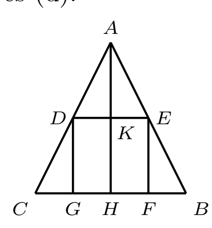


La respuesta es (e).

Solución 94. Supongamos que al dividir 65 entre n nos queda a de cociente y r de residuo, claramente $65 = na + r$. Si b es el cociente que obtenemos al dividir 142 entre n entonces tenemos $142 = nb + r$. Como $77 = 142 - 65 = nb + r - na - r = n(b - a)$, n debe ser un divisor de 77. Las posibilidades para n son 1, 7 y 11 (descartamos 77 porque $77 > 65$), y todas funcionan. La respuesta es (d).

Solución 95. Como $10000000 \cdot 33 = 330000000$, los enteros tartamudos que podemos obtener deben tener 8 cifras o menos. Para que un tartamudo sea múltiplo de 3 (y pueda entonces ser múltiplo de 33) es necesario que su cantidad de cifras sea múltiplo de 3. Para que un tartamudo sea múltiplo de 11 es necesario que tenga una cantidad par de 1's (¿por qué?). Poniéndole tantos requisitos, el único entero tartamudo que podemos obtener es uno con 6 cifras, que es $111111 = 33 \cdot 3367$. La respuesta es (b).

Solución 96. Como el área de ABC es 32 y su base BC mide 8, su altura mide 8. Sea H el pie de la altura del triángulo ABC que pasa por A. En la figura los triángulos AKE y AHB son semejantes, y por tanto $\frac{AK}{KE} = \frac{AH}{HB} = \frac{8}{4} = 2$. Llamemos l a la medida de cada lado del cuadrado, entonces $2 = \frac{AK}{KE} = \frac{8-l}{\frac{l}{2}}$, de donde $l = 4$. La respuesta es (d).



Solución 97. Uno de los vértices del rectángulo está en A, así que es suficiente elegir el vértice que estará en la posición opuesta para determinar el rectángulo. Hay 25 posibilidades para hacer está elección (cualquier vértice que no esté sobre la misma línea horizontal o vertical que A). La respuesta es (e).

Solución 98. Llamemos x a la medida de MA. Aplicando Pitágoras en los triángulos CDM y MAN obtenemos $2x^2 = CM^2 = 1 + (1-x)^2$; simplificando llegamos a que x tiene que cumplir la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$. Resolviendo la ecuación anterior y descartando la solución negativa obtenemos $x = \sqrt{3} - 1$. El área buscada es igual al área de $ABCD$ menos las áreas de CDM, MAN y CNB, es decir: $1 - \frac{1\cdot(2-\sqrt{3})}{2} - \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{1\cdot(2-\sqrt{3})}{2} = 2\sqrt{3} - 3$. La respuesta es (d).

Solución 99. Todos los números de la lista tienen la misma paridad, así es que todos son impares y la cifra de sus unidades es 1, 3, 5, 7 ó 9. Es fácil ver que entre los cinco números se van a utilizar todas las terminaciones posibles en algún orden, sin importar con que número empiece la lista. Esto quiere decir que alguno de los primos de la lista tiene que ser múltiplo de 5, que no puede ser otro más que el primero. De esta manera, la lista es 5, 11, 17, 23 y 29. La respuesta es (b).

Solución 100. Etiquetemos las columnas y los renglones del tablero tal como se muestra en la figura; la cantidad escrita en cada celda es la suma de las etiquetas del renglón y la columna en que se encuentra. Numerando las torres del 1 al 8 y pensando que la torre n está en la columna a_n y en el renglón b_n, tenemos que la suma que buscamos es: $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_8 + b_8) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_8) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_8)$. Para que las torres no se amenacen entre sí en cada columna debe haber exactamente una torre, al igual que en cada renglón; así que en las sumas anteriores todas las etiquetas aparecen exactamente una vez (no necesariamente en orden). De esta manera, la suma de las casillas donde se han puesto las torres es siempre: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_8) = (0 + 8 + \ldots + 56) + (1 + 2 + \ldots + 8) = 260$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
0								
8								
16								
24								
32								
40								
48								
56								

La respuesta es (a).

Solución 101. Como $ABCDE$ es regular, sabemos que $\angle ABC = 108^{\circ}$ y que $\angle BAC = 36^{\circ}$ porque ABC es isósceles. El ángulo $ABF = 108^{\circ} - 90^{\circ} = 18^{\circ}$ y como el triángulo ABF es isósceles entonces $\angle FAB = (180^{\circ} - 18^{\circ})/2 = 81^{\circ}$ por lo que $\angle FAC = 81^{\circ} - 36^{\circ} = 45^{\circ}$. La respuesta es (d).

Solución 102. Supongamos que tenemos una solución. Despejando y factorizando obtenemos que

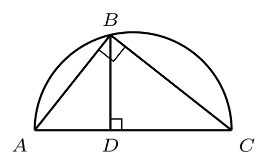
$$p^n = n(n^{p-1} + 9)\,.$$

De la ecuación anterior podemos obtener varias conclusiones útiles: n y $n^{p-1}+9$ son potencias de p y en particular son divisibles entre p (si n fuera 1 no hay solución y $n^{p-1}+9$ no puede ser 1). De aquí que p tiene que dividir a 9 y por lo tanto $p = 3$. Como $n = 3^a$ (con a mayor que 0) entonces $n^2 = 3^{2a}$ es múltiplo de 9, al igual que $n^2+9 = 3^{2a}+9 = 9(3^a+1)$. Sin embargo, de la factorización anterior observamos que $n^2 + 9 = 3^2(3^a + 1)$ no es una potencia de 3. Por lo anterior, concluimos que no hay soluciones. La respuesta es (a).

Solución 103. El área es igual a

$$\frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(AC^2 - DC^2 - AD^2\right)}{8}\,.$$

Observemos que en la figura los triángulos ABC, BCD y ABD son rectángulos; usando en ellos el Teorema de Pitágoras obtenemos $AC^2 = (AD^2 + BD^2) + (BD^2+DC^2) = AD^2+DC^2+2$. Sustituyendo AC^2 en nuestro cálculo original obtenemos que el área sombreada es $\frac{\pi(2)}{8} = \frac{\pi}{4}$.



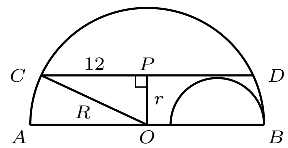
La respuesta es (d).

Solución 104. Entre n y $n-1$ alguno debe ser par; para que su producto sea múltiplo de 34 basta que alguno de los dos números sea múltiplo de 17. Entre 1 y 855 hay 50 múltiplos de 17; como cada uno de ellos puede ser n o $n-1$ hay 100 enteros en total que cumplen la condición pedida. La respuesta es (e).

Solución 105. Escribamos $\sqrt{2}$ en cada vértice azul y $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en cada vértice verde. Observemos que sobre cada lado está escrito el producto de sus vértices, así que el producto de los números escritos sobre los lados es el cuadrado del producto de los números escritos sobre los vértices. Como el producto de los números de un vértice azul y un vértice rojo es 1, sólo queda un vértice azul en el producto de los vértices. Luego, el resultado del producto de las aristas es $(\sqrt{2})^2 = 2$. Hemos visto que sin importar como se coloreen los vértices el producto es el mismo. La respuesta es (b).

Solución 106. Llamemos R al radio del círculo mayor y r al del menor, el área que buscamos es $\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{2} = \frac{\pi(R^2-r^2)}{2}$. En la figura O es el centro del círculo grande, así que $CO = R$. Dibujando el triángulo rectángulo OPC tenemos que

$PO = r$; aplicando el Teorema de Pitágoras concluimos que $R^2 - r^2 = 12^2 = 144$.



La respuesta es (c).

Solución 107. Sea E el pie de la perpendicular desde C hacia DB. Veamos que $AD{\cdot}AB = (AE{-}DE)(AE{+}EB) = (AE{-}DE)(AE{+}DE) = AE^2{-}DE^2 = (4 - CE^2) - (1 - CE^2) = 3$. La respuesta es (d).

Solución 108. Entre las gaviotas blancas puede haber de 0 a 8 gaviotas de separación. Hay 1 manera de que las blancas estén separadas por 8 grises, 2 maneras de que haya 7 gaviotas entre ellas, 3 formas de que haya 5 gaviotas grises entre ellas, y así sucesivamente (hasta ver que hay 9 formas de que estén juntas). En total tienen $1 + 2 + 3 + \dots 9 = 45$ formas distintas de posarse, así que la probabilidad es $\frac{9}{45} = \frac{1}{5}$.
Solución alternativa. El total de acomodos que tienen las gaviotas blancas se puede contar escogiendo dos lugares de entre los 10 que hay, lo cual nos da como resultado $(10 \times 9)/2 = 45$ posiblidades. Los arreglos donde las gaviotas blancas están juntas son claramente 9. La respuesta es (e).

Solución 109.

Racionalizando el denominador de cada fracción obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \cdot \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}} &= \\
\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} &= \\
\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1} &= \\
\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\cdots\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1} = \frac{-9}{-1} &= 9
\end{aligned}$$

La respuesta es (c).

Solución 110. La última vez que el entero n aparece en la lista es en la posición $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n)(n+1)}{2}$. La solución positiva de la ecuación $\frac{(n)(n+1)}{2} = 2004$ es aproximadamente 62.81, lo que quiere decir que 62 es la última sección de números iguales que aparece completa antes de la posición 2004. De acuerdo a lo anterior, en la posición 2004 está escrito el 63. La respuesta es (e).

Concentrado de Respuestas

1.- (c)
2.- (b)
3.- (b)
4.- (c)
5.- (a)
6.- (e)
7.- (b)
8.- (c)
9.- (b)
10.- (e)
11.- (c)
12.- (d)
13.- (d)
14.- (e)
15.- (d)
16.- (a)
17.- (a)
18.- (e)
19.- (c)
20.- (a)
21.- (c)
22.- (c)
23.- (d)
24.- (e)
25.- (d)
26.- (b)
27.- (e)
28.- (e)
29.- (c)
30.- (c)
31.- (e)
32.- (d)
33.- (d)
34.- (a)
35.- (b)
36.- (e)
37.- (c)
38.- (d)
39.- (e)
40.- (b)
41.- (a)
42.- (a)
43.- (d)
44.- (b)
45.- (a)
46.- (d)
47.- (b)
48.- (a)
49.- (d)
50.- (b)
51.- (d)
52.- (c)
53.- (e)
54.- (a)
55.- (c)
56.- (c)
57.- (d)
58.- (e)
59.- (e)
60.- (c)
61.- (c)
62.- (e)
63.- (d)
64.- (b)
65.- (b)
66.- (d)
67.- (c)
68.- (d)
69.- (c)
70.- (a)
71.- (e)
72.- (b)
73.- (c)
74.- (d)
75.- (b)
76.- (e)
77.- (d)
78.- (e)
79.- (a)
80.- (c)
81.- (b)
82.- (e)
83.- (b)
84.- (b)
85.- (b)
86.- (d)
87.- (c)
88.- (a)
89.- (d)
90.- (e)
91.- (c)
92.- (b)
93.- (e)
94.- (d)
95.- (b)
96.- (d)
97.- (e)
98.- (d)
99.- (b)
100.- (a)
101.- (d)
102.- (a)
103.- (d)
104.- (e)
105.- (b)
106.- (c)
107.- (d)
108.- (e)
109.- (c)
110.- (e)

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Radmila Bulajich Manfrino
(Presidenta)

Ana Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Martín Eduardo Frías Armenta

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Jesús Jerónimo Castro

Carmen Sosa Garza