Problemas para la

16ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
Julio César Aguilar Cabrera
María Luisa Pérez Seguí

2002

Luis Miguel García Velázquez

Estudiante de la Maestría en Matemáticas,
UNAM - Universidad Michoacana

Julio César Aguilar Cabrera

Estudiante de la Maestría en Matemáticas,
UNAM - Universidad Michoacana

María Luisa Pérez Seguí

Profesora-Investigadora, Esc. Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 16^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2003: la XLIV Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en Japón durante el mes de julio, la XVIII Olimpiada Iberoamericana a celebrarse en septiembre en Argentina y la V Olimpiada de Centroamérica y el Caribe que se llevará a cabo en Puerto Rico en el mes de julio.

En la 16a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1983. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2002-2003, y para el 1^o de julio del año 2003 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

Algunos de los problemas que se presentan en este folleto aparecieron en las primeras etapas de las Olimpiadas de Matemáticas. La intención de este folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas Olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela. Son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el trabajo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con compañeros y profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Esta publicación incluye una selección de los problemas presentados en los folletos de Problemas Introductorios para la 13a. y la 14a. Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas, así como de los que formaron parte de los exámenes del Canguro Matemático Mexicano y del examen propuesto por el Comité Nacional para aplicarse en la semifinal de los Concursos Estatales.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el Estado de Colima en noviembre de 2002, y en él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2003. También se aplicarán exámenes para determinar a los alumnos que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual. Durante el mes de marzo se distribuirá el Examen de Práctica Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia y Oaxtepec.

Resultados de las Delegaciones que Representaron a México en 2001

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y Centroamericanas y del Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46

En 2001, la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional estuvo integrada por los alumnos: Humberto Montalván (de Puebla), Mauricio Chacón (de Chiapas), Miguel Raggi (de Michoacán), David Mireles (del DF), Edgardo Roldán (de Morelos) y Juan Antonio Aguilera (de Chihuahua). Se obtuvieron dos medallas de bronce (Humberto Montalván y Mauricio Chacón) y una mención honorífica (Miguel Raggi). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de plata, 15 medallas de bronce y 16 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2001 obtuvieron medalla: una de oro (David Mireles del DF), dos de plata (Mauricio Chacón de Chiapas y Miguel Raggi de Michoacán) y una de bronce (Edgardo Roldán de Morelos). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 8 medallas de oro, 19 medallas de plata, 18 medallas de bronce y 3 menciones honoríficas. En la 11ª Olimpiada Iberoamericana, celebrada en Costa Rica, México obtuvo la Copa Puerto Rico, premio que se da cada año al país con el mayor progreso relativo.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2

Todos nuestros alumnos ganaron medalla en la III Olimpiada Centroamericana y del Caribe: una de oro (Marco Figueroa de Sonora) y dos de bronce (Federico Bribiesca de Michoacán y Gerardo Ruiz de Puebla). En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 2 medallas de oro, 5 de plata y 2 de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 15a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2001 se llevó a cabo en Oaxtepec, Mor., el 15º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 21 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Miguel Raggi Pérez de Michoacán,
Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora,
Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez del Distrito Federal,
Edgardo Roldán Pensado de Morelos,
José Luis Alonzo Velázquez de Baja California,
Diego Villamil Pesqueira del Distrito Federal,
Servando Barroso Rivas de Guanajuato,
Juan Ricardo de la O Flores de San Luis Potosí,
Daniel Barrón Gaxiola de Sonora,
Enrique Treviño López de Chihuahua,
Jesús Puente Arrubarrena del Distrito Federal,
Juan Pablo Maldonado López de Michoacán,
Eliézer Elizondo Cantú de Nuevo León,

Sofía Ortega Castillo de Puebla,
Alejandro Ochoa García de Chihuahua,
Alicia Prieto Langarica de Jalisco,
Alan Barreto Jaime de Jalisco,
Víctor Manuel Barrero Calderón de Morelos,
José Luis García Caraveo de Puebla,
Luis Gamboa Méndez de Yucatán y
Rubén Navarrete Enciso del Estado de México.

Los 7 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe fueron:

Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora,
Federico Bribiesca Argomedo de Michoacán,
Josefina Alinne Orta Montiel de Guanajuato,
Gonzalo Arturo Montalván Gámez de Puebla,
Carlos Vargas Obieta de Jalisco,
Guillermo Enrique Carro Prado de Nuevo León y
Roberto Hernández Jiménez de Querétaro.

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 15º Concurso Nacional:

1. Jalisco
2. Michoacán
3. Sonora
4. Chihuahua
5. Puebla
6. Morelos
7. Nuevo León
8. Querétaro
9. Yucatán
10. Guanajuato

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Cuexcomate Morelos y fue ganado por Sonora. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Nayarit y Nuevo León.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

`http://tlahui.posgrado.unam.mx/omm/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

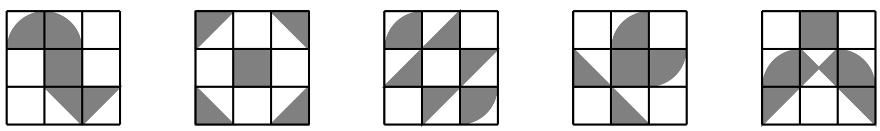
Enero 2002

Enunciados de los problemas

Problema 1. El dueño de una galería tiene 19 fotografías a color y 12 en blanco y negro. Si quiere colgar todas las que ya tiene y va a comprar el mínimo de fotografías necesario para que pueda acomodar la misma cantidad en cada una de las 6 salas de la galería, ¿cuántas fotografías va a comprar?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 2. ¿Cuál de las siguientes áreas sombreadas es la más grande?

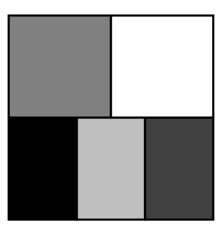


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 3. Pedro nació el día que Ana cumplió 3 años. ¿Cuántos años tendrá Pedro cuando Ana tenga el doble de años que él?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 10

Problema 4. Dos piezas cuadradas y tres piezas rectangulares se acomodan para formar un rompecabezas cuadrado como muestra la figura. Si cada una de las dos piezas cuadradas tiene 72 cm de perímetro y las otras tres piezas son iguales entre sí, ¿cuál es el perímetro de cada una de estas tres piezas?



(a) 60 cm (b) 56 cm (c) 44 cm (d) 36 cm (e) 30 cm

Problema 5. Luis va a guardar en estuches sus lápices, 10 en cada estuche. Si tiene 179 lápices de un color y 121 de otro, ¿cuántos estuches necesita al menos para guardarlos, si no quiere juntar lápices de distinto color en el mismo estuche?

(a) 13 (b) 18 (c) 24 (d) 30 (e) 31

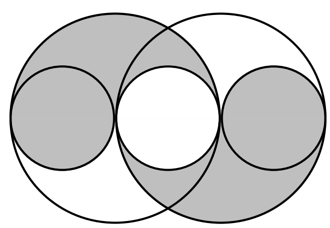
Problema 6. La maestra va a repartir 20 dulces entre varios niños. Si piensa darle al menos un dulce a cada niño pero no quiere que ninguno tenga la misma cantidad de dulces que otro, ¿cuál es la máxima cantidad de niños a los que la maestra les puede repartir dulces?

(a) 20 (b) 10 (c) 8 (d) 6 (e) 5

Problema 7. Tengo tres canastas enfrente de mí, cada una con 11 dulces. Si tomo un dulce de cada canasta en el siguiente orden; uno de la de la izquierda, otro de la del centro, otro del de la derecha, otro de la del centro, otro de la de la izquierda, otro de la del centro, etc., en el momento en que la canasta central queda vacía, ¿cuántos dulces quedan en la canasta que todavía tiene más dulces?

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 6 (e) 11

Problema 8. En la figura, los círculos pequeños tienen radio 1 y los círculos grandes tienen radio 2. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) π (b) 2π (c) 4π (d) 6π (e) 8π

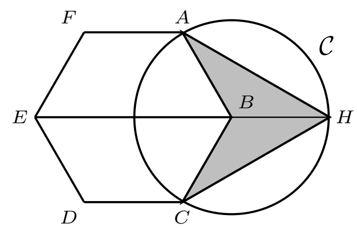
Problema 9. ¿Cuántas parejas de enteros positivos impares tienen como suma 1998?

(a) 499 (b) 500 (c) 502 (d) 503 (e) Una infinidad

Problema 10. Las calificaciones de los primeros tres exámenes de matemáticas de Elena fueron 7, 9 y 10. ¿Cuánto tiene que sacar en el cuarto examen para sacar 9 de promedio entre los cuatro exámenes?

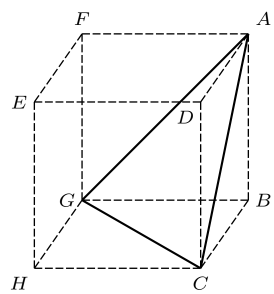
(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) no puede sacar 9 de promedio

Problema 11. En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $\mathcal{C}$ es un círculo con centro en B. Si el área del hexágono es igual a 1, ¿a cuánto es igual el área sombreada?



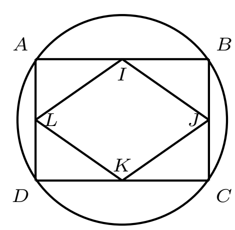
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{4}{5}$

Problema 12. A,B,C,D,E,F,G, y H son los vértices de un cubo, como se indica en la figura. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle CAG$?



(a) 30º (b) 45º (c) 60º (d) 75º (e) 90º

Problema 13. En un círculo de radio 3 está inscrito un rectángulo $ABCD$. Sean I, J, K y L los puntos medios de los lados de $ABCD$, como se indica en la figura. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero $IJKL$?



(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) $4\sqrt{3}$ (e) depende del rectángulo

Problema 14. ¿Para cuántos valores enteros positivos de n la expresión $\frac{18}{n+4}$ es un entero?

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 10 (e) 12

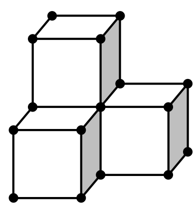
Problema 15. Si A, B y C son tres puntos no alineados, ¿en cuántas posiciones distintas se puede agregar un cuarto punto para que los cuatro sean los vértices de un paralelogramo?

(a) no se puede (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 16. Un pequeño Koala se come las hojas de un árbol en 10 horas. Su papá y su mamá comen el doble de rápido, cada uno. ¿Cuántas horas tardan los tres juntos en comer todas las hojas del árbol?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 17. Con palitos de madera y bolitas de plastilina se construyó una figura formada por cuatro cubos (en la figura se muestra sólo la parte del frente, el cubo que falta está pegado a los tres que se muestran). ¿Cuántas bolitas de plastilina se utilizaron?

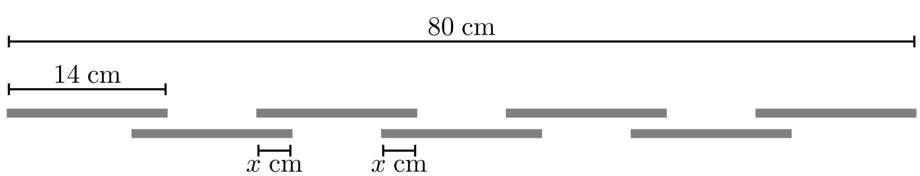


(a) 16 (b) 18 (c) 20 (d) 21 (e) 22

Problema 18. En una rueda de la fortuna las canastillas están numeradas $1, 2, 3, \ldots$ en orden y todas están separadas a la misma distancia. En el momento en que la canastilla 13 alcanza la posición más baja, la canastilla 4 se encuentra en la posición más alta. ¿Cuántas canastillas tiene la rueda?

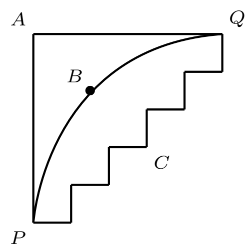
(a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 18 (e) 19

Problema 19. Tenemos 7 barras iguales acomodadas en dos líneas horizontales y separadas todas a la misma distancia, como se muestra en la figura. Si las medidas son las indicadas, ¿cuánto vale x?



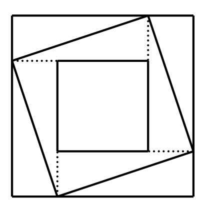
(a) 1 cm (b) 2 cm (c) 3 cm (d) 5 cm (e) 8 cm

Problema 20. La figura representa unas cuantas calles de una pequeña ciudad. La distancia de A a P es la misma que la de A a Q y es de 500 m. El camino de P a Q que pasa por A es 215 m más largo que el camino de P a Q que pasa por B. ¿Cómo es el camino de P a Q pasando por C con respecto al camino de de P a Q pasando por B?



(a) 275 m más largo (b) 215 m más largo (c) 430 m más largo
(d) 43 m más corto (e) igual

Problema 21. En la figura, los lados del cuadrado pequeño son paralelos a los del grande. El área del cuadrado más grande es 16 y el área del cuadrado más chico es 4. ¿Cuál es el área del cuadrado mediano?



(a) 8 (b) 8.5 (c) 10 (d) 10.5 (e) 12

Problema 22. Paquito tiene triángulos y rectángulos de madera. Si en total sus piezas tienen 17 esquinas, ¿Cuántos triángulos tiene Paquito?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

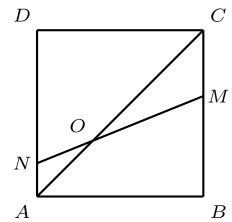
Problema 23. El producto de tres dígitos a, b y c es el número de dos dígitos bc; el producto de los dígitos b y c es c. ¿Cuánto vale a si $c = 2$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

Problema 24. Si llamamos H al área de un hexágono regular de lado 1 y T al área de un triángulo equilátero de lado 3, entonces $\frac{H}{T}$ es igual a:

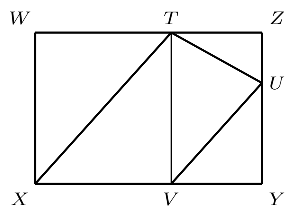
(a) $\frac{2}{3}$ (b) 2 (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) 1

Problema 25. Si la figura representa un cuadrado con vértices A, B, C y D, y el ángulo OND mide 60º, ¿cuánto mide el ángulo COM?



(a) 10º (b) 15º (c) 20º (d) 30º (e) 35º

Problema 26. En la figura $WXYZ$ es un rectángulo, TV es paralela a ZY y U es un punto sobre YZ de forma que UY mide el doble que UZ. Si el área del cuadrilátero $TUVX$ es 12, ¿cuánto vale el área del rectángulo $WXYZ$?



(a) 16 (b) 19 (c) 21 (d) 24 (e) 26

Problema 27. Rubén tiene dos relojes de arena de diferente tamaño. En el primer reloj cada centímetro cúbico de arena pasa en 1 minuto y en el segundo reloj esa misma cantidad de arena pasa en 3 minutos. En ambos relojes la arena total pasa en el mismo tiempo. Si el primer reloj contiene $27\,\text{cm}^3$ de arena, ¿cuántos centímetros cúbicos de arena contiene el segundo?

(a) $3\,\text{cm}^3$ (b) $6\,\text{cm}^3$ (c) $9\,\text{cm}^3$ (d) $27\,\text{cm}^3$ (e) $81\,\text{cm}^3$

Problema 28. En una fiesta cada persona saludó a exactamente otras tres personas. Si hubo en total 123 saludos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

(a) 54 (b) 67 (c) 77 (d) 82 (e) 101

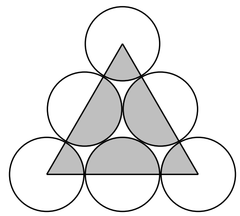
Problema 29. Se tienen 6 números enteros A, B, C, D, E y F que cumplen $C = A \times B$, $D = B \times C$, $E = C \times D$ y $F = D \times E$ (es decir, a partir del tercero, cada uno es el producto de los dos anteriores). Si sabemos que $A = 2$ y que $F = 6\,075\,000$, ¿cuánto vale $B + C + D + E$?

(a) 12 345 (b) 12 525 (c) 13 000 (d) 13 995 (e) 14 555

Problema 30. ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 7^{1998}?

(a) 01 (b) 07 (c) 18 (d) 43 (e) 49

Problema 31. En la siguiente figura los círculos son tangentes (se tocan en un sólo punto), todos los círculos son del mismo tamaño y tienen radio igual a 2. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) 2π (b) 4π (c) 6π (d) 8π (e) 10π

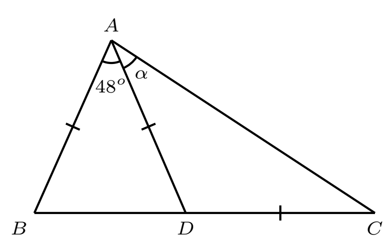
Problema 32. Una señora tiene seis canastas de frutas, unas de puras naranjas y otras de puras manzanas. Las seis canastas tienen 8, 12, 14, 17, 19 y 23 frutas respectivamente, pero no sabemos cuáles son de naranjas y cuáles de manzanas. La señora vendió una canasta completa, y en total en las restantes cinco canastas quedaron el doble de naranjas que de manzanas. ¿Cuántas naranjas le quedan en total a la señora?

(a) 25 (b) 27 (c) 40 (d) 53 (e) 54

Problema 33. Se dobla cuidadosamente una hoja de papel rectangular a la mitad; después se vuelve a doblar 4 veces más, doblando siempre a la mitad y con un doblez perpendicular al doblez precedente. Después del quinto doblez, se hace un corte en cada una de las cuatro esquinas del rectangulito obtenido. Se desdobla completamente el papel. ¿Cuántos hoyos se verán? (Nota: Un corte que haya quedado en la orilla no formará hoyo.)

(a) 4 (b) 9 (c) 18 (d) 20 (e) 21

Problema 34. En la figura, $AB = AD = DC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle\alpha$?



(a) 24° (b) 29° (c) 33° (d) 40° (e) 42°

Problema 35. Si se hace la división de 10^{2001} entre 15, ¿cuál es el residuo?

(a) 0 (b) 1 (c) 6 (d) 9 (e) 10

Problema 36. En cada una de dos mesas hay 2001 frijoles alineados. Ana toma frijoles de la primera mesa, siguiendo la siguiente regla: Primero toma el tercero, el sexto, etc. (uno de cada tres); después, de los que quedan toma el quinto, el décimo, etc. (uno de cada cinco). Beto toma frijoles de la segunda mesa, siguiendo la regla al revés, es decir, primero toma el quinto, el décimo, etc. (uno de cada cinco); después, de los que quedan toma el tercero, el sexto, etc. (uno de cada tres). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) El número de frijoles que Ana toma es $\frac{3}{5}$ del de Beto.
(b) El número de frijoles que Beto toma es $\frac{3}{5}$ del de Ana.
(c) Ana toma un frijol más que Beto.
(d) Beto toma un frijol más que Ana.
(e) Ana y Beto toman el mismo número de frijoles.

Problema 37. En cierta escuela $\frac{1}{69}$ de los alumnos tiene ojos azules, $\frac{1}{87}$ de los alumnos es pelirrojo y $\frac{1}{29}$ es zurdo. ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que puede tener la escuela?

(a) 29 (b) 87 (c) 185 (d) 2001 (e) 174 087

Problema 38. María tiene 65 monedas distribuidas en 5 montones. María toma una moneda de alguno de los montones y la pasa a otro; esta operación la ejecuta un total de 6 veces (posiblemente escogiendo distintos montones cada vez). En este momento todos los montones tienen el mismo número de monedas. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que podía tener al principio el montón que contenía menos monedas?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 13 (e) 19

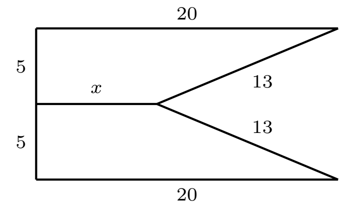
Problema 39. ¿Cuántos números enteros mayores que 10 y menores que 100 se incrementan en 9 cuando sus dígitos se invierten?

(a) 1 (b) 3 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Problema 40. Nueve tarjetas numeradas del 1 al 9 están colocadas horizontalmente enfrente de Miguel que está jugando un juego. Una *jugada* consiste en tomar la tarjeta que está más a la izquierda, colocarla en el centro y a continuación tomar la que está más a la derecha y ponerla en el centro. (Por ejemplo, en el primer paso, como la sucesión original es 1 2 3 4 5 6 7 8 9, al terminar la jugada la nueva sucesión será 2 3 4 5 9 1 6 7 8.) ¿Cuántas jugadas tendrá que hacer Miguel para que todas las cartas regresen a su lugar original por primera vez?

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 10 (e) 12

Problema 41. En la siguiente figura, el valor de x es



(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 12

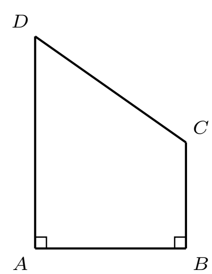
Problema 42. En la ecuación $a + 3b = 2001$, a y b son enteros. ¿Cuál de los siguientes valores de a es imposible?

(a) 3 (b) 45 (c) 111 (d) 1001 (e) 2001

Problema 43. Cuando el camello Desí tiene sed, el 84% de su peso es agua. Después de que toma agua, su peso aumenta a 800 Kg y el agua en ese momento constituye el 85% de su peso. ¿Cuál es el peso de Desí cuando tiene sed?

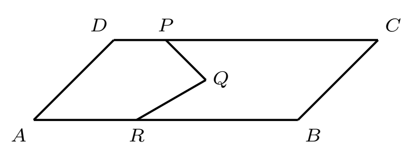
(a) 672 Kg (b) 680 Kg (c) 715 Kg (d) 720 Kg (e) 750 Kg

Problema 44. En la figura el ángulo en A y el ángulo en B son rectos y el área de $ABCD$ es el triple del área de ACB. ¿Cuánto vale $\frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)}$?



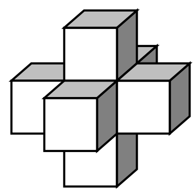
(a) 2 (b) $\frac{3}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{5}{2}$ (e) $\frac{2}{3}$

Problema 45. Considera el paralelogramo $ABCD$ con los puntos P, Q y R indicados. Si $\angle ARQ = 150^o$, $\angle QPC = 35^o$ y $\angle PCB = 45^o$, ¿cuánto vale $\angle PQR$?



(a) 50^o (b) 60^o (c) 65^o (d) 70^o (e) 75^o

Problema 46. Julio pegó 7 dados de manera que coincidieran los números de las caras pegadas. ¿Cuántos puntos quedaron en total en la superficie?



(a) 95 (b) 102 (c) 105 (d) 112 (e) 126

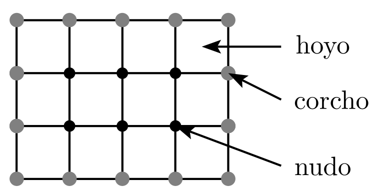
Problema 47. Se le asigna a cada una de las letras A, B, C, D, E y F el valor 1 o -1. ¿Cuántos valores distintos puede tomar la suma $A+B+C+D+E+F+ABCDEF$?

(a) 4 (b) 7 (c) 8 (d) 10 (e) 14

Problema 48. En un cuadrado $ABCD$ de lado 1, E es punto medio de la diagonal BD y F es punto medio de ED. ¿Cuál es el área del triángulo CFD?

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{3}{4}$

Problema 49. Un pescador construyó una red rectangular. Hizo exactamente 32 nudos y puso 28 corchos alrededor de la orilla de la red, como muestra la figura. ¿Cuántos hoyitos tiene la red?



(Esta red tiene 6 nudos,
14 corchos y 12 hoyos.)

(a) 40 (b) 45 (c) 54 (d) 60 (e) 64

Problema 50. ¿Cuál es el primer dígito (el de la izquierda) en el menor número entero positivo en el que la suma de todas sus cifras es 2001?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 51. Un punto P está fuera de un círculo, a una distancia 13 del centro. Una secante trazada desde P corta a la circunferencia en Q y R de tal manera que el segmento externo de la secante PQ mide 9 y QR mide 7. ¿Cuál es la longitud del radio del círculo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 52. Una escalera tiene numerados los escalones a partir del 0 en orden creciente hacia arriba: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Una rana está en el escalón 0, salta cinco escalones hacia arriba hasta el escalón 5 y luego dos para abajo hasta el escalón 3, después sigue saltando alternando cinco escalones para arriba y dos para abajo. La sucesión de escalones que pisa la rana es $0, 5, 3, 8, 6, \ldots$ ¿Cuál de los siguientes escalones no pisa la rana?

(a) 1997 (b) 1998 (c) 1999 (d) 2000 (e) 2001

Problema 53. Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen perímetros de igual longitud. Si el triángulo tiene área igual a dos, ¿cuál es el área del hexágono?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) 2 (c) $\frac{5}{2}$ (d) 3 (e) 4

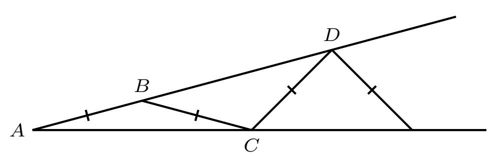
Problema 54. Si a, b, c, d y e son números positivos tales que $ab = 1$, $bc = 2$, $cd = 3$, $de = 4$ y $ea = 5$, ¿cuál es el valor de b?

(a) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ (b) $\sqrt{\frac{8}{15}}$ (c) $\sqrt{\frac{16}{5}}$ (d) $\sqrt{\frac{40}{3}}$ (e) $\sqrt{30}$

Problema 55. Si las diagonales de un rombo difieren en 14 y sus lados miden 13, el área del rombo es:

(a) $28\sqrt{13}$ (b) $48\sqrt{3}$ (c) 108 (d) 120 (e) 156

Problema 56. Se construye una figura formada por triángulos isósceles empezando con $AB = BC$, luego $BC = CD$, y así sucesivamente, como se ilustra abajo. Si el ángulo $\angle BAC = 17^o$, ¿cuántos triángulos isósceles puedes dibujar?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

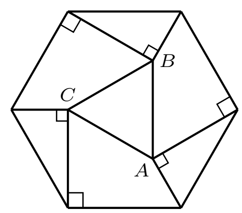
Problema 57. En una competencia de saltos de canguros, cada canguro hace 5 saltos. A cada salto se le da una puntuación entre 1 y 20. Para obtener la puntuación total se elimina la calificación más baja (si está repetida se quita sólo una vez) y se suman las otras 4. Antes de eliminar la calificación más baja de Cangú, la suma de sus 5 calificaciones es 72. ¿Cuál es el menor total posible de su puntuación final?

(a) 52 (b) 54 (c) 57 (d) 58 (e) 72

Problema 58. ¿Cuántos pedazos NO pueden obtenerse en un pastel plano y redondo al hacer 4 cortes en línea recta y de lado a lado?

(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 11 (e) 12

Problema 59. En la siguiente figura, ¿cuál es el área del triángulo ABC, si el área del hexágono regular es H?

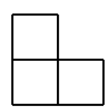


(a) $\frac{H}{2}$ (b) $\frac{H}{4}$ (c) $\frac{H}{6}$ (d) $\frac{H}{8}$ (e) $\frac{H}{10}$

Problema 60. En el plano hay 5 puntos A, B, C, D y E situados de tal manera que ABC es un triángulo equilátero, B es el punto medio de AD y E el punto más alejado de C para el cual los segmentos DE y AB miden lo mismo. ¿Cuánto mide el ángulo BED?

(a) 45º (b) 30º (c) 20º (d) 15º (e) 10º

Problema 61. ¿Cuál es el mínimo número de piezas de rompecabezas como la que se muestra, necesarias para formar un cuadrado?



(a) 3 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 27

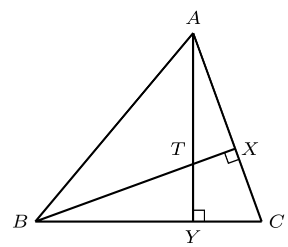
Problema 62. El producto de las edades de mis hijos es 1664. La edad del más grande es el doble que la del más pequeño. ¿Cuántos hijos tengo?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 63. El siguiente juego se efectúa entre dos jugadores: Se colocan 13 fichas sobre la mesa y los jugadores tiran en forma alternada; cada tirada consiste en tomar 1, 2, 3 o 4 fichas, y gana el que se quede con la última ficha. ¿Cuántas fichas debe tomar el primer jugador en la primera tirada para asegurar su triunfo?

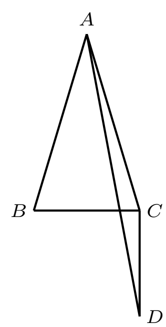
(a) 1 (b) 2 (c) 2 o 4 (d) 3 (e) 4

Problema 64. En la siguiente figura, los segmentos AY y BX son perpendiculares a los segmentos BC y AC, respectivamente. Si el ángulo $\angle ABC$ mide 50^o y el ángulo $\angle BAC$ mide 60^o. ¿Cuánto mide el ángulo BTY?



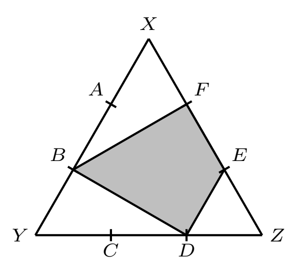
(a) 50^o (b) 60^o (c) 70^o (d) 80^o (e) 90^o

Problema 65. En la figura, $CD = BC = 3$, CD es perpendicular a BC, $AB = AC$ y el área de ABC es 5. ¿Cuál es el área del triángulo ACD?



(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{9}{4}$ (e) $\frac{5}{2}$

Problema 66. En un triángulo equilátero XYZ se dividen los lados en tres partes iguales. Llamemos a las divisiones A, B, C, D, E y F como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la figura sombreada, si el área del triángulo XYZ es 18?



(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 67. Algunas cajas de una colección de 11 cajas grandes contienen 8 cajas medianas cada una; algunas de las cajas medianas contienen también 8 cajas chicas cada una. Si hay 102 cajas que no contienen ninguna otra (contando también las chicas), ¿cuántas cajas hay en total?

(a) 64 (b) 102 (c) 115 (d) 118 (e) no se puede determinar

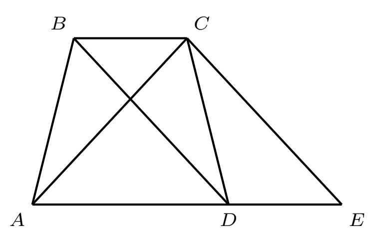
Problema 68. Una pelota de futbol está formada de piezas de cuero blancas y negras. Las piezas negras son pentágonos regulares y las piezas blancas son hexágonos regulares. Cada pentágono está rodeado por 5 hexágonos y cada hexágono está rodeado por 3 pentágonos y 3 hexágonos. La pelota tiene 12 pentágonos negros. ¿Cuántos hexágonos blancos tiene?

(a) 60 (b) 30 (c) 20 (d) 15 (e) 10

Problema 69. Sea $1, 4, 9, 16, \ldots$ la sucesión de los cuadrados de los enteros positivos. El número 10^8 es un término de esta sucesión. ¿Cuál es el término de la sucesión que sigue después de 10^8?

(a) $(10^4+1)^2$ (b) $(10^8+1)^2$ (c) $(10^5)^2$ (d) $(10^8)^2$ (e) $(10^4)^2+1$

Problema 70. En la figura, $BC \,||\, AE$ y $BD \,||\, CE$. Sea x el área del cuadrilátero $ABCD$ y sea y el área del triángulo ACE. ¿Cómo se comparan x y y?



(a) $x = y$ (b) $x > y$ (c) $x < y$
(d) depende de cuál es mayor entre AD y BC (e) imposible determinarlo

Problema 71. ¿Cuál es el número de posibles soluciones de la ecuación $3x + y + z = 23$, si x, y y z son enteros positivos?

(a) 56 (b) 68 (c) 70 (d) 86 (e) 92

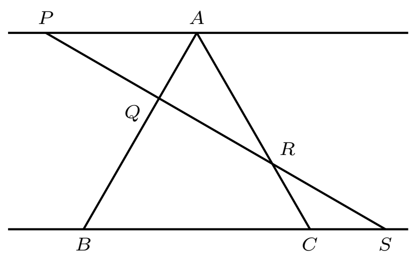
Problema 72. En una clase hay 25 alumnos. De ellos 17 alumnos son ciclistas, 13 nadadores y 8 esquiadores. Ningún alumno practica tres deportes. Los ciclistas, nadadores y esquiadores se sacaron 9 en matemáticas. Si 6 alumnos de la clase se sacaron 6 en matemáticas, ¿cuántos nadadores saben esquiar?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 73. ¿Cuántos números de 4 dígitos hay de la forma $a99b$ que sean divisibles entre 54?

(a) ninguno (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 74. En la figura, ABC es un triángulo equilátero, sus lados tienen longitud 3 y PA es paralela a BC. Si $PQ = QR = RS$, ¿cuál es la longitud de CS?

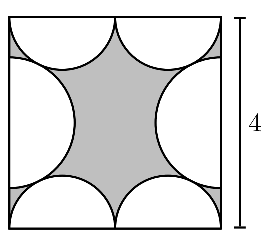


(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1 (d) $\sqrt{2}$ (e) $\sqrt{3}$

Problema 75. ¿Cuál es la probabilidad de que un número de tres cifras escogido al azar sea par y mayor que 399?

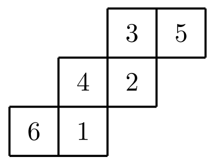
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{1}{9}$

Problema 76. En la figura los semicírculos son tangentes entre sí. Si A es el área del cuadrado y B es la suma de las áreas de los 6 semicírculos, ¿cuánto vale $A - B$?



(a) 8 (b) $16 - 3\pi$ (c) $16 - 4\pi$ (d) $16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$ (e)$16 - 4\pi + \sqrt{5}\pi$

Problema 77. La figura representa un cubo desdoblado con las caras numeradas del 1 al 6. Para cada vértice del cubo se considera el producto de los números que aparecen en las tres caras que contienen al vértice. ¿Cuál es el mayor de todos esos productos?



(a) 40 (b) 60 (c) 72 (d) 90 (e) 120

Problema 78. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, M es un punto sobre el segmento AB tal que $AM = 1$ y P es la intersección de la diagonal DB y el segmento MC, ¿cuánto mide PC?

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) 3 (d) $\frac{20}{7}$ (e) 7

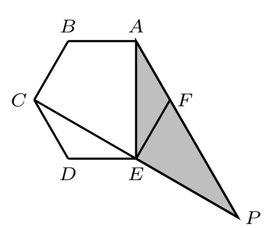
Problema 79. ¿Cuántos numeros enteros x cumplen la ecuación $2^{3+x} + 2^{3-x} = 65$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 80. En un campeonato de futbol había 4 equipos; cada equipo jugó contra todos los demás una vez. Cada equipo obtuvo 3 puntos por partido ganado, 1 punto por partido empatado y 0 puntos por partido perdido. La puntuación total final fue: 7 puntos para el equipo A, 4 puntos para el equipo B, 3 puntos para el equipo C y 3 puntos para el equipo D. ¿Cuál fue el resultado del partido de A contra D?

(a) A ganó (b) D ganó (c) empataron
(d) depende del resultado de A contra C
(e) depende del resultado de A contra B

Problema 81. El hexágono regular $ABCDEF$ de la figura tiene área 2001 y P es la intersección de las rectas AF y CE. Calcula el área del triángulo AEP.



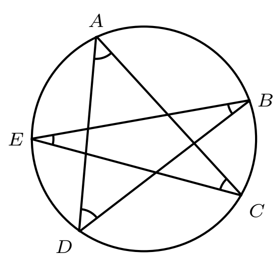
(a) $\frac{667}{3}$ (b) $\frac{667}{2}$ (c) 667 (d) $\frac{2001}{2}$ (e) 2001

Problema 82. Las casillas de una cuadrícula de 43×43 se colorean con 4 colores llamados 1, 2, 3 y 4, siguiendo el patrón indicado en la figura. ¿Qué color se usó más que los otros tres?

1	2	3	4	1	2		$\cdots$	
2	3	4	1	2	3		$\cdots$	
3	4	1	2	3			$\cdots$	
4	1	2	3				$\cdots$	
1	2	3					$\cdots$	
2	3						$\cdots$	
							$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
							$\cdots$	

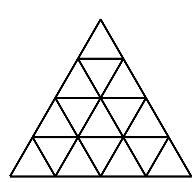
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) ninguno

Problema 83. Los puntos A, B, C, D y E son puntos de una circunferencia, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ y $\angle E$?



(a) 90º (b) 180º (c) 225º (d) 270º (e) 360º

Problema 84. Para un entero $n \geq 2$, un triángulo equilátero de lado n se divide en n^2 triángulos equiláteros de lado 1 como se ilustra en la figura (para $n = 4$). Decimos que dos triangulitos de éstos son *vecinos* si comparten ya sea un lado o un vértice. Se quiere escribir los números del 1 al n^2 en los triangulitos (uno en cada triangulito) de tal manera que números que estén escritos en triangulitos vecinos no tengan el mismo residuo al dividirlos entre 5. ¿Para cuántos valores de n es esto posible?

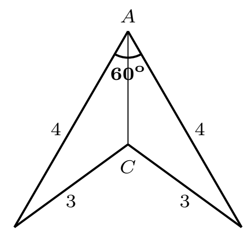


(a) Ninguno (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Una infinidad

Problema 85. Si A y B son enteros positivos y cumplen que $\frac{A}{7} + \frac{B}{5} = \frac{31}{35}$, ¿cuánto vale A?

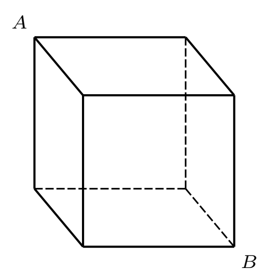
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 86. En la siguiente figura, ¿cuál es la longitud de AC?



(a) $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (e) 3

Problema 87. En el siguiente cubo, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B sobre las aristas sin pasar dos veces por el mismo vértice ni subir?



(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

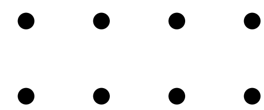
Problema 88. Se tienen 6 puntos marcados sobre una circunferencia. Se quiere trazar 3 cuerdas de manera que los extremos de cada cuerda sean 2 puntos de los 6 marcados, que todos los puntos marcados sean extremos de alguna cuerda y que ningún par de cuerdas se intersecte dentro del círculo. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 89. Dado un punto cualquiera P en el interior de un triángulo equilátero de lado 6, consideremos las perpendiculares que van de P a cada uno de los lados del triángulo. Llamemos H_1, H_2 y H_3 a los pies de las perpendiculares mencionadas. ¿Cuánto vale $PH_1 + PH_2 + PH_3$?

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 3 (d) $3\sqrt{3}$ (e) 4

Problema 90. Con vértices en los puntos de la figura, ¿cuántos cuadriláteros se pueden dibujar?



(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 24 (e) 36

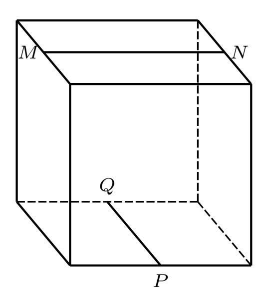
Problema 91. Los lados de un triángulo miden 2, 3, x. Si el área también es x, ¿cuánto vale x?

(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{5}$ (d) 3 (e) 5

Problema 92. Un cubo se formó con 12 pedazos de alambre de longitud 1. Una hormiga parte de uno de los vértices y camina a lo largo de las aristas. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer antes de regresar al vértice de donde partió sin recorrer una misma arista dos veces?

(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 12

Problema 93. En un cubo de lado 2, M, N, P y Q son puntos medios de las aristas mostradas. ¿Cuál es la distancia máxima entre un punto de MN y otro PQ?



(a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (e) $\sqrt{6}$

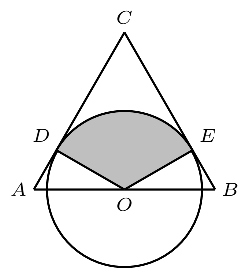
Problema 94. Una rueda tiene a su alrededor 128 casillas numeradas en forma consecutiva del 1 al 128. Una pulga va saltando de una casilla a otra siguiendo la siguiente regla: Cuando está sobre la casilla con número N puede saltar únicamente a cualquiera de las dos casillas que están separadas N casillas de esa misma (por ejemplo, cuando está en la casilla 3, sus dos posibilidades de salto son a la casilla 6 o a la casilla 128). ¿Desde cuántas casillas puede haber iniciado sus saltos la pulga de tal manera que, sin importar cómo haya ido saltando, al terminar su quinto salto se puede asegurar que está en la casilla 128 (tal vez no por primera vez)?

(a) 24 (b) 32 (c) 64 (d) 72 (e) 128

Problema 95. Sobre una circunferencia se han marcado 9 puntos. ¿De cuántas formas pueden dibujarse tres triángulos con vértices en estos puntos de manera que cada punto sea vértice de un solo triángulo y ningún par de los triángulos dibujados se corten?

(a) 7 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 96. Sea ABC un triángulo equilátero. Una circunferencia es tangente a los lados AC y BC en los puntos D y E, respectivamente, y tiene su centro O en AB. Si $AB = 2$, ¿cuánto vale el área del sector DOE?



(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) π

Problema 97. En la división de 999 entre n, donde n es un entero de dos cifras, el residuo es 3. ¿Cuál es el residuo de la división de 2001 entre n?

(a) 3 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 9

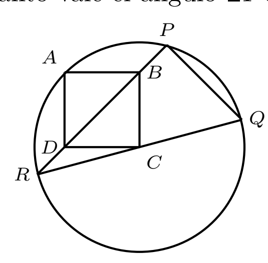
Problema 98. ¿Cuántos enteros positivos tienen la propiedad de que al eliminarles la última cifra el nuevo número es $\frac{1}{14}$ del original?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 99. ¿Cuántos enteros positivos menores que 2001 son iguales a tres veces la suma de sus cifras?

(a) Ninguno (b) 1 (c) 3 (d) 5 (e) Una infinidad

Problema 100. En la figura, los puntos A, P, Q y R están sobre la circunferencia con centro C; $ABCD$ es un cuadrado; la recta PR pasa por B y D; la recta QR pasa por C. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle PQR$?



(a) 45º (b) 60º (c) 72º (d) 75º (e) 90º

Soluciones de los Problemas

Solución 1. En total el dueño de la galería tiene $19 + 12 = 31$ fotografías. El menor entero múltiplo de 6 que es más grande que 31 es 36, así es que tendrá que comprar 5 fotografías más. La respuesta es (e).

Solución 2. Llamemos A al área de un cuadrito, y B al área de un cuarto de círculo. Es fácil ver que B es mayor que la mitad de A. Así, el área de (a) es la misma que la de (c) y de (d) y es igual a $2A + 2B$. El área de (b) es igual a $3A$, y por lo tanto es más chica que el área de (a). El área de (e) es $\frac{5}{2}A + 2B$, y por lo tanto más grande que las demás áreas. La respuesta es (e).

Solución 3. Cuando Pedro tenga 3 años Ana tendrá el doble, que es $3+3 = 6$. La respuesta es (c).

Solución 4. En una pieza cuadrada, cada lado mide 18 cm. El lado del rompecabezas completo mide $2 \times 18 = 36$ cm. El largo de cada rectangulito es igual a $36 - 18 = 18$ cm. El ancho de un rectangulito es $\frac{36}{3} = 12$ cm. Así, el perímetro del rectangulito es $2 \times 18 + 2 \times 12 = 60$ cm. La respuesta es (a).

Solución 5. Lápices de distintos colores no se guardan en un mismo estuche, así que podemos contar por separado cuántos estuches se necesitarán para cada color. Como $179 = 17 \times 10 + 9$, Luis necesitará $17+1 = 18$ estuches para guardar los del primer color. De la misma manera, necesitará $12+1 = 13$ estuches para guardar los del otro color (pues $121 = 12 \times 10 + 1$). En total Luis necesitará $18 + 13 = 31$ estuches. La respuesta es (e).

Solución 6. Formemos a los niños en una fila de acuerdo a la cantidad de dulces que le dio a cada uno la maestra. Como el primero debe tener al menos un dulce y el segundo tiene más que el primero, el segundo debe tener al menos 2 dulces. De la misma manera, sabemos que el tercer, cuarto y quinto niños de la fila deben tener al menos 3, 4 y 5 dulces, respectivamente. Si hubiera un sexto niño en la fila, la maestra habría tenido que repartir al menos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ dulces, así que a lo más le dio dulces a 5 niños. La maestra pudo repartir sus dulces entre 5 niños dándole, por ejemplo, 1 al primero, 2 al segundo, 3 al tercero, 4 al cuarto y 10 al quinto. Así, el máximo número es 5. La respuesta es (e).

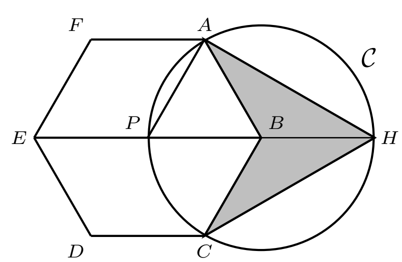
Solución 7. Cada vez que tomo un dulce de la canasta izquierda tomo uno de la canasta del centro al siguiente paso. Lo mismo es cierto para la canasta derecha. Voy a tomar 11 dulces, para ese momento habré tomado 5 dulces de una canasta lateral y 6 de otra. Así, la canasta con más dulces tendrá 6 dulces. La respuesta es (d).

Solución 8. La región sombreada consiste de dos partes que encajan en un círculo de radio 2. Así, su área es 4π. La respuesta es (c).

Solución 9. Como $\frac{1998}{2} = 999$, uno de los sumandos de cada pareja es menor que 1000 y otro es mayor que 1000. Hay 500 impares positivos menores que 1000, y a cada impar k de este tipo le podemos asociar el impar $1998 - k$, y la pareja cumple que su suma es 1998. Así, exactamente hay 500 parejas. La respuesta es (b).

Solución 10. Si x es la calificación del cuarto examen, se deberá tener que $\frac{7+9+10+x}{4} = 9$, y entonces $x = 36 - 26 = 10$, así que Elena tendrá que sacar 10 en el último examen. La respuesta es (d).

Solución 11. Llamemos P al centro del hexágono. Como BH, AB y el radio del círculo son iguales, tenemos que las áreas de los triángulos ABH, BCH y BAP son iguales entre sí e iguales a $\frac{1}{6}$ del área del hexágono $ABCDEF$. Así, el área sombreada es igual a $\frac{1}{3}$. La respuesta es (a).

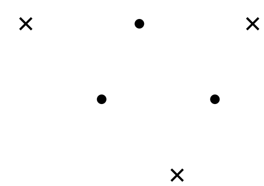


Solución 12. Notemos que $CA = AG = GC$ por ser diagonales de las caras del cubo, por lo que el triángulo CAG es equilátero. Por lo tanto, el ángulo $\angle CAG = 60^o$. La respuesta es (c).

Solución 13. Observemos que las diagonales del rombo $IJKL$ pasan por el centro del círculo y que entonces IJ es igual al radio del círculo. La respuesta es (c).

Solución 14. $\frac{18}{n+4}$ es entero únicamente cuando $n+4$ es divisor de 18, es decir, si es uno de los números 1, 2, 3, 6, 9, 18. Para que n sea positivo $n+4$ debe ser mayor que 4, o sea 6, 9 ó 18. Así, n puede tomar 3 valores. La respuesta es (a).

Solución 15. Indiquemos los puntos dados por $\bullet$; entonces las 3 posiciones donde pueden quedar los puntos que completan un paralelogramo son las indicadas por $\times$ en la figura. La respuesta es (d).



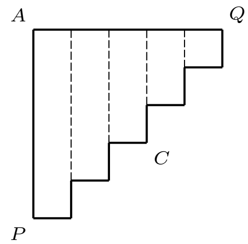
Solución 16. El pequeño Koala come $\frac{1}{10}$ de las hojas del árbol cada hora, mientras papá y mamá comen $\frac{2}{10}$ cada uno. Juntos comen $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ de las hojas por hora, así que tardarán 2 horas en comerse todas las hojas del árbol. La respuesta es (a).

Solución 17. Para hacer el cubo que no se ve en la figura se necesitaron 8 bolitas de plastilina. Para agregar cada uno de los 3 cubos (los que sí se ven) se necesitaron 4 bolitas extra por cada uno. En total, se usaron $8+4\times 3=20$ bolitas. La respuesta es (c).

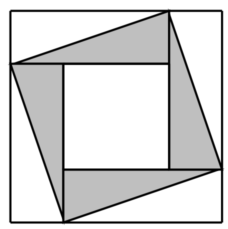
Solución 18. La canastilla 4 está opuesta a la 13, la 5 a la 14, la 6 a la 15 y así sucesivamente. Para dos canastillas opuestas, la diferencia entre la mayor y la menor es 9. Como la canastilla 1 está enfrente de la 10, la canastilla 9 está enfrente de la que tiene el número más grande, la 18. Así, en total hay 18 canastillas. La respuesta es (d).

Solución 19. En la línea de arriba, las 4 barras ocupan $14\times 4=56\,\text{cm}$, así que la distancia entre dos barras consecutivas es de $\frac{80-56}{3}=8\,\text{cm}$. Como la primera y la segunda barra de abajo están separadas por 8 cm, y el doble de x es la distancia que falta para completar los 14 cm que mide la segunda barra de arriba, tenemos que $x=3$. La respuesta es (c).

Solución 20. El camino de P a Q que pasa por A es igual de largo que el camino que pasa por C ya que en este último el total de las longitudes horizontales es el mismo que la longitud de AQ (como se muestra en la figura) y, de la misma manera, el total de longitudes verticales es el mismo que la longitud PA. Así tenemos que el camino que pasa por C es 215 m más largo que el que pasa por B. La respuesta es (b).



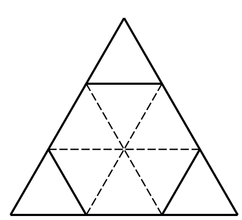
Solución 21. El área del cuadrado grande menos el cuadrado chico se puede dividir en 4 rectángulos, como se muestra en la figura. El área sombreada es la mitad del área de estos cuatro rectángulos o sea $\frac{16-4}{2} = 6$. El área del cuadrado mediano es el área sombreada más el área del cuadrado chico, o sea 10. La respuesta es (c).



Solución 22. Cada triángulo tiene 3 esquinas y cada rectángulo tiene 4. Como 17 no es múltiplo de 3, Paquito no puede tener puros triángulos, así que tiene al menos un rectángulo. Tampoco $17-4=13$ es múltiplo de 3 así que Paquito debe tener un rectángulo más. Como $13-4=9$ no es múltiplo de 4, Paquito debe tener al menos un triángulo. Como $9-3=6$ tampoco es múltiplo de 4 Paquito tiene necesariamente otro triángulo más, y como sólo nos faltan por considerar $6-3=3$ esquinas, Paquito tiene un tercer triángulo. La respuesta es (c).

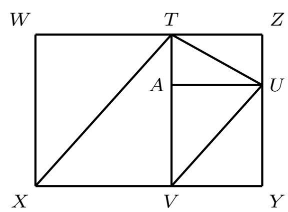
Solución 23. Como el producto de b por c es c, tenemos que $b=1$. Entonces $a \cdot b \cdot c = a \cdot 2 = 12$ y $a=6$. La respuesta es (e).

Solución 24. Dividamos un triángulo equilátero de lado 3 en triángulos equiláteros de área 1, como se indica en la figura. De esta manera el hexágono de lado 1 está formado por 6 de estos triangulitos y $H = \frac{6}{9}T = \frac{2}{3}T$. La respuesta es (a).



Solución 25. Tenemos que $\angle OND + \angle ONA = 180^o$; como $\angle OND = 60^o$, entonces $\angle ONA = 120^o$. AC es diagonal del cuadrado, así que $\angle CAN = 45^o$. Entonces, $\angle NOA = 180^o - \angle ONA - \angle NAO = 180^o - 120^o - 45^o = 15^o$. La respuesta es (b).

Solución 26. Trazamos UA perpendicular a TV, como se muestra en la figura. En el rectángulo $TAUZ$ el segmento TU es la diagonal, por lo que divide el área en dos partes iguales. Similarmente en los cuadriláteros $AVYU$ y $WXVT$ las diagonales VU y XT los dividen en partes iguales. Por lo tanto, el área de $WXYZ$ es el doble del área de $TUVX$, es decir, el área del rectángulo es 24. La respuesta es (d).



Solución 27. El primer reloj tarda el triple en soltar la misma arena que el primero, así que el segundo reloj tiene $\frac{1}{3}$ de la arena que tiene el primero, es decir, $9\,\text{cm}^3$. La respuesta es (c).

Solución 28. Asistieron 82 personas pues $\frac{82\times 3}{2} = 123$. La respuesta es (d).

Solución 29. La única posibilidad es $B = 15$, $C = 30$, $D = 450$ y $E = 13\,500$ y su suma es $15 + 30 + 450 + 13\,500 = 13\,995$. Para ver esto, observemos que $6\,075\,000 = 2^3 \times 3^5 \times 5^5$. De aquí es claro que B debe tener en su factorización prima al menos un 3 y un 5. Es fácil comprobar que con $B = 15$ (y los valores que determina B para C, D y E) se cumple el resultado. Otra forma de obtener B es dándose cuenta que $C = 2B$, $D = 2B^2$, $E = 4B^3$ y $F = 8B^5$. Usando la factorización $6\,075\,000 = 2^3 \times 3^5 \times 5^5$ se despeja B. La respuesta es (d).

Solución 30. Veamos como son las terminaciones de las potencias de 7:

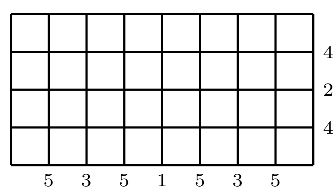
$$\begin{aligned} 7^0 &= 1 \\ 7^1 &= 7 \\ 7^2 &= 49 \\ 7^3 &= \ldots 43 \\ 7^4 &= \ldots 01 \\ 7^5 &= \ldots 07 \\ 7^6 &= \ldots 49 \\ 7^7 &= \ldots 43 \end{aligned}$$

De aquí podemos ver que cada 4 veces se empiezan a repetir las terminaciones y observamos que 7 elevado a una potencia que es múltiplo de 4 termina en 01. Como $1998 = 4 \cdot 499 + 2$, entonces 7^{1998} tiene la terminación 49. La respuesta es (e).

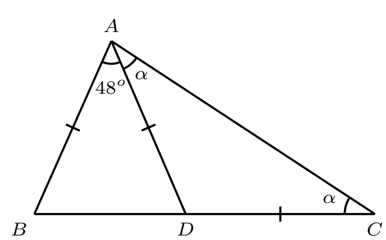
Solución 31. La parte sombreada consta de tres sextas partes de círculo y tres mitades de círculo. En total hay $\frac{3}{6} + \frac{3}{2} = 2$ círculos de radio 2. El área es $2 \cdot 2^2 \cdot \pi = 8\pi$. La respuesta es (d).

Solución 32. Llamemos A al número de frutas que contenía la canasta que la señora vendió, y M y N al número de manzanas y naranjas que le quedaron, respectivamente. Como la señora tenía en total $8+12+14+17+19+23 = 93$ frutas, tenemos que $M + N = 93 - A$. Usando que $2M = N$ llegamos a que $M = \frac{93-A}{3}$, así que $A = 12$, pues ninguna de las otras diferencias es múltiplo de 3. De lo anterior tenemos que $M = 27 = 19 + 8$ y $N = 54 = 14 + 17 + 23$. La respuesta es (e).

Solución 33. Los dobleces quedarán como se indica en la figura (junto a cada línea se ha puesto el número que indica el doblez que genera esa línea). Hay $3 \times 7 = 21$ intersecciones y en cada una habrá un hoyo. La respuesta es (e).



Solución 34. Como $AD = AB$ entonces $\angle ADB = \angle ABD = \frac{180^o - 48^o}{2} = 66^o$ y $\angle ADC = 180^o - 66^o = 114^o$. Como $AD = DC$ tenemos que $\angle DAC = \angle DCA = \alpha$; y por tanto $\alpha = \frac{180^o - 114^o}{2} = 33^o$. La respuesta es (c).



Solución 35. Sabemos que 10^{2001} consta de un 1 y 2001 ceros. Al dividir 100 entre 15, el residuo es 10. Entonces todo se repite y el residuo es 10. La respuesta es (e).

Solución 36. En la primera ronda, Ana tomó $\frac{2001}{3} = 667$ frijoles, mientras que Beto tomó 400, ya que $\frac{2001}{5} = 400.2$ pero Ana y Beto siempre recogen frijoles completos. Como en la primera mesa quedaron 1334 frijoles y $\frac{1334}{5} = 266.8$, Ana tomó 266 frijoles mientras que Beto tomó 533 (el mayor entero menor a $\frac{1600}{3}$). En las dos rondas Ana y Beto recogieron la misma cantidad de frijoles: $667 + 266 = 400 + 533 = 933$. La respuesta es (e).

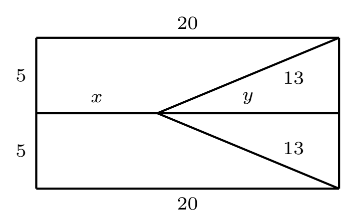
Solución 37. El número de estudiantes debe ser múltiplo de 29, de $69 = 3 \times 23$ y de $87 = 3 \times 29$. El mínimo común múltiplo de estos tres números es $3 \times 29 \times 23 = 2001$. La respuesta es (d).

Solución 38. María hizo 6 movimientos para dejar 13 monedas en cada montón. Si un montón hubiera empezado con 6 o menos de 6 monedas habría sido imposible completar 13 monedas en un montón. Así, si el montón más pequeño tiene 7 monedas y los otros tienen, por ejemplo, 19, 13, 13 y 13, después de 6 movimientos María completará 13 monedas en cada montón. La respuesta es (c).

Solución 39. Si escribimos cada número como $10 \cdot x + y$, lo que queremos es resolver la ecuación $10 \cdot x + y = 10 \cdot y + x + 9$. Factorizando tenemos que $(x - y)(10 - 1) = 9$, así que $x - y = 1$ y los números son 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. La respuesta es (c).

Solución 40. Es fácil ver que si nos fijamos en la posición de la tarjeta número 1 necesitaremos 9 movimientos para que esta tarjeta regrese a su lugar original. Es claro que lo mismo sucede para el resto de las tarjetas. La respuesta es (c).

Solución 41. En la figura que se muestra a continuación tenemos que $x + y = 20$, y por el Teorema de Pitágoras $y = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, de donde $x = 8$. La respuesta es (b).



Solución 42. Como 2001 y $3b$ son múltiplos de 3, a también debe ser un múltiplo de 3. El único número que no lo es es 1001. En los demás casos, a es múltiplo de 3 y podemos tomar $b = \frac{2001-a}{3}$, que es un entero. La respuesta es (d).

Solución 43. El peso del cuerpo de Desí que no es agua es $\frac{15}{100} \times 800\,\text{Kg} = 120\,\text{Kg}$. Cuando Desí está sediento, los 120 Kg de Desí que no son agua constituyen el 16% de su peso, así que su peso total es $\frac{100}{16} \times 120 = 750$. La respuesta es (e).

Solución 44. Como el triángulo ABC y el triángulo BCD tienen la misma base BC y la misma altura con respecto a esa base, entonces también tienen la misma área. Así,

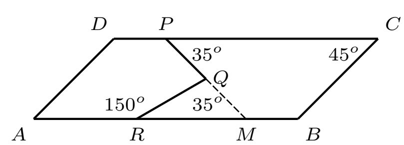
$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(ABD) + \text{área}(BCD) = \text{área}(ADB) + \text{área}(ACB)\,.$$

Entonces tenemos que

$$\frac{\text{área}(ABCD)}{\text{área}(ACB)} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} + \frac{\text{área}(ACB)}{\text{área}(ACB)} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} + 1 = 3\,,$$

de donde $\frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} = 2$. La respuesta es (a).

Solución 45. Prolonguemos PQ hasta el lado AB para obtener un punto M. Entonces, por ser ángulos alternos entre paralelas, $35^o = \angle CPM = \angle PMR$. Por otro lado, es claro que $\angle QRM = 30^o$ (pues $\angle ARQ = 150^o$). Entonces, utilizando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^o, tenemos que $\angle RQM = 180^o - 30^o - 35^o$. De aquí, $\angle RQP = 65^o$. La respuesta es (c).



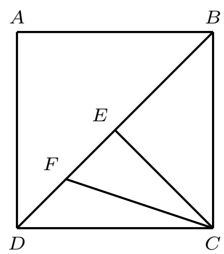
Solución 46. El total de puntos en las superficies de los 6 dados exteriores antes de pegarlos es $6(1+2+3+4+5+6) = 126$. A esta cantidad hay que restarle la suma de los puntos en la superficie del dado que quedará al centro (cada uno de los dados de afuera se pega por el mismo número al dado central), que es $1+2+3+4+5+6 = 21$. Así, la cantidad de puntos que quedaron en la superficie es $126 - 21 = 105$. La respuesta es (c).

Solución 47. Observemos que si el número de veces que aparece -1 es impar entonces $ABCDEF = -1$, y si es par entonces $ABCDEF = 1$. De esta manera, en la suma $A + B + C + D + E + F + ABCDEF$ siempre hay un número par de -1. Las posibles sumas son:

$$\begin{array}{rcl} 1+1+1+1+1+1+1 &=& 7, \\ -1-1+1+1+1+1+1 &=& 3, \\ -1-1-1-1+1+1+1 &=& -1 \text{ y} \\ -1-1-1-1-1-1+1 &=& -5. \end{array}$$

La respuesta es (a).

Solución 48. Comparemos los triángulos CFD y CDE. Si pensamos que tienen sus bases sobre la diagonal BD observamos que tienen la misma altura, pero la base del primero es la mitad de la base del segundo; por lo anterior, el área de CFD es la mitad del área de CDE. El triángulo CDE es uno de los cuatro que se construyen al trazar las diagonales del cuadrado, así que su área es la cuarta parte del área del cuadrado. Así, el área de CFD es $\frac{1}{8}$ del área de $ABCD$, y por tanto es igual a $\frac{1}{8}$. La respuesta es (b).



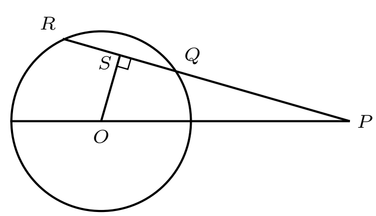
Solución 49. Los 32 nudos están en los vértices de un pedazo rectangular de red de $m \times n$ cuadritos donde $m \times n = 32$. Como el perímetro de toda la red tiene 28 corchos sabemos que $2m+2n+4=28$, de donde $m+n=12$. El total de hoyitos de toda la red es $(m+1)(n+1)$. Como $32 = 1\times 32 = 2\times 16 = 4\times 8$ y m y n son ambos menores que 12, entonces m y n deben ser 8 y 4. Así, el total de hoyitos es $(8+1)(4+1) = 45$. La respuesta es (b).

Solución 50. Observemos que el menor número de dígitos necesarios para que la suma sea 2001 es 223 puesto que $2001 = 222 \times 9 + 3$. De hecho, la suma de las cifras del número que se escribe como un 3 seguido de 222 nueves es 2001. Cualquier otro número positivo que empiece con un dígito menor necesitará más cifras para que la suma sea 2001. Así, el número buscado es 3. La respuesta es (c).

Solución 51. Trazamos OS, la perpendicular desde O a la secante QR, entonces S es el punto medio de QR. Por un lado tenemos que $OS^2+SQ^2 = OQ^2$, y por otro $OS^2 + SP^2 = OP^2$. Así,

$$\begin{aligned} OS^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= OQ^2 \\ OS^2 + \left(9+\frac{7}{2}\right)^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $OQ = r = 5$. La respuesta es (b).



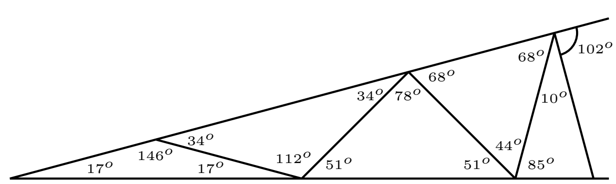
Solución 52. Los números de los escalones que pisa la rana son múltiplos de 3 (de la forma $3a$) o múltiplos de 3 más 5 (de la forma $3b+5$). De las opciones que tenemos, el único que no se puede escribir de una de estas dos formas es el 1999. La respuesta es (c).

Solución 53. Llamemos a y b a las medidas de los lados del triángulo y el hexágono, respectivamente. Tenemos que $3a = 6b$, es decir $a = 2b$, lo que implica que el hexágono está formado por 6 triángulos equiláteros de lado $\frac{a}{2}$, mientras que el triángulo está formado por cuatro triángulos de lado $\frac{a}{2}$. Entonces la razón entre sus áreas es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, y por lo tanto el área del hexágono es 3. La respuesta es (d).

Solución 54. Multiplicando $cd = 3$ y $ea = 5$ obtenemos $acde = 15$. Como $de = 4$, tenemos que $ac = \frac{15}{4}$. Multiplicando $ab = 1$ por $bc = 2$ obtenemos $acb^2 = 2$ y, usando que $ac = \frac{15}{4}$, tenemos que $b^2 = \frac{8}{15}$. Por ser b positivo tenemos que $b = \sqrt{\frac{8}{15}}$. La respuesta es (b).

Solución 55. Digamos que la diagonal más corta mide $2x$, entonces la otra mide $2x+14$. Las diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos congruentes entre sí, de lados x, $x+7$ y 13. Por el teorema de Pitágoras $x^2 + (x+7)^2 = 13^2$. Resolviendo la ecuación se obtiene $x = 5$ ($x = -12$ se descarta puesto que x debe ser positivo). Entonces el área de cada uno de los triángulos rectángulos es $5 \cdot \frac{12}{2} = 30$, por lo que el área del rombo es 120. La respuesta es (d).

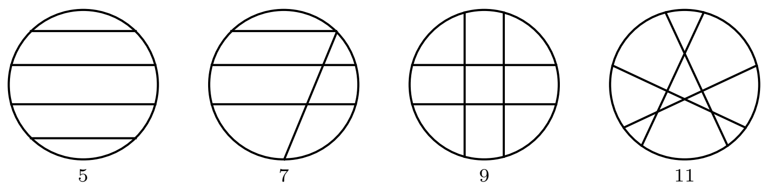
Solución 56. En la figura se muestran cinco triángulos construidos de acuerdo a la regla. Calculando los ángulos internos de cada triángulo encontramos que el sexto triángulo debería tener dos ángulos de 102^o, lo cual no puede ser pues la suma de sus ángulos internos excedería los 180^o. La respuesta es (d).



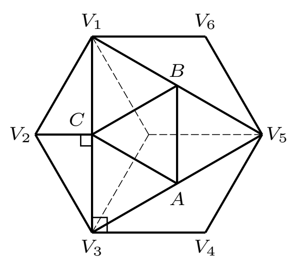
Solución 57. En alguno de sus saltos Cangú tuvo una puntuación mayor o igual a 15 pues si en todos sus saltos le hubieran dado a lo más 14 puntos, lo más que podría haber obtenido después de los cinco saltos es $14 \times 5 = 70$. Sin embargo, 15 no pudo ser su puntuación mínima, ya que $15 \times 5 = 75 > 72$. Entonces la más alta de las puntuaciones mínimas que pudo obtener Cangú es 14 (sus calificaciones pudieron ser, por ejemplo, 14, 14, 14, 15 y 15), así que

la mínima calificación de Cangú al eliminar su peor salto es $72 - 14 = 58$. La respuesta es (d).

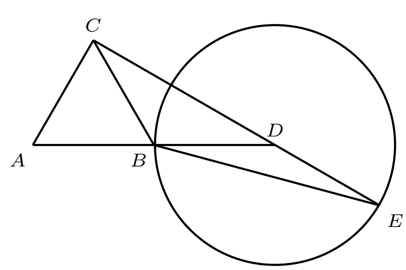
Solución 58. Con un solo corte tenemos 2 pedazos. Siempre que hacemos un corte añadimos un pedazo por cada corte que ya habíamos hecho y que no intersectamos, y dos pedazos por cada corte que sí intersectamos. Así, entre 5 (cortando sin intersectar) y $2+2+3+4 = 11$ todos los números de rebanadas son posibles. La respuesta es (e).



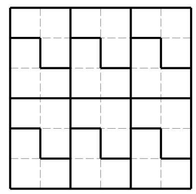
Solución 59. H es el doble del área del triángulo equilátero $V_1V_3V_5$ que se muestra en la figura. Por otra parte, el triángulo $V_1V_3V_5$ contiene 4 triángulos iguales a ABC, así que el área del triángulo $V_1V_3V_5$ es 4 veces al área de ABC. De esta manera, tenemos que el área de ABC es $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} H = \frac{H}{8}$. La respuesta es (d).



Solución 60. El punto E se encuentra en el círculo que tiene centro en D y radio $AB = DB$, como se muestra en la figura. Como E está lo más lejos posible de C, entonces E se encuentra en la prolongación de la línea CD. Como $\angle ABC + \angle CBD = 180^{\circ}$, entonces $\angle CBD = 120^{\circ}$. El triángulo CBD es isósceles, así es que $\angle BDC = \frac{180^{\circ} - 120^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$ y $\angle BDE = 150^{\circ}$. Como el triángulo BDE también es isósceles, entonces $\angle BED = \frac{180^{\circ} - 150^{\circ}}{2} = 15^{\circ}$. La respuesta es (d).



Solución 61. Si podemos construir un cuadrado con k piezas, entonces $3k$ debe ser un cuadrado: $k = 3n^2$, para algún entero n. Para $n = 1$ tenemos $k = 3$, y es fácil ver que no se pueden acomodar tres piezas para formar un cuadrado. Con $n = 2$ tenemos $k = 12$, y podemos formar un cuadrado como el que se muestra. La respuesta es (d).



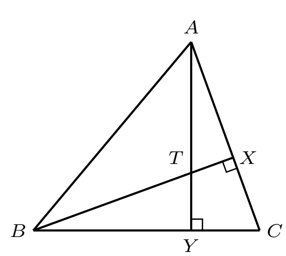
Solución 62. Sea a la edad del menor y $2a$ la del mayor. Tenemos que $1664 = 13 \times 2^6$. Observemos que a no puede ser un múltiplo de 13 porque entonces 1664 sería un múltiplo de $13 \times 26 = 338$. De aquí sabemos que existe un hermano mediano cuya edad es múltiplo de 13, y que la edad del menor y del mayor son potencias de 2. Claramente a no puede ser 2 ni 4. Si el hijo menor tiene 8 años y el mayor tiene 16, debe haber otro hermano en medio que tenga 13 años. No hay otra posibilidad. La respuesta es (b).

Solución 63. Observemos que si el primer jugador toma 3 fichas dejaría 10 en la mesa. No importa cuántas fichas tome el segundo jugador, el primero siempre puede completar un grupo de cinco fichas y de esta manera asegurar su triunfo, pues en su siguiente turno el segundo jugador dejará menos de 4 fichas en la mesa. Si el primer jugador tomara cualquier otra cantidad de fichas en la primer jugada, el segundo jugador podría ganarle tomando las necesarias para dejar 10 (si el primero tomó 1 o 2) o 5 (si el primero tomó 4). La respuesta es (d).

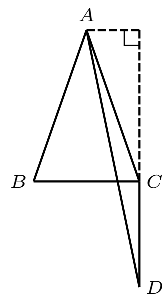
Solución 64. Los triángulos BCX y BTY son semejantes pues ambos son rectángulos y tienen en común el ángulo en B. Luego

$$\begin{aligned}\angle BTY &= \angle BCX \\ &= 180^{\circ} - \angle A - \angle B \\ &= 180^{\circ} - 60^{\circ} - 50^{\circ} \\ &= 70^{\circ}\end{aligned}$$

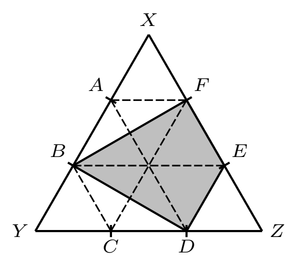
La respuesta es (c).



Solución 65. El triángulo ABC es isósceles y la distancia de A a CD es $\frac{BC}{2} = \frac{3}{2}$ porque BC es perpendicular a CD. Así, el área del triángulo ACD es igual a $\frac{1}{2} \cdot \frac{CD \times 3}{2} = \frac{9}{4}$. La respuesta es (d).



Solución 66. Si ABC es un triángulo, escribiremos (ABC) para referirnos a su área. Dividamos el triángulo XYZ de la siguiente forma:



Cada triángulo pequeño tiene área 2. Llamemos S al área sombreada, tenemos que

$$S = 18 - ((DEZ) + (BXF) + (YBD))$$

Como $(DEZ) = 2$ y $(BXF) = (YBD) = 4$, vemos que $S = 18 - (2 + 2 \cdot 4) = 8$. La respuesta es (a).

Solución 67. Imaginemos que las cajas están todas vacías y que vamos metiéndolas en orden. Al principio tenemos 11 cajas grandes vacías. Si decidiéramos llenar alguna de estas cajas tendríamos una caja vacía menos, pero habría 8 cajas vacías más (las que se van a meter en esa caja grande); entonces al final de esta operación tendríamos 1 caja llena y 7 cajas vacías más. Con las cajas medianas pasa lo mismo: por cada caja llena se agregan 7 vacías. El número de cajas vacías debe ser $11 + 7k$ donde k es el número de cajas que se llenaron. Como $102 = 11 + 7 \times 13$, sólo tenemos 13 cajas llenas, así que en total tenemos $102 + 13 = 115$ cajas. La respuesta es (c).

Solución 68. Hay 12 pentágonos en total y cada uno toca cinco hexágonos, o sea que hay $12 \times 5 = 60$ costuras entre hexágonos y pentágonos. Cada hexágono está unido con otros 3 pentágonos (tiene 3 costuras de este tipo), así que el total de hexágonos es $\frac{60}{3} = 20$. La respuesta es (c).

Solución 69. Observamos que $10^8 = (10^4)^2$, así que el cuadrado siguiente es $(10^4 + 1)^2$. La respuesta es (a).

Solución 70. Como $BCDE$ es paralelogramo, entonces $BC = DE$. De aquí que los triángulos BCA y DEC tienen la misma base ($BC = DE$) y la misma altura (la distancia entre las rectas BC y AE) y entonces $x = y$. La respuesta es (a).

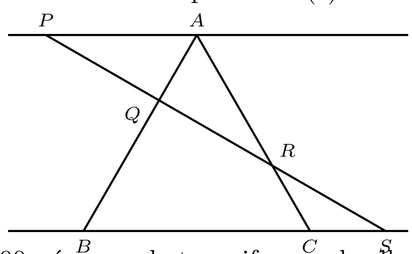
Solución 71. Claramente las únicas posibles soluciones para x son del 1 al 7. Cuando $x = 7$ tenemos que $y + z = 2$, para lo cual sólo hay una posibilidad: $y = z = 1$. Cuando $x = 6$ tenemos que $y + z = 5$, que tiene cuatro soluciones: $y = 1$ y $x = 4$, $y = 2$ y $x = 3$, $y = 3$ y $x = 2$ y $y = 4$ y $x = 1$. De aquí podemos ver que si reducimos el valor de x en 1 aumentamos 3 soluciones. Entonces el número total de soluciones es $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 70$. La respuesta es (c).

Solución 72. Hay 25 alumnos en la clase. Como 6 alumnos se sacaron 6 en matemáticas, hay 19 alumnos que no tienen 6 en matemáticas y hay a lo más el mismo número de deportistas. Si le damos 1 punto a cada uno de los deportes practicado por algún alumno tenemos $17 + 13 + 8 = 38$ puntos para los deportes. Como hay a lo más 19 personas que practican deportes y ninguna de ella practica 3 deportes, entonces tenemos que todas practican 2 deportes. De los 19 deportistas 17 son ciclistas, así que hay únicamente 2 alumnos que son nadadores y esquiadores a la vez. La respuesta es (a).

Solución 73. Como $54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3$, 9 tiene que dividir a $a99b$, luego 9 divide a $a + b$. Además 2 divide a $a99b$, luego b es par. Si 9 divide a $a + b$, como a y b son dígitos y b es par, entonces $a \leq 9$ y $b \leq 8$ y por tanto $a + b = 9$. Es fácil ver que las 5 posibilidades con b par (9990, 7992, 5994, 3996 y 1998) son todas múltiplos de 54. La respuesta es (d).

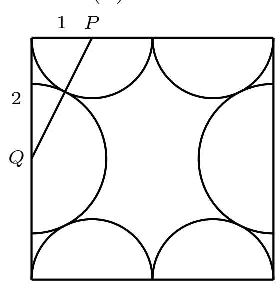
Solución 74. Observemos que los triángulos PQA y SQB son semejantes en razón 1:2 pues $PQ = \frac{1}{2}QS$. De la misma manera, los triángulos RCS y RAP son semejantes también en razón 1:2. Así, tenemos que $\frac{BS}{AP} = 2$ y $\frac{CS}{AP} = \frac{1}{2}$.

Como $BS = BC + CS = 3 + CS$, entonces $\frac{CS}{AP} + \frac{3}{AP} = 2$ y como $\frac{CS}{AP} = \frac{1}{2}$ resulta que $AP = 2$ y $CS = 1$. La respuesta es (c).



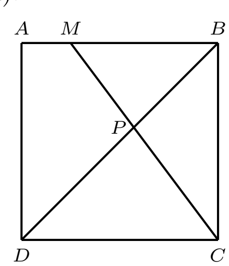
Solución 75. Hay 900 números de tres cifras, y de ellos los mayores que 399 son $999 - 399 = 600$. La mitad de estos últimos (o sea, 300) son pares, así que la probabilidad es $\frac{300}{900} = \frac{1}{3}$. La respuesta es (b).

Solución 76. El radio de los círculos de arriba y de abajo es 1. Entonces la distancia entre P y Q (ver figura) es, por Pitágoras, $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. De aquí que el radio del círculo lateral es $\sqrt{5} - 1$ y así $A - B = 16 - 4\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2}(\sqrt{5} - 1)^2 = 16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$. La respuesta es (d).



Solución 77. Observemos que los números 6, 5 y 3 comparten un vértice. Si quisiéramos tener un producto mayor tendríamos que cambiar alguno de los números por otro más grande, y la única manera de hacerlo sería sustituyendo el 3 por el 4, pero eso es imposible ya que 5 y 4 no comparten un vértice. Entonces el producto mayor es $6 \times 5 \times 3 = 90$. La respuesta es (d).

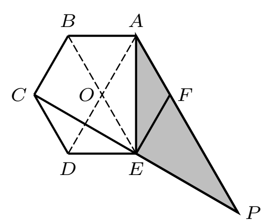
Solución 78. El triángulo MBC es rectángulo y sus catetos miden 3 y 4, por lo que su hipotenusa es $MC = 5$. Los triángulos MBP y CDP son semejantes, pues AB y CD son paralelas, así que $\frac{PM}{PC} = \frac{CD}{MB} = \frac{4}{3}$. Por otro lado, sabemos que $PM = MC - PC = 5 - PC$ y tenemos entonces que $\frac{PC}{5 - PC} = \frac{4}{3}$, de donde $PC = \frac{20}{7}$. La respuesta es (d).



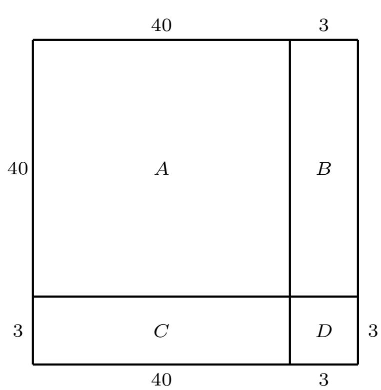
Solución 79. Si $x \geq 4$, entonces 2^{3+x} es entero pero 2^{3-x} no lo es, así que su suma no puede ser 65. Por lo anterior concluimos que $x \leq 3$, y de forma parecida podemos concluir que $x \geq -3$. Para $-3 \leq x \leq 3$ ambas potencias de 2 son enteras. Como 65 es impar, una de las potencias de 2 tiene que ser impar y la otra par, es decir, una debe ser $2^0 = 1$ y la otra $2^6 = 64$. Así, las únicas posibilidades son $3 - x = 0$ y $x + 3 = 6$ o $x + 3 = 0$ y $3 - x = 6$, o sea, $x = 3$ o $x = -3$. La respuesta es (c).

Solución 80. El equipo A debe haber ganado dos juegos y empatado uno. Como B no pudo empatar 4 juegos, debe haber ganado uno, empatado uno y perdido uno. Entonces C y D deben haber ganado un juego cada uno y perdido los otros dos. Así A debe haber empatado con B y, por tanto, A debe haber ganado en el juego contra D. La respuesta es (a).

Solución 81. El área es $\frac{2001}{2}$. Hay muchas maneras de llegar a este resultado. Podemos, por ejemplo, observar que el triángulo AFE tiene la misma área que el triángulo AOE, donde O es el centro del hexágono. Entonces el área de AFE es $\frac{1}{6} \cdot 2001$. Por otro lado, el triángulo EFP es igual al triángulo EFB puesto que $CE \,||\, BF$ y $AF \,||\, BE$ y así $BEPF$ es un paralelogramo. Entonces, el área de FEP es $\frac{2}{6} \cdot 2001$. La respuesta es (d).

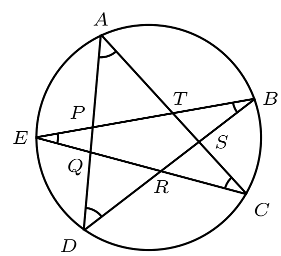


Solución 82. Dividamos el cuadrado en 4 rectángulos A, B, C y D: uno de 40×40, otro de 3×40, otro de 40×3 y otro de 3×3, como se indica en la figura. En las regiones A, B y C algún lado es múltiplo de 4, así que aparecen todos los colores en la misma cantidad. El cuadrado D es como se indica en la figura, así que el color que más aparece es el 3. La respuesta es (c).



1	2	3
2	3	4
3	4	1

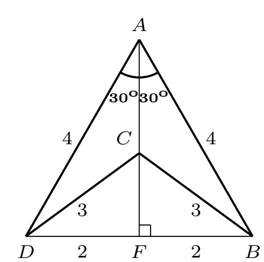
Solución 83. Sean P, Q, R, S y T los puntos indicados en la figura. Si sumamos todos los ángulos internos de los triángulos ASD, ETC, DPB, CQA y BRE obtenemos la suma de todos los ángulos interiores del pentágono $PQRST$ más dos veces cada uno de los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ y $\angle E$. Por lo tanto $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \frac{5\cdot 180^{\circ} - 3\cdot 180^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$. La respuesta es (b).



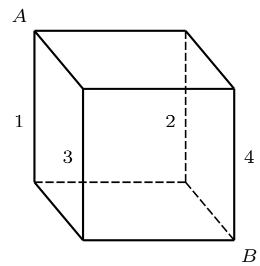
Solución 84. Es claro que para $n = 2$ es posible. Para $n \geq 3$ dentro del triángulo se forman algunos hexágonos y entonces es posible encontrar 6 triangulitos todos vecinos entre sí. Como sólo hay 5 posibles residuos, no hay forma de asignar a esos triangulitos números con residuos todos distintos. Así, sólo hay una posibilidad para n. La respuesta es (b).

Solución 85. Multiplicando toda la ecuación por 35 obtenemos $5A+7B = 31$. Si A fuera mayor o igual que 7 entonces $5A+7B$ sería al menos 35, que se pasa de 31, y por tanto A es a lo más 6. Como $31 - 5A$ es un múltiplo de 7 y A es menor o igual que 6, el valor de A tiene que ser 2 y, por tanto, el de B es 3. La respuesta es (b).

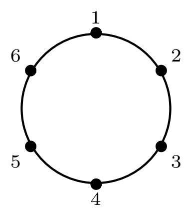
Solución 86. Consideremos D y B como en la figura, prolonguemos el segmento AC hasta que corte al segmento BD y llamemos F al punto de la intersección. Notemos que el triángulo ABD es equilátero, ya que $AD = AB$ y el ángulo $\angle DAB = 60^{\circ}$. Observemos también que los triángulos ADC y ABC son iguales pues tienen iguales sus lados. Entonces $\angle DAC = \angle BAC = 30^{\circ}$, es decir, AC es bisectriz del ángulo $\angle DAB$ y AF es altura del triángulo ABD, de donde $DF = BF = 2$. Usando Pitágoras en los triángulos AFD y CFD tenemos que $AF = 2\sqrt{3}$ y $CF = \sqrt{5}$. De lo anterior, $AC = AF - FC = 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$. La respuesta es (a).



Solución 87. Para ir de A a B se puede bajar por las aristas 1, 2, 3 o 4. Si pasamos por 1 hay 2 caminos posibles, al igual que si pasamos por 4. Si bajamos por 2 o 3 hay 4 caminos posibles en cada caso. Así, el total de caminos es $2+2+4+4=12$. La respuesta es (c).



Solución 88. Numeremos los puntos del 1 al 6 como se muestra en la figura.



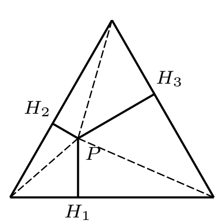
1) Si unimos el punto 1 con el punto 2, podemos unir los cuatro puntos restantes de dos formas distintas: o bien el 3 con el 4 y el 5 con el 6, o bien el 6 con el 3 y el 4 con el 5. Por un argumento similar, hay dos posibilidades distintas para completar el dibujo si unimos el 1 con el 6.

2) No podemos unir el punto 1 con el punto 3, pues el punto 2 no podría unirse con nadie más sin intersectar el segmento que va del 1 al 3. Por el mismo argumento no podemos unir el 1 con el 5.

3) Si unimos el 1 con el 4 hay una sola manera de completar el dibujo, que es uniendo el 2 con el 3 y el 5 con el 6.

Por tanto hay 5 formas distintas de unir los puntos. La respuesta es (a).

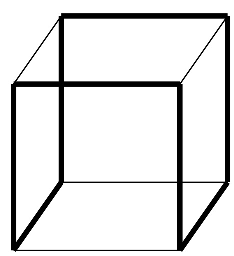
Solución 89. Las líneas que unen a P con los vértices del triángulo dividen a éste en tres triángulos de áreas $6\frac{PH_1}{2}, 6\frac{PH_2}{2}$ y $6\frac{PH_3}{2}$. Como el área del triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$, tenemos que $3PH_1+3PH_2+3PH_3 = 9\sqrt{3}$. Por lo tanto $PH_1+PH_2+PH_3 = 3\sqrt{3}$. La respuesta es (d).



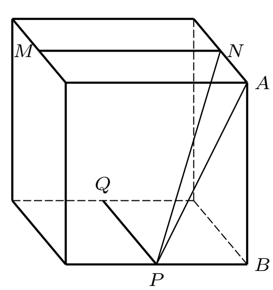
Solución 90. Para formar un cuadrilátero no podemos tomar 3 ó 4 vértices en una fila, así que hay que tomar exactamente dos vértices de cada una de las filas. Hay 6 maneras distintas de escoger dos puntos en cada una de las filas, así que en total pueden dibujarse $6 \times 6 = 36$ cuadriláteros. La respuesta es (e).

Solución 91. Sea h la longitud de la altura sobre el lado que mide x. Como el área es x tenemos que $\frac{xh}{2} = x$, de donde $h = 2$. Entonces la altura debe coincidir con el lado que mide 2, es decir, el triángulo es rectángulo. Por lo tanto, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos $x = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. La respuesta es (c).

Solución 92. Observemos que la hormiga no puede pasar dos veces por un vértice, ya que cada vértice tiene tres aristas y cuando la hormiga pasa por un vértice usa dos de esas aristas, una para llegar y otra para salir (si llegara por tercera vez a un vértice la hormiga no tendrá arista para salir). Si la hormiga puede recorrer todos los vértices del cubo recorrería un camino máximo, lo cual es posible como se muestra en la figura. La longitud de dicho recorrido es 8. La respuesta es (b).



Solución 93. Para cada punto fijo R sobre PQ la distancia máxima de R a los puntos del segmento MN se alcanzará en M y N. Consideremos los puntos N y P y dibujemos un triángulo con esos puntos y el vértice A. La distancia de N a A es 1 y de A a B es 2, por lo tanto la hipotenusa P del triángulo ABP es $\sqrt{5}$. Observemos que el triángulo NAP es rectángulo, luego la hipotenusa NP del triángulo NAP es igual $\sqrt{6}$. La respuesta es (e).

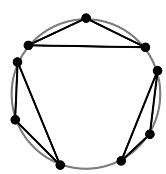


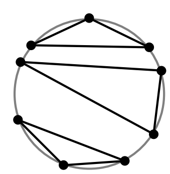
Solución 94. Las casillas que buscamos son aquéllas con número múltiplo de 4, que son $\frac{128}{4} = 32$. En cualquier momento la pulga puede llegar a la casilla 128 si salta en el sentido apropiado. Sin embargo, si va en el otro sentido y está en una casilla a, al terminar el salto estará en la casilla $2a$ o en la casilla $2a - 128$. Notemos también que en el momento que la pulga llegue a la casilla 128, sin importar en qué dirección salte, ya siempre quedará en esa casilla. Ahora, llamemos i al número de la casilla donde la pulga empieza. Buscamos que $2^5 i$ sea múltiplo de $128 = 2^7$, así que i debe ser múltiplo de 4. La respuesta es (b).

Solución 95. Observemos que dos de los triángulos deben tener sus vértices vecinos (ninguno de los vértices del otro triángulo está intercalado entre los vértices de esos dos), o de otra manera habrá dos triángulos en la figura que se intersecten. Con esta consideración, hay dos maneras de hacer la elección:

1) Dibujar los triángulos de modo que los vértices de cada uno de ellos estén en puntos adyacentes (como indica la figura 1), lo cual podemos hacerlo de 3 formas distintas, pues una vez que se elige uno de los triángulos los otros dos quedan determinados.

2) Dibujar dos triángulos con sus vértices en puntos adyacentes y el tercer triángulo con exactamente dos vértices en puntos adyacentes (como muestra la figura 2), lo cual podemos hacer de 9 maneras distintas.


(1)


(2)

Como no hay más formas de dibujar los triángulos, la respuesta es $3 + 9 = 12$. La respuesta es (e).

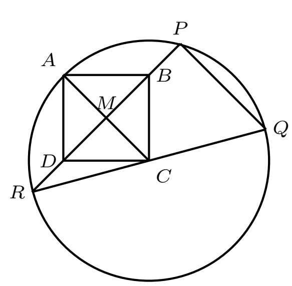
Solución 96. Notemos que $DO = OE$ por ser radios y que, aplicando Pitágoras en los triángulos CDO y CEO, tenemos que $CD = CE$. Llamemos $m = DA = EB$ y $r = DO = DE$. Como $\angle CDO = \angle OEC = 90^o$ y como el triángulo ABC es equilátero, entonces $\angle DOA = \angle EOB = 30^o$. También tenemos que $AO^2 = DO^2 + DA^2 = EO^2 + EB^2 = OB^2$, por lo que $AO = OB = 1$, es decir, O es punto medio de AB. Como CO es perpendicular a AB tenemos $\angle DOC = 60^o$ y $\angle DCO = 30^o$. De lo anterior tenemos que los triángulos COD y OAD son semejantes y entonces $m\sqrt{3} = r$, ya que $\frac{CO}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{1}$. Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo OAD llegamos a que $m^2 + r^2 = 1$. Igualando las dos últimas ecuaciones obtenemos que $r^2 = \frac{3}{4}$ y, como $\angle DOE = 120^o$, el área buscada es igual a $\frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi}{4}$. La respuesta es (a).

Solución 97. Tenemos que $999 = nq + 3$, para algún entero q. Entonces $1000 = nq + 4$, $2000 = n(2q) + 8$ y $2001 = n(2q) + 9$. Como n tiene dos cifras, 9 es el residuo. La respuesta es (e).

Solución 98. Llamemos X a un número con esa propiedad. Podemos escribir $X = 10b + a$, donde a es un dígito y b es un entero. Como $b = \frac{X}{14}$ entonces $14b = 10b + a$, de donde $a = 4b$. Entonces a es un múltiplo de 4, así que las dos posibilidades para a son 4 y 8 (y entonces, $X = 14$ y $X = 28$ son las dos posibilidades para X). La respuesta es (c).

Solución 99. Sea $N = abcd$ el número buscado, con a, b, c y d sus cifras. Sabemos que $N = 3(a+b+c+d)$, que $a \leq 2$ y que $b, c, d \leq 9$, así que $N \leq 3(2+9+9+9) = 87$. De esta manera el problema se simplifica considerablemente pues $a = b = 0$ y $c \leq 8$. De aquí podemos proceder de distintas maneras: La primera es repitiendo el procedimiento varias veces: $N \leq 3(8+9) = 51$, por tanto $c \leq 5$; entonces $N \leq 3(5 + 9) = 42$; otra vez, $N \leq 3(4 + 9) = 39$, $N \leq 3(3 + 9) = 36$. De aquí ya es fácil analizar todos los múltiplos de 3 (pues N lo es) y ver que sólo $N = 27$ cumple la condición. Otra forma de resolver el problema una vez que sabemos que N tiene sólo dos cifras es: $N = 10a + b = 3(a + b)$, de donde $7a = 2b$. Entonces b tiene que ser múltiplo de 7 y, como es un dígito, debe ser 7. Entonces $a = 2$. Una tercera forma de proceder ya sabiendo que N tiene dos cifras es utilizando que si un número es multiplo de 3 o de 9 entonces también la suma de sus cifras lo es: Como N es múltiplo de 3 entonces $a + b + c + d$ es múltiplo de 3, pero entonces, ya que $N = 3(a + b + c + d)$, tenemos que N es múltiplo de 9; otra vez, $a + b + c + d$ también debe serlo, así que N es múltiplo de 27. Las posibilidades entonces para N son 27, 54 y 81, y de éstos sólo 27 cumple. La respuesta es (b).

Solución 100. Sea M el punto de intersección de PR con AC. Por simetría, M es punto medio de PR y CM es perpendicular a PR. Como $MR = MP$ y $CR = CQ$, entonces $PQ \,||\, MC$, por tanto el ángulo buscado $\angle PQR$ es igual a $\angle MCR$. Por otro lado, los triángulos rectángulos RMC y RMA tienen iguales los catetos, así que ellos mismos son iguales. Entonces $RA = RC$, de donde el triángulo ARC es equilátero y así $\angle MCR = 60^o$. La respuesta es (b).



Concentrado de Respuestas

1.- (e)	26.- (d)	51.- (b)	76.- (d)
2.- (e)	27.- (c)	52.- (c)	77.- (d)
3.- (c)	28.- (d)	53.- (d)	78.- (d)
4.- (a)	29.- (d)	54.- (b)	79.- (c)
5.- (e)	30.- (e)	55.- (d)	80.- (a)
6.- (e)	31.- (d)	56.- (d)	81.- (d)
7.- (d)	32.- (e)	57.- (d)	82.- (c)
8.- (c)	33.- (e)	58.- (e)	83.- (b)
9.- (b)	34.- (c)	59.- (d)	84.- (b)
10.- (d)	35.- (e)	60.- (d)	85.- (b)
11.- (a)	36.- (e)	61.- (d)	86.- (a)
12.- (c)	37.- (d)	62.- (b)	87.- (c)
13.- (c)	38.- (c)	63.- (d)	88.- (a)
14.- (a)	39.- (c)	64.- (c)	89.- (d)
15.- (d)	40.- (c)	65.- (d)	90.- (e)
16.- (a)	41.- (b)	66.- (a)	91.- (c)
17.- (c)	42.- (d)	67.- (c)	92.- (b)
18.- (d)	43.- (e)	68.- (c)	93.- (e)
19.- (c)	44.- (a)	69.- (a)	94.- (b)
20.- (b)	45.- (c)	70.- (a)	95.- (e)
21.- (c)	46.- (c)	71.- (c)	96.- (a)
22.- (c)	47.- (a)	72.- (a)	97.- (e)
23.- (e)	48.- (b)	73.- (d)	98.- (c)
24.- (a)	49.- (b)	74.- (c)	99.- (b)
25.- (b)	50.- (c)	75.- (b)	100.- (b)

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas