Problemas Introductorios

para la

34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
José Antonio Gómez Ortega
Isabel Hubard Escalera
Enna Laura Martínez Martínez de Escobar
María Luisa Pérez Seguí

2020

Luis Miguel García Velázquez

Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia,
Universidad Nacional Autónoma de México

José Antonio Gómez Ortega

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Isabel Hubard Escalera

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

Enna Laura Martínez Martínez de Escobar

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2021: la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en el Estados Unidos de Norteamérica durante el mes de julio, la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en Costa Rica, la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Panamá en el mes de junio y la 10^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas a realizarse en el mes de abril en Georgia.

En la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 2001. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2019-2020, y para el 1^o de julio del año 2021 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los problemas que se incluyen en este folleto se propusieron por parte del Canguro Matemático Mexicano y tienen distintos niveles. Los comités estatales utilizaron los problemas a su conveniencia. En muchos estados los problemas aquí presentados fueron aplicados en los exámenes de diferentes etapas del proceso estatal.

Los primeros 20 problemas que aparecen en esta publicación formaron parte de los niveles básicos del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos con los conocimientos mínimos de 5^o de primaria. El resto de los problemas de opción múltiple (del 21 al 40) formaron parte del Examen Eliminatorio del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de 2 horas, como un examen eliminatorio, por estudiantes de 3^o de secundaria o grados más avanzados. Los últimos cinco problemas corresponden a la siguiente fase de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

Para continuar con la preparación, a partir del 21 de abril -y durante un mes- se distribuirán los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página: `http://canguro.deltagauge.info/`

Este folleto se edita con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el mes de noviembre de 2020. La Ciudad donde se realizará es Guanajuato. En él se elegirán a las preselecciones mexicanas.

Entrenamientos. A los alumnos de las preselecciones que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2021. También se aplicarán exámenes para determinar a los concursantes que representarán a México en las diferentes Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca, Toluca, Guadalajara, Acapulco, Santiago, Campeche y Ciudad de México.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en los concursos internacionales donde participa han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31
2013	Colombia	97	17
2014	Sudáfrica	101	26
2015	Tailandia	104	19
2016	Hong Kong	109	23
2017	Brasil	112	43
2018	Rumania	107	36
2019	Reino Unido	112	41

En 2019, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Bruno Gutierrez Chávez de Colima (medalla de plata), Eric Iván Hernández Palacios de Nuevo

León (medalla de bronce), Tomás Francisco Cantú Rodríguez de la Ciudad de México (medalla de bronce), Ana Paula Jiménez Díaz de la Ciudad de México (medalla de bronce), Pablo Alhui Valeriano Quiroz de Nuevo León (medalla de bronce), Diego Hinojosa Téllez de Jalisco (mención honorifica). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de oro, 26 medallas de plata, 64 medallas de bronce y 38 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6
2013	Panamá	20	3
2014	Honduras	22	1
2015	Puerto Rico	23	4
2016	Chile	22	4
2017	Argentina	22	4
2018	España-Portugal	22	4
2019	México	23	4

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en 2019 obtuvieron medalla: Bruno Gutierrez Chávez de Colima (medalla de plata), Ana Paula Jiménez Díaz de la Ciudad de México (medalla de plata), Tomás Francisco Cantú Rodríguez de la Ciudad de México (medalla de bronce), Eric Iván Hernández Palacios de Nuevo León (medalla de bronce). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 28 medallas de oro, 51 medallas de plata, 37 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1
2013	Nicaragua	13	1
2014	Costa Rica	12	1
2015	México	13	1
2016	Jamaica	13	1
2017	El Salvador	14	1
2018	Cuba	12	1
2019	República Dominicana	12	1

En la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo dos medallas de oro: Daniel Alejandro Ochoa Quintero de Tamaulipas y Karla Rebeca Munguía Romero de Sinaloa y dos medallas de plata: Jacobo de Juan Millón de Yucatán y Luis Eduardo Martínez Aguirre de Nuevo León. La delegación nacional obtuvo el primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 40 medallas de oro, 22 de plata y 3 de bronce.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
2014	Turquía	28	17
2015	Bielorusia	30	9
2016	Rumania	39	13
2017	Suiza	44	14
2018	Italia	56	7
2019	Ucrania	50	10

En abril de 2019 México participó en la 8^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Kiev, Ucrania. Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. El equipo mexicano fue integrado por Ana Paula Jiménez Díaz de la Ciudad de México (medalla de oro) Nuria Sydykova Méndez de la Ciudad de México (medalla de plata), Karla Rebeca Munguía Romero de Sinaloa (medalla de plata) y Nathalia del Carmen Jasso Vera de Guanajuato (mención honorifica). En total, en la Olimpiada Europea Femenil, México ha obtenido 2 medallas de oro, 9 medallas de plata, 9 medallas de bronce y una mención honorifica.

Resultados en el Concurso Nacional de la 33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2019 se llevó a cabo en la Ciudad de México el Concurso Nacional de la 33^a OMM, con la participación de los treinta y dos Estados de la República. Los 17 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León),
Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
Carlos Alberto Páez De la Cruz (Querétaro),
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),
Bryan Calderón Rivera (Chihuahua),
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León),
Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas),
Leonardo Mikel Cervantes Mateos, (Ciudad de México),
Alfredo Hernández Estrada (San Luis Potosí),
Ana Illanes Martínez de la Vega, (Ciudad de México),
José Alejandro Reyes González (Morelos),
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León),
Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa),
Mauricio Elías Navarrete Flores (Chihuahua),

Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato) y
Crisanto Slazar Verástica (Sinaloa).

Los 9 alumnos pre seleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes),
Eric Ransom Treviño (Nuevo León),
Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa)
Dariam Samuel Aguilar García (Baja California),
Alier Sánchez y Sánchez (Quintan Roo),
Luis Ángel Gabriel Jiménez Iturbide (Tabasco),
Alejandro Ozymandias Cepeda Beltrán (Estado de México) y
David García Maldonado (Oaxaca).

Las 8 alumnas pre seleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),
Ana Illanes Martínez de la Vega, (Ciudad de México),
Katia García Orozco (Chihuahua),
Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato),
Mirena Flores Valdez (Ciudad de México),
Samantha Ruelas Valtierra (Querétaro),
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa) y
Itzanami Berlanga Contreras (San Luis Potosí).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 33º Concurso Nacional:

1. Ciudad de México
2. Nuevo León
3. Guanajuato
3. Chihuahua
5. Sinaloa
6. Morelos
7. Jalisco
8. Querétaro
9. San Luis Potosí
10. Tlaxcala.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Baja California Sur. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Guerrero y Quintana Roo.

Material de estudio e información sobre la OMM

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar otro material de estudio disponible, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

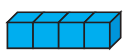
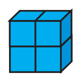
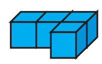
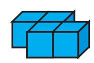
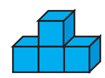
`http://ommenlinea.org/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Febrero 2020

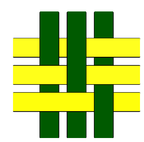
Enunciados de los problemas

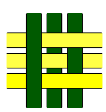
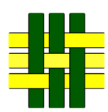
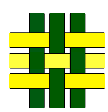
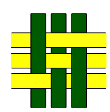
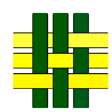
Los siguientes problemas son de nivel introductorio y son de calentamiento; sin embargo debes leerlos con cuidado para entender qué se pide en cada caso.

Problema 1. Cada una de las piezas se formó pegando 4 cubos del mismo tamaño. La superficie exterior debe pintarse. ¿Cuál de las piezas usará menos pintura?

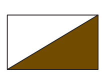
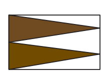
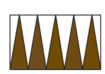
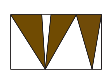
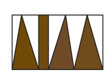
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 2. Seis tiras de tela se entrelazan como se muestra. ¿Cómo se ve el tejido desde atrás?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

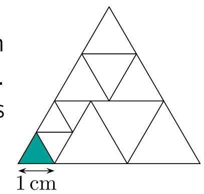
Problema 3. Un rectángulo se sombreó en las 5 distintas maneras que se muestran. ¿En cuál de las figuras el área sombreada es mayor?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 4. Tres ardillas, Ada, Bris y Carly recogieron 7 nueces en total. Cada ardilla recogió una cantidad distinta y cada una recogió al menos una nuez. ¿Cuántas nueces recogió Carly si se sabe que fue la que más nueces recogió?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) falta información

Problema 5. Un triángulo equilátero se divide en triángulos equiláteros más pequeños como se muestra. Si el triangulito sombreado mide 1 cm de lado, ¿cuál es el perímetro del triángulo original?

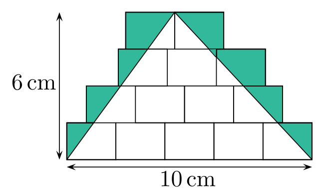


(a) 15 cm (b) 17 cm (c) 18 cm (d) 20 cm (e) 21 cm

Problema 6. La suma de las edades de un grupo de niños es 36. Dentro de 2 años la suma de las edades será 60. ¿Cuántos niños hay en el grupo?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 20 (e) 24

Problema 7. En la figura se muestran rectángulos idénticos que se dibujaron en el piso y, sobre ellos, un triángulo de base 10 cm y altura 6 cm. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) 12 cm^2 (b) 14 cm^2 (c) 16 cm^2 (d) 18 cm^2 (e) 21 cm^2

Problema 8. Se tienen 7 tarjetas numeradas del 1 al 7. Se repartieron 2 tarjetas a cada una de 3 personas y se observó que las de Alicia tenían el mismo residuo al dividirlas entre 3, las de Berta el mismo residuo de la división entre 4 y las de Carolina el mismo residuo de la división entre 5. ¿Qué tarjeta sobró?

(a) sólo puede ser 1 (b) sólo puede ser 4 (c) sólo puede ser 7
(d) sólo puede ser 4 o 7 (e) puede ser cualquiera

Problema 9. En el jardín de una bruja hay 30 animales: perros, gatos y ratones. La bruja convierte 6 de los perros en 6 gatos. Después convierte 5 de los gatos en 5 ratones. Si después de esto hay el mismo número de perros que de gatos que de ratones, ¿cuántos gatos había al principio?

(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

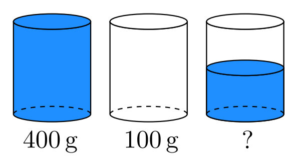
Problema 10. Cada día, Amanda, Beatriz y Camilo van a pasear. Se sabe que si Amanda no lleva puesto un sombrero, entonces Beatriz sí lo lleva puesto, y que si Beatriz no lleva sombrero puesto, entonces Camilo sí lo lleva puesto. Hoy Beatriz no lleva puesto sombrero. ¿Quién sí lo lleva puesto?

(a) Amanda y Camilo (b) Sólo Amanda (c) Sólo Camilo
(d) Ni Amanda ni Camilo (e) No se puede saber

Problema 11. Amira, Bernardo, Constancio, Dora y Eric fueron a una fiesta. Algunos de ellos estrecharon la mano entre sí. Si Amira sólo estrechó la mano una vez, Bernardo lo hizo 2 veces, Constancio lo hizo 3 veces y Dora lo hizo 4 veces, ¿cuántas veces lo hizo Eric?

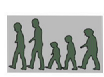
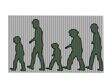
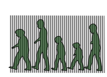
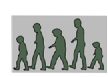
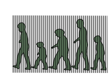
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 12. Un recipiente de vidrio lleno de líquido pesa 400 g. Cuando está vacío pesa 100 g. ¿Cuánto pesa cuando está lleno a la mitad?



(a) 150 g (b) 200 g (c) 225 g (d) 250 g (e) 300 g

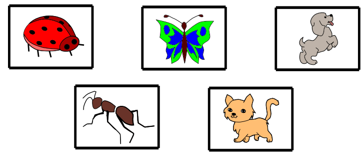
Problema 13. Ordenados en una fila detrás de una cortina se formaron Armando, Beto, Carlos, Diego y Enrique, en ese orden. Armando mide más que Diego y que Enrique; el más alto es Beto y el más bajo es Carlos; Enrique es más alto que Diego. ¿Cómo se ven sus siluetas?

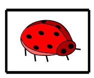
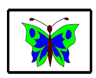
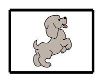
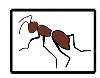
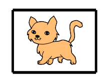
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 14. Rodolfo tiene muchas monedas, todas iguales. Para comprar una manzana y una pera tiene que pagar 5 monedas; para comprar un plátano y una manzana tiene que pagar 7 monedas; para comprar una pera y un plátano tiene que pagar 10 monedas. ¿Cuántas monedas tiene que pagar por una manzana, una pera y un plátano?

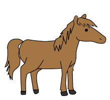
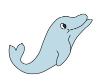
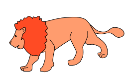
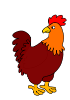
(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 15. Las tarjetas de la derecha se colocarán en la tira de abajo. La de la hormiga o la del gato debe ir junto a la del canguro. La del perro debe ir entre la del gato y la de hormiga. La de la catarina debe ir entre la del gato y la de la mariposa. ¿Cuál va en la casilla sombreada?

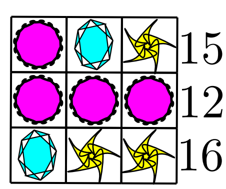


(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 16. El carrusel va dando vueltas y tarda 50 segundos en dar una vuelta completa. Al principio el caballo está enfrente; 10 segundos después está el delfín, etcétera. ¿Qué animal queda enfrente después de 3 minutos?

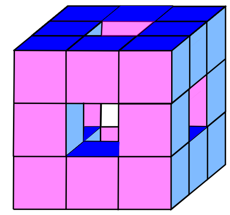
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 17. En el tablero que se muestra, cada forma representa un número distinto. La suma de los tres números en cada renglón se muestra a la derecha del renglón. ¿Qué número representa  ?



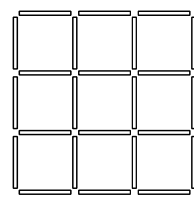
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 18. Con cubos de lado 1 se formó un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Después, en cada una de las direcciones se hicieron perforaciones de adelante hacia atrás, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, quitando siempre los cubos centrales de lado 1 (ver la figura). ¿Cuántos cubos de lado 1 quedaron?



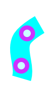
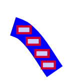
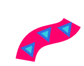
(a) 15 (b) 18 (c) 20 (d) 21 (e) 24

Problema 19. Natalia tiene varios palitos de longitud 1; algunos de ellos son azules, otros rojos, otros blancos y otros verdes. Quiere construir una figura de 3×3 como la que se muestra, de manera que cada cuadrito de lado 1 tenga exactamente un palito de cada color. ¿Cuál es el mínimo número de palitos verdes que debe usar?

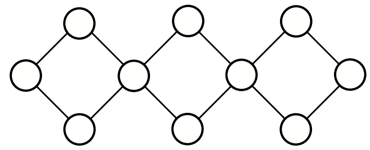


(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 20. Cinco listones están sostenidos de una barra de madera. Se trenzan como sigue: En un primer paso se toma el de la derecha y se pasa al centro, por encima de los demás; en un segundo paso se hace lo mismo con el de la izquierda. Esto se repite alternando derecha e izquierda como (ver el esquema). ¿Cuál queda en el centro al terminar el paso número 2019?

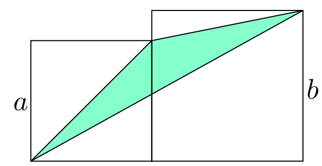
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 21. Se quiere repartir los números del 1 al 10 en los círculos de la figura de forma que la suma de los 4 círculos que rodean cada cuadrado sea la misma en cada uno de los 3 cuadrados. ¿Cuál es el menor valor posible de esa suma?



(a) 18 (b) 19 (c) 20 (d) 21 (e) 22

Problema 22. En la figura se muestran dos cuadrados adyacentes de lados a y b (con $a < b$). ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

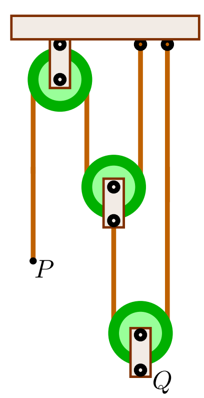


(a) $\sqrt{ab}$ (b) $\frac{1}{2}a^2$ (c) $\frac{1}{2}b^2$ (d) $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ (e) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Problema 23. Cada uno de 4 premios se sortea para dárselo a una de dos personas. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna de las dos personas se quede con todos los premios?

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Problema 24. En la figura se muestra un sistema de 3 poleas con secciones verticales de cuerda entre ellas. Cuando el extremo P se mueve hacia abajo 24 centémetros, ¿cuántos centémetros se mueve hacia arriba el extremo Q?

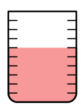
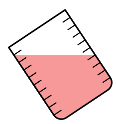
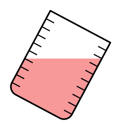
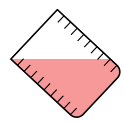


(a) 24 (b) 12 (c) 8 (d) 6 (e) $\frac{24}{5}$

Problema 25. Juana estuvo lanzando una pelota a la canasta de basquetbol. Después de 20 lanzamientos había encestado 55% de las veces. Cinco lanzamientos después aumentó a 56% su proporción de aciertos. ¿En cuántos de esos 5 últimos tiros acertó?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 26. En cinco recipientes de vidrio idénticos se ha puesto líquido, como se muestra en la figura. Cuatro de ellos tienen la misma cantidad de líquido. ¿Cuál de ellos tiene distinta cantidad?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

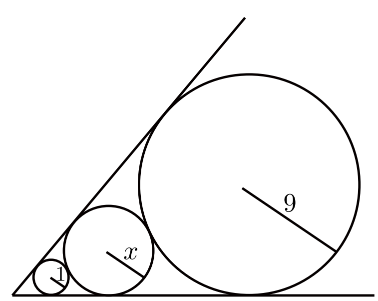
Problema 27. ¿Cuántos de los números enteros entre el 2^{10} y el 2^{13}, inclusive, son divisibles entre 2^{10}?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 16

Problema 28. ¿De cuántas formas es posible escoger tres números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ de manera que uno de ellos sea el promedio de los otros dos?

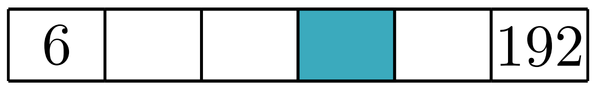
(a) 12 (b) 20 (c) 30 (d) 40 (e) 60

Problema 29. En la figura, las rectas forman un ángulo de 60º y los círculos son tangentes entre sí y a las rectas. Si el círculo pequeño tiene radio 1 y el círculo grande tiene radio 9, ¿cuál es el radio del círculo de enmedio?



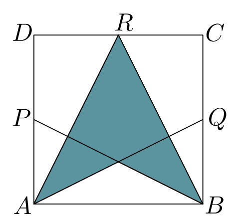
(a) 3 (b) 4 (c) $\frac{9}{2}$ (d) $4\sqrt{3}$ (e) 5

Problema 30. En la franja que se muestra están escritos los números 6 y 192 en las casillas de los extremos. En cada una de las demás casillas debe escribirse un número de manera que cada uno se obtenga sacando la raíz cuadrada del producto de los dos números a sus lados. ¿Qué número debe ir en la casilla sombreada?



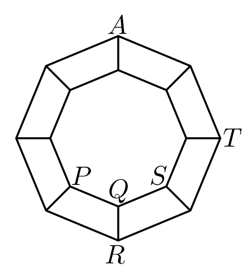
(a) 36 (b) 48 (c) 72 (d) 99 (e) 108

Problema 31. El diagrama muestra un cuadrado $ABCD$ con P, Q y R los puntos medios de los lados DA, BC y CD respectivamente. ¿Qué fracción del cuadrado $ABCD$ está sombreada?



(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{5}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{7}{16}$ (e) $\frac{3}{8}$

Problema 32. La figura que se muestra consta de 16 vértices, algunos de los cuales están conectados entre sí por segmentos. Sobre las líneas de la figura se traza un camino que usa 2019 segmentos y que empieza en el vértice A. ¿En cuál de los vértices P, Q, R, S o T puede terminar el camino? (Nota: el camino puede repetir vértices y segmentos.)



(a) sólo en P, R o S (b) sólo en P, R, S o T (c) sólo en Q
(d) sólo en T (e) en cualquiera de ellos es posible

Problema 33. Un tren está formado por 18 vagones. En total hay 700 pasajeros en el tren, pero se sabe que en cada 5 vagones consecutivos hay exactamente 199 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros en total hay en los dos vagones que están en el centro del tren?

(a) 70 (b) 77 (c) 78 (d) 96 (e) 103

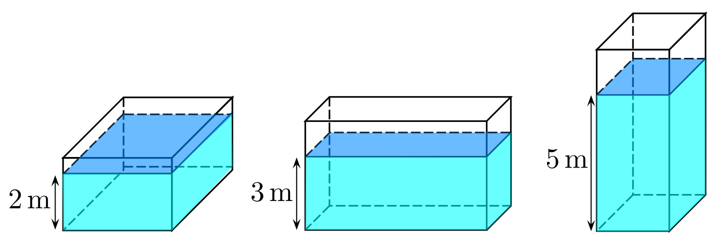
Problema 34. Los 7 dígitos del número telefónico $\overline{aaabbbb}$ se suman y se obtiene el número de dos dígitos $\overline{ab}$. ¿Cuánto vale $a + b$?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 35. En algunas cajas se empacaron 60 manzanas y 60 peras, de manera que cada caja tiene la misma cantidad de manzanas y no hay dos cajas que tengan el mismo número de peras (aunque podría haber una caja sin peras). ¿Cuál es el máximo número de cajas que pudieron haberse usado?

(a) 20 (b) 15 (c) 12 (d) 10 (e) 6

Problema 36. Un recipiente con la forma de una caja rectangular se llena parcialmente con $120\,\mathrm{m}^3$ de agua. La profundidad del agua es $2\,\mathrm{m}$ o $3\,\mathrm{m}$ o $5\,\mathrm{m}$, dependiendo de cuál es la base de la caja que se pone en el piso, como se muestra en el esquema (no a escala). ¿Cuál es el volumen del recipiente?



(a) $160\,\mathrm{m}^3$ (b) $180\,\mathrm{m}^3$ (c) $200\,\mathrm{m}^3$ (d) $220\,\mathrm{m}^3$ (e) $240\,\mathrm{m}^3$

Problema 37. ¿Cuántos enteros positivos n son tales que su divisor más grande (excluyendo al mismo n) es $n - 6$?

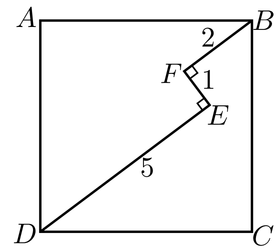
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6 (e) una infinidad

Problema 38. ¿Cuál es el mayor entero menor o igual que

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}}\ ?$$

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 20 (e) 25

Problema 39. Dentro del cuadrado $ABCD$ hay unos segmentos DE, EF y FB de manera que $DE \perp EF$ y $EF \perp FB$ como se muestra. Además $DE = 5$, $EF = 1$ y $FB = 2$. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?

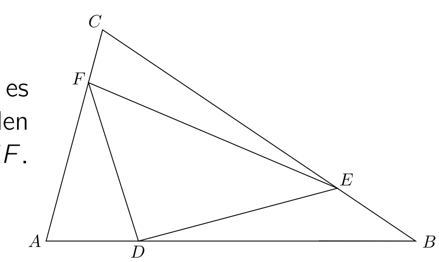


(a) $3\sqrt{2}$ (b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{11}{2}$ (d) $5\sqrt{2}$ (e) ninguna de las anteriores

En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Los problemas que se incluyen aquí formaron parte del examen semifinal de la 33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que se aplicó en varios estados de la república. Al final encontrarás las respuestas.

Problema 40. Una sucesión de números enteros positivos consecutivos se llama *balanceada* si contiene la misma cantidad de múltiplos de 3 que de múltiplos de 5. ¿Cuál es la máxima cantidad de términos que puede tener una sucesión balanceada?

Problema 41. El área del triángulo ABC es igual a $40\,\text{cm}^2$. Los puntos D, E y F cumplen que $BD = 3AD$, $CE = 3BE$ y $AF = 3CF$. ¿Cuál es el área del triángulo DEF?

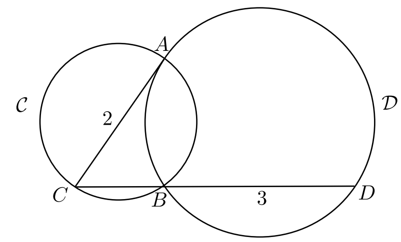


Problema 42. Encontrar una terna (a, b, c) de enteros positivos que cumplan $ab + c = 34$ y $a + bc = 29$.

Problema 43. El número que abre un candado está formado por 4 dígitos distintos. ¿Cuál es el número si cada uno de los números siguientes tiene una cifra incorrecta y otra fuera de su lugar?

6427 4271 6412 2671

Problema 44. Los círculos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de la figura se intersectan en A y B. El diámetro CA de $\mathcal{C}$ es tangente a $\mathcal{D}$ en A, y D es el punto en $\mathcal{D}$ tal que C, B y D están alineados. Si $BD = 3$ y $AC = 2$, ¿cuál es el área de $\mathcal{D}$?



Soluciones de los Problemas

Solución 1. Como todas las piezas están formadas por 4 cubitos, es más fácil revisar cuántas caras no deben pintarse en vista de que se encuentran pegadas entre sí. En (b) hay 4 pares de caras de este tipo y en todas las demás opciones hay sólo 3. La respuesta es (b).

Solución 2. Desde atrás, se ve a la izquierda lo que ahora se ve a a la derecha y viceversa. Lo que está arriba se sigue viendo arriba. Fijándonos en la parte superior notamos que (d) es la única opción. La respuesta es (d).

Solución 3. Salvo en la figura de (e), el área sombreada en todas las demás figuras está formada por triangulitos que van de un lado del rectángulo al lado opuesto, así que en ellas el área sombreada es, a lo más, la mitad del área del rectángulo (en (d) es un poco menos de la mitad; en (a), (b) y (c) es exactamente la mitad). En (e), en vista de que una parte sobreada comprende un rectangulito y éste, junto con los triangulitos, completan una base del rectángulo, el área sombreada es mayor. La respuesta es (e).

Solución 4. La única forma de lograr que las tres cantidades sean distintas, ninguna sea cero y que su suma sea 7 es: $1+2+4=7$. Por lo que Carly recogió 4 nueces. La respuesta es (b).

Solución 5. Observamos que el triángulo que está a la derecha de los triangulitos que miden 1 cm de lado debe medir 2 cm de lado, y lo mismo los dos triángulos a la derecha de éste. Entonces el triángulo grande tiene base 5 cm y, como es equilátero, su perímetro es $3 \times 5 = 15$ cm. La respuesta es (a).

Solución 6. La diferencia entre 36 y 60 es 24 y, como cada niño contribuye en 2 a la suma, concluimos que el número de niños es 12. La respuesta es (b).

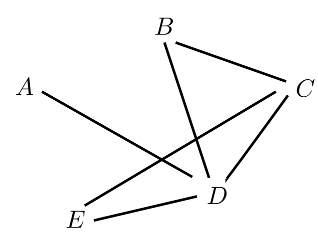
Solución 7. Hay 14 rectángulos que miden 2 cm de base por $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ cm de altura. Cada rectángulo tiene área de $2 \times \frac{3}{2} = 3\,\text{cm}^2$, así que el área de todo lo que forman los rectángulos es $14 \times 3 = 42\,\text{cm}^2$. Para obtener el área sombreada, a esta cantidad hay que restarle el área del triángulo, que es $\frac{10\times 6}{2} = 30\,\text{cm}^2$. Así que el área sombreada es $42 - 30 = 12\,\text{cm}^2$ La respuesta es (a).

Solución 8. Notemos que las opciones de las tarjetas de Alicia son 1 y 4, 2 y 5 o 3 y 6. Las de Berta son 1 y 5, 2 y 6 o 3 y 7, mientras que Carolina tiene solo dos opciones: 1 y 6 o 2 y 7. Conviene empezar viendo las posibilidades de las tarjetas de Carolina. Si fueran 1 y 6, entonces las únicas posibilidades para las tarjetas de Berta serían 3 y 7, y para las de Alicia serían 2 y 5; en ese caso sobraría 4. Si Carolina tuviera a 2 y 7, entonces Berta tendría a 1 y 5, y Alicia tendría a 3 y 6. También sobraría 4. La respuesta es (b).

Solución 9. Como el número total de animales es de 30 y al final hay el mismo número de cada tipo, entonces al final hay 10 gatos. Por otro lado, sabemos que el número de gatos primero incrementa en 6 y luego se reduce en 5, de manera que al final queda sólo uno más que al principio, es decir, el número de gatos al principio era de 9. La respuesta es (a).

Solución 10. Como Beatriz no lleva sombrero entonces Camilo sí lleva. Si Amanda no llevara sombrero, entonces Beatriz sí llevaría, pero Beatriz no lleva sombrero así que Amanda sí lleva. La respuesta es (a).

Solución 11. Como Dora saludó a todos, por lo que Amira sólo saludó a Dora. Luego, como Constancio saludó a tres, entonces vemos que saludó a todos menos a Amira. Entonces Bernardo saludó a Constancio y a Dora (y a nadie más). Esto quiere decir que Eric saludó a 2 personas. Podemos poner esto en un esquema, como se muestra a la derecha.



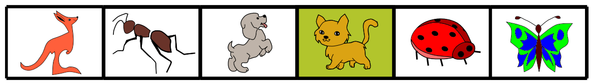
La respuesta es (c).

Solución 12. Como pesa 400 g cuando está lleno y 100 g cuando está vacío, deducimos que el líquido total pesa 300 g. Entonces la mitad del líquido pesa 150 g que, agregados al peso del recipiente nos dan 250 g. La respuesta es (d).

Solución 13. En todas las opciones, salvo en (a), Armando mide menos que Diego o que Enrique. En la opción (a) todas las condiciones se cumplen. La respuesta es (a).

Solución 14. Con el total de monedas: $5 + 7 + 10 = 22$ se podrían comprar 2 manzanas, 2 peras y 2 plátanos, de manera que la respuesta es la mitad: 11 monedas. La respuesta es (d).

Solución 15. Como el perro está entre el gato y la hormiga, y uno de éstos está junto al canguro, el perro va en la tercera casilla. Como la catarina va entre el gato y la mariposa, entonces es el gato el que va en la casilla sombreada. Las tarjetas quedan como se muestra en la figura:



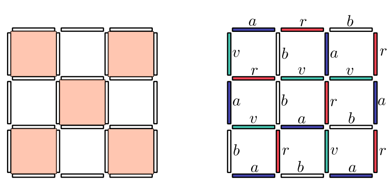
La respuesta es (e).

Solución 16. Cada 10 segundos hay un nuevo animal enfrente; 3 minutos equivale a $60 \times 3 = 180$ segundos. Notemos que $180 = 150 + 30 = 50 \times 3 + 30$, así que después de 3 minutos el carrusel habrá dado tres vueltas completas (de 50 segundos cada una) y estará el tercer animal después del caballo, es decir, el flamenco. La respuesta es (d).

Solución 17. Del segundo renglón tenemos que  vale $\frac{12}{3} = 4$. Entonces deducimos, del primer renglón, que  +  es 11, y así, en el tercer renglón tenemos que  vale $16 - 11 = 5$. Regresamos al primer renglón para deducir que  vale $15 - 4 - 5 = 6$. La respuesta es (e).

Solución 18. Dividamos el cubo grande en capas: la de enfrente, la central y la de atrás. En la capa de enfrente se quitó sólo un cubito y lo mismo en la capa de atrás; en la segunda capa se quitaron 5 cubitos (pues sólo quedaron los de las esquinas de ese nivel). Quedaron $27 - 1 - 5 - 1 = 20$ cubitos. La respuesta es (c).

Solución 19. Observemos que los cuadros sombreados en la figura de la izquierda son 5 y no comparten ningún lado, así que al menos se necesitan 5 palitos verdes. En la figura de la derecha se muestra un acomodo con 5 palitos verdes que cumple las condiciones, así que le mínimo es, efectivamente, 5.



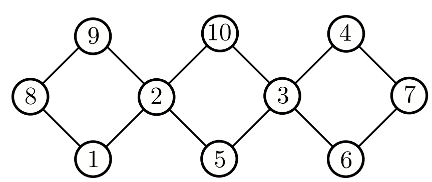
La respuesta es (c).

Solución 20. Numeremos los listones de izquierda a derecha y hagamos los primeros pasos:

inicio	1	2	3	4	5
*paso*1	1	2	5	3	4
*paso*2	2	5	1	3	4
*paso*3	2	5	4	1	3
*paso*4	5	4	2	1	3
*paso*5	5	4	3	2	1

Observamos que después de 5 pasos quedan en el orden inverso. Así, cada 10 pasos quedan en el lugar inicial y entonces el paso 2019 es como el paso 9, uno anterior a quedar en orden, y éste tiene el orden 3 1 2 4 5. La respuesta es (b).

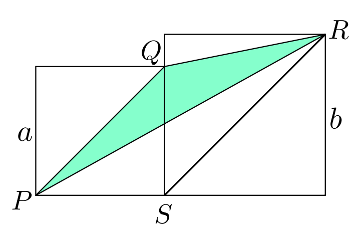
Solución 21. Como alrededor de cada cuadrado la suma es la misma, si sumamos los números de cada cuadrado, el número debe ser múltiplo de 3. Por otro lado, los números que aparecen en los dos círculos centrales contribuyen dos veces a esa suma, así que la suma de los números del 1 al 10, que es 55, más los dos números de los círuclos centrales debe ser múltiplo de 3. El menor múltiplo de 3 mayor que 55 es 57, pero entonces esos dos números sumarían 2, lo cual es imposible. El siguiente múltiplo es 60. Poniendo uno de los números como 2 y el otro como 3 se logra la suma 60. En la figura se muestra un acomodo con esta posibilidad (y suma $\frac{60}{3} = 20$). La respuesta es (c).



Solución 22. *Primera forma.* A la suma de las áreas de los cuadrados hay que restarles las áreas de los 3 triángulos no sombreados:

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + (b-a)b + (a+b)b) = \frac{a^2}{2}.$$

Segunda forma. Tracemos la diagonal RS del cuadrado de lado b como se muestra en la figura. Entonces vemos que los triángulos PQR y PQS tienen la misma área (pues tienen la misma base PQ y su altura es la distancia entre las paralelas PQ y SR). El área de PQS es claramente la mitad del área del cuadrado de lado a. La respuesta es (b).



Solución 23. El primer premio puede darse a cualquiera de las dos personas. Después cada uno de los otros 3 premios tiene probabilidad de $\frac{1}{2}$ de entregarse a la misma persona, asé que la respuesta es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. La respuesta es (a).

Solución 24. Como la longitud de la cuerda es siempre la misma, cada una de las cuerdas de la polea central se acorta a la mitad, es decir, la polea central sube 12 centémetros. Análogamente la cuerda que sostiene la polea del extremo Q se acorta en 12 centémetros repartidos en los dos lados, de manera que el punto Q sube 6 centémetros. La respuesta es (d).

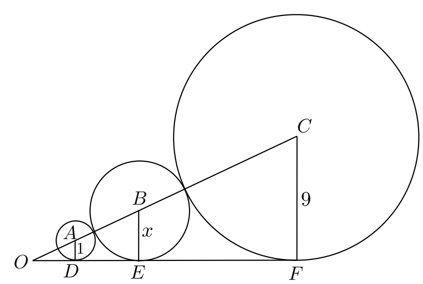
Solución 25. El 55% de 20 es 11, así que al principio había acertado 11 veces. Como el 56% de 25 es 14, acertó $14 - 11 = 3$ veces en esos 5 tiros. La respuesta es (c).

Solución 26. Podemos observar que, en todos los casos, la vista frontal del líquido es un trapecio con altura el ancho del recipiente. Entonces la diferencia entre la cantidad de líquido está simplemente dada por la diferencia entre la suma de las longitudes de los dos lados paralelos del trapecio. En (a) la suma es $6 + 6 = 12$; en (b) la suma es $9 + 4 = 13$; en (c) es $4 + 8 = 12$; en (d) es $10 + 2 = 12$ y en (6) es $5 + 7 = 12$. La respuesta es (b).

Solución 27. Los números divisibles entre 2^{10} son de la forma $2^{10}b$ para b entero. Como $2^{13} = 2^{10} \cdot 2^3 = 2^{10} \cdot 8$, las posibilidades para b que queremos contar son las que cumplen $1 \leq b \leq 8$. La respuesta es (d).

Solución 28. Digamos que los números escogidos son $a < b < c$. Para que b sea el promedio de a y c es necesario que a y c sean ambos pares o ambos impares y en esos casos b está determinado: $b = \frac{a+c}{2}$ (notando que, si $a \neq c$, entonces también b es distinto de a y de c). Entonces las posibilidades son $2 \cdot \binom{5}{2} = 2 \cdot 10 = 20$ pues hay 5 números pares y 5 impares. La respuesta es (b).

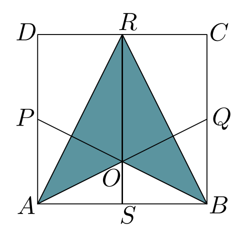
Solución 29. Consideremos la figura que se muestra. El ángulo entre las rectas es de 30º y sabemos que en un triángulo así (que es la mitad de un triángulo equilátero), la hipotenusa es el doble de uno de los catetos; en este caso, $OA = 2$ y $OC = 18$, de manera que $AC = 18 - 2 = 16$ y entonces $x = \frac{16-9-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$.



La respuesta es (a).

Solución 30. Primero supongamos que las máximas potencias de un número primo p que aparecen como factor de tres casillas consecutivas son p^a, p^b y p^c, con $a \leq b \leq c$. Entonces, $b = \frac{a+c}{2}$; es decir, b es el promedio de a y c, o dicho de otra manera, la diferencia entre b y a es la misma que entre c y b. Ahora observemos que $6 = 2 \cdot 3$ y $192 = 2^6 \cdot 3$ y entonces ya podemos deducir que los números intermedios son $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^4 \cdot 3 = 48$ y $2^5 \cdot 3 = 96$. La respuesta es (b).

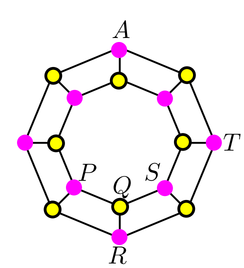
Solución 31. *Primera forma.* Sea S el punto medio de AB y sea O el punto de intersección de AQ con BP. Por simetría, O está sobre RS. Además, los triángulos AOS y AQB son semejantes y sus lados están en razón $1 : 2$. Digamos que el cuadrado tiene lado $4x$; entonces QB mide $2x$ y OS mide x. Ahora calculemos el área de los triángulos no sombreados. El triángulo AOB tiene área $\frac{4x \cdot x}{2} = 2x^2$; ambos triángulos ARD y BRC tienen área $\frac{4x \cdot 2x}{2} = 4x^2$. Entonces el área de la parte sombreada es $16x^2 - 2x^2 - 4x^2 - 4x^2 = 6x^2$ y la fracción buscada es $\frac{6x^2}{16x^2} = \frac{3}{8}$.



Segunda forma. El área sombreada es igual al área del triángulo ABR menos el área del triángulo AOB, donde O es la intersección de AQ y BP. Además el triángulo ABR tiene la mitad del área del cuadrado. Por otra parte, el rectángulo $ABQP$ también tiene área la mitad del área del cuadrado puesto que P y Q son los puntos medios de AD y BC, respectivamente. Ahora, las diagonales del rectángulo $ABQP$ lo dividen en 4 triángulos de igual área, por lo que el área de ABO es $1/4$ del área del $ABQP$ y, por lo tanto $1/8$ del área del cuadrado. Finalmente, el área sombreada es $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

La respuesta es (e).

Solución 32. Coloreemos los vértices de la figura con dos colores de forma tal que los extremos de cada segmento tengan distinto color, como se muestra en la figura. Notamos entonces que todo camino alterna colores y, como 2019 es impar y el camino inicia en A, entonces sólo puede terminar en un vértice con distinto color que A, así que la única posibilidad es Q. Para ver que sí es posible llegar en 2019 pasos hay muchas posibilidades; una de ellas es llegar de A a Q directamente en 5 pasos y después moverse de Q a S alternadamente hasta completar los 2019 movimientos. La respuesta es (c).



Solución 33. Digamos que las cantidades de personas en los 5 primeros vagones son a, b, c, d y e, en ese orden. Como $a+b+c+d+e=199$ pero también del segundo vagón al sexto hay en total 199 personas, el sexto vagón tiene a personas. De la misma manera deducimos que el séptimo tiene b personas y así sucesivamente, como se muestra en el esquema.

$$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\underbrace{\boxed{d}\boxed{e}}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$$

Ahora, entre los 15 primeros vagones hay $3\cdot 199=597$ personas, así que en los tres últimos hay $700-597=103$ personas, es decir, $a+b+c=103$ y entonces $d+e=199-103=96$, y ésta es la cantidad de personas en los dos vagones centrales.

La respuesta es (d).

Solución 34. La suma de los 7 dígitos es $3a+4b$. El número de dos dígitos $\overline{ab}$ se puede escribir como $10a+b$. Entonces tenemos que $3a+4b=10+b$, de donde $3b=7a$. Como a y b son dígitos, entonces $a=3$ y $b=7$, de donde $a+b=10$.

La respuesta es (c).

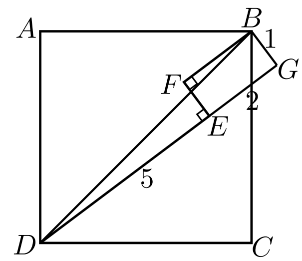
Solución 35. Como todas las cajas tienen la misma cantidad de manzanas, entonces 60 es divisible entre el número de cajas. La suma de 12 o más enteros distintos es, al menos, $0+1+2+\cdots+11=66$, así que el número de cajas es menor a 12. El siguiente divisor de 60 menor que 12 es 10, y sí es posible lograr la condición con los siguientes números de peras para las cajas: $1,2,3,4,5,6,7,8,9,15$. La respuesta es (d).

Solución 36. Digamos que los lados del recipiente miden a, b y c metros. Entonces $2ab=3bc=5ac=120$, así que $ab=60$, $bc=40$ y $ac=24$. Multiplicando las tres igualdades obtenemos $(abc)^2=24^2\cdot 10^2$, de donde $abc=240$. La respuesta es (e).

Solución 37. Tenemos que $6=n-(n-6)$ y, como $n-6$ es divisor de n y de sí mismo, tenemos que $n-6$ es divisor de 6. Entonces las posibilidades para $n-6$ son 1, 2, 3 y 6; de donde las posibilidades para n son 7, 8, 9 y 12. Ahora revisamos en cada una de éstas si $n-6$ es el mayor divisor de n, lo cual sólo ocurre para 7, 9 y 12. La respuesta es (c).

Solución 38. Sabemos que $4<\sqrt{20}<5$, así que $24<20+\sqrt{20}<25$, de donde $4<\sqrt{24}<\sqrt{20+\sqrt{20}}<\sqrt{25}=5$, es decir, $4<\sqrt{20+\sqrt{20}}<5$ Repitiendo esto obtenemos que el mayor entero menor o igual que la expresión dada es 4. La respuesta es (a).

Solución 39. Construyamos el rectángulo $BFEG$ como se muestra. Entonces la diagonal del cuadrado $ABCD$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo BDG así que, por el teorema de Pitágoras, $DB^2 = 7^2 + 1^2 = 50$. Otra vez, por el teorema de Pitágoras, si llamamos x al lado del cuadrado, tenemos que $x^2 + x^2 = 50$, de donde $x = 5$.



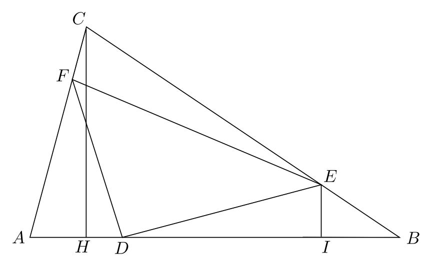
La respuesta es (e).

Solución 40. Si consideramos los números del 10 al 20 tendremos tres múltiplos de 5 (el 10, 15 y el 20) y tres múltiplos de 3 (el 12, 15 y 18), así que obtenemos una lista de 11 enteros consecutivos balanceada. Veamos que no hay más grandes.

Si la sucesión tiene 12, 13 o 14 elementos, tendremos al menos 4 múltiplos de 3 y a lo más 3 múltiplos de 5.

Si son 15, tendremos 5 múltiplos de 3 y 3 múltiplos de 5, así que hay 2 múltiplos de 3 de más. En los números que siguen, nunca tendremos dos múltiplos de 5 sin algún múltiplo de 3 entre ellos. Esto implica que siempre habrá más múltiplos de 3.

Solución 41. Trazamos las alturas de ABC desde C y de DBE desde E. Los triángulos CHB y EIB son semejantes y la razón de semejanza es $4:1$. Entonces $IE = \frac{1}{4}CH$. Como $DB = \frac{3}{4}AB$ tenemos que el área de DBE es igual a



$$\frac{1}{2}IE \cdot DB = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}CH\right)\left(\frac{3}{4}AB\right) = \frac{3}{32}(AB \cdot CH) = \frac{3}{32}(80) = 7.5.$$

De la misma manera, las áreas de los triángulos ADF y CFE son iguales a 7.5, por lo que el área del triángulo DEF es igual a $40 - 3(7.5) = 17.5\,\text{cm}^2$.

Solución 42. Restando las ecuaciones obtenemos que $ab + c - a - bc = (a - c)(b - 1) = 5$, de donde $b - 1$ es igual a 1 o 5. Por lo tanto, $b = 2$ o $b = 6$. Veamos cada caso.

- Si $b = 2$ obtenemos el sistema de ecuaciones $2a + c = 34$ y $a + 2c = 29$, cuyas soluciones son $a = 13$ y $c = 8$.
- Si $b = 6$ obtenemos el sistema de ecuaciones $6a + c = 34$ y $a + 6c = 29$, cuyas soluciones son $a = 5$ y $c = 4$.

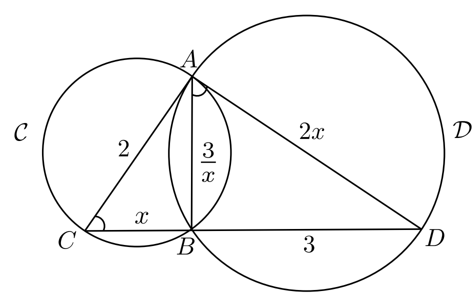
Por lo tanto, podemos concluir que las soluciones son $(a, b, c) = (13, 2, 8)$ y $(a, b, c) = (5, 6, 4)$.

Solución 43. Notemos que el 2 aparece en todos los números, mientras que el $1, 4, 6$ y 7 aparece cada uno en exactamente tres de los cuatro números. Por lo tanto, si el número que no pertenece fuera uno de $1, 4, 6$ o 7, uno de los cuatro números tendría todos sus dígitos correctos. En otras palabras, como el 2 es el único dígito que aparece en todos, entonces 2 no pertenece al número correcto y así las cifras del número buscado son 1, 4, 6 y 7. Entonces 2 aparece en el lugar de alguno de éstos y, al sustituirlo en cada una de las opciones, el número que queda tiene intercambiadas el número sustituido por 2 con otra de las cifras. Veamos cada uno de los casos:

- Si se sustituye 2 en 6427 por 1, obtenemos 6417. El intercambio de 1 con 6 produce 1467; de 1 con 4 produce 6147; de 1 con 7 produce 6471.
- Si se sustituye 2 en 4271 por 6, obtenemos 4671. El intercambio de 6 con 4 produce 6471; de 6 con 7 produce 4761; de 6 con 1 produce 4176.

Ahora ya tenemos el resultado, pues la única coincidencia en los dos casos es 6471. Es fácil verificar que las condiciones del problema se satisfacen para este número.

Solución 44. Como AC es diámetro de $\mathcal{C}$ y B es un punto en $\mathcal{C}$, entonces $\angle ABC = 90^\circ$. Por lo tanto $\angle ABD = 90^\circ$ y entonces AD es diámetro de $\mathcal{D}$. Por ser CA tangente a $\mathcal{D}$ en A y AD diámetro, también tenemos que $\angle CAD = 90^\circ$. Entonces $\angle CAB + \angle BAD = 90^\circ = \angle CAB + \angle ACB$, de donde $\angle BAD = \angle ACB$ y así los triángulos $\triangle BAD$ y $\triangle BCA$ son semejantes, de manera que sus lados son proporcionales.



Tenemos así que

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AD}{CA},$$

de donde

$$\frac{3}{BA} = \frac{AD}{2}.$$

Sea $AD = 2x$; entonces $BA = \frac{3}{x}$. Ahora, por el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle ABD$,

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 3^2 = 4x^2,$$

de donde $\frac{9}{x^2} + 9 = 4x^2$; multiplicando por x^2 obtenemos $4x^4 - 9x^2 - 9 = 0$ y, resolviendo,

$$x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 9 \cdot 16}}{8} = \frac{9 \pm 3\sqrt{25}}{8} = \frac{9 \pm 15}{8},$$

y como x^2 no puede ser negativo, tenemos que $x^2 = 3$ y entonces el área de $\mathcal{D}$ es 3π.

Concentrado de Respuestas

1. (b)
2. (d)
3. (e)
4. (b)
5. (a)
6. (b)
7. (a)
8. (b)
9. (a)
10. (a)
11. (c)
12. (d)
13. (a)
14. (d)
15. (e)
16. (d)
17. (e)
18. (c)
19. (c)
20. (b)
21. (c)
22. (b)
23. (a)
24. (d)
25. (c)
26. (b)
27. (d)
28. (b)
29. (a)
30. (b)
31. (e)
32. (c)
33. (d)
34. (c)
35. (d)
36. (e)
37. (c)
38. (a)
39. (e)
40. ()
41. ()
42. ()
43. ()
44. ()
45. ()

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
Ciudad de México
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: http://www.ommenlinea.org/

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas