Problemas para la

17ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
Julio César Aguilar Cabrera
María Luisa Pérez Seguí

2003

Luis Miguel García Velázquez

Estudiante de la Maestría en Matemáticas,
UNAM - Universidad Michoacana

Julio César Aguilar Cabrera

Estudiante de la Maestría en Matemáticas,
UNAM - Universidad Michoacana

María Luisa Pérez Seguí

Profesora-Investigadora, Esc. Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 17^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2004: la XLV Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en Grecia durante el mes de julio, la XIX Olimpiada Iberoamericana a celebrarse en septiembre en España y la VI Olimpiada de Centroamérica y el Caribe que se llevará a cabo en Venezuela en el mes de julio.

En la 17a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1984. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2003-2004, y para el 1^o de julio del año 2004 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

Algunos de los problemas que se presentan en este folleto aparecieron en las primeras etapas de las Olimpiadas de Matemáticas. La intención de este folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas Olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela. Son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Esta publicación incluye una selección de los problemas que formaron parte de los exámenes del Canguro Matemático Mexicano, de la etapa eliminatoria del Distrito Federal y del propuesto por el Comité Nacional para la etapa semifinal de los Concursos Estatales. Agradecemos a María Elena Aguilera por la minuciosa revisión de este problemario.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el Estado de Guanajuato en noviembre de 2003, y en él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2004. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual. Durante el mes de abril se distribuyen los exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec y Colima.

Resultados de las Delegaciones que Representaron a México en 2001

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y Centroamericana y del Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46

En 2002, la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional estuvo integrada por los alumnos: Edgardo Roldán (de Morelos), Miguel Raggi (de Michoacán), Jesús Puente (del D.F.), Alan Barreto (de Jalisco), Ricardo De la O (de San Luis Potosí) y Rodrigo Hernández (del D.F.). Se obtuvieron tres medallas de bronce (Edgardo Roldán, Miguel Raggi y Jesús Puente). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de plata, 18 medallas de bronce y 16 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2002 obtuvieron medalla: una de oro (Edgardo Roldán de Morelos), dos de plata (Miguel Raggi de Michoacán y Hugo Villanueva de Puebla) y una de bronce (Alan Barreto de Jalisco). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 9 medallas de oro, 21 medallas de plata, 19 medallas de bronce y 3 menciones honoríficas. En la 11ª Olimpiada Iberoamericana, celebrada en Costa Rica, México obtuvo la Copa Puerto Rico, que se da cada año al país con el mayor progreso relativo.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1

Los 3 alumnos mexicanos ganaron las 3 medallas de oro otorgadas en la IV Olimpiada Centroamericana y del Caribe; ellos fueron Enrique Carro de Nuevo León, Marco Figueroa de Sonora y Carlos Vargas de Jalisco. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 5 medallas de oro, 5 de plata y 2 de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 16a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2002 se llevó a cabo en Colima, Col., el 16º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 20 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora,
Yoalli Mabel Hidalgo Pontet de Jalisco,
Carlos Vargas Obieta de Jalisco,
Gerardo Arizmendi Echegaray de Morelos,
Mauricio Salazar de Campeche,
Gonzalo Arturo Montalván Gámez de Puebla,
Daniel Barrón Gaxiola de Sonora,
Antonio Olivas Martínez de Sonora,
Octavio Arizmendi Echegaray de Morelos,
Guillermo Enrique Carro Prado de Nuevo León,
Ana Paula Estrada Vargas de Jalisco,
Iván Joshua Hernández Máynez de Coahuila,
Alicia Prieto Langarica de Jalisco,

Julio Brau Ávila de Sonora,
Adrián Enrique Chi Centeno de Yucatán,
Eduardo Alejandro García Salinas de Chihuahua,
Mariano Raúl González Tokman de Michoacán,
Víctor Manuel Mazón Sánchez del Distrito Federal,
Alejandro Ortega Laborín de Baja California y
Gustavo Adolfo Ramos Palacios de Nayarit.

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe fueron:

Gonzalo Arturo Moltalván Gámez,
Iván Joshua Hernández Máynez de Coahuila,
Rafael Eduardo Gaytán Ramos de Morelos,
Héctor Daniel García Lara de Chihuahua y
Rosemberg Toalá Enríquez de Chiapas.

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 16º Concurso Nacional:

1. Jalisco
2. Sonora
3. Morelos
4. Chihuahua
5. Nuevo León
6. Michoacán
7. Yucatán
8. Baja California Sur
9. Distrito Federal
10. Puebla

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa Tepezcuintle y fue ganado por Sonora. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Jalisco y Nayarit.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

`http://tlahui.posgrado.unam.mx/omm/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Enero 2003

Enunciados de los problemas

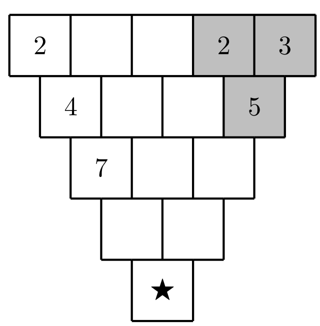
Problema 1. Lucy vive en una calle donde las casas están numeradas del 1 al 24. ¿Cuántas veces aparece el 2 en los números de las casas?

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16 (e) 32

Problema 2. En el cálculo $\bigstar 1 \bigstar 2 \bigstar 3 \bigstar 4 \bigstar 5$ puedes reemplazar $\bigstar$ por $+$ o por $-$. ¿Cuál de los siguientes números no puedes obtener?

(a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 13 (e) 17

Problema 3. En la pirámide, el número en cada cuadro (a partir del segundo renglón) es la suma de los dos números justo arriba de él (por ejemplo, en las casillas sombreadas $2 + 3 = 5$). ¿Qué número debe ir en lugar de $\bigstar$?

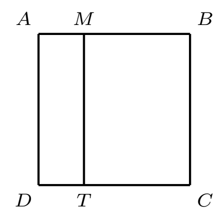


(a) 1 (b) 7 (c) 27 (d) 30 (e) 35

Problema 4. En uno de los platillos de una balanza hay 6 naranjas y en el otro hay dos melones. Cuando agregamos un melón en el platillo de las naranjas la balanza queda equilibrada. ¿Cuántas naranjas pesan lo mismo que un melón?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 5. Cada lado del cuadrado $ABCD$ mide 10 cm. El lado más pequeño del rectángulo $AMTD$ mide 3 cm. ¿Por cuántos centímetros es más grande el perímetro del rectángulo $MBCT$ que el del rectángulo $AMTD$?



(a) 10 cm (b) 8 cm (c) 7 cm (d) 6 cm (e) 4 cm

Problema 6. Numeré 2002 tarjetas del 1 al 2002 y quité aquéllas que terminaban con 0. Después volví a numerar las que me quedaban y otra vez quité las que terminaban con 0. Al final, ¿cuántas tarjetas me quedaron?

(a) 1622 (b) 1620 (c) 1000 (d) 900 (e) 782

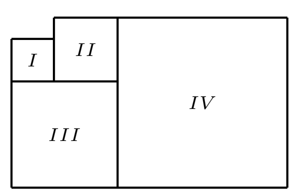
Problema 7. En un grupo de 15 amigos hay 10 que tienen los ojos cafés (los demás tienen los ojos azules) y 10 que tienen 16 años (el resto tienen 15). Sólo una de las siguientes opciones no puede ser el número exacto de amigos en el grupo que tienen 16 años y ojos cafés, ¿cuál es?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 8. Compré un costal lleno de alpiste para alimentar a mi canario. El primer día mi canario se comió $\frac{1}{2}$ del total de alpiste. El segundo día se comió $\frac{1}{3}$ del alpiste restante y el tercer día comió $\frac{1}{4}$ del sobrante. Del total de alpiste que había en el costal, ¿qué fracción queda?

(a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{4}{5}$

Problema 9. La figura que se muestra está formada por cuatro cuadrados. Los perímetros de los cuadrados I y II miden, respectivamente, 16 cm y 24 cm. ¿Cuánto mide el perímetro del cuadrado IV?



(a) 56 cm (b) 60 cm (c) 64 cm (d) 72 cm (e) 80 cm

Problema 10. Las tres cuartas partes de los alumnos de un grupo son hombres y el resto son mujeres. ¿Cuál es el quebrado que representa la razón del número de hombres entre el de mujeres?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$ (e) $\frac{3}{1}$

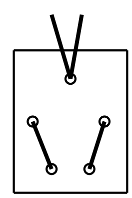
Problema 11. Las fechas de cumpleaños de cuatro amigas (Blanca, Cristina, Daniela y Flor) son marzo 1, marzo 20, mayo 17 y julio 20. Sabemos que Flor nació el mismo mes que Cristina, y que el número de día en que nacieron Cristina y Daniela es el mismo, aunque nacieron en distintos meses. ¿Quién nació en mayo 17?

(a) Blanca (b) Cristina (c) Daniela (d) Flor (e) imposible de determinar

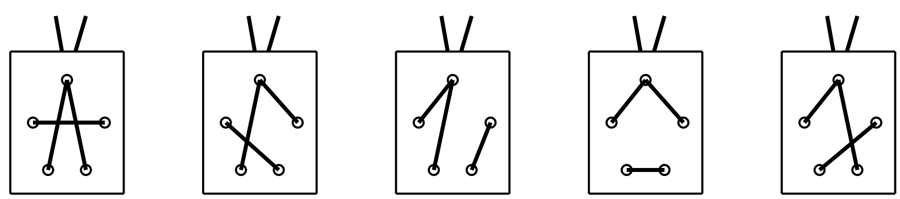
Problema 12. Erika y Manuel tienen 60 cerillos entre los dos. Utilizando algunos de ellos Erika construyó un triángulo que tiene 6 cerillos en cada lado. Con el resto de los cerillos Manuel contruyó un rectángulo, de forma que uno de sus lados tiene 6 cerillos de largo. ¿Cuántos cerillos de largo tiene el otro lado del rectángulo?

(a) 9 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 30

Problema 13. Un cordón se cosió a través de 5 hoyos en un pedazo de cartón. Uno de los lados del cartón se ve como sigue:



¿Cuál de los diagramas de abajo **no** puede representar la configuración de la cuerda por el otro lado del cartón.



(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 14. En una carrera participaron 28 niños . El número de niños que llegaron detrás de Nacho fue el doble del número de niños que llegaron antes que él. ¿En qué lugar llegó Nacho?

(a) sexto (b) séptimo (c) octavo (d) noveno (e) décimo

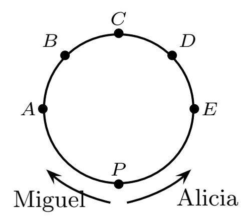
Problema 15. Si 4 manzanas y 2 naranjas cuestan \$15.40 y 2 naranjas y 4 plátanos cuestan \$17.00, ¿cuánto tengo que pagar en total por una manzana, una naranja y un plátano?

(a) \$7.70 (b) \$7.80 (c) \$7.90 (d) \$8.00 (e) \$8.10

Problema 16. Entre seis niños se comieron 20 galletas. Tere se comió una, Edgar se comió dos, Liz se comió tres y César comió más que ningún otro niño. ¿Cuál es la mínima cantidad de galletas que pudo haberse comido César?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 17. Miguel puede correr 3 veces más rápido que su hermana Alicia. Si ellos empiezan al mismo tiempo desde el punto P de la pista que se muestra en la figura, pero en direcciones opuestas, ¿en qué punto se encontrarán por primera vez?



(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Problema 18. Rosy salió de su casa a las 6:55 a.m. y llegó a la escuela a las 7:32 a.m. Su amiga Carla llegó a la escuela a las 7:45 a.m., a pesar de que tarda 12 minutos menos que Rosy en llegar a la escuela. ¿Qué hora era cuando Carla salió de su casa?

(a) 7:07 a.m. (b) 7:20 a.m. (c) 7:25 a.m. (d) 7:30 a.m. (e) 7:33 a.m.

Problema 19. Mi calculadora se descompuso y trabaja de manera muy rara: cuando escribo un número la calculadora lo multiplica por 2, después le voltea todos los dígitos y termina sumando 2 al resultado. ¿Cuál de los siguientes podría ser el número que escribió la calculadora si yo escribí un número de dos cifras?

(a) 39 (b) 41 (c) 42 (d) 43 (e) 45

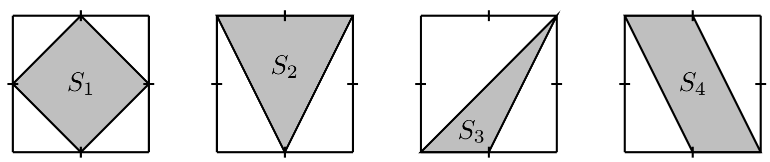
Problema 20. Ceci es 7 años más joven que Vero. ¿Cuál es la suma de sus edades en este momento si dentro de 4 años la edad de Ceci será la mitad que la de Vero?

(a) 13 (b) 15 (c) 17 (d) 19 (e) 21

Problema 21. El contador de kilómetros de mi carro indica el número 187569. Dentro de m kilómetros será la próxima vez que el contador de mi carro indique un número con todas sus cifras distintas. ¿Cuánto vale la suma de los dígitos de m?

(a) 1 (b) 3 (c) 8 (d) 11 (e) 24

Problema 22. Los cuadrados de la figura son todos iguales, en ellos se han marcado los puntos medios de sus lados. En cada cuadrado se ha sombreado un área, y se le ha llamado S_1, S_2, S_3 y S_4 a la medida de estas áreas sombreadas. ¿Cuál de las siguientes relaciones es cierta?



(a) $S_3 < S_4 < S_1 = S_2$ (b) $S_3 < S_1 = S_2 = S_4$ (c) $S_3 < S_1 = S_4 < S_2$
(d) $S_3 < S_4 < S_1 < S_2$ (e) $S_4 = S_3 = S_2 = S_1$

Problema 23. Una caja de manzanas cuesta 20 pesos, una de peras cuesta 30 pesos, y una de duraznos 40 pesos. Si 8 cajas de fruta costaron 230 pesos, ¿cuál es la mayor cantidad de ellas que podrían ser de duraznos?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 24. Un gato y medio se come un ratón y medio cada hora y media. ¿Cuántos ratones pueden comer 15 gatos en 15 horas?

(a) 15 (b) 45 (c) 60 (d) 125 (e) 150

Problema 25. Ricardo cuenta los números del 1 al 100 y se come un chocolate si el número que dice es múltiplo de 3 o termina en 3. ¿Cuántos chocolates se comerá Ricardo en total?

(a) 30 (b) 33 (c) 36 (d) 39 (e) 43

Problema 26. Los cuatro números siguientes: $\frac{1}{2}, x, y, \frac{3}{4}$ están en orden creciente y la diferencia entre cualesquiera dos consecutivos es la misma. ¿Cuánto vale y?

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{5}{8}$

Problema 27. Si mezclo 3 gramos de sal con 17 gramos de agua, ¿cuál es el porcentaje de sal en la solución obtenida?

(a) 20% (b) 17% (c) 16% (d) 15% (e) 6%

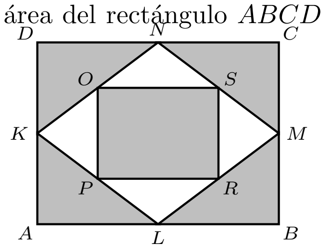
Problema 28. Un pueblo tiene 987654 casas. ¿Cuál es la mínima cantidad de dígitos que deben tener los números telefónicos del pueblo si cada casa tiene un solo teléfono y ningún número telefónico empieza con 0?

(a) $9 \cdot 10^5$ (b) $10^6 - 1$ (c) 9^7 (d) 6 (e) 7

Problema 29. El reloj de Alejandro se atrasa 2 minutos cada hora. El de Verónica se adelanta 1 minuto por hora. El domingo a las 12 del día los pusieron a la misma hora. La siguiente vez que se reunieron Verónica y Alejandro, el reloj de Vero estaba adelantado una hora con respecto al de Alejandro. ¿Cuál es el primer momento en que pudieron haberse encontrado?

(a) El lunes a las 8 de la mañana
(b) El lunes a las 7:20 de la tarde
(c) El martes a las 4 de la mañana
(d) El miércoles a media noche
(e) El sábado a las 10 de la noche

Problema 30. En la figura K, L, M y N son los puntos medios de los lados del rectángulo $ABCD$, y O, P, R y S son los puntos medios de los lados del cuadrilátero $KLMN$. Si el área del rectángulo $ABCD$ es 1, ¿cuánto mide el área sombreada?

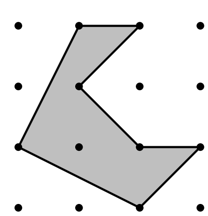


(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{5}{7}$

Problema 31. Paz, Luis y Julieta están jugando. Paz dice un número de tres cifras. Luis suma las tres cifras del número de Paz y dice el resultado. Julieta suma las cifras del número que dice Luis y dice el resultado. ¿Cuál es el número más grande que puede obtener Julieta?

(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 18

Problema 32. En la siguiente figura se muestran los vértices de una cuadrícula donde el lado de cada cuadrito mide uno. ¿Cuál es el área del polígono?



(a) 4 (b) $\frac{7}{2}$ (c) 3 (d) $\frac{5}{2}$ (e) 2

Problema 33. ¿Cuál es el doble del cuadrado de la mitad de la diagonal de un cuadrado de lado 1?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) 1 (d) $\sqrt{2}$ (e) 2

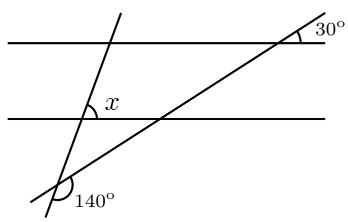
Problema 34. A 1 dm^3 agua se le agrega sal hasta aumentar en un $\frac{1}{11}$ su volumen y se revuelve hasta disolverla. ¿Qué fracción del volumen de la mezcla hay que retirar para quedarse con sólo 1 dm^3 de mezcla?

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{13}$ (d) $\frac{1}{14}$ (e) $\frac{1}{15}$

Problema 35. Una máquina corta una pieza de madera en tres partes en un minuto y después corta en tres las partes resultantes, cada una en un minuto. En el momento en que hay al menos 317 piezas de madera la máquina se detiene. Cuando la máquina se detenga, ¿cuántos minutos habrán pasado?

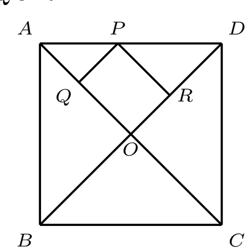
(a) 6 (b) 7 (c) 105 (d) 106 (e) 158

Problema 36. Dos paralelas son atravesadas por dos transversales de manera que se intersectan con los ángulos marcados en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo x?



(a) 30º (b) 40º (c) 45º (d) 60º (e) 70º

Problema 37. En la figura $ABCD$ es un cuadrado con $AB = 1$. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo $PQOR$?

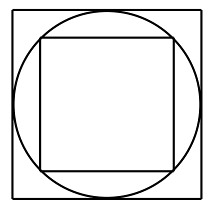


(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) 1 (e) No se puede determinar

Problema 38. Papá y Mamá Canguro tienen 3 hijas, y cada hija tiene dos hermanos. ¿Cuántos miembros tiene la familia Canguro?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Problema 39. ¿Cuál es el resultado de dividir el área del cuadrado grande entre el área del cuadrado chico?

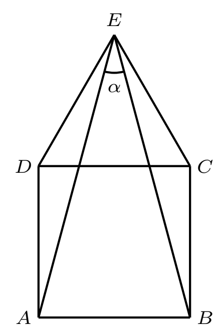


(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $2+\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 2 (e) $\sqrt{2}$

Problema 40. Si se escriben todos los múltiplos de 5 menores que 2002, ¿cuántos 1's se usan?

(a) 140 (b) 200 (c) 280 (d) 360 (e) 400

Problema 41. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y CED un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo α?



(a) 15º (b) 30º (c) 45º (d) 60º (e) 90º

Problema 42. En la tienda de la esquina el precio del kilo de jamón subió 12 pesos. Después se puso en oferta con un descuento del 20%, con lo que el precio quedó igual a como estaba antes de que lo subieran. ¿Cuánto costaba antes del aumento de precio?

(a) 40 (b) 48 (c) 52 (d) 54 (e) 60

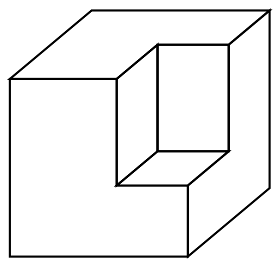
Problema 43. Seis cartas marcadas con los números 2, 3, 5, 6, 7 y 9 se ponen en fila de manera que se lee el número 632579. ¿Cuál es la mínima cantidad de intercambios de dos cartas consecutivas que deben hacerse para que el número que resulte al final sea múltiplo de 4?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 44. Un ciclista sube por un camino a la velocidad de 12 km/h, y de regreso desciende por él a 20 km/h. Si se tardó 16 minutos más en subir que en bajar, ¿cuál es la longitud del camino?

(a) 8 m (b) 10 m (c) 12 m (d) 14 m (e) 16 m

Problema 45. Haciendo cortes paralelos a las caras de un cubo de madera se obtiene una pieza como la que se muestra. Si el volumen original del cubo era 8 m^3, ¿cuál es la superficie de la pieza?

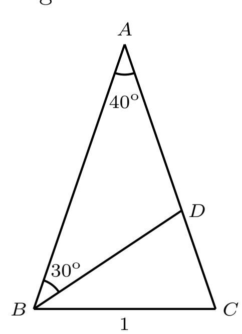


(a) 18 m^2 (b) 24 m^2 (c) 26 m^2 (d) 28 m^2 (e) imposible de determinar

Problema 46. En cierta población de ratones el 25% son blancos y el 75% son negros. De los ratones blancos el 50% tiene ojos azules y de los negros el 20% tiene ojos azules. Si sabemos que 99 ratones tienen ojos azules, ¿cuántos ratones tiene la población?

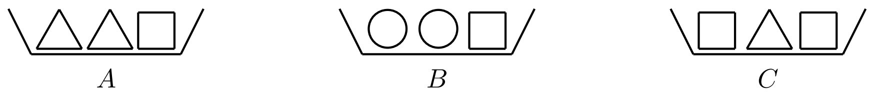
(a) 360 (b) 340 (c) 240 (d) otra respuesta (e) sin solución

Problema 47. En la siguiente figura el triángulo grande es isósceles. Si la base mide 1, ¿cuánto mide el segmento DB?

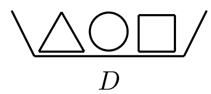


(a) 1 (b) 2 cos 30° (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2 sen 40° (e) $\sqrt{2}$

Problema 48. Los platillos A, B y C están acomodados según su peso: el platillo más ligero es el A, después el B y finalmente el C.

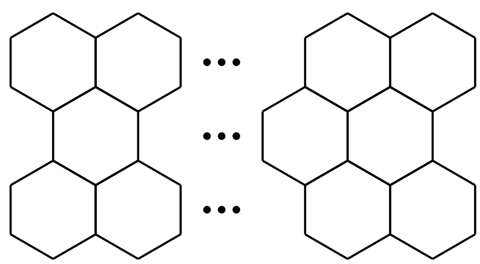


Para conservar el orden de pesos, ¿dónde debe colocarse el platillo D?



(a) entre A y B (b) entre B y C (c) antes de A
(d) después de C (e) D y C pesan lo mismo

Problema 49. Con varitas de metal se construyó una red de 32 hexágonos como se muestra en la figura. ¿Cuántas varitas se usaron en toda la red?

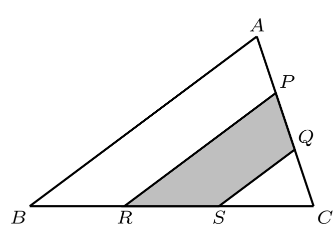


(a) 122 (b) 123 (c) 130 (d) 132 (e) 135

Problema 50. ¿Cuál es el máximo número de intersecciones que pueden obtenerse dibujando dos círculos y tres líneas rectas?

(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17 (e) 18

Problema 51. El triángulo ABC de la figura tiene área 1. Los puntos P, Q, R y S en los lados de ABC son tales que $AP = PQ = QC$ y $BR = RS = SC$. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{3}{4}$

Problema 52. Si a y b son dos enteros positivos con máximo común divisor 3 y $\frac{a}{b} = 0.4$, ¿cuánto vale ab?

(a) 10 (b) 18 (c) 30 (d) 36 (e) 90

Problema 53. ¿Cuál de los siguientes números no puede obtenerse como la cantidad de intersecciones de 5 círculos?

(a) 2 (b) 6 (c) 10 (d) 20 (e) 22

Problema 54. En un triángulo ABC tenemos que P es el punto medio de AB y Q es el punto medio de AC. Si el área de PQC es 1, ¿cuál es el área de ABC?

(a) 3 (b) $\frac{7}{2}$ (c) 4 (d) $2\sqrt{5}$ (e) 5

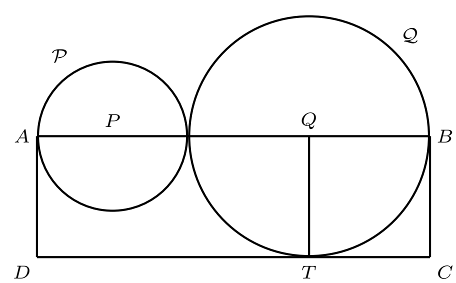
Problema 55. Cuatro paquetes se pesan por parejas en todas las posibles combinaciones. Los pesos obtenidos son 5 kg, 6 kg, 8 kg, 9 kg, 11 kg y 12 kg. El peso total de los 4 paquetes es

(a) 12 kg (b) 17 kg (c) 28 kg (d) 34 kg (e) 51 kg

Problema 56. En cierto mes tres domingos fueron días con número par. ¿Qué día de la semana fue el día 20 de ese mes?

(a) lunes (b) martes (c) miércoles (d) jueves (e) sábado

Problema 57. En la figura, P y Q son los centros de los círculos tangentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, y la línea PQ corta el círculo en A y B, como se muestra. El rectángulo $ABCD$ es tangente a $\mathcal{Q}$ en T. Si el área de $ABCD$ es 15, ¿cuál es el área de PQT?



(a) 4 (b) $\frac{15}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 5 (e) $2\sqrt{5}$

Problema 58. Aquiles corre detrás de una tortuga. En un principio la distancia entre ellos es de 990 metros. Si Aquiles recorre 100 metros cada minuto y la tortuga recorre 1 metro cada minuto, ¿en cuántos minutos alcanzará Aquiles a la tortuga?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 59. Se pintaron de negro algunas casillas de una cuadrícula blanca de 2×9, de manera que cada casilla blanca tiene un lado en común con una negra. El número de casillas negras en la cuadrícula debe ser cuando menos:

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 60. Si $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$ y $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$, entonces $\frac{b-a}{c-b}$ es igual a

(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{25}{8}$ (c) $\frac{4}{1}$ (d) $\frac{4}{9}$ (e) $\frac{3}{10}$

Problema 61. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$, D un punto en BC tal que $\angle BAD = 30^o$ y E un punto en AC tal que $AD = AE$. Entonces $\angle EDC$ es igual a:

(a) 8^o (b) 10^o (c) 15^o (d) 20^o (e) 30^o

Problema 62. Un entero positivo n es divisible por 21 y por 9. ¿Cuál es la menor cantidad de enteros positivos que dividen a n (incluyendo a 1 y al mismo n)?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 63. Un barco recoge 30 naúfragos en una isla. Como resultado, los alimentos del barco que eran suficientes para 60 días ahora son suficientes sólo para 50 días. ¿Cuántas personas había en el barco antes de llegar a la isla?

(a) 15 (b) 40 (c) 110 (d) 140 (e) 150

Problema 64. Las casillas de una cuadrícula de 2003×2003 están numeradas con 1, 2, 3 y 4 de acuerdo al patrón que se muestra en la figura. Una ficha se pone en la casilla de la esquina izquierda superior. A cada paso la ficha puede moverse a una casilla vecina que esté abajo o a la derecha. Después de 2002 pasos, ¿qué número tendrá la casilla sobre la que estará la ficha?

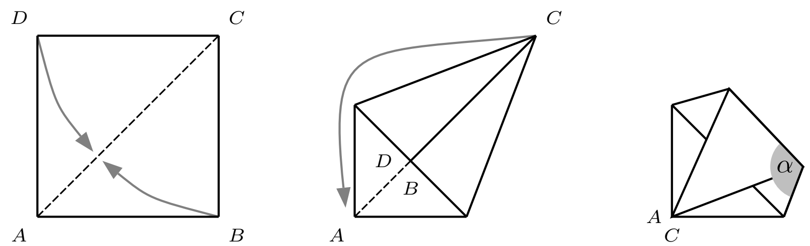
1	2	3	4	1
4	1	2	3	4
3	4	1	2	3
2	3	4	1	2
1	2	3	4	1

(a) 3 (b) 1 o 3 (c) 2 o 3 (d) 3 o 4 (e) cualquiera

Problema 65. Si a y b son números distintos que cumplen $a^2 + b^2 = 4ab$, el valor de $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ es:

(a) 3 (b) $4ab$ (c) $4(a+b)$ (d) 2 (e) $\frac{a}{b}$

Problema 66. De un cuadrado de papel se construye un pentágono como sigue: se doblan las esquinas B y D de manera que queden sobre la diagonal AC y se vuelve a doblar la figura obtenida de manera que la esquina C coincida con la esquina A. ¿Cuánto mide el ángulo que se marca en la figura como α?



(a) 108º (b) 110º (c) 111º (d) 112.5º (e) 114.5º

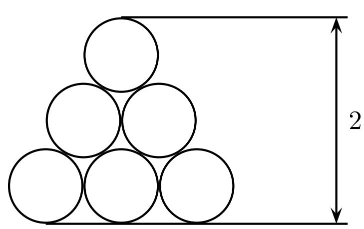
Problema 67. ¿Cuántos números de 3 dígitos abc (con $a \neq 0$) son tales que $a + 3b + c$ es múltiplo de 3?

(a) 100 (b) 300 (c) 330 (d) 600 (e) 990

Problema 68. En un torneo de básquetbol compiten 16 equipos. En cada ronda los equipos se dividen en grupos de 4. En cada grupo cada equipo juega una vez contra cada uno de los equipos restantes. De cada grupo los mejores dos equipos califican para la siguiente ronda y los dos peores son eliminados. Después de la última ronda quedan dos equipos que se enfrentan en un partido para determinar al ganador del torneo. ¿Cuántos partidos se jugarán a lo largo de todo el torneo?

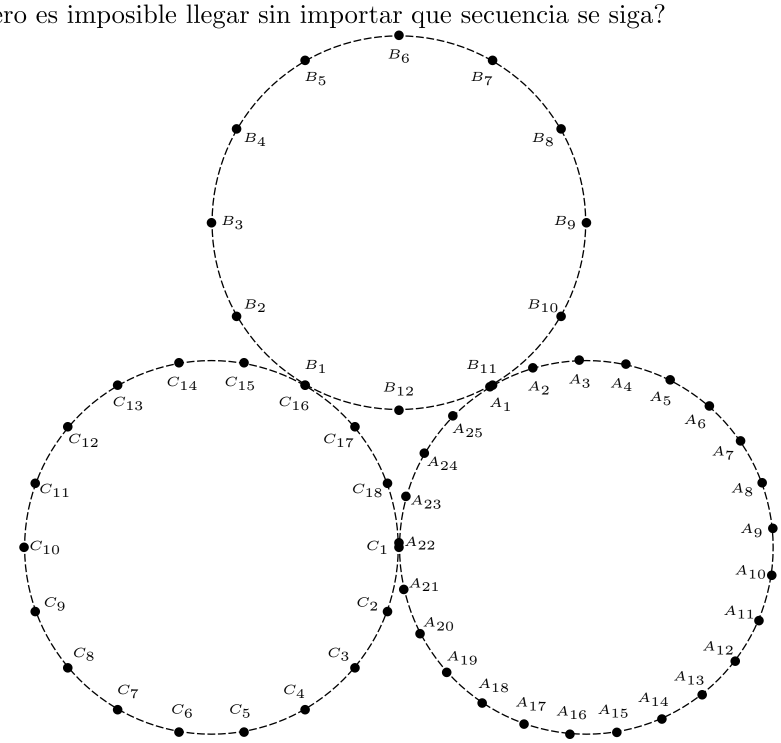
(a) 33 (b) 41 (c) 43 (d) 49 (e) 63

Problema 69. El "triángulo" de la figura está formado por seis círculos de radio r. Si la altura del "triángulo" es 2, ¿cuánto mide r?



(a) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$

Problema 70. En la figura se presenta el tablero de un juego con puntos numerados A_1 a A_{25}, B_1 a B_{12} y C_1 a C_{18}. Una ficha empieza en el punto A_1 y puede moverse en el tablero de acuerdo a la siguiente regla: a cada paso la ficha puede moverse de un punto a otro que esté dos puntos después en el mismo círculo y en cualquier dirección. Por ejemplo, una secuencia de movimientos permitida es $C_5 \to C_3 \to C_1 = A_{22} \to A_{20} \to A_{18} \to A_{20}$, pero no está permitido mover la ficha directamente de C_2 a A_{23}. ¿A cuántos puntos del tablero es imposible llegar sin importar que secuencia se siga?

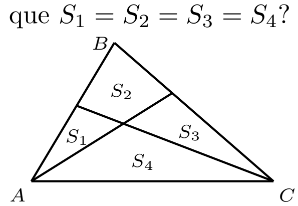


(a) 0 (b) 6 (c) 15 (d) 27 (e) 30

Problema 71. ¿Cuál es el valor de x que cumple $2+5+8+11+\cdots+x = 155$?

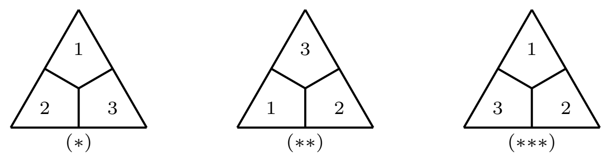
(a) 26 (b) 28 (c) 29 (d) 30 (e) 32

Problema 72. El triángulo ABC se ha dividido en 4 regiones más pequeñas como se muestra en la figura, donde S_1, S_2, S_3 y S_4 son las dimensiones de sus áreas. ¿Cuándo es posible que $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$?



(a) Nunca (b) Cuando ABC es equilátero (c) Cuando ABC es isósceles
(d) Cuando ABC es rectángulo (e) Cuando $\angle ABC > 90^{\circ}$

Problema 73. Un juego con fichas triangulares tiene todas las combinaciones posibles de 5 colores numerados del 1 al 5, de manera que no haya dos colores repetidos en una misma ficha. ¿Cuántas fichas distintas hay? Nota: Las fichas pueden rotarse, así que la ficha de la figura $(*)$ es la misma que la de $(**)$; sin embargo la ficha de $(***)$ es diferente a las anteriores.



(a) $\frac{5^3}{3}$ (b) 125 (c) 60 (d) 30 (e) 20

Problema 74. Una escalera eléctrica tarda 60 segundos en transportar a una persona del primero al segundo piso. Si la escalera está apagada, la persona tarda 90 segundos en subir de un piso a otro caminando sobre ella. ¿Cuántos segundos tarda en subir una persona que camina sobre la escalera eléctrica cuando está en funcionamiento?

(a) 36 (b) 75 (c) 45 (d) 30 (e) 50

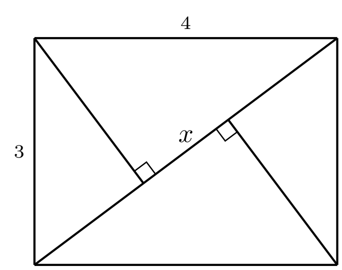
Problema 75. Hay 10 puntos en el plano de manera que exactamente 5 de ellos están en una línea y no existe otra línea que contenga 3 o más de los puntos. ¿Cuántos triángulos pueden dibujarse con vértices en estos puntos?

(a) 20 (b) 50 (c) 70 (d) 100 (e) 110

Problema 76. La lista $(1, x_2, x_3, ...x_n, 1000)$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores (por ejemplo $x_4 = 1 + x_2 + x_3$). ¿Cuánto vale x_2?

(a) 124 (b) 125 (c) 225 (d) 224 (e) 120

Problema 77. En el rectángulo de la figura se trazó una diagonal y luego las perpendiculares de los otros dos vértices a dicha diagonal. ¿Cuál es la distancia entre los dos pies de las perpendiculares?



(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{7}{5}$ (e) 1

Problema 78. ¿Cuántos números de 4 dígitos cumplen que la suma de sus dos últimos dígitos y el número formado por los dos primeros dígitos es igual al número formado por los dos últimos dígitos? (Ejemplo: Un número que satisface la condición es 6370, pues $7 + 0 + 63 = 70$.)

(a) 10 (b) 45 (c) 50 (d) 80 (e) 90

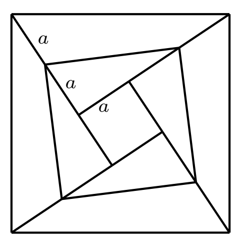
Problema 79. Tenemos que $a + b + c = 7$ y que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10} .$$

¿Cuánto vale $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$?

(a) $\frac{19}{10}$ (b) $\frac{17}{10}$ (c) $\frac{9}{7}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) $\frac{10}{7}$

Problema 80. Dentro de un cuadrado se construyen otros cuadrados como se muestra en la figura, de forma que los segmentos señalados miden a. El área del cuadrado más chico es 4. ¿Cuál es el área del cuadrado de en medio?



(a) 8 (b) 12 (c) 16 (d) 20 (e) 24

Problema 81. ¿Cuántos números de 3 dígitos son tales que el producto de sus dígitos es par pero no es un múltiplo de 4? (Nota: 0 se considera un múltiplo de 4 pues $4 \times 0 = 0$.)

(a) 10 (b) 60 (c) 120 (d) 150 (e) 300

Problema 82. Si dos enteros positivos a y b satisfacen la ecuación

$$a + \frac{1}{2 + \frac{1}{b}} = \frac{12}{5} ,$$

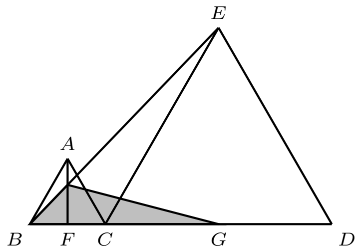
¿cuál es el valor de $a + b$?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 83. ¿De cuántas formas se pueden escoger dos números no consecutivos de entre los números del 1 al 8?

(a) 16 (b) 20 (c) 21 (d) 25 (e) 28

Problema 84. En la figura los triángulos ABC y CDE son equiláteros, C es el punto sobre BD tal que $BC = 1$ y $CD = 4$, y F y G son los puntos medios de BC y CD, respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 2 (d) $2\sqrt{3}$ (e) $3\sqrt{2}$

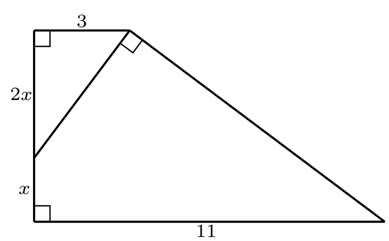
Problema 85. Un entero p es primo si $p \geq 2$ y los únicos divisores de p son 1 y p. Sea M el producto de los primeros 2002 primos. ¿Cuántos 0's hay al final de M?

(a) 0 (b) 1 (c) 10 (d) 20 (e) 100

Problema 86. Diez equipos jugaron en un torneo de futbol (cada equipo se enfrentó exactamente una vez a cada uno de los otros). En cada juego el ganador obtuvo 3 puntos y el perdedor obtuvo 0 puntos. En caso de empate cada uno de los equipos obtuvo 1 punto. Si el total de puntos obtenidos por todos los equipos fue 130, ¿Cuántos partidos del torneo fueron empates?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 5

Problema 87. En la siguiente figura, ¿cuánto mide x?



(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) $\sqrt{3}$ (e) $3\sqrt{2}$

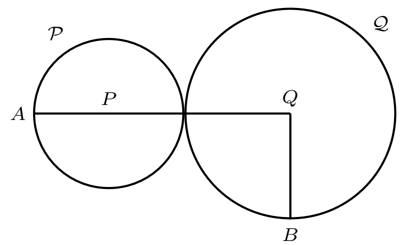
Problema 88. Esther escribe la lista de todos los números formados por los dígitos 1, 2, 3 y 4 sin repetir. ¿Cuánto vale la suma de todos los números en la lista?

(a) 55550 (b) 99990 (c) 66660 (d) 100000 (e) 98760

Problema 89. ¿Cuántos enteros positivos n hay tales que $\frac{2n+19}{n+2}$ es un entero?

(a) 3 (b) 5 (c) 15 (d) 19 (e) más de 19

Problema 90. En la figura P y Q son los centros de los círculos tangentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, la línea PQ corta al círculo $\mathcal{P}$ en A y el radio QB es perpendicular a PQ. Si la suma de las áreas de los círculos es 10π y el área de AQB es 8, ¿cuál es la longitud de PB?

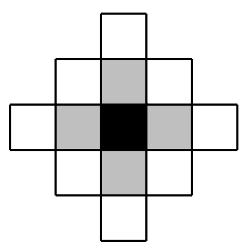


(a) 5 (b) $\sqrt{26}$ (c) 6 (d) $\sqrt{40}$ (e) 3π

Problema 91. ¿Cuántos números del 1 al 10^{2002} cumplen que la suma de sus cifras es 2?

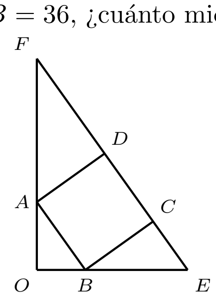
(a) 2002002 (b) 2003001 (c) 2004002 (d) 2005003 (e) 2007006

Problema 92. En un cultivo de bacterias con forma de cuadrícula hay un sólo cuadro que está infectado, pero cada segundo que pasa todos los cuadros que comparten un lado con algún cuadro que esté infectado también quedan infectados. Después de 10 segundos, ¿cuántos cuadros infectados hay? (En la figura se muestran los cuadros que están infectados después de 2 segundos, en el primer segundo se infectan los grises, en el segundo los blancos.)



(a) 180 (b) 181 (c) 200 (d) 210 (e) 221

Problema 93. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y OEF un triángulo rectángulo. Si $OA = 48$ y $OB = 36$, ¿cuánto mide EF?

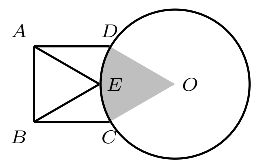


(a) 176 (b) 180 (c) 185 (d) 188 (e) 190

Problema 94. En una mesa hay 67 canastas vacías numeradas del 1 al 67. Sabemos que Toño puso una pelota en cada canasta con número par, Pilar puso una pelota en cada canasta con número múltiplo de 3 y Celia puso una pelota en cada canasta con número múltiplo de 11. ¿Cuántas parejas de canastas con números consecutivos tienen exactamente 3 pelotas entre las 2?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 95. En la figura los puntos C, D y E están sobre una circunferencia con centro en O, $ABCD$ es un cuadrado y ABE un triángulo equilátero. Si el área del círculo es 1, ¿Cuál es el área de la región sombreada?

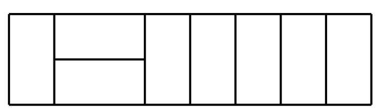


(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{\pi}$ (d) $\frac{\pi}{2}$ (e) $\frac{3\pi}{4}$

Problema 96. En una lista están escritos los números del 1 al 16. ¿Cuál es la menor cantidad de ellos que hay que tachar para que al multiplicar cualesquiera 2 de los que queden el resultado no sea el cuadrado de un número entero?

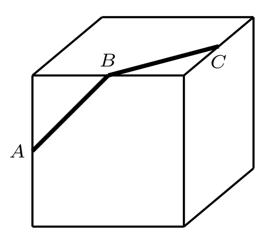
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 97. Una cuadrícula de 8×2 quiere cubrirse con 8 fichas de 2×1 de manera que todos los cuadritos estén cubiertos (en la figura de abajo puede verse una posible forma de hacerlo). ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?



(a) 27 (b) 34 (c) 39 (d) 44 (e) 50

Problema 98. En la figura A, B, y C son los puntos medios de las aristas del cubo. ¿Cuánto mide el ángulo entre los segmentos AB y BC?

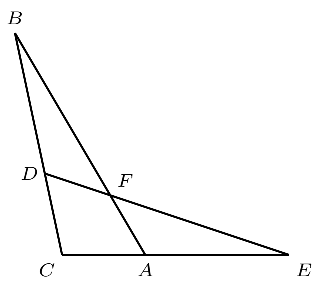


(a) 90^o (b) 100^o (c) 110^o (d) 120^o (e) 135^o

Problema 99. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen $3n^2 + 7^n = 2002n$?

(a) ninguno (b) 1 (c) 3 (d) 7 (e) una infinidad

Problema 100. En la figura, los triángulos ABC y DEC son iguales, $DC = AC = 1$ y $CB = CE = 4$. Si el área del triángulo ABC es S, entonces el área del cuadrilátero $AFDC$ es igual a



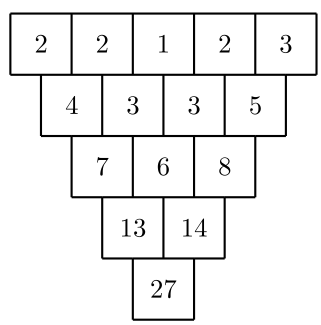
(a) $\frac{S}{2}$ (b) $\frac{S}{4}$ (c) $\frac{S}{5}$ (d) $\frac{2S}{5}$ (e) $\frac{2S}{3}$

Soluciones de los Problemas

Solución 1. Del 1 al 24 hay 3 números que terminan en 2 (2, 12 y 22) y 5 que empiezan con 2 (20, 21, 22, 23 y 24). En total el 2 aparece $3+5=8$ veces. La respuesta es (c).

Solución 2. El resultado no puede ser mayor a $1+2+3+4+5=15$. Excepto 17 todas las otras opciones son posibles: $1=+1+2-3-4+5$, $3=+1-2+3-4+5$, $7=-1+2-3+4+5$ y $13=-1+2+3+4+5$. La respuesta es (e).

Solución 3. Al escribir todos los números la pirámide queda como se muestra abajo.



La respuesta es (c).

Solución 4. Sabemos que la balanza está equilibrada cuando en un plato hay 2 melones y en el otro 1 melón y 6 naranjas. Si quitamos un melón de cada lado tendremos que la balanza está equilibrada y, por lo tanto, 1 melón pesa lo mismo que 6 naranjas. La respuesta es (e).

Solución 5. El lado TC mide $10-3=7$ cm. Como $AD=MT=BC=10$ cm, basta observar que la diferencia entre el perímetro de $MBTC$ y el de $AMTD$ es $2(MB-AM)=2\cdot 4=8$ cm. La respuesta es (b).

Solución 6. La primera vez quité 200 tarjetas, dejando 1802. La segunda vez eliminé 180 tarjetas y me quedaron 1622. La respuesta es (a).

Solución 7. De los 10 amigos que tienen 16 años debe haber 5 o más con los ojos cafés (de no ser así habría más de 5 amigos con los ojos azules en el grupo, y eso no es cierto); es fácil ver que cualquiera de estas opciones es posible. La respuesta es (a).

Solución 8. Mi canario se comió $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$ del total de alpiste, así que queda $\frac{1}{4}$ de la cantidad inicial. La respuesta es (b).

Solución 9. Cada lado del cuadrado I mide $\frac{16}{4}=4$ cm, y cada lado del cuadrado II mide $\frac{24}{4}=6$ cm. Así, cada lado del cuadrado III mide $4+6=10$ cm, cada lado del cuadrado IV mide $10+6=16$ cm y el perímetro de éste último es $16\times 4=64$ cm. La respuesta es (c).

Solución 10. Si tres cuartas partes son hombres entonces una cuarta parte son mujeres, así que el número de hombres es el triple que el de mujeres. La respuesta es (e).

Solución 11. Flor y Cristina nacieron el mismo mes, así que ambas nacieron en marzo. El número de día del cumpleaños de Cristina y Daniela es el mismo, por lo tanto cada una cumple años en un día 20. Con esos datos podemos deducir que Cristina nació en marzo 20, Flor en marzo 1, Daniela en julio 20 y Blanca en mayo 17. La respuesta es (a).

Solución 12. Erika utilizó $6\times 3=18$ cerillos en el triángulo. A Manuel le quedan $60-18=42$ cerillos. Como un lado del rectángulo tiene 6 cerillos, el otro tiene $\frac{42-(6\times 2)}{2}=\frac{42-12}{2}=\frac{30}{2}=15$ cerillos. La respuesta es (c).

Solución 13. En (c) no hay conexión entre el par de hoyos a la izquierda y el par de hoyos a la derecha. Para que esta configuración fuera posible debería haber una conexión al frente, pero no la hay. La respuesta es (c).

Solución 14. Digamos que n niños llegaron antes que Nacho. Tenemos que $2\times n$ es la cantidad de niños que llegaron después de Nacho, así que n es la tercera parte del total de niños que participaron sin contar a Nacho; es decir, $n=\frac{28-1}{3}=\frac{27}{3}=9$. La respuesta es (e).

Solución 15. El costo de 4 manzanas, 4 naranjas y 4 plátanos es $\$15.40+\$17.00=\$32.40$. Entonces, por una manzana, una naranja y un plátano debe pagarse $\$\frac{1}{4}(32.40)=\$8.10$. La respuesta es (e).

Solución 16. Entre Tere, Edgar y Liz se comieron 6 galletas. De las 14 restantes, César tuvo que haberse comido una cantidad mayor o igual a 5 (pues $\frac{14}{3} > 4$). Pero si César se hubiera comido exactamente 5 galletas alguno de los dos niños restantes se habría comido al menos 5 galletas (pues quedarían $14-5=9$ galletas para 2 niños), así que César debió comer al menos 6 galletas. La respuesta es (d).

Solución 17. Cuando Alicia recorra $\frac{1}{4}$ de pista (y llegue a E) su hermano habrá recorrido $\frac{3}{4}$ en sentido contrario, y ésta será la primera vez que se encuentren. La respuesta es (e).

Solución 18. Rosy tardó 37 minutos en llegar a su casa, así que Carla debió tardar 25 y salir a las 7:20 a.m. La respuesta es (b).

Solución 19. El proceso que da origen a 45 es (en orden inverso): $45 \leftarrow 43 \leftarrow 34 \leftarrow 17$. Es fácil ver que las otras opciones no cumplen. La respuesta es (e).

Solución 20. Llamemos v a la edad de Vero. Entonces la edad de Ceci es $v-7$ y dentro de 4 años Ceci tendrá $v-3$ años y Vero tendrá $v+4$. Nos dicen que $2(v-3) = v+4$, así que $v = 10$ y $(v-7)+v = 13$. La respuesta es (a).

Solución 21. 187590 es el número con todas sus cifras distintas que indicará el contador la próxima vez; para entonces habré recorrido $90-69=21$ kilómetros en mi carro. La respuesta es (b).

Solución 22. Supongamos que el área de cada cuadrado es 1. Dividiendo el primer cuadrado en cuatro cuadraditos iguales (figura (a)) observamos que $S_1 = \frac{1}{2}$. Dividiendo el segundo y el cuarto cuadrado en dos rectángulos iguales (figura (b)) tenemos que $S_2 = S_4 = \frac{1}{2}$. En la figura (c) tenemos que el triángulo sombreado es más pequeño que la mitad del cuadrado, así que $S_3 < \frac{1}{2} = S_1 = S_2 = S_3$.

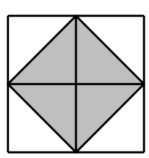


figura (a)

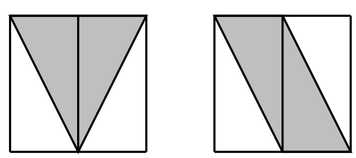


figura (b)

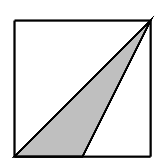


figura (c)

La respuesta es (b).

Solución 23. Ocho cajas de fruta cuestan al menos 160 pesos (si todas fueran de manzanas). Por cada caja de duraznos hay que agregar $40-20=20$ pesos; como nos quedan $230-160=70$ pesos, a lo más podríamos comprar 3 cajas de duraznos y una de peras. La respuesta es (c).

Solución 24. En 1 hora un gato y medio se come 1 ratón, así que en 15 horas un gato y medio se come 15 ratones. Quince gatos son 10 veces un gato y medio $\left(\frac{15/1}{3/2} = 10\right)$, así que en 15 horas pueden comerse $10 \times 15 = 150$ ratones. La respuesta es (e).

Solución 25. Del 1 al 100 hay 33 múltiplos de 3 y 10 números que terminan en 3. Los números 3, 33, 63 y 93 están en ambas categorías, así que hay $33+10-4$ números. La respuesta es (d).

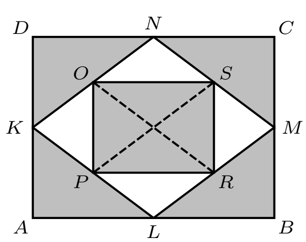
Solución 26. La diferencia entre dos números consecutivos de la lista es $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$, y entonces $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$. La respuesta es (b).

Solución 27. La mezcla tiene $\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$ de sal. La respuesta es (d).

Solución 28. Cuando el número de dígitos es 6, la cantidad total de números telefónicos es $9 \cdot 10^5 = 900000 < 987654$. En cambio, cuando el número de dígitos es 7, hay 9000000 posibilidades para los números telefónicos, y este número sobrepasa 987654. La respuesta es (e).

Solución 29. Cada hora el reloj de Verónica va 3 minutos más adelantado que el de Alejandro, así que le tomará 20 horas ir una hora más adelante. La respuesta es (a).

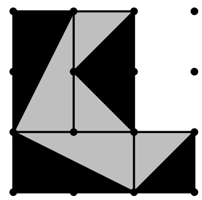
Solución 30. El área del cuadrilátero $NKLM$ es $\frac{1}{2}$, así que la suma de las áreas de los 4 triángulos DNK, NCM, MBL y KLA es $\frac{1}{2}$. Dividiendo el cuadrilátero $OPRS$ en cuatro cuadriláteros iguales como se muestra en la figura, se observa que el área del rectángulo $OPRS$ es la mitad del área de $NKLM$, o sea $\frac{1}{4}$. De lo anterior tenemos que el área sombreada es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.



La respuesta es (d).

Solución 31. La suma de los dígitos de cualquier número de 3 cifras es menor o igual a $9 + 9 + 9 = 27$. Sumando los dígitos de 19 obtenemos 10, que es la mayor suma posible entre 1 y 27. Es suficiente con encontrar un número de 3 dígitos que cumpla que la suma de sus dígitos sea 19, como 991. La respuesta es (b).

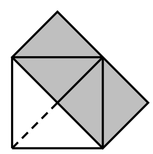
Solución 32. En la figura la región sombreada de negro tiene la misma área que la gris. Si la suma de las dos áreas es 7, el área original es $\frac{7}{2}$.



La respuesta es (b).

Solución 33. Por el Teorema de Pitágoras la diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, así que el número que buscamos es $2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.

De otra manera: la cantidad pedida es igual al área de la figura sombreada, que es igual al área del cuadrado.

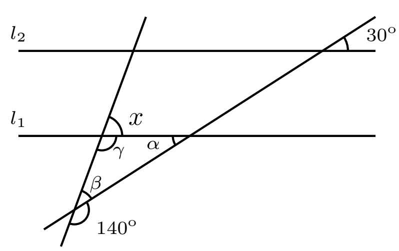


La respuesta es (c).

Solución 34. El volumen de la mezcla de agua con sal es $\frac{12}{11}$ dm^3 del volumen original, así que basta quitar una doceava parte del volumen de la mezcla para tener nuevamente $\frac{11}{11}$ dm^3. La respuesta es (b).

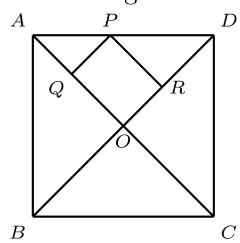
Solución 35. Observemos que siempre que se corta una pieza añadimos 2 piezas más a la cuenta. De esta manera, en el n-ésimo minuto el número de piezas será $1+2n$. Es suficiente entonces encontrar una n tal que $1+2n\geq 317$. La respuesta es (e).

Solución 36. Pensemos en los ángulos α, β y γ marcados en la figura. Claramente $\alpha=30$ (porque l_1 y l_2 son paralelas) y $\beta=180^o-140^o=40^o$. Por lo anterior tenemos que $\angle x=180^o-\angle\gamma=180^o-(180^o-\alpha-\beta)=\alpha+\beta=30^o+40^o=70^o$.



La respuesta es (e).

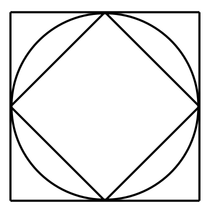
Solución 37. Como el triángulo AQP es rectángulo y el $\angle QAP = 45^o$, entonces AQP es isósceles y $AQ = PQ$. Análogamente $PR = RD$. Tenemos que $PQ + QO + OR + RP = AQ + QO + OR + RD = AO + OD = AO + OC = AC = \sqrt{2}$, pues es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.



La respuesta es (c).

Solución 38. Los integrantes de la familia Canguro son 7: Papá, Mamá, 3 hijas y 2 hijos. La respuesta es (b).

Solución 39. Rotando el cuadrado como se muestra en la figura, es claro que el área del cuadrado grande es 2 veces el área del cuadrado chico.



La respuesta es (d).

Solución 40. Contemos primero todos los 1's que se utilizan al escribir todos los números que terminan en 5. Escribimos 100 1's en el lugar de los millares: (**1**005, **1**015, $\cdots$, **1**995); 20 1's en el lugar de las centenas: (**1**05, **1**15, $\cdots$, **1**95 y 1**1**05, 1**1**15, $\cdots$, 1**1**95) y 20 1's en el lugar de las decenas (**1**5, 1**1**5, $\cdots$, 19**1**5), así que en total escribimos 100+20+20=140 1's. De la misma manera podemos ver que escribimos otros 140 1's cuando escribimos los números terminados en 0. En total utilizamos 280 1's.

De otra manera: Observemos que un múltiplo de 5 menor a 2000 se obtiene escribiendo un número positivo menor a 200 y agregándole un 0 o un 5 al final (el 2000 no lo tomamos en cuenta porque no utiliza ningún 1). Se escriben tantos 1's en la lista como los 1's que se necesitan para escribir dos veces todos los números del 1 al 199. Es fácil ver que del 1 al 99 se escriben 20 1's, así que del 100 al 199 se escribirán otros 20 1's aparte del 1 al principio de cada número. En total se escribirán $2 \cdot (20 + 20 + 100) = 280$.

La respuesta es (c).

Solución 41. Tenemos que $\angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 90^o + 60^o = 150^o$. Como el triángulo ADE es isósceles, entonces $\angle DEA = \frac{180^o - \angle ADE}{2} = \frac{180^o - 150^o}{2} = \frac{30^o}{2} = 15^o$. Por simetría $\angle DEA = \angle CEB$. Finalmente $\angle \alpha = \angle AEB = 60^o - 15^o - 15^o = 30^o$. La respuesta es (b).

Solución 42. Si x es el precio del jamón antes de subir, tenemos la relación $x = 0.8(x + 12)$, de donde $x = 48$. La respuesta es (b).

Solución 43. Un número es múltiplo de 4 cuando el número formado por las dos últimas cifras lo es, de aquí que la última carta debe ser par (2 o 6). Como 2 está más cerca del final que 6 y 4 es divisor de 92 es claro que 635792 es el múltiplo de 4 que podemos obtener con el menor número de movimientos. Necesitaremos 3 movimientos en total: pasaremos el 2 al final con los intercambios $2 \leftrightarrow 5$ (aquí el número es 635279), luego $2 \leftrightarrow 7$ (obtenemos 635729) y, finalmente, $2 \leftrightarrow 9$ (para obtener 635792). La respuesta es (b).

Solución 44. Llamemos t al tiempo en horas que el ciclista tardó en bajar. Tenemos que $12(t + \frac{16}{60}) = 20t$, de donde $t = \frac{2}{5}$ horas. El camino mide $20t = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8$ m. La respuesta es (a).

Solución 45. Sabemos que tres caras del cubo quedaron intactas. Juntas, las dos áreas sombreadas en la figura A tienen la misma área que otra cara del cubo. De la misma manera podemos agrupar y sumar las áreas restantes como se muestra en B y en C para obtener superficies iguales a las caras del cubo original. Tenemos entonces que la superficie de la pieza es igual a la del cubo. Si llamamos a a una arista del cubo, tenemos que $a^3 = 8 = 2^3$, así que $a = 2$m y la superficie del cubo es $6 \times 2^2 = 24\text{m}^2$. La respuesta es (b).

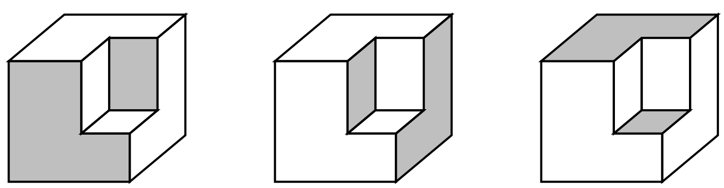


Fig. A Fig. B Fig. C

Solución 46. Sea n el número de ratones. Entonces tenemos

$$\left(\frac{25}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{75}{100} \cdot \frac{20}{100}\right) n = 99,$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) n = 99.$$

Simplificando obtenemos $\frac{11}{40} n = 99$, y entonces $n = 360$. La respuesta es (a).

Solución 47. Como el triángulo ABC es isósceles sabemos que

$$\angle DCB - \angle DBC = 30^{\text{o}}. \tag{1}$$

Por otra parte $\angle ADB = 180^{\text{o}} - 30^{\text{o}} - 40^{\text{o}} = 110^{\text{o}}$, de donde $\angle CDB = 70^{\text{o}}$ y

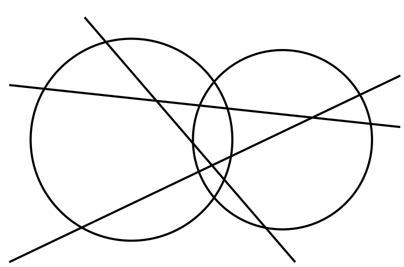
$$\angle DCB + \angle DBC = 180^{\text{o}} - 70^{\text{o}} = 110^{\text{o}}. \tag{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) tenemos que $\angle DCB = 70^{\text{o}} = \angle CDB$, y por lo tanto el triángulo DBC es isósceles y $DB = 1$. La respuesta es (a).

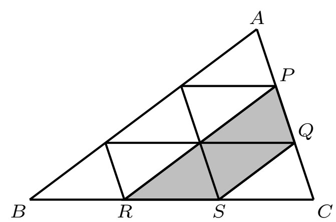
Solución 48. Como todos los cuadrados pesan igual, si quitamos un cuadrado de cada platillo no alteraremos el orden de los pesos. La posición de A y B nos indica que un triángulo pesa menos que un círculo, así que D pesa menos que B pero más que A. La respuesta es (a).

Solución 49. La red esta formada por tres franjas horizontales, de manera que la de arriba tiene 11 hexágonos, la de enmedio 10 y la de abajo 11. Sabemos que 32 hexágonos tienen en total $32 \times 6 = 192$ lados. En la red muchos hexágonos tienen lados en común, los únicos lados que no forman parte de 2 hexágonos son los que describen el contorno de la red, que son 4 por cada hexágono en una esquina ($4 \times 4 = 16$), uno por cada hexágono de la orilla en la franja de en medio ($2 \times 1 = 2$) y 2 por cada uno de los hexágonos en la franja de arriba y abajo que no están en las esquinas ($18 \times 2 = 36$), así que en total son $16 + 2 + 36 = 54$. Cada uno de los lados restantes pertenece a 2 hexágonos, así que exactamente se usaron $\frac{192-54}{2} + 54 = 123$ barritas. La respuesta es (b).

Solución 50. Entre 3 rectas hay como máximo 3 puntos de intersección. Un círculo puede intersectar a una recta a lo más en 2 puntos. Si cada círculo intersecta a cada recta en 2 puntos, tenemos en total $2 \cdot 6 = 12$ intersecciones de este tipo. Finalmente, dos círculos se intersectan a lo más en 2 puntos. De lo anterior tenemos que la cantidad de intersecciones que puede obtenerse con 2 círculos y tres líneas debe ser menor o igual a $3 + 12 + 2 = 17$. En la figura se muestra que es posible encontrar un dibujo con esas características. La respuesta es (d).



Solución 51. Dibujando líneas paralelas a los lados que pasen por P, Q, R y S obtenemos 9 triángulos iguales, de manera que el área sombreada es $\frac{3}{9}$. La respuesta es (b).



Solución 52. Sabemos que 3 es el único factor común en la descomposición en primos de a y b. Como el cociente es $0.4 = \frac{2}{5}$, entonces $a = 2 \times 3$ y $b = 5 \times 3$. La respuesta es (e).

Solución 53. Dos círculos pueden intersectarse a lo más en 2 puntos. Como hay solamente 10 parejas de círculos, la cantidad de intersecciones debe ser menor o igual a 20, así que no puede ser 22. Es fácil ver que las otras cantidades de intersecciones son posibles. La respuesta es (e).

Solución 54. Notemos que el área de APQ es igual al área de PQC (que es 1) pues $AQ = QC$ y la altura desde P de ambos triángulos es la misma. Comparemos las áreas de PQC y PCB. Tenemos que $PQ = \frac{1}{2}BC$, y la altura de PQC desde C coincide con la altura de PCB desde P pues $PQ||BC$. Por lo anterior, el área de PCB es el doble del área de PQC, o sea 2. El área de ABC es la suma de las áreas de APQ, PQC y PCB, así que es igual a $1+1+2 = 4$. La respuesta es (c).

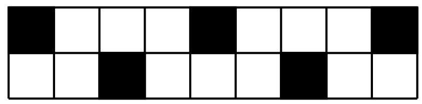
Solución 55. Como cada paquete se pesó con otros 3, al hacer la suma de todos los pesos $(5 + 6 + 8 + 9 + 11 + 12 = 51)$ sumamos tres veces el peso de cada paquete, así que el peso de los cuatro paquetes es $\frac{51}{3} = 17$. La respuesta es (b).

Solución 56. Entre dos domingos pares hay 14 días. Como entre el primer y el último domingo par hubo 28 días, el primer domingo debió ser un número par estrictamente menor a 4 (pues $28 + 4 = 32$), así que fue día 2. Tenemos entonces que el día $2 + 14 = 16$ fue domingo, así que el día 20 fue jueves. La respuesta es (d).

Solución 57. Sean r y R los radios de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. Como el área del rectángulo es $(2R+2r)R = 15$, tenemos que el área de PQT es $\frac{(R+r)R}{2} = \frac{15}{4}$. La respuesta es (b).

Solución 58. Cada minuto la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce 99m. Por lo tanto se necesitan $\frac{990}{99} = 10$ min. La respuesta es (c).

Solución 59. Cada casilla negra tiene a lo más tres vecinas blancas así que se necesita pintar al menos 5 casillas negras para que se cumpla la condición. En la figura se muestra una coloración del tablero con 5 casillas negras que cumple la condición pedida. La respuesta es (a).



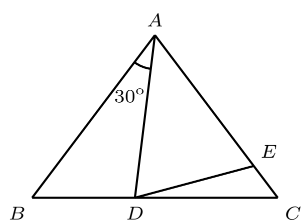
Solución 60. Tenemos que $9a = b$ y $3b = c$, de donde $b - a = 9a - a = 8a$ y $c - b = 3b - b = 2b$. De lo anterior $\frac{b-a}{c-b} = \frac{8a}{2b} = 4 \cdot \frac{a}{b} = 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

De otra manera:

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b\left(1-\frac{a}{b}\right)}{c\left(1-\frac{b}{c}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}$$

La respuesta es (d).

Solución 61.



El $\angle EDC = 180 - \angle ADE - \angle ADB = 180 - \angle AED - \angle ADB$ (porque ADE es isósceles). Por otro lado $\angle AED = \angle ECD + \angle EDC$, y entonces $\angle EDC = 180^o - \angle ECD - \angle EDC - \angle ADB$. De la ecuación anterior $2\angle EDC = 180^o - \angle ECD - \angle ADB = 180^o - \angle ABD - \angle ADB$ (porque ABC es isósceles). Como $\angle ABD + \angle ADB + 30^o = 180^o$ entonces $2\angle EDC = 30^o$ y $\angle EDC = 15^o$. La respuesta es (c).

Solución 62. El múltiplo más pequeño de 21 y 9 es 63, que tiene 6 divisores (1, 3, 7, 9, 21 y 63) y cada uno de ellos divide a n. La respuesta es (d).

Solución 63. Si x es la cantidad de personas que iban en el barco antes de parar en la isla tenemos que $60x = (x+30)50$, de donde $x = 150$. La respuesta es (e).

Solución 64. Notemos que los cuadrados que están a distancia 2002 desde la esquina superior izquierda están en una diagonal a 45° que tiene solamente 1's y 3's. La respuesta es (b).

Solución 65. Tenemos que

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{6ab}{2ab} = 3\ .$$

La respuesta es (a).

Solución 66. Trazando algunas líneas sobre el cuadrado desdoblado, como se muestra en la figura A, podemos ver que $\angle QAP = 90^o$ y $\angle APQ = 45^o$ (pues $AP = AQ$ ya que el doblez es simétrico). Como el triángulo PBC se dobla sobre la línea CP, tenemos que $\angle BPC = \angle CPO$, y entonces $\angle BPC = \frac{180^o-45^o}{2} = 67.5^o$. En la figura B se muestra el pentágono una vez que se han hecho todos los dobleces. Como la suma de los ángulos internos de un pentágono es 540^o, tenemos que $540^o = \angle QAP + 2\angle APL + 2\angle PLM = 90^o + 2(45^o + 67.5^o) + 2\angle PLM = 315^o + 2\angle\alpha$, de donde $\angle\alpha = \frac{225}{2} = 112.5^o$ La respuesta es (d).

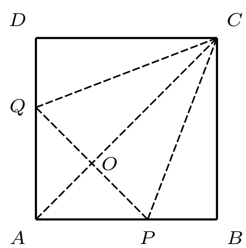


Fig. A

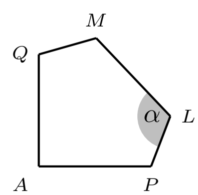


Fig. B

Solución alternativa: Si después de haber formado el pentágono desdoblamos el papel obtendremos las marcas de dobleces que se muestran en la fígura C. Por simetría, los cuatro ángulos en el vértice G son iguales y, por lo tanto, cada uno mide 90^o. Los cuatro ángulos en el vértice C también son iguales, así que $\angle ACP = \frac{90}{4} = 22.5^o$. Finalmente, $\angle\alpha = 90^o + 22.5^o = 112.5^o$.

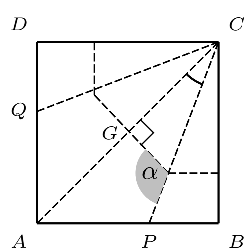


Fig. C

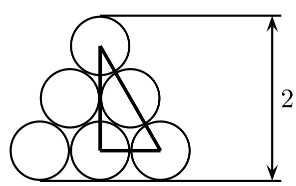
Solución 67. Como $3b$ siempre es un múltiplo de 3 entonces $a+c$ debe ser un múltiplo de 3. Por el criterio de divisibilidad entre 3 deducimos que el número de 2 dígitos ac debe ser también un múltiplo de 3. Hay 90 números de 2 dígitos, y $\frac{1}{3}$ de ellos son múltiplos de 3, o sea 30. Como hay 10 posibilidades para elegir el dígito b, en total hay $30 \times 10 = 300$ números que cumplen la condición. La respuesta es (b).

Solución 68. Siempre que hay un grupo de 4 se juegan 6 partidos. En la primera ronda hay $\frac{16}{4} = 4$ grupos; en la segunda hay $\frac{8}{4} = 2$; en la tercera hay $\frac{4}{4} = 1$, y después viene el último partido. En total se juegan $6 \cdot (4+2+1)+1 = 43$ partidos. La respuesta es (c).

Solución 69. Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo marcado en la figura tenemos que $(2r)^2+(2-2r)^2 = (4r)^2$, de donde obtenemos la ecuación de segundo grado $8r^2 + 8r - 4 = 0$. Aplicando la fórmula general y desechando la solución negativa:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-8 + \sqrt{64+128}}{16} \\ &= \frac{-8 + \sqrt{64 \cdot 3}}{16} \\ &= \frac{-8 + 8\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

La respuesta es (a).

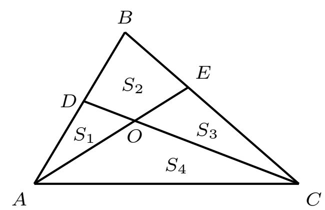


Solución 70. Llamemos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ a los círculos de acuerdo con la numeración de sus puntos. Como el número de puntos en $\mathcal{A}$ es un número impar (25) todas las casillas en $\mathcal{A}$ son accesibles y la ficha puede pasar a lo otros círculos a través de $A_{22} = C_1$ y $A_1 = B_{11}$. Por otro lado $\mathcal{B}$ tiene una cantidad par (12) de puntos. Recorriendo $\mathcal{B}$ a partir de B_{11} uno puede alcanzar todos los puntos impares de $\mathcal{B}$, y como el otro punto de entrada a $\mathcal{B}$ (B_1) es también un punto con número impar, los puntos con números pares en $\mathcal{B}$ son inaccesibles. También $\mathcal{C}$ tiene una cantidad par de puntos (18), y uno puede entrar por $A_{22} = C_1$ y cubrir todos los puntos con números impares. También es posible entrar a $\mathcal{C}$ por $B_1 = C_{16}$ y cubrir todos los puntos con números pares. De esta manera, todos los puntos de $\mathcal{C}$ son accesibles. La respuesta es (b).

Solución 71. Supongamos que en total hay n términos en la suma, entonces $155 = 2 + 5 + 8 + ... + x = (3-1) + (6-1) + (9-1) + \cdots + (3n-1) =$

$(3+6+9+\cdot+3n)-n=3(1+2+3+\cdots+n)-n=\frac{3n(n+1)}{2}-n$, de donde $n=10$ y $x=3\cdot 10-1=29$. La respuesta es (c).

Solución 72. Si $S_1=S_2=S_3=S_4$ entonces $S_1+S_4=S_2+S_3$, así que los triángulos ADC y BDC deben tener la misma área. Como los dos tienen la misma altura desde C, entonces $AD=DB$ y D debe ser el punto medio de AB. Si llamamos O al punto de intersección de AE y CD, tenemos que el área del triángulo DBO debe ser S_1, lo cual no puede ocurrir pues el área del triángulo DBO es menor estrictamente que S_2, y S_2 y S_1 eran iguales. Por esta razón la situación $S_1=S_2=S_3=S_4$ no puede darse nunca.



La respuesta es (a).

Solución 73. La elección de los tres colores diferentes puede hacerse de $5\times 4\times 3=60$ maneras. Como la rotación de los números elegidos da la misma ficha, debemos dividir entre 3. La respuesta es (e).

Solución 74. Cuando la escalera está encendida, en un segundo recorro $\frac{1}{60}$ de la distancia entre un piso y otro, mientras que si yo camino sobre la escalera apagada en un segundo recorro $\frac{1}{90}$ de la distancia entre un piso y otro. Si la escalera está encendida y yo camino sobre ella recorro en un segundo $\frac{1}{60}+\frac{1}{90}=\frac{5}{180}=\frac{1}{36}$ de la distancia entre los pisos, por lo que tardaré 36 segundos en recorrer la distancia total. La respuesta es (a).

Solución 75. Llamemos $\mathcal{L}$ a la línea sobre la que están los 5 puntos. Hay tres tipos de triángulos que podemos construir: triángulos con un lado sobre $\mathcal{L}$, triángulos con un solo vértice sobre $\mathcal{L}$ y triángulos que no tienen ningún vértice sobre $\mathcal{L}$. De los triángulos del primer tipo, podemos elegir el lado que estará sobre $\mathcal{L}$ de entre todas las posibles parejas de puntos sobre la línea (que son 10) y nos quedan 5 puntos fuera de la línea para completar el tercer vértice del triángulo, por lo que hay $5\times 10=50$ triángulos del primer tipo. Para el segundo tipo basta con elegir un punto de entre los 5 que hay sobre $\mathcal{L}$ y los dos restantes de entre las 10 parejas de puntos que están fuera de $\mathcal{L}$. Para el tercer tipo nos basta elegir 3 puntos de entre los 5 que están fuera de $\mathcal{L}$, lo que puede hacerse de 10 formas (basta con elegir la pareja de puntos que no serán vértices del triángulo). Así, en total hay $50+50+10=110$ triángulos. La respuesta es (e).

Solución 76. Notemos que, en términos de x_2, los términos de la sucesión se ven como sigue:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & (x_2+1) \\ x_4 & = & 2(x_2+1) \\ x_5 & = & 2^2(x_2+1) \\ & \vdots & \\ x_k & = & 2^{k-3}(x_2+1) \\ & \vdots & \\ x_{n+1} & = & 2^{n-2}(x_2+1) = 1000 \end{array}$$

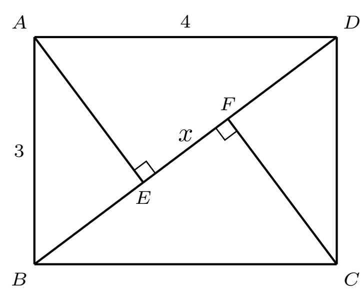
Como la sucesión es la más larga posible, $n-2$ debe ser la mayor potencia de 2 que divida a 1000, o sea que $n-2=3$ (pues $1000 = 2^3 \cdot 5^3$). De lo anterior $x_{2+1} = \frac{1000}{2^3} = 125$ y por lo tanto $x_2 = 124$. La respuesta es (a).

Solución 77. Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que la diagonal BD mide $\sqrt{3^2+4^2} = 5$. Por simetría $BE = DF$, lo que nos dice que $EF = 5-2BE$ y solamente necesitamos encontrar la medida de BE para terminar el problema. Mostramos dos formas de hacerlo:

Primera forma. El área del triángulo ABD es $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$, por lo que su altura $AE = \frac{6\cdot 2}{5} = \frac{12}{5}$. Aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras tenemos que $BE = \sqrt{3^2 - \frac{12}{5}^2} = \frac{9}{5}$.

Segunda forma. En la figura los triángulos ABD y EBA son semejantes, lo cual implica que $BE = \frac{AB\cdot AB}{BD}$, o sea $BE = \frac{3\cdot 3}{5} = \frac{9}{5}$.

Para terminar calculemos la medida del segmento EF, que es $5 - 2\frac{9}{5} = \frac{7}{5}$.



La respuesta es (d).

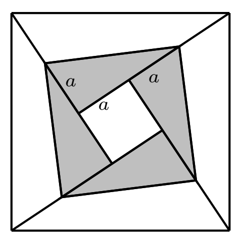
Solución 78. Sea $abcd$ un número de 4 dígitos. Queremos que $10a+b+c+d = 10c+d$, así que $10a+b = 9c$ y d puede tomar cualquiera de los 10 valores del 0 al 9. Considerando las 8 posibilidades para c ($c = 2, 3, \ldots, 9$) determinamos de manera única el número de dos dígitos $9c$, y con ello a y b quedan determinados por el valor de c. Entonces hay $8 \cdot 10 = 80$ números que cumplen la propiedad. La respuesta es (d).

Solución 79. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} &= 1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}\\
\frac{7}{b+c}+\frac{7}{c+a}+\frac{7}{a+b} &= 3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
7\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3 &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
7\cdot\frac{7}{10}-3 &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
\frac{19}{10} &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}
\end{aligned}$$

La respuesta es (a).

Solución 80. El área del cuadrado más pequeño es $a^2 = 4$. Cada uno de los triángulos sombreados en la figura tienen altura a y base $2a$, así que su área es $\frac{2a\cdot a}{2} = a^2 = 4$. El cuadrado mediano está formado por cuatro triángulos y el cuadrado chico, por lo que su área es $4\cdot 4+4 = 20$.



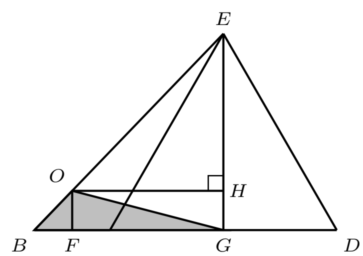
La respuesta es (d).

Solución 81. Como los números que buscamos cumplen que el producto de sus dígitos es par pero no múltiplo de 4, exactamente uno de sus dígitos debe ser 2 o 6. La posición de cada uno de esos dígitos puede elegirse de 3 maneras, así que en total hay 6 posibilidades de poner el 2 o el 6. En las otras dos posiciones debemos colocar cualquiera de los cinco números 1, 3, 5, 7 y 9. Esto último puede hacerse de $5^2 = 25$ formas, así que en total hay $6\times 25 = 150$ números que cumplen. La respuesta es (d).

Solución 82. Como a y b son enteros positivos, para que la igualdad se cumpla a tiene que ser 1 o 2. Por otra parte notemos que $\frac{1}{2+\frac{1}{b}} = \frac{b}{2b+1} < 1$ (pues b es entero positivo), lo que indica que a no puede ser 1. Sustituyendo $a = 2$ en la ecuación encontramos que el valor de b debe ser 2, así que $a+b = 4$. La respuesta es (c).

Solución 83. Hay $\frac{8\times7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ formas de escoger dos números entre 1 y 8; y de entre ellas, hay 7 maneras de elegir una pareja de números consecutivos (una vez elegido el más pequeño el otro ya está determinado). En total hay $28 - 7 = 21$ formas de escoger parejas como se pide. La respuesta es (c).

Solución 84. Llamemos O al punto de interseción de BE y AF. Para calcular el área del triángulo OBG es suficiente calcular el área del triángulo BEG y restarle el área del triángulo OEG. En la figura, observemos que $OH = FG$. Por otro lado, usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $EG = \sqrt{ED^2 - GD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Así, el área sombreada es $\frac{BG\cdot EG}{2} - \frac{FG\cdot EG}{2} = \frac{(BG-FG)\cdot EG}{2} = \frac{(3-5/2)\cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



La respuesta es (a).

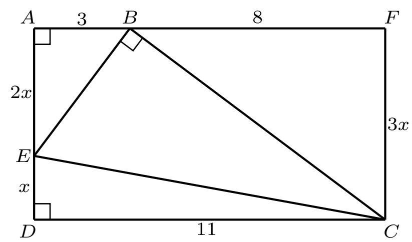
Solución 85. Un número tiene tantos 0's al final como la más alta potencia de 10 que lo divide. En el producto de los 2002 primos se incluye a 2 y al 5 una sola vez, así que 10 divide a M pero 10^2 ya no. La respuesta es (b).

Solución 86. Como cada equipo se enfrentó exactamente una vez a cada uno de los otros, hubo exactamente $\frac{10\cdot9}{2} = 45$ partidos. Si todos los partidos hubieran sido empates se habrían repartido 90 puntos entre los equipos. La diferencia $130-90 = 40$ corresponde a los partidos que no fueron empates. Por lo anterior, hubo 5 empates en el torneo. La respuesta es (e).

Solución 87. Completemos el rectángulo que se muestra en la figura. Presentamos dos soluciones:

Solución 1: Utilizando el Teorema de Pitágoras en los triángulos ABE, BFC y CDE obtenemos que $BE^2 = 9 + 4x^2$, $BC^2 = 64 + 9x^2$ y $EC^2 = 121 + x^2$. Como el triángulo EBC también es rectángulo el Teorema de Pitágoras nos dice que $9 + 4x^2 + 64 + 9x^2 = 121 + x^2$. Resolviendo esta última ecuación obtenemos que $x = 2$ (x tiene que ser positiva porque es una longitud).

Solución 2: Como los triángulos ABE y FCB son semejantes tenemos que $\frac{AE}{BF} = \frac{AB}{FC}$, o sea $\frac{2x}{8} = \frac{3}{3x}$, de donde $6x^2 = 24$ y $x = 2$ (Nuevamente, recordemos que x debe ser positiva).



La respuesta es (c).

Solución 88. Sea a alguno de los dígitos permitidos (1, 2, 3 y 4). Puedo acomodar los tres dígitos restantes de 6 maneras distintas para construir números con exactamente 3 dígitos diferentes. Si a cada uno de los números así construidos le agrego a en la última posición obtengo un número de los de la lista que termina en a. De la misma manera, puedo ver que hay exactamente 6 números que tienen a a en la posición de las decenas, 6 que lo tienen en la posición de las centenas y 6 que lo tienen en la de los millares. Si tengo que $S = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4$, la suma que busco es

$$\begin{aligned} 1000S + 100S + 10S + S &= 1111S \\ &= 1111 \cdot 60 \\ &= 66660 \end{aligned}$$

La respuesta es (c).

Solución 89. Veamos que $\frac{2n+19}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} + \frac{15}{n+2} = 2 + \frac{15}{n+2}$, de donde $n + 2$ tiene que ser un divisor de 15. En total hay 3 opciones para n: 1, 3 y 13. La respuesta es (a).

Solución 90. Sean r y R los radios de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. Tenemos que $R^2 + r^2 = 10$ y $(2r + R)R = 16$, de donde

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{(r+R)^2 + R^2} \\ &= \sqrt{r^2 + 2rR + R^2 + R^2} \\ &= \sqrt{(r^2 + R^2) + R(2r + R)} \\ &= \sqrt{10 + 16} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Nota: Tomando $R = \frac{8}{\sqrt{10}}$ y $r = \frac{6}{\sqrt{10}}$ se puede construir una figura con las condiciones dadas.

La respuesta es (b).

Solución 91. El 2 y todos los números que empiezan con 2 y están seguidos por una cola de 0's cumplen la condición. Cada número está determinado por la cantidad de 0's que tiene al final, que puede ser cualquier número entre 0 y 2001 (para que sea menor a 10^{2002}), así que hay 2002 números de este tipo. El 11 y los números que están formados por dos 1's y el resto ceros también cumplen la condición, y están determinados por la posición de los 1's en el número. Para construir un número de este tipo basta elegir una pareja de números positivos menores o iguales a 2002, que puede hacerse de $\frac{2002\cdot 2001}{2} = 2003001$ maneras. Como no hay otro tipo de números que cumpla la condición, en total hay $2003001 + 2002 = 2005003$ números. La respuesta es (d).

Solución 92. En el primer segundo se infectan 4 cuadritos, en el segundo 8, en el tercero 12, etc. Es fácil convencerse de que al transcurrir el n-simo segundo se infectan $4n$ nuevos cuadritos. Al pasar 10 segundos habrá $1 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + \cdots + 4\cdot 10 = 1 + 4(1 + 2 + \cdots + 10) = 221$ cuadritos infectados. La respuesta es (e).

Solución 93. Por el Teorema de Pitágoras,

$$AB = \sqrt{48^2 + 36^2} = \sqrt{2304 + 1296} = \sqrt{3600} = 60\ .$$

El triángulo AOB es semejante al triángulo AFD, así que $\frac{AD}{OB} = \frac{AF}{AB}$, o sea $\frac{60}{36} = \frac{AF}{60}$ de donde $AF = 100$. De la misma manera, usando que el triángulo BCE es semejante al triángulo AOB tenemos que $BE = 75$. Usando nuevamente el Teorema de Pitágoras tenemos que

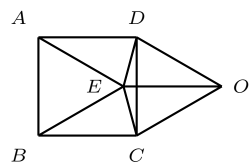
$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(48+100)^2 + (36+75)^2} \\ &= \sqrt{148^2 + 111^2} \\ &= \sqrt{21904 + 12321} \\ &= \sqrt{34225} = 185. \end{aligned}$$

La respuesta es (c).

Solución 94. Para que dos canastas tengan exactamente 3 pelotas debe ocurrir que una tenga 3 y la otra esté vacía, o bien que una tenga 2 y la otra 1. Es claro que el primer caso se da cuando el número de una canasta es múltiplo de 2,3 y 11, esto es, múltiplo de 66. Dado que hay 67 canastas existen dos parejas que cumplen: (65, 66) y (66, 67). En el segundo caso hay tres posibilidades para los números de las canastas consecutivas:
1) Un múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$ y un múltiplo de 11; lo cual cumplen las parejas (11,12) y (54,55).
2) Un múltiplo de $2\cdot 11 = 22$ y un múltiplo de 3; que cumplen (21,22) y (44,45).
3) Un múltiplo de $3\cdot 11 = 33$ y un múltiplo de 2; que cumplen (32,33) y (33,34).
En total hay 8 parejas que cumplen. La respuesta es (e).

Solución 95. En la figura tenemos que $\angle CBE = 30^o$. Como $CB = BE$, el triángulo CBE es isósceles y $\angle CEB = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$, y de la misma manera $\angle AED = 75^o$. El ángulo CEO es igual a $\frac{360^o - 75^o - 75^o - 60^o}{2} = 75^o$.

El triángulo OCE es isósceles ($OC = OE$ son radios del círculo) así que $\angle COE = 180^o - 75^o - 75^o = 30^o$, y del mismo modo obtenemos $\angle DOE = 30^o$. Como $\angle COD = 60^o$, tenemos que el sector es una sexta parte del círculo (pues $6 \cdot 60^o = 360^o$), así que su área es $\frac{1}{6}$. La respuesta es (a).



Solución 96. Como los números 1, 4, 9 y 16 son cuadrados de un número entero, al multiplicar dos de ellos se obtiene otro número cuadrado, así que hay que tachar de la lista al menos a 3 de ellos. Como $2 \cdot 8 = 16$ es un cuadrado hay que tachar también al 2 o al 8. De la misma manera, como $3 \cdot 12 = 36$ se tiene que tachar al 3 o al 12.

Por todo lo anterior, para no tener cuadrados como producto de dos números habría que tachar al menos 5 números de la lista. Es fácil ver que tachando, digamos, 4, 9, 16, 8 y 12, se consigue una lista con la característica deseada. La respuesta es (d).

Solución 97. Para cubrir la cuadrícula las fichas pueden colocarse de dos maneras: verticalmente (cubriendo toda una columna) u horizontalmente (cubriendo dos cuadritos de un renglón). Es claro que, si hay dos cuadritos de un renglón cubiertos por una ficha horizontal, los otros dos cuadritos que comparten la columna con ellos (arriba o abajo) también deben estar cubiertos por una ficha horizontal.

El problema equivale a ver de cuántas maneras puede escribirse 8 como suma de 1's y 2's (en orden). Por ejemplo, en la ilustración del enunciado, la cubierta corresponde a la suma de los números (1,2,1,1,1,1,1).

Observemos que

- Hay una sola manera de poner todas las fichas en posición vertical (corresponde a la suma de 8 1's).
- Hay siete formas de escribir un solo 2 y todos los demás 1's (corresponden a cubiertas que tienen exactamente dos fichas horizontales).

- Para ver las cubiertas que tienen exactamente 4 fichas horizontales hay que considerar las formas de escribir 8 con dos 2's y cuatro 1's. Esas son quince:

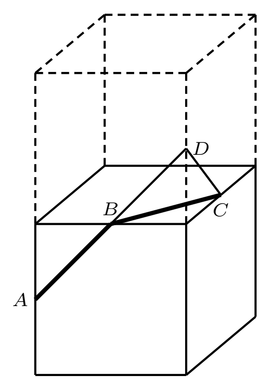
$$\left.\begin{array}{c}(2,2,1,1,1,1)\\(2,1,2,1,1,1)\\(2,1,1,2,1,1)\\\vdots\end{array}\right\}5 \qquad \left.\begin{array}{c}(1,2,2,1,1,1)\\(1,2,1,2,1,1)\\\vdots\end{array}\right\}4 \qquad \cdots$$

- Las cubiertas que tienen 6 fichas horizontales exactamente corresponden a las quintetas que tienen tres 2's y dos 1's. Es fácil ver que son diez.

- Hay una sola cubierta con todas las fichas horizontales.

En total son 1+7+15+10+1=34. La respuesta es (b).

Solución 98. El triángulo DBC de la figura es equilátero. Fijándonos en el triángulo CDA podemos ver que el ángulo $\angle ABC$ mide $180^{\text{o}} - 60^{\text{o}}$.



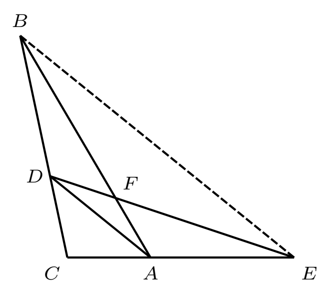
La respuesta es (d).

Solución 99. Como queremos que $7^n = (2002-3n)n$, tenemos que n debe ser una potencia de 7.
Si $n = 7^0 = 1$ entonces $(2002-3n)n$ sería igual a 7, lo cual no es cierto.
Si $n = 7^1$ entonces $7^7 = 823543 > 13867 = (2002 - 3 \cdot 7)7$. Una n mayor claramente incrementa aún más la diferencia entre 7^n y $(2002-3n)n$, así que no hay enteros positivos que cumplan la condición del problema. La respuesta es (a).

Solución 100. Si XYZ es un triángulo, denotaremos por (XYZ) a su área. En la figura DC mide $\frac{1}{4}$ de la longitud de BC, así que $(DCA) = \frac{(ABC)}{4} = \frac{S}{4}$. El triángulo ADF es semejante al triángulo BEF en razón $\frac{1}{4}$, así que $(ADF) = \frac{(BEF)}{16}$. Como CA mide $\frac{1}{4}$ de CE, $(ABC) = \frac{(CBE)}{4}$. De esta manera tenemos

$$\begin{aligned}
4S &= (CBE) \\
&= (BEF) + (ABC) + (EDC) - (DCA) - (ADF) \\
&= 16(ADF) + S + S - \frac{S}{4} - (ADF) \\
&= 15(ADF) + \frac{7S}{4}
\end{aligned}$$

de donde $(ADF) = \frac{3S}{20}$ y $(DCA) + (ADF) = \frac{S}{4} + \frac{3S}{20} = \frac{2S}{5}$.



La respuesta es (d).

Concentrado de Respuestas

1.- (c)	26.- (b)	51.- (b)	76.- (a)
2.- (e)	27.- (d)	52.- (e)	77.- (d)
3.- (c)	28.- (e)	53.- (e)	78.- (d)
4.- (e)	29.- (a)	54.- (c)	79.- (a)
5.- (b)	30.- (d)	55.- (b)	80.- (d)
6.- (a)	31.- (b)	56.- (d)	81.- (d)
7.- (a)	32.- (b)	57.- (b)	82.- (c)
8.- (b)	33.- (c)	58.- (c)	83.- (c)
9.- (c)	34.- (b)	59.- (a)	84.- (a)
10.- (e)	35.- (e)	60.- (d)	85.- (b)
11.- (a)	36.- (e)	61.- (c)	86.- (e)
12.- (c)	37.- (c)	62.- (d)	87.- (c)
13.- (c)	38.- (b)	63.- (e)	88.- (c)
14.- (e)	39.- (d)	64.- (b)	89.- (a)
15.- (e)	40.- (c)	65.- (a)	90.- (b)
16.- (d)	41.- (b)	66.- (d)	91.- (d)
17.- (e)	42.- (b)	67.- (b)	92.- (e)
18.- (b)	43.- (b)	68.- (c)	93.- (c)
19.- (e)	44.- (a)	69.- (a)	94.- (e)
20.- (a)	45.- (b)	70.- (b)	95.- (a)
21.- (b)	46.- (a)	71.- (c)	96.- (d)
22.- (b)	47.- (a)	72.- (a)	97.- (b)
23.- (c)	48.- (a)	73.- (e)	98.- (d)
24.- (e)	49.- (b)	74.- (a)	99.- (a)
25.- (d)	50.- (d)	75.- (e)	100.- (d)

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Luisa Pérez Seguí
(Presidenta)

Edgar Raúl Acosta Villaseñor

Julio César Aguilar Cabrera

Juan José Alba González

María de la Paz Álvarez Scherer

Omar Antolín Camarena

Ignacio Barradas Bribiesca

Luis Alberto Briseño Aguirre

Luis Miguel García Velázquez

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Pilar Morfín Heras

Julieta Verdugo Díaz