TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2009, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Abril de 2009.

Contenido

Presentación

Tzaloa, que en náhuatl significa aprender, es una revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. El objetivo principal de esta publicación, es fomentar y estimular el estudio de las matemáticas como una disciplina del pensamiento que desarrolla la inteligencia del estudiante mediante métodos de razonamiento estructurados, deductivos y creativos.

Desde hace 22 años la Sociedad Matemática Mexicana, a través de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, ha detectado jóvenes con talento para las matemáticas y otras disciplinas afines. Muchos profesores y estudiantes que se han acercado a este programa han creado, de manera espontánea y altruista, innumerables talleres de resolución de problemas que han contribuido de manera sustancial a mejorar la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Asimismo, muchas universidades se han visto beneficiadas, no solamente por el ingreso de jóvenes con una excelente formación matemática, sino también por exolímpicos que desenvuelven su vida profesional en ellas.

El programa básico de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla anualmente en tres etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en olimpiadas internacionales.

23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1º de agosto de 1990. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2009-2010 y, para el 1º de julio de 2010, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario. Para mayor información consulte la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 8 al 13 de noviembre de 2009 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2010: la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Puerto Rico; la 51^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Kazajstán y la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Paraguay.

La revista

En este número 2 de tu revista Tzaloa, Ana Rechtman y Carlos J. Rubio han preparado un trabajo especial que se titula: "Divisibilidad y congruencias".
Tanto en los concursos estatales y nacionales como en los internacionales, es frecuente encontrar problemas relacionados con la divisibilidad de números enteros y que aparentan gran dificultad, pero que su solución se hace sencilla usando el concepto de congruencia y sus propiedades.
A través de las páginas de este artículo, descubrirás una nueva forma de entender al mundo de los números enteros y sus relaciones de divisibilidad. El conocimiento y dominio del concepto de las congruencias y de sus propiedades, te permitirá llevar al límite tu capacidad para resolver cierto tipo de problemas relacionados con la divisibilidad.
Mediante las explicaciones junto con el apoyo que brindan los ejemplos y ejercicios, aprenderás a usar esta poderosa herramienta con la que podrás resolver de manera simple muchos problemas complejos.
Te invitamos a estudiar sus páginas y estaremos muy contentos de recibir tus opiniones y sugerencias en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Divisibilidad y congruencias

Por Ana Rechtman Bulajich y Carlos Jacob Rubio Barrios

Empecemos por explicar el significado de la palabra divisibilidad. En este texto vamos a trabajar únicamente con los números enteros. Un número entero r es divisible entre un número entero s ($s \neq 0$), si el resultado de la división $\frac{r}{s}$ es un número entero. Por ejemplo, 9 es divisible entre 3, ya que $\frac{9}{3} = 3$, pero 11 no es divisible entre 3 porque $\frac{11}{3} = 3.66\ldots$ que no es un número entero. Dicho de otra forma, los números que son divisibles entre 3 son los múltiplos de 3.

Existen diferentes criterios de divisibilidad, es decir, métodos que nos permiten determinar si un número es o no divisible entre otro. En muchos casos, es más sencillo utilizar los criterios de divisibilidad que efectuar directamente la división. Por ejemplo, para el número 3 el criterio es: *un entero positivo es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.*

¿Qué quiere decir esta frase? ¿Por qué es cierta esta afirmación?

Si y sólo si quiere decir que si un número es divisible entre 3 la suma de sus dígitos es divisible entre 3, y que si la suma de los dígitos de un número es divisible entre 3, el número también lo es. Podemos cambiar este criterio de divisibilidad entre 3 por: *un número <u>no</u> es divisible entre* 3 *si y sólo si la suma de sus dígitos <u>no</u> es divisible entre* 3.

Tratemos de dar una *demostración* matemática al criterio de divisibilidad entre 3. Consideremos un entero positivo n, y escribámoslo en notación decimal:

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^k a_k,$$

donde los números $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son los dígitos de n. Entonces la suma de los dígitos de n es igual a $a_0 + a_1 + \cdots + a_k$. Observemos que para todo entero positivo $l \geq 1$:

$$10^l - 1 = 9(\underbrace{11\ldots1}_{l \text{ veces}}).$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 10-1 &= 9 = 9(1) \\ 10^2-1 &= 99 = 9(11) \\ 10^3-1 &= 999 = 9(111), \end{aligned}$$

etcétera. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} n-(a_0+a_1+\cdots+a_k) &= (10-1)a_1+(10^2-1)a_2+\cdots+(10^k-1)a_k \\ &= 9(a_1+11a_2+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ veces}}a_k). \end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación es divisible entre 9, en particular, es divisible entre 3. Así que si el número es divisible entre 3, $a_0+a_1+\cdots+a_k$ tiene que ser divisible entre 3. Análogamente si $a_0+a_1+\cdots+a_k$ es divisible entre 3, el número n tiene que ser divisible entre 3. Es decir, hemos demostrado el criterio de divisibilidad entre 3. De hecho, también demostramos el criterio de divisibilidad entre 9.

Vamos a introducir una nueva notación. Consideremos un entero cualquiera x. Al dividir x entre 3, obtenemos un cociente b y un residuo c, donde c es igual a 0, 1 ó 2. Es decir, $x=3b+c$. Ahora bien, vamos a decir que *x es congruente con c módulo* 3, denotado por $x \equiv c \pmod 3$, si c es el residuo que se obtiene al dividir x entre 3. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 100 = 3\cdot 33+1 &\quad\Rightarrow\quad 100 \equiv 1 \pmod 3 \\ 242 = 3\cdot 80+2 &\quad\Rightarrow\quad 242 \equiv 2 \pmod 3 \\ 48 = 3\cdot 16 \quad &\quad\Rightarrow\quad 48 \equiv 0 \pmod 3). \end{aligned}$$

Sin embargo podemos escribir también:

$$\begin{aligned} 242 &\equiv -1 \pmod 3 \\ 242 &\equiv 5 \pmod 3 \\ 242 &\equiv -4 \pmod 3. \end{aligned}$$

Es decir, $242 \equiv d \pmod 3$ si el número $242-d$ es divisible entre 3. Por ejemplo, $242 \equiv -4 \pmod 3$ ya que $242-(-4) = 246 = 3(82)$.

Con este nuevo concepto vamos a demostrar el criterio de divisibilidad entre 3. Como antes, consideramos un entero positivo $n = a_0+10a_1+\cdots+10^k a_k$, donde a_0, $a_1,\ldots,a_k$ son los dígitos de n. Tenemos que para todo entero $l \geq 1$, el número 10^l-1 es divisible entre 3, es decir $10^l \equiv 1 \pmod 3$. Vamos a demostrar entonces que:

1. $10^l a_l \equiv a_l \pmod 3$ para todo $1 \leq l \leq k$;
2. $n = a_0+10a_1+\cdots+10^k a_k \equiv a_0+a_1+\cdots+a_k \pmod 3$.

Para ver que el primer punto es cierto, vamos a demostrar que si $x \equiv c \pmod 3$, entonces $a\cdot x \equiv a \cdot c \pmod 3$ para todo entero positivo a. La demostración de este hecho es muy sencilla. Si escribimos $x = 3b+c$, para algún entero b, tenemos que $a\cdot x = 3(a\cdot b)+a\cdot c$ lo que prueba la afirmación anterior. Entonces como $10^l \equiv 1 \pmod 3$ obtenemos que $10^l a_l \equiv a_l \pmod 3$.

Enfoquémonos ahora en el segundo punto. Lo que queremos demostrar es que si tenemos dos enteros x_1 y x_2 tales que:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv c_1 \pmod 3, \\ x_2 &\equiv c_2 \pmod 3, \end{aligned}$$

entonces $x_1 + x_2 \equiv c_1 + c_2 \pmod 3$. Sabemos que existen números b_1 y b_2 tales que $x_1 = 3b_1 + c_1$ y $x_2 = 3b_2 + c_2$. Esto implica que $x_1 + x_2 = 3(b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)$, o dicho de otra forma que $x_1 + x_2 \equiv c_1 + c_2 \pmod 3$.
Regresando a la demostración del criterio de divisibilidad entre 3, concluimos que:

$$n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \pmod 3.$$

Dicho de otra forma, n es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.
Hasta ahora hemos definido las congruencias módulo 3, pero podemos hacerlo para cualquier entero positivo m. Decimos entonces que un entero x es congruente con un entero c módulo m, si el número $x-c$ es divisible entre m y escribimos $x \equiv c \pmod m$.
Veamos algunos ejemplos para aclarar esta definición.

- $91 \equiv 1 \pmod{10}$ pues $91 - 1 = 90$ es múltiplo de 10;
- $2n + 1 \equiv 1 \pmod n$, ya que $2n + 1 - 1 = 2n$ es múltiplo de n;
- $8 \not\equiv 2 \pmod 5$, pues $8 - 2 = 6$ no es múltiplo de 5.

Según la definición anterior, la notación $x \equiv c \pmod m$ significa que x lo podemos escribir como $c + mb$ para algún entero b. Si $c = 0$, entonces $x \equiv 0 \pmod m$ significa que x es múltiplo de m.
En la demostración del criterio de divisibilidad entre 3, demostramos dos propiedades que son válidas también cuando trabajamos módulo m. Es decir, tenemos que:

1. si $x \equiv c \pmod m$ entonces $a \cdot x \equiv a \cdot c \pmod m$ para todo entero positivo a;
2. si $x_1 \equiv c_1 \pmod m$ y $x_2 \equiv c_2 \pmod m$, entonces $x_1 + x_2 \equiv c_1 + c_2 \pmod m$.

A continuación demostraremos unas cuantas propiedades más, que nos serán útiles para resolver problemas más adelante.

Propiedades de la congruencia. Sea m un entero positivo y sean b, c, d, x, y enteros. Entonces:

1. $x \equiv x \pmod m$.
2. Si $x \equiv c \pmod m$, entonces $c \equiv x \pmod m$.
3. Si $x \equiv c \pmod m$ y $c \equiv d \pmod m$, entonces $x \equiv d \pmod m$.
4. Si $x \equiv c \pmod m$ y $y \equiv d \pmod m$, entonces $xy \equiv cd \pmod m$.
5. Si $x \equiv c \pmod m$, entonces $x^n \equiv c^n \pmod m$ para todo entero positivo n.

6. Si $xb \equiv bc \pmod{m}$, entonces $x \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.

Demostración. Las propiedades 1 y 2 son inmediatas, pues $x - x = 0$ es múltiplo de m, y si $x - c = mb$ para algún entero b, entonces $c - x = m(-b)$.
Para demostrar la propiedad 3, supongamos que $x - c = mb_1$ y $c - d = mb_2$ para algunos enteros b_1 y b_2. Entonces $x - d = (x - c) + (c - d) = m(b_1 + b_2)$, de donde $x \equiv d \pmod{m}$.
Para demostrar la propiedad 4, supongamos que $x - c = mb_1$ y $y - d = mb_2$ para algunos enteros b_1 y b_2. Entonces:

$$xy - cd = (x - c)y + (y - d)c = m(b_1 y + b_2 c),$$

de donde $xy \equiv cd \pmod{m}$.
La demostración de la propiedad 5 la haremos por inducción en n (ver el Criterio 2 del apéndice). Si $n = 1$ no hay nada que demostrar, pues por hipótesis tenemos que $x \equiv c \pmod{m}$. Supongamos que la congruencia $x \equiv c \pmod{m}$ implica la congruencia $x^k \equiv c^k \pmod{m}$ para algún entero $k > 1$. Entonces, aplicando la propiedad 4 tenemos que:

$$x \cdot x^k \equiv c \cdot c^k \pmod{m},$$

es decir, $x^{k+1} \equiv c^{k+1} \pmod{m}$. Esto completa la inducción. (¿Cómo demostraría el lector la propiedad 5 sin usar inducción?).
Para demostrar la propiedad 6, supongamos que $xb - bc = mk$ para algún entero k. Si dividimos esta igualdad entre $g = (b, m)$, tenemos que $(x - c)\frac{b}{g} = \frac{m}{g}k$. Como $\frac{b}{g}$ y $\frac{m}{g}$ son primos relativos (¿por qué?) y $\frac{m}{g}$ divide a $(x - c)\frac{b}{g}$, tenemos que $\frac{m}{g}$ divide a $x - c$. Es decir, $x \equiv c \pmod{\frac{m}{g}}$.

Para entrenarnos en la utilización de los módulos, vamos a demostrar los siguientes criterios de divisibilidad.

1. Un entero positivo n es divisible entre 2 si y sólo si su dígito de las unidades es par.

2. Un entero positivo n es divisible entre 4 si y sólo si el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible entre 4.

3. Un entero positivo n es divisible entre 8 si y sólo si el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible entre 8.

4. Un entero positivo n es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

5. Un entero positivo n es divisible entre 11 si y sólo si la suma de los dígitos de n en posición par menos la suma de los dígitos de n en posición impar, es divisible entre 11.

Demostraciones. Usaremos congruencias para demostrar estos criterios, así como lo hicimos con el criterio de divisibilidad entre 3. Como antes, consideremos la notación decimal de n:

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^k a_k.$$

1. Como $10 \equiv 0 \pmod 2$, tenemos que $10^l \equiv 0 \pmod 2$ para todo entero $l \geq 1$ y por lo tanto $n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^k a_k \equiv a_0 \pmod 2$. De aquí que n es divisible entre 2, o dicho de otra forma, $n \equiv 0 \pmod 2$ si y sólo si $a_0 \equiv 0 \pmod 2$ si y sólo si a_0 es par. Es decir, n es divisible entre 2 si y sólo si su dígito de las unidades es par.
2. Como $10 \equiv 2 \pmod 4$, tenemos que $10^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4$. De aquí que si $l \geq 2$, entonces:

$$10^l = 10^2 \cdot 10^{l-2} \equiv 0 \cdot 10^{l-2} = 0 \pmod 4.$$

Luego, $n \equiv a_0 + 10a_1 \pmod 4$. Por lo tanto, n es divisible entre 4, o equivalentemente $n \equiv 0 \pmod 4$, si y sólo si $a_0 + 10a_1 \equiv 0 \pmod 4$. Esto ocurre solamente cuando el número $a_0 + 10a_1$, formado por los dos últimos dígitos de n, es divisible entre 4.
3. Como $10 \equiv 2 \pmod 8$, tenemos que $10^3 \equiv 2^3 \equiv 0 \pmod 8$. Luego, para todo entero $l \geq 3$:

$$10^l = 10^3 \cdot 10^{l-3} \equiv 0 \cdot 10^{l-3} = 0 \pmod 8.$$

De aquí que $n \equiv a_0 + 10a_2 + 10^2 a_2 \pmod 8$. Por lo tanto, n es divisible entre 8, o bien $n \equiv 0 \pmod 8$, si y sólo si $a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 \equiv 0 \pmod 8$. Es decir, esto ocurre cuando el número $a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2$ formado por los tres últimos dígitos de n es divisible entre 8.
4. Como $10 \equiv 1 \pmod 9$, tenemos que $10^l \equiv 1 \pmod 9$ para todo entero $l \geq 1$. Luego, $n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \pmod 9$. Por lo tanto, n es divisible entre 9, o bien $n \equiv 0 \pmod 9$, si y sólo si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod 9$. Entonces, n es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.
5. Como $10 \equiv -1 \pmod{11}$, tenemos que $10^l \equiv \pm 1 \pmod{11}$ dependiendo si l es par o impar. Luego:

$$n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k \pmod{11}.$$

Por lo tanto, n es divisible entre 11 si y sólo si $n \equiv 0 \pmod{11}$ si y sólo si:

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Por lo tanto, n es divisible entre 11 si y sólo si la suma de los dígitos de n en posición par menos la suma de los dígitos de n en posición impar es divisible entre 11.

Veamos ahora la utilidad de las congruencias en problemas de olimpiada.

Problema 1. Demuestre que ningún entero de la forma $4n + 3$ se puede escribir como la suma de dos cuadrados de enteros.

Solución. Si a es un entero, entonces $a \equiv 0, 1, 2$ ó $3 \pmod 4$. Luego, $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ ó $a^2 \equiv 1 \pmod 4$. De aquí que los residuos posibles al dividir entre 4 para la suma de dos cuadrados de enteros son $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ ó $1 + 1 = 2$. Como un entero de la forma $4n + 3$ es congruente con 3 módulo 4, tenemos que no es posible escribirlo como la suma de dos cuadrados de enteros.

Problema 2. Sean a y b enteros tales que $a+5b$ y $5a-b$ son ambos múltiplos de 2002. Demuestre que $a^2 + b^2$ también es múltiplo de 2002.

Solución. Observemos primero que si un entero r es múltiplo de un entero s, entonces r^2 es múltiplo de s^2. Usando congruencias, esto lo podemos escribir como: $r \equiv 0 \pmod{s}$ implica que $r^2 \equiv 0 \pmod{s^2}$. Usaremos esta propiedad en la solución del problema.
Si $a + 5b \equiv 0 \pmod{2002}$ y $5a - b \equiv 0 \pmod{2002}$, entonces:

$$(a + 5b)^2 \equiv 0 \pmod{2002^2} \qquad \text{y} \qquad (5a - b)^2 \equiv 0 \pmod{2002^2}.$$

Luego, $(a + 5b)^2 + (5a - b)^2 \equiv 0 \pmod{2002^2}$. Simplificando tenemos que:

$$26(a^2 + b^2) \equiv 0 \pmod{2002^2}.$$

Utilizando la propiedad número 6 de las congruencias, tenemos que:

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{77 \cdot 2002}.$$

Esto implica que $a^2 + b^2$ es divisible entre $77(2002)$, en particular es divisible entre 2002. Por lo tanto, $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{2002}$.

Problema 3. Determine todas las parejas de enteros positivos (m, n) que satisfacen la ecuación $3^m + 7 = 2^n$.

Solución. Observemos que $3^m + 7 \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, ya que $3 \equiv 0 \pmod{3}$ y $7 \equiv 1 \pmod{3}$. Luego, $2^n \equiv 1 \pmod{3}$. Ahora, como $2 \equiv -1 \pmod{3}$ tenemos que $2^n \equiv (-1)^n \pmod{3}$. Por lo tanto, n es par. Supongamos que $n = 2k$. Entonces, la ecuación original es equivalente a la ecuación $3^m + 7 = 4^k$. Intentemos ahora con congruencias módulo 4. Tenemos que $4^k - 7 \equiv 0 - (-1) = 1 \pmod{4}$, ya que $4 \equiv 0 \pmod{4}$ y $7 \equiv -1 \pmod{4}$. Luego, 3^m debe ser congruente con 1 módulo 4. Como $3 \equiv -1 \pmod{4}$, tenemos que $3^m \equiv (-1)^m \pmod{4}$, de modo que m debe ser par. Supongamos que $m = 2p$. Entonces la ecuación original es equivalente a la ecuación $3^{2p} + 7 = 2^{2k}$. Es decir:

$$7 = 2^{2k} - 3^{2p} = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p).$$

Como 7 es número primo y $2^k - 3^p < 2^k + 3^p$, la única posibilidad es que $2^k - 3^p = 1$ y $2^k + 3^p = 7$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos que $k = 2$ y $p = 1$. Es decir, $m = 2$ y $n = 4$.

Problema 4. Sea n un entero mayor que 6. Demuestre que si $n - 1$ y $n + 1$ son ambos números primos, entonces $n^2(n^2 + 16)$ es múltiplo de 720. ¿Es cierto el recíproco?

Solución. Notemos primero que si $n \equiv 1, 2, 3, 4$ ó $5 \pmod 6$, entonces alguno de $n-1$ ó $n+1$ no sería primo. Luego, $n \equiv 0 \pmod 6$. Sea $n = 6m$ con m entero positivo. Tenemos que

$$n^2(n^2+16) = (6m)^2((6m)^2+16) = 144m^2(9m^2+4).$$

Si $m \equiv 0 \pmod 5$, entonces $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de $144 \times 5 = 720$. Si m es congruente a ± 1 módulo 5, entonces n es de la forma $30a \pm 6$ y es fácil ver que alguno de $n-1$ ó $n+1$ es múltiplo de 5 y no sería primo. Por último si $m \equiv \pm 2 \pmod 5$, entonces $9m^2 + 4 \equiv 9(4) + 4 \equiv 0 \pmod 5$ y por lo tanto, $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de $144 \times 5 = 720$.
Ahora veamos que el recíproco es falso. Para esto, basta encontrar un entero $n > 6$ tal que $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de 720 y alguno de los números $n-1$ ó $n+1$ no es primo. Si $n = 720$, entonces es fácil ver que $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de 720, pero $n+1 = 721 = 7 \times 103$ no es primo.

Concluimos esta sección con algunos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1. Sean n y r enteros tales que $n \equiv r \pmod 7$. Demuestre que:
$$1000n \equiv 7 - r \pmod 7.$$

2. Demuestre que un entero n es divisible entre 5 si y sólo si su dígito de las unidades es divisible entre 5.

3. Sean p y q números primos distintos. Demuestre que un entero es divisible entre pq si y sólo si es divisible entre p y entre q. Deduzca los criterios de divisibilidad entre 6 y entre 10.

4. Determine todos los enteros positivos n tales que $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ veces}} \equiv 0 \pmod{101}$.

5. Sea p un primo y sean a y n enteros positivos. Demuestre que si $2^p + 3^p = a^n$, entonces $n = 1$.

6. Sea n un entero positivo y sean $a < b < c < d$ los cuatro divisores positivos más pequeños de n. Determine todos los enteros n tales que $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Bibliografía

1. D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg. *Mathematical Circles (Russian Experience)*. American Mathematical Society. 1996.

2. C.J. Rubio Barrios. *Problemas para la 20^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas Avanzados)*. 2006.

3. C.J. Rubio Barrios. *Problemas para la 21^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas Avanzados)*. 2007.

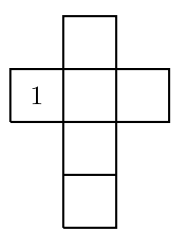
Problemas de práctica

Como en el número anterior, en esta sección encontrarás 20 interesantes y variados problemas. En esta ocasión, hemos hecho nuestra selección considerado problemas que corresponden al nivel de los concursos estatales.

Te desafiamos para que pongas a prueba todas tus capacidades, pero no te desanimes ni te rindas si no puedes resolverlos al primer intento, recuerda que la perseverancia es la clave del éxito y que la práctica hace al maestro.

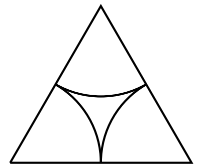
En la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, pero te recomendamos que no la consultes sino hasta después de haber trabajado un poco en cada problema.

Problema 1. La figura muestra un cubo desplegado. Escribe en cada cara del cubo un número del 1 al 6, sin repetir, de modo que si al armar el cubo en cada vértice escribes el resultado de la multiplicación de los números de las tres caras que concurren en él, obtienes los números $10, 12, 20, 24, 30, 36, 60$ y 72.

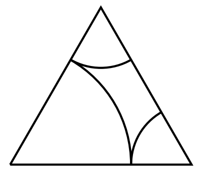


Problema 2. En cada vértice de un terreno en forma de triángulo equilátero, cuyo lado mide 48 m, está amarrada una cabra con una cuerda. Los sectores angulares a los que cada cabra puede acceder no pueden encimarse, pero son tangentes.

1. Si cada cabra tiene una cuerda de 24 m, ¿cuál es la superficie en la que las tres cabras pueden comerse el pasto?



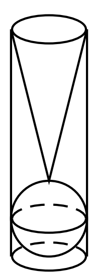
2. Si una de las tres cabras tiene una cuerda que mide 32 m, ¿cuál es la superficie en la que las tres cabras pueden comerse el pasto?



Problema 3. Las caras de un dado con forma de tetraedro regular están numeradas del 1 al 4. El dado está sobre una mesa con la cara "1" contra la mesa. Cada movimiento consiste en rodar el dado sobre una de las aristas de la base. Después de cada movimiento apuntamos el número que está en la cara que se encuentra sobre la mesa. Llamemos s a la suma de estos números después de 2009 etapas, contando al primer 1 como la etapa cero.

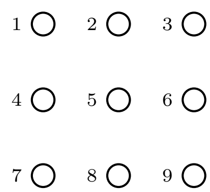
1. ¿Cuál es el valor máximo de s?
2. ¿Puedes obtener todos los valores de s, que se encuentran entre su valor mínimo y su valor máximo?

Problema 4. En un cilíndro lleno de agua se colocan dos sólidos: una esfera que es tangente al cilíndro y un cono cuya base es igual a la base del cilíndro, de forma que la altura de la esfera y el cono juntos es igual a la altura del cilíndro. Si sabemos que la cantidad de agua que quedó dentro del cilíndro es 1 litro y el radio mide 10 cm, ¿cuánto mide la altura del cilíndro?

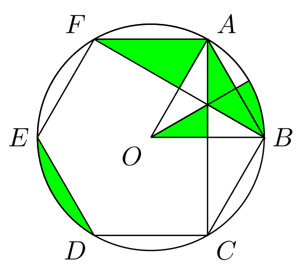


Problema 5. En cada casilla de un tablero de 1000×1000 se escriben algunos de los números: 1, -1 ó 0. Luego se suman todos los números escritos en cada renglón y en cada columna, obteniendo 2000 resultados (no necesariamente distintos). Muestra que es posible construir un tablero de manera que las 2000 sumas así obtenidas sean todas distintas.

Problema 6. Un juego consiste de 9 botones luminosos de color verde o rojo. Apretando un botón, cambian de color sólo los vecinos que están a su lado, arriba y abajo, pero no en diagonal. Por ejemplo, si se aprieta el botón 1, cambian de color los botones 2 y 4, y si se aprieta el botón 2 cambian de color los botones 1, 3 y 5. Si inicialmente todos los botones son verdes, ¿es posible que apretando botones todos se vuelvan rojos?



Problema 7. Si la circunferencia con centro O tiene radio igual a 1 cm, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Problema 8. Sea A un entero de 6 dígitos, tres de los cuales son 1, 2 y 4. Demuestra que siempre es posible obtener un número que sea divisible entre 7, efectuando alguna de las siguientes operaciones: eliminar los dígitos $1, 2$ y 4 ó escribir los dígitos de A en algún orden.

Problema 9. Demuestra que no existen soluciones enteras y positivas para la ecuación $3^m + 3^n + 1 = t^2$.

Problema 10. Se tiene la sucesión de números $1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ que satisface la igualdad:

$$1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2,$$

para todo entero $n > 2$. Determina el valor de $a_3 + a_5$.

Problema 11. En un trapecio $ABCD$, los lados paralelos miden $AB = 16$ cm y $CD = 6$ cm, y la suma de los ángulos de la base AB es igual a $90°$, es decir,

$\angle DAB + \angle ABC = 90°$. Determina la longitud del segmento que une los puntos medios de AB y CD.

Problema 12. Cinco niños se dividen en grupos y en cada grupo se toman de la mano formando una rueda para bailar girando. ¿Cuántas ruedas distintas pueden formar los niños, si es válido que haya grupos de 1 a 5 niños, y puede haber cualquier número de grupos?

Problema 13. Sean a y b enteros positivos y d su máximo común divisor. Si $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es entero, demuestra que $d \leq \sqrt{a+b}$.

Problema 14. Sea x_n una sucesión de números reales tal que:

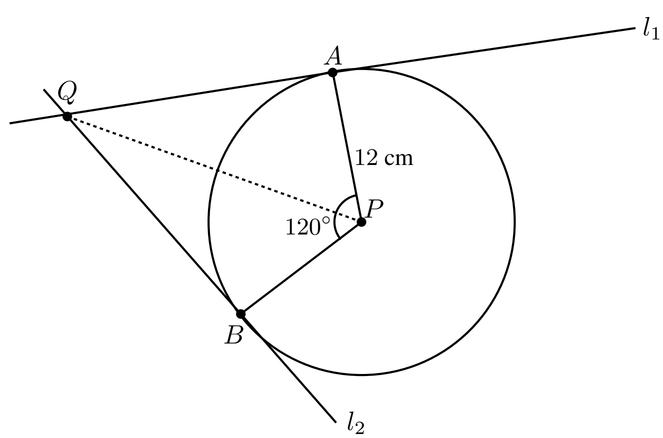
$$x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1,$$

para todo $n \geq 2$. Determina cuántos valores distintos puede tener la expresión:

$$\frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}.$$

Problema 15. Se tiene un tablero de 8×8 coloreado de negro y se tiene una ficha de 3×1. Al colocar la ficha sobre el tablero, cada una de las 3 casillas que cubre, cambia de color (de negro a blanco o de blanco a negro). Decide, si haciendo esto varias veces, se puede llegar a un tablero completamente blanco.

Problema 16. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia con centro en P y radio igual a 12 cm. Sea Q un punto exterior a $\mathcal{C}$ y sean l_1 y l_2 las dos rectas tangentes a $\mathcal{C}$ trazadas desde Q. Sean A y B los puntos de tangencia de $\mathcal{C}$ con l_1 y l_2, respectivamente. Si $\angle APB = 120°$, demuestra que $QA = 12\sqrt{3}$ cm.



Problema 17. En una bodega hay 5 costales que pesan entre 50 kg y 65 kg cada uno. Desafortunadamente la báscula de la bodega está medio estropeada y no registra pesos

menores a 100 kg ni mayores a 145 kg. Con el fin de determinar el peso de cada costal, el encargado pesó por parejas los 5 costales en todas las combinaciones posibles, obteniendo los siguientes resultados: 107 kg, 109 kg, 110 kg, 113 kg, 114 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg y 124 kg. Determina el peso de los 5 costales.

Problema 18. Determina todos los enteros positivos menores o iguales que 120 que tienen exactamente 4 divisores positivos que suman un cuadrado perfecto.

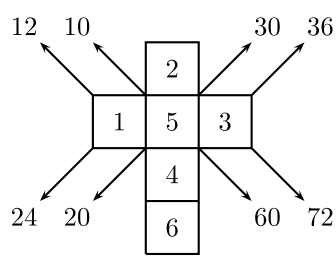
Problema 19. En un torneo con $n \geq 3$ competidores, cada uno jugó una vez contra cada uno de los demás. No hubo empates y ningún competidor le ganó a todos los demás.
(a) Demuestra que hubo tres competidores a, b, c tales que a le ganó a b, b le ganó a c y c le ganó a a.
(b) Para cada entero $n \geq 3$ da un ejemplo en que sólo haya una terna de competidores (a, b, c) que cumpla las condiciones del inciso anterior.

Problema 20. En un concurso de matemáticas, ningún estudiante resolvió todos los problemas. Cada problema fue resuelto por exactamente tres estudiantes y cada par de problemas fue resuelto por exactamente un estudiante. ¿Cuál es el máximo número de problemas en este concurso?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de la sección anterior. Es importante que tengas en cuenta que las soluciones que aquí presentamos no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos del tipo de razonamiento que se busca estimular en los problemas de olimpiada. Piensa que cada problema puede tener tantas soluciones como ideas creativas y originales se desarrollen con base en la lógica y en la correcta argumentación.
Si tú encontraste una solución diferente de las nuestras y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a nuestra dirección electrónica: `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Una solución es la siguiente. Observa que las flechas que salen de los vértices indican en número que corresponde al producto de las tres caras que concurren en él.



Solución del problema 2.

1. Cada cabra puede acceder a un sector de círculo cuya superficie es igual a $\frac{1}{6}$ de la superficie del círculo de radio 24 m. Luego, la superficie en la que pueden comer las tres es igual a $\frac{3}{6}24^2\pi = 288\pi$ m^2 (ver el Teorema 5 del apéndice).

2. La cuerda de las otras dos cabras mide $48 - 32 = 16$ m. Luego, la superficie en

la que pueden comer las tres es igual a $\frac{32^2\pi}{6} + 2\frac{16^2\pi}{6} = 256\pi$ m^2.

Solución del problema 3.

1. Observemos que el número que anotamos después de la primera etapa es cualquiera que sea diferente de 1. Entonces, en cada etapa el número que sumamos es cualquiera salvo que el que anotamos en la etapa anterior. Luego, s es máxima cuando todos los números (salvo el 1 inicial) son 4 ó 3. Por lo tanto, el valor máximo de s es:

$$1 + (1005 \times 4) + (1004 \times 3) = 7033.$$

2. Observemos que el valor mínimo de s es cuando anotamos en cada etapa 1 ó 2. Luego, su valor mínimo es:

$$1 + (1005 \times 2) + (1004 \times 1) = 3015.$$

Para obtener el 3016 sólo hay que cambiar el 2 de una etapa por el 3. Con este procedimiento podemos obtener todos los valores entre 3015 y:

$$1 + (1005 \times 3) + (1004 \times 1) = 4020.$$

Ahora, podemos cambiar uno a uno los 1 por 2, obteniendo todos los valores hasta el $1 + (1005 \times 3) + (1004 \times 2) = 5024$. Continuando con este proceso podemos obtener todos los valores hasta el valor máximo de s.

Solución del problema 4. Llamemos h a la altura del cilíndro. Entonces, el radio de la esfera y de la base del cono mide 10 cm y la altura del cono es igual a $(h - 20)$ cm. El volumen del cilíndro es igual a $(100)\pi h$ cm^3, el de la esfera $\frac{4000}{3}\pi$ cm^3 y el del cono es igual a $\frac{100}{3}\pi(h - 20)$ cm^3 (ver el Teorema 6 del apéndice). Como un litro de agua ocupa 1000 cm^3 tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 1000 &= (100)\pi h - \frac{4000}{3}\pi - \frac{100}{3}\pi(h - 20) \\ &= \frac{200}{3}\pi(h - 10). \end{aligned}$$

Luego, la altura del cilíndro mide $(\frac{15}{\pi} + 10)$ cm.

Solución del problema 5. Iniciemos con un tablero de 2×2. Una manera de construirlo es:

$$\begin{array}{|c|c|c} \hline 1 & -1 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\ \hline 1 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{-1} & \end{array}$$

Ahora vamos a construir un tablero de 4×4. Para ello, utilizaremos el tablero de 2×2. Para que las sumas obtenidas sigan iguales, colocamos 1 y -1 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & & & \\
\hline
-1 & -1 & & & \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{-1} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} &
\end{array}$$

Para completar el tablero, basta incluir el tablero de 2×2 que construimos, pero invertido:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
-1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{-1} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{-3} &
\end{array}$$

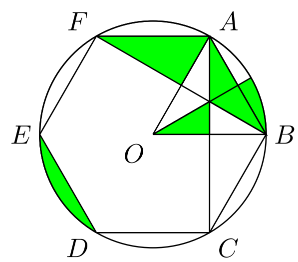
Observemos que podemos construir un tablero de $(2k+2)\times(2k+2)$ a partir de un tablero de $2k\times 2k$. En el tablero de $2k\times 2k$ las sumas serán iguales a $-(2k-1)$, $-(2k-2)$,$\dots, 2k$. Entonces, para construir un tablero de $(2k+2)\times(2k+2)$ colocamos un tablero de $2k\times 2k$ en la parte superior izquierda, luego colocamos números 1 en las $2k$ casillas del $(2k+1)$-ésimo renglón y en las $2k$ casillas de la $(2k+1)$-ésima columna y números -1 en las $2k$ casillas del $(2k+2)$-ésimo renglón y en las $2k$ casillas de la $(2k+2)$-ésima columna. Finalmente, colocamos el tablero de 2×2 que construimos al inicio, pero invertido:

<table>
<tr><td colspan="4" rowspan="4">$2k\times 2k$</td><td>1</td><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$\cdots$</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>$2k+1$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td><td>$\cdots$</td><td>-1</td><td>1</td><td>-1</td><td>$-2k$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$2k+2$</td><td>$-(2k+1)$</td><td></td></tr>
</table>

Vemos que la suma de las $2k$ columnas y de los $2k$ renglones del tableo de $2k\times 2k$ van de $-(2k+1)$ a $2k$. Así tenemos todas las sumas de $-(2k+1)$ a $2k+2$. Luego, es posible construir un tablero de $2n\times 2n$ para todo entero positivo n. En particular, es posible construir un tablero de 1000×1000.

Solución del problema 6. Observemos que los botones 1, 3, 7 y 9 cambian de color cuando apretamos algunos de los botones 2, 4, 6 u 8. Si queremos que al final todos los botones sean rojos, entonces los botones 1, 3, 7 y 9 tienen que cambiar de color un número impar de veces. Por lo tanto, para que las cuatro esquinas cambien a rojo, tenemos que apretar los botones 2, 4, 6 y 8 un número par de veces, pues el número de veces que apretemos el botón 2 más el número de veces que apretemos el botón 4 debe ser impar. Lo mismo sucede con los botones 6 y 8. Pero entonces el botón 5 sólo cambió un número par de veces, ya que éste cambia de color cuando apretamos los botones 2, 4, 6 u 8. Por lo tanto, el botón 5 siempre sería verde. Luego, no es posible que todos los botones se vuelvan rojos.

Solución del problema 7. Como el triángulo OAB es equilátero, podemos ver que su área sombreada es la mitad del área del triángulo AFB. Luego, el área sombreada que no incluye las áreas sombreadas entre las secantes AB y ED, es igual al área del triángulo AFB que es igual al área del triángulo AOB.



Como el triángulo equilátero AOB es de lado 1 cm, su altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm y su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2 (ver los Teoremas 9 y 5 del apéndice). Luego, basta determinar las áreas entre las secantes ED y AB. Como estas regiones son iguales, tenemos que sumar al área del triángulo AOB, $\frac{3}{2}$ del área entre el arco y la secante AB. Esta última área se puede calcular como la diferencia del área del sector circular AB y el área del triángulo equilátero AOB, es decir, $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2. Por lo tanto, tenemos que el área de la figura sombreada es:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{(2\pi - \sqrt{3})}{8}\ \text{cm}^2.$$

Solución del problema 8. Sea B el número que se puede formar con los dígitos de A distintos de 1, 2 y 4 y sea C el número divisible entre 7 que queremos formar a partir de A.

1. Supongamos que los tres dígitos de B son 7 ó 0. Como $C = 2401$ y $C = 2471$ son divisibles entre 7, entonces podemos reordenar los dígitos de A de manera que A sea múltiplo de 7: $772471, 702471, 240100$ y 240170.

2. Supongamos que no todos los dígitos de B son 7 ó 0. Luego, tenemos dos casos:

- B no es divisible entre 7. Entonces al dividir B entre 7 obtendríamos alguno de los residuos $1, 2, 3, 4, 5$ ó 6. Pero al dividir entre 7 los números 421, 142, 241, 214, 124 y 412, también obtenemos esos mismos residuos, pues:

$$\begin{aligned} 421 &\equiv 1 \pmod 7 \\ 142 &\equiv 2 \pmod 7 \\ 241 &\equiv 3 \pmod 7 \\ 214 &\equiv 4 \pmod 7 \\ 124 &\equiv 5 \pmod 7 \\ 412 &\equiv 6 \pmod 7. \end{aligned}$$

  Luego, podemos obtener C colocando a la derecha de B una permutación apropiada de los dígitos del número 124, pues si $n \equiv r \pmod 7$, entonces $1000n \equiv 7 - r \pmod 7$ (ver ejercicio 1 de *Divisibilidad y congruencias*).
- B es divisible entre 7. Entonces C se obtiene eliminando los dígitos 1, 2 y 4.

Solución del problema 9. Supongamos que existen m, n y t enteros positivos que satisfacen la ecuación. Observemos que todos los enteros de la forma 3^k son números impares, de modo que $3^m + 3^n$ es un número par, y por lo tanto $3^m + 3^n + 1$ es impar. Entonces, podemos suponer que $t = 2r + 1$ para algún entero positivo r. Luego:

$$\begin{aligned} 3^m + 3^n + 1 &= (2r+1)^2 \\ 3^m + 3^n &= 4r(r+1). \end{aligned}$$

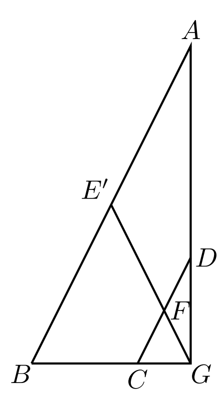
Pero $4r(r+1)$ es necesariamente un múltiplo de 8 (pues $r(r+1)$ es múltiplo de 2). Luego, $3^m + 3^n$ es múltiplo de 8. Sin embargo, para cualquier entero positivo k, $3^k \equiv 3 \pmod 8$ ó $3^k \equiv 1 \pmod 8$, por lo que $3^m + 3^n$ no puede ser múltiplo de 8. Por lo tanto, no existen soluciones enteras positivas para la ecuación $3^m + 3^n + 1 = t^2$.

Solución del problema 10. Tenemos que:

$$a_1 = 1,\ a_1a_2 = 4,\ a_1a_2a_3 = 9,\ a_1a_2a_3a_4 = 16 \ \text{ y } \ a_1a_2a_3a_4a_5 = 25.$$

Luego, $4a_3 = 9$, $9a_4 = 16$ y $16a_5 = 25$, de donde $a_3 + a_5 = \frac{9}{4} + \frac{25}{16} = \frac{61}{16}$.

Solución del problema 11. Sea G el punto de intersección de AD y BC, y sean E y F los puntos medios de AB y CD, respectivamente.



Como $\angle GAB + \angle GBA = \angle DAB + \angle ABC = 90°$, tenemos que el tercer ángulo del triángulo AGB mide $180° - \angle GAB + \angle GBA = 180° - 90° = 90°$. Luego, el triángulo AGB es rectángulo.
Por otra parte, sea E' el punto de intersección de GF con AB. Como DC y AB son paralelas, tenemos por el teorema de Thales (ver el Teorema 10 del apéndice) las siguientes proporciones:

$$\frac{DF}{AE'} = \frac{GF}{GE'} = \frac{FC}{E'B} \Rightarrow \frac{DF}{AE'} = \frac{FC}{E'B} \Rightarrow \frac{DF}{FC} = \frac{AE'}{E'B}.$$

Pero F es punto medio de CD. De aquí que $\frac{DF}{FC} = 1$ y en consecuencia $AE' = E'B$. Por lo tanto, E' es punto medio de AB. Luego, $E' = E$ y los puntos E, F y G son colineales.
Ahora, es un resultado conocido que la mediana sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo vale lo mismo que la mitad de la hipotenusa. Esto se debe a que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es su circuncentro, y por lo tanto equidista de los tres vértices, de modo que la mediana se convierte en un radio y es igual a cada una de las dos mitades de la hipotenusa (por ser radios). Aplicando este resultado en los triángulos rectángulos DGC y AGB, tenemos que $FG = \frac{CD}{2} = 3$ cm y $EG = \frac{AB}{2} = 8$ cm, de donde se sigue que $FE = EG - FG = 8 - 3 = 5$ cm, que es la distancia buscada.

Solución del problema 12. Observemos primero que si tenemos un grupo de n niños con $1 \leq n \leq 5$, hay $(n-1)!$ formas de acomodarlos en una rueda. Esto se debe a que si rompemos la rueda para formar una fila, el primer niño debe ser siempre el mismo (así nos aseguramos de que los acomodamos de formas distintas) y para los $n - 1$ lugares restantes de la fila tenemos $(n - 1)!$ formas de acomodar a los niños.
Dividimos la cuenta en casos.
Caso 1: un grupo de 5. Como todos los niños están formando una rueda, el número de formas de acomodarlos es $4! = 24$.
Caso 2: un grupo de 4 y un grupo de 1. Hay $5 \cdot 3! = 30$ formas de acomodar a cuatro de cinco niños en un grupo de 4 y hay sólo una forma de acomodar al otro niño en el grupo de 1. Luego, en este caso hay 30 formas.
Caso 3: un grupo de 3 y un grupo de 2. Hay $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ formas de formar el grupo de 3 niños (ver la Definición 3 del apéndice). Luego, hay $10 \cdot 2! = 20$ formas de acomodar a tres de cinco niños en un grupo de 3 y hay una sola forma de acomodar a los otros 2 niños en el grupo de 2. Luego, en este caso hay 20 formas.
Caso 4: un grupo de 3 y dos grupos de 1. Hay $10 \cdot 2! = 20$ formas de acomodar a tres de cinco niños en un grupo de 3 y hay una sola forma de acomodar a los otros dos niños en los dos grupos de 1, pues cada uno estará en un solo grupo. Luego, en este caso hay 20 formas.
Caso 5: dos grupos de 2 y un grupo de 1. Hay $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ formas de acomodar a dos de cinco niños en un grupo de 2 y hay $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$ formas de acomodar a dos de tres niños en otro grupo de 2. Luego, hay $\frac{10\cdot 3}{2} = 15$ formas de acomodar a los niños en los dos grupos de 2, pues cuando en el primer grupo hayamos elegido a los niños a y b, y en el segundo grupo hayamos elegido a los niños c y d, esta cuenta la estaríamos contando doble cuando en el primer grupo hayamos elegido a c y d y en el segundo grupo a a y

b. Por esta razón, dividimos entre 2 en la cuenta final. Por último, el niño que queda es el que irá en el grupo de 1. Luego, en este caso hay $15 \cdot 1 = 15$ formas.
Caso 6: un grupo de 2 y tres grupos de 1. Hay $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ formas de acomodar a los dos niños que irán en el grupo de 2 y hay una forma de acomodar a los tres niños restantes en los tres grupos de 1. Luego, en este caso hay 10 formas.
Caso 7: cinco grupos de 1. En este caso es claro que sólo hay una forma.
Por lo tanto, la respuesta es $24 + 30 + 20 + 20 + 15 + 10 + 1 = 120$ formas.

Solución del problema 13. Tenemos que:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab}$$

es un entero.
Como d divide a a y b, tenemos que d^2 divide a los números ab, a^2 y b^2. Además, como ab divide a $a^2 + a + b^2 + b$, resulta que d^2 divide a $a^2 + a + b^2 + b$, y por lo tanto, d^2 divide a $a + b$. De aquí que $d^2 \leq a + b$, de donde $d \leq \sqrt{a+b}$.

Solución del problema 14. Como $x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1$ para todo $n \geq 2$, tenemos que $x_{n+1}^2 - x_{n+2}x_n = 1$ para todo $n \geq 2$. Luego, $x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = x_{n+1}^2 - x_{n+2}x_n$ para todo $n \geq 2$. Reescribiendo esta igualdad, tenemos que

$$x_n^2 + x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_{n-1},$$

es decir:

$$\frac{x_{n+2} + x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n},$$

para todo $n \geq 2$. Por lo tanto, sólo hay un valor posible para la expresión.

Solución del problema 15. Escribamos en cada casilla del tablero los números 1, 2 ó 3 de la siguiente manera:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

En total hay 21 casillas con el número 1, 22 casillas con el número 2 y 21 casillas con el 3. Recordemos que todas están pintadas de negro. Al colocar la ficha de 3×1, cambiamos el color de exactamente una casilla con cada número. Entonces, el número de casillas negras con el número 1 y el número de casillas negras con el número 2 siempre tienen paridad distinta. Luego, no es posible llegar a un tablero completamente blanco.

Solución del problema 16. Usando el hecho de que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia, tenemos que PA y QA son perpendiculares. Por lo tanto, el triángulo AQP es rectángulo con $\angle PAQ = 90°$. Por otro lado, notemos que PQ es la bisectriz del ángulo APB, de modo que

$$\angle QPA = \frac{\angle APB}{2} = 60°$$

Luego, en el triángulo AQP tenemos que los ángulos miden $90°$, $60°$ y $30°$, es decir, el triángulo AQP es la mitad de un triángulo equilátero de lado QP. Entonces, $QP = 2AP = 24$ cm, y utilizando el teorema de Pitágoras (ver el Teorema 9 del apéndice) tenemos que $QA = \sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}$ cm.

Solución del problema 17. Denotemos por C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 a los pesos de los 5 costales, con $C_1 \leq C_2 \leq C_3 \leq C_4 \leq C_5$. Sabemos que $C_1 + C_2 = 107$ y que $C_4 + C_5 = 124$. Como

$$107 + 109 + 110 + 113 + 114 + 116 + 117 + 118 + 120 + 124 = 1148$$

y esta suma es igual a $4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 4C_4 + 4C_5 = 4(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5)$, tenemos que

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = \frac{1148}{4} = 287,$$

de donde $C_3 = 287 - 107 - 124 = 56$ kg. Ahora bien, como $C_1 \leq C_2 \leq C_3 \leq C_4 \leq C_5$, es fácil verificar que la pareja que pesa 109 kg debe corresponder a $C_1 + C_3$ y por tanto $C_1 = 109 - 56 = 53$ kg. Análogamente, la pareja que pesa 120 kg corresponde a $C_3 + C_5$ y por tanto $C_5 = 120 - 56 = 64$ kg. Por último, de $C_1 + C_2 = 107$ obtenemos que $C_2 = 107 - 53 = 54$ kg, y de $C_4 + C_5 = 124$ obtenemos que $C_4 = 124 - 64 = 60$ kg.

Solución del problema 18. Sea a un entero que cumple las condiciones del problema. Como a debe tener exactamente 4 divisores positivos, tenemos que $a = pq$ con p y q primos distintos, o bien $a = p^3$ con p primo (ver el Teorema 1 del apéndice).
Consideremos primero el caso $a = p^3$ con p primo. Como $a \leq 120$, las posibilidades para p son $p = 2$ ó $p = 3$, pues si $p \geq 5$, entonces $p^3 \geq 5^3 = 125 > 120$. Si $p = 2$, entonces $a = 8$ y la suma de sus divisores positivos es $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ que no es cuadrado. Si $p = 3$, entonces $a = 27$ y la suma de sus divisores positivos es $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ que tampoco es cuadrado.
Por lo tanto, no hay números de la forma p^3 con p primo, que cumplan las condiciones del problema.
Supongamos ahora que $a = pq$ con p y q primos distintos con $p < q$. Tenemos que $p < \sqrt{120} < 11$, de donde $p \leq 7$.
Si $p = 2$, tenemos que $3 \leq q \leq 60$ y la suma de los divisores positivos de a es

$1 + 2 + q + 2q = 3(1 + q)$. Para que esta suma sea un cuadrado debemos tener que $1 + q = 3r^2$ para algún entero $r > 1$. Los primos entre 3 y 60 son:

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.$$

De éstos sólo tenemos que considerar los que dejan residuo 2 al dividirse entre 3, pues $q = 3r^2 - 1 \equiv 2 \pmod 3$. Estos primos son $5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53$ y 59. Es fácil verificar que los únicos que cumplen que al sumarles 1 y dividirlos entre 3 dan un cuadrado, son $q = 11$ y $q = 47$. Por lo tanto, en este caso, los valores posibles para a son $2 \cdot 11 = 22$ y $2 \cdot 47 = 94$.
Si $p = 3$, tenemos que $5 \leq q \leq 40$ y la suma de los divisores positivos de a es $1 + 3 + q + 3q = 4(1 + q)$. Para que esta suma sea un cuadrado, debemos tener que $1 + q = r^2$ para algún entero $r > 1$. Es fácil verificar que ningún primo entre 5 y 40 cumple que al sumarle 1 se obtiene un cuadrado. Luego, en este caso no hay valores de a.
Si $p = 5$, tenemos que $7 \leq q \leq 24$ y la suma de los divisores positivos de a es $1 + 5 + q + 5q = 6(1 + q)$. Para que esta suma sea un cuadrado, debemos tener que $1+q = 6r^2$ para algún entero $r > 1$. Revisamos cuáles primos entre 7 y 24 al sumarles 1 y dividirlos entre 6 dan un cuadrado, y obtenemos que sólo el primo 23 cumple. Por lo tanto, $a = 5 \cdot 23 = 115$ en este caso.
Si $p = 7$, tenemos que $11 \leq q \leq 17$ y la suma de los divisores positivos de a es $1 + 7 + q + 7q = 8(1 + q)$. Para que esta suma sea un cuadrado, debemos tener que $1 + q = 2r^2$ para algún entero $r > 1$. Revisamos cuáles primos entre 11 y 17 al sumarles 1 y dividirlos entre 2 dan un cuadrado, y obtenemos que sólo el primo 17 cumple. Por lo tanto, $a = 7 \cdot 17 = 119$ en este caso.
Por lo tanto, las posibilidades para a son $22, 94, 115$ y 119.

Solución del problema 19. (a) Consideremos un jugador a que haya ganado el mayor número de juegos, digamos k. Como a no ganó todos los juegos, hay un jugador c que le ganó a a. Observemos que c no pudo haberle ganado a todos a los que a ganó, pues de lo contrario c tendría más de k juegos ganados. Por lo tanto, hay un jugador b que le ganó a c y al cual a le ganó, como queríamos.
(b) Sea $n \geq 3$ y supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los jugadores. Para cada $i, j \in \{2, \ldots, n\}$, supongamos que x_i le ganó a x_j si y sólo si $i > j$. Por otro lado, supongamos que x_1 le ganó a todos los demás excepto a x_{n-1}. Entonces, la terna (x_n, x_{n-1}, x_1) es la única que cumple las condiciones del inciso anterior.

Solución del problema 20. La siguiente tabla muestra que con 7 problemas se cumple la condición del problema.

Estudiantes	Problemas resueltos
A	$1, 2, 3$
B	$1, 4, 5$
C	$1, 6, 7$
D	$2, 4, 6$
E	$2, 5, 7$
F	$3, 4, 7$
G	$3, 5, 6$

Demostraremos que si el número de problemas es al menos 8, entonces no se cumple la condición.
Supongamos que el problema 1 fue resuelto por A, B y C. Ya que cada par de problemas fue resuelto por exactamente un estudiante, tenemos que cualquier otro problema (aparte del 1) fue resuelto por exactamente alguno de A, B y C. Como estamos suponiendo que el número de problemas es al menos 8, por el principio de las casillas, al menos 3 de los otros 7 problemas fueron resueltos por alguno de A, B y C, digamos A. Supongamos que estos problemas son $2, 3$ y 4. Entonces, además de A, ningún estudiante resolvió más de uno de los problemas $1, 2, 3$ y 4. Como A no resolvió todos los problemas, hay un problema, digamos el 5, que A no resolvió. Podemos suponer que B resolvió los problemas 5 y 6, y que C resolvió los problemas 7 y 8. Para cada uno de los problemas $2, 3$ y 4, hay dos estudiantes distintos de A, de B y de C, y distintos entre sí, que resolvieron el problema. Supongamos que D y E resolvieron el problema 2, que F y G resolvieron el problema 3 y que H e I resolvieron el problema 4. Entonces, los problemas 2 y 5 fueron resueltos por D o E, los problemas 3 y 5 fueron resueltos por F o G, y los problemas 4 y 5 fueron resueltos por H o I. En resumen tenemos que:

Estudiantes	Problemas resueltos
A	$1, 2, 3, 4$
B	$1, 5, 6$
C	$1, 7, 8$
D	$2, 5$
E	2
F	$3, 5$
G	3
H	$4, 5$
I	4

Como B resolvió el problema 5, tenemos al menos cuatro estudiantes que resolvieron el problema 5, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el máximo número de problemas es 7.

Problemas propuestos

Tzaloa es tu revista y no podrá estar completa sin ti. En esta sección te proponemos 5 nuevos problemas que necesitan de tu participación y ayuda para encontrar sus soluciones. Asimismo, en este número presentamos las soluciones de los problemas propuestos del número anterior.
Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y a través de ella estaremos recibiendo todas las contribuciones que nos lleguen desde todos los rincones del país. En el próximo número publicaremos las mejores soluciones y la tuya puede ser una de ellas.

Problemas propuestos.
Año 2009 No. 2.

Problema 1. (Principiante) Considera 50 puntos en el plano tales que no hay tres colineales. Cada uno de estos puntos se pinta usando uno de cuatro colores disponibles. Demuestra que hay al menos 130 triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color.

Problema 2. (Intermedio) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB = AD$ y $CB = CD$. Si la bisectriz del ángulo BDC corta a BC en L, AL corta a BD en M y $BL = BM$, determina el valor de $2\angle A + 3\angle C$.

Problema 3. (Intermedio) Demuestra que para cada entero positivo n existe un entero positivo k tal que la suma de los dígitos de k es n y la suma de los dígitos de k^2 es n^2.

Problema 4. (Intermedio) Determina todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que los números $a^2 - 4b$ y $b^2 - 4a$ sean cuadrados perfectos.

Problema 5. (Avanzado) Sean H y O, respectivamente, el ortocentro y el circuncentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. La prolongación de la mediana AM del triángulo ABC, corta a

Γ en el punto N y la circunferencia de diámetro AM corta a Γ en los puntos A y P. Demuestra que las rectas AP, BC y OH son concurrentes si y sólo si $AH = HN$.

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2009 No. 1.

Problema 1. (Principiante) Determina el menor entero positivo que no se puede escribir en la forma:

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

para algunos enteros positivos a, b, c y d.

Solución. Veamos primero que los números impares del 1 al 9, sí se pueden escribir en la forma indicada:

$$1 = \frac{2^2-2}{2^2-2}, \quad 3 = \frac{2^3-2}{2^2-2}, \quad 5 = \frac{16-1}{4-1} = \frac{2^5-2}{2^3-2},$$
$$7 = \frac{2^4-2}{2^2-2}, \quad 9 = 2^3+1 = \frac{(2^3+1)(2^3-1)}{2^3-1} = \frac{2^6-1}{2^3-1}.$$

Ahora, los números pares del 2 al 10 los podemos obtener como sigue:

$$2 = 2\cdot 1 = \frac{2^3-2^2}{2^2-2}, \quad 4 = 2\cdot 2 = \frac{2^4-2^3}{2^2-2}, \quad 6 = 2\cdot 3 = \frac{2^4-2^2}{2^2-2},$$
$$8 = 2\cdot 4 = \frac{2^5-2^4}{2^2-2}, \quad 10 = 2\cdot 5 = \frac{2^6-2^2}{2^3-2}.$$

Demostraremos que 11 no se puede escribir en la forma indicada. Supongamos que $11 = \frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$ para algunos enteros positivos a, b, c y d. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b$ y $c > d$. Sean $m = a - b$, $n = c - d$ y $k = b - d$. La igualdad anterior es equivalente a la igualdad:

$$11(2^n - 1) = 2^k(2^m - 1).$$

Si $k > 0$, entonces el lado derecho de la ecuación anterior es un número par, mientras que el lado izquierdo es un número impar. Luego, $k = 0$. Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a la ecuación:

$$11(2^n - 1) = 2^m - 1,$$

de donde es claro que $m > n$.
Si m es impar, entonces $2^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod 3$. Luego,

$$11(2^n - 1) \equiv 2(2^n - 1) \equiv -2 \pmod 3,$$

de donde $2^n - 1 \equiv -1 \pmod 3$, es decir, $2^n \equiv 0 \pmod 3$ lo cual no es posible. Por lo tanto, m es par. En este caso, $2^m \equiv (-1)^m \equiv 1 \pmod 3$ y en consecuencia,

$11(2^n-1) \equiv 0 \pmod 3$. Luego, $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$ o bien $2^n \equiv 1 \pmod 3$. De aquí que n es par. Supongamos que $m = 2i$ y $n = 2j$ para algunos enteros positivos i y j. Tenemos que $i > j$, pues $m > n$. Sustituyendo obtenemos que:

$$\begin{aligned} 11(2^{2j}-1) &= 2^{2i}-1 \\ 2^{2j}(2^{2(i-j)}-11) &= -10 \\ 2^{2j-1}(11-2^{2(i-j)}) &= 5. \end{aligned}$$

Como $j \geq 1$, tenemos que $2^{2j-1} \geq 2$ y por lo tanto 2 divide a 5, lo cual no es posible. Por lo tanto, el menor entero positivo que no se puede escribir en la forma indicada es el número 11.

Problema 2. (Principiante) Determina todos los enteros positivos n que cumplan, para alguna elección adecuada de los signos, la igualdad:

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2. \qquad (1)$$

Por ejemplo, $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ cumple. Pero 3 no, pues no hay manera de elegir los signos en $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2$ para obtener 3.

Solución. Es fácil ver que para todo entero m se tiene que:

$$4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2. \qquad (2)$$

Luego, si $m = 0$ tenemos la expresión $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, y si $m = 1$ tenemos que $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2$. Demostraremos que todo entero positivo de la forma $4k$ y de la forma $4k+1$, admite una expresión como (1). La demostración la haremos por inducción en k (ver el Criterio 2 del apéndice). Si $k = 1$ no hay nada que hacer, pues ya vimos que 4 y 5 cumplen. Supongamos que para algún entero $k > 1$, los números $4k$ y $4k+1$ cumplen (1). Consideremos a los números $4(k+1)$ y $4(k+1)+1$. Tenemos que:

$$4(k+1) = 4k + 4 = 4k + (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2$$

y

$$4(k+1)+1 = (4k+1)+4 = 4k+1+(4k+2)^2-(4k+3)^2-(4k+4)^2+(4k+5)^2.$$

La primera igualdad se obtiene haciendo $m = 4k$ en (2) y la segunda igualdad se obtiene haciendo $m = 4k+1$ en (2). Por lo tanto, los números $4(k+1)$ y $4(k+1)+1$ se pueden escribir en la forma dada en (1). Esto completa la inducción.
Demostraremos ahora que ningún entero positivo de la forma $4k+2$ ó $4k+3$ se puede escribir como en (1). En efecto, si $n = 4k+2$ entonces $n \equiv 0 \pmod 2$ y $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2 \equiv \underbrace{\pm 1^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm (n-1)^2}_{\frac{n}{2}=2k+1 \text{ sumandos}} \equiv \pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1 \pmod 2$.
De aquí que si $n = 4k+2$ se pudiera escribir en la forma indicada, entonces la suma $\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{2k+1 \text{ sumandos}}$ sería par para alguna elección adecuada de los signos. Pero esto no

puede ser, pues esta suma tiene un número impar de sumandos impares. Luego, no es posible escribir a n en la forma indicada.
Supongamos ahora que $n = 4k + 3$. Entonces $n \equiv 1 \pmod 2$ y

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2 \equiv \underbrace{\pm 1^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm n^2}_{\frac{n+1}{2}=2k+2 \text{ sumandos}} \equiv \pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1 \pmod 2.$$

Luego, si $n = 4k + 3$ se pudiera escribir como en (1), entonces

$$\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{2k+2 \text{ sumandos}} \equiv 1 \pmod 2$$

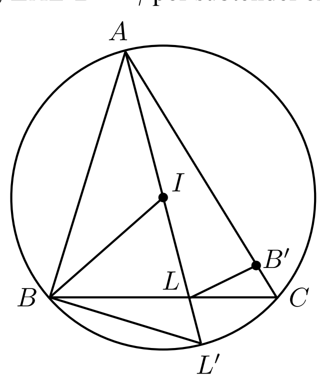
para alguna elección adecuada de los signos, es decir, $\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{2k+2 \text{ sumandos}}$ sería impar, para alguna elección adecuada de los signos. Pero esto no es posible, pues esta suma tiene un número par de sumandos impares. Por lo tanto, no es posible escribir a n en la forma indicada.
En consecuencia, los números que se pueden escribir como en (1), son todos los de la foma $4k$ y los de la forma $4k + 1$.

Problema 3. (Principiante) Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta AI corta a BC en L y al circuncírculo del triángulo ABC en L'. Demuestra que los triángulos BLI y $L'IB$ son semejantes si y sólo si $AC = AB + BL$.

Solución. Sean $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle ACB$. Como I es incentro del triángulo ABC, tenemos que $\angle IBL = \frac{\beta}{2}$ y $\angle CAL' = \frac{\alpha}{2}$. Pero $\angle CAL' = \angle CBL'$ por subtender el mismo arco. Luego, $\angle CBL' = \frac{\alpha}{2}$, de modo que

$$\angle IBL' = \angle IBL + \angle CBL' = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Por otra parte, el ángulo BIL' es un ángulo exterior del triángulo AIB, de donde $\angle BIL' = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. De aquí que $\angle IBL' = \angle BIL'$ y el triángulo $L'BI$ es isósceles. Además, $\angle AL'B = \gamma$ por subtender el mismo arco.



Sea $u = \angle ILB$. Tenemos que los triángulos BLI y $L'IB$ son semejantes si y sólo si $\angle IBL = \angle AL'B$ y $\angle BIL' = \angle ILB$, es decir, si y sólo si $\frac{\beta}{2} = \gamma$ y $\frac{\alpha+\beta}{2} = u$. Sea B' el punto sobre AC tal que $AB' = AB$ y sea $v = \angle CLB'$. Entonces, los triángulos ABL y $AB'L$ son congruentes según el criterio LAL (ver la Definición 7 y el Criterio 8 del apéndice), de donde $B'L = BL$ y $\angle AB'L = \beta$. Luego, $\beta = \angle AB'L = v + \gamma$ ya que el ángulo $AB'L$ es exterior al triángulo $CB'L$. Sustituyendo la igualdad $\beta = v + \gamma$ en la igualdad $\frac{\beta}{2} = \gamma$, obtenemos que $v = \gamma$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \triangle BLI \sim \triangle L'IB \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{2} = \gamma \ \text{ y } \ \frac{\alpha+\beta}{2} = u \\ &\Leftrightarrow \quad v = \gamma \\ &\Leftrightarrow \quad B'L = B'C \\ &\Leftrightarrow \quad BL = B'C \\ &\Leftrightarrow \quad AB' + B'C = AB + BL \\ &\Leftrightarrow \quad AC = AB + BL. \end{aligned}$$

Problema 4. (Intermedio) Determina todos los enteros positivos t, x, y, z que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z + t &= xy, \\ zt &= x + y. \end{aligned}$$

Solución. Despejando z de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, tenemos que $(xy - t)t = x + y$, de donde $y = \frac{t^2+x}{xt-1}$. Luego, $z = \frac{x^2+t}{xt-1}$.
Si $xt - 1 = 1$, entonces $xt = 2$, de donde $t = 1$, $x = 2$ ó $t = 2$, $x = 1$. En el primer caso, $y = 3$, $z = 5$ y en el segundo caso, $y = 5$, $z = 3$.
Supongamos que $xt - 1 \geq 2$, es decir, $xt \geq 3$. Si $2 \leq t \leq x$, entonces:

$$y = \frac{t^2 + x}{xt - 1} = 1 + \frac{(t^2 + x) - (xt - 1)}{xt - 1} \leq 1 + \frac{x + 1}{xt - 1} \leq 1 + \frac{x + 1}{2x - 1}.$$

Si $x = 2$, entonces $t = x$ y $y = z = 2$.
Si $x \geq 3$, entonces $y \leq 1 + \frac{4}{5} < 2$, de donde $y = 1$. Luego, $1 = \frac{t^2+x}{xt-1}$. Despejando x tenemos $x = \frac{t^2+1}{t-1} = t + 1 + \frac{2}{t-1}$. De aquí que x es entero sólo si $t = 2$. Así, $x = 5$, $z = 3$. Análogamente, si $2 \leq x \leq t$, obtenemos la solución $t = 5$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.
Por lo tanto, las soluciones son:

$$(t, x, y, z) = (1, 2, 3, 5), (2, 1, 5, 3), (2, 2, 2, 2), (2, 5, 1, 3), (5, 2, 3, 1).$$

Problema 5. (Intermedio) Considera un conjunto finito de n puntos en el plano tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es al menos 1. Demuestra que hay a lo más $3n$ parejas de puntos a distancia 1.

Solución. Construyamos una gráfica con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de la siguiente manera (ver la Definicion 4 del apéndice). Dos vértices serán unidos por una arista si y sólo si la distancia entre ellos es exactamente 1. Denotaremos por $d(v_i, v_j)$ a la distancia entre los vértices v_i y v_j medida en la gráfica, por $d(v_i)$ a la valencia del vértice v_i, y por m a la mayor de todas las valencias. Afirmamos que $m \leq 6$. En efecto, supongamos que $m \geq 7$ y sea v un vértice con valencia m. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vértices adyacentes con v. Como $d(v, v_i) = 1$ y $d(v_i, v_{i+1}) \geq 1$ para $i = 1, \ldots, m$, con $v_{m+1} = v_1$, tenemos que $\angle v_i v v_{i+1} \geq 60°$ para $i = 1, \ldots, m$. Luego:

$$360° = \sum_{i=1}^{m} \angle v_i v v_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{m} 60° = 60° \cdot m \geq 7(60°) = 420° > 360°,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $m \leq 6$. De aquí que $d(v_i) \leq 6$ para $i = 1, \ldots, n$. Por otra parte, si N denota el número total de aristas, tenemos que $2N = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$, pues una arista del vértice v_i al vértice v_j contribuye en 1 a la valencia del vértice v_i y en 1 a la valencia del vértice v_j, y por lo tanto en 2 a la suma de todas las valencias. Luego:

$$2N = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n} 6 = 6n,$$

de donde $N \leq \frac{6n}{2} = 3n$. Es decir, hay a lo más $3n$ parejas de vértices a distancia 1, como queríamos.

Problemas y Soluciones de las Olimpiadas Internacionales de 2008

En esta sección aparecen los exámenes de las diferentes olimpiadas internacionales en las que México participó el año pasado. Hemos incluido las soluciones de cada uno de los problemas y, en algunos casos, hay más de una solución para un mismo problema. Cabe mencionar que las soluciones que no tienen el nombre del autor, corresponden a las soluciones oficiales que dan los comités organizadores de cada concurso, mientras que las soluciones que cuentan con crédito para los autores corresponden a respuestas correctas, diferentes de las oficiales, dadas por los participantes.

XX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Durante el mes de marzo de 2008 se aplicó el examen de la XX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico a todos los alumnos que en ese momento se encontraban en los entrenamientos. Dicho examen llega por correo, y se aplica y califica en México. Los mejores exámenes se enviaron a Corea para ser evaluados por el comité coreano. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Aldo Pacchiano Camacho de Morelos, obtuvo medalla de oro; Eduardo Velasco Barreras de Sonora, Manuel Guillermo López Buenfil de Chihuahua, Marcelino Anguiano Chávez de Chihuahua y Malors Emilio Espinoza Lara de Jalisco, obtuvieron medalla de bronce. México ocupó el lugar número 14 de 28 países participantes.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle A < 60°$. Sean X y Y puntos en los lados AB y AC respectivamente, tales que:

$$CA + AX = CB + BX \quad \text{y} \quad BA + AY = BC + CY.$$

Sea P un punto tal que las rectas PX y PY son perpendiculares a AB y AC, respectivamente. Demuestre que $\angle BPC < 120°$.

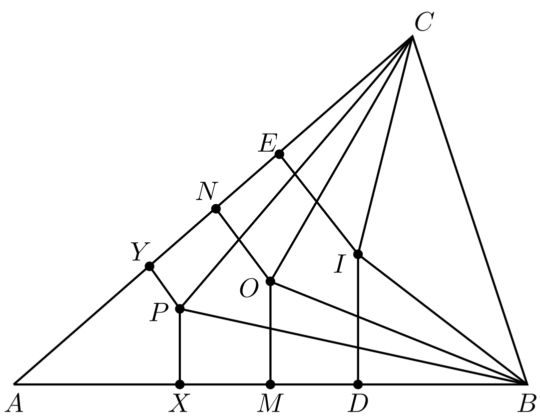
Solución. Sea I el incentro del triángulo ABC, y sean D y E los pies de las perpendiculares desde I sobre AB y AC, respectivamente.
Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que AC es el lado más grande. Luego, X está en el segmento AD. Aunque P podría o no estar dentro del triángulo ABC, la demostración que vamos a hacer funciona en ambos casos. Notemos que P está en la recta perpendicular a AB que pasa por X.
Sea O el punto medio de IP, y sean M y N los pies de las perpendiculares desde O sobre AB y AC, respectivamente. Entonces, M y N son los puntos medios de DX y EY, respectivamente.
De las condiciones que cumplen los puntos X e Y, tenemos que:

$$AX = \frac{AB+BC-CA}{2} \quad \text{y} \quad AY = \frac{BC+CA-AB}{2}.$$

De la igualdad $AD = AE = \frac{CA+AB-BC}{2}$, obtenemos que:

$$BD = AB - AD = AB - \frac{CA+AB-BC}{2} = \frac{AB+BC-CA}{2} = AX.$$

Como M es el punto medio de DX, se sigue que M es el punto medio de AB. Similarmente, N es el punto medio de AC. Por lo tanto, las mediatrices de AB y AC se intersectan en O, es decir, O es el circuncentro del triángulo ABC. Como $\angle BAC < 60°$, O está del mismo lado de BC como el punto A y $\angle BOC = 2\angle BAC$.



Podemos calcular $\angle BIC$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\angle BIC &= 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB \\
&= 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\
&= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC.
\end{aligned}$$

Como $\angle BAC < 60°$, tenemos que:

$$2\angle BAC < 90° + \frac{1}{2}\angle BAC,$$

es decir, $\angle BOC < \angle BIC$.
Se sigue que I está dentro del circuncírculo del triángulo isósceles BOC, pues O e I están del mismo lado de BC. Sin embargo, como O es el punto medio de IP, P debe estar afuera del circuncírculo del triángulo BOC y del mismo lado de BC como O. Por lo tanto:

$$\angle BPC < \angle BOC = 2\angle BAC < 120^\circ.$$

Problema 2. Los estudiantes de una clase forman grupos de exactamente tres alumnos cada uno, tal que cualesquiera dos grupos distintos tienen a lo más un miembro en común. Demuestre que, cuando hay 46 estudiantes en la clase, existe un conjunto de 10 estudiantes que no contiene algún grupo de los anteriores.

Solución. Sea C el conjunto de todos los 46 estudiantes en la clase y sea:

$$s = \max\{|S| : S \subseteq C \text{ y tal que } S \text{ no contiene propiamente a ningún grupo}\}.$$

Luego, es suficiente demostrar que $s \geq 10$. (Si $|S| = s > 10$, entonces podemos elegir un subconjunto de S formado por 10 estudiantes).
Supongamos que $s \leq 9$ y sea S un conjunto de tamaño s en el cual ningún grupo está propiamente contenido. Consideremos cualquier estudiante, digamos v, afuera de S. Debido a la maximalidad de s, habría un grupo que contiene al estudiante v y a otros dos estudiantes en S. El número de formas de elegir dos estudiantes de S es:

$$\binom{s}{2} \leq \binom{9}{2} = 36.$$

Por otra parte, hay al menos $37 = 46 - 9$ estudiantes afuera de S. Luego, de entre aquellos 37 estudiantes afuera, hay al menos un estudiante, digamos u, que no pertenece a ningún grupo que contiene dos estudiantes de S y uno afuera de S. Esto se debe a que no hay dos grupos distintos que tengan dos miembros en común. Luego, S se puede agrandar incluyendo a u, lo cual es una contradicción.

Problema 3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. Una circunferencia que pasa por los puntos A y C intersecta a los lados BC y BA en D y E, respectivamente. Las rectas AD y CE intersectan a Γ nuevamente en G y H, respectivamente. Las rectas tangentes a Γ en A y C intersectan a la recta DE en L y M, respectivamente. Demuestre que las rectas LH y MG se intersectan en Γ.

Solución. Supongamos que MG intersecta a Γ en P. Como $\angle MCD = \angle CAE$ y $\angle MDC = \angle CAE$, tenemos que $MC = MD$. Luego:

$$MD^2 = MC^2 = MG \cdot MP,$$

de donde MD es tangente al circuncírculo del triángulo DGP. Por lo tanto,

$$\angle DGP = \angle EDP.$$

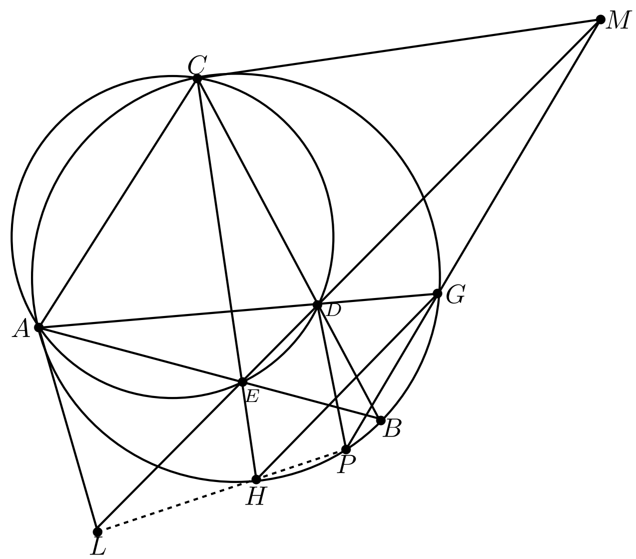
Sea Γ' el circuncírculo del triángulo BDE. Si $B = P$, como $\angle BGD = \angle BDE$, las tangentes de Γ' y Γ en B deberían coincidir, es decir, Γ' es tangente a Γ desde adentro.

Supongamos que $B \neq P$.
Si P está en el mismo lado de BC como G, entonces:

$$\angle EDP + \angle ABP = 180°,$$

ya que $\angle DGP + \angle ABP = 180°$. Luego, el cuadrilátero $BPDE$ es cíclico, y por lo tanto P está en la intersección de Γ' con Γ.
En caso contrario:

$$\angle EDP = \angle DGP = \angle AGP = \angle ABP = \angle EBP.$$



Luego, el cuadrilátero $PBDE$ es cíclico, y por lo tanto P nuevamente está en la intersección de Γ' con Γ.
Análogamente, si LH intersecta a Γ en Q, tenemos que, o bien $Q = B$, en cuyo caso Γ' es tangente a Γ desde adentro, o bien $Q \neq B$. En este último caso, Q está en la intersección de Γ' con Γ. Luego, en cualquier caso, tenemos que $P = Q$.

Problema 4. Considere la función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, donde $\mathbb{N}_0$ es el conjunto de todos los enteros no negativos, definida por las siguientes condiciones:

(i) $f(0) = 0$, (ii) $f(2n) = 2f(n)$, (iii) $f(2n+1) = n + 2f(n)$ para toda $n \geq 0$.

(a) Encuentre los conjuntos:

$$\begin{aligned} L &= \{n | f(n) < f(n+1)\}, \\ E &= \{n | f(n) = f(n+1)\}, \\ G &= \{n | f(n) > f(n+1)\}. \end{aligned}$$

(b) Para cada $k \geq 0$, encuentre una fórmula para $a_k = \max\{f(n)|0 \leq n \leq 2^k\}$ en términos de k.

Solución. (a) Sean:

$$L_1 = \{2k|k > 0\}, \quad E_1 = \{0\} \cup \{4k+1|k \geq 0\} \text{ y } G_1 = \{4k+3|k \geq 0\}.$$

Demostraremos que $L_1 = L$, $E_1 = E$ y $G_1 = G$. Será suficiente demostrar que $L_1 \subseteq L$, $E_1 \subseteq E$ y $G_1 \subseteq G$, pues L_1, E_1 y G_1 son mutuamente disjuntos y:

$$L_1 \cup E_1 \cup G_1 = \mathbb{N}_0.$$

Primero notemos que si $k > 0$, entonces $f(2k) - f(2k+1) = -k < 0$ y por lo tanto $L_1 \subseteq L$. En segundo lugar, tenemos que $f(0) = 0$ y:

$$\begin{aligned} f(4k+1) &= 2k + 2f(2k) = 2k + 4f(k), \\ f(4k+2) &= 2f(2k+1) = 2(k + 2f(k)) = 2k + 4f(k), \end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$. Luego, $E_1 \subseteq E$.
Por último, para demostrar que $G_1 \subseteq G$, demostraremos que $f(n+1) - f(n) \leq n$ para todo n. (De hecho, se puede demostrar que $f(n+1) - f(n) \leq \frac{n}{2}$). Si n es par, digamos $n = 2t$, entonces:

$$f(2t+1) - f(2t) = t \leq n.$$

Si n es impar, digamos $n = 2t+1$, entonces asumiendo inductivamente que el resultado se cumple para todos los enteros no negativos $m < n$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= f(2t+2) - f(2t+1) = 2f(t+1) - t - 2f(t) \\ &= 2(f(t+1) - f(t)) - t \leq 2t - t = t < n. \end{aligned}$$

Luego, para todo $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(4k+4) - f(4k+3) &= f(2(2k+2)) - f(2(2k+1)+1) \\ &= 4f(k+1) - (2k+1+2f(2k+1)) \\ &= 4f(k+1) - (2k+1+2k+4f(k)) \\ &= 4(f(k+1) - f(k)) - (4k+1) \\ &\leq 4k - (4k+1) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $G_1 \subseteq G$.

(b) Notemos que $a_0 = a_1 = f(1) = 0$. Sea $k \geq 2$ y sea $N_k = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$. Demostraremos primero que el máximo a_k se da en el mayor número del conjunto $G \cap N_k$, es decir, $a_k = f(2^k - 1)$. Usaremos inducción en k para demostrar esto. Notemos que $f(2) = 0$, $f(3) = 1$ y $f(4) = 0$. Luego, $a_2 = f(3) = f(2^2 - 1)$.
Supongamos que $k \geq 3$. Para cada entero par $2t$ con $2^{k-1} + 1 < 2t \leq 2^k$, tenemos que:

$$f(2t) = 2f(t) \leq 2a_{k-1} = 2f(2^{k-1} - 1) \tag{3}$$

por hipótesis de inducción.
Para cada entero impar $2t+1$ con $2^{k-1}+1 \leq 2t+1 < 2^k$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(2t+1) &= t + 2f(t) \leq 2^{k-1} - 1 + 2f(t) \\ &\leq 2^{k-1} - 1 + 2a_{k-1} = 2^{k-1} - 1 + 2f(2^{k-1}-1), \end{aligned} \tag{4}$$

nuevamente por hipótesis de inducción.
Combinando (3), (4) y:

$$f(2^k - 1) = f(2(2^{k-1}-1)+1) = 2^{k-1} - 1 + 2f(2^{k-1}-1),$$

podemos concluir que $a_k = f(2^k - 1)$ como queríamos.
Además, obtenemos que:

$$a_k = 2a_{k-1} + 2^{k-1} - 1$$

para todo $k \geq 3$. Notemos que esta fórmula recursiva para a_k también se cumple para $k = 0, 1$ y 2.
Por lo tanto, usando esta fórmula recursiva repetidas veces, obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_k &= 2a_{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2(2a_{k-2} + 2^{k-2} - 1) + 2^{k-1} - 1 \\ &= 2^2 a_{k-2} + 2 \cdot 2^{k-1} - 2 - 1 \\ &= 2^2(2a_{k-3} + 2^{k-3} - 1) + 2 \cdot 2^{k-1} - 2 - 1 \\ &= 2^3 a_{k-3} + 3 \cdot 2^{k-1} - 2^2 - 2 - 1 \\ &\vdots \\ &= 2^k a_0 + k \cdot 2^{k-1} - 2^{k-1} - 2^{k-2} - \cdots - 2 - 1 \\ &= k \cdot 2^{k-1} - 2^k + 1 \end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$.

Problema 5. Sean a, b, c enteros que satisfacen $0 < a < c-1$ y $1 < b < c$. Para cada k, con $0 \leq k \leq a$, sea r_k, con $0 \leq r_k < c$, el residuo de kb al dividirlo entre c. Demuestre que los dos conjuntos $\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_a\}$ y $\{0, 1, 2, \ldots, a\}$ son diferentes.

Solución. Supongamos que los dos conjuntos son iguales. Entonces b y c son primos relativos, y el polinomio:

$$f(x) = (1 + x^b + x^{2b} + \cdots + x^{ab}) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{a-1} + x^a)$$

es divisible entre $x^c - 1$. (Esto se debe a que si $m = n + cq$, entonces:

$$x^m - x^n = x^{n+cq} - x^n = x^n(x^{cq} - 1)$$

y

$$(x^{cq} - 1) = (x^c - 1)((x^c)^{q-1} + (x^c)^{q-2} + \cdots + 1).$$

De la igualdad:

$$f(x) = \frac{x^{(a+1)b} - 1}{x^b - 1} - \frac{x^{a+1} - 1}{x - 1} = \frac{F(x)}{(x-1)(x^b-1)},$$

donde $F(x) = x^{ab+b+1} + x^b + x^{a+1} - x^{a+b} - x^{a+b+1} - x$, tenemos que:

$$F(x) \equiv 0 \ (\text{mod } x^c - 1).$$

Como $x^c \equiv 1$ (mod $x^c - 1$), podemos concluir que:

$$\{ab + b + 1, b, a + 1\} \equiv \{ab + b, a + b + 1, 1\} \ (\text{mod } c).$$

Luego:

$$b \equiv ab + b, \ \ a + b + 1 \ \text{ ó } \ 1 \ (\text{mod } c).$$

Pero ni $b \equiv 1$ (mod c) ni $b \equiv a + b + 1$ (mod c) son posibles según las condiciones dadas. Por lo tanto, $b \equiv ab + b$ (mod c), lo cual tampoco es posible debido a que b y c son primos relativos.

X Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 4 al 9 de junio de 2008 se celebró en San Pedro Sula, Honduras, la X Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Fernando Ignacio Arreola Gutiérrez de Aguascalientes, Flavio Hernández González de Aguascalientes, y Manuel Enrique Dosal Bustillos de Chihuahua. El alumno Flavio obtuvo medalla de oro, Manuel Enrique obtuvo medalla de plata y Fernando Ignacio medalla de bronce. México ocupó el 2^o lugar de 12 países participantes.

Problema 1. Determine el menor entero positivo N tal que la suma de sus dígitos sea 100 y la suma de los dígitos de $2N$ sea 110.

Solución de Manuel Enrique Dosal Bustillo. Sabemos que $2N$ es un número par tal que la suma de sus dígitos es 110, veamos cuál es la menor opción para $2N$. Para esto ponemos un 8 al final (el mayor dígito par) después los nueves que sean necesarios y al final faltará un 3, así la menor opción para $2N$ será:

$$3999999999998.$$

Para esta opción obtenemos que $N = 1999999999999$, pero la suma de sus dígitos es 109, así que este N no funciona.
Veamos la siguiente menor opción para $2N$. Es fácil ver que ésta consiste en cambiar los dígitos 3 y 9 del inicio por 4 y 8, obteniendo:

$$2N = 4899999999998.$$

De aquí que $N = 2449999999999$, y como la suma de los dígitos de N sí es 100 concluimos que éste es el número buscado.

Solución alternativa. Denotemos por $S(N)$ a la suma de los dígitos del entero N. Observemos que si todos los dígitos de N son menores que 5, entonces $S(2N) = 2S(N)$. Pero por cada dígito de N mayor o igual que 5, al sumar $N + N$ se produce el acarreo de una unidad, lo que hace que $S(2N)$ disminuya en 9 unidades respecto a $2S(N)$. Es decir, $S(2N) = 2S(N) - 9x$, donde x es el número de dígitos de N que son mayores o iguales a 5. Como queremos que $2S(N) - S(N) = 200 - 110 = 90 = 9(10)$, entonces N debe contener 10 dígitos mayores o iguales que 5. Además, queremos que N sea el menor posible, entonces pongamos estos 10 dígitos iguales a 9, para disminuir el número total de dígitos. Para completar $S(N) = 100$ con dígitos menores que 5, se necesitan al menos tres dígitos, que podrán ser: 4, 4 y 2 ó 4, 3 y 3. Por lo tanto,

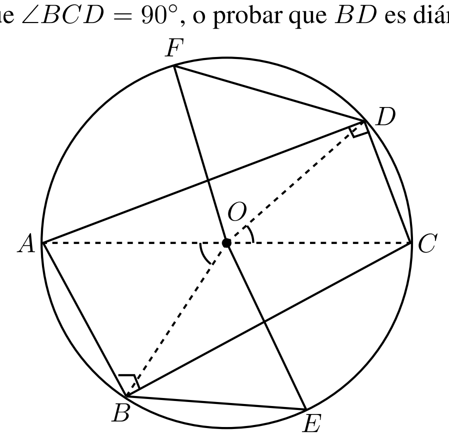
$$N = 2449999999999$$

es el menor número que cumple que

$$\begin{aligned} S(N) &= 2 + 4 + 4 + (9 \cdot 10) = 100 \\ S(2N) &= S(4899999999998) = 4 + 8 + (9 \cdot 10) + 8 = 110. \end{aligned}$$

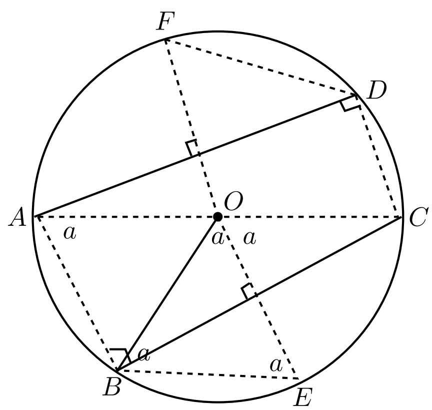
Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O, tal que AC es diámetro, y al construir los paralelogramos $ABEO$ y $OCDF$, los puntos E y F tambien pertenecen a la circunferencia. Demuestre que $ABCD$ es un rectángulo.

Solución de Fernando Ignacio Arreola Gutiérrez. Sabemos que AC es diámetro, por lo que $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Así que para demostrar que $ABCD$ es un rectángulo basta ver que $\angle BCD = 90°$, o probar que BD es diámetro.



Consideramos primero el paralelogramo $ABEO$. Tenemos que los lados opuestos son iguales, así que $OA = EB$ y $OE = AB$, pero como A y E están sobre la circunferencia tenemos que $OA = OE$ por ser ambos radios. Así que $ABEO$ es un rombo. Análogamente $OCDF$ es un rombo y como cada lado mide lo mismo que el radio del círculo, se tiene que $AB = CD$ y los ángulos centrales que abarcan estos segmentos son iguales, es decir, $\angle COD = \angle AOB$. Como A, O y C están en la misma recta, tenemos que B, O y D están también alineados, lo que implica que BD es un diámetro, que era lo que faltaba demostrar.

Solución alternativa. Como AC es diámetro, $\angle CDA = 90° = \angle ABC$. Como $ABEO$ es paralelogramo, AB es paralela a OE y ambas son perpendiculares a BC. Además, como O equidista de C y B, entonces OE es mediatriz de BC.



Por otra parte como OA y OE son radios, entonces $ABEO$ es un rombo, por lo que AO y AB son iguales, pero OB también es radio, entonces el triángulo ABO es equilátero. Asimismo, el triángulo BEO es también equilátero.
Análogamente se demuestra que OCD y ODF son triángulos equiláteros.
Como el triángulo OCD es equilátero, $60° = \angle OCD = \angle ACD = 90° - \angle DAC$, de donde $\angle DAC = 30°$, mientras que $\angle BAO = 60°$, pues el triángulo ABO es equilátero. Luego, $\angle DAB = 90°$ y $\angle BCD = 360° - 3(90°) = 90°$, es decir, $ABCD$ es un rectángulo.

Problema 3. Se tienen 2008 bolsas rotuladas del 1 al 2008, con 2008 ranas en cada una. Dos personas juegan alternadamente. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella la cantidad de ranas que se deseen (al menos 1), quedando en esta x ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con número de rótulo mayor al de la bolsa seleccionada y que contenga más de x ranas, se escapan algunas hasta que queden x en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa uno. Pruebe que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora y explíquela.

Solución de Flavio Hernández González. Demostremos que el primer jugador tiene la estrategia ganadora.
En su primer turno sacará 2007 ranas de la segunda bolsa, así que quedarán 2008 ranas en la primera bolsa y 1 rana en cada bolsa de las restantes.
Veamos que después de cada turno del segundo jugador el primero podrá dejar el juego como sigue:

1. hay k ranas en la primera bolsa y
2. hay una rana en cada bolsa desde la 2 hasta la k, o simplemente deja una rana en la primera bolsa, en cuyo caso el segundo jugador la saca y pierde.

Para esto usamos una sencilla inducción. Tenemos la base de inducción en la configuración del juego después de la primera jugada ya que en ese momento quedan 2008 ranas en la primera bolsa y 1 rana en cada bolsa de la 2 a la 2008.
Ahora supongamos que después de cierto número de jugadas y después del turno del primer jugador en el juego quedan $k > 1$ ranas en la primera bolsa y 1 rana en cada bolsa de la 2 a la k. El segundo jugador puede:

1. Sacar t ranas de la primera bolsa, donde $t < k$. En este caso la primera bolsa queda con $k-t$ ranas. El primer jugador saca entonces la rana de la bolsa $k-t+1$ (que es menor o igual que k) para que se escapen todas las ranas de las bolsas mayores a $k-t$ y obtiene lo deseado (si $t = k-1$ ya sólo quedó una rana).

2. Sacar la rana de la bolsa s, donde $s > 1$. En este caso se escaparán ranas de las bolsas mayores a s y sólo habrá ranas en las primeras $s-1$ bolsas, entonces el primer jugador saca $k-s+1$ ranas de la primera bolsa (este número es positivo) y esta quedará con $s-1$ ranas, que es lo buscado (si $s = 2$ ya sólo quedó una rana).

3. Sacar todas las ranas de la primera bolsa, en cuyo caso pierde el juego.

Así que concluimos que el primer jugador tiene la estrategia ganadora.

Solución alternativa. Gana el primer jugador si en su primera jugada extrae 2007 ranas de la bolsa número 2 y continúa jugando de la siguiente manera: si el segundo jugador extrae i ranas de la bolsa uno, entonces el primero responde extrayendo la única rana que hay en la bolsa número $2009 - i$; y si el segundo extrae la rana de la bolsa j, el primero responde dejando en la bolsa uno sólo $j-1$ ranas. Probémoslo.
Después de la primera jugada quedan en la bolsa número uno 2008 ranas y en cada una de las bolsas de la 2 a la 2008 una rana. Supongamos sin perdida de generalidad que las ranas de la bolsa uno están numeradas del 1 al 2008 y que al extraer ranas de esta bolsa, se toman las de números mayores. Podemos establecer entonces una correspondencia biunívoca entre las ranas de la 2 a la 2008 y las bolsas de igual número. Entonces es fácil percatarse de que siempre que el jugador 2 pueda jugar sin sacar la última rana de la bolsa uno (rana número 1) entonces el primer jugador también podrá hacer su jugada sin tocar dicha rana.

Problema 4. Cinco amigas tienen una peque na tienda que abre de lunes a viernes. Como cada día son suficientes dos personas para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, que especifique quienes trabajarán cada día, y que cumpla las dos condiciones siguientes: a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana. b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo? Ejemplo: Si las amigas son A, B, C, D y E un posible plan de trabajo sería: lunes A y B, martes A y D, miércoles B y E, jueves C y E, viernes C y D.

Solución de Manuel Enrique Dosal Bustillo. La persona A debe formar pareja con otras dos, que se pueden escoger de 6 maneras (B y C, B y D, B y E, C y D, C y E, D y E). Si por ejemplo trabajan las parejas AB y AC, entonces también debe hacerlo DE, pues de lo contrario para que D y E trabajen dos días deberían trabajar DB, DC, EB y EC, y no alcanzan los 5 días disponibles. Entonces si trabajan AB, AC y DE, las dos parejas que faltan sólo pueden ser BD y CE ó BE y CD. Resumiendo, las cinco parejas para la semana se pueden escoger de $6 \times 2 = 12$ maneras. Como el número de maneras de ordenarlas es $5! = 120$, el número de planes de trabajo es $12 \times 120 = 1440$.

Problema 5. Halle un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales tal que $p(1) = 210$ y $(x+10)p(2x) = (8x-32)p(x+6)$ para todo x real.

Solución de Flavio Hernández González. Apliquemos la condición a $x = 4$:

$$(4+10)p(8) = (32-32)p(4+6) = 0,$$

así que 8 es raíz del polinomio buscado. Aplicamos ahora a $x = -10$ y obtenemos:

$$0 = (-10+10)p(2\cdot 10) = (-80-32)p(-4),$$

de donde -4 también es raíz del polinomio buscado.
Tenemos que $(x-8)(x+4)$ divide al polinomio $p(x)$, si buscamos p de grado 2 tenemos que $p(x) = a(x-8)(x+4)$. Sustituyendo $x = 1$, obtenemos que $210 = a(-7)(5)$, de donde $a = -6$ y, por consiguiente, $p(x) = -6(x-8)(x+4)$. Sustituyendo este polinomio en la condición del problema, obtenemos que

$$(x+10)(-6)(2x-8)(2x+4) = (8x-32)(-6)(x-2)(x+10),$$

esto es, $x-6 = 0$, lo cual solo se cumple para $x = 6$.
Por lo que intentamos con un polinomio cúbico, esto es:

$$p(x) = a(x-8)(x+4)(x+b)$$

donde a y b son números reales. Sustituimos $p(x)$ en la condición inicial para obtener:

$$(x+10)a(2x-8)(2x+4)(2x+b) = (8x-32)a(x-2)(x+10)(x+b+6).$$

Cancelando los factores $x+10$, $x-4$ y a se tiene:

$$(x+2)(2x+b) = 2(x-2)(x+b+6),$$

y desarrollando obtenemos:

$$2x^2 + (b+4)x + 2b = 2x^2 + (2b+12-4)x + (-4b-24).$$

Es fácil ver que $b = -4$ cumple esta ecuación. Ahora simplemente nos falta encontrar el valor de a para tener que $p(1) = 210$. Sustituyendo $x = 1$ en $p(x)$, obtenemos:

$$210 = p(1) = a(1-8)(1+4)(1-4) = a(-7)(5)(-3) = 105a,$$

de donde $a = 2$, por lo que un polinomio que satisface el problema es

$$p(x) = 2(x-8)(x+4)(x-4).$$

Solución alternativa. Sustituyendo $x = 4$ en la condición inicial, obtenemos que $14p(8) = 0$, esto es, $p(8) = 0$.
Sustituyendo ahora $x = -10$ en la condición inicial, obtenemos que $-112p(-4) = 0$, esto es, $p(-4) = 0$.

Ahora, si sustituimos $x = 2$ en la condición inicial, entonces $12p(4) = -16p(8)$, lo cual implica que $p(4) = 0$.
Por otro lado, observemos que el polinomio $p(x)$ debe ser de tercer grado, ya que si ax^n es el término de mayor grado de $p(x)$ entonces, comparando los términos de mayor grado en ambos miembros de la igualdad $(x + 10)p(2x) = (8x - 32)p(x + 6)$ resulta $ax(2x)^n = ax(8x^n)$, de donde $2^n = 8$ y, por lo tanto, $n = 3$.
Como -4, 4 y 8 son raíces de $p(x)$, concluimos que $p(x) = a(x + 4)(x - 4)(x - 8)$.
Finalmente, la condición $p(1) = 210$ significa que

$$210 = a(1 + 4)(1 - 4)(1 - 8) = 105a,$$

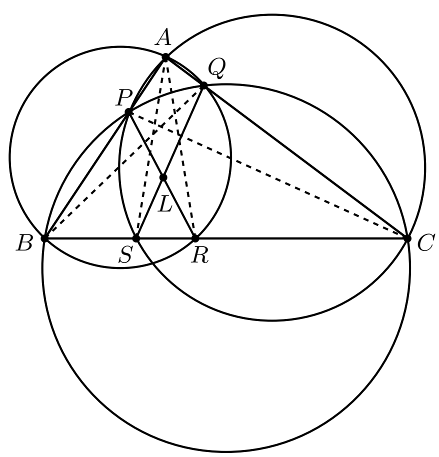
de donde $a = 2$ y $p(x) = 2(x + 4)(x - 4)(x - 8)$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo. Se toman P en AB y Q en AC tal que $BPQC$ es cíclico. La circunferencia circunscrita al triángulo ABQ corta a BC de nuevo en R y la circunferencia circunscrita al triángulo APC corta a BC de nuevo en S, PR y QS se intersecan en L. Demuestre que la intersección de AL y BC no depende de la elección de P y Q.

Solución. Como los cuadriláteros $BAQR$ y $CAPS$ son cíclicos, tenemos que

$$\angle LSR = 180^\circ - \angle QSB = \angle BAC,$$
$$\angle LRS = 180^\circ - \angle PRC = \angle BAC.$$

Luego, $\angle LSR = \angle LRS$, esto es, el triángulo LRS es isósceles con $LR = LS$.



De manera análoga, usando los cuadriláteros cíclicos $BAQR$, $CAPS$ y $BPQC$, tenemos que

$$\begin{aligned}\angle ARS = \angle ARB = \angle AQB &= 180^\circ - \angle BQC \\ &= 180^\circ - \angle BPC = \angle APC = \angle ASC = \angle ASR,\end{aligned}$$

esto es, el triángulo ASR es isósceles con $AS = AR$.
Por lo tanto, AL es la mediatriz del segmento RS, que no depende de P y Q.

XXIII Olimpiada Iberoamericana

La XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se llevó a cabo en Salvador de Bahía, Brasil, del 18 al 28 de septiembre de 2008. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Luis Ángel Isaías Castellanos de Colima, Manuel Guillermo López Buenfil de Chihuahua, José Luis Álvarez Rebollar de Michoacán y Eduardo Velasco Barreras de Sonora. El alumno Eduardo obtuvo medalla de oro, y Luis Ángel, Manuel y José Luis obtuvieron medalla de bronce. México ocupó el sexto lugar de 21 países participantes.

Problema 1. Se distribuyen los números $1, 2, \ldots, 2008^2$ en un tablero de 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

Solución de Eduardo Velasco Barreras. Sean $m_1, \ldots, m_{2008}$ y $M_1, \ldots, M_{2008}$ los números menores y mayores que se encuentran en las casillas de las filas $1, \ldots, 2008$, respectivamente, y sean $m'_1, \ldots, m'_{2008}$ y $M'_1, \ldots, M'_{2008}$ los números menores y mayores que se encuentran en las casillas de las columnas $1, \ldots, 2008$, respectivamente. Para cada fila y cada columna del tablero calculamos la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos.

$$\begin{aligned} S &= \left(\sum_{i=1}^{2008} M_i - \sum_{i=1}^{2008} m_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{2008} M'_i - \sum_{i=1}^{2008} m'_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2008} M_i + \sum_{i=1}^{2008} M'_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{2008} m_i + \sum_{i=1}^{2008} m'_i\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_{2008}$ es la permutación de los M_i tal que $A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_{2008}$; $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{2008}$ es la permutación de los M'_i tal que $A'_1 \leq A'_2 \leq \cdots \leq A'_{2008}$; $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$ es la permutación de los m_i tal que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2008}$ y $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2008}$ es la permutación de los m'_i tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_{2008}$.
Como en cada casilla hay un número distinto tenemos que $A_1 < A_2 < \cdots < A_{2008}$, es decir, $A_1 + 2007 \leq A_2 + 2006 \leq \cdots \leq A_{2007} + 1 \leq A_{2008}$. Como $A_{2008} \leq 2008^2$ y $A_k + 2008 - k \leq A_{2008}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} A_1 + 2007 &\leq 2008^2 \\ A_2 + 2006 &\leq 2008^2 \\ A_3 + 2005 &\leq 2008^2 \\ &\vdots \\ A_{2008} &\leq 2008^2. \end{aligned}$$

Luego, $\sum_{i=1}^{2008} A_i \leq (2008^2)(2008) - (1+2+3+\cdots+2007) = 2008^3 - (2007 \cdot 1004)$. Análogamente, en el caso de las columnas tenemos que $\sum_{i=1}^{2008} A'_i \leq 2008^3 - (2007 \cdot 1004)$.

Como en cada casilla hay un número distinto tenemos que $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2008}$, es decir, $1 \leq a_1 \leq a_2 - 1 \leq a_3 - 2 \leq \cdots \leq a_{2007} - 2006 \leq a_{2008} - 2007$. Como $a_1 \geq 1$ y $a_k - k + 1 \geq a_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 1 \\ a_2 &\geq 2 \\ a_3 &\geq 3 \\ &\vdots \\ a_{2008} &\geq 2008. \end{aligned}$$

Luego, $\sum_{i=1}^{2008} a_i \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + 2008 = 2009 \cdot 1004$.
Análogamente, en el caso de las columnas tenemos que $\sum_{i=1}^{2008} a_i' \geq 2009 \cdot 1004$.
Entonces:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{2008} M_i + \sum_{i=1}^{2008} M_i' - \sum_{i=1}^{2008} m_i - \sum_{i=1}^{2008} m_i' \\ &= \sum_{i=1}^{2008} A_i + \sum_{i=1}^{2008} A_i' - \sum_{i=1}^{2008} a_i - \sum_{i=1}^{2008} a_i' \\ &\leq 2008^3 - 2007(1004) + 2008^3 - 2007(1004) - 2009(1004) - 2009(1004) \\ &= 2(2008^3 - 4016(1004)) \\ &= 2\left(2008^3 - 2008 \cdot 2 \cdot \frac{2008}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 2008^2 \cdot 2007. \end{aligned}$$

Luego, el valor máximo posible de S es $2 \cdot 2008^2 \cdot 2007$.

El arreglo en el que se alcanza el máximo es colocando los números más pequeños, del 1 al 2008, en la diagonal que va de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda; los más grandes, del $(2008^2 - 2007)$ al 2008^2, en la otra diagonal y los demás números se colocan arbitrariamente. Como 2008 es par, las diagonales del tablero son ajenas.

2008^2							1
	2008^2 -1					2	
		2008^2 -2			3		
			$\ddots$	$\iddots$			
			$\iddots$	$\ddots$			
		2006			2008^2 -2005		
	2007					2008^2 -2006	
2008							2008^2 -2007

Solución alternativa. Todos los números que serán sumados son de la forma $a - b$, con $a > b$. De este modo, la suma de los 4016 números es igual a $S = T - U$, siendo T la suma de los números mayores y U la suma de los números menores. Observemos que cada número está en exactamente una fila y una columna, luego está a lo sumo dos veces en la suma. Entonces:

$$\begin{aligned} S &\leq 2 \cdot ((2008^2 + (2008^2 - 1) + \cdots + (2008^2 - 2007)) - (1 + 2 + \cdots + 2008)) \\ &= 2 \cdot 2007 \cdot 2008^2. \end{aligned}$$

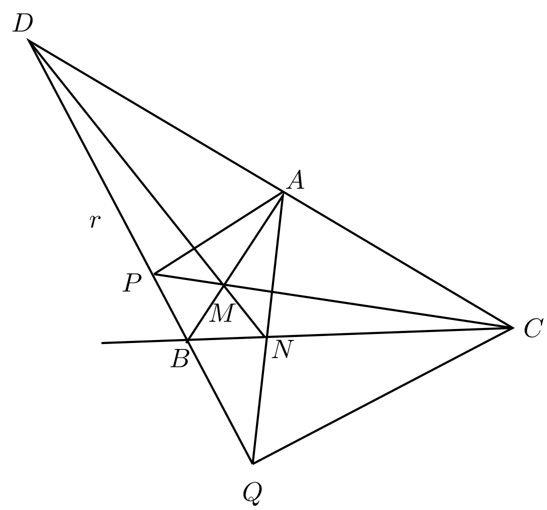
El valor máximo puede ser obtenido poniendo los números del 1 al 2008 en una diagonal y los números del $(2008^2 - 2007)$ al 2008^2 en una diagonal desplazada, obteniendo por ejemplo el tablero:

1	2008^2 -2007						
	2	2008^2 -2006					
		3	2008^2 -2005				
			$\ddots$	$\ddots$			
				$\ddots$			
					2006	$\vdots$	$\vdots$
						2007	2008^2 -1
2008^2							2008

donde los espacios vacíos pueden ser llenados arbitrariamente.
Hay otras maneras de construir la tabla, algunas utilizando el hecho de que 2008 es par. Por ejemplo, poner los números menores en una diagonal y los números mayores en la otra diagonal.

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q los pies de las perpendiculales a la recta r que pasa por A y C, respectivamente. Las rectas CP y AB se intersectan en M y las rectas AQ y BC se intersectan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto en común.

Solución de José Luis Álvarez Rebollar. Sea D la intersección de las rectas AC y r. Probaremos que M, N y D son colineales utilizando el teorema de Menelao. Entonces, queremos demostrar que $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$ (dado que el signo sólo indica dirección).



Denotaremos por (XYZ) al área del triángulo XYZ.
Tenemos que:

$$(APC) = \frac{1}{2}(PC \cdot AM \operatorname{sen} \angle AMC) \text{ y } (PCB) = \frac{1}{2}(PC \cdot BM \operatorname{sen} \angle PMB),$$

de modo que:

$$\frac{(APC)}{(PCB)} = \frac{PC \cdot AM \operatorname{sen} \angle AMC}{PC \cdot BM \operatorname{sen} \angle PMB}.$$

Como $\angle AMC = \angle PMB$ por ser opuestos por el vértice, los senos se eliminan y nos queda:

$$\frac{(APC)}{(PCB)} = \frac{AM}{BM}. \tag{5}$$

Análogamente, tenemos que:

$$\frac{(ABQ)}{(AQC)} = \frac{AQ \cdot BN \operatorname{sen} \angle BNQ}{AQ \cdot CN \operatorname{sen} \angle ANC} = \frac{BN}{CN}. \tag{6}$$

Entonces:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{(APC)}{(PCB)} \cdot \frac{(ABQ)}{(AQC)}.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\frac{(APC)}{(AQC)} = \frac{\frac{AP \cdot PQ}{2}}{\frac{QC \cdot PQ}{2}} = \frac{AP}{QC} \quad \text{y} \quad \frac{(ABQ)}{(PCB)} = \frac{\frac{BQ \cdot AP}{2}}{\frac{PB \cdot QC}{2}} = \frac{BQ}{PB} \cdot \frac{AP}{QC}. \tag{7}$$

Multiplicando (5) y (6), obtenemos que:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{(APC)}{(PCB)} \cdot \frac{(ABQ)}{(AQC)} = \frac{(APC)}{(AQC)} \cdot \frac{(ABQ)}{(PCB)} = \frac{AP}{QC} \cdot \frac{BQ}{PB} \cdot \frac{AP}{QC}. \tag{8}$$

Ahora bien, como los triángulos ADP y CDQ son semejantes, ya que $\angle APD$ y $\angle CQD$ son rectos y $\angle ADP = \angle CDQ$, tenemos que $\frac{AP}{CQ} = \frac{AD}{CD}$. Luego, sustituyendo en (8) tenemos que:

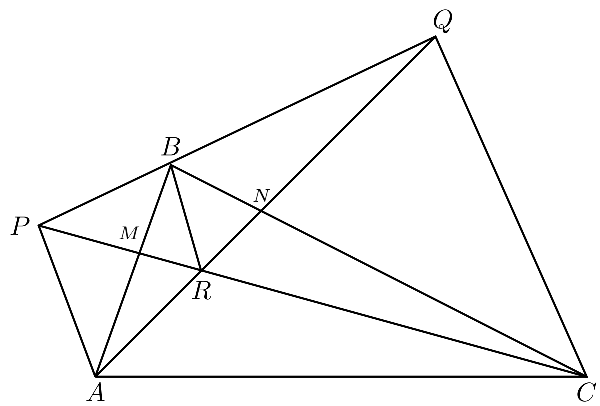
$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AP}{QC} \cdot \frac{BQ}{PB} \cdot \frac{AD}{CD},$$

de donde:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{AP}{QC} \cdot \frac{BQ}{PB}.$$

Ahora sólo falta probar que $\frac{AP}{QC} \cdot \frac{BQ}{PB} = 1$. Pero esto último es equivalente a $\frac{BQ}{QC} = \frac{PB}{AP}$, lo que es cierto ya que los triángulos APB y CQB son semejantes por tener ambos un ángulo recto y los ángulos CBQ y PBA iguales.

Solución alternativa. Sea O el punto de intersección de las rectas NM y CA. Probaremos que $\frac{OA}{OC} = \frac{AP}{CQ}$, y una vez demostrada esta igualdad, como los segmentos AP y CQ son paralelos, tendremos que O, P y Q son colineales, o bien, que AC, MN y r son concurrentes.



Denotemos por R al punto de intersección de CP y AQ. Como los segmentos AP y CQ son paralelos, los triángulos APR y QCR son semejantes. Por otra parte, como $\angle ABP = \angle CBQ$, tenemos que los triángulos ABP y CBQ son semejantes. Luego:

$$\frac{PR}{CR} = \frac{AP}{QC} = \frac{BP}{BQ},$$

lo que prueba que BR es paralelo a QC y PA. Por lo tanto, los pares de triángulos APM, BRM y CQN, BRN son semejantes, de modo que:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AP}{BR} \qquad \text{y} \qquad \frac{NB}{NC} = \frac{BR}{CQ}.$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo ABC obtenemos:

$$\frac{OA}{OC} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NB} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{OA}{OC} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{AP}{BR} \cdot \frac{BR}{CQ} = \frac{AP}{CQ},$$

como queríamos demostrar.

Problema 3. Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

Solución de Eduardo Velasco Barreras. Supongamos que $-m$ es un residuo cuadrático módulo 107. Entonces sea a una solución de $x^2 \equiv -m \pmod{107}$. Tenemos que $P(a) - P(0) = a^3 + ma + n - n = a(a^2 + m)$. Como $107 \mid a^2 + m$, tenemos que $107 \mid P(a) - P(0)$. Luego, $107 \mid a - 0$, es decir $107 \mid a$, y como $107 \mid a^2 + m$ entonces $107 \mid m$.

Supongamos que $-m$ es un residuo no cuadrático módulo 107 y $107 \nmid m$. Entonces, debemos encontrar enteros x, y tales que $107 \mid P(x) - P(y)$ y $107 \nmid x - y$. Pero:

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= (x-y)(m) + x^3 - y^3 \\ &= (x-y)(m) + (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x-y)(m + x^2 + y^2 + xy), \end{aligned}$$

de modo que debemos encontrar enteros x, y tales que $m+x^2+xy+y^2 \equiv 0 \pmod{107}$ y $107 \nmid x-y$.
Como $107 \nmid x-y$, alguno de ellos no es cero. Luego, sin pérdida de generalidad supongamos que es y. Sea y' tal que $y \cdot y' \equiv 1 \pmod{107}$. Como $107 \nmid y$, tenemos que $(y', 107) = 1$. Además $(2, 107) = 1$. Módulo 107 tenemos que:

$$\begin{aligned} 3m + x^2 + y^2 + xy \equiv 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m(y')^2 + (xy')^2 + 1 + xy' \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (xy')^2 + (xy') + 1 \equiv -m(y')^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4(xy')^2 + 4(xy') + 4 \equiv -4m(y')^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (2xy' + 1)^2 \equiv 4(-m)(y')^2 - 3. \end{aligned}$$

Como $-m$ no es un residuo cuadrático módulo 107, se sigue que $4(-m)(y')^2$ tampoco lo es. Ahora, $18^2 \equiv 3 \pmod{107}$ implica que 3 es un residuo cuadrático módulo 107, pero 6 no es un residuo cuadrático módulo 107 ya que:

$$\left(\frac{6}{107}\right) = \left(\frac{2}{107}\right)\left(\frac{3}{107}\right) = (-1)^{\frac{107^2-1}{8}}(1) = -1.$$

Luego, hagamos $4(-m)(y')^2 \equiv 6$ (esto es posible porque 6 y $4(-m)(y')^2$ no son residuos cuadráticos módulo 107). Así $(2xy'+1)^2 \equiv 4(-n)(y')^2 - 3 \equiv 6 - 3 = 3$ (y sí se cumple, pues 3 es residuo cuadrático con solución 18). Luego:

$$\begin{aligned} (2xy' + 1)^2 &\equiv 18^2 \pmod{107} \\ (2xy' + 1) &\equiv 18 \pmod{107} \\ x &\equiv 62y \pmod{107}. \end{aligned}$$

Como $4(-m)(y')^2 \equiv 6$, entonces $2(-m)(y')^2 \equiv 3$, pero $2 \cdot 54 \equiv 108 \equiv 1 \pmod{107}$. Multiplicando por 54 obtenemos:

$$\begin{aligned} 2(-m)(y')^2 &\equiv 3 \pmod{107} \\ 2 \cdot 54(-m)(y')^2 &\equiv 162 \pmod{107} \\ m(y')^2 &\equiv -162 \equiv 214 - 162 = 52 \pmod{107} \\ (y')^2 &\equiv 52m^{-1} \pmod{107} \\ y^2 &\equiv (52m^{-1})^{-1} \pmod{107} \\ y^2 &\equiv 52^{-1}m \pmod{107}. \end{aligned}$$

Como 107 es primo, $52^{106} \equiv 1 \pmod{107}$ por el pequeño teorema de Fermat. Luego, $y^2 \equiv 52^{-1}m$ es equivalente a $y^2 \equiv 52^{105}m$, que tiene solución dado que 52 es un residuo cuadrático, ya que $\left(\frac{52}{107}\right) = \left(\frac{13}{107}\right)\left(\frac{4}{107}\right) = \left(\frac{13}{107}\right) = 1$, y m también lo es, ya que $-1 = \left(\frac{-m}{107}\right) = \left(\frac{-1}{107}\right)\left(\frac{m}{107}\right) = -\left(\frac{m}{107}\right)$.
Luego, sean y, x tales que $y^2 \equiv 52^{105}m$ y $x \equiv 62y$. Claramente $x \not\equiv y$, por lo que sólo nos resta ver que x y y resuelven la congruencia $x^2 + y^2 + xy + m \equiv 0 \pmod{107}$.

Como $107 \nmid m$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+xy+m &\equiv 62^2y^2+y^2+62y^2+m \pmod{107}\\
&\equiv y^2(62^2+63)+m \pmod{107}\\
&\equiv 52^{105}(3907)+1 \pmod{107}\\
&\equiv -52^{106}+1 \pmod{107}\\
&\equiv 0 \pmod{107}.
\end{aligned}$$

Solución alternativa. Demostraremos primero la siguiente:
Afirmación. *Siendo p un número primo y A, B, C enteros tales que p no divide ni a A, ni a B, ni a C, entonces existen enteros x y y (no ambos divisibles entre p) tales que Ax^2+By^2+C es múltiplo de p.*

Demostración de la afirmación. Si k y l son enteros y $k \not\equiv 0 \pmod p$, entonces el conjunto $\{kx^2+l \pmod p | 0 \le x \le p-1\}$ tiene exactamente $\frac{p+1}{2}$ elementos, correspondientes a los residuos cuadráticos módulo p. Así, los conjuntos

$$\{Ax^2 \pmod p | 0 \le x \le p-1\} \quad \text{y} \quad \{-C-By^2 \pmod p | 0 \le y \le p-1\}$$

tienen intersección no vacía, es decir, existen enteros x y y tales que

$$Ax^2 \equiv -C-By^2 \pmod p$$

si y sólo si $Ax^2+By^2+C \equiv 0 \pmod p$. Además, como $C \not\equiv 0 \pmod p$ entonces no podemos tener $x \equiv y \equiv 0 \pmod p$.

Ahora bien, en nuestro problema observemos que:

$$P(x)-P(y) = x^3-y^3+m(x-y) = (x-y)(x^2+xy+y^2+m),$$

de manera que $107 \mid P(x)-P(y)$ si y sólo si $x-y \equiv 0 \pmod{107}$ ó

$$x^2+xy+y^2+m \equiv 0 \pmod{107},$$

es decir, si y sólo si $x-y \equiv 0 \pmod{107}$ ó $(2x+y)^2+3y^2+4m \equiv 0 \pmod{107}$.
Supongamos que $107 \nmid m$. Demostraremos, de manera equivalente, que existen enteros x y y tales que $107|P(x)-P(y)$ y $x \not\equiv y \pmod{107}$.
Por la afirmación anterior, existen enteros a y b no ambos divisibles entre 107 tales que $a^2+3b^2+4m \equiv 0 \pmod{107}$. Haciendo $x \equiv \frac{a-b}{2} \pmod{107}$ y $y \equiv b \pmod{107}$, tenemos que $(2x+y)^2+3y^2+4m \equiv 0 \pmod{107}$ y por lo tanto $107|P(x)-P(y)$.
Si $x \not\equiv y \pmod{107}$, terminamos la demostración.
Si $x \equiv y \pmod{107}$, entonces $a \equiv 3b \pmod{107}$, de donde

$$(3b)^2+3b^2 \equiv -4m \pmod{107}$$

si y sólo si $m \equiv -3b^2 \pmod{107}$. Observemos que $b \not\equiv 0 \pmod{107}$, pues de lo contrario tendríamos que $a \equiv b \equiv 0 \pmod{107}$, lo cual no es posible. Haciendo ahora

$x = -b$, $y = 2b$, tenemos que $(2x + y)^2 + 3y^2 + 4m \equiv 0 \pmod{107}$, lo cual implica que $107|P(x) - P(y)$, y claramente $x \not\equiv y \pmod{107}$.

Problema 4. Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que:

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

Solución de Manuel Guillermo López Buenfil. Supongamos que existen x e y enteros positivos tales que $x^{2008} + 2008! = 21^y$. Como $21^y = 3^y \cdot 7^y$, entonces $x^{2008} + 2008!$ debe tener la misma cantidad de factores 3 y 7. Como $3 \mid 2008!$ y $3 \mid 21^y$, entonces $3 \mid x^{2008}$, de donde $3 \mid x$. Análogamente $7 \mid x$.
Ahora bien, la cantidad de factores 3 en 2008! es:

$$\left[\frac{2008}{3}\right] + \left[\frac{2008}{9}\right] + \left[\frac{2008}{27}\right] + \left[\frac{2008}{81}\right] + \left[\frac{2008}{243}\right] + \left[\frac{2008}{729}\right] < 2008,$$

y la cantidad de factores 7 que hay en 2008! es:

$$\left[\frac{2008}{7}\right] + \left[\frac{2008}{49}\right] + \left[\frac{2008}{343}\right],$$

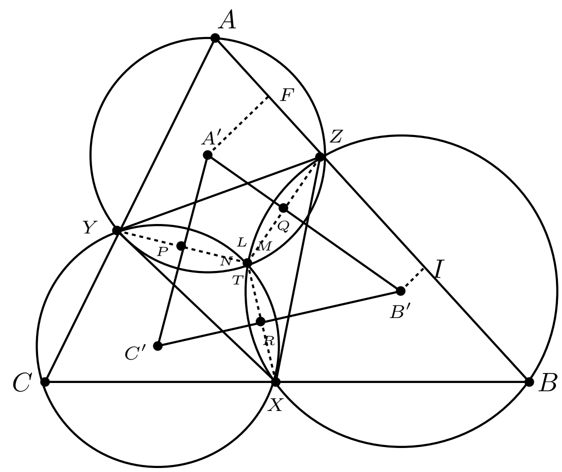
que es menor que la cantidad de factores 3.
Por otra parte, como x^{2008} tiene al menos 2008 factores 3 y al menos 2008 factores 7, entonces x^{2008} tiene más factores 3 y 7 que 2008!. Entonces la máxima potencia de 3 que divide a $x^{2008} + 2008!$ es la máxima potencia de 3 que divide a 2008! y lo mismo sucede con el 7. Por lo tanto, $x^{2008} + 2008!$ tiene más factores 3 que 7, lo que es una contradicción.

Problema 5. Sean ABC un triángulo y X, Y, Z puntos interiores de los lados BC, AC, AB respectivamente. Sean A', B', C' los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYX. Demuestre que:

$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si las rectas AA', BB', CC' tienen un punto en común.
Observación: Para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

Solución de Luis Ángel Isaías Castellanos. Primero veamos que las tres circunferencias se intersectan en un punto. Denotemos por L, M y N a los puntos de intersección de las circunferencias 2 a 2.



Tenemos que:

$$\begin{aligned} \angle YNX + \angle ACB &= 180^\circ \\ \angle YLZ + \angle CAB &= 180^\circ \\ \angle ZMX + \angle ABC &= 180^\circ, \end{aligned}$$

pero $\angle YNX + \angle YLZ + \angle ZMX = 360^\circ$, luego $\angle ZMX = \angle ZLX$ y por lo tanto $L = M$. Análogamente $N = M$. Por lo tanto, llamaremos T al punto de intersección de las tres circunferencias.

Sean P, Q y R las intersecciones de $A'C'$ con YT, $A'B'$ con ZT, y $B'C'$ con XT, respectivamente. Observemos que $\angle C'PT + \angle C'RT = 180^\circ$, lo que implica que $\angle PC'R + \angle PTR = 180^\circ$. Pero $\angle PTR + \angle YCX = 180^\circ$, luego $\angle PC'R = \angle YCX$. Análogamente, $\angle PA'Q = \angle CAB$ y $\angle QB'R = \angle ABC$. Por lo tanto, los triángulos $A'B'C'$ y ABC son semejantes y están a razón $y : x$, de donde sus áreas están a razon $y^2 : x^2$. Por lo tanto, basta demostrar que la razón de semejanza entre los triángulos $A'B'C'$ y ABC es 1 : 2.

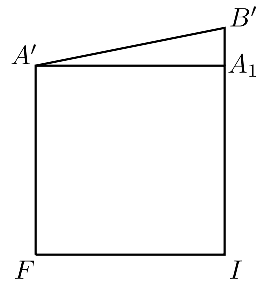
Para ello, demostraremos que $A'B' > \frac{AB}{2}$.

Tracemos la perpendicular a AB desde A' y B' y denotemos por F e I a los puntos de intersección, respectivamente. Como A' y B' son circuncentros, entonces F es punto medio de AZ e I es punto medio de BZ. Luego, en el cuadrilátero $FIB'A'$ tenemos que:

$$FI = \frac{1}{2}(AZ + ZB) = \frac{1}{2}(AB).$$

Si $A'B'$ es paralela a FI, entonces $A'B' = \frac{1}{2}(AB)$.

Si $A'B'$ no es paralela a FI entonces,veamos qué distancia es mayor si $A'F$ ó $B'I$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $B'I > A'F$ y tracemos $A'A_1$ perpendicular a $B'I$.



Entonces $(A'B')^2 = (A'A_1)^2 + (B'A_1)^2$, de donde $A'B' > A'A_1 = \frac{1}{2}(AB)$.
Por lo tanto:

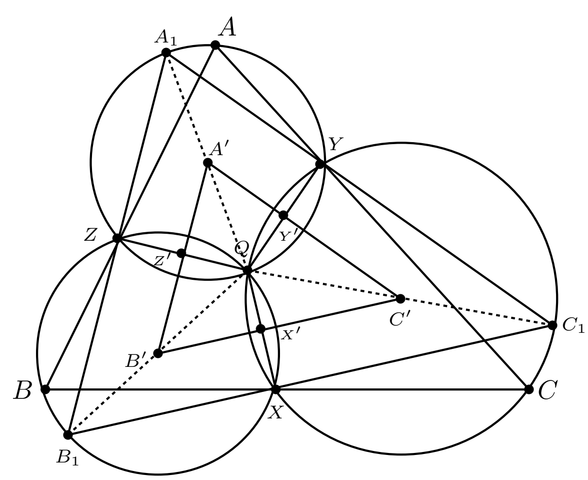
$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si la razón de los lados de los triángulos semejantes $A'B'C'$ y ABC es 2. Esto es, si y sólo si los lados del triángulo $A'B'C'$ son paralelos a los lados del triángulo ABC, es decir, si y sólo si AA', BB' y CC' son concurrentes.

Solución alternativa. Sea $Q \neq X$ la intersección de los cincurcírculos de los triángulos BXZ y CXY. Como los cuadriláteros $BXQZ$ y $CYQX$ son cíclicos tenemos que $\angle BZQ + \angle QXB = 180° = \angle CXQ + \angle QYC$. Entonces:

$$\begin{aligned} \angle AYQ + \angle QZA &= 360° - \angle QYC - \angle BZQ \\ &= \angle CXQ + \angle QXB \\ &= 180°, \end{aligned}$$

de donde el cuadrilátero $AZQY$ es cíclico. Luego, Q es la intersección de los circuncírculos de AZY, BXZ y CYX.



Sean X', Y', Z' los puntos de intersección de QX, QY y QZ con los lados $B'C'$, $C'A'$, y $A'B'$, respectivamente. Como $B'Q = B'X$ y $C'Q = C'X$, la recta $B'C'$ es mediatriz de QX, de modo que X' es el punto medio de QX. Análogamente, Y' y Z' son los puntos medios de QY y QZ, respectivamente.
Consideremos la homotecia con centro en Q y razón 2, que lleva X' a X, Y' a Y y Z' a Z. Sean A_1, B_1 y C_1 las imágenes de A', B' y C' bajo la homotecia. Como Q pertenece a los tres circuncírculos y A', B' y C' son sus respectivos centros, los radios QA', QB' y QC' son transformados en los diámetros QA_1, QB_1 y QC_1. En particular, A_1, B_1 y C_1 pertenecen a los circuncírculos de AZY, BXZ y CYX, respectivamente, y el triángulo $A_1B_1C_1$ es la imagen de $A'B'C'$ bajo la homotecia. Como la razón de homotecia es 2, $(A_1B_1C_1) = 4 \cdot (A'B'C')$, de modo que ahora queremos probar que $(A_1B_1C_1) \geq (ABC)$.
Ahora bien, considerando los circuncírculos tenemos que:

$$\begin{aligned} \angle AYA_1 = \angle AQA_1 = \angle AZA_1, \\ \angle BZB_1 = \angle BQB_1 = \angle BXB_1, \\ \angle CXC_1 = \angle CQC_1 = \angle CYC_1, \end{aligned}$$

pero como los pares de ángulos $\angle AZA_1$, $\angle BZB_1$ y $\angle BXB_1$, $\angle CXC_1$ son opuestos por el vértice, tenemos que los nueve ángulos anteriores miden lo mismo. En particular $\angle AQA_1 = \angle BQB_1 = \angle CQC_1$. Luego, Q es el centro de roto-homotecia que lleva $A_1B_1C_1$ a ABC. La razón de roto-homotecia es $\frac{QA_1}{QA} \geq 1$, pues QA es cuerda de la circunferencia de diámetro QA_1 y por lo tanto $(A_1B_1C_1) \geq (ABC)$, como queríamos demostrar. Observemos que la igualdad se da cuando QA, QB y QC son diámetros. En ese caso, AA', BB' y CC' concurren en Q.

Problema 6. En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro jugadores cada uno. Se organiza un torneo de biribol en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no son fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

Solución. Sea n un valor para el cual existe tal torneo. Fijando a una persona, en cada partido ella juega contra otras 4. Como ella juega contra cada una de las otras $n-1$ exactamente una vez, $n-1$ debe ser múltiplo de 4, luego n es impar. Como cada par de personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales, hay $\binom{n}{2}$ parejas. Además, hay $4 \cdot 4 = 16$ parejas en cada partida, entonces $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ es múltiplo de 16. Como n es impar, entonces una condición necesaria es que $n = 32k + 1$. Veamos que esa condición también es suficiente.
Primero probemos que basta construir un ejemplo para $k = 1$. De hecho, si $k > 1$, fijamos un jugador P y dividimos los $32k$ restantes en k grupos con 32 personas cada uno. Agregamos P a cada grupo y aplicamos la construcción para $k = 1$. De este modo, P juega contra cada uno de los demás $32k$ jugadores exactamente una vez. Además, dos jugadores del mismo grupo serán oponentes en exactamente un partido. Falta hacer que personas de grupos diferentes jueguen entre sí. Para eso basta dividir cada grupo en 8 equipos y organizar un partido entre equipos provenientes de grupos diferentes.

Luego, el problema se reduce a construir un torneo para $n = 33$. Coloquemos a las 33 personas igualmente espaciadas en un círculo C, dividiendo en 33 arcos de longitud 1. Definimos la pseudodistancia entre dos puntos como la longitud del menor arco que los une en C, pudiendo ser igual a $1, 2, 3, \ldots, 16$. Observemos que para cada $r \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ hay exactamente 33 pares con pseudodistancia r, y cada una de ellas puede ser obtenida a partir de las otras a través de una rotación de $\frac{j-360^\circ}{33}$, donde $j = 1, 2, 3, \ldots, 32$. Entonces, basta con obtener un partido en que los 16 pares de oponentes tengan pseudodistancia $1, 2, 3, \ldots, 16$, pues para obtener los otros pares se efectúan las rotaciones mencionadas.
Uno de esos partidos es $\{1, 2, 3, 4\}$ contra $\{5, 9, 13, 17\}$. En la siguiente tabla se muestran las pseudodistancias:

	1	2	3	4
5	4	3	2	1
9	8	7	6	5
13	12	11	10	9
17	16	15	14	13

49ª Olimpiada Internacional

La 49^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 10 al 19 de julio de 2008 en Madrid, España, con la participación de 97 países. México ocupó el lugar número 37. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Manuel Guillermo López Beunfil de Chihuahua, Malors Emilio Espinoza Lara y Rodrigo Mendoza Orozco de Jalisco, Aldo Pacchiano Camacho y Andrés Campero Nuñez de Morelos, y Manuel Novelo Puc de Yucatán. El alumno Aldo obtuvo medalla de plata, Manuel Guillermo obtuvo medalla de bronce, y Malors Emilio, Rodrigo, Andrés y Manuel obtuvieron mención honorífica.

Problema 1. Un triángulo acutángulo ABC tiene ortocentro H. La circunferencia con centro en el punto medio de BC que pasa por H corta a la recta BC en A_1 y A_2. La circunferencia con centro en el punto medio de CA que pasa por H corta a la recta CA en B_1 y B_2. La circunferencia con centro en el punto medio de AB que pasa por H corta a la recta AB en C_1 y C_2. Demostrar que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ están sobre una misma circunferencia.

Solución de Malors Emilio Espinoza Lara. Sean M, N y P los puntos medios de AB, AC y BC, respectivamente. Sea O el circuncentro del triángulo ABC.
Primero demostraremos la siguiente:

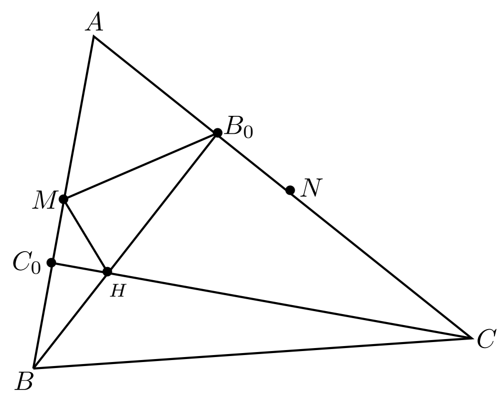
Afirmación. Sea ABC un triángulo acutángulo con lados $AB = c$, $BC = a$ y

$CA = b$. Sean M, P y N los puntos medios respectivos y H el ortocentro. Entonces:

$$MH^2 + \frac{b^2}{4} = NH^2 + \frac{c^2}{4}.$$

Demostración de la afirmación. Sean B_0 y C_0 los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. El triángulo AB_0B es un triángulo rectángulo y M es el punto medio de la hipotenusa, entonces como M es el centro del circuncírculo, tenemos que

$$AM = MB = MB_0.$$



Entonces, el triángulo BMB_0 es isósceles y $BM = MB_0 = \frac{c}{2}$.
Por el teorema de Stewart[1], sabemos que en el triángulo BMB_0 respecto a la ceviana MH se cumple que:

$$BB_0(MH^2 + BM \cdot HB_0) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 (HB_0) + \left(\frac{c}{2}\right)^2 (BH),$$

de donde:

$$\begin{aligned} BB_0(MH^2 + BM \cdot HB_0) &= \frac{c^2}{4}(HB_0 + BH) \\ BB_0(MH^2 + BM \cdot HB_0) &= \frac{c^2}{4}(BB_0), \quad \text{como } BB_0 \neq 0, \text{ tenemos} \\ MH^2 &= \frac{c^2}{4} - BM \cdot HB_0. \end{aligned}$$

De forma análoga con NH^2 obtenemos:

$$NH^2 = \frac{b^2}{4} - CH \cdot HC_0.$$

[1]El Teorema de Stewart se puede consultar en la página 96 de [2].

Entonces, al restar las dos igualdades tenemos que:

$$MH^2 - NH^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} - BM \cdot HB_0 + CH \cdot HC_0.$$

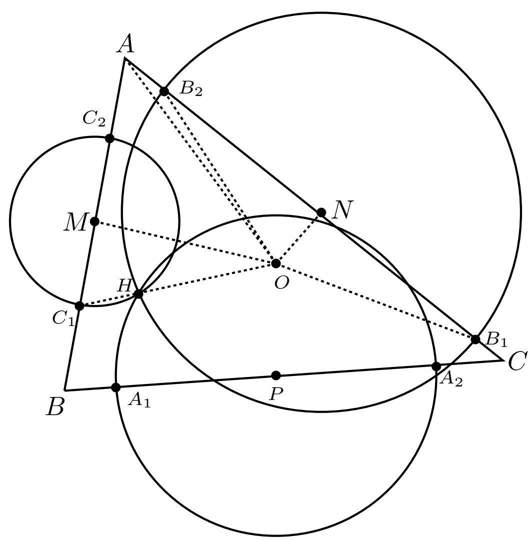
Pero $BH \cdot HB_0 = CH \cdot HC_0$ pues es bien sabido que el cuadrilátero BC_0B_0C es cíclico ($\angle BC_0C = \angle BB_0C = 90°$), entonces por potencia de un punto tenemos que $BM \cdot HB_0 = C_0H \cdot HC$. Luego:

$$\begin{aligned} MH^2 - NH^2 &= \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} \\ MH^2 + \frac{b^2}{4} &= NH^2 + \frac{c^2}{4}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.
También, considerando a P, el punto medio de BC, tenemos que:

$$PH^2 + \frac{c^2}{4} = MH^2 + \frac{a^2}{4} \qquad \text{ó} \qquad PH^2 + \frac{b^2}{4} = NH^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Ahora vamos a probar que O equidista de B_1, B_2, C_1, C_2, A_1, y A_2. Para ello, primero probaremos que $B_1O = B_2O$, y para $C_1O = C_2O$ y $A_1O = A_2O$ el proceso será exactamente el mismo.



Como N es el punto medio de AC y de B_2B_1, pues N es el centro del circuncírculo del triángulo B_2HB_1, entonces ON es perpendicular a B_1B_2 en su punto medio, luego es su mediatriz. Por lo tanto, $OB_2 = OB_1$.
Veamos ahora que $OB_2 = OC_1$.

Los triángulos ONB_2 y OMC_1 son rectángulos, entonces $ON^2 + NB_2^2 = OB_2^2$ y $OM^2 + MC_1^2 = OC_1^2$. Pero, $MC_1 = MH$ y $NB_2 = NH$, entonces

$$OB_2^2 = ON^2 + NH^2 \qquad \text{y} \qquad OC_1^2 = OM^2 + MH^2.$$

Por otra parte, como los triángulos OAN y OAM son rectángulos tenemos que

$$OM^2 = OA^2 - MA^2 \qquad \text{y} \qquad ON^2 = OA^2 - NA^2.$$

Entonces:

$$OB_2^2 = OA^2 - NA^2 + NH^2 = OA^2 - \frac{b^2}{4} + NH^2$$

y

$$OC_1^2 = OA^2 - MA^2 + MH^2 = OA^2 - \frac{c^2}{4} + MH^2.$$

Luego:

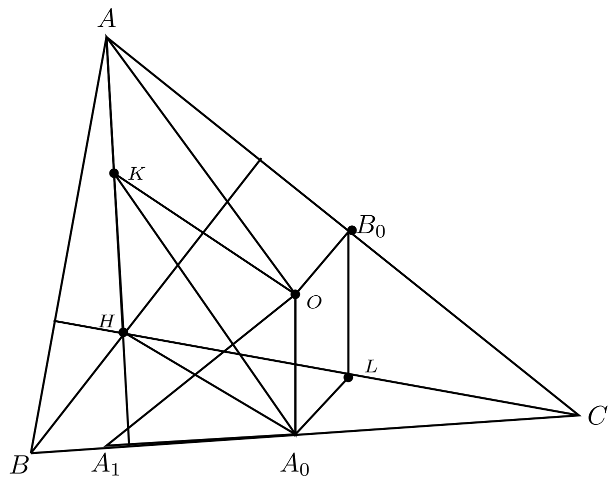
$$\begin{aligned} & OB_2^2 = OC_1^2 \\ \Leftrightarrow \quad & OA^2 - \frac{b^2}{4} + NH^2 = OA^2 - \frac{c^2}{4} + MH^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{b^2}{4} + NH^2 = -\frac{c^2}{4} + MH^2 \\ \Leftrightarrow \quad & NH^2 + \frac{c^2}{4} = MH^2 + \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

Pero este resultado ya se probó con la afirmación. Por lo tanto, $OB_2^2 = OC_1^2$ y de aquí $OB_2 = OC_1$, como se quería demostrar.

Análogamente se prueba que $OC_2 = OA_1$ y que $OA_2 = OB_1$.

Por lo tanto, $B_1O = B_2O = C_1O = C_2O = A_1O = A_2O$ y $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ es un hexágono cíclico cuyo centro es O.

Solución alternativa. Los segmentos perpendiculares que bisectan a los segmentos A_1A_2, B_1B_2, y C_1C_2 son también los segmentos perpendiculares que bisectan a BC, CA y AB. Luego, se intersectan en O, el circuncentro del triángulo ABC. Entonces O es el único punto que podría ser el centro de la circunferencia buscada. Sean A_0, B_0 y C_0 los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente.



Entonces en el triángulo OA_0A_1 tenemos que:

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2.$$

Sea K el punto medio de AH y sea L el punto medio de CH. Como A_0 y B_0 son los puntos medios de BC y CA, respectivamente, tenemos que A_0L es paralela a BH y B_0L es paralela a AH. Entonces los segmentos A_0L y B_0L son perpendiculares a AC y BC, luego, paralelos a OB_0 y OA_0, respectivamente. Entonces OA_0LB_0 es un paralelogramo, de donde OA_0 y B_0L son iguales y paralelos. También el segmento B_0L que une puntos medios es igual y paralelo a AK y KH.
Por lo tanto, AKA_0O y HA_0OK son paralelogramos. Como AKA_0O es un paralelogramo, tenemos que $A_0K = OA = R$, donde R es el circunradio de ABC. Como HA_0OK es un paralelogramo y, en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2(OA_0^2 + A_0H^2) &= OH^2 + A_0K^2 \\ 2(OA_0^2 + A_0H^2) &= OH^2 + R^2 \\ 2(A_1^2) &= OH^2 + R^2 \\ A_1^2 &= \frac{OH^2 + R^2}{2}. \end{aligned}$$

Por simetría, lo mismo sucede para los segmentos: OA_2, OB_1, OB_2, OC_1 y OC_2.
Por lo tanto, A_1, A_2, B_1, B_2, y C_2 están sobre una circunferencia con centro en O y radio $\frac{OH^2+R^2}{2}$.

Problema 2. (a) Demostrar que:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \tag{9}$$

para todos los números reales x, y, z, distintos de 1, con $xyz = 1$.
(b) Demostrar que existen infinitas ternas de números racionales x, y, z, distintos de 1, con $xyz = 1$ para los cuales la expresión (9) es una igualdad.

Solución. (a) Iniciemos haciendo un cambio de variables. Sean:

$$\frac{x}{x-1} = a, \qquad \frac{y}{y-1} = b, \qquad \frac{z}{z-1} = c,$$

es decir:

$$x = \frac{a}{a-1}, \qquad y = \frac{b}{b-1}, \qquad z = \frac{c}{c-1}.$$

Luego, la desigualdad que se quiere demostrar es equivalente a $a^2+b^2+c^2 \geq 1$, donde $a, b, c \neq 1$ y $xyz = 1$. Ahora bien:

$$\begin{aligned}
& xyz = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & abc = (a-1)(b-1)(c-1) \\
\Leftrightarrow \quad & abc = abc - ab - ac - bc - 1 + a + b + c \\
\Leftrightarrow \quad & a + b + c - 1 = ab + ac + bc \\
\Leftrightarrow \quad & 2(a+b+c-1) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \\
\Leftrightarrow \quad & a^2+b^2+c^2 - 2 = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) \\
\Leftrightarrow \quad & a^2+b^2+c^2 - 1 = (a+b+c-1)^2.
\end{aligned}$$

(b) De la ecuación $a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c-1)^2$ podemos ver que la desigualdad propuesta se convierte en igualdad si y sólo si ambas sumas $a^2+b^2+c^2$ y $a+b+c$ son 1. Como $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$, entonces los casos de igualdad se pueden describir con el sistema de dos ecuaciones:

$$a + b + c = 1 \qquad \text{y} \qquad ab + bc + ca = 0 \qquad \text{si } a, b, c \neq 1.$$

Despejando c tenemos que $a^2+ab+b^2 = a+b$, que puede ser vista como la siguiente ecuación cuadrática en b:

$$b^2 + (a-1)b + a(a-1) = 0,$$

con discriminante:

$$\Delta = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a).$$

Ahora busquemos las tercias racionales (a, b, c). Basta que a sea un número racional tal que $1-a$ y $1+3a$ sean ambos raíces racionales (entonces Δ también lo será). Sea $a = \frac{k}{m}$. Queremos que $m-k$ y $m+3k$ sean raíces enteras. Esto se puede lograr, por ejemplo, tomando $m = k^2-k+1$ (claramente distinto de cero); tenemos que $m-k = (k-1)^2$ y $m+3k = (k+1)^2$. Observemos que distintos valores para los enteros k dan distintos valores para $a = \frac{k}{m}$.

Luego, si k es un entero, $m = k^2 - k + 1$ y $a = \frac{k}{m}$, entonces $\Delta = \frac{(k^2-1)^2}{m^2}$, y la ecuación cuadrática tiene las raíces $b = \frac{(m-k\pm k^2\mp 1)}{2m}$. Luego, por ejemplo se puede escoger la mayor raíz:

$$b = \frac{m-k+k^2-1}{2m} = \frac{m+(m-2)}{2m} = \frac{m-1}{m}.$$

Entonces si $a+b+c = 1$, tenemos que $c = \frac{(1-k)}{m}$. La condición $a, b, c \neq 1$ elimina sólo los casos $k = 0$ y $k = 1$. Luego, si k varía en los enteros mayores que 1, se obtienen una infinidad de tripletas (a, b, c) que generan una infinidad de tripletas (x, y, z), como se quería demostrar.

Problema 3. Demostrar que existen infinitos números enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ tiene un divisor primo mayor que $2n + \sqrt{2n}$.

Solución. Sea $p \equiv 1 \pmod 8$ un primo. La congruencia $x^2 \equiv -1 \pmod p$ tiene dos soluciones en $[1, p-1]$ cuya suma es p. Si n es la menor de ellas, entonces p divide a $n^2 + 1$ y $n \leq \frac{p-1}{2}$. Demostraremos que $p > 2n + \sqrt{10n}$.
Sea $n = \frac{p-1}{2} - l$ donde $l \geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} n^2 &\equiv -1 \ (\text{mod } p) \\ \left(\frac{p-1}{2} - l\right)^2 &\equiv -1 \ (\text{mod } p) \\ (2l+1)^2 + 4 &\equiv 0 \ (\text{mod } p). \end{aligned}$$

Luego, $(2l+1)^2 + 4 = rp$ para alguna $r \geq 0$. Cuando $(2l+1)^2 \equiv 1 \equiv p \pmod 8$, tenemos que $r \equiv 5 \pmod 8$, de modo que $r \geq 5$. De aquí $(2l+1)^2 + 4 \geq 5r$, implica que $l \geq \frac{\sqrt{5p-4}-1}{2}$. Sea $u = \sqrt{5p-4}$, entonces:

$$n = \frac{p-1}{2} - l \leq \frac{1}{2}(p-u).$$

Luego, como podemos escribir $p = \frac{u^2+4}{5}$, tenemos que $u^2 - 5u - 10n + 4 \geq 0$. Resolviendo esta desigualdad cuadrática para $u \geq 0$, obtenemos $u \geq \frac{5+\sqrt{40n+9}}{2}$. Así la estimación $n \leq \frac{p-u}{2}$ nos lleva a:

$$p \geq 2n + u \geq 2n + \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{40n+9}\right) > 2n + \sqrt{10n}.$$

Por lo tanto, como hay una infinidad de primos de la forma $8k+1$ es claro que también hay una infinidad de enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ tiene un divisor primo mayor que $2n + \sqrt{2n}$.

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (es decir, las funciones f de los números reales positivos en los números reales positivos) tales que:

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

para todos los números reales positivos w, x, y, z, que satisfacen $wx = yz$.

Solución de Aldo Pacchiano Camacho. Sea f una función que satisface las condiciones del problema. Si $w = x = y = z = 1$ entonces $f(1)^2 = f(1)$, de donde $f(1) = 1$.
Ahora consideremos a cualquiera tal que $a > 0$ y sean $w = a$, $x = 1$ y $y = z = \sqrt{a}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{f(a)^2+1}{2f(a)} &= \frac{a^2+1}{2a} \\ af(a)^2 + a &= a^2 f(a) + f(a) \\ (af(a)-1)(f(a)-a) &= 0. \end{aligned}$$

Luego:

$$f(a) = a \quad \text{ó} \quad f(a) = \frac{1}{a} \quad \text{para toda } a > 0.$$

Por lo tanto, si:

$$f(a) = a \quad \text{para toda } a > 0 \quad \text{ó} \quad f(a) = \frac{1}{a} \quad \text{para toda } a > 0, \tag{10}$$

entonces las condiciones del problema se satisfacen. Luego, probaremos que sólo existen estas dos funciones.
Supongamos que existe una función f que satisface las condiciones y que no cumplen (10). Entonces, $f(b) \neq b$ y $f(c) \neq \frac{1}{c}$ para alguna $b, c > 0$. Luego, estos valores deben ser $f(b) = \frac{1}{b}$, $f(c) = c$. Ahora bien, si $w = b, x = c$ y $y = z = \sqrt{bc}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{f(b)^2 + f(c)^2}{2f(bc)} &= \frac{b^2+c^2}{2bc} \\ \frac{b^{-2}+c^2}{2f(bc)} &= \frac{b^2+c^2}{2bc} \\ f(bc) &= \frac{bc(b^{-2}+c^2)}{b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos que $f(bc)$ tiene que ser bc ó $\frac{1}{bc}$. Si $f(bc) = bc$, entonces $b^{-2} + c^2 = b^2 + c^2$, luego $b = 1$. Pero si $f(1) = 1$ entonces se contradice la restricción $f(b) \neq b$. También, si $f(bc) = \frac{1}{bc}$ entonces $b^2c^2(b^{-2} + c^2) = b^2 + c^2$, de donde $c = 1$, que contradice que $f(c) \neq \frac{1}{c}$. Por lo tanto, las funciones descritas en (10) son las únicas dos soluciones.

Problema 5. Sean n y k enteros positivos tales que $k \geq n$ y $k - n$ es par. Se tienen $2n$ lámparas numeradas $1, 2, \ldots, 2n$, cada una de las cuales puede estar encendida o apagada. Inicialmente todas las lámparas están apagadas. Se consideran sucesiones de *pasos*: en cada paso se selecciona exactamente una lámpara y se cambia su estado (si está apagada se enciende, si está encendida se apaga).
Sea N el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas $1, 2, \ldots, n$

quedan todas encendidas, y las lámparas $n+1,\ldots,2n$ quedan todas apagadas.
Sea M el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas $1,2,\ldots,n$ quedan todas encendidas, y las lámparas $n+1,\ldots,2n$ quedan todas apagadas sin haber sido nunca encendidas.
Calcular la razón $\frac{N}{M}$.

Solución de Manuel Guillermo López Buenfil. Demostraremos que $\frac{N}{M}=2^{k-n}$.
Hagamos una biyección en la que a cada sucesión de M le asociemos exactamente 2^{k-m} sucesiones de N.
Primero tomemos una sucesión cualquiera de M, digamos que a_i es el número de veces que se seleccionó la lámpara i. Entonces, si $1\le i\le n$ tenemos $a_i = impar$, y si $n+1\le i\le 2n$, a_i es cero (en M). Tomemos ahora una lámpara cualquiera, la lámpara i, pero con $1\le i\le n$, entonces, $a_i = impar$. Ahora, a esta lámpara le vamos a asociar las sucesiones de N en las que (a_i+a_{n+i}) de N es igual a (a_i) de M (esto es, las sucesiones de N en las que las selecciones de la lámpara (i) más las selecciones de la lámpara $(n+i)$ suman lo mismo que las selecciones de la lámpara (i) en nuestra sucesión de M), y además que cumplan que, si en la sucesión de N la lámpara (i) o la lámpara $(n+i)$ se seleccionó en el paso j, entonces en nuestra sucesión en M, en el paso j se seleccionó la lámpara i. Esto significa que si en la sucesión de M se seleccionó la lámpara (i) en el paso j, entonces en N se seleccionó la lámpara (i) ó $(n+i)$ en el paso j. Eso debe cumplirse para todo i, con $1\le i\le n$.
Veamos que la biyección funciona, no repite, no omite.
Primero, a cada sucesión de N le asociamos en M aquellas en las que, si la lámpara $(n+i)$ se seleccionó en el paso j de N, entonces la lámpara (i) se seleccionó en el paso j en la sucesión de M (los pasos con lámparas menores o iguales a n quedan igual). Entonces, todas las sucesiones de N van a M, de hecho cada sucesión de N va a sólo una sucesión de M (el cambio de los pasos es único).
Ahora calculemos $\frac{N}{M}$.
Para $1\le i\le n$, en N sabemos que $a_{n+i}=par$ (queda apagada), así que en M a nuestro a_i le quitamos un número par de pasos para darselos a a_{n+i}, quedando $a_i = impar$ y $a_{n+i}=par$. Podemos quitarle $0,2,4,\ldots,a_i-1$ pasos. Entonces, las formas de quitarle pasos son:

$$\binom{a_i}{0}+\binom{a_i}{2}+\cdots+\binom{a_i}{a_i-1},$$

pero como $\sum_{r=0}^{a_i}\binom{a_i}{r}=2^{a_i}$ y $\binom{a_i}{0}+\binom{a_i}{2}+\cdots+\binom{a_i}{a_i-1}=\binom{a_i}{1}+\binom{a_i}{3}+\cdots+\binom{a_i}{a_i}$, entonces:

$$\binom{a_i}{0}+\binom{a_i}{2}+\cdots+\binom{a_i}{a_i-1}=\frac{2^{a_i}}{2}=2^{a_i-1}.$$

Si hacemos eso con todos los i, entonces obtendremos un total de $(2^{a_1-1})(2^{a_2-1})(2^{a_3-1})\ldots(2^{a_n-1})$ sucesiones, es decir:

$$2^{(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)}=2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+1+\cdots+1)}=2^{k-n},$$

ya que $\sum_{r=1}^{n}a_i=k$ (son k pasos).
Entonces, a cada sucesión de M le hemos asociado 2^{k-m} sucesiones únicas de N. Si no fuera así, supongamos que dos sucesiones de M llegan a una misma de N, entonces

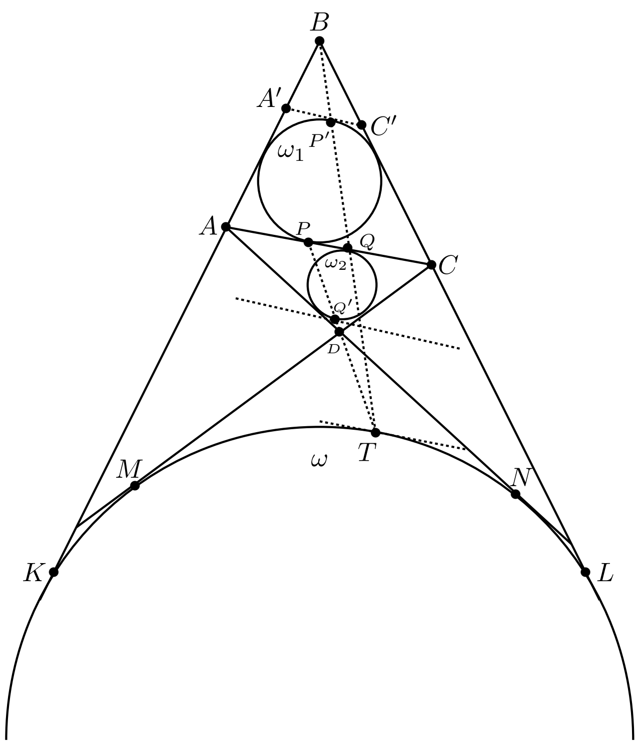
digamos que estas dos sucesiones son distintas en el paso j, habiendo seleccionado la lámpara p en una y la lámpara q en la otra, con $p \neq q$ y $1 \leq p, q \leq n$. Entonces, en la sucesión de N a la que llegaron, en ese paso está la lámpara p ó $n+p$ según una sucesión y la q ó $n+q$, según la otra, pero $p \neq q$, $p \neq n+q$ $(n+q > n)$, $n+p \neq q$ $(n+p > n)$, $n+p \neq n+q$, y entonces no coinciden.
Ahora, supongamos que no llegaron a una sucesión de N. Entonces pasemos de la sucesión de N a una de M como se describió anteriormente. De esta sucesión de M, claramente podemos pasar a la de N, sólo tomamos los pasos que en N tienen la lámpara $n+i$, (que en M tienen a i), y los quitamos para devolverlos a $n+i$, llegando de nuevo a la sucesión de N. Entonces, la biyección funciona y $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$.
Nota: al quitar y ponerle pasos a las lámparas, el estado final de los mismos no se altera ya que siempre transferimos un número par de pasos.

Solución alternativa. Llamemos *proceso admisible* a una secuencia de k *pasos* (lámparas $1, 2, \ldots, n$ encendidas, lámparas $n+1, n+2, \ldots, 2n$ apagadas). Si además la secuencia no toca a las lámparas $n+1, \ldots, 2n$ se llamará *proceso restringido*. Luego hay N procesos admisibles, de los cuales M son procesos restringidos.
En cada proceso admisible, sea restringido o no, cada una de las lámparas $1, 2, \ldots, n$ pasa de apagado a encendido si se hace el cambio un número impar de veces y cada una de las lámparas $n+1, n+2, \ldots 2n$ pasa de apagado a apagado si se hace el cambio un número par de veces.
Observemos que $M > 0$, es decir, existe un proceso restringido: basta con cambiar el estado de cada una de las lámparas $1, \ldots, n$ sólo una vez y luego escoger una de ellas y cambiar su estado $k-n$ veces (que por hipótesis es un número par).
Consideremos cualquier proceso restringido P. Tomemos cualquier lámpara l, con $1 \leq l \leq n$, y supongamos que fue cambiado su estado k_l veces.
Estas acciones son independientes, en el sentido de que las acciones que involucran a la lámpara l no afectan a las acciones que involucran cualquier otra lámpara. Entonces hay $2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdots 2^{k_n-1} = 2^{k-n}$ maneras de combinar estas acciones. En cada una de esas combinaciones, cada una de las lámparas $n+1, \ldots 2n$ sufre cambios un número par de veces y cada una de las lámparas $1, \ldots, n$ mantiene un número impar de cambios, entonces el estado final es el mismo que el que se obtiene con el proceso original P.
Esto prueba que cualquier proceso restringido P se puede modificar de 2^{k-n} maneras dando lugar a 2^{k-n} procesos admisibles distintos.
Ahora probaremos que todo proceso admisible Q puede obtenerse de esta manera. De hecho es suficiente remplazar cualquier cambio de estado de una lámpara con etiqueta $l > n$ que suceda en Q, por un cambio en la lámpara $l-n$ correspondiente. En el proceso P resultante las lámparas $n+1, \ldots, n$ no están involucradas. Los cambios en cada lámpara con etiqueta $l > n$ han tenido que ocurrir en Q un número par de veces. Entonces los cambios efectuados han afectado a cada lámpara con etiqueta $l \leq n$ tambi¡én un número par de veces, de modo que el estado final de cada lámpara se ha mantenido igual. Esto significa que el proceso resultante P es admisible y claramente restringido, ya que las lámparas $n+1, \ldots, 2n$ no están involucradas.
Entonces existe una correspondencia uno a 2^{k-n} entre los M procesos restringidos y el total N de procesos admisibles. Por lo tanto, $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las longitudes de los lados BA y BC son diferentes. Sean ω_1 y ω_2 las circunferencias inscritas dentro de los triángulos ABC y ADC respectivamente. Se supone que existe una circunferencia ω tangente a la prolongación del segmento BA a continuación de A y tangente a la prolongación del segmento BC a continuación de C, la cual también es tangente a las rectas AD y CD. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes comunes exteriores de ω_1 y ω_2 está sobre ω.

Solución. La solución estará basada en los siguientes resultados:
Afirmación 1. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Si existe una circunferencia ω tangente a la prolongación del segmento BA a continuación de A y tangente a la prolongación del segmento BC a continuación de C, entonces $AB+AD = CB+CD$.*

Demostración de la Afirmación 1. La circunferencia ω es tangente a cada una de las rectas AB, BC, CD y DA en los puntos K, L, M y N, respectivamente.



Entonces,

$$AB+AD = (BK-AK)+(AN-DN) \quad \text{y} \quad CB+CD = (BL-CL)+(CM-DM).$$

Por la igualdad de las tangentes, tenemos que $BK = BL$, $DN = DM$, $AK = AN$ y $CL = CM$, entonces $AB + AD = CB + CD$.

Para el siguiente resultado, llamaremos “excírculo AC” al excírculo de un triángulo con lado AC que es tangente a AC y a las extensiones de los otros dos lados.

Afirmación 2. *Sea P el punto de intersección de la circunferencia inscrita del triángulo ABC y el lado AC, PP' el diámetro que pasa por P, y Q el punto de intersección de las rectas BP' y AC. Entonces Q es el punto de tangencia del lado AC y el excírculo AC.*

Demostración de la Afirmación 2. Consideremos la tangente al incírculo ω_1 que pasa por P. Sean A' y C' los puntos de intersección de dicha tangente con BA y BC, respectivamente. Tenemos que ω_1 es el excírculo $A'C'$ del triángulo $A'BC'$ y es tangente al lado $A'C'$ en P'. Como $A'C'$ es paralela a AC, entonces la homotecia con centro en B y radio $\frac{BQ}{BP'}$ lleva a ω_1 al excírculo AC del triángulo ABC. Luego, como la homotecia lleva a P' a Q, tenemos que Q es el punto de tangencia del lado AC y el excírculo AC. Además, si el incírculo del triángulo ABC es tangente en P al lado AC, entonces el punto de tangencia Q, en el mismo lado del excírculo AC, es el único punto en el segmento AC tal que $AP = CQ$.

Ahora resolveremos el problema.

Supongamos que la recta AC es tangente a ω_1 y ω_2 en P y Q, respectivamente. Entonces $AP = \frac{AC+AB-BC}{2}$ y $CQ = \frac{CA+CD-AD}{2}$. Por la Afirmación 1, sabemos que $AB - BC = CD - AD$, luego $AP = CQ$, de aquí que en el triángulo ABC el lado AC y el excírculo AC son tangentes en Q. Análogamente, en el triángulo ADC el lado AC y el excírculo AC son tangentes en P. Nótese que $P \neq Q$ dado que $AB \neq BC$.
Sea PP' y QQ' los diámetros de ω_1 y ω_2, respectivamente, que son perpendiculares a AC. Entonces por la Afirmación 2 tenemos que los puntos B, P' y Q son colineales, al igual que los puntos D, Q' y P.
Consideremos el diámetro de ω perpendicular a AC y llamemos T al punto final más cercano a AC. La homotecia con centro en B y radio $\frac{BT}{BP'}$ lleva a ω_1 a ω, entonces B, P' y T son colineales. Análogamente, como la homotecia con centro en D y radio $-\frac{DT}{DQ'}$, lleva a ω_2 a ω, entonces D, Q' y T son colineales. Luego, tanto T, P' y Q, como T, Q' y P son colineales. Como PP' es paralelos a QQ', los segmentos PP' y QQ' son homotéticos con centro en T. Lo mismo sucede con las circunferencias ω_1 y ω_2 pues tienen a PP' y QQ' como diámetros. Más aún, es claro que T quedará en el mismo lado de la recta PP' que Q y Q', de aquí que el radio de homotecia es positivo. En particular ω_1 y ω_2 no son congruentes.
Por lo tanto, T es el centro de una homotecia con radio positivo que lleva a ω_1 en ω_2. Esto completa la demostración, pues el único punto que cumple con esta característica es el punto de intersección de las tangentes externas comunes de ω_1 y ω_2.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de abril a julio de 2009.

Del 2 al 5 de abril en el CIMAT, Guanajuato

Curso de entrenadores.

Del 30 de abril al 10 de mayo en el CIMAT, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la 50^a Olimpiada Internacional (máximo 6 alumnos), la delegación que representará a México en la XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe (máximo 3 alumnos) y la preselección para la XXIII Olimpiada Iberoamericana.

Primera quincena de junio

• Límite para registro de delegados que deseen aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas como semifinal de su Concurso Estatal y envío de este examen.

• Entrenamiento para los seleccionados nacionales que asistirán a la XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

19 y 20 de junio

Aplicación en los estados registrados con este propósito, del examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 19 al 27 de junio en la República Dominicana

XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

Del 21 al 28 de junio

Entrenamiento para los seleccionados nacionales que asistirán a la 50^a Olimpiada Internacional.

Primera quincena de julio

Envío del tercer número de la revista Tzaloa.

Del 10 al 22 de julio en Bremen, Alemania

50^a Olimpiada Internacional.

Apéndice

Teorema 1 (Número de divisores) *Sea m un entero positivo. Si $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, donde los p_i son números primos distintos, entonces los divisores positivos de m son de la forma $p_1^{h_1} \cdots p_s^{h_s}$, donde los h_j son enteros tales que $0 \leq h_j \leq \alpha_j$. Luego, m tiene exactamente $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ divisores positivos. Ver [5, 9, 11].*

Criterio 2 (Método de inducción matemática) *El método de inducción matemática se usa para demostrar una proposición $P(n)$ para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo.*
El método funciona de la siguiente manera:

1. *Caso base: Se demuestra la proposición para $n = k_0$.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone cierta la proposición $P(k)$ para algún entero $k > k_0$.*
3. *Se demuestra la proposición $P(k + 1)$.*

Concluimos entonces que la proposición es cierta para todo entero $n \geq k_0$. Ver [10].

Definición 3 (Combinaciones) *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. Al número de combinaciones de m elementos, de un conjunto de n elementos, se denota por $\binom{n}{m}$ y es igual a:*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Ver [10].

Definición 4 (Gráfica y valencia) *Una gráfica es un conjunto de puntos, que llamamos vértices, unidos por segmentos de rectas que llamamos aristas, de forma que los extremos de las aristas son dos vértices. Decimos que dos vértices son adyacentes si hay una arista entre ellos.*
La valencia o grado de un vértice v, es igual al número de vértices adyacentes a v, es decir, es igual al número de aristas que tienen un extremo en v. Ver [6].

Teorema 5 (Fórmulas de área)

1. *El área de un triángulo es igual a* $\frac{1}{2}hl$*, donde* l *es la medida de un lado y* h *es la medida de la altura sobre dicho lado.*

2. *El área de un círculo de radio* r *es igual a* πr^2*.*

Ver [1].

Teorema 6 (Fórmulas de volumen)

1. *El volumen de una esfera de radio* r *es igual a* $\frac{4}{3}\pi r^3$*.*

2. *El volumen de un cono de altura* h*, que tiene como base un círculo de radio* r *es igual a* $\frac{1}{3}\pi r^2 h$*.*

3. *El volumen de un cilíndro de altura* h*, que tiene como base un círculo de radio* r *es igual a* $\pi r^2 h$*.*

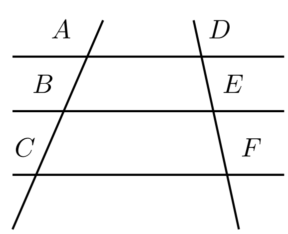
Ver [1].

Definición 7 (Congruencia de triángulos) *Decimos que dos triángulos son congruentes si tienen sus lados y sus ángulos correspondientes iguales. Más precisamente, los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si* $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ *y* $CA = C'A'$*, y los ángulos en* A*,* B *y* C *son iguales a los ángulos en* A'*,* B' *y* C'*, respectivamente. Ver [2].*

Criterio 8 (Criterio de congruencia LAL) *Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo entre ellos igual. Este criterio se llama "criterio de congruencia lado-ángulo-lado" y se denota por LAL. Ver [2].*

Teorema 9 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Ver [2].*

Teorema 10 (Teorema de Thales) *Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se muestra en la figura. Tenemos que si* AD*,* BE *y* CF *son paralelas, entonces* $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$*. Recíprocamente, si* $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ *y dos de las rectas* AD*,* BE *o* CF *son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.*



Ver [2].

Bibliografía

[1] Baldor J., Aurelio. *Geometría y trigonometría*. Segunda edición, 2008.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Las Olimpiadas Matemáticas en San Luis Potosí 1987-2005*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2008.

[5] E. Gentile. *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[6] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, 3^a edición.

[7] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich. *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich. *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*. Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[13] N. Vilenkin. *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Alejandro Bravo Mojica
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 64
abm@hp.fciencias.unam.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Antonio Olivas Martínez
Magnolias no. 9
Col. Fuentes del Mezquital
83240, Hermosillo, Son.
Tel. Casa (662) 212 53 31
Cel. (662) 124 81 93
antonio_olivas_mtz@yahoo.com.mx
antoniolivas@correoa.uson.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair no. 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Mor.
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Carlos Vargas Obieta
Facultad de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
carlosv@cimat.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402,
36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
Col. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`