# Problemas Introductorios

para la

**28**ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
María Luisa Pérez Seguí
Julio César Aguilar Cabrera
María Elena Aguilera Miranda

2014

**Luis Miguel García Velázquez**

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

**María Luisa Pérez Seguí**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

**Julio César Aguilar Cabrera**

Investigador Asociado,
Laboratorio Nacional de Informática Avanzada

**María Elena Aguilera Miranda**

Egresada del Doctorado en Ciencias Matemáticas,
Instituto de Matemáticas, UNAM

# Contenido

**Presentación** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **i**

Etapas de la Olimpiada . . . . . . . . . . . . . . . . . ii

Resumen de Resultados . . . . . . . . . . . . . . . . . ii

Resultados de las Delegaciones que han representado a México . . . . . . . . . . . . . iii

Resultados en el Concurso Nacional de la 27a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas . . . . . . . . v

Material de estudio e información sobre la Olimpiada. . . . . . vii

**Enunciados de los problemas** . . . . . . . . . . . . . . . . **1**

**Soluciones de los Problemas** . . . . . . . . . . . . . . . . **13**

**Concentrado de Respuestas** . . . . . . . . . . . . . . . . **27**

**Información de Contacto** . . . . . . . . . . . . . . . . **29**

# Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la $28^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2015: la $56^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en Tailandia durante el mes de julio, la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en Puerto Rico y la XVII Olimpiada de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Guatemala en el mes de junio.

En la $28^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del $1^o$ de agosto de 1995. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2014-2015, y para el $1^o$ de julio del año 2015 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Todos los problemas que se incluyen en el problemario han formado parte de distintas etapas del Canguro Matemático Mexicano. Los primeros treinta problemas que aparecen en esta publicación formaron parte del Examen del Nivel Olímpico y están pensados para ser resueltos en un lapso de 3 horas, como un examen eliminatorio. Los siguientes quince problemas formaron parte de exámenes de otros niveles y, aunque pueden variar en la dificultad, no requieren más teoría que la de una etapa eliminatoria. Los últimos problemas corresponden a una segunda fase de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

## Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

**Exámenes Estatales.** Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

**Concurso Nacional.** Este concurso se llevará a cabo en el Estado de México durante el mes de noviembre de 2014. En él se elegirá a la preselección mexicana.

**Entrenamientos.** A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2015. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual y gratuita.

Durante el mes de abril se distribuyen los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página

`http://canguro.deltagauge.info/`

## Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí y Huasca.

## Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y de Centroamérica y el Caribe han sido los siguientes:

| **Olimpiada Internacional de Matemáticas** | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 1988 | Australia | 49 | 37 |
| 1989 | Rep. Fed. de Alemania | 50 | 31 |
| 1990 | Rep. Popular de China | 54 | 36 |
| 1991 | Suecia | 55 | 35 |
| 1992 | Rusia | 56 | 49 |
| 1993 | Turquía | 73 | 63 |
| 1994 | Hong Kong | 69 | 65 |
| 1995 | Canadá | 74 | 59 |
| 1996 | India | 75 | 53 |
| 1997 | Argentina | 82 | 32 |
| 1998 | Taiwan | 75 | 44 |
| 1999 | Rumania | 81 | 52 |
| 2000 | Corea | 82 | 30 |
| 2001 | Estados Unidos | 83 | 46 |
| 2002 | Escocia | 84 | 46 |
| 2003 | Japón | 82 | 41 |
| 2004 | Grecia | 84 | 37 |
| 2005 | México | 91 | 31 |
| 2006 | Eslovenia | 90 | 24 |
| 2007 | Vietnam | 92 | 37 |
| 2008 | España | 97 | 37 |
| 2009 | Alemania | 104 | 50 |
| 2010 | Kasajistán | 97 | 33 |
| 2011 | Holanda | 101 | 22 |
| 2012 | Argentina | 100 | 31 |
| 2013 | Colombia | 97 | 17 |

En 2013, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron una medalla. Ellos fueron: Enrique Chiu Han del Distrito Federal (plata), Juan Carlos Ortiz Rhoton de Jalisco (plata), Diego Alonso Roque Montoya de Nuevo León (plata), Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán (bronce), Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León (bronce) y Adán Medrano Martín del Campo de Jalisco (bronce). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 2 medalla de oro, 13 medallas de plata, 50 medallas de bronce y 31 menciones honoríficas.

| Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 1989 | Cuba | 13 | 3 |
| 1990 | España | 15 | 3 |
| 1991 | Argentina | 16 | 5 |
| 1992 | Venezuela | 16 | 6 |
| 1993 | México | 16 | 9 |
| 1994 | Brasil | 16 | 6 |
| 1995 | Chile | 18 | 9 |
| 1996 | Costa Rica | 17 | 2 |
| 1997 | México | 17 | 3 |
| 1998 | República Dominicana | 18 | 5 |
| 1999 | Cuba | 20 | 3 |
| 2000 | Venezuela | 21 | 2 |
| 2001 | Uruguay | 21 | 3 |
| 2002 | El Salvador | 22 | 3 |
| 2003 | Argentina | 19 | 4 |
| 2004 | España | 22 | 5 |
| 2005 | Colombia | 22 | 2 |
| 2006 | Ecuador | 21 | 1 |
| 2007 | Portugal | 22 | 4 |
| 2008 | Brasil | 21 | 6 |
| 2009 | México | 21 | 5 |
| 2010 | Paraguay | 21 | 3 |
| 2011 | Costa Rica | 21 | 1 |
| 2012 | Bolivia | 19 | 6 |
| 2013 | Panamá | 20 | 3 |

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2013 obtuvieron medalla: dos de oro con examen perfecto (Juan Carlos Ortiz Rhoton de Jalisco y Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán) y dos de plata (Diego Alonso Roque Montoya de Nuevo León y Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 22 medallas de oro, 39 medallas de plata, 31 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

| Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe | | | |
|---|---|---|---|
| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
| 1999 | Costa Rica | 10 | 2 |
| 2000 | El Salvador | 9 | 2 |
| 2001 | Colombia | 10 | 2 |
| 2002 | México | 8 | 1 |
| 2003 | Costa Rica | 11 | 1 |
| 2004 | Nicaragua | 12 | 1 |
| 2005 | El Salvador | 12 | 1 |
| 2006 | Panamá | 12 | 1 |
| 2007 | Venezuela | 12 | 1 |
| 2008 | Honduras | 12 | 2 |
| 2009 | Colombia | 12 | 1 |
| 2010 | Puerto Rico | 16 | 1 |
| 2011 | México | 12 | 1 |
| 2012 | El Salvador | 12 | 1 |
| 2013 | Nicaragua | 13 | 1 |

En la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo tres medallas de oro (Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León, Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán y Jorge Pat De la Torre Sánchez de Coahuila), ubicándose así la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, México ha obtenido 28 medallas de oro, 14 de plata y 3 de bronce.

## Resultados en el Concurso Nacional de la 27a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2013 se llevó a cabo en Huasca, Hidalgo, el 27º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 20 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Arturo Arellano Árias (Campeche),
Luis Enrique Chachón Ochoa (Chihuahua),
José Nieves Flores Máynez (Chihuahua),
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua),
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila),
Zeus Caballero Pérez (Distrito Federal),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco),
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco),

Oscar Samuel Henney Arthut (Michoacán),
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos),
Joseandres Hinojoza Ortuño (Morelos),
Marlet Morales Franco (Nayarit),
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León),
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León),
Diego Fajardo Rojas (Puebla),
Jorge Luis Marroquín (Puebla),
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro),
Sandra Berenica Mendoza Peñúñuri (Sonora) y
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán).

Los 7 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe fueron:

Arturo Arenas Esparza (Chihuahua),
José Nieves Flores Máynez (Chihuahua),
Antonio López Guzmán (Chihuahua),
Karol José Gutiérrez Suárez (Colima),
Saúl Adrián Álvarez Tapia (Distrito Federal),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco) y
Jesús Emilio Domínguez Rusell (Sinaloa).

En 2014, México participará por primera vez en la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las 8 alumnas preseleccionadas para este concurso fueron:

Nayeli Reyes Moreno (Baja California),
Myriam Hernández Ketchul (Baja California Sur),
Naomi Mastache López (Guerrero),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Alka Xavier Earathu (Morelos),
Marlet Morales Franco (Nayarit),
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla) y
Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri (Sonora).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 27º Concurso Nacional:

1. Chihuahua
2. Nuevo León
3. Jalisco
4. Yucatán
5. Morelos
6. Puebla
7. Distrito Federal
6. Michoacán
9. San Luis Potosí
10. Sonora

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Chihuahua. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Puebla y Michoacán.

## Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

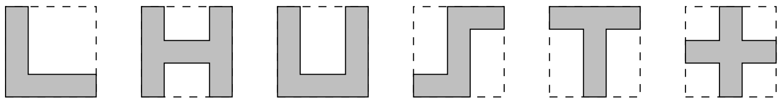
Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://www.ommenlinea.org/`

**EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA**
**OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**
Enero 2014

# Enunciados de los problemas

**Problema 1.** María dibuja figuras en un papel cuadrado como se muestra. ¿Cuántas de las figuras tienen perímetro distinto que el de la hoja de papel?

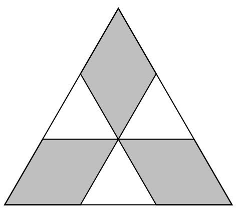


(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

**Problema 2.** Yaziel prende una vela cada 10 minutos. Cada vela permanece encendida 40 minutos y luego se apaga. ¿Cuántas velas estarán encendidas 3 horas con 55 minutos después de que Yaziel prendió la primera vela?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

**Problema 3.** En la figura se muestra un triángulo equilátero que tiene $9\,\text{cm}^2$ de área. Dentro de él se han dibujado líneas paralelas a sus lados, que los dividen en tres partes iguales. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

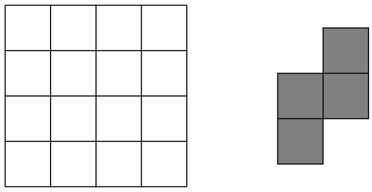


(a) $1\,\text{cm}^2$ (b) $4\,\text{cm}^2$ (c) $5\,\text{cm}^2$ (d) $6\,\text{cm}^2$ (e) $7\,\text{cm}^2$

**Problema 4.** El señor Gómez tiene tres hijos: Leonardo, Irving y Eduardo. Si se multiplican la edad de Leonardo y la de Irving, el resultado es 14. Si se multiplica la edad de Irving por la de Eduardo, se obtiene 10. Si se multiplican las edades de Eduardo y Leonardo, se obtiene 35. ¿Cuál es la suma de las edades de los tres niños? (Las edades son números enteros.)

(a) 10 (b) 14 (c) 16 (d) 18 (e) 35

**Problema 5.** Violeta tiene una hoja cuadriculada como se muestra en la figura. Siguiendo las líneas de la cuadrícula, ella recorta varias copias de la pieza que se muestra a la derecha. La pieza puede recortarse en cualquier posición sobre la hoja, incluso bocabajo. ¿Cuál es la cantidad más grande de piezas que pudo obtener?



(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

**Problema 6.** Un número entero es *jocoso* si cumple que el producto de sus dígitos es igual a 24. ¿Cuánto se obtiene al sumar los dígitos del más pequeño de los números jocosos?

(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

**Problema 7.** En una caja hay pelotas de 5 colores diferentes: 2 rojas, 3 azules, 10 blancas, 4 verdes y 3 amarillas. José toma pelotas de la caja, de una por una, con los ojos vendados. Las pelotas no se regresan a la caja. ¿Cuál es la menor cantidad de pelotas que José debe sacar para asegurar que ya hay dos pelotas del mismo color afuera?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 22

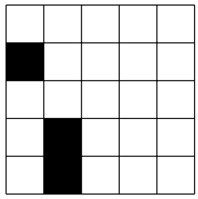
**Problema 8.** Gasde tiene 10 palitos que miden 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm y 10 cm. Quiere ponerlos en dos líneas de manera que la longitud de las dos líneas sea la misma. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) no puede lograrlo

**Problema 9.** Jana y Abi están paradas en lados opuestos de una fuente circular. Comienzan a correr alrededor de la fuente en el sentido de las manecillas del reloj. Si la velocidad de Abi es $\frac{9}{8}$ de la velocidad de Jana, ¿cuántas vueltas completas habrá dado Jana en el momento en que Abi la alcance?

(a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) 1 (e) no completa ninguna

**Problema 10.** Eugenia va a pintar de negro un rectángulo de $3 \times 1$ en la cuadrícula de la figura. Si el nuevo rectángulo no puede tener un punto en común con los que ya se han pintado, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

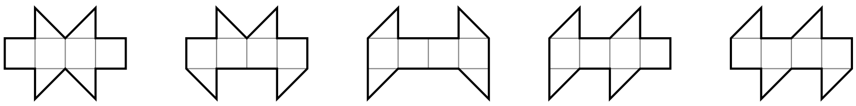


(a) 8 (b) 7 (c) 6 (d) 5 (e) 4

**Problema 11.** En una lista se escribieron todos los números que pueden formarse revolviendo los dígitos 2, 0, 1, 3 (sin repetir ninguno). Los números quedaron escritos de mayor a menor. Después se calcularon las diferencias entre cada dos números consecutivos de la lista, siempre restando a cada número el que le sigue en la lista. ¿Cuál es la mayor de estas diferencias?

(a) 198 (b) 693 (c) 702 (d) 703 (e) 793

**Problema 12.** Jathan cortó cada una de las figuras e intentó doblarlas para formar un cubo. Pudo hacerlo con todas ellas, excepto con una. ¿Cuál de ellas fue?



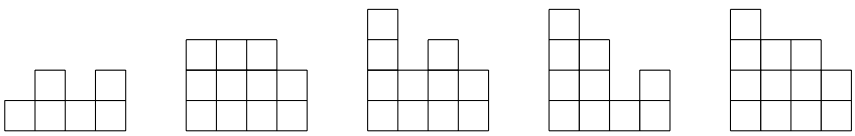
(a) (b) (c) (d) (e)

**Problema 13.** Ana hizo una construcción con cubos sobre una cuadrícula de $4 \times 4$. En el diagrama se muestra el número de cubos que hay apilados sobre cada celda. Cuando Ana mira la construcción desde el frente, ¿qué figura ve?

atrás

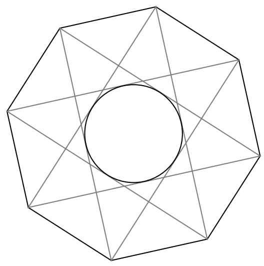
| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |

frente



(a) (b) (c) (d) (e)

**Problema 14.** En la figura se muestra un octágono regular con algunas líneas que unen vértices del octágono y un círculo tangente a esas líneas. Si los lados del octágono miden 10, ¿cuánto mide el radio del círculo?



(a) 2 (b) 2.5 (c) $5\sqrt{2}$ (d) $\frac{8}{3}$ (e) 5

**Problema 15.** Estefanía escribió una lista de números consecutivos. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de números impares en la lista?

(a) 40% (b) 45% (c) 48% (d) 50% (e) 60%

**Problema 16.** En un papel anoté las fechas de nacimiento de Charis, Erandi, Paco, Rodrigo y Valentina. Las fechas anotadas son 11 de enero de 2000, 23 de enero de 2001, 20 de febrero de 2001, 11 de marzo de 2000 y 20 de marzo de 2001, pero no recuerdo quien nació en qué fecha. Recuerdo que Erandi y Charis nacieron el mismo mes y que Paco y Rodrigo nacieron el mismo mes. Además recuerdo que Paco y Valentina nacieron en días con el mismo número y que Erandi y Rodrigo también nacieron en días con el mismo número. ¿Quién es el más joven de los cinco?

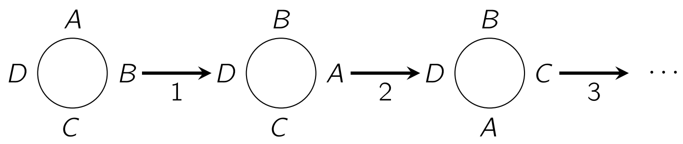
(a) Rodrigo (b) Erandi (c) Valentina (d) Charis (e) Paco

**Problema 17.** En una elección cada uno de los 5 candidatos obtuvo una cantidad distinta de votos. En total hubo 36 votos. El ganador obtuvo 12 votos y el que quedó en último lugar obtuvo 4. ¿Cuántos votos tuvo el candidato que quedó en segundo lugar?

(a) 8 y 9 son las dos posibilidades (b) 9 y 10 son las dos posibilidades

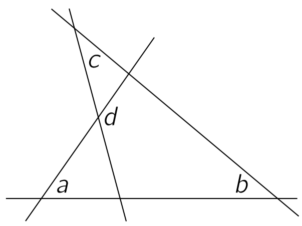
(c) sólo 8 es posible (d) sólo 9 es posible (e) sólo 10 es posible

**Problema 18.** Adrián, Bruno, Carlos y Daniela están sentados alrededor de una mesa. Cada uno tiene un sombrero con su nombre. Intercambian sombreros por turnos en forma circular como sigue: Primero Adrián cambia sombrero con Bruno, después Bruno intercambia su sombrero con Carlos (de manera que después del segundo intercambio Carlos tiene el sombrero de Adrián, y Bruno tiene el de Carlos). Continúan intercambiando circularmente por parejas (hacia la derecha) hasta que cada uno tiene su propio sombrero. En la figura se muestra cómo se movieron los sombreros en los dos primeros intercambios, considerando que los cuatro amigos permanecen siempre en su lugar. ¿Cuántos intercambios hicieron en total?



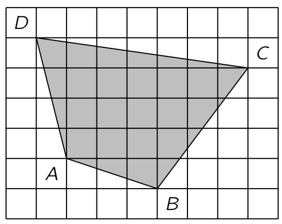

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 12 (e) 16

**Problema 19.** En la figura, $a = 55^o$, $b = 40^o$ y $c = 35^o$. ¿Cuál es el valor del ángulo $d$?




(a) 135° (b) 130° (c) 125° (d) 120° (e) 100°

**Problema 20.** Si los lados de cada uno de los cuadritos de una cuadrícula como la que se muestra en la figura miden 1 cm, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?

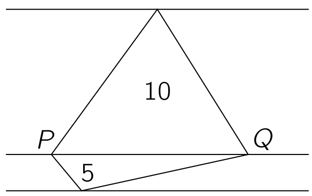



(a) 21 $\text{cm}^2$ (b) 22 $\text{cm}^2$ (c) 23 $\text{cm}^2$ (d) 24 $\text{cm}^2$ (e) 25 $\text{cm}^2$

**Problema 21.** Susana escribe un número de cinco dígitos. Después borra uno de los dígitos y se queda con un número de cuatro dígitos. Si la suma de ambos números es 52713, ¿cuál es la suma de los dígitos del número que escribió originalmente?

(a) 17 (b) 19 (c) 20 (d) 23 (e) 26

**Problema 22.** Las áreas de los triángulos de la figura son 5 y 10, según se muestra. Las tres líneas horizontales son paralelas y la distancia entre las dos líneas extremas es de 6. ¿Cuál es la longitud de $PQ$?

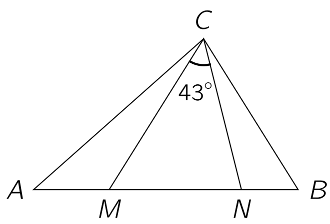



(a) 5 (b) $\frac{15}{4}$ (c) 6 (d) $\frac{36}{5}$ (e) $\frac{15}{2}$

**Problema 23.** Un jardinero va a plantar pinos y manzanos en una línea. En total va a sembrar 20 árboles. Si el número de árboles que debe haber entre dos manzanos no debe ser igual a 3, ¿cuál es la mayor cantidad de manzanos que puede plantar?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14 (e) 16

**Problema 24.** En el triángulo $ABC$ de la figura, los puntos $M$ y $N$ cumplen que $AN = AC$ y $BM = BC$. ¿Cuánto mide $\angle ACB$ si $\angle MCN = 43^o$?

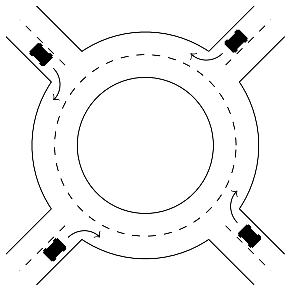



(a) $95^o$ (b) $94^o$ (c) $92^o$ (d) $90^o$ (e) $89^o$

**Problema 25.** Rodrigo y David corrieron un maratón. Al final de la carrera se dieron cuenta de que David terminó adelante del doble de personas que terminaron antes que Rodrigo. También notaron que Rodrigo terminó antes que 1.5 veces el número de corredores que terminaron antes que David. David terminó el maratón en la posición número 21. ¿Cuántos corredores participaron?

(a) 31 (b) 41 (c) 51 (d) 61 (e) 81

**Problema 26.** Cuatro autos entran en una glorieta, cada uno por una calle distinta, como se muestra en la figura. Cada uno de los coches rodea la glorieta sin completar una vuelta y sale. Si no hubo dos autos que tomaran la misma salida, ¿de cuántas formas pudieron salir los coches de la glorieta?



(a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 15 (e) 24

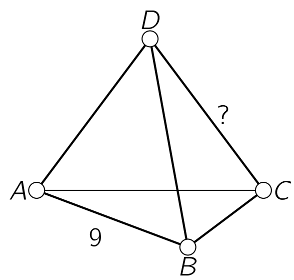
**Problema 27.** Una lista de 2013 números empieza con 1, -1, -1, 1, -1. A partir de la sexta posición, el número que se escribe es el producto de los dos números anteriores. Por ejemplo, el sexto número en la lista es -1, que es el producto del cuarto y el quinto números de la lista. ¿Cuál es la suma de todos los números de la lista?

(a) 1007 (b) 671 (c) 0 (d) -671 (e) -1006

**Problema 28.** Malena tenía 6 rebanadas de pan y las fue tostando de una en una. Su hija Gretel entra en la cocina varias veces y cada vez se come la rebanada que encuentra más caliente en ese momento. Si numeramos las rebanadas de pan del 1 al 6 de acuerdo al orden en que fueron tostadas, ¿cuál de los siguientes no puede ser el orden en que Gretel se comió los panes?

(a) 654321 (b) 125436 (c) 325461 (d) 123456 (e) 456231

**Problema 29.** El tetraedro de la figura se hizo con 6 palitos y 4 bolitas de plastilina. Se le asigna un número a cada uno de los palitos y cada una de las bolitas. Los números asignados son todos distintos y van del 1 al 11, pero el 10 no se utilizó. El número asignado a cada palito es igual a la suma de los números asignados a las dos bolitas en sus extremos. ¿Cuál es el número que se le asignó al palito marcado como $DC$ en la figura?

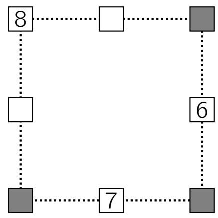



(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 11

**Problema 30.** Un entero $n$ es *maléfico* si es más pequeño que la suma de sus tres divisores más grandes (sin incluir a $n$). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Todo entero maléfico es divisible por 4.
(b) Todo entero maléfico es divisible por 5.
(c) Todo entero maléfico es divisible por 6.
(d) Todo entero maléfico es divisible por 7.
(e) No hay enteros maléficos.

**Problema 31.** Alicia escribió 6, 7 y 8 en los cuadritos como se muestra en la figura. Después escribirá los números 1, 2, 3, 4 y 5 en los cuadritos vacíos de manera que la suma de los 3 números en cada uno de los 4 lados del cuadrado punteado sean todas iguales a 13. ¿Cuál es la suma de los números que quedarán en los cuadritos sombreados?



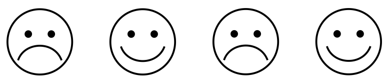

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 12

**Problema 32.** Seis números escogidos entre el 1 y el 5 se escriben en los cuadrados de la figura de tal manera que la suma de los números en ambos renglones es la misma y también los tres números suma de los números de las tres columnas son iguales. Ya se escribieron algunos de los números. ¿Qué número va en el lugar del cuadrado sombreado?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 4 |
| | 2 | |

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

**Problema 33.** Hay 4 botones en línea en una pantalla como se muestra. Dos de ellos muestran caras felices y dos muestran caras tristes. Si se toca una cara, su expresión y la expresión de las caras adyacentes cambia de feliz a triste y viceversa. ¿Cuál es el menor número de veces que se tiene que tocar alguna cara para lograr que todas sean carita feliz?

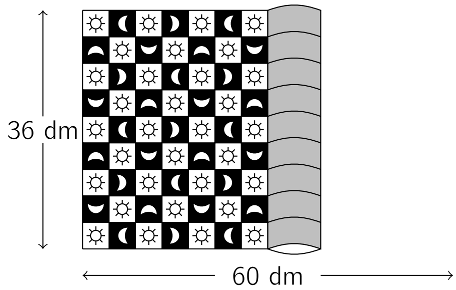


(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

**Problema 34.** En un cuadrado de $8 \times 8$ se hace un corte con una línea recta que lo divide en dos cuadriláteros iguales. Si los cuadriláteros tienen perímetro 26, ¿cuál es la longitud del lado menor de los cuadriláteros?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

**Problema 35.** Pedro compró una alfombra de 36 dm de ancho y 60 dm de largo. La alfombra tiene dibujos con cuadros que alternan luna y sol y está enrollada parcialmente (ver la figura). Cuando se desenrolla totalmente, ¿cuántas lunas se ven?




(a) 69 (b) 67 (c) 66 (d) 63 (e) 60

**Problema 36.** Aarón, Bety y Carlos siempre mienten. Cada uno tiene un lápiz que puede ser verde o rojo. Aarón dice: "Mi lápiz es del mismo color que el de Bety", Bety dice: "Mi lápiz es del mismo color que el de Carlos". Carlos dice: "Exactamente dos de nosotros tenemos lápiz rojo". ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) El lápiz de Carlos es rojo.
(b) El lápiz de Bety es verde.
(c) El lápiz de Aarón es verde.
(d) Los lápices de Aarón y de Carlos son de distinto color.
(e) Los lápices de Aarón y de Bety son del mismo color.

**Problema 37.** ¿Cuántos enteros $n$ cumplen con que ambos $\frac{n}{3}$ y $3n$ son enteros de tres dígitos?

(a) 12 (b) 33 (c) 34 (d) 100 (e) 300

**Problema 38.** Seis superhéroes capturan a 20 villanos. El primer superhéroe captura 1 villano, el segundo superhéroe captura 2 y el tercero 3. El cuarto superhéroe captura más que cualquiera de los otros 5. ¿Cuál es el menor número de villanos que pudo haber capturado el cuarto superhéroe?

(a) 7 (b) 6 (c) 5 (d) 4 (e) 3

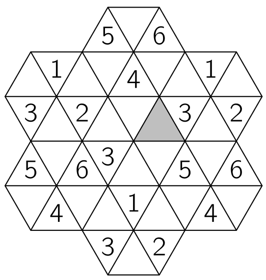
**Problema 39.** Había 2013 habitantes en una isla. Algunos de ellos eran caballeros y siempre decían la verdad y otros eran mentirosos y siempre mentían. Cada día uno de los habitantes se iba y decía: "En cuanto yo me vaya, entre los que se quedan el número de caballeros será el mismo que el de mentirosos." Después de 2012 días sólo quedó un caballero en la isla. ¿Cuántos caballeros había inicialmente?

(a) 0 (b) 1006 (c) 1007 (d) 2013 (e) falta información

**Problema 40.** Ruy tenía monedas de \$10 y de \$20. Tenía más monedas de \$10 que de \$20 y el número total de monedas era menor que 17. Usó todas sus monedas para comprar un pastel pero se le olvidó cuánto pagó. Sólo recuerda que cuando trataba de apilar las monedas de cualquier tipo de 2 en 2 se le quedaba siempre una (de cada tipo) fuera del montón, y cuando trataba de juntar de 3 en 3 las monedas de cada tipo se le quedaban 2 (de cada tipo) fuera de los montones. ¿Cuánto pagó?

(a) 150 (b) 180 (c) 200 (d) 210 (e) Falta información

**Problema 41.** En los triángulos de la figura deben escribirse los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 de tal manera que cada 6 triángulos que formen un hexágono tengan números distintos (nótese que algunos triángulos pertenecen a varios hexágonos). Algunos de los números ya se escribieron. ¿Qué número debe ir en el triángulo sombreado?




(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 6

**Problema 42.** ¿Cuál es el mínimo número de cuerdas dentro de un círculo para las cuales el número de intersecciones entre ellas es exactamente 50?

(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

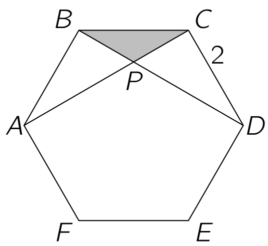
**Problema 43.** Una caja tiene 900 tarjetas numeradas del 100 al 999 (una con cada número). Francisco va a extraer de la caja algunas de las tarjetas y apuntará la suma de los dígitos de cada una (por ejemplo, si toma las tarjetas 209, 833 y 911, apuntará 11, 14 y 11). ¿Cuántas tarjetas debe tomar para poder garantizar que tomará tres cartas al menos con la misma suma de dígitos?

(a) 51 (b) 52 (c) 53 (d) 54 (e) 55

**Problema 44.** En una isla viven sólo dos tipos de hombres: los caballeros, que siempre dicen la verdad, y los mentirosos, que siempre mienten. Maripaz, que es muy lista, fue a visitar la isla y encontró a dos hombres. Primero preguntó a uno de ellos si los dos eran caballeros. Con la respuesta que le dio este hombre no pudo deducir qué eran. Entonces le preguntó al otro hombre si el primero al que había preguntado era caballero. Con la respuesta que obtuvo ya dedujo qué eran. ¿Cuál fue su conclusión?

(a) Que los dos eran mentirosos.
(b) Que el primero era mentiroso y el segundo era caballero.
(c) Que el primero era caballero y el segundo era mentiroso.
(d) Que los dos eran caballeros.
(e) Su deducción depende de las respuestas que obtuvo.

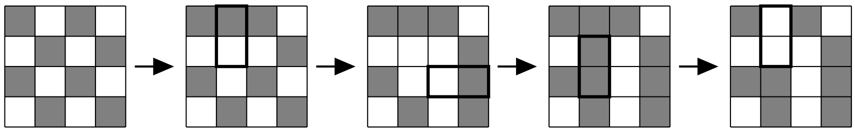
**Problema 45.** En la figura se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ de lado 2 y $P$ es la intersección de $AC$ con $BD$. Determinar el área del triángulo $BCP$.




(a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (c) 1 (d) $\sqrt{6}$ (e) $3\sqrt{2}$

**En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Al final encontrarás las respuestas.**

**Problema 46.** Determinar cuántos tableros distintos podemos conseguir a partir de un tablero de $4 \times 4$ pintado como tablero de ajedrez, si se puede ejecutar la siguiente operación tantas veces como se desee: *Escoger dos casillas que compartan un lado y cambiarle a cada una el color que tiene en ese momento: si es blanca pintarla de gris, y si es gris ponerla blanca.* (En la figura de abajo se muestran cuatro cambios sucesivos permitidos; cada vez se ha marcado con un recuadro los cuadros vecinos que se cambiaron en ese paso.)



**Problema 47.** ¿Cuál es el entero más cercano al valor de $x - y$ si

$$\begin{aligned} x &= \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{50^2}{99} \quad \text{y} \\ y &= \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{50^2}{101}? \end{aligned}$$

**Problema 48.** En el plano están dibujadas algunas líneas rectas. La línea $a$ intersecta exactamente otras 3; la recta $b$ intersecta a exactamente 4 de las rectas; la recta $c$ intersecta un número de rectas distinto de 3 y de 4. ¿Cuántas rectas hay? (*Nota:* Las líneas rectas se extienden en ambos sentidos indefinidamente, de manera que si dos rectas no son paralelas, entonces forzosamente se intersectan en un punto.)

**Problema 49.** ¿Cuántas parejas de enteros positivos $(x, y)$ cumplen con que su producto es igual a 5 veces su suma?

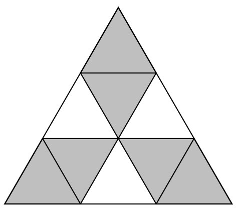
**Problema 50.** En una isla hay dos tipos de habitantes; los caballeros, que siempre dicen verdad, y los mentirosos, que siempre dicen mentiras. Un inspector llegó a la isla y preguntó a cada uno de los habitantes sobre si otro de los habitantes era caballeros o mentiroso. No preguntó sobre el mismo habitante dos veces. Luego corrió de la isla a todos aquéllos que habían sido señalados de ser mentirosos. Los caballeros que se quedaron pero que habían acusado a alguien de ser mentiroso se sintieron culpables y también se fueron de la isla. La cantidad de los caballeros que se salieron en esta segunda instancia fue la quinta parte de los caballeros que se habían ido en primera instancia. ¿Qué proporción de los habitantes que se fueron de la isla eran caballeros?

# Soluciones de los Problemas

**Solución 1.** Las únicas que tienen distinto perímetro son la H y la U. La respuesta es (a).

**Solución 2.** Estarán encendidas las que se prendieron entre 15 y 55 minutos, es decir, 4 velas. La respuesta es (a).

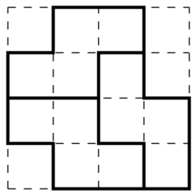
**Solución 3.** Usando más líneas paralelas a los lados para hacer la división que se muestra en la figura, el triángulo queda partido en 9 triángulos iguales. La parte sombreada está formada por 6 de esos triángulos, de modo que el área sombreada es $9 \cdot \frac{6}{9} = 6$.



La respuesta es (d).

**Solución 4.** Sean $l$ la edad de Leonardo, $i$ la de Irving y $e$ la de Eduardo. Como $l$ es un divisor de 14 y de 35, tenemos que $l = 1$ o $l = 7$. Si suponemos $l = 1$ entonces $e = 35$, pero eso no puede ser pues $e < 14$. Así, $l = 7$ y, por tanto, $e = \frac{35}{7} = 5$ e $i = \frac{10}{5} = 2$. De esta forma, tenemos que $l + i + e = 7 + 2 + 5 = 14$. La respuesta es (b).

**Solución 5.** En total hay 16 cuadritos y cada pieza utiliza 4 cuadritos, así que no se pueden obtener más de 4 piezas. Notemos que no es posible que todos los cuadritos de la hoja sean parte de alguna pieza pues, si hay una pieza que tenga la esquina inferior izquierda de la cuadrícula, es fácil darse cuenta de que hay al menos un cuadrito que no formará parte de ninguna otra pieza. Así, no es posible recortar 4 piezas. En la figura se muestra una forma de recortar tres.



La respuesta es (d).

**Solución 6.** Un número jocoso debe tener al menos dos dígitos. Como el segundo dígito puede ser a lo más 9, el primero debe ser mayor que 2. Si el primer dígito es 3, la única opción posible para el segundo dígito es 8. Así, el número jocoso más pequeño es 38 y la suma de sus dígitos es 11. La respuesta es (e).

**Solución 7.** Si se sacan 5 pelotas es posible que se haya tomado una de cada color, pero si se toman 6 forzosamente un color debe estar repetido. La respuesta es (a).

**Solución 8.** La suma total es 55 que no es par, así que no puede hacerlo. La respuesta es (e).

**Solución 9.** En cada vuelta que completa Jana, Abi está $\frac{1}{8}$ de vuelta más cerca de ella. Inicialmente estaban separadas por media vuelta, así que Abi alcanzará a Jana exactamente cuando ésta complete la cuarta vuelta. La respuesta es (b).

**Solución 10.** De forma horizontal solamente es posible pintarlo en los dos renglones superiores, pegado al lado derecho. De forma vertical es posible pintarlo únicamente en la cuarta o quinta columna, contando de izquierda a derecha. En cada columna se puede pintar de 3 formas distintas. En total, hay $2 + 2 \cdot 3 = 8$ maneras de hacerlo. La respuesta es (a).

**Solución 11.** La mayor diferencia se alcanza cuando se cambia la cifra de los millares. Las parejas de números consecutivos en los que ocurre esto son $(0321, 1023)$, $(1320, 2013)$ y $(2310, 3012)$. La primera y la tercera pareja tienen diferencia 702 y la segunda tiene diferencia 693 así que la mayor diferencia es 702. La respuesta es (c).

**Solución 12.** El (c) es el único que no puede doblarse para formar un cubo, puesto que la parte inferior no embona. La respuesta es (c).

**Solución 13.** Basta elegir el mayor número de cada columna del mapa para saber cuál torre determina la altura que se ve desde el frente. La respuesta es (e).

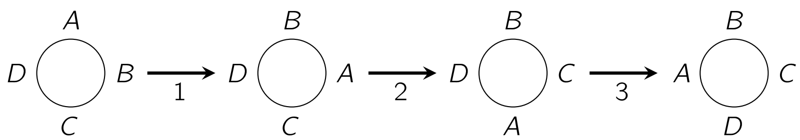
**Solución 14.** Tomando dos pares de diagonales perpendiculares tenemos que el círculo está inscrito en un cuadrado de $10 \times 10$ de lado, así que el diámetro del círculo es 10 y el radio es 5. La respuesta es (e).

**Solución 15.** Si hay dos números, el porcentaje es 50%. Como $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ basta con escribir 5 números en la lista y comenzar con un impar para obtener el 60%. Como $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ basta con escribir 5 números en la lista y comenzar con un par para obtener el 40%. Como $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ basta con escribir 25 números en la lista y comenzar con un par para obtener el 48%. Como $\frac{9}{20}$ es la simplificación de $\frac{45}{100}$, para que la lista tenga 45% de impares debe tener un múltiplo de 20 elementos y, por tanto, la longitud de la lista debe ser par así que contiene exactamente 50% de números impares y no 45% como queríamos. La respuesta es (b).

**Solución 16.** Valentina es la única que no nació en el mismo mes que alguien más, así que nació el 20 de febrero de 2001. Paco nació en un día con el mismo número que Valentina, así que nació el 20 de marzo de 2001 y es el más joven del grupo. La respuesta es (e).

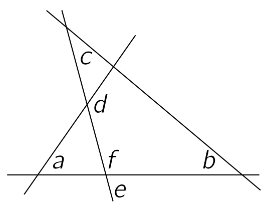
**Solución 17.** Entre el primer lugar y el último tuvieron 16 votos, así que los otros 3 tuvieron un total de 20 votos. Sabemos que el segundo lugar tuvo menos votos que el primero; si hubiera tenido 10 u 11 votos, los otros dos candidatos habrían sumado 9 o 10 votos, pero sabemos que uno de esos números debería ser al menos 5, así que no es posible. Como $8+7+5=20=9+6+5$, entonces es posible que haya tenido cualquiera de 8 o 9 votos. La respuesta es (a).

**Solución 18.** Veamos los primeros tres movimientos de los sombreros:




Observamos que quedan girados una posición a la izquierda y que otra vez se empieza con el intercambio de Adrián con Bruno. Esto nos dice que cada tres movimientos los sombreros quedan girados una posición. Para que queden igual deben girar todos 4 posiciones. La respuesta es (d).

**Solución 19.** En la figura se han marcado los ángulos $e$ y $f$. El ángulo $e$ es externo al triángulo que tiene dos ángulos iguales a $b$ y a $c$. Como $f+b+c=180^\circ$ y $e+f=180^\circ$, resulta que $e=b+c$. Dado que $d$ es ángulo externo del triángulo que tiene dos ángulos iguales a $a$ y a $e$, de forma similar obtenemos que $d=a+e$. Finalmente, $d=a+b+c=130$.




La respuesta es (b).

**Solución 20.** Cortando por las líneas horizontales que tienen a $D$ y a $B$ y las líneas verticales que tienen a $D$ y a $C$ obtenemos un rectángulo de $5\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}$. Si recortamos el cuadrito totalmente blanco que contiene a $A$ y el cuadrilátero, nos quedan cuatro triángulos con áreas de $1.5\,\text{cm}^2$, $2\,\text{cm}^2$, $3.5\,\text{cm}^2$ y $6\,\text{cm}^2$. Así, el área del cuadrilátero en $\text{cm}^2$ es $35 - 1 - 1.5 - 2 - 3.5 - 6 = 21$. La respuesta es (a).

**Solución 21.** La suma de ambos números es impar, así que los últimos dígitos de ambos no pueden ser iguales. De esta forma, el dígito que se borró en el segundo número fue el último. Llamemos $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$, en orden, a los dígitos del primer número. En la suma el acarreo nunca es mayor a 1, así que $a = 5$ o $a = 4$. Si $a = 5$ entonces no hubo acarreo en el paso anterior, pero eso es imposible pues 5 es mayor que 2. Así, $a = 4$ y entonces $b + 4 = 12$ o $b + 4 = 11$ (dependiendo del acarreo en el paso anterior), de donde $b = 8$ o $b = 7$. Si $b = 8$ entonces no hubo acarreo en el paso anterior, pero esto es imposible pues 8 es mayor que 7. Así, $b = 7$ y entonces $c + 7 = 17$ o $c + 7 = 16$ (dependiendo del acarreo en el paso anterior), pero es imposible que $c + 7 = 17$ pues $c < 10$. Luego, $c = 9$. Como 9 es mayor que 1, $d + 9 = 11$ o $d + 9 = 10$ (dependiendo del acarreo en el paso anterior), de donde $d = 1$ o $d = 2$. Como $e < 10$, en cualquiera de los dos casos $d + e = 3$. De esta forma, $a + b + c + d + e = 4 + 7 + 9 + 3 = 23$. La respuesta es (d).

**Solución 22.** Llamemos $h$ a la altura del triángulo grande. Entonces

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{1}{2} PQ \cdot h \\ 5 &= \frac{1}{2} PQ \cdot (6 - h). \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos $\frac{h}{6-h} = 2$, de donde $h = 12 - 2h$ así que $h = 4$ y entonces, de la primera ecuación, tenemos $PQ = \frac{20}{4} = 5$. La respuesta es (a).

**Solución 23.** Cada vez que se plante un manzano enla posición $i$, en la posición $i + 4$ no debe haber manzano; esto nos dice que hay un pino por cada manzano, salvo cuando $i + 4 > 20$. Entonces el máximo número de manzanos se alcanza cuando se plantan en las posiciones siguientes:

$$1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20.$$

La respuesta es (c).

**Solución 24.** Tenemos que $\angle CNM + \angle CMN = 180^\circ - 43^\circ$. Así, $\angle ACB = \angle ACN + \angle BCM - 43^\circ = \angle CNM + \angle CMN - 43^\circ = 137^\circ - 43^\circ = 94^\circ$. La respuesta es (b).

**Solución 25.** Llegaron 20 corredores antes que David, así que llegaron 30 corredores después de Rodrigo. Llamemos $x$ a la cantidad de corredores que llegaron antes que Rodrigo. Tenemos que $2x + 20 = 30 + x$, de donde $x = 10$. En total hubo $10 + 1 + 30 = 41$ corredores. La respuesta es (b).

**Solución 26.** Numeremos los carros y las salidas de manera que cada carro tenga el número de la calle por la que entró. Entonces el problema equivale a ver de cuántas maneras podemos revolver los números del 1 al 4 de manera que ninguno quede en su lugar. Éstas son las siguientes 9: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 y 4321. La respuesta es (a).

**Solución 27.** Los siguientes cuatro números en la lista son -1, 1, -1 y -1. Es claro que la lista se puede separar en bloques iguales de tres números, comenzando con los primeros tres. La suma de cada bloque es -1 y en total hay $\frac{2013}{3} = 671$ de esos bloques. La respuesta es (d).

**Solución 28.** En la quinta opción la niña entra a la cocina cuando está caliente el cuarto pan. Es imposible que después el segundo pan haya estado más caliente que el tercero (y se lo haya comido antes). Es fácil comprobar que las demás opciones son posibles, considerando que cuando hay dos números consecutivos en orden creciente es porque la niña llegó a la cocina cuando el segundo de esos panes era el último que había salido del tostador. La respuesta es (e).

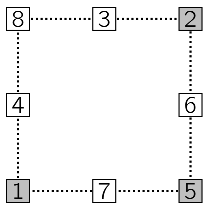
**Solución 29.** Notemos que los números 1 y 2 deben corresponder a dos de las bolitas. Si el 1 está en $A$ entonces $B$ es 8. Como $D$ o $C$ deben tener la etiqueta del 2, el 10 debió usarse para etiquetar el palito que une al 2 con el 8 (lo cual sabemos que no sucedió). Si 1 se usó en $B$ la situación sería muy parecida a la del caso anterior. Luego, el 1 debió ponerse en $C$ o en $D$. Si 2 se usa para etiquetar $D$ entonces 3 sería la etiqueta de $DC$.

Como las etiquetas de $A$ y $B$ deben sumar 9 las únicas opciones posibles serían 4 en un extremo y 5 en el otro. Si 4 es la etiqueta de $A$ entonces 5 es la etiqueta de $B$, así que $AD$ y $BC$ tendrían que etiquetarse con 6, lo cual no es posible (pues cada etiqueta se usó exactamente una vez). Si 4 es la etiqueta de $B$, la situación sería muy parecida a la del caso anterior. De esta forma, 2 y 7 son las etiquetas de $A$ y $B$ en algún orden. Supongamos que 7 es la etiqueta de $A$. Notemos que 11 debe ser etiqueta de un palito, que además no puede estar pegada a una bolita con 1 o 2. El único lugar posible para colocarla es $AD$, así que en $D$ hay que escribir un 4 y en $DC$ un 5.

Es fácil terminar de etiquetar el resto del tetraedro con los números sobrantes. Si 7 es la etiqueta de $B$ la situación es la misma que la anterior y también se obtiene que en $DC$ es forzoso escribir un 5. La respuesta es (a).

**Solución 30.** Si $n$ no es par, entonces sus divisores más grandes son, a lo más, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{5}$ y $\frac{n}{7}$, cuya suma es menor o igual a $\frac{71n}{105}$. Así, si $n$ es maléfico, debe ser par. Si $n$ no es múltiplo de 3, sus divisores más grandes son, a lo más, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$ y $\frac{n}{5}$, cuya suma es menor o igual a $\frac{19n}{20}$. Así, si $n$ es maléfico, debe ser múltiplo de 3. De esta forma, (c) es verdadera. Por otra parte, 30 es maléfico y no cumple (a) ni (d). Además 12 es maléfico y no cumple (b). La respuesta es (c).

**Solución 31.** En los dos lados que contienen al 8 los números deben sumar 5, así que deben ser 2 y 3 en uno de los lados, y 1 y 4 en el otro. El 3 y el 4 no pueden estar abajo a la izquierda porque ni el 2 ni el 3 pueden ponerse en la esquina de abajo a la derecha. Es claro entonces que el 2 va arriba del 6 y el 1 va a la izquierda del 7. Los cuadritos se completan como indica la figura de la derecha.



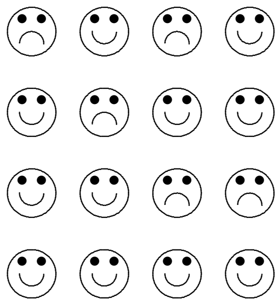

La respuesta es (b).

**Solución 32.** La suma de todos los cuadros se puede obtener como 3 veces la suma de una columna o 2 veces la de un renglón; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es par y la de los renglones es múltiplo de 3. Como los números que se escriben en los cuadrados se han elegido entre el 1 y el 5, para que la suma del primer renglón sea un múltiplo de 3 encima del 2 debemos escribir 1 o 4; pero, de estas posibilidades, la única que funciona para obtener una suma par es escribir 4. Aquí ya tenemos que la suma de los números en cualquier columna es 6, así que el número en la casilla sombreada es 2 y la figura queda completa como sigue:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 5 | 2 | 2 |

La respuesta es (b).

**Solución 33.** Es claro que un solo movimiento no lo logra. Veamos que dos movimientos tampoco lo logran. Si se pudiera con dos movimientos, entonces, como la primera cara es triste, sólo se tocaría una vez ya sea la primera o la segunda, y, en cualquier caso, esos movimientos harían que la segunda quedara triste, por lo que la tercera debería tocarse una vez y eso haría que la cuarta quedara triste. Con tres movimientos es posible, como se muestra en la figura (tocando la segunda, la tercera y, finalmente, la cuarta):



La respuesta es (b).

**Solución 34.** Sea $x$ la longitud del menor de los lados de los cuadriláteros, $y$ la mayor de ellos. Notemos que, como el perímetro de cada cuadrilátero es 26 y las longitudes de los lados de los cuadriláteros son 8, $x$, $8-x$ y $y$, se tiene que $8+8+y=26$, por lo cual $y=10$. Si trazamos la altura desde uno de los vértices del cuadrilátero al lado opuesto obtenemos un triángulo rectángulo cuyos lados valen 8, 10 y $8-2x$. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $100=64+(8-2x)^2$, de donde $36=(8-2x)^2$ y, por tanto, $8-2x=6$. Despejando, obtenemos que $x=1$. La respuesta es (b).

**Solución 35.** Observamos que en los 36 dm de ancho caben 9 cuadros así que en la tercera parte del ancho (12 dm) caben 3 cuadros. Como 60 dm es 5 veces 12 dm, tenemos que en los 60 dm de largo caben 15 cuadros. Entonces la alfombra en total tiene $9\cdot 15=135$ cuadros. Al quitar la primera línea vertical de cuadros nos quedan $9\cdot 14=126$ cuadros, la mitad de los cuales son lunas. Entonces, en total hay $63+4=67$ lunas. La respuesta es (b).

**Solución 36.** Sabemos que el lápiz de Bety es de distinto color que el de Aarón y que el de Carlos, así que los de Aarón y Carlos son del mismo color. Como también es falso que dos de ellos exactamente tengan lápices rojos entonces los lápices del mismo color son verdes y éstos son los de Aarón y Carlos. La respuesta es (c).

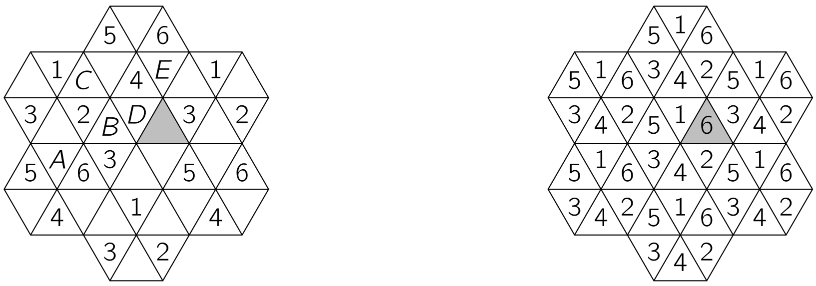
**Solución 37.** Tenemos que $n$ debe satisfacer $100\leq\frac{n}{3}\leq 999$ y $100\leq 3n\leq 999$; de la primera vemos que $300\leq n$ y de la segunda obtenemos $n\leq 333$. De entre estos números hace falta elegir aquellos que son múltiplos de 3: 300, 303, 306, 309, 312, 315, 318, 321, 324, 327, 330 y 333. La respuesta es (a).

**Solución 38.** Digamos que los números de villanos capturados son 1, 2, 3, $a$, $b$ y $c$ con $c$ mayor que los demás. Tenemos que $1+2+3+a+b+c=20$, de donde $a+b+c=14$. Entonces $c>\frac{14}{3}$, o sea que $c\geq 5$. Si $c=5$, entonces $a+b=9$, lo cual es imposible porque $a,b<c=5$. El valor de $c=6$ es posible tomando $a=4=b$. La respuesta es (b).

**Solución 39.** El penúltimo en irse deja sólo un habitante en la isla, así que no es posible lo que dice y es mentiroso. Entonces el antepenúltimo dice la verdad y es caballero, y así sucesivamente vemos que son caballeros los que se van en posición impar y mentirosos los otros. La respuesta es (c).

**Solución 40.** La primera condición dice que las cantidades de monedas eran impares. La segunda dice que los números eran 2, 5, 8, 11 o 14. Entonces tenía 5 monedas de \$20 y 11 monedas de \$10 para un total de \$210. La respuesta es (d).

**Solución 41.** Empecemos por ver que el triángulo marcado con $A$ en la figura de la izquierda debe tener un 1 pues forma parte de dos hexágonos donde ya se usaron los demás números. De manera similar podemos ver que en $B$ debe ir un 5, en $C$ un 6, en $D$ un 1, en $E$ un 2 y finalmente en el triángulo sombreado va un 6. La figura completa queda como se muestra a la derecha.



La respuesta es (e).

**Solución 42.** Es posible acomodar $n$ cuerdas de forma que se intersecten todas entre sí. Si las dibujamos una por una y contamos sus intersecciones, obtenemos $1+2+\cdots+n=\frac{n(n-1)}{2}$. Para $n=10$, $\frac{n(n-1)}{2}=45$ y para $n=11$, $\frac{n(n-1)}{2}=55$. Si se ponen 10 cuerdas de manera que todas se intersecten entre sí, basta poner una cuerda más que sólo intersecte a 5 de las anteriores. La respuesta es (c).

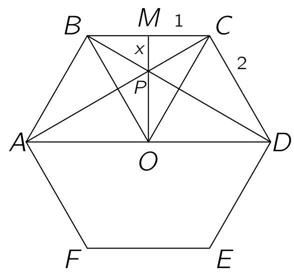
**Solución 43.** Las posibles sumas de dígitos son los números del 1 al 27; la suma 1 sólo se logra con el número 100, y la suma 27 sólo se logra con el número 999. Todas las demás sumas se logran con al menos dos números. Entonces sería posible que Francisco escogiera el 100, el 999 y dos números de cada una de las otras 25 sumas y todavía no habría encontrado 3 números con la misma suma de dígitos; una tarjeta extra forzosamente repetiría suma. La respuesta es (c).

**Solución 44.** Observemos cómo son las respuestas dependiendo de lo que son los hombres. Denotemos por $M$ a los mentirosos y por $C$ a los caballeros y escribamos $MM$ si los dos son mentirosos, $MC$ si el primero al que preguntó es mentiroso y el segundo es caballero, etc. Escribamos cómo son las respuestas en cada uno de los cuatro casos:

$$CC \to (\text{sí, sí}), \qquad CM \to (\text{no, no}), \qquad MC \to (\text{sí, no}), \qquad MM \to (\text{sí, sí}).$$

Si la primera respuesta hubiera sido no, ya se sabría que los hombres son $CM$. Como nos dicen que de la primera respuesta no se puede deducir, entonces la primera respuesta fue sí y las posibilidades son $CC$, $MC$ y $MM$. Pero nos dicen que de la segunda respuesta ya se supo y, como $CC$ y y $MM$ tienen las mismas segundas respuestas, éste no es el caso. La respuesta correcta es la única que difiere: $MC$. La respuesta es (b).

**Solución 45.** Sea $O$ el centro del hexágono. Unamos $O$ con $A$, con $B$, con $C$ y con $D$. Se forman tres triángulos equiláteros (y sus ángulos miden 60°). De aquí podemos proceder de varias formas:




*Primera forma.* Sea $M$ el punto en que se intersectan $OP$ con $BC$. Entonces $OM$ es perpendicular a $BC$, $M$ es el punto medio de $BC$ y queremos encontrar la altura $x = PM$ de $BPC$. Por simetría, $\angle MOC$, $\angle BCA$, $\angle ACO$ y $\angle BDC$ miden todos 30° y $\angle ACD$ es recto. De aquí tenemos que los triángulos rectángulos $MPC$ y $CPD$ son semejantes en razón $1 : 2$, de donde $PC = 2x$. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo $MPC$ para obtener: $1^2 + x^2 = (2x)^2$, de donde $3x^2 = 1$, así que $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y el área de $BCP$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Segunda forma.* Los triángulos $PCO$, $PCB$ y $PBO$ son todos iguales. La altura de un triángulo equilátero de lado 2 mide $\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras, como arriba) así que el área de $PBC$ es $\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La respuesta es (b).

**Solución 46.** Observemos que siempre queda un número par de casillas blancas; esto es porque al principio son 8 blancas, y las posibilidades en cada cambio son que se agreguen 2 blancas (si las casillas escogidas eran negras), que se conserve el número de blancas al hacer el cambio (cuando se escogen una negra y una blanca) y que se disminuya en número de blancas en 2 (si se escogieron dos blancas en el cambio). Por otro lado, podemos ver que podemos escoger el color en todas las casillas salvo una. Por ejemplo, numeremos las casillas como se indica en la figura.

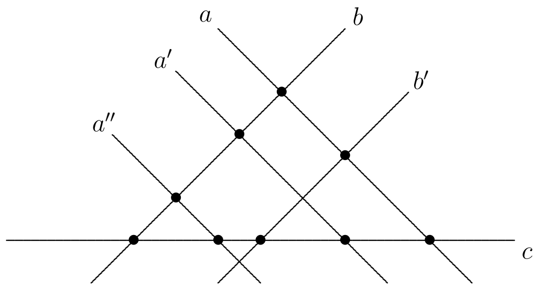
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 16 | 15 | 14 | 13 |

Vamos modificando o no las casillas de acuerdo a su numeración, escogiendo o no la casilla que le sigue en número; por ejemplo, si queremos modificar el color de la casilla 1, la escogemos junto con la 2 (si no queremos modificarlo no escogemos esta pareja); después, si queremos modificar la 2, la escogemos junto con la 3, etc. En cada uno de estos pasos las casillas anteriores ya no vuelven a cambiar. La única que no podremos poner a nuestro gusto siguiendo este orden es la 16; Esta casilla será blanca cuando entre las otras quince haya una cantidad impar, puesto que el total de las casillas blancas en el tablero debe ser par (como vimos antes). De otra forma, la casilla será negra. Entonces el número de tableros distintos que se pueden obtener es $2^{15}$.

**Solución 47.**

$$\begin{aligned} x-y &= \tfrac{1^2}{1}+\tfrac{2^2-1^2}{3}+\tfrac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\tfrac{50^2-49^2}{99}-\tfrac{50^2}{101} \\ &= 1+\tfrac{(2-1)(2+1)}{3}+\tfrac{(3-2)(3+2)}{5}+\cdots+\tfrac{(50-49)(50+49)}{99}-\tfrac{50^2}{101} \\ &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{50}-\tfrac{2500}{101}\approx 50-24.75=25.25 \end{aligned}$$

**Solución 48.** Como los números de intersecciones son todos distintos, tenemos que $a$, $b$ y $c$ son no paralelas entre sí. Por otro lado, el que el número de rectas que intersectan a $b$ sea mayor que el de rectas que intersectan a $a$ nos dice que alguna recta de las que intersectan a $b$ debe ser paralela a $a$; llamemos $a'$ a esta recta. Si hubiera alguna otra recta no paralela a ninguna de $a$, $b$ y $c$, entonces $a$ y $b$ completarían sus intersecciones pero $c$ se intersectaría con exactamente 4 rectas, lo cual ya sabemos que no es cierto. Entonces las demás rectas son paralelas a alguna de $a$, $b$ o $c$ pero, por la misma razón no podría haber una recta paralela a $c$ pues entonces $c$ sólo tendría 3 intersecciones. Entonces se necesita una recta más paralela a $a$ y otra paralela a $b$. En total son 6 rectas.




**Solución 49.** Tenemos que $(*)\ xy = 5(x+y)$.
*Primera forma.* Despejamos $y$ de $(*)$: Factorizando tenemos $(x-5)y = 5x$ y de aquí vemos que $x \neq 5$ así que podemos dividir entre $x-5$:

$$(**)\ y = \frac{5x}{x-5}.$$

Pongamos distintos valores para $x$ en $(**)$ que nos den una fracción entera. Como $x$ y $y$ son positivos, el primer valor que podría tomar $x$ es 6 y en este caso $y = 30$. Para $x = 7, 8, 9$ la fracción no es entera; para $x = 10$ obtenemos $y = 10$. Como el papel de $x$ y $y$ es simétrico en la ecuación $(*)$, podemos sólo considerar los valores en que $x \leq y$. Veamos entonces que las parejas que tenemos hasta el momento son las únicas en que $x \leq y$. Escribamos

$$y = \frac{5x}{x-5} = 5\left(\frac{x}{x-5}\right) = 5\left(\frac{(x-5)-(x-5)+x}{x-5}\right) = 5\left(1 + \frac{5}{x-5}\right).$$

Para $x \geq 11$ tenemos que $\frac{5}{x-5} < 1$, de donde $y = 5\left(1 + \frac{5}{x-5}\right) < 5 \cdot 2 = 10 < x$ y esto termina la prueba.
*Segunda forma.* En $(*)$ vemos que el producto es múltiplo de 5 y así alguno de los dos (posiblemente ambos) es múltiplo de 5. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $x$ es múltiplo de 5: $x = 5a$. Sustituyendo en $(*)$ y cancelando 5 tenemos que $ay = 5a + y$ $(***)$, de donde $(a-1)y = 5a$. Como $a$ y $a-1$ no tienen factores en común, entonces $a-1$ es divisor de 5, y así $a = 2$ (o sea $x = 10$) o $a = 6$ (o sea $x = 30$). Sustituyendo estos valores en $(***)$ tenemos, en el primer caso, $y = 10$ y, en el segundo, $y = 6$. Entonces la pareja $(x, y)$ es $(10, 10)$ o $(30, 6)$ (o $(6, 30)$).

*Tercera forma.* Manipulando algebraicamente la ecuación (*), obtenemos que:

$$\begin{aligned} xy &= 5(x+y) \\ xy - 5x - 5y &= 0 \\ xy - 5x - 5y + 25 &= 25 \\ (x-5)(y-5) &= 25 \end{aligned}$$

Luego, en los enteros positivos las únicas opciones son: $x-5=25$, $y-5=1$; $x-5=5$, $y-5=5$ y $x-5=1$, $y-5=25$. De lo anterior, obtenemos que las soluciones $(x,y)$ posibles son iguales a $(30,6)$, $(10,10)$ y $(6,30)$.

**Solución 50.** *Primera forma.* Hay 4 tipos de habitantes: Los $CC$ que son caballeros y les preguntaron por alguien que es caballero (digamos que la cantidad de éstos es $cc$), los $CM$ que son caballeros y les preguntaron por un mentiroso (y el número de éstos es $cm$), etc. Es claro que $cm+cc=mc+cc$ (pues ambos son la cantidad de caballeros), así que $cm=mc$.

En la primera instancia se salieron $cm$ caballeros y $mc$ mentirosos. Entonces en la segunda instancia el número de habitantes que se salieron es $\frac{1}{5}cm$. Calculemos lo que nos pide el problema:

$$\frac{cm+\frac{1}{5}cm}{cm+\frac{1}{5}cm+mc}=\frac{\frac{6}{5}cm}{\frac{11}{5}cm}=\frac{6}{11}.$$

*Segunda forma.* Acomodemos a los habitantes en ciclos de manera que a cada uno le preguntaron sobre el que le sigue en el ciclo (esto es posible porque a cada quien le hicieron una pregunta y no preguntaron dos veces sobre la misma persona). Si en un ciclo todos son caballeros o todos son mentirosos, ninguno de ellos se fue de la isla. Si hay de los dos tipos en un mismo ciclo, entonces se fueron exactamente el mismo número de caballeros que de mentirosos en la primera instancia pues cada vez que se pasa en el ciclo de caballero a mentiroso o de mentiroso a caballero el segundo se va (en el primer caso porque el caballero dice la verdad sobre el mentiroso y, en el segundo, porque el mentiroso responde una mentira sobre el caballero). Llamemos $x$ al número de caballeros que se van en segunda instancia y $y$ al número de caballeros que se fueron en primera instancia. Tenemos que $5x=y$. El número total de habitantes que se fueron es $5x+5x+x=11x$ y el número de caballeros que se fueron es $5x+x=6x$ así que la proporción es $\frac{6}{11}$.

# Concentrado de Respuestas

1. (a)
2. (a)
3. (d)
4. (b)
5. (d)
6. (e)
7. (a)
8. (e)
9. (b)
10. (a)
11. (c)
12. (c)
13. (e)
14. (e)
15. (b)
16. (e)
17. (a)
18. (d)
19. (b)
20. (a)
21. (d)
22. (a)
23. (c)
24. (b)
25. (b)
26. (a)
27. (d)
28. (e)
29. (a)
30. (c)
31. (b)
32. (b)
33. (b)
34. (b)
35. (b)
36. (c)
37. (a)
38. (b)
39. (c)
40. (d)
41. (e)
42. (c)
43. (c)
44. (b)
45. (b)
46. $2^{15}$
47. 25
48. 6
49. 3
50. $\frac{6}{11}$

# Información de Contacto

**Olimpiada Mexicana de Matemáticas:**
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Circuito Exterior
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
México, Distrito Federal
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: http://www.ommenlinea.org/

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

# Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

José Antonio Gómez Ortega
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Irving Daniel Calderón Camacho

Fernando Campos García

José Alfredo Cobián Campos

David Cossío Ruiz

Luis Cruz Romo

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Luis Miguel García Velázquez

María Eugenia Guzmán Flores

Jesús Jerónimo Castro

Leonardo Martínez Sandoval

Daniel Perales Anaya

María Luisa Pérez Seguí

Miguel Raggi Pérez

Olga Rivera Bobadilla

Carlos Jacob Rubio Barrios

David Guadalupe Torres Flores

Rogelio Valdez Delgado

Rita Vázquez Padilla

Eduardo Velasco Barreras

Hugo Villanueva Méndez.