Problemas para la $\mathbf{21^a}$
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

(Problemas Avanzados)

Editado por:

Carlos Jacob Rubio Barrios

2007

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 21^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores del certamen formarán las selecciones que participarán en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2008: la XX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico que se llevará a cabo en el mes de marzo en México y los exámenes se corregirán en Corea, la 49^a Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en España durante el mes de julio, la XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre en Brasil y la X Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se celebrará en alguno de los países participantes en el mes de junio.

En la 21^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^{o} de agosto de 1988. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2007-2008 y, para el 1^{o} de julio de 2008, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

La intención de esta publicación es que sirva como guía para los alumnos que desean preparárse para el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela, son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que requiere de una mayor madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos

a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.
Este folleto incluye problemas de los concursos estatales de: Distrito Federal, Jalisco, Morelos, Puebla, San Luis Potosí, Tamaulipas y Yucatán. También incluye problemas de la etapa final de los Concursos Estatales del año 2006 y del examen eliminatorio propuesto por el Comité Nacional 2006.

Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Saltillo, Coahuila, del 11 al 16 de noviembre de 2007. En él, se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2008. También, se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche y Zacatecas.

Resultados de México en las Internacionales

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en las Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y Centroamericanas han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwán	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24

La 47^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Ljubljana, Eslovenia, del 8 al 19 de julio de 2006. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán),

Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Guevara Manuel Angel Guevara López (Zacatecas), Iván Joshua Hernández Maynez (Coahuila), Aldo Pacchiano Camacho (Morelos) y Pablo Soberón Bravo (Morelos).
Este año el equipo obtuvo los mejores resultados que ha obtenido un equipo mexicano en este certamen y se colocó en el lugar 24 de los 90 países asitentes. Individualmente Pablo Soberón obtuvo medalla de oro, la primera que logra un alumno de México. Isaac Buenrostro y Joshua Hernández obtuvieron cada uno medalla de plata, Manuel Guevara ganó medalla de bronce y Aldo Pacchiano se acreditó una mención honorífica.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1

La XXI Olimpiada Iberoamericana se llevó a cabo en Guayaquil, Ecuador, del 23 al 30 de septiembre de 2006. Los alumnos que concursaron fueron: Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Fernando Campos García (Distrito Federal), Iván Joshua Hernández Máynez (Coahuila) y Pablo Soberón Bravo (Morelos). Obtuvieron medalla de oro Iván Joshua y Pablo, y de plata Isaac y Fernando. México por primera vez ocupó el primer lugar de 21 países participantes.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1

Del 29 de julio al 5 de agosto de 2006, se celebró en Panamá, la VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: José Daniel Ríos (Querétaro), Paul Gallegos (Jalisco) y Andrés Gómez (Distrito Federal). Los alumnos José Daniel (con examen perfecto) y Paul obtuvieron medalla de oro y Andrés obtuvo medalla de plata. México ocupó la posición número 1 de los 12 países participantes.

Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. No existe un registro estadístico sobre la participación de México antes del año 2004.

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
2004	Canadá	19	9
2005	Corea	19	13
2006	Corea	21	10

Durante el mes de marzo de 2006 se aplicó el examen de la XVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a todos los alumnos que en ese momento se encontraban en los entrenamientos. Dicho examen se aplica y califica en México. Los mejores exámenes se enviaron a Corea para ser evaluados por el comité coreano. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Guevara Manuel Ángel Guevara López (Zacatecas), con medalla de oro; Isaac Buenrostro Morales (Jalisco) e Iván Joshua Hernández Máynez (Coahuila), con medalla de plata; Pablo Soberón Bravo (Morelos) y David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato), con medalla de bronce. Los siguientes alumnos obtuvieron mención honorífica: Rodrigo Mendoza Orozco y Jan Marte Contreras Ortiz (Jalisco), Valente Ramírez García Luna (San Luis Potosí), Jesús Aarón Escalera Rodríguez (Nuevo León) y Fernando Campos García (Distrito Federal). México ocupó el lugar número 10 de los 21 países participantes.

Número de Medallas obtenidas en Concursos Internacionales

La siguiente tabla contiene el número total de medallas obtenidas por México en las Olimpiadas Internacionales.

Olimpiada	*Oro*	*Plata*	*Bronce*	*Mención Honorífica*
Internacional	1	5	29	21
Iberoamericana	15	27	23	3
Centroamericana	14	8	2	0
Cuenca del Pacífico[1]	2	3	6	14

[1] Desde 2004.

Resultados del Concurso Nacional de la 20^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 12 al 17 de noviembre de 2006 se llevó a cabo en Zacatecas, Zacatecas, el Concurso Nacional de la 20^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Juan Carlos Ramírez Prado (Baja California)
Fernando Campos García (Distrito Federal)
Andrés Leonardo Gómez Emilsson (Distrito Federal)
Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (Distrito Federal)
Isaac Buenrostro Morales (Jalisco)
Jan Marte Contreras Ortiz (Jalisco)
Paul Iván Gallegos Bernal (Jalisco)
Aldo Pacchiano Camacho (Morelos)
Rígel Apolonio Juárez Ojeda (Puebla)
José Daniel Ríos Ferrusca (Querétaro)
Javier Ernesto Flores Robles (San Luis Potosí)
Valente Ramírez García Luna (San Luis Potosí)

Ariel Chávez González (Veracruz)
Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán)
Manuel Jesús Novelo Puc (Yucatán)
Cristian Manuel Oliva Aviles (Yucatán)

Los 6 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Luis Angel Isaías Castellanos (Colima)
Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua)
Joshua Eduardo Morales Salinas (Nuevo León)
Alejandro Jiménez Martínez (Guanajuato)
José Ariel Camacho Gutiérrez (Guerrero)
Eric Alejandro Gallegos Baños (Oaxaca)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 20^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Yucatán
3. Morelos
4. Distrito Federal
5. San Luis Potosí
6. Nuevo León
7. Baja California
8. Veracruz
9. Aguascalientes
10. Querétaro
10. Sonora[2]

[2] Los números repetidos indican empate en la puntuación.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "$M = A + C$ (Matemáticas igual a arte más ciencia)" y fue ganado por el estado de Colima. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Guerrero e Hidalgo.

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estados que colaboraron con los problemas que aparecen en este folleto. Agradecemos a Marco Antonio Figueroa Ibarra, Antonio Olivas Martínez, Rogelio Valdéz Delgado la revisión de este folleto y a Radmila Bulajich Manfrino la elaboración de las figuras.

Información sobre la Olimpiada

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

http://erdos.fciencias.unam.mx/omm

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Febrero de 2007

Capítulo 1

Enunciados de los Problemas

1.1. Problemas de Práctica

Problema 1. Sean m y n enteros positivos. Prueba que si el último dígito del número $m^2 + mn + n^2$ es cero, entonces sus últimos dos dígitos son ceros.

Problema 2. Con los dígitos a y b ($a \neq 0$ y $b \neq 0$) se forman los números:

$$m = \underbrace{a.aaa \cdots a}_{2006} \quad \text{y} \quad n = 0.\underbrace{bbb \cdots b}_{2006}.$$

Determina todos los valores de los dígitos a y b que satisfacen que $\frac{m}{n}$ es un entero mayor o igual que 40.

Problema 3. Sean $ABCDEF$ un hexágono regular y P, Q, R y S puntos sobre los segmentos AB, BC, EF y DE respectivamente, tales que PQ es paralela a RS, RQ es perpendicular a BC y PS es perpendicular a DE. Si T es el punto de intersección de RQ y PS, demuestra que el triángulo PQT es equilátero.

Problema 4. En un tablero de 10×10 se escribe un número entero en cada casilla de modo tal que la diferencia entre los números colocados en casillas adyacentes sea siempre menor o igual que 1. (Dos casillas son adyacentes si tienen un lado común).

(a) Encuentra un tablero que tenga la mayor cantidad posible de números distintos, y explica por qué no puede haber un tablero que tenga más números distintos.
(b) Demuestra que en el tablero hay al menos un número que se repite por lo menos 6 veces.

Problema 5. En los vértices de un cubo, se escriben con azul los números enteros del 1 al 8 sin repetir. Después, en cada arista se escribe con rojo la diferencia de los números azules de sus dos extremos (el mayor menos el menor). Explica cómo se deben distribuir los números azules para que la cantidad de números rojos distintos sea la menor posible.

Problema 6. Diremos que un entero positivo n es azul, si la suma de sus dígitos es igual a la suma de los dígitos del número $3n+11$. Encuentra una lista infinita de números azules distintos.

Problema 7. Sea C el punto de tangencia de la circunferencia $\mathcal{C}$ y la recta l, y sea AB un diámetro de $\mathcal{C}$ ($A \neq C$ y $B \neq C$). Sea N el pie de la perpendicular de C sobre AB. Por un punto F en el segmento CN ($F \neq C$ y $F \neq N$), se traza la paralela a CB que corta a l en E y a CA en G. Demuestra que $EG = GF$.

Problema 8. Prueba que el número:

$$2^{2005} + 4^{2005} + 6^{2005} + \cdots + 2006^{2005}$$

es múltiplo de $2 + 4 + 6 + \cdots + 2006$.

Problema 9. Encuentra todos los números formados por cuatro dígitos (todos distintos entre sí) que cumplen con la siguiente propiedad: si sumas el número formado por sus dos primeros dígitos con el número formado por sus dos últimos dígitos, obtienes el número formado por los dos dígitos centrales. Es decir, si $\overline{abcd}$ es un número de 4 dígitos que cumple la propiedad, entonces $\overline{ab}+\overline{cd} = \overline{bc}$.

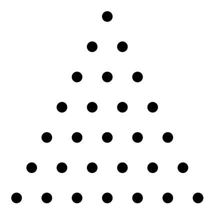
Problema 10. Determina todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$$

es un entero.

Problema 11. Se tiene un triángulo de cartón con una cara roja y la otra azul. Sobre una hoja de papel se calca el triángulo una vez con la cara roja hacia arriba y otra vez con la cara azul hacia arriba, de manera que se obtienen dos triángulos congruentes. Prueba que los puntos medios de los segmentos que unen los vértices correspondientes de los triángulos calcados, son colineales. (Nota: cuando el triángulo se calca por segunda vez, sólo se le da la vuelta y no se permite rotarlo).

Problema 12. Con 28 puntos se forma un arreglo triangular de lados iguales como se muestra en la figura. Una operación consiste en elegir tres puntos que sean los vértices de un triángulo equilátero y retirar estos tres puntos del arreglo. Si luego de realizar varias de estas operaciones queda solamente un punto, ¿en qué posiciones puede quedar dicho punto?



Problema 13. Determina todos los números primos distintos p, q, r y s tales que $p+q+r+s$ es un número primo y p^2+qs y p^2+qr son ambos cuadrados perfectos.

Problema 14. Sean P y Q puntos en el lado AB del triángulo ABC (P entre A y Q), tales que $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB$. Sean M y N los puntos de intersección de las rectas CP y CQ con la bisectriz AD del $\angle BAC$, respectivamente. Si $NP = CD$ y $3\angle A = 2\angle C$, prueba que los triángulos CQD y QNB tienen áreas iguales.

Problema 15. ¿Será posible encontrar 2006 enteros positivos distintos a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{2006}$, tales que:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{2006}^2$$

sea el cuadrado de un entero?

Problema 16. Sea l una recta que no intersecta a los lados del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares bajadas desde A, B y C, respectivamente a l. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde D, E y F

a las rectas BC, AC y AB, respectivamente. Prueba que DP, EQ y FR son concurrentes.

Problema 17. Un entero positivo n se llama divisor cuadrático si siempre que n divide a $m^n - 1$, para algún entero m, también se cumple que n^2 divide a $m^n - 1$.
(a) Prueba que cualquier número primo es un divisor cuadrático.
(b) Demuestra que hay una infinidad de números compuestos que son divisores cuadráticos.

Problema 18. Demuestra que si un entero positivo n es una potencia de 2, entonces de cualquier conjunto formado con $2n-1$ enteros positivos es posible elegir n de ellos de tal manera que su suma sea divisible entre n.

Problema 19. Un hexágono convexo $ABCDEF$, en el cual $AB = CD = EF$ y las diagonales AD, BE y CF son concurrentes, está inscrito en una circunferencia. Sea P el punto de intersección de AD y CE. Demuestra que $(CP)(CE)^2 = (PE)(AC)^2$.

Problema 20. Sean x, y, z números reales positivos tales que $x^2+y^2+z^2 = 1$. Demuestra que:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Problema 21. (a) Determina el primer entero positivo cuyo cuadrado termine en tres cuatros.
(b) Determina todos los enteros positivos cuyos cuadrados terminen en tres cuatros.
(c) Demuestra que ningún cuadrado perfecto termina en cuatro cuatros.

Problema 22. Sean AD, BE y CF las alturas del triángulo ABC. Sean K, M y N los respectivos ortocentros de los triángulos AEF, BFD y CDE. Prueba que los triángulos KMN y DEF son congruentes.

Problema 23. Se quiere cubrir una cuadrícula de 4×4 con fichas de 1×2 de manera que no se pueda colocar una ficha más sobre la cuadrícula sin que ésta se traslape con otra o rebase los límites de la cuadrícula. ¿Cuál es el mínimo número de fichas de 1×2 que se necesitan para lograr lo que se pretende? (Nota: se entiende que la manera de cubrir la cuadrícula con las fichas es siguiendo las líneas de la cuadrícula y sin que las fichas se traslapen ni rebasen los límites de la cuadrícula).

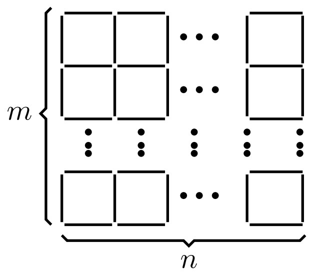
Problema 24. Sea n un entero positivo tal que $n+1$ es múltiplo de 24. Prueba que la suma de los divisores positivos de n también es múltiplo de 24.

Problema 25. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se cortan en los puntos P y Q. La tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, más cercana a P, toca a $\mathcal{C}_1$ en A y a $\mathcal{C}_2$ en B. La tangente a $\mathcal{C}_1$ en P corta a $\mathcal{C}_2$ en C, siendo C diferente a P, y la prolongación de AP corta a BC en R. Prueba que la circunferencia circunscrita al triángulo PQR es tangente a BP y a BR.

Problema 26. A una fiesta asistieron 10 personas. Se sabe que entre cualesquiera tres de ellas hay al menos dos que no se conocen. Prueba que en la fiesta hay un grupo de cuatro personas que no se conocen entre sí.

Problema 27. Sea n un entero mayor que 1. Los divisores positivos de n son d_1, $d_2, \ldots, d_k$, donde $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$.
Sea $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$. Demuestra que $D < n^2$ y determina todos los valores de n para los que D es un divisor de n^2.

Problema 28. Colocamos varios palitos en una mesa de manera que se forme un rectángulo de $m \times n$ como se muestra en la figura.



Debemos pintar cada palito de azul, rojo o negro de modo que cada uno de los cuadros de la figura quede limitado por exactamente dos palitos de un color y dos palitos de otro color. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

Problema 29. Queremos llenar una cuadrícula de 3 renglones y n columnas siguiendo tres reglas:
1. En el primer renglón se ponen los números $1, 2, \ldots, n$ en orden creciente, empezando en la columna 1.
2. En el segundo renglón también se ponen los números $1, 2, \ldots, n$ empezando

en algún cuadrito y continuando hacia la derecha hasta la columna n y continuando en la columna 1.
3. En el tercer renglón se pone una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$.
¿Para qué valores de n se puede llenar la cuadrícula siguiendo las reglas y de manera que la suma de los números en cada columna sea la misma?

Problema 30. Reconstruye, usando regla y compás, el triángulo ABC dados H el punto de intersección de la altura del triángulo desde A con la circunferencia circunscrita al triángulo, S el punto de intersección de la bisectriz del triángulo desde A con la circunferencia circunscrita al triángulo y M el punto de intersección de la mediana del triángulo desde A con la circunferencia circunscrita al triángulo.

Problema 31. Sean a, b y c enteros positivos tales que: a es impar, el máximo común divisor de a, b y c es 1, y $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Prueba que el producto abc es un cuadrado perfecto.

Problema 32. El número:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2005^2} + \frac{1}{2006^2}}$$

es un número que se puede escribir como $\frac{p}{q}$ con p y q enteros. Encuentra p y q.

Problema 33. Sea ABC un triángulo acutángulo. Las bisectrices de los ángulos ABC y ACB cortan a una circunferencia S que pasa por B y C en los puntos M y N, respectivamente. La recta MN corta a AB en P y a AC en Q. Demuestra que la circunferencia inscrita al triángulo ABC es tangente a AB en P y a AC en Q si y sólo si BC es diámetro de S.

Problema 34. Dado un entero positivo n sea $f(n)$ el promedio de todos sus divisores positivos. Demuestra que:

$$\sqrt{n} \leq f(n) \leq \frac{n+1}{2}.$$

Problema 35. ¿Cuántas ternas de números de tres dígitos cada uno se pueden obtener, usando los números del 1 al 9 una sola vez y tal que los números de las ternas estén relacionados en razón $1 : 2 : 3$? Es decir, si n, m y s son los números, entonces $m = 2n$ y $s = 3n$.

Problema 36. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ los lados AB y CD miden lo mismo y los puntos medios de las diagonales AC y BD son distintos. Prueba que la recta determinada por los puntos medios de las diagonales, forma ángulos iguales con AB y CD.

Problema 37. Encuentra todos los números de cuatro dígitos que son iguales al cuadrado de la suma de dos números de dos dígitos. El primero de ellos está formado por los primeros dos dígitos del número original y el segundo está formado por los últimos dos dígitos del número original.

Problema 38. Una función f está definida para todos los enteros positivos y satisface $f(1) = 2006$ y $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ para todo entero $n > 1$. Encuentra el valor de $f(2006)$.

Problema 39. Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ cuatro circunferencias. Supongamos que $\mathcal{C}_1$ corta a $\mathcal{C}_2$ en A y en P, $\mathcal{C}_2$ corta a $\mathcal{C}_3$ en B y en Q, $\mathcal{C}_3$ corta a $\mathcal{C}_4$ en C y en R, y $\mathcal{C}_4$ corta a $\mathcal{C}_1$ en D y en S, de manera que el cuadrilátero $PQRS$ esté contenido en el cuadrilátero $ABCD$. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico.

Problema 40. (a) Demuestra que de cualesquiera 39 enteros positivos consecutivos, es posible escoger un número cuya suma de sus dígitos es divisible por 11.
(b) Encuentra los primeros 38 enteros positivos consecutivos, tales que la suma de los dígitos de cada número no sea divisible por 11.

Problema 41. Sobre los lados AB y AC de un triángulo acutángulo ABC se construyen externamente dos semicírculos. Considera las alturas desde B y desde C del triángulo ABC. Las rectas que contienen estas alturas cortan a los semicírculos en P y Q. Demuestra que $AP = AQ$.

Problema 42. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$. Considera los mayores divisores impares de cada uno de los elementos de A y súmalos. ¿A cuánto es igual esta suma?

Problema 43. Se tienen dos enteros M y N de 9 dígitos cada uno, con la propiedad de que cada vez que un dígito de M se cambia por el correspondiente de N (esto es por el que ocupaba la misma posición) se obtiene un número múltiplo de 7. Demuestra que cada vez que se tome un dígito de N y se intercambie por el correspondiente de M, también se obtendrá un número múltiplo de 7.

Problema 44. Prueba que:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}=\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\cdots+\frac{1}{2006},$$

donde los signos se alternan en el lado izquierdo de la igualdad.

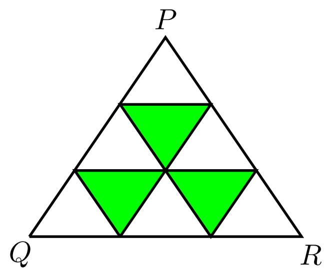
Problema 45. Determina el ángulo en C del triángulo ABC si se sabe que:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B-\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}=1.$$

Problema 46. En el país de Grolandia hay dos estados. En el estado A hay a ciudades y en el estado B hay b ciudades. Todas las ciudades se van a conectar entre sí, ya sea mediante autopista o mediante carretera de segunda clase (sólo una). Se quiere que al menos haya una ciudad de A conectada mediante autopista a alguna ciudad de B. ¿Cuántos diseños distintos pueden hacerse con estas condiciones?

Problema 47. Encuentra todos los enteros positivos n tales que existe una secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde los números $1, 2, \ldots, n$ aparecen exactamente una vez de modo que k divide a $x_1+x_2+\cdots+x_k$ para $k=1,2,\ldots,n$.

Problema 48. En los triangulitos en blanco de la figura deben escribirse, sin repetir, los números del 1 al 6, de tal forma que la suma de los números que queden en los 3 triángulos que tienen una base en PQ sea igual a la de los tres triángulos que tienen una base en PR y también a la de los 3 triángulos que tienen una base en QR. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?



Problema 49. Sea ABC un triángulo isósceles en el que el ángulo C mide $120°$. Una recta por O, el circuncentro del triángulo ABC, corta a las rectas AB, BC y CA en X, Y y Z, respectivamente. Demuestra que:

$$\frac{1}{OX}=\frac{1}{OY}+\frac{1}{OZ}.$$

Problema 50. Un número *triangular* es un número de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$ para algún entero positivo n. Demuestra que entre cualesquiera 32 números triangulares menores que 2006 hay dos cuya suma es un cuadrado.

Problema 51. Sean l y m dos rectas paralelas, P un punto en l y Q un punto en m. Encuentra la figura geométrica que forman todos los puntos de tangencia externa de dos circunferencias, una de ellas tangente a l en P y la otra tangente a m en Q.

Problema 52. (a) Demuestra que el producto de dos enteros de la forma a^2+3b^2 es de la misma forma.
(b) Demuestra que si $7n$ es de la forma a^2+3b^2, entonces n también es de esa forma.

Problema 53. Considera una cuadrícula de 3 renglones y 10 columnas. En el primer renglón se escriben los números enteros del 1 al 10, en ese orden. En el segundo renglón se van a escribir los números del 1 al 10, en cualquier orden. Y en cada casilla del tercer renglón se escribe la suma de los dos números escritos arriba. ¿Existe una forma de completar el segundo renglón de modo que las cifras de las unidades de los números del tercer renglón sean todas distintas?

Problema 54. Determina si existen enteros a, b, c, d y e mayores que 2006 que satisfacen la ecuación $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=abcde-65$.

Problema 55. Sea $ABCD$ un paralelogramo y O un punto en su interior tal que $\angle AOB+\angle COD=180°$. Demuestra que $\angle OBC=\angle ODC$.

Problema 56. Sea n un entero mayor que 6. Demuestra que si $n-1$ y $n+1$ son ambos números primos, entonces $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de 720. ¿Es cierto el recíproco?

Problema 57. Si $a=\sqrt{4-\sqrt{5-a}}$, $b=\sqrt{4+\sqrt{5-b}}$, $c=\sqrt{4-\sqrt{5+c}}$ y $d=\sqrt{4+\sqrt{5+d}}$, determina el valor del producto $abcd$.

Problema 58. Sean M y N puntos en los lados AB y BC, respectivamente, del paralelogramo $ABCD$ tales que $AM=NC$. Sea Q el punto de intersección de AN y CM. Demuestra que DQ es bisectriz del ángulo CDA.

Problema 59. Sean a y b enteros positivos tales que $2a^2+a=3b^2+b$. Prueba que $a-b$ es un cuadrado.

Problema 60. Dado un polígono convexo de $n \geq 5$ lados, demuestra que hay a lo más $\frac{n(2n-5)}{3}$ triángulos de área 1 que tienen sus vértices en vértices del polígono.

1.2. Problemas de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Problema 1. (18a OMM) Encuentra todos los números primos p, q y r con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

(Sugerido por Carlos Jacob Rubio)

Problema 2. (18a OMM) ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b (con $a \neq b$) cumplan que:

$$|a - b| \geq \frac{ab}{100}?$$

(Sugerido por José Antonio Gómez)

Problema 3. (18a OMM) Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y CA, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado de BC, corta a CA en N. Sea L el punto sobre CA tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K. Muestra que $KA = NC$.

(Sugerido por Julio Brau)

Problema 4. (18a OMM) Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugaron entre si exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos A, B y C, si A le ganó a B y B le ganó a C entonces A le ganó a C.
Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 5000. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.

(Sugerido por Antonio Olivas)

Problema 5. (18a OMM) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos circunferencias tales que el centro O de $\mathcal{B}$ esté sobre $\mathcal{A}$. Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A sobre $\mathcal{A}$ y un punto B sobre $\mathcal{B}$ tales que AC es tangente a $\mathcal{B}$ en C y BC es tangente a $\mathcal{A}$ en el mismo punto C. El segmento AB corta de nuevo a $\mathcal{B}$ en E y ese mismo segmento corta de nuevo a $\mathcal{A}$ en F. La recta CE vuelve a cortar a $\mathcal{A}$ en G y la recta CF corta a la recta GD en H. Prueba que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF.

(Sugerido por Iván Sánchez)

Problema 6. (18a OMM) ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004×2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 7. (19a OMM) Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y sea P un punto cualquiera sobre el segmento BC ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo BPO corta al segmento AB en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo COP corta al segmento CA en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

(i) Considera el triángulo PQR; muestra que que es semejante al triángulo ABC y que su ortocentro es O.

(ii) Muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO, COP y PQR son todas del mismo tamaño.

(Sugerido por José Antonio Gómez)

Problema 8. (19a OMM) Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su *suma* se efectúa casilla a casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Dado un entero positivo N, diremos que una cuadrícula es N-*balanceada* si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado es menor o igual que N.

(i) Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas n-balanceadas.

(ii) Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas n-balanceadas.

(Sugerido por David Mireles)

Problema 9. (19a OMM) Determina todas las parejas (a, b) de enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero positivo x primo relativo con b y un entero cualquiera y, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

(Sugerido por Miguel Raggi)

Problema 10. (19a OMM) Decimos que una lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_m$ contiene una *terna aritmética* a_i, a_j, a_k si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, $8, 1, 5, 2, 7$ tiene una terna aritmética (8, 5 y 2) pero $8, 1, 2, 5, 7$ no. Sea n un entero positivo. Muestra que los números $1, 2, \ldots, n$ se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

(Sugerido por José Antonio Gómez)

Problema 11. (19a OMM) Sea N un entero mayor que 1. En cierta baraja de N^3 cartas, cada carta está pintada de uno de N colores distintos, tiene dibujada una de N posibles figuras y tiene escrito un número entero del 1 al N (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama *completa* si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números.
¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, ya se vuelven completas?

(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 12. (19a OMM) Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza l la recta paralela a AD y considera un punto P sobre l y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.

(Sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Problema 13. (20a OMM) Sea ab un número de dos dígitos. Un entero positivo n es "pariente" de ab si:

- el dígito de las unidades de n también es b,
- los otros dígitos de n son distintos de cero y suman a.

Por ejemplo, los parientes de 31 son 31, 121, 211 y 1111.
Encuentra todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus parientes.

(Sugerido por Simon Knight)

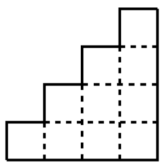
Problema 14. (20a OMM) Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$. Sea M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC que pasa por M. Sea E la interseción de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Demuestra que los triángulos AEM y MCA son semejantes si y sólo si $\angle ABC = 60°$.

(Sugerido por Julio Brau)

Problema 15. (20a OMM) Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, ..., 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 16. (20a OMM) ¿Para qué enteros positivos n puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con n escalones en vez de 4) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?



(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 17. (20a OMM) Sean ABC un triángulo acutángulo y, AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de AD con EF y MN, respectivamente. Demuestra que Q es el punto medio de PD.

(Sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Problema 18. (20a OMM) Sea n la suma de los dígitos de un entero positivo A. Decimos que A es "surtido" si cada uno de los enteros $1, 2, ..., n$ es suma de dígitos de A.

1. Demuestra que si $1, 2, ..., 8$ son sumas de dígitos de un entero A entonces A es surtido.

2. Si $1, 2, ..., 7$ son sumas de dígitos de un entero A, ¿es A necesariamente surtido?

Nota: El número 117 no es surtido pues sólo $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $7 = 7$, $8 = 1 + 7$, $9 = 1 + 1 + 7$ se pueden escribir como suma de dígitos de 117.

(Sugerido por Juan José Alba)

Capítulo 2

Olimpiadas Internacionales en las que participa México

2.1. XVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1. Sea n un entero positivo. Encuentra el mayor número real no negativo $f(n)$ (dependiente de n) que tenga la siguiente propiedad: cada vez que se tomen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sea entero, existe alguna i tal que $|a_i - \frac{1}{2}| \geq f(n)$.

Problema 2. Muestra que todo entero positivo puede ser escrito como una suma finita de distintas potencias enteras de la razón de oro $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aquí una potencia entera de τ es un número de la forma τ^i, donde i es un entero (no necesariamente positivo).

Problema 3. Sea $p \geq 5$ un número primo y sea r el número de maneras de colocar p damas en un tablero de ajedrez de $p \times p$ de manera que no estén todas las damas en un mismo renglón (pero sí pueden estar en una misma columna). Muestra que r es divisible entre p^5. Asume que todas las damas son iguales.

Problema 4. Sean A, B dos puntos distintos sobre una circunferencia O y sea P el punto medio del segmento AB. Sea O_1 la circunferencia tangente a la recta AB en P y tangente a la circunferencia O. Sea l la recta tangente a O_1 que pasa por A y diferente a la recta AB. Sea C el punto de intersección, diferente de A, de l y O. Sea Q el punto medio del segmento BC y sea O_2 la circunferencia tangente a la recta BC en Q y tangente a la recta AC. Muestra que la circunferencia O_2 es tangente a la circunferencia O.

Problema 5. En un circo, hay n payasos cuya vestimenta y maquillaje usa una selección de 12 colores diferentes. Cada payaso debe de usar al menos 5 colores diferentes. Un día, el dueño del circo ordena que no debe haber dos payasos que usen el mismo conjunto de colores y que no más de 20 payasos usen un color particular. Encuentra el mayor número n de payasos que pueden cumplir la orden.

2.2. VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe

Problema 1. Se consideran los enteros positivos:

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número:

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

Problema 2. Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos puntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera de Γ. Sea C el otro punto de corte de la recta AB con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud de CD es constante, es decir, no depende de la elección de B.

Problema 3. Para cada número natural n, se define $f(n) = [n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}]$. Pruebe que para cada $k \geq 1$, la ecuación:

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.
Nota: Si x es un número real, el símbolo $[x]$ denota al mayor entero que es menor o igual que x. Por ejemplo: $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[-0{,}4] = -1$, $[\sqrt{2}] = 1$.

Problema 4. El producto de varios números enteros mayores que 0 y distintos entre sí, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

Problema 5. El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Sean E, H, F y G puntos sobre los segmentos AB, BC, CD y DA respectivamente, tales que EF y GH se cortan en I. Sea M el punto de intersección de EG y AC y sea N el punto de intersección de HF y AC. Demuestre que:

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$

2.3. XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1. En el triángulo escaleno ABC, con $\angle BAC = 90°$, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta tangente en A a la circunferencia circunscrita corta a la recta BC en M. Sean S y R los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demuestre que el triángulo UMN es isósceles.

Problema 2. Se consideran n números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no necesariamente distintos. Sea d la diferencia entre el mayor y el menor de ellos y sea:

$$s = \sum_{i<j} |a_i - a_j|.$$

Demuestre que:

$$(n-1)d \leq s \leq \frac{n^2 d}{4}$$

y determine las condiciones que deben cumplir estos n números para que se verifique cada una de las igualdades.

Problema 3. Los números $1, 2, 3, \ldots, n^2$ se colocan en las casillas de una cuadrícula de $n \times n$, en algún orden, un número por casilla. Una ficha se encuentra inicialmente en la casilla con el número n^2. En cada paso, la ficha puede avanzar a cualquiera de las casillas que comparten un lado con la casilla donde se encuentra. Primero, la ficha viaja a la casilla con el número 1, y para ello toma uno de los caminos más cortos (con menos pasos) entre la casilla con el número n^2 y la casilla con el número 1. Desde la casilla con el número 1 viaja a la casilla con el número 2, desde allí a la casilla con el número 3, y así sucesivamente, hasta que regresa a la casilla incial, tomando en cada uno de sus viajes el camino más corto. El recorrido completo le toma a la ficha N pasos. Determine el menor y el mayor valor posible de N.

Problema 4. Determine todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que $2a + 1$ y $2b - 1$ sean primos relativos y $a + b$ divida a $4ab + 1$.

Problema 5. Dada una circunferencia $\mathcal{C}$, considere un cuadrilátero $ABCD$ con sus cuatro lados tangentes a $\mathcal{C}$, con AD tangente a $\mathcal{C}$ en P y CD tangente a $\mathcal{C}$ en Q. Sean X e Y los puntos donde BD corta a $\mathcal{C}$, y M el punto medio de XY. Demuestre que $\angle AMP = \angle CMQ$.

Problema 6. Sea $n > 1$ un entero impar. Sean P_0 y P_1 dos vértices consecutivos de un polígono regular de n lados. Para cada $k \geq 2$, se define P_k como el vértice del polígono dado que se encuentra en la mediatriz de P_{k-1} y P_{k-2}. Determine para qué valores de n la sucesión $P_0, P_1, P_2, \ldots,$ recorre todos los vértices del polígono.

2.4. 47^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea I el centro de su circunferencia inscrita. Sea P un punto en el interior del triángulo tal que:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

Problema 2. Decimos que una diagonal de un polígono regular P de 2006 lados es un *segmento bueno* si sus extremos dividen al borde de P en dos partes, cada una de ellas formada por un número impar de lados. Los lados de P también se consideran *segmentos buenos*. Supongamos que P se ha dividido en triángulos trazando 2003 diagonales de modo que ningún par de ellas se corta en el interior de P. Encuentre el máximo número de triángulos isósceles que puede haber tales que dos de sus lados son *segmentos buenos*.

Problema 3. Determine el menor número real M tal que la desigualdad:

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

se cumple para todos los números reales a, b, c.

Problema 4. Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que:

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n>1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considere el polinomio $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, donde P aparece k veces. Demuestre que hay a lo sumo n enteros t tales que $Q(t)=t$.

Problema 6. Asignamos a cada lado b de un polígono convexo P el área máxima que puede tener un triángulo que tiene a b como uno de sus lados y que está contenido en P. Demuestre que la suma de las áreas asignadas a los lados de P es mayor o igual que el doble del área de P.

Capítulo 3

Soluciones de los Problemas

3.1. Soluciones de los Problemas de Práctica

Solución del problema 1. Es claro que si m o n es impar, entonces m^2+mn+n^2 es también impar. Luego, m y n son ambos pares. Si alguno de ellos es múltiplo de 10 y el otro no, entonces $m^2 + mn + n^2$ no es múltiplo de 10. Supongamos que ninguno es múltiplo de 10. Entonces m^2 y n^2 terminan en 4 o en 6, mientras que mn no termina en cero. Luego, no podemos tener que uno termine en 4 y el otro en 6. Ahora, si m^2 y n^2 terminan ambos en 4 o ambos en 6, entonces mn debe terminar también en 4 o en 6 (¿por qué?), y de aquí que m^2+mn+n^2 no es múltiplo de 10. Por lo tanto, la única posibilidad es que m y n sean múltiplos de 10, de donde $m^2 + mn + n^2$ es múltiplo de 100.

Segunda Solución. Todas las congruencias serán módulo 10. Tenemos que $m^2 + mn + n^2 \equiv 0 \Rightarrow (m - n)(m^2 + mn + n^2) \equiv 0 \Leftrightarrow m^3 - n^3 \equiv 0$. Luego, $m^3 \equiv n^3$. Consideremos la siguiente tabla de congruencias módulo 10.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

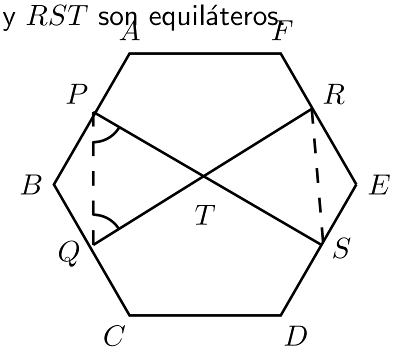
Es fácil ver de la tabla que si $m^3 \equiv n^3$, entonces $m \equiv n$. Luego, $m^2+mn+n^2 \equiv 3n^2 \equiv 0$ de donde $n^2 \equiv 0$. Por lo tanto $n \equiv m \equiv 0$ como en la primer solución.

Solución del problema 2. Notemos que $m = a(\underbrace{1.\,11\cdots 1}_{2006}) = a(10)(0.\,\underbrace{11\cdots 1}_{2006})$ y $n = b(0.\,\underbrace{11\cdots 1}_{2006})$, de donde $\frac{m}{n} = \frac{10a}{b}$. Como $\frac{10a}{b} \geq 40$, tenemos que $\frac{a}{b} \geq 4$. Como a y b son dígitos, los únicos valores que puede tomar b son 1 y 2 (si $b \geq 3$, entonces $a \geq 12$ y no sería dígito). Si $b = 1$, entonces $a = 4, 5, 6, 7, 8$ o 9. Y si $b = 2$, entonces $a = 8$ o 9. Además, si $b = 1$, $\frac{m}{n} = 10a$ y si $b = 2$, $\frac{m}{n} = 5a$. Es decir, $\frac{m}{n}$ es entero. Por lo tanto, los valores de a y b para los que $\frac{m}{n}$ es un entero mayor o igual que 40 son 1 y 4, 1 y 5, 1 y 6, 1 y 7, 1 y 8, 1 y 9, 2 y 8, 2 y 9.

Solución del problema 3. Tenemos que AB y DE son paralelas por ser lados opuestos del hexágono. Entonces, $\angle BPS = \angle PSE = 90°$, y de aquí que el cuadrilátero $BQTP$ es cíclico. Así, $\angle QPB = \angle QTB$. Análogamente, tenemos que el cuadrilátero $SERT$ también es cíclico, y así $\angle RSE = \angle RTE$. Como RS y PQ son también paralelas, tenemos que $\angle QPS = \angle PSR$. Luego:

$$\angle RTE = \angle RSE = \angle PSE - \angle PSR = \angle BPS - \angle QPS = \angle QPB = \angle QTB,$$

y por lo tanto, los puntos E, T y B son colineales. Entonces, $\angle PBT = \angle QBT = \angle RET = \angle SET = 60°$. Finalmente, como $BQTP$ y $SERT$ son cíclicos, se sigue que $\angle QPT = \angle PQT = \angle SRT = \angle RST = 60°$ y así los triángulos PQT y RST son equiláteros.



Segunda Solución. Como PB es paralela a SE, BQ es paralela a RE y QP es paralela a RS, tenemos que los triángulos PBQ y SER son homotéticos. Luego, T es el centro de homotecia y BE, PS y QR concurren en T. Luego, BE biseca al ángulo ABC, de donde $\angle PTB = \angle BTQ$ y en consecuencia, los triángulos PTB y QTB son congruentes (por el criterio ALA). Luego, el triángulo PQT es isósceles con $PT = TQ$. Usando el hecho de que $BQTP$ es cíclico (se probó en la primera solución), se sigue que $\angle PTQ = 60°$, pues $\angle PBQ = 120°$. Por lo tanto, el triángulo PQT es equilátero.

Solución del problema 4. (a) Puesto que la diferencia entre las casillas debe ser menor o igual que 1, comencemos poniendo en el primer renglón los enteros del 1 al 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

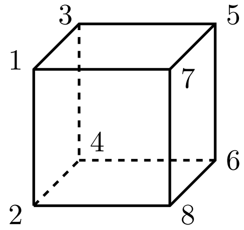
La primera casilla del segundo renglón puede ser 0, 1 o 2. Pero nos conviene poner el 2 porque así al final de la fila tendremos el 11 que es un número que no hemos utilizado y se trata de tener la mayor cantidad de números distintos. Siguiendo esta misma idea completamos fácilmente el resto del tablero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Por supuesto que pudimos haber empezado con cualquier otro número en lugar del 1 y hubiésemos obtenido, siguiendo este método, un tablero que cumpliría las condiciones del problema. Para estar seguros de que no es posible construir otro tablero que tenga una mayor cantidad de números distintos, pensemos en recorrer el tablero a través de casillas adyacentes. La máxima distancia que podemos recorrer es de esquina a esquina, cruzando 18 casillas. Luego, a partir de un número n en una esquina, a lo más podríamos tener $n+18$ en la otra esquina (esquina opuesta en diagonal), ya que en cada paso se aumenta a lo más 1. Por lo tanto, la máxima cantidad de números distintos que hay en el tablero es 19: $n, n+1, n+2, \ldots, n+18$.

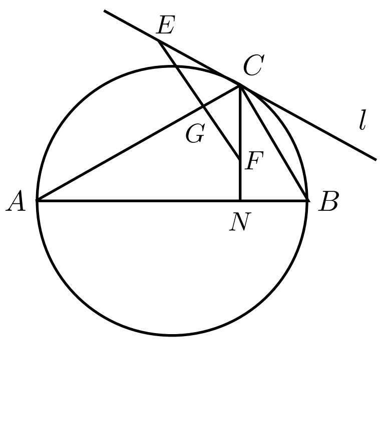
(b) El tablero tiene $10 \times 10 = 100$ números y a lo más hay 19 distintos. Como $100 = (19)(5) + 5$, por el principio de las casillas se sigue que al menos uno de los números se repite por lo menos 6 veces.

Solución del problema 5. Veamos que la cantidad mínima de números rojos distintos es 3. En efecto, supongamos que hay a lo más dos números rojos distintos, y que el número 1 es adyacente a los vértices que tienen a los números azules a, b y c. Como $a-1$, $b-1$ y $c-1$ son números rojos, al menos dos de estos deben ser iguales y por lo tanto, $a=b$ o $b=c$ o $a=c$. Pero esto es imposible, pues a, b y c son distintos entre sí. La siguiente figura muestra un acomodo que genera 3 números rojos distintos.



Solución del problema 6. Observemos que el número 8 es azul, ya que $3(8)+11=35$ y $3+5=8$. Para generar una lista infinita de números azules, consideremos a todos los números de la forma $8\cdot 10^n$. Claramente, la suma de los dígitos de $8\cdot 10^n$ es 8. Ahora, si $n=1$, entonces $3(80)+11=251$ y $2+5+1=8$. Si $n\geq 2$, entonces $3(8\cdot 10^n)+11=24\cdot 10^n+11=24\underbrace{00\cdots 0}_{n-2}11$ y $2+4+1+1=8$.

Solución del problema 7. El triángulo ABC es rectángulo en C, pues está inscrito en una semicircunferencia. Luego, los triángulos ACN, CBN y CGF son rectángulos. Como BC y GF son paralelas, tenemos que $\angle CFG=\angle BCN$, pero $\angle BCN=\angle CAN$ por la semejanza de los triángulos rectángulos CBN y ABC. Luego, $\angle CFG=\angle CAN$. Por otro lado, tenemos que $\angle ACE=\angle CBA$ por subtender el mismo arco, y como el triángulo EGC también es rectángulo, se sigue que $\angle CEG=\angle CAN$. Entonces, $\angle CFG=\angle CEG$ y de aquí que el triángulo ECF es isósceles y CG es su altura (pues CG y EN son perpendiculares). Por lo tanto, $EG=GF$.



Solución del problema 8. Tenemos que $2+4+6+\cdots+2006 = 2(1+2+3+\cdots+1003) = 1003(1004)$. Usaremos el hecho de que x^n+y^n tiene al factor $x+y$ cuando n es un entero impar. Sea $S = 2^{2005} + 4^{2005} + 6^{2005} + \cdots + 2006^{2005}$. Notemos que podemos escribir a S como:

$$(2^{2005}+2006^{2005})+(4^{2005}+2004^{2005})+\cdots+(1002^{2005}+1006^{2005})+1004^{2005}.$$

Como 2005 es impar, cada número entre paréntesis es múltiplo de 2008 y en consecuencia de 1004. Por lo tanto, S es múltiplo de 1004.
Por otro lado, notemos que también podemos escribir a S como:

$$(2^{2005}+2004^{2005})+(4^{2005}+2002^{2005})+\cdots+(1002^{2005}+1004^{2005})+2006^{2005}.$$

Ahora, cada número entre paréntesis es múltiplo de 2006 y en consecuencia de 1003. Por lo tanto, S es múltiplo de 1003. Luego, S es múltiplo de $1003(1004)$, o bien de $2+4+6+\cdots+2006$.

Solución del problema 9. De la condición $\overline{ab}+\overline{cd} = \overline{bc}$ tenemos que $10(a+c)+b+d = 10b+c$, es decir, $10a+d = 9(b-c)$. Luego, $10a+d$ debe ser múltiplo de 9 y en consecuencia, $a+d$ también. Como a y d son dígitos, tenemos que las posibilidades para a y d son: $(a,d) = (1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2)$ y $(8,1)$. (Note que si $a = 0$, entonces el número $\overline{abcd}$ sería de 3 dígitos; y si $d = 0$, entonces a tendría que ser 9 y por lo tanto $b-c = 10$ lo cual no es posible). Si $(a,d) = (1,8)$, entonces $(b,c) = (2,0),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5),(9,7)$; si $(a,d) = (2,7)$, entonces $(b,c) = (3,0),(4,1),(6,3),(8,5),(9,6)$; si $(a,d) = (3,6)$, entonces $(b,c) = (4,0),(5,1),(8,4),(9,5)$; si $(a,d) = (4,5)$, entonces $(b,c) = (6,1),(7,2),(8,3)$; si $(a,d) = (5,4)$, entonces $(b,c) = (6,0)$, $(7,1)$, $(8,2)$, $(9,3)$; si $(a,d) = (6,3)$, entonces $(b,c) = (7,0),(8,1),(9,2)$; si $(a,d) = (7,2)$, entonces $(b,c) = (8,0),(9,1)$; y si $(a,d) = (8,1)$, entonces $(b,c) = (9,0)$. Por lo tanto, en total hay 28 números de cuatro dígitos que satisfacen el problema.

Solución del problema 10. Si $n = 1$, hacemos $a_1 = 1$ y así $\frac{a_1}{a_1} = 1$ es entero. Si $n = 2$, podemos asumir que a_1 y a_2 son primos relativos con $a_1 < a_2$. Entonces a_1a_2 y $a_1^2 + a_2^2$ son primos relativos y en consecuencia $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1a_2}$ no es entero. Si $n \geq 3$, sea $a_k = (n-1)^{k-1}$ para $1 \leq k \leq n$. Como $n-1 > 1$ todos los enteros a_k son distintos. Finalmente, es fácil ver que:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1} = \underbrace{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}}_{n-1}+(n-1)^{n-1} = (n-1)^{n-1}+1,$$

es un entero. Por lo tanto, $n = 2$ es el único caso imposible.

Solución del problema 11. Sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos obtenidos después de calcar el triángulo de cartón. Sea $AB''C''$ el triángulo que se obtiene al trasladar $A'B'C'$ de forma que A' coincida con A. Tenemos entonces que AA', $B''B'$ y $C''C'$ son paralelas con la misma longitud. Los triángulos ACC'' y ABB'' son isósceles, de modo que si M y N son los puntos medios de BB'' y CC'', respectivamente, entonces $\angle NAC = \angle NAC''$ y $\angle MAB = \angle MAB''$. Luego, como $\angle BAC = \angle B''AC''$, se sigue que los puntos A, M y N son colineales. Sean ahora P, Q y R los puntos medios de AA', BB' y CC', respectivamente. Basta probar entonces que PQ es paralela a AM y que PR es paralela a AN. Sea X el punto medio de $B'B''$. Dado que los puntos Q y M son puntos medios de los lados BB' y BB'' en el triángulo $BB'B''$, tenemos que el cuadrilátero $MB''B'Q$ es un paralelogramo. Recordando que AA' y $B''B'$ son paralelas y con la misma longitud, tenemos que $B''X$ y AP también son paralelas con la misma longitud. De esta forma MQ y AP son paralelas y tienen la misma longitud, por lo que el cuadrilátero $MAPQ$ es un paralelogramo y así AM y PQ son paralelas. Usando el punto medio de $C''C'$ se demuestra de manera análoga que AN es paralela a PR.

Segunda Solución. Usando geometría analítica. Sean ABC, $A'B'C'$, $AB''C''$, M y N como en la primer solución. Sea l la recta que pasa por M y N. Como A, M y N son colineales (se demostró en la primer solución), tenemos que l es mediatriz de las rectas BB'' y CC''. Pongamos nuestro sistema coordenado con origen en el vértice A y a la recta l como el eje y. Luego, si las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son $A(0,0)$, $B(x_1,y_1)$ y $C(x_2,y_2)$, entonces los vértices de $AB''C''$ tienen coordenadas $A(0,0)$, $B''(-x_1,y_1)$ y $C''(-x_2,y_2)$. Si A' tiene coordenadas (x_0,y_0), entonces las coordenadas de B' y C' son (x_0-x_1, y_0+y_1) y (x_0-x_2, y_0+y_2). Luego, los puntos medios de AA', BB' y CC' tienen coordenadas $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2})$, $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0+2y_1}{2})$ y $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0+2y_2}{2})$ respectivamente. En consecuencia, los puntos medios de AA', BB' y CC' se encuentran sobre la recta $x = \frac{x_0}{2}$, es decir, son colineales.

Solución del problema 12. Numeremos los vértices del arreglo como sigue:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28

Veamos que es posible dejar al final a los vértices con números 1, 5, 7, 10, 13, 17, 20, 22, 25 y 28.
(i) Quitamos a los vértices con números $(1,2,3)$, $(4,7,8)$, $(5,6,9)$, $(11,12,17)$, $(10,14,15)$, $(16,22,23)$, $(18,19,25)$, $(13,24,26)$ y $(20,21,27)$, quedando al final el vértice con el número 28. Por simetría podemos tener al final los vértices con números 1 y 22.
(ii) Quitamos a los vértices con números $(1,2,3),(4,7,8),(5,6,9),(11,12,17)$, $(10,14,15)$, $(16,22,23)$, $(18,19,25)$, $(13,24,26)$ y $(21,27,28)$, quedando al final el vértice con el número 20. Por simetría podemos tener al final los vértices con números 5 y 17.
(iii) Quitamos a los vértices con números $(1,2,3)$,$(4,7,8)$,$(5,6,9)$,$(11,12,17)$, $(13,14,19)$, $(16,22,23)$, $(18,24,25)$, $(15,26,28)$ y $(20,21,27)$, quedando al final el vértice con el número 10. Por simetría podemos tener al final los vértices con números 7 y 25.
(iv) Quitamos a los vértices con números $(1,4,6)$,$(2,3,5)$,$(7,8,12)$,$(9,10,14)$, $(11,22,24)$, $(16,17,23)$, $(18,19,25)$, $(15,26,28)$, y $(20,21,27)$, quedando al final el vértice con el número 13.

Demostraremos que éstas son las únicas posiciones para el vértice que queda al final. Para esto, consideremos la siguiente disposición de los números 0, 1 y 2 en los vértices del arreglo.

Es fácil verificar que para cualquier triángulo equilátero con vértices en los puntos del arreglo triangular, la suma de los números de sus vértices es múltiplo de 3. Sea p el número que le corresponde al punto que queda al final ($p = 0, 1$ o 2). Entonces, con los restantes 27 puntos tenemos $\frac{27}{3} = 9$ triángulos equiláteros que hemos retirado del arreglo. Como cada uno de estos 9 triángulos tiene suma de sus vértices un múltiplo de 3, se sigue que la suma S de todos los números en los vértices de los 9 triángulos es múltiplo de 3.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & & & & \\ & & & & 2 & & 0 & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & 2 & & 0 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 0 & & 1 & & 2 & & \\ & 2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 0 \end{array}$$

Como la suma de todos los números del arreglo es múltiplo de 3, es decir $S+p$ es múltiplo de 3, se sigue que p debe ser múltiplo de 3, y de aquí que las únicas posiciones para el punto que queda al final son las que tienen el número 0 en el arreglo.

Solución del problema 13. Como $p+q+r+s$ es un primo mayor que 2, alguno de los primos p, q, r o s debe ser 2. Supongamos que $p \neq 2$. Entonces alguno de q, r o s es 2 y así, alguno de p^2+qs o p^2+qr es de la forma $(2m+1)^2+2(2n+1) = 4(m^2+m+n)+3$, el cual no es cuadrado perfecto, ya que todo cuadrado perfecto es de la forma $(2k)^2 = 4k^2$ o $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$. Luego, $p = 2$. Supongamos que $2^2+qs = a^2$, es decir $qs = (a-2)(a+2)$. Como $a-2 < a+2$ y q y s son primos, entonces $a-2 = 1, q$ o s. En el primer caso, $a = 3$ y $qs = 5$ lo cual es imposible. Si $a-2 = q$, entonces $s = a+2 = q+4$; y si $a-2 = s$, entonces $q = a+2 = s+4$. Es decir, en cualquier caso q y s difieren por 4. Análogamente, usando que $2^2+qr = b^2$ concluimos que q y r difieren por 4. Como q, r y s son primos distintos, alguno de r o s es $q-4$ y el otro es $q+4$. Como $q+4 \equiv q+1 \pmod 3$ y $q-4 \equiv q+2 \pmod 3$, tenemos que q, $q-4$ y $q+4$ dejan diferente residuo cuando se dividen entre 3. Luego, uno de ellos es el 3 y debe ser $q-4$. Por lo tanto, tenemos dos soluciones $(p,q,r,s) = (2,7,3,11)$ o $(2,7,11,3)$. Finalmente, es fácil ver que ambas soluciones satisfacen las condiciones del problema.

Solución del problema 14. Sean $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB = \alpha$ y $\angle CAD = \angle DAB = \beta$. Entonces $3\angle A = 6\beta$ y $2\angle C = 6\alpha$, de donde $\alpha = \beta$. Así, $\angle PCQ = \angle PCN = \angle DAB = \angle NAP$, de manera que el cuadrilátero $ACNP$ es cíclico. Luego, $\angle ANP = \angle ACP$ y $\angle CPN = \angle CAN$. De aquí que los triángulos APN y PNC son isósceles con $NP = PA$ y $CN = NP$. Como $NP = CD$, se sigue que el triángulo DNC es isósceles con $CD = CN$ y $\angle CDN = \angle CND$. Por otro lado, $\angle CAN + \angle ANC + \angle NCA = \angle CAN + \angle ANC + \angle NCM + \angle MCA = \angle ANC + 3\alpha = 180°$. Además, $\angle DCN + \angle CND + \angle CDN = \alpha + 2\angle CND = \alpha + 2(180° - \angle ANC) = 180°$. Entonces

$\alpha + 2(180^\circ - (180^\circ - 3\alpha)) = 180^\circ$, de donde $7\alpha = 180^\circ$. Luego, $\angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 5\alpha = 2\alpha$, de manera que el triángulo ABC es isósceles con $AC = CB$. De esta forma, los triángulos CAP y CBQ son congruentes con $AP = BQ$ y $CP = CQ$. Observemos que los triángulos PNA y QNB comparten su altura desde N y tienen bases iguales, por lo que tienen áreas iguales. Basta probar entonces que los triángulos CDQ y APN son congruentes. Recordando que $\angle ANP = \angle ACP$ tenemos que NP y CA son paralelas, y así el cuadrilátero $ACNP$ es un trapecio isósceles, de donde $AN = CP = CQ$. Se sigue entonces que los triángulos CDQ y APN son congruentes.

Solución del problema 15. Sí es posible. Comencemos con la igualdad $3^2+4^2 = 5^2$. Multiplicando por 5^2 en ambos lados obtenemos $3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$. Sustituyendo la primera igualdad en el primer sumando de la segunda, resulta que $3^2(3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot 5^2 = 5^5 \cdot 5^2$, es decir $3^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 4^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$. Multiplicando otra vez por 5^2 y descomponiendo el primer sumando tenemos que:

$$3^2 \cdot 3^2(3^2 + 4^2) + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2,$$

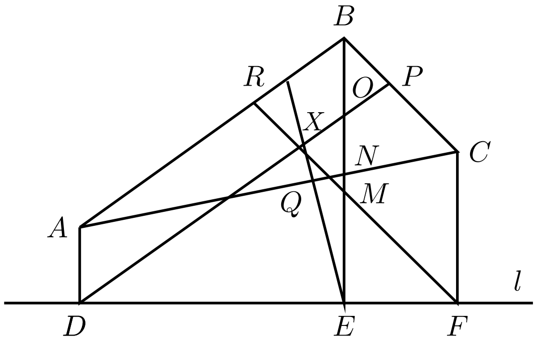
es decir:

$$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2.$$

Continuando de esta forma, es decir, multiplicando por 5^2 y descomponiendo el primer sumando, aumentamos cada vez el número de términos en uno. Además, cada término es el cuadrado de un entero y todos son distintos pues son estrictamente crecientes de izquierda a derecha. Esto muestra que para cada entero positivo $n \geq 2$ existen n enteros positivos distintos cuyos cuadrados suman un cuadrado.

Solución del problema 16. Sean M, N y O los puntos de intersección de las rectas FR, AC y DP, con la recta BE, respectivamente. Sea X el punto de intersección de las rectas EQ y DP, y sea Y el punto de intersección de las rectas FR y EQ. Como los triángulos BOP y DOE son rectángulos y $\angle BOP = \angle DOE$, entonces son semejantes. Análogamente, los triángulos BMR y FME son semejantes. Luego, $\angle ABM = \angle YFE$ y $\angle CBM = \angle XDE$. Por otro lado, como las rectas EQ y AC, CF y l, y AD y l son perpendiculares, los cuadriláteros $AQED$ y $CQEF$ son cíclicos, y las rectas AD, BE y CF son paralelas. Entonces, $\angle QED = 180^\circ - \angle QEF = \angle FCQ = \angle CNB$ y $\angle QEF = 180^\circ - \angle QED = \angle DAQ = \angle ANB$, de donde los triángulos DXE y BNC son semejantes, así como los triángulos FYE y BNA. Luego, $\frac{CN}{BN} = \frac{DE}{EX}$

y $\frac{AN}{BN} = \frac{EY}{EF}$. Además por el Teorema de Thales, tenemos que $\frac{AN}{NC} = \frac{DE}{EF}$. De estas últimas tres igualdades se sigue que $EX = EY$, es decir, $X = Y$, y así las rectas DP, EQ y FR concurren.



Solución del problema 17. (a) Sea p un número primo tal que $m^p \equiv 1 \pmod p$ para algún entero m. Por el pequeño Teorema de Fermat tenemos que $m^p \equiv m \pmod p$. Luego, $m \equiv 1 \pmod p$ y de aquí que $m = kp+1$ para algún entero k. Entonces:

$$m^p-1 = (kp+1)^p-1 = \left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}k^ip^i\right)-1 = \sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}k^ip^i = \binom{p}{1}kp+\sum_{i=2}^{p}\binom{p}{i}k^ip^i.$$

Como $\binom{p}{1}kp = kp^2$ y p^i es múltiplo de p^2 para $2 \leq i \leq p$, se sigue que $m^p - 1$ es múltiplo de p^2, es decir, p es un divisor cuadrático.

(b) Demostraremos que todo número de la forma $2p$ con $p \geq 3$ número primo, es un divisor cuadrático. Supongamos que $m^{2p} \equiv 1 \pmod{2p}$ para algún entero m. Como 2 y p son primos entre sí, tenemos que $m^{2p} \equiv 1 \pmod{2p}$ si y sólo si $m^{2p} \equiv 1 \pmod p$ y $m^{2p} \equiv 1 \pmod 2$. Por el pequeño Teorema de Fermat tenemos que $m^p \equiv m \pmod p$, de donde $m^{2p} \equiv m^2 \pmod p$. Luego, $m^2 \equiv 1 \pmod p$ si y sólo si $(m-1)(m+1) \equiv 0 \pmod p$. Como p es primo, se sigue que $m \equiv \pm 1 \pmod p$ y así, $m = kp \pm 1$ para algún entero k. Entonces:

$$\begin{aligned} m^{2p}-1 &= (kp\pm 1)^{2p}-1 = \left(\sum_{i=0}^{2p}\binom{2p}{i}(-1)^{2p-i}k^ip^i\right)-1 \\ &= \sum_{i=1}^{2p}\binom{2p}{i}(-1)^{2p-i}k^ip^i = -\binom{2p}{1}kp+\sum_{i=2}^{2p}\binom{2p}{i}(-1)^{2p-i}k^ip^i. \end{aligned}$$

Como $\binom{2p}{1}kp = 2kp^2$ y p^i es múltiplo de p^2 para $2 \leq i \leq 2p$, se sigue que $m^{2p}-1$ es múltiplo de p^2. Finalmente, como $m^{2p}-1$ es múltiplo de 2, entonces

m es impar y por lo tanto $m^{2p}-1=(m^p+1)(m^p-1)$ es múltiplo de $2\cdot 2=4$. Como 4 y p^2 son primos entre sí, se sigue que $m^{2p}-1$ es múltiplo de $4p^2=(2p)^2$.

Solución del problema 18. Si $n=2$, nuestro conjunto está formado por $2(2)-1=3$ números de los cuales al menos dos tienen la misma paridad, de modo que la suma de estos dos números es divisible entre 2. Supongamos que el problema es cierto para $n=2^k$, y consideremos la siguiente potencia de 2 que es $2n=2^{k+1}$. Consideremos un conjunto de $2(2n)-1$ números, digamos $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{4n-1}\}$. Claramente, $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{2n-1}\}\cup\{a_{2n},a_{2n+1},\ldots,a_{4n-2}\}\cup\{a_{4n-1}\}$ donde los primeros dos conjuntos de esta unión tienen cada uno $2n-1$ números. Por nuestra hipótesis, podemos elegir n números de $\{a_1,a_2,\ldots,a_{2n-1}\}$, digamos $a'_1,a'_2,\ldots,a'_n$, y n números de $\{a_{2n},a_{2n+1},\ldots,a_{4n-2}\}$, digamos $b'_1,b'_2,\ldots,b'_n$, tales que $\sum_{i=1}^n a'_i$ y $\sum_{i=1}^n b'_i$ son divisibles entre n. Consideremos el conjunto de los números de A que no se eligieron: $A'=\{a'_{n+1},a'_{n+2},\ldots,a'_{2n-1}\}\cup\{b'_{n+1},b'_{n+2},\ldots,b'_{2n-1}\}\cup\{a_{4n-1}\}$. Claramente, A' tiene $(n-1)+(n-1)+1=2n-1$ números. Luego, por nuestra hipótesis es posible elegir n de ellos, digamos $c'_1,c'_2,\ldots,c'_n$, tales que $\sum_{i=1}^n c'_i$ es divisible entre n. Consideremos ahora el conjunto:

$$B=\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a'_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b'_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c'_i\right\}.$$

Como cada uno de los números de B es un entero, podemos elegir 2 de ellos tales que su suma es divisible entre 2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a'_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b'_i$ es par. Entonces, $\sum_{i=1}^n a'_i+\sum_{i=1}^n b'_i$ es divisible entre $2n$, y así hemos elegido $2n=2^{k+1}$ números de A tales que su suma es divisible entre $2n$, como queríamos.

Solución del problema 19. Sea Q el punto de intersección de AD, BE y CF. Sean $\alpha=\angle ADC$ y $\beta=\angle EDA$. Como los cuadriláteros $EFAB$, $CDEF$ y $ABCD$ son cíclicos y cada uno de ellos tiene dos lados opuestos iguales, entonces son trapecios isósceles (¿Por qué?). Luego, $\alpha=\angle DAB$ (por ser $ABCD$ trapecio isósceles), $\angle DAB=\angle BED$ (por subtender el mismo arco) y $\beta=\angle CQD$ (por ser paralelas QC y ED). Por otro lado, $\angle AEC=\alpha$ (por subtender el mismo arco) y $\angle ACE=\beta$ (por subtender el mismo arco). En resumen, tenemos que $\alpha=\angle BED=\angle AEC$ y $\beta=\angle ACE=\angle CQD$, de modo que los triángulos ACE, QCD y QDE son semejantes. De la semejanza de los triángulos QCD y QDE, tenemos que $\frac{CQ}{QD}=\frac{QD}{DE}$, y de la semejanza de los triángulos QDE y ACE, tenemos que $\frac{QD}{DE}=\frac{AC}{CE}$. Luego:

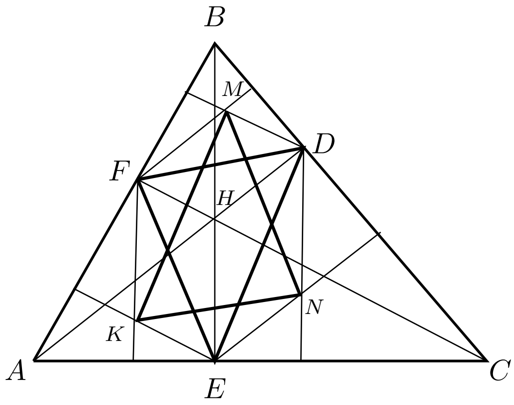
$$CQ=\frac{(QD)^2}{DE}\Rightarrow\frac{CQ}{DE}=\frac{(QD)^2}{(DE)^2}=\frac{(AC)^2}{(CE)^2}.$$

Finalmente, notando que los triángulos CQP y EDP son semejantes (porque tienen el ángulo β en común y porque $\angle EPD = \angle QPC$ por ser opuestos por el vértice), tenemos que $\frac{CP}{PE} = \frac{CQ}{DE}$. Luego, $\frac{CP}{PE} = \frac{(AC)^2}{(CE)^2}$ como queríamos.

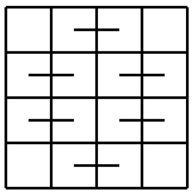
Solución del problema 20. Por la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que $x^2+y^2 \geq 2xy$, $x^2+z^2 \geq 2xz$ y $z^2+y^2 \geq 2yz$. Entonces, $1 = x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ y $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) \leq 1+2(1) = 3$. Luego, $x+y+z \leq \sqrt{3}$. Usando nuevamente la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que $1 = x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, de donde $xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Por lo tanto, $x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x+y+z) \leq (\frac{1}{3\sqrt{3}})\sqrt{3} = \frac{1}{3}$ y la igualdad se dá si y sólo si $x = y = z$.

Solución del problema 21. (a) Como $21^2 < 444 < 22^2$ y $1444 = 38^2$, el primer entero que cumple es el 38.
(b) Supongamos que n satisface que su cuadrado termina en tres cuatros. Entonces, $n^2 - 1444 = (n-38)(n+38)$ es múltiplo de $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Esto implica que al menos uno de los factores $n-38$ o $n+38$ es múltiplo de 4. Como $n+38-(n-38) = 76$, se sigue que ambos son múltiplos de 4. Como 76 no es múltiplo de 5, entonces alguno de $n-38$ y $n+38$ debe ser múltiplo de $4 \cdot 5^3 = 500$. Luego, $n = 500k \pm 38$ con k entero no negativo. Recíprocamente, si $n = 500k \pm 38$, entonces $n^2 = 1000(250k^2 \pm 38k) + 1444$ siempre termina en tres cuatros para cualquier entero no negativo k.
(c) Si n termina en cuatro cuatros, entonces n termina en tres cuatros. Luego, por el inciso anterior $n = 500k \pm 38$, de donde $n^2 = 1000(250k^2 \pm 38k) + 1444$. Sea $m = 250k^2 \pm 38k$. Es claro que m es par. Ahora, si $m \equiv 0, 2, 4, 6, 8 \pmod{10}$, entonces $n^2 \equiv 1444, 3444, 5444, 7444, 9444 \pmod{10000}$, respectivamente, de modo que ningún cuadrado perfecto termina en cuatro cuatros.

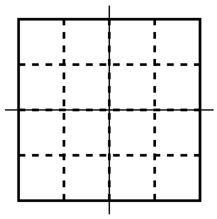
Solución del problema 22. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Siendo FM y HD perpendiculares a BC, tenemos que FM y HD son paralelas. Similarmente, FH y MD son paralelas. Luego, el cuadrilátero $DHFM$ es un paralelogramo. De manera análoga se demuestra que $DHEN$ es un paralelogramo. Entonces FM y EN son paralelas y tienen la misma longitud. Luego, el cuadrilátero $EFMN$ es un paralelogramo y en consecuencia $EF = NM$. Análogamente, tenemos que $FD = KN$ y $DE = MK$. Así, los triángulos DEF y KMN son congruentes.



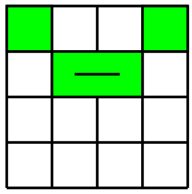
Solución del problema 23. El siguiente ejemplo muestra que es posible lograr lo que se pretende utilizando 6 fichas.



Supongamos que hemos logrado nuestro objetivo utilizando 5 o menos fichas. Entonces en la cuadrícula quedan por lo menos $16-5(2)=6$ casillas sin cubrir. Pintemos la cuadrícula como tablero de ajedrez. Cada ficha colocada cubre una casilla blanca y una casilla negra, así que de las casillas sin cubrir, la mitad son blancas y la mitad son negras. Dividamos la cuadrícula en 4 subcuadrículas de 2×2, como lo indica la figura.



Es claro que si alguna de estas subcuadrículas contuviera 3 casillas sin cubrir, se podría colocar una ficha adicional sobre 2 de ellas. Entonces cada subcuadrícula contiene a lo más 2 casillas sin cubrir. Como en total hay por lo menos 6 casillas sin cubrir, existen 2 subcuadrículas, por lo menos, con exactamente 2 casillas sin cubrir. Veamos cómo deben estar colocadas las casillas sin cubrir en una de las cuatro subcuadrículas conteniendo exactamente 2 casillas sin cubrir. En primer lugar, podemos observar que las casillas sin cubrir no pueden ser adyacentes, o se podría colocar una ficha adicional sobre ellas. Cada subcuadrícula contiene una casilla que es una esquina de la cuadrícula. Si esta casilla estuviera cubierta por alguna ficha, dicha ficha cubriría otra casilla de la subcuadrícula, adyacente a la primera, forzando a que las 2 casillas sin cubrir fueran adyacentes. Entonces la casilla que es esquina de la cuadrícula debe estar sin cubrir, y la otra casilla sin cubrir de la subcuadrícula debe ser la opuesta. Veamos ahora cuáles 2 subcuadrículas pueden ser las que tengan 2 casillas sin cubrir. Si estas 2 subcuadrículas fueran adyacentes, se podría colocar una ficha adicional, como lo muestra la figura.



Si estas 2 subcuadrículas fueran opuestas, las 4 casillas sin cubrir que éstas contienen serían todas del mismo color, así que tendría que haber otras 4 casillas sin cubrir, del otro color. Estas últimas tendrían que estar repartidas, 2 y 2, en las otras 2 subcuadrículas, pero entonces habría 2 subcuadrículas adyacentes con 2 casillas sin cubrir, lo cual acabamos de ver que es imposible. Por lo tanto, concluimos que no se puede lograr lo que se pretende utilizando menos de 6 fichas.

Segunda Solución. Como en la primer solución se prueba que 6 fichas son suficientes. Supongamos que hemos logrado lo que se pretende utilizando no más de 5 fichas. Como no puede haber más de 2 fichas colocadas de manera horizontal y a la vez más de 2 fichas colocadas de manera vertical, concluimos que hay menos de 3 fichas de alguno de estos dos tipos. Supongamos que hay menos de 3 fichas horizontales (si hubiera menos de 3 fichas verticales, podríamos rotar la cuadrícula de modo que estas fichas se vieran horizontales). Dividimos en casos.

Caso 1. No hay fichas horizontales. Si alguna columna no contuviera una ficha vertical, se podría colocar una ficha vertical adicional en esta columna. Por lo tanto en cada columna hay al menos una ficha. Pero como hay a lo más 5 fichas, en al menos 3 columnas hay exactamente una ficha. En cada una de estas 3 columnas la ficha debe estar colocada en medio (figura 1) (de lo contrario se podría colocar una ficha vertical adicional en esta columna). Pero de estas tres columnas hay al menos 2 que son adyacentes. Entonces se pueden colocar fichas horizontales adicionales en los lugares marcados con líneas punteadas (figura 2), lo cual es un absurdo.

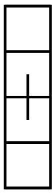


figura 1

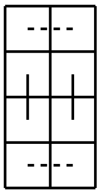


figura 2

Caso 2. Hay una ficha horizontal. Si alguna columna no contuviera una ficha vertical, la ficha horizontal de que se dispone cubriría a lo más una casilla de esta columna y no evitaría que se pudiera colocar una ficha adicional vertical en esta columna. Por lo tanto, en cada columna hay al menos una ficha vertical. Como hay a lo más 4 fichas verticales, en cada columna hay exactamente una ficha vertical. La ficha horizontal abarca 2 columnas adyacentes. En las otras 2 columnas la ficha vertical debe estar colocada en medio. Si estas 2 columnas fueran adyacentes, acabaríamos como en el caso 1. La única forma de que estas 2 columnas no sean adyacentes es que sean las columnas de la orilla de la cuadrícula. Si la ficha horizontal estuviera colocada en el primer renglón (figura 3), sin importar cómo se coloquen las 2 fichas verticales restantes, no se podrá evitar que sea posible colocar una ficha adicional horizontal en alguno de los 3 lugares marcados con líneas punteadas en la figura. Si la ficha horizontal estuviera colocada en el segundo renglón (figura 4), se podría colocar una ficha adicional horizontal en el lugar marcado. Análogamente se comprueba que la ficha horizontal no puede estar colocada en los otros renglones. Por lo tanto, este caso también es imposible.

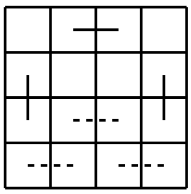


figura 3

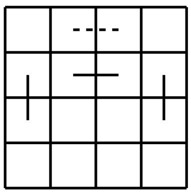


figura 4

Caso 3. Hay 2 fichas horizontales. Como hay a lo más 5 fichas, hay a lo más 3 fichas verticales. Entonces hay una columna que no contiene ninguna ficha vertical. Las 2 fichas horizontales deben cubrir casillas de esta columna de modo que no sea posible colocar en ella una ficha vertical adicional. En vista de esto, una de las fichas horizontales debe cubrir alguna de las casillas centrales de esta columna (la del segundo renglón o la del tercero). Digamos, sin pérdida de generalidad, que una ficha horizontal cubre el segundo renglón de la columna (figura 5). La única forma de evitar que se pueda colocar una ficha en la posición marcada en la figura es que la otra ficha horizontal cubra alguna de las casillas del primer renglón. Pero entonces en la columna sin fichas verticales se puede colocar una ficha vertical adicional.

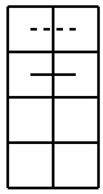


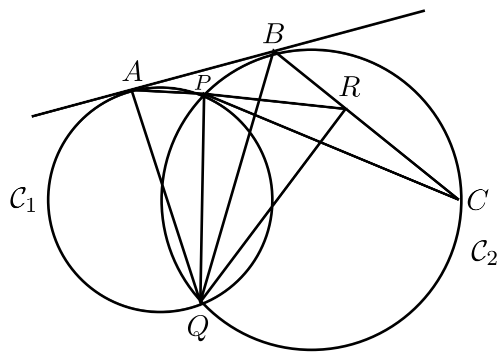
figura 5

En conclusión, el mínimo número de fichas requeridas para lograr lo que se pretende es 6.

Solución del problema 24. Como $n+1 \equiv 0 \pmod 3$ y $n+1 \equiv 0 \pmod 8$, tenemos que $n \equiv 2 \pmod 3$ y $n \equiv 7 \pmod 8$. Además n no puede ser un cuadrado, ya que $n+1 \equiv 0 \pmod 3$ y todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 3. Luego, n tiene un número par de divisores positivos. Para cada divisor d de n, consideremos el divisor $\frac{n}{d}$ (claramente $d \neq \frac{n}{d}$). Entonces, $n = d \cdot \frac{n}{d} \equiv 2 \pmod 3$ y $n = d \cdot \frac{n}{d} \equiv 7 \pmod 8$. En el primer caso, uno de los factores debe ser congruente con 1 y el otro con 2 módulo 3, de modo que $d + \frac{n}{d}$ es múltiplo de 3 y por lo tanto la suma de los divisores positivos de n también es múltiplo de 3. En el segundo caso, alguno de los factores debe ser congruente con 1 y el otro con 7 módulo 8, o bien, uno es congruente con 3 y el otro con 5 módulo 8. En cualquier caso, tenemos que $d + \frac{n}{d}$ es múltiplo de 8 y en consecuencia, la suma de los divisores positivos de n es múltiplo de 8. Se sigue entonces que la suma de los divisores positivos de n es múltiplo de $3 \cdot 8 = 24$.

Solución del problema 25. Sea T el punto de intersección de AB con CP. Por la relación entre el ángulo inscrito y el ángulo semi-inscrito, $\angle BAP = \angle TPA = \angle AQP$. Entonces, $\angle CPR = \angle TPA = \angle AQP$. De nuevo por la relación entre el ángulo inscrito y el ángulo semi-inscrito, $\angle ABP = \angle BCP = \angle BQP$. Tenemos entonces que $\angle AQB = \angle AQP + \angle BQP = \angle CPR + \angle RCP = \angle BRP$, esto último porque $\angle BRP$ es ángulo exterior del triángulo PRC. De $\angle AQB = \angle ARB$ se sigue que $AQRB$ es cíclico. Entonces $\angle AQP = \angle BAP = \angle BQR$ y $\angle PQR = \angle AQB = \angle BRP$. Como el ángulo entre PR y la tangente en R a la circunferencia circunscrita al triángulo PQR es $\angle PQR = \angle BRP$, BR debe ser dicha tangente. Por último observemos que $\angle BPR = \angle BAP + \angle ABP = \angle BQR + \angle BQP = \angle PQR$. Como antes se probó para BR, análogamente se prueba que BP es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

Solución del problema 26. Representemos a cada persona i con un vértice v_i y uniremos dos vértices con aristas rojas o verdes dependiendo si las dos personas correspondientes se conocen o no. Si v_1 tiene al menos 6 aristas verdes de las 9 aristas que salen de v_1, tomamos los vértices que están unidos a v_1 por estas aristas verdes, digamos $v_2, v_3, \ldots, v_7$. Ahora, si v_2 tiene al menos 3 aristas verdes de las 5 aristas que lo unen con $v_3, \ldots, v_7$, entonces tomamos esos vértices, digamos v_3, v_4, v_5. Entre estos tres vértices hay al menos dos unidos por una arista verde, digamos v_3 y v_4. Entonces, v_1, v_2, v_3, v_4, están unidos únicamente por aristas verdes y terminamos.



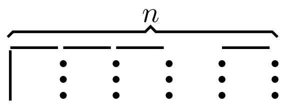
Si v_2 no tiene al menos 3 aristas verdes, entonces tiene al menos 3 aristas rojas. Tomamos los 3 vértices de esas aristas rojas, digamos que son v_3, v_4, v_5. Entonces entre estos 3 vértices no hay 2 que estén unidos por una arista roja. Luego, v_1, v_3, v_4, v_5 están unidos únicamente por aristas verdes y terminamos.
Finalmente si v_1 no tiene al menos 6 aristas verdes, tiene al menos 4 aristas rojas, y tomando los vértices de esas aristas rojas digamos v_2, v_3, v_4, v_5, entonces entre estos vértices no hay 2 que estén unidos por una arista roja, y por lo tanto, están unidos únicamente por aristas verdes y nuevamente terminamos.

Solución del problema 27. Observemos que d es divisor de n si y sólo si $\frac{n}{d}$ es divisor de n. Entonces:

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{1\le i<k} d_i d_{i+1} \\
&= n^2 \sum_{1\le i<k} \frac{1}{d_i d_{i+1}} \le n^2 \sum_{1\le i<k} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right) = n^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k}\right) < \frac{n^2}{d_1} = n^2.
\end{aligned}
$$

Ahora, si p es el menor divisor primo de n, entonces $d_2 = p$, $d_{k-1} = \frac{n}{p}$ y $d_k = n$.
Si $n = p$, entonces $k = 2$ y $D = p$, y en este caso D divide a n^2.
Si n es compuesto, entonces $k > 2$ y $D > d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{p}$. Si D fuera divisor de n^2, entonces también $\frac{n^2}{D}$ sería divisor de n^2. Pero $1 < \frac{n^2}{D} < p$, lo cual es imposible porque p es el menor divisor primo de n^2.
Por lo tanto, D es divisor de n^2 si y sólo si n es primo. (IMO, 2002).

Solución del problema 28. Hay 3^n formas de pintar el renglón de palitos horizontal superior. El palito vertical más a la izquierda de la primera línea también se puede pintar de 3 formas.



Una vez definidos los colores de los palitos superiores y del palito izquierdo de un cuadrito, hay dos maneras de completar el segundo: si ambos palitos pintados tienen el mismo color tenemos dos colores para pintar los dos palitos restantes; y si los dos tienen distinto color hay dos formas de pintar los dos palitos restantes con esos colores. Luego, para completar la primera línea de cuadrados hay $3^n \cdot 3 \cdot 2^n$ formas. De la misma manera, el color del palito vertical que está más a la izquierda y en el segundo renglón puede escogerse de 3 maneras y hay 2^n formas de pintar los demás palitos del segundo renglón. Luego, para $m = 2$ hay $3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 3 \cdot 2^n$ coloraciones posibles. Continuando con este razonamiento tenemos que, en el caso general, hay $3^n(3 \cdot 2^n)^m = 3^{n+m} \cdot 2^{nm}$ formas de pintar los palitos del tablero.

Solución del problema 29. Si n fuera par, considerando los residuos módulo 2, los primeros dos renglones de la tabla serían de alguna de estas formas:

1	0	$\cdots$	1	0
1	0	$\cdots$	1	0

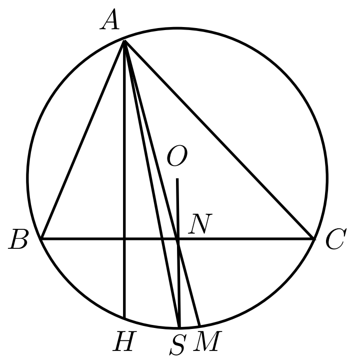
0	1	$\cdots$	0	1
1	0	$\cdots$	1	0

En cualquiera de los dos casos es claro que al llenar el tercer renglón, la mitad de las columnas tendría una suma par y la otra mitad tendría una suma impar, de manera que al poner cualquier permutación de los números $1, 2, \ldots, n$ en el tercer renglón la suma sería par o impar, por lo que no se puede igualar la suma en las columnas.
Si n es impar, en algún lugar del segundo renglón debe haber dos unos consecutivos (que corresponden a n y 1). Digamos que esos unos están en las columnas k y $k+1$. Antes de llenar el tercer renglón las sumas de las primeras k columnas

son todas de la misma paridad y las sumas de las siguientes columnas son todas de paridad opuesta. Como en el tercer renglón queremos acomodar $\frac{n-1}{2}$ pares y $\frac{n+1}{2}$ impares, en la columna k tiene que estar alguno de estos dos valores. Eligiendo uno de estos dos valores hay una única manera de completar la tabla. Por ejemplo, si en la columna k ponemos a $\frac{n-1}{2}$ el siguiente acomodo funciona:

1	2	3	$\cdots$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\cdots$	$n-1$	n
$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+5}{2}$	$\frac{n+7}{2}$	$\cdots$	n	1	$\cdots$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$
$n-1$	$n-3$	$n-5$	$\cdots$	2	n	$\cdots$	3	1

Solución del problema 30. Como AS es bisectriz del ángulo BAC, S es el punto medio del arco BC. Entonces la mediatriz del segmento BC pasa por S y por el circuncentro O del triángulo ABC. Luego, OS es perpendicular a BC y como AH es también perpendicular a BC, tenemos que AH es paralela a OS. Además, OS, AM y BC concurren en el punto medio N de BC.



Dados, H, S y M, podemos construir la circunferencia que pasa por estos tres puntos, que coincide con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y podemos construir su centro O. La paralela a OS por H es la altura del triángulo ABC desde A, la cual corta a la circunferencia circunscrita al triángulo precisamente en A. Una vez hallado A, el punto N se encuentra en la intersección de AM con OS. La perpendicular a OS por N es el lado BC, el cual corta a la circunferencia en los puntos B y C, con lo que queda determinado el triángulo.

Solución del problema 31. Multiplicando la ecuación $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ por abc tenemos que $2bc+ac=ab$. Como a es divisor de ac y de ab, resulta que a divide a $2bc$, pero como a es impar, a divide a bc. Análogamente, b divide a ac y c divide a ab. Sea p un primo y sean α, β y γ las máximas potencias de p que dividen a a, b y c, respectivamente. Como $(a, b, c) = 1$, alguno de α, β o γ es cero, digamos que γ. Luego, $a|bc \Rightarrow \alpha \leq \beta+\gamma = \beta$ y $b|ac \Rightarrow \beta \leq \alpha+\gamma = \alpha$. Por lo tanto, $\alpha = \beta$, y la máxima potencia de p que divide a abc es $\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha$, que es un número par. Esto prueba que abc es un cuadrado perfecto.

Segunda Solución. Como antes, se prueba que $a|bc$, $b|ac$ y $c|ab$. Entonces existen enteros u, v y w tales que $au = bc$, $bv = ac$ y $cw = ab$. Luego, $a = \frac{bv}{c} = \frac{cw}{b}$ y de aquí $a^2 = vw$. Análogamente, $b^2 = uw$ y $c^2 = uv$. Supongamos que existe un primo p tal que $p|v$ y $p|w$. Entonces, $p|vw = a^2 \Rightarrow p|a$, $p|uw = b^2 \Rightarrow p|b$, y $p|uv = c^2 \Rightarrow p|c$, lo cual es un absurdo pues $(a, b, c) = 1$. Entonces, $(v, w) = 1$ de modo que v y w son cuadrados perfectos. Análogamente, $(u, w) = 1$ y u es un cuadrado perfecto. Finalmente, observamos que $a^2b^2c^2 = (vw)(uw)(uv) = (uvw)^2$ de donde $abc = uvw$ es un cuadrado perfecto.

Tercera Solución. Tenemos que $ab = ac+2bc$. Esta ecuación se puede escribir como $(a+2b)(a-2c) = a^2$. Supongamos que existe un primo p tal que $p|a+2b$ y $p|a-2c$. Entonces $p|a^2$, de donde $p|a$ y p es impar. Además, $p|(a+2b)-a = 2b$, y como p es impar, $p|b$. Análogamente, $p|c$. Pero esto es un absurdo pues $(a, b, c) = 1$. Luego, $a + 2b$ y $a - 2c$ son primos relativos, y como su producto es un cuadrado, se sigue que $a+2b$ y $a-2c$ son ambos cuadrados. Finalmente, multiplicando la ecuación $ab = ac + 2bc$ por c, tenemos que $abc = c^2(a + 2b)$, que es un cuadrado.

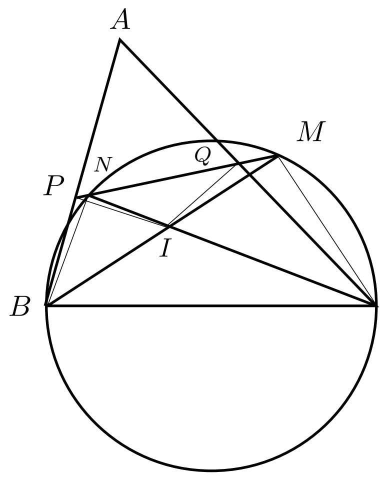
Solución del problema 32. Llamemos S a la suma. Entonces:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{2005} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^{2005} \sqrt{\frac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}} \\
&= \sum_{k=1}^{2005} \sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{(k^2+k)^2}} = \sum_{k=1}^{2005} \frac{k^2+k+1}{k^2+k} \\
&= \sum_{k=1}^{2005} \left(1+\frac{1}{k^2+k}\right) = 2005 + \sum_{k=1}^{2005} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= 2005 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}\right) \\
&= 2005 + \frac{2005}{2006} = \frac{(2005)(2007)}{2006},
\end{aligned}$$

de donde $p = 2005(2007)$ y $q = 2006$.

Solución del problema 33. Sea I el incentro del triángulo ABC, es decir, I es el punto de intersección de las bisectrices BM y CN. Tenemos que $\angle ABM =$

$\angle MBC$, porque BM es bisectriz del ángulo ABC, y $\angle MBC = \angle MNC$, porque el cuadrilátero $BNMC$ es cíclico. Entonces $\angle ABM = \angle MNC$, de donde el cuadrilátero $BPNI$ es cíclico y $\angle BNI = \angle BPI$. Análogamente, $\angle ACN = \angle NCB$ porque CN es bisectriz del ángulo ACB, y $\angle NCB = \angle NMB$ porque el cuadrilátero $BNMC$ es cíclico. Entonces $\angle ACN = \angle NMB$, de donde el cuadrilátero $CMQI$ es cíclico y $\angle CMI = \angle CQI$. Finalmente, observemos que la circunferencia inscrita al triángulo ABC es tangente a AB en P y a AC en Q si y sólo si $\angle BPI = 90°$ y $\angle CQI = 90°$ si y sólo si $\angle BNI = 90°$ y $\angle CMI = 90°$ si y sólo si BC es diámetro de S.



Solución del problema 34. Sean $d_1, d_2, \ldots, d_k$ los divisores positivos de n. Primero demostraremos que $d + \frac{n}{d} \leq n + 1$ para todo divisor d de n. Es claro que la desigualdad es cierta para $d = 1$. Si $d > 1$, entonces $d + \frac{n}{d} \leq n + 1$ si y sólo si $d^2 + n \leq d(n+1)$ si y sólo si $d(d-1) \leq (d-1)n$ si y sólo si $d \leq n$, lo cual es cierto. Usando esto y el hecho de que d es divisor de n si y sólo si $\frac{n}{d}$ es divisor de n, tenemos que $2\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k}(d_i + \frac{n}{d_i}) \leq k(n+1)$, de donde $f(n) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \frac{n+1}{2}$, y es fácil ver que la igualdad se cumple si y sólo si n es primo. Esto prueba la desigualdad derecha. Notemos ahora que si n no es un cuadrado, entonces para cada divisor d de n tenemos que $d \neq \frac{n}{d}$ y así k debe ser par. Agrupando d con $\frac{n}{d}$, obtenemos que $d_1 d_2 \cdots d_k = n^{k/2}$. Si n es un cuadrado, digamos $n = q^2$, entonces k es impar. Si agrupamos nuevamente d con $\frac{n}{d}$ para cada $d \neq q$, tenemos que $d_1 d_2 \cdots d_k = q \cdot n^{(k-1)/2} = n^{1/2} \cdot n^{(k-1)/2} = n^{k/2}$. En cualquier caso tenemos que $d_1 d_2 \cdots d_k = n^{k/2}$. Finalmente, aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos que:

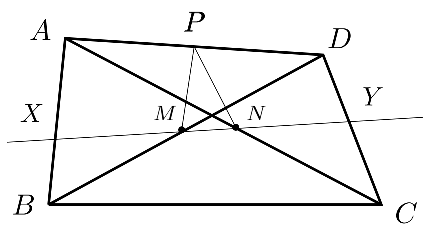
$$f(n) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_i \geq (d_1 d_2 \cdots d_k)^{1/k} = (n^{k/2})^{1/k} = \sqrt{n}.$$

Claramente la igualdad se cumple si y sólo si $n = 1$.

Solución del problema 35. Sean n, $2n$ y $3n$ los números. Como todo entero es congruente con la suma de sus dígitos módulo 9, tenemos que $n+2n+3n = 6n \equiv 1+2+\cdots+9 = 45 \equiv 0 \pmod{9}$. Entonces $6n$, y en consecuencia $3n$, son divisibles entre 9. Como $3n$ es uno de los tres números, el primer dígito de n no puede ser mayor que 3, y entonces tenemos que el último dígito de n no puede ser 1, ya que el entero $2n$ terminaría en 2 y $3n$ en 3 y ninguno de estos tres enteros podría ser usado para empezar como dígito de las centenas para el número n. El entero n no puede terminar en 5, ya que $2n$ terminaría en 0 y esto es imposible. Supongamos ahora que el dígito de las unidades de n es 2. Entonces los dígitos de las unidades de $2n$ y $3n$ son respectivamente 4 y 6, y los otros dos dígitos de $3n$ pueden ser escogidos entre 1, 3, 5, 7, 8 ó 9. Como la suma de todos los dígitos de $3n$ tiene que ser un múltiplo de 9, los primeros dos dígitos de $3n$ son 3 y 9 ó 5 y 7. Pero checando todas las posibilidades, encontramos que los números 192, 384 y 576 satisfacen las condiciones del problema. Análogamente consideramos los casos para los cuales n termina en 3, 4, 6, 7, 8 ó 9. Esto nos dará otras tres soluciones: 273, 546 y 819; 327, 654 y 981; 219, 438 y 657. Por lo tanto, hay 4 ternas en total.

Solución del problema 36. Sean M y N los puntos medios de AC y BD, respectivamente.

Llamemos P al punto medio de AD. Entonces PN es paralela a CD y PM es paralela a AB. Además $PM = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = PN$. Luego, el triángulo PMN es isósceles. Entonces, si llamamos X y Y a las intersecciones de MN con AB y CD respectivamente, tenemos que $\angle AXM = \angle PMN = \angle PNM = \angle DYN$.

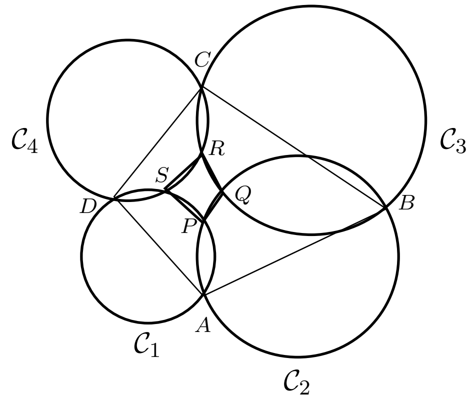


Solución del problema 37. Sea a el número de dos dígitos formado por los primeros dos dígitos del número original N, y sea b el número de dos dígitos formado por los últimos dos dígitos de N. Entonces $N = 100a + b$ y cumple que $100a+b = (a+b)^2$, es decir, $99a = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$. Luego, $(a+b)(a+b-1)$ debe ser divisible entre 99. Dividimos en casos.
1. $a+b = 99k$ y $a+b-1 = \frac{a}{k}$. Como $a, b \leq 99$, tenemos que $99k = a+b \leq 2(99)$ de donde $k \leq 2$. Si $k = 1$, entonces $a+b = 99$ y $a = a+b-1 = 98$, de donde $N = 9801 = (98+1)^2$. Si $k = 2$, entonces $a+b = 198$ y $\frac{a}{2} = a+b-1$, de donde $a = 394 > 99$, lo cual no es posible. Luego, en este caso no hay solución.
2. $a+b = \frac{a}{k}$ y $a+b-1 = 99k$. Como $a, b \leq 99$, tenemos que $99k = a+b-1 \leq 2(99)-1$ de donde $k \leq 2 - \frac{1}{99} < 2$, de modo que la única posibilidad es $k = 1$. Luego, $b = 0$ y $a = 100$ lo cual es imposible dado que a es un número de dos dígitos.
3. $a+b = 11m$, $a+b-1 = 9n$ y $mn = a$. Entonces $9n = 11m - 1$, por lo que $11m \equiv 1 \pmod 9$. Luego $m \equiv 5 \pmod 9$, es decir, $m = 9t+5$. Entonces $9n = 11(9t+5) - 1 = 99t + 54$, por lo que $n = 11t + 6$. De aquí que $a = mn = (9t+5)(11t+6) = 99t^2 + 109t + 30$, y como a es un número de dos dígitos tenemos que $t = 0$ y $a = 30$, de donde $m = 5$ y $n = 6$. Luego, $a+b = 11m = 55$ y $b = 25$. Por lo tanto, $N = 3025 = (30+25)^2$.
4. $a+b = 9m$, $a+b-1 = 11n$ y $mn = a$. Entonces $11n = 9m-1$, es decir, $9m \equiv 1 \pmod{11}$. Luego, $m \equiv 5 \pmod{11}$. De aquí que $m = 11t+5$ y $11n = 99t + 44$, de donde $n = 9t+4$, $a = mn = (11t+5)(9t+4) = 99t^2 + 99t + 20$. Como a es un número de dos dígitos, tenemos que $t = 0$ y $a = 20$. Así, $n = 4$, $m = 5$ y $b = 25$. Luego, $N = 2025 = (20+25)^2$.
5. $a+b = 3n$ y $a+b-1 = 33m$ ó $a+b = 33n$ y $a+b-1 = 3m$. Claramente ningún caso es posible pues $a+b$ y $a+b-1$ son consecutivos y no pueden ser ambos múltiplos de 3.

Solución del problema 38. Tenemos que $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1)$ y como $f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = n^2 f(n)$ se sigue que $n^2 f(n) + f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1)$. Luego, $f(n+1) = \frac{n^2 f(n)}{n^2+2n} = \frac{n f(n)}{n+2}$. Entonces, $f(2006) = \frac{2005 f(2005)}{2007}$, $f(2005) = \frac{2004 f(2004)}{2006}, \ldots, f(3) = \frac{2f(2)}{4}$, $f(2) = \frac{f(1)}{3}$.
Por lo tanto, $f(2006) = \frac{2005 \cdot 2004 \cdot 2003 \cdots 2 f(1)}{2007 \cdot 2006 \cdot 2005 \cdots 4 \cdot 3} = \frac{2f(1)}{2007 \cdot 2006} = \frac{2(2006)}{2007 \cdot 2006} = \frac{2}{2007}$.

Solución del problema 39. Como los cuadriláteros $ADSP$, $APQB$, $BQRC$ y $CRSD$ son cíclicos, tenemos que $\angle PSD + \angle PAD = 180°$, $\angle PQB + \angle PAB = 180°$, $\angle BQR + \angle RCB = 180°$ y $\angle DSR + \angle RCD = 180°$, de donde:

$$\angle PSD + \angle PQB + \angle BQR + \angle DSR = 720° - (\angle PAD + \angle PAB + \angle RCB + \angle RCD).$$



Por otra parte, en el cuadrilátero $PQRS$ tenemos que $\angle PSD + \angle DSR = 360° - \angle PSR$ y $\angle PQB + \angle BQR = 360° - \angle PQR$, de donde:

$$\angle PSD + \angle PQB + \angle BQR + \angle DSR = 720° - (\angle PSR + \angle PQR).$$

Luego:

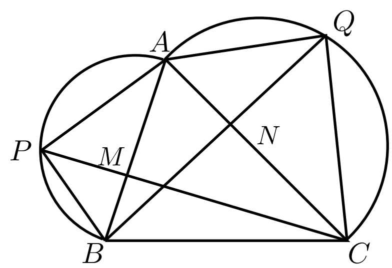
$$\begin{aligned}\angle PSR + \angle PQR &= (\angle PAD + \angle PAB) + (\angle RCB + \angle RCD)\\ &= \angle DAB + \angle DCB.\end{aligned}$$

De aquí que $\angle DAB + \angle DCB = 180°$ si y sólo si $\angle PSR + \angle PQR = 180°$, es decir, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico.

Solución del problema 40. Vamos a decir que un número es B si la suma de sus dígitos es divisible por 11. Sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n. Si n termina en 0, entonces $n, n+1, \ldots, n+9$ difieren solo en el dígito de las unidades que va de 0 a 9. Luego, $s(n), s(n+1), \ldots, s(n+9)$ es una progresión aritmética con diferencia común 1. Por lo tanto, si $s(n) \not\equiv 1 \pmod{11}$, entonces alguno de estos números es B.
Ahora, si n termina en $k \geq 0$ nueves, entonces $s(n+1) = s(n) + 1 - 9k$, ya que los últimos k dígitos de $n+1$ son ceros en lugar de nueves, y el siguiente dígito a la izquierda es mayor en 1 que el correspondiente dígito en n.
Finalmente, supongamos que n termina en 0 y que $s(n) \equiv s(n+10) \equiv 1 \pmod{11}$. Como $s(n) \equiv 1 \pmod{11}$, debemos tener que $s(n+9) \equiv 10 \pmod{11}$. Si $n+9$ termina en k nueves, entonces $2 \equiv s(n+10) - s(n+9) \equiv 1 - 9k \pmod{11}$ de donde $k \equiv 6 \pmod{11}$.
(a) Supongamos que tenemos 39 enteros consecutivos, tal que ninguno de ellos

es B. Uno de los primeros 10 debe terminar en 0, llamémosle n. Como ninguno de $n, n+1, \ldots, n+9$ es B, debemos tener que $s(n) \equiv 1 \pmod{11}$. Análogamente, $s(n+10) \equiv 1 \pmod{11}$ y $s(n+20) \equiv 1 \pmod{11}$. De nuestra tercera observación anterior, esto implica que $n+9$ y $n+19$ deben terminar en al menos 6 nueves. Esto es imposible, pues $n+10$ y $n+20$ no pueden ser ambos múltiplos de un millón.
(b) Supongamos que tenemos 38 enteros consecutivos $n, n+1, \ldots, n+37$, ninguno de los cuales es B. Por un análisis similar al inciso anterior, ninguno de los primeros nueve números puede terminar en 0. Luego, $n+9$ debe terminar en 0, así como $n+19$ y $n+29$. Luego, $s(n+9) \equiv s(n+19) \equiv 1 \pmod{11}$, y por lo tanto $s(n+18) \equiv 10 \pmod{11}$. Además, si $n+18$ termina en k nueves, debemos tener que $k \equiv 6 \pmod{11}$. El menor número posible es $n+18 = 999999$ cuando $k = 6$, lo que nos da los 38 números consecutivos siguientes: $999981, 999982, \ldots, 1000018$.

Solución del problema 41. Sea M el pie de la altura desde C, y sea N el pie la altura desde B. Como el triángulo APB es rectángulo en P, y PM es la altura desde P, tenemos que $AP^2 = AB \cdot AM = AB \cdot AC \cos\angle BAC$, donde la primera igualdad se sigue de la semejanza de los triángulos APB y APM. Análogamente, $AQ^2 = AC \cdot AN = AC \cdot AB \cos\angle BAC$. Por lo tanto, $AP = AQ$.



Solución del problema 42. Sea m un número entero. Tenemos que:
1. Si m es impar, entonces el mayor divisor impar de m es él mismo.
2. Si $m = 2k$, entonces el mayor divisor impar de m es k.
3. Si $m = 2^k$, entonces el mayor divisor impar de m es 1.
Sea $S(a, b, c, \ldots)$ la suma de los mayores divisores impares de $a, b, c, \ldots$. Tene-

mos que:

$$\begin{aligned} S_n = S(1,2,\ldots,2^n) &= S(1,3,\ldots,2^n-1)+S(2,4,6,\ldots,2^n)\\ &= 1+3+\cdots+2^n-1+S(1,2,3,\ldots,2^{n-1})\\ &= (2^{n-1})^2+S(1,2,3,\ldots,2^{n-1})\\ &= (2^{n-1})^2+S_{n-1}. \end{aligned}$$

Continuando de esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} S_{n-1} = S(1,2,3,\ldots,2^{n-1}) &= S(1,3,\ldots,2^{n-1}-1)+S(2,4,6,\ldots,2^{n-1})\\ &= 1+3+\cdots+2^{n-1}-1+S(1,2,3,\ldots,2^{n-2})\\ &= (2^{n-2})^2+S(1,2,3,\ldots,2^{n-2})\\ &= (2^{n-2})^2+S_{n-2}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Luego:

$$\begin{aligned} S_n-S_{n-1} &= (2^{n-1})^2 = 4^{n-1}\\ S_{n-1}-S_{n-2} &= (2^{n-2})^2 = 4^{n-2}\\ \vdots &= \vdots\\ S_3-S_2 &= 4^2\\ S_2-S_1 &= 4, \end{aligned}$$

de donde $(S_n-S_{n-1})+(S_{n-1}-S_{n-2})+\cdots+(S_2-S_1) = S_n-S_1 = 4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4^2+4 = \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} = \frac{4(4^{n-1}-1)}{3}$. Por lo tanto, $S_n-2 = \frac{4(4^{n-1}-1)}{3}$ y de aquí $S_n = \frac{4^n+2}{3}$.

Solución del problema 43. Sean $M = \overline{m_8m_7m_6m_5m_4m_3m_2m_1m_0}$ y $N = \overline{n_8n_7n_6n_5n_4n_3n_2n_1n_0}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} M-m_0\cdot 10^0+n_0\cdot 10^0 &\equiv 0 \pmod 7\\ M-m_1\cdot 10^1+n_1\cdot 10^1 &\equiv 0 \pmod 7\\ &\vdots \quad \vdots\\ M-m_7\cdot 10^7+n_7\cdot 10^7 &\equiv 0 \pmod 7\\ M-m_8\cdot 10^8+n_8\cdot 10^8 &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

Sumando estas congruencias tenemos que:

$$9M-M+N\equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow M+N\equiv 0 \pmod 7.$$

Falta probar entonces que $N - n_i \cdot 10^i + m_i \cdot 10^i \equiv 0 \pmod 7$ para cada $i = 0, 1, \ldots, 8$. Para ver esto, observemos que:

$$\begin{aligned} N - n_i \cdot 10^i + m_i \cdot 10^i &\equiv -M - n_i \cdot 10^i + m_i \cdot 10^i \\ &= -(M + n_i \cdot 10^i - m_i \cdot 10^i) \\ &\equiv 0 \pmod 7. \end{aligned}$$

Solución del problema 44. Demostraremos que para todo entero positivo n se tiene que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Haciendo $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Tomando $n = 1003$ se tiene el resultado.

Segunda Solución. Usaremos inducción para demostrar el resultado de la primer solución. Para $n = 1$ tenemos que $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, lo cual es cierto. Supongamos el resultado cierto para $n = k$. Es decir, supongamos que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}.$$

Veamos el caso $n = k+1$. Sea $S' = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} S' &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) \\ &= \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{2}{2k+2} - \frac{1}{2k+2}\right) \\ &= \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}, \end{aligned}$$

y así el resultado es cierto para $n = k+1$. Esto completa la demostración.

Solución del problema 45. Por la ley de los senos, tenemos que $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$. Entonces:

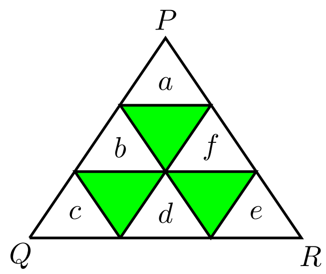
$$\begin{aligned} 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} &= \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} + \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} - \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}, \end{aligned}$$

de donde $a^2 + b^2 - c^2 = ab$. Pero la ley de los cosenos establece que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Luego, $2ab\cos C = ab$ de donde $\cos C = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\angle C = 60°$.

Solución del problema 46. Representemos cada ciudad por un punto y pongamos una línea entre dos puntos si entre las ciudades que representan hay una autopista. Como el número total de parejas de puntos es $\binom{a+b}{2}$, las posibilidades de poner o no líneas son $2^{\binom{a+b}{2}}$. Sin embargo, aquí no se está tomando en cuenta el que al menos haya una ciudad de A conectada mediante autopista a alguna ciudad de B. Entonces, hay que restar los casos en que entre todas las ciudades de A y las de B no haya líneas. Estos casos son $2^{\binom{a}{2}}2^{\binom{b}{2}}$. Por lo tanto, la respuesta es $2^{\binom{a+b}{2}} - 2^{\binom{a}{2}+\binom{b}{2}}$.

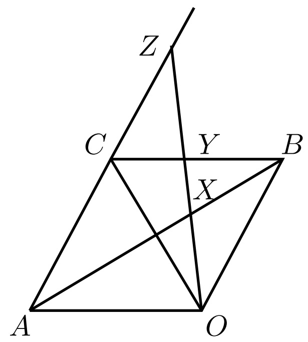
Solución del problema 47. Si n es solución, entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es múltiplo de n y por lo tanto n debe ser impar. Claramente, $n = 1$, y $n = 3$ con $x_1 = 1, x_2 = 3$ y $x_3 = 2$ son solución. Supongamos que $n \geq 5$. Entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - x_n \equiv 0 \pmod{n-1}$, de donde $x_n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{n+1}{2} \pmod{n-1}$ (ya que $n \equiv 1 \pmod{n-1}$). Luego, $x_n = \frac{n+1}{2} + (n-1)i$ para algún entero $i \geq 0$. Si $i \geq 1$, entonces $x_n \geq \frac{n+1}{2} + n - 1 = \frac{3n-1}{2} > n$ ya que $n > 1$, lo cual es un absurdo pues $1 \leq x_n \leq n$. Luego, $i = 0$ y $x_n = \frac{n+1}{2}$. Análogamente, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} = \frac{n(n+1)}{2} - x_n - x_{n-1} \equiv 0 \pmod{n-2}$ implica que $x_{n-1} \equiv \frac{n(n+1)}{2} - x_n \equiv n + 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$ (ya que $n \equiv 2 \pmod{n-2}$), y por lo tanto $x_{n-1} = \frac{n+1}{2}$. Luego, $x_n = x_{n-1}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $n = 1$ y $n = 3$ son las únicas soluciones.

Solución del problema 48. Sean a, b, c, d, e y f, los números que quedan en los triangulitos según se indica en la figura. Podemos suponer que $a < c < e$ y después, el resultado que obtengamos con esta condición lo multiplicamos por $6 = 3!$, que es el número de permutaciones de estas tres letras.



Tenemos que $a + b + c = c + d + e = a + f + e = x$. Tenemos entonces que $3x = 2a + 2c + 2e + b + d + f = 21 + a + c + e$ y así $a + c + e$ es múltiplo de 3. Además, como los números están entre 1 y 6, a, c y e deben dejar distinto residuo al dividirse entre 3. Con estas condiciones tenemos 8 casos para (a, c, e): $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 5, 6)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 4, 5)$ y $(4, 5, 6)$. Ahora consideremos también los números que faltan de poner. Junto a los dos que sumen más en las esquinas debe ir el más chico de los que faltan y viceversa (es decir, entre los dos que sumen más debe ir el más chico). De esta manera, los otros tres números están determinados por a, c y e. Es fácil verificar que sólo los casos siguientes son posibles para (a, b, c, d, e, f): $(1, 6, 2, 4, 3, 5)$, $(1, 6, 3, 2, 5, 4)$, $(2, 5, 4, 1, 6, 3)$ y $(4, 3, 5, 1, 6, 2)$. La respuesta es $6 \times 4 = 24$.

Solución del problema 49. Como ABC es isósceles, la mediatriz CO de AB es bisectriz del ángulo ACB. Entonces los triángulos isósceles AOC y BOC tienen un ángulo de 60° en la base y por lo tanto son equiláteros. En consecuencia, $AOBC$ es un rombo y, en particular, es paralelogramo. Entonces, los triángulos CZY y BOY son semejantes, así como también lo son los triángulos AZX y BOX. Por otra parte, la igualdad a demostrar es equivalente a la igualdad $OY(OZ-OX) = OX \cdot OZ$. Como $OZ - OX = XZ$, basta demostrar entonces que $OY \cdot XZ = OX \cdot OZ$. De la semejanza de los triángulos CZY y BOY tenemos que $\frac{YZ}{OY} = \frac{CZ}{OB}$, y de la semejanza de los triángulos AZX y BOX tenemos que $\frac{AZ}{OB} = \frac{XZ}{OX}$.



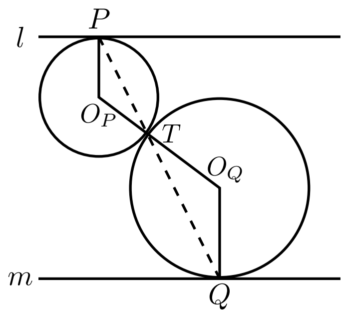
Luego:

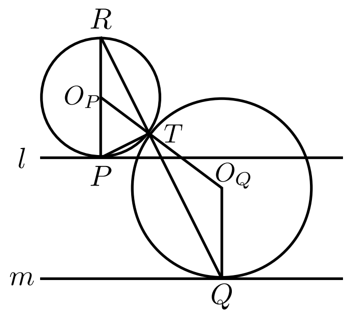
$$\frac{OZ}{OY} = 1 + \frac{YZ}{OY} = 1 + \frac{CZ}{OB} = \frac{OB + CZ}{OB} = \frac{AC + CZ}{OB} = \frac{AZ}{OB} = \frac{XZ}{OX},$$

de donde se sigue lo que queríamos.

Solución del problema 50. Denotemos con T_n al n -ésimo número triangular. Es fácil ver que la suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado, ya que $T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1)(n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$. Por otro lado, tenemos que $T_n = \frac{n(n+1)}{2} < 2006$ si y sólo si $n \leq 62$, es decir, hay 62 números triangulares menores que 2006. Como tenemos 32 números triangulares menores que 2006, y hay 31 parejas de números triangulares consecutivos (T_1, T_2), $(T_3, T_4), \ldots, (T_{61}, T_{62})$ menores que 2006, por el principio de las casillas habrá al menos un par de números triangulares consecutivos cuya suma es un cuadrado.

Solución del problema 51. Sea C_P una circunferencia con centro O_P, tangente a l en P y sea C_Q una circunferencia con centro O_Q, tangente a m en Q. Supongamos, además, que C_P y C_Q son tangentes exteriormente en T. Entonces O_P, T y O_Q son colineales. Además, las rectas PO_P y QO_Q son paralelas, por ser perpendiculares a l y m. Tenemos dos posibilidades: que C_P y C_Q se construyan hacia lados opuestos (una hacia arriba y otra hacia abajo de sus tangentes respectivas) o que se construyan hacia el mismo lado (ambas hacia arriba o hacia abajo).





En la primera posibilidad, tenemos que $\angle PO_PT = \angle QO_QT$. Luego, los triángulos isósceles PO_PT y QO_QT son semejantes. Entonces $\angle PTO_P = \angle QTO_Q$ y los puntos P, T y Q son colineales. Además podemos asegurar que T está dentro de la franja delimitada por l y m. Por lo tanto, T es un punto del segmento PQ.

En la segunda posibilidad, T está fuera de la franja delimitada por l y m. Sea R el punto diametralmente opuesto a P en C_P. La tangente a C_P por R es paralela a m y entonces, por el argumento anterior, R, T y Q son colineales. Además, $\angle RTP = 90°$ porque PR es diámetro de C_P. Luego, $\angle PTQ = 90°$ y T pertenece a la porción de la circunferencia de diámetro PQ que queda fuera de la franja delimitada por l y m.

Por lo tanto, el lugar geométrico buscado consiste del segmento PQ y los dos arcos de la circunferencia de diámetro PQ que quedan fuera de la franja delimitada por l y m.

Solución del problema 52. (a) Tenemos que:

$$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2) = (ac+3bd)^2+3(ad-bc)^2 = (ac-3bd)^2+3(ad+bc)^2.$$

(b) Sean a y b enteros tales que $7n = a^2+3b^2 = a^2+7b^2-4b^2$. Entonces, $a^2-4b^2 \equiv 0 \pmod 7$ de modo que 7 divide a $a-2b$ o a $a+2b$. Supongamos que $n = c^2+3d^2$. Como $7 = 2^2+3\cdot 1^2$, tenemos del inciso anterior que:

$$7n = (2c+3d)^2+3(c-2d)^2 = (2c-3d)^2+3(c+2d)^2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $2c+3d = a$ y $c-2d = b$, obtenemos que $c = \frac{2a+3b}{7}$ y $d = \frac{a-2b}{7}$. Como $2a+3b \equiv 2a-4b \equiv 2(a-2b) \pmod 7$, tenemos que si 7 divide a $a-2b$, entonces c y d son ambos enteros y satisfacen que $n = c^2+3d^2$. Argumentos similares implican el resultado si suponemos que 7 divide a $a+2b$.

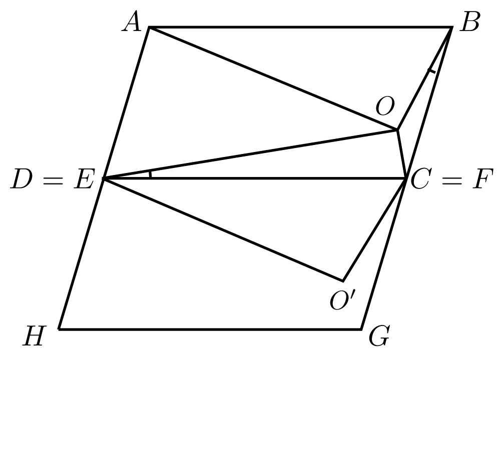
Solución del problema 53. Supongamos que es posible. Entonces, los números del tercer renglón tendrían en algún orden, las terminaciones 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, de modo que sumarían un número impar pues $0+1+2+\cdots+9=45$. Por otra parte, como la suma de los números del tercer renglón es igual a la suma de los números del primer y segundo renglones, entonces esta suma es igual al doble de la suma de los números del 1 al 10, y por lo tanto, el resultado es par, lo cual es una contradicción. En consecuencia, no es posible hacer lo que se pide.

Solución del problema 54. Notemos primero que la quinteta $(1,2,3,4,5)$ es solución de la ecuación. Reescribiendo la ecuación, tenemos que:

$$a^2-(bcde)a+(b^2+c^2+d^2+e^2+65)=0.$$

Luego, si (a_1,b_1,c_1,d_1,e_1) es solución, entonces por la relación que existe entre las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática, concluimos que $(b_1c_1d_1e_1-a_1,b_1,c_1,d_1,e_1)$ también es solución. Entonces, a partir de la solución $(1,2,3,4,5)$, podemos obtener la solución $(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5-1,2,3,4,5)=(119,2,3,4,5)$. Por otra parte, como la ecuación original es simétrica se sigue que la quinteta $(2,3,4,5,119)$ también es solución. De manera análoga, obtenemos la solución $(3\cdot 4\cdot 5\cdot 119-2,3,4,5,119)=(7138,3,4,5,119)$. Y nuevamente, por la simetría de la ecuación, la quinteta $(3,4,5,119,7138)$ también es solución. Continuando de esta forma, obtenemos la solución $(7138,4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3,x,y,z)$ donde $x=5\cdot 119\cdot 7138\cdot(4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3)-4$, $y=119\cdot 7138\cdot(4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3)\cdot x-5$ y $z=7138\cdot(4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3)\cdot x\cdot y-119$. Y es claro que cada uno de los números de esta quinteta es mayor que 2006. Por lo tanto, sí existen enteros con la propiedad pedida.

Solución del problema 55. Calquemos el paralelogramo $ABCD$ y el punto O, para obtener el paralelogramo $EFGH$ y el punto O'. Hagamos coincidir el lado EF con el lado CD para obtener el paralelogramo $ABGH$.

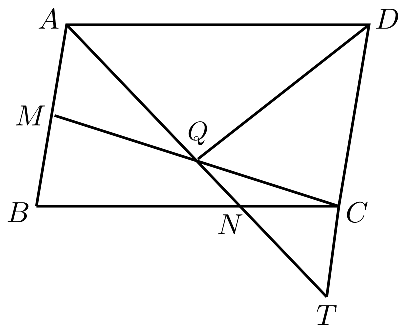


Tenemos entonces que $\angle AOB = \angle DO'C$ y por lo tanto, $\angle COD + \angle DO'C = 180°$. Luego, el cuadrilátero $CODO'$ es cíclico y $\angle ODC = \angle OO'C$. Como OB y $O'C$ son paralelas y tienen la misma longitud (por construcción), tenemos que el cuadrilátero $BOO'C$ es un paralelogramo y $\angle OO'C = \angle OBC$. Se sigue entonces que $\angle OBC = \angle ODC$.

Solución del problema 56. Es fácil ver que n debe ser múltiplo de 6 (si $n \equiv 1, 2, 3, 4$ o $5 \pmod 6$, entonces alguno de $n-1$ o $n+1$ no sería primo). Sea $n = 6m$ con m entero positivo. Entonces, $n^2(n^2+16) = (6m)^2((6m)^2+16) = 144m^2(9m^2+4)$. Si $m \equiv 0 \pmod 5$, entonces $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de $144 \times 5 = 720$. Si $m \equiv 1$ o $-1 \pmod 5$, entonces $n = 30a \pm 6$ y es fácil ver que alguno de $n-1$ o $n+1$ es múltiplo de 5. Por último, si $m \equiv 2$ o $-2 \pmod 5$, entonces $9m^2 + 4 \equiv 9(4) + 4 \equiv 0 \pmod 5$ y por lo tanto, $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de $144 \times 5 = 720$. Si $n = 720$, entonces $n^2(n^2+16)$ es múltiplo de 720, pero $721 = 7 \times 103$ no es primo. Luego, el recíproco es falso.

Solución del problema 57. Elevando al cuadrado dos veces cada igualdad, tenemos que $a^4 - 8a^2 + a + 11 = 0$, $b^4 - 8b^2 + b + 11 = 0$, $c^4 - 8c^2 - c + 11 = 0$ y $d^4 - 8d^2 - d + 11 = 0$. Elevando nuevamente al cuadrado cada una de estas igualdades, obtenemos expresiones del tipo $x^8 - 16x^6 + 86x^4 - 177x^2 + 121 = 0$ para a, b, c y d. Haciendo $y = x^2$, esta última expresión se convierte en $y^4 - 16y^3 + 86y^2 - 177y + 121 = 0$ la cual tiene cuatro raíces complejas, digamos y_1, y_2, y_3, y_4 tales que $y_1y_2y_3y_4 = 121$. Como $a^2b^2c^2d^2 = y_1y_2y_3y_4$, se sigue que $abcd = \sqrt{121} = 11$.

Solución del problema 58. Prolonguemos AN y DC, y llamemos T al punto de intersección. Sea $AM = NC = x$.



Como NC y AD son paralelas, los triángulos NTC y ATD son semejantes, de modo que $\frac{TC}{TD} = \frac{x}{AD}$. Análogamente, como AM y CT son paralelas, los triángulos AQM y TQC son semejantes, y en consecuencia $\frac{TC}{x} = \frac{QT}{AQ}$. De estas razones de semejanza tenemos que $\frac{TD}{AD} = \frac{QT}{AQ}$, y por el Teorema de la bisectriz se sigue que DQ es bisectriz del ángulo ADT que es el mismo ángulo CDA.

Solución del problema 59. Notemos que $(a-b)(3a+3b+1) = 3a^2+a-3b^2-b = a^2$. Demostraremos que $a-b$ y $3a+3b+1$ son primos entre sí. Supongamos que p es un divisor primo de $a-b$. Entonces, p divide a a^2-b^2 y como $2a^2+a = 3b^2+b$ se sigue que p divide también a b^2. Luego, p divide a b y también divide a a (porque divide a $a-b$). De aquí que si p divide a $3a+3b+1$, entonces p divide a 1, lo cual es imposible. Por lo tanto, $a-b$ y $3a+3b+1$ son primos entre sí, y como su producto es un cuadrado, cada uno de ellos es un cuadrado.

Solución del problema 60. Sean A y B dos vértices del polígono. Si M es otro vértice tal que el triángulo AMB tiene área 1, entonces M está sobre una recta l paralela a la recta AB y a distancia $h = \frac{2}{AB}$ (que es una altura del triángulo AMB) de AB. Luego, hay a lo más 4 de tales puntos M, con a lo más 2 de cada lado de la recta AB. En efecto, si hubiera 3 de un mismo lado de AB, digamos M_1, M_2 y M_3 con h_1, h_2 y h_3 alturas de los triángulos AM_1B, AM_2B y AM_3B, respectivamente, sobre AB, entonces $h_1 = h_2 = h_3$ de modo que M_1, M_2 y M_3 serían colineales, lo cual no puede ser porque el polígono es convexo. Dividimos en casos:

1. Si no hay ningún vértice entre A y B, entonces hay a lo más 2 triángulos de área 1 teniendo a AB como uno de sus lados. Como hay n posibilidades para que AB sea un lado del polígono, tenemos en este caso a lo más $2n$ triángulos de área 1.
2. Si hay exactamente un vértice entre A y B (en el sentido de las manecillas del reloj), entonces hay a lo más 3 triángulos de área 1 teniendo a AB como uno de sus lados. Como hay n posibilidades para A y B en este caso, tenemos a lo más $3n$ triángulos de área 1.
3. Si hay al menos dos vértices del polígono en cada lado de la recta AB, entonces hay a lo más 4 triángulos de área 1 teniendo a AB como uno de sus lados. Como hay $\binom{n}{2} - 2n = \frac{n(n-1)}{2} - 2n$ posibilidades para A y B en este caso (hay $\binom{n}{2}$ formas de elegir cualesquiera dos vértices A y B del polígono, y $2n$ formas de elegirlos de tal manera que no hay ningún otro vértice entre A y B o hay exactamente un vértice entre ellos en el sentido de las manecillas del reloj), tenemos a lo más $4(\frac{n(n-1)}{2} - 2n) = 2n(n-5)$ triángulos de área 1.

Como cada triángulo tiene 3 lados, cada triángulo de área 1 se contó 3 veces en el razonamiento anterior. Luego, a lo más hay $\frac{2n+3n+2n(n-5)}{3} = \frac{n(2n-5)}{3}$ triángulos de área 1.

3.2. Soluciones de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Solución del problema 1. Tenemos que $pqr+1$ es cuadrado, por tanto $pqr = m^2-1 = (m+1)(m-1)$, para algún entero m.
Dividimos en dos casos:
1. Si $p \mid m-1$, entonces:
(a) Si $m+1 = qr$, entonces $m-1 = p$ y $qr - p = 2$, lo cual no es posible ya que $qr > p^2 \geq 2p \geq p+2$.
(b) Si $m+1 = q$, entonces $m-1 = pr$, luego $q > pr > r$, lo cual no es posible.
(c) Si $m+1 = r$, entonces $m-1 = pq$, luego $pq = r-2 = (2004-25pq)-2$. Tenemos entonces que $26pq = 2002 \Rightarrow pq = 7\cdot 11 \Rightarrow p = 7$ y $q = 11$. Luego, $r = pq+2 = 7\cdot 11+2 = 79$.
2. Si $p \mid m+1$, entonces:
(a) Si $m-1 = qr$, entonces $m+1 = p$, pero entonces $p > qr > r$, lo cual no es posible.
(b) Si $m-1 = q$, entonces $m+1 = pr$ y $pr - q = 2$, pero esto no es posible ya que $pr > 2r > 2q > q+2$.
(c) Si $m-1 = r$, entonces $m+1 = pq$, luego $pq = r+2 = (2004-25pq)+2$. Por lo que $26pq = 2006$, y no hay solución ya que $\frac{2006}{26}$ no es entero.
Por tanto la única solución es $p = 7$, $q = 11$ y $r = 79$.

Segunda Solución. Tenemos que $pq = \frac{2004-r}{25} < \frac{2004}{25} < 81$. Luego, $p^2 < pq < 81 \Rightarrow p < 9$. Dividimos en casos:
1. Si $p = 2$, entonces $25pq + r$ es impar, y por lo tanto no hay solución.
2. Si $p = 3$, entonces $r = 2004 - 25\cdot 3\cdot q = 3(668-25q) \Rightarrow 3$ divide a r, pero $r > 3$ y r es primo. Luego, no hay solución.
3. Si $p = 5$, entonces $5 < q < \frac{81}{5} < 17$ y tenemos los siguientes subcasos:
(a) Si $q = 7$, entonces $r = 2004 - 25\cdot 5\cdot 7 = 1129$ que es primo, pero $5\cdot 7\cdot 1129 + 1 \equiv 6 \pmod 9$ y no puede ser un cuadrado porque es múltiplo de 3 pero no de 9.
(b) Si $q = 11$, entonces $r = 2004 - 25\cdot 5\cdot 11 = 629 = 17\cdot 37$ que no es primo.
(c) Si $q = 13$, entonces $r = 2004 - 25\cdot 5\cdot 13 = 379$ que es primo, pero $5\cdot 13\cdot 379 + 1 \equiv 3 \pmod 9$ y no puede ser un cuadrado.
(d) Si $p = 7$, entonces $7 < q < \frac{81}{7} < 12$ de donde $q = 11$ y $r = 2004 - 25\cdot 7\cdot 11 = 79$ que es primo, y $7\cdot 11\cdot 79 + 1 = 77\cdot 79 + 1 = 78^2$.
Por lo tanto, la única solución es $p = 7$, $q = 11$ y $r = 79$, como en la primer solución.

Solución del problema 2. Supongamos que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ es una colección con la mayor cantidad de enteros con la propiedad. Es claro que $a_i \geq i$, para toda $i = 1, ..., n$.
Si a y b son dos enteros de la colección con $a > b$, como $|a-b| = a-b \geq \frac{ab}{100}$, tenemos que $a(1-\frac{b}{100}) \geq b$, por lo que si $100-b > 0$, entonces $a \geq \frac{100b}{100-b}$.
Notemos que no existen dos enteros a y b en la colección mayores que 100, ya que si $a > b > 100$, entonces $a-b = |a-b| \geq \frac{ab}{100} > a$, lo cual es falso.
También tenemos que para enteros a y b menores que 100, se cumple que $\frac{100a}{100-a} \geq \frac{100b}{100-b} \iff 100a - ab \geq 100b - ab \iff a \geq b$.
Es claro que $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ es una colección con la propiedad.
Ahora, $a_{11} \geq \frac{100a_{10}}{100-a_{10}} \geq \frac{100\cdot 10}{100-10} = \frac{100}{9} > 11$, lo que implica que $a_{11} \geq 12$.

$$\begin{aligned}
a_{12} &\geq \frac{100a_{11}}{100-a_{11}} \geq \frac{100\cdot 12}{100-12} = \frac{1200}{88} > 13 &\implies& \quad a_{12} \geq 14.\\
a_{13} &\geq \frac{100a_{12}}{100-a_{12}} \geq \frac{100\cdot 14}{100-14} = \frac{1400}{86} > 16 &\implies& \quad a_{13} \geq 17.\\
a_{14} &\geq \frac{100a_{13}}{100-a_{13}} \geq \frac{100\cdot 17}{100-17} = \frac{1700}{83} > 20 &\implies& \quad a_{14} \geq 21.\\
a_{15} &\geq \frac{100a_{14}}{100-a_{14}} \geq \frac{100\cdot 21}{100-21} = \frac{2100}{79} > 26 &\implies& \quad a_{15} \geq 27.\\
a_{16} &\geq \frac{100a_{15}}{100-a_{15}} \geq \frac{100\cdot 27}{100-27} = \frac{2700}{73} > 36 &\implies& \quad a_{16} \geq 37.\\
a_{17} &\geq \frac{100a_{16}}{100-a_{16}} \geq \frac{100\cdot 37}{100-37} = \frac{3700}{63} > 58 &\implies& \quad a_{17} \geq 59.\\
a_{18} &\geq \frac{100a_{17}}{100-a_{17}} \geq \frac{100\cdot 59}{100-59} = \frac{5900}{41} > 143 &\implies& \quad a_{18} \geq 144.
\end{aligned}$$

Y como ya hemos observado que no hay dos enteros de la colección mayores que 100, la mayor cantidad es 18. Una colección con 18 enteros que cumple la condición es:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,17,21,27,37,59,144\}.$$

Segunda Solución. Observemos que la condición es equivalente a $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| \geq \frac{1}{100}$.
Es fácil ver que $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ es una colección con la propiedad y que el siguiente número que es posible agregar a esta colección de modo que siga cumpliendo la propiedad es el 12. Continuando de esta manera obtenemos una colección con 18 enteros que cumple la condición:

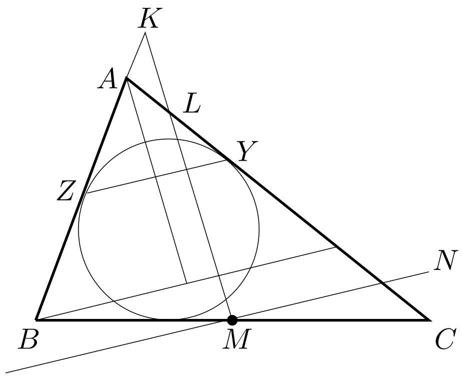
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,17,21,27,37,59,144\}.$$

Para ver que no puede haber una con más elementos, partimos los enteros positivos mayores que 9 en los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{l}\{10,11\}\\ \{12,13\}\\ \{14,15,16\}\\ \{17,18,19,20\}\\ \{21,22,\ldots,26\}\\ \{27,28,\ldots,36\}\\ \{37,38,\ldots,58\}\\ \{59,60,\ldots,143\}\\ \{144,145,\ldots\}\end{array}$$

Observemos que si a y b son el mínimo y el máximo de alguno de los primeros 8 conjuntos, entonces $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}|<\frac{1}{100}$. Por lo tanto, esto mismo sucede para cualesquiera a y b distintos que estén en el mismo conjunto (de los primeros 8), puesto que los extremos son los números cuyos recíprocos están más alejados. Por otro lado, si a y b son dos números distintos del último conjunto, suponiendo sin pérdida de generalidad que $a<b$, entonces $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}|=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<\frac{1}{a}\leq\frac{1}{144}<\frac{1}{100}$. Consideremos una colección de enteros que cumple la propiedad. Por lo anterior, ésta puede tener a lo más un número de cada uno de los nueve conjuntos. Entonces, puesto que los números del 1 al 9 son los únicos que no aparecen en ninguno de los conjuntos anteriores, la colección tiene a lo más $9+9=18$ elementos, lo cual junto con el ejemplo ya dado muestra que el máximo buscado es 18.

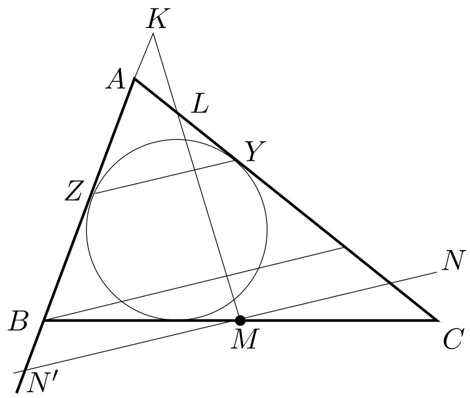
Solución del problema 3. Como AZ y AY son tangentes al incírculo de ABC, se cumple que $AZ=AY$. Trazamos la paralela a YZ por B y llamamos N' al punto donde esta recta corta a CA. También trazamos la perpendicular a BN' por A y llamamos M' al punto donde ésta corta a BN'.
Como los triángulos AZY y ABN' son semejantes (tienen lados paralelos), se tiene que ABN' es isósceles, por lo que AM' es bisectriz del $\angle BAN'$ y M' es punto medio de BN'.
Los triángulos CMN y CBN' son semejantes (tienen lados paralelos) y como M es punto medio de BC, la razón de semejanza es $1:2$, por lo que $CN=NN'$ y $MN=M'N'$. También tenemos por ser MN y BN' paralelas que $\angle M'N'A=\angle MNL$, entonces, por el criterio LAL, los triángulos $M'N'A$ y MNL son semejantes. Por lo que LM y MN son perpendiculares.



Ahora observemos que $AL = AN - NL = AN - AB = AN - AN' = N'N = CN$, y también que $\angle AKL = \angle BAM' = \angle M'AC = \angle ALK$ (ya que AM' y MK son paralelas y AM' es bisectriz).

Luego el triángulo ALK es isósceles con $AK = AL$ y por tanto $AK = CN$.

Segunda Solución. Sea N' la intersección de MN con AB. Como AZ y AY son tangentes al incírculo de ABC, entonces $AZ = AY$, y por ser $N'N$ paralela a ZY tenemos que $AN' = AN$.



Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ABC, con N', M y N colineales obtenemos que $\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$, y como $BM = MC \Rightarrow CN = BN'$.

Observemos que $AC = AN + NC = AN' + NC = (AB + BN') + NC = AB + 2NC$ y que $AC = AL + LN + NC = AL + AB + NC$, por tanto $AL = NC$.

Aplicando otra vez el Teorema de Menelao al triángulo ABC, pero ahora con K, M y L colineales obtenemos que $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = -1 \Rightarrow \frac{CL}{LA} = \frac{KB}{KA} \Rightarrow \frac{CL}{LA} - 1 = \frac{KB}{KA} - 1 \Rightarrow \frac{CL-LA}{LA} = \frac{KB-KA}{KA} \Rightarrow \frac{CL-CN}{LA} = \frac{AB}{KA} \Rightarrow \frac{NL}{LA} = \frac{AB}{KA}$,y como $NL = AB \Rightarrow LA = KA \Rightarrow KA = CN$.

Solución del problema 4. Sea n el número de equipos en el torneo, como cada equipo jugó contra todos los demás equipos exactamente una vez, entonces cada equipo jugó $n-1$ partidos.
Supongamos que dos equipos X y Y ganaron ambos k partidos, entonces si X le ganó a Y ocurre que X le ganó a todos los equipos que le ganó Y (por la hipótesis), y entonces X le ganó al menos a $k+1$ equipos, lo cual contradice que X y Y habían ganado el mismo número de partidos; el mismo argumento se usa para mostrar que Y no le pudo haber ganado a X. Por tanto, como no hay empates, no hay dos equipos con el mismo número de partidos ganados. Como a lo más hay n valores posibles para el número de partidos ganados, se tiene que los equipos ganaron $n-1$, $n-2, \ldots, 1, 0$ en algún orden.
Si un equipo ganó h partidos entonces perdió $n-1-h$ partidos, entonces su diferencia (positiva) entre el número de partidos ganados y perdidos es $|n-1-2h|$.
Sea D la suma de todas estas diferencias, entonces:
(a) Si n es par, entonces $n=2m$ con m entero y:

$$\begin{aligned} D &= (2m-1)+(2m-3)+\cdots+1+1+\cdots+(2m-3)+(2m-1) \\ &= 2[(2m-1)+(2m-3)+\cdots+1] = 2m^2. \end{aligned}$$

(b) Si n es impar, entonces $n=2m+1$ con m entero y:

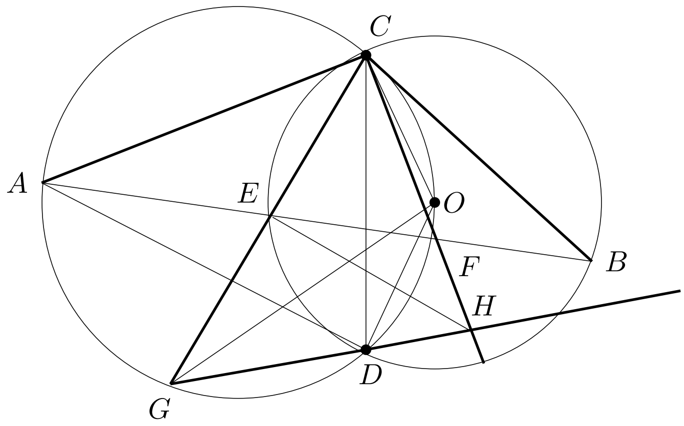
$$\begin{aligned} D &= 2m+(2m-2)+\cdots+2+0+2+\cdots+(2m-2)+2m \\ &= 2[2m+(2m-2)+\cdots+2] = 4[m+(m-1)+\cdots+1] \\ &= 4\frac{m(m+1)}{2} = 2m(m+1). \end{aligned}$$

Como $D=5000$, entonces:
(a) $2m^2 = D \Rightarrow m = 50 \Rightarrow n = 2m = 100$.
(b) $2m(m+1) = D \Rightarrow m(m+1) = 2500$, pero $49\cdot 50 < 2500 < 50\cdot 51$, de modo que no hay solución en este caso.
Por lo tanto la única respuesta posible es $n=100$.

Segunda Solución. Sea n el número de equipos que participaron en el torneo. Supongamos que A es el equipo que más partidos ganó y digamos que ganó k. Entonces $k=n-1$, es decir, A derrotó a todos los demás equipos. En efecto, si un equipo Q le hubiera ganado a A, por la condición del problema, Q también le habría ganado a los k equipos que A derrotó, de modo que Q habría ganado al menos $k+1$ partidos (lo cual contradice que k es el máximo).
Análogamente, de los equipos restantes, el que más partidos ganó, digamos B, debe haberle ganado a todos los equipos salvo A. Luego, C, el equipo que

después de A y B ganó más partidos, debe haberle ganado a todos los equipos salvo A y B, y así sucesivamente.
Por lo tanto, si ordenamos los equipos del que más partidos ganó al que menos, entonces el k-ésimo equipo en la lista ganó $n-k$ partidos. Concluimos como en la primer solución.

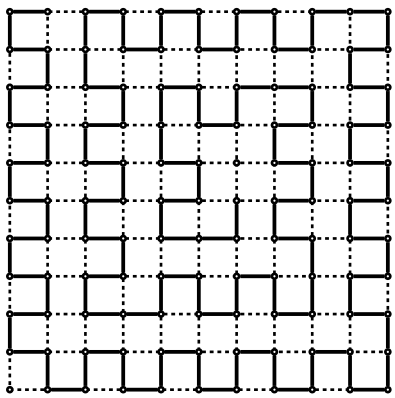
Solución del problema 5. Como O es centro de $\mathcal{B}$ se tiene $CO = OD$ y entonces $\angle DCO = \angle CDO$, y como $CGDO$ es cíclico, $\angle CGO = \angle CDO = \angle DCO = \angle DGO$, por tanto GO es bisectriz de $\angle CGD$.



Como CA es tangente a $\mathcal{B}$ tenemos que $\angle ACO = 90°$, por tanto, $\angle AFO = 90°$ (esto se sigue de que AO es diámetro de $\mathcal{A}$ o de que $ACOF$ es cíclico). Entonces OF es mediatriz de EB lo cual implica $EF = FB$.
Luego, como CA es tangente a $\mathcal{B}$ y CB es tangente a $\mathcal{A}$ tenemos que $\angle ACE = \angle CBE = \alpha$ y $\angle BCF = \angle CAF = \beta$, entonces $\angle CEF = \angle ACE + \angle EAC = \alpha + \beta = \angle CBF + \angle BCF = \angle CFE$ por tanto $EC = CF$.
También, $CADF$ es cíclico, entonces $\angle DAF = \angle DCF = \gamma$, $\angle CDF = \angle CAF = \beta$ y $\angle COD = 180° - \angle DAC$, y como $CBDE$ también es cíclico, obtenemos $\angle DBE = \angle DCE = \theta$.
Por criterio AAA, los triángulos CAE y BCF son semejantes, entonces $\frac{AE}{CF} = \frac{CE}{BF} \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{CF}{BF}$.Tomando la potencia de E con respecto a $\mathcal{A}$ obtenemos $AE \cdot EF = CE \cdot EG \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{EG}{EF}$,y entonces $\frac{CF}{BF} = \frac{EG}{EF} \Rightarrow \frac{EG}{CF} = \frac{EF}{BF} = 1 \Rightarrow EG = CF$.
En el triángulo ABC tenemos $180° = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \beta + \alpha + (\beta + \gamma + \theta + \alpha)$, entonces $\angle COD = 180° - \angle DAC = 180° - (\angle CAF +$

$\angle FAD) = 180° - (\beta+\gamma) = 2\alpha+\beta+\theta$; y por otro lado $\angle COD = 2\angle CBD = 2(\angle CBE + \angle EBD) = 2(\alpha+\theta)$, entonces $2\alpha+\beta+\theta = 2\alpha+2\theta \Rightarrow \beta = \theta. \Rightarrow \angle CDF = \angle DCE \Rightarrow FD \parallel CG$.
Ahora, como FD y CG son paralelas, $DFCG$ es un trapecio isósceles (ya que también es cíclico) y entonces tenemos que $GD = CF$ y también que $\frac{HD}{DG} = \frac{HF}{FC} \Rightarrow HD = HF \Rightarrow HG = HC$ y entonces los triángulos CHG y FHD son isósceles. Además, como $GE = EC$ entonces HE es mediatriz de GC, y por ser $FDGC$ trapecio isósceles, HE también es mediatriz de FD.
Por último, como $GD = CF = EG$ el triángulo EGD es isósceles, y como GO es bisectriz de $\angle EGD$, entonces GO también es mediatriz de ED, por tanto, la intersección de GO y de EH es el circuncentro del triángulo DEF.

Solución del problema 6. Veamos primero que un recorrido no puede cambiar de dirección en cada uno de los puntos de una línea de la cuadrícula. En efecto, cada vez que el recorrido llega a la línea en cuestión, al cambiar de dirección pasa por otro punto de dicha línea antes de cambiar nuevamente de dirección y abandonar la línea. De este modo, suponiendo que cambiara de dirección en cada punto de la línea, estos puntos estarían agrupados por pares, lo cual es imposible dado que son 2005 puntos.



Este argumento requiere una pequeña modificación para la línea en la que inicia el recorrido (es decir, la línea que contiene el primer segmento del recorrido). En ese caso, el punto inicial está apareado con el segundo punto del recorrido y el argumento aplica a los puntos restantes. De hecho, en esta línea hay al menos dos puntos en los que no se cambia de dirección: el que da el argumento y el punto inicial del recorrido.
Por lo tanto hay al menos 2006 puntos en los que no se cambia de dirección, de donde hay a lo más $2005^2 - 2006$ puntos en los que sí.
Sólo falta encontrar un recorrido con $2005^2 - 2006$ cambios de dirección. El

ejemplo con $2005^2 - 2006$ cambios de dirección lo construimos en forma similar al recorrido siguiente en una cuadrícula de 10×10. Como 10 y 2004 tienen igual paridad, en cada línea vertical seguirá habiendo un vértice donde no hay cambio de dirección, y uno al final que no se utiliza.

Segunda Solución. Sea R un recorrido con el máximo número de cambios de dirección posible, sin pérdida de generalidad podemos suponer que comenzó con un segmento vertical. Pintemos las líneas horizontales de la cuadrícula de negro y blanco alternadamente, comenzando con negro. Entonces cada vértice de la cuadrícula es o bien blanco o bien negro.

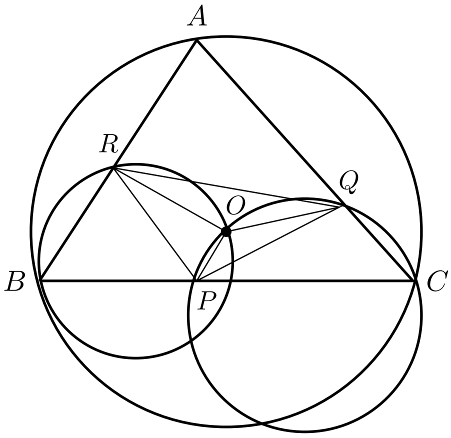
Para el recorrido R podemos hacer una lista $L(R)$ de los colores de los vértices que se van recorriendo, por ejemplo: $BBNNBNNNB$ (donde B es Blanco, y N es Negro).

Observemos que R tiene un cambio de dirección en un vértice si y sólo si los vértices adyacentes a él en R son de distinto color.

Separemos $L(R)$ en dos listas: $L_1(R)$ formada por las posiciones impares de $L(R)$,y $L_2(R)$ formada por las posiciones pares de $L(R)$. Entonces el número de cambios de dirección de R es la suma de los cambios de color de $L_1(R)$ y de $L_2(R)$, y además por la forma en que coloreamos, alguna de las dos listas comienza con B, sin pérdida de generalidad suponemos que es $L_1(R)$.

Sea i el número de cambios de color en $L_1(R)$ y sea j el número de cambios de dirección en $L_2(R)$, entonces el número de B's en $L_1(R)$ es al menos $\frac{i+1}{2}$ y en $L_2(R)$ es al menos $\frac{j}{2}$, por tanto el número de B's en $L(R)$ es al menos $\frac{i+j+1}{2}$, entonces como $\frac{2004 \cdot 2005}{2}$ es el número de B's en toda la cuadrícula, $\frac{i+j+1}{2} \leqslant \frac{2004 \cdot 2005}{2} \Rightarrow i + j \leqslant 2004 \cdot 2005 - 1$.

Solución del problema 7. Primero veamos que $OQAR$ es un cuadrilátero cíclico. Como $ORBP$ y $OPCQ$ son cíclicos, tenemos que $\angle ROP = 180° - \angle B$, $\angle QOP = 180° - \angle C$. Luego, $\angle ROQ = 360° - \angle ROP - \angle QOP = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, y por lo tanto $OQAR$ es cíclico.



Veamos ahora que $\angle P = \angle A$.
Como $ORBP$ es cíclico, $\angle OPR = \angle OBR = \angle OAB$, y como $OPCQ$ es cíclico, $\angle OPQ = \angle OCQ = \angle OAQ$. Luego, $\angle P = \angle OPR + \angle OPQ = \angle OAB + \angle OAQ = \angle A$. Análogamente, $\angle Q = \angle B$ y $\angle R = \angle C$. Por lo que PQR y ABC son semejantes.
Como $OQAR$ es cíclico tenemos que $\angle OQR = \angle OAR = 90° - \angle C$, y como $\angle PRQ = \angle C$, QO es perpendicular a RP. Análogamente, RO es perpendicular a PQ, por lo que O es el ortocentro del triángulo PQR.
Notemos que los radios de las circunferencias circunscritas a BPO y COP son iguales, ya que dichas circunferencias tienen como cuerda común a PO y se tiene que $\angle OBP = \angle OCP$. De igual manera, las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO y PQR tienen el mismo radio, ya que estas últimas tienen la cuerda PR en común y los ángulos $\angle RBP$ y $\angle PQR$ son iguales.
Otra manera de resolver (ii) es usando la ley de los senos generalizada. La circunferencia circunscrita a BPO cumple que el doble de su radio es $\frac{OB}{\text{sen } \angle OPB}$ y el doble del radio de la que circunscribe a COP es $\frac{OC}{\text{sen } \angle OPC}$. Pero $OB = OC$ y sen $\angle OPB =$ sen $\angle OPC$, por ser ángulos suplementarios. El doble del radio de la circunferencia circunscrita a PQR está dado por $\frac{RP}{\text{sen } \angle PQR} = \frac{RP}{\text{sen } \angle RBP}$ que es igual al doble del radio de la circunferencia circunscrita a BPO.

Solución del problema 8. (i) Sea C una cuadrícula $2n$-balanceada. Construyamos primero dos cuadrículas idénticas A y B poniendo en cada casilla la mitad del número correspondiente en C. Observemos que $A+B = C$, y además, tanto en A como en B, números escritos en casillas que comparten un lado tienen diferencia menor o igual que n. Sin embargo, los números de A y B pueden no ser enteros. Para corregir esto, ajustemos A redondeando sus números hacia abajo, y ajustemos B redondeando sus números hacia arriba. $A + B$ sigue

siendo C. La diferencia de dos números en casillas que comparten lado en A pudo haber aumentado, por culpa del ajuste, máximo en $\frac{1}{2}$. Pero después del ajuste la diferencia es un número entero. Si este entero fuera mayor o igual que $n+1$, antes del ajuste la diferencia era mayor o igual que $n+\frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que A es n-balanceada. Análogamente, B es n-balanceada.
(ii) Sea D una cuadrícula $3n$-balanceada. Construyamos tres cuadrículas idénticas A, B y C poniendo en cada casilla la tercera parte del número correspondiente en D. Entonces $A+B+C=D$, y en A, B y C números escritos en casillas que comparten un lado tienen diferencia menor o igual que n. Para hacer el ajuste, nos fijamos en el residuo módulo 3 de un número escrito en D. Si este residuo es cero, no hay nada que hacer (ya tenemos números enteros en A, B y C). Si el residuo es 1, redondeamos los números correspondientes hacia abajo en A y B y hacia arriba en C. Si el residuo es 2, redondeamos hacia abajo en A y hacia arriba en B y C. Es claro que $A+B+C$ sigue siendo D. Además, en A, B y C, la diferencia entre números escritos en casillas que comparten lado pudo haber aumentado, por culpa del ajuste, máximo en $\frac{2}{3}$ (por ejemplo, en B, un número de la forma $b+\frac{1}{3}$, con b entero, cambia a b, y uno de la forma $b+\frac{2}{3}$ cambia a $b+1$, de forma que el ajuste aumenta o disminuye el valor de un número de B en a lo más $\frac{1}{3}$). Pero después del ajuste la diferencia es un número entero. Si este número fuera mayor o igual que $n+1$, antes del ajuste la diferencia era mayor o igual que $n+\frac{1}{3}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que A, B y C son n-balanceadas.

Solución del problema 9. Si a es positivo, pongamos $x=a$ y $y=-1$. Con estos valores, para toda n impar se tiene que $a+xy^n=0$, y por lo tanto todos los términos impares de la sucesión son enteros. Para poder tomar $x=a$ necesitamos que a y b sean primos relativos.
Si a es negativo, pongamos $x=-a$ y $y=1$. En este caso todos los términos de la sucesión son enteros (y también es necesario que a y b sean primos relativos).
Ahora supongamos que a y b no son primos relativos y sea p un primo que divide a ambos. Tomemos un entero positivo k tal que b^k divide a $a+xy^k$. Como p divide a b^k, p divide a $a+xy^k$, y como divide a a, divide xy^k. Pero como x es primo relativo con b, p divide a y^k, y por lo tanto divide a y. Sea M la máxima potencia de p que divide a a. b^n no puede dividir a $a+xy^n$ para ningún valor $n>M$ porque p^n divide tanto a b^n como a xy^n, pero no divide a a.
Por lo tanto, la respuesta es *las parejas tales que a y b son primos relativos*.

Solución del problema 10. Para $n<3$, ninguna reordenación tiene una terna aritmética. Para $n=3$, la lista $2,1,3$, cumple.

Vamos a construir un ejemplo para n utilizando los ejemplos para los valores anteriores. De un lado de la lista pondremos los números pares entre 1 y n, y del otro, los impares. Si son j números pares, para ordenarlos utilizamos el ejemplo para j simplemente multiplicando sus números por 2. Si son k números impares, para ordenarlos utilizamos el ejemplo para k multiplicando sus números por 2 y restándoles 1. De esta forma obtenemos una reordenación de los números del 1 al n. Si en la parte par, $2a$, $2b$ y $2c$ son una terna aritmética, entonces a, b y c lo eran en el ejemplo para j. Si en la parte impar $2a-1$, $2b-1$ y $2c-1$ son una terna aritmética, a, b y c lo eran en el ejemplo para k. Si tomamos un término de la parte par y otro de la parte impar, su suma es impar, y no hay un tercero en medio de ellos cuyo doble sea esta suma. Esto muestra que la ordenación que conseguimos no tiene ternas aritméticas.

Solución del problema 11. Tomemos una de las colecciones que queremos contar. No puede ser una colección vacía, porque una colección de una sola carta no es completa ($N > 1$).
Fijémonos en los colores que aparecen: no pueden estar todos. Supongamos que faltan dos, digamos A y B. Tomemos una figura $\mathcal{F}$ y un número n de los que sí aparecen. La carta de color A, figura $\mathcal{F}$ y número n no está en nuestra colección. Sin embargo, al añadirla, la colección no se vuelve completa (pues no estamos agregando figuras nuevas ni números nuevos, y aunque estamos agregando el color A, aún falta que aparezca el color B), en contradicción con la característica de las colecciones que queremos contar. Entonces falta únicamente un color. Análogamente, aparecen todas salvo una de las figuras y todas salvo uno de los números.
Es claro además que en la colección están todas las cartas que usan estos colores, estas figuras y estos números (de lo contrario, al añadir una de éstas, la colección no se volvería completa).
Recíprocamente, todas las colecciones que se construyen eligiendo $N-1$ números, y poniendo en la colección todas las cartas que resultan de combinar estos colores con estas figuras y estos números, son colecciones incompletas que se vuelven completas si se añade cualquier otra carta de la baraja.
Por lo tanto, la respuesta es N^3 (elegir $N-1$ colores, por ejemplo, equivale a elegir el color que no va a aparecer, y hay N formas de hacer esto).

Solución del problema 12. Sean Q y R las intersecciones de l con AB y CA respectivamente. Sean K y N los puntos donde BG y CF cortan a AD, respectivamente.
Sea $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$. Como l y AD son paralelas, tenemos que $\angle ARQ = \angle DAC = \alpha$, y entonces el triángulo AQR es isósceles con $AQ = AR$. También,

por ser l y AD paralelas, tenemos que $\angle ADB + \angle REC = 180°$, $\angle ADB = \angle QEB$ y $\angle ERC = \angle BAD = \angle BQE = \alpha$.
Por otro lado, como $BD = EC$, se tiene que $BE = CD$. Sea E' sobre la prolongación de AD (con D entre A y E') y tal que $DE' = ER$. Por el criterio LAL, los triángulos BDE' y CER son congruentes, lo que implica que $\angle BE'D = \angle CRE = \alpha$, y entonces el triángulo ABE' es isósceles, con $BE' = AB$, pero $BE' = CR$ (por la congruencia) y entonces $AB = CR$. Tenemos también que, $BQ = BA + AQ = RC + AR = AC$. Ahora, del hecho de que $\triangle CRP \sim \triangle CAN$ y $\triangle BAK \sim \triangle BQP$, obtenemos:

$$\frac{AK}{QP} = \frac{BA}{BQ} = \frac{RC}{AC} = \frac{RP}{AN} \Rightarrow \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN},$$

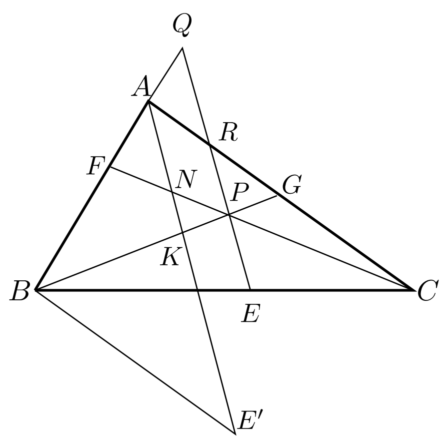
y del hecho de que $\triangle AFN \sim \triangle QFP$ y $\triangle RGP \sim \triangle AGK$, obtenemos:

$$\frac{GK}{GP} = \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN} = \frac{FP}{FN} \Rightarrow \frac{GP + PK}{GP} = \frac{FN + NP}{FN} \Rightarrow \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{FN},$$

y finalmente:

$$\frac{AR}{RG} = \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{NF} = \frac{AQ}{AF} \Rightarrow RG = AF \Rightarrow BF = AB - AF = CR - RG = CG,$$

que es lo que queríamos probar.



Otra manera de probar que $AB = RC$ es usando la ley de senos en los triángulos ABD y REC:

$$\frac{AB}{\text{sen}\,\angle ADB} = \frac{BD}{\text{sen}\,\angle BAD} = \frac{EC}{\text{sen}\,\angle ERC} = \frac{RC}{\text{sen}\,\angle REC} \Rightarrow AB = RC.$$

Otra manera es utilizando la semejanza de los triángulos CRE y CAD:

$$\frac{RC}{AC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

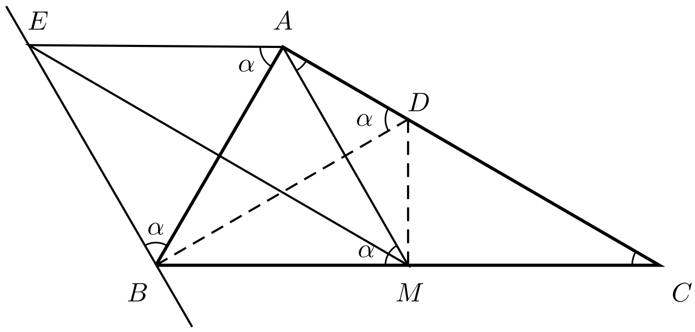
donde la última igualdad se sigue por el Teorema de la Bisectriz.

Solución del problema 13. Dividimos en casos.
(1) Si $a = 1$ y n es pariente de ab, entonces la única posibilidad es $n = 1b$, y claramente $1b$ divide a $1b$.
(2) Si $a = 2$. Como $2b$ debe dividir a $11b$ y a $2b$ divide a $2b$, entonces $2b$ divide a $11b - 2b = 90$. Los divisores de $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ son $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45$ y 90. Como $20 \leq 2b = 20 + b \leq 29$, no hay soluciones en este caso.
(3) Si $a \geq 3$. Como ab debe dividir a $(a-3)21b$ y a $(a-3)12b$, entonces ab divide a $(a-3)21b - (a-3)12b = 90$. Luego, las únicas posibilidades para ab son 30, 45 y 90, ya que $ab \geq 30$.
Veamos que 30, 45 y 90 dividen a todos sus parientes.
Si n es pariente de 30, entonces $n = A0$ donde A es un número cuya suma de dígitos es 3. Luego, n es múltiplo de 10 y de 3, y por lo tanto también de 30.
Si n es pariente de 45, entonces $n = A5$ donde A es un número cuya suma de dígitos es 4. Luego, la suma de los dígitos de n es 9 y por lo tanto n es múltiplo de 9. Como n claramente es múltiplo de 5, se sigue que n es múltiplo de 45.
Si n es pariente de 90, entonces $n = A0$ donde A es un número cuya suma de dígitos es 9. Luego, n es múltiplo de 9 y de 10, y por lo tanto de 90.

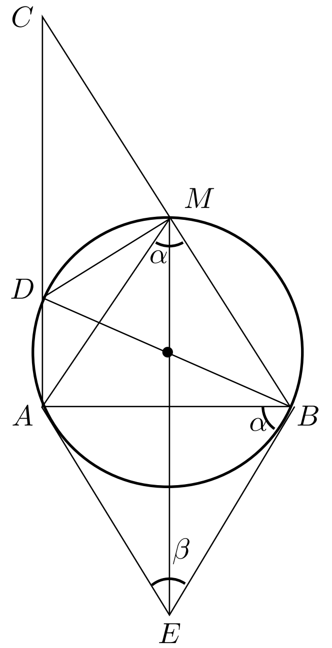
Concluimos que los únicos enteros de dos dígitos que dividen a todos sus parientes son: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 45 y 90.
Segunda Solución. Dividimos en dos casos.
(1) $a = 1$. Este caso es como en la primer solución.
(2) $a \geq 2$. Como ab debe dividir a $1(a-1)b$ y claramente ab divide a ab, entonces ab divide a $1(a-1)b - ab = 90$. Y terminamos como en la primer solución.

Solución del problema 14. Como M es el circuncentro del triángulo ABC, el triángulo AMC es isósceles, por lo que $\angle MAC = \angle MCA = \frac{\alpha}{2}$, donde $\angle AMB = \alpha$. En el cuadrilátero $ABMD$, sus ángulos en A y en M son rectos, entonces es cíclico y BD es un diámetro de su circunferencia circunscrita. Como BE es perpendicular a BD, se tiene que BE es tangente a esta circunferencia en el punto B. Se sigue que $\angle EBA = \angle BMA = \alpha$. Como EM es la mediatriz de AB (es paralela a CA y pasa por el punto medio de BC), tenemos que los

triángulos EAM y EBM son congruentes.
Si el triángulo EBM es semejante al triángulo AMC, entonces $\angle EBM = \angle AMC$ y de aquí se obtiene la igualdad $\alpha + 90° - \frac{\alpha}{2} = 180° - \alpha$, lo cual implica que $\alpha = 60°$. Por lo tanto, el triángulo ABM es equilátero.
Por otro lado, si el triángulo ABM es equilátero entonces $\angle EBA = 60°$ y el triángulo EBM es isósceles y semejante al triángulo AMC.



Segunda Solución. El cuadrilátero $ABMD$ es cíclico (ya que sus ángulos en A y M son rectos) y está inscrito en una circunferencia de diámetro BD.
Como ME es paralela a AC y M es punto medio de BC, se tiene que ME es mediatriz de AB.
Los triángulo MCA, ABM y BAE son isósceles, los dos primeros por ser M el circuncento del triángulo ABC y el tercero por ser ME mediatriz de AB.
Como EB es perpendicular a BD, se tiene que EB es tangente al circuncírculo de $ABMD$.
El ángulo semi-inscrito $\angle ABE$ es igual al inscrito $\angle AMB$, ya que abren el mismo arco. Sean $\alpha = \angle ABE = \angle AMB$ y $\beta = \angle BEA$.



Como ME y AC son paralelas, $\angle MAC = \angle AME$.
Los triángulos AEM y MCA son semejantes si y sólo si $\angle AME = \angle MEA$ si y sólo si $\alpha = \beta$.
Si los triángulos AEM y MCA son semejantes, entonces $\alpha = \beta$ y como $2\alpha + \beta = 180°$ (ángulos en ABE) se tiene que $\alpha = 60°$. Luego, el triángulo ABM es equilátero y $\angle ABC = 60°$.
Si $\angle ABC = 60°$, entonces el triángulo ABM es equilátero, por lo que $\alpha = 60°$ y como $2\alpha + \beta = 180°$, tenemos que $\beta = 60° = \alpha$.

Solución del problema 15. Contemos, equivalentemente, la cantidad de caminos que visitan cada casilla de la cuadrícula exactamente una vez y en los que cada paso es a una casilla adyacente.

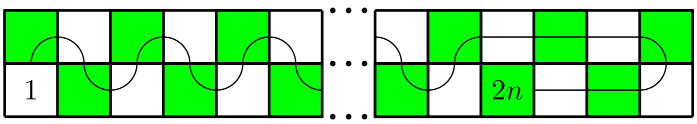
Contemos primero cuántos de estos caminos empiezan en la casilla de la esquina superior izquierda de la cuadrícula. Llamemos a_n a esta cantidad. Por simetría, hay a_n caminos que empiezan en cada una de las otras esquinas.

Supongamos que el primer paso de uno de dichos caminos es hacia la derecha. Entonces el camino continúa hacia la derecha hasta llegar a la orilla de la cuadrícula. En efecto, un paso hacia abajo divide a la cuadrícula en dos partes; la porción final del camino no puede visitar ambas partes. Es claro entonces que hay una sola forma de completar el camino. Si el primer paso es hacia abajo, en

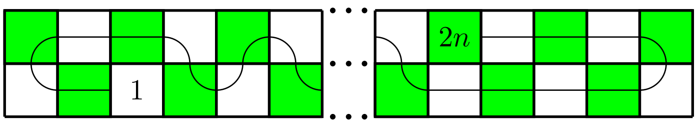
cambio, el siguiente es hacia la derecha y el camino puede completarse de a_{n-1} formas.
Por lo tanto, $a_n = a_{n-1} + 1$ y como $a_2 = 2$, se sigue que $a_n = n$.
Ahora contemos cuántos caminos empiezan en la casilla superior de la j-ésima columna, con $1 < j < n$. Si el primer paso es hacia la derecha, entonces el camino continúa hacia la derecha hasta llegar a la orilla de la cuadrícula (de nuevo, un paso hacia abajo divide a la cuadrícula en dos partes; la porción final del camino no puede visitar ambas), luego baja y regresa hasta llegar a la casilla inferior de la j-ésima columna. El camino puede completarse de $a_{j-1} = j - 1$ formas. Análogamente, si el primer paso es hacia la izquierda, el camino puede completarse de $a_{n-j} = n - j$ formas. En total, son $(j - 1) + (n - j) = n - 1$ caminos. Por lo tanto, la respuesta es:

$$4n + 2\sum_{j=2}^{n-1}(n-1) = 4n + 2\,(n-2)\,(n-1) = 2n^2 - 2n + 4.$$

Segunda Solución. Pintemos la cuadrícula como tablero de ajedrez de blanco y negro. Supongamos que el 1 está en una casilla blanca. Entonces, el 2 tiene que estar en una casilla negra, y así cada número par estará en una casilla negra. En particular, el $2n$ estará en una casilla negra. Dividimos en dos casos.
(i) Numeremos las columnas de izquierda a derecha del 1 al n y supongamos que el 1 y el $2n$ están en la columna i con $1 < i < n$. Supongamos que el 2 está a la izquierda del 1. Entonces, todos los números del 3 al $2i - 1$ estarán también a la izquierda de la columna i, y por lo tanto el número $2i$ tendrá que quedar a la derecha de la columna i, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, si el 1 y el $2n$ están en la misma columna, necesariamente deberán estar en las columnas 1 o n. Luego, en este caso sólo hay 4 formas de colocar al 1 y al $2n$, y es fácil ver que en cada una de estas 4 formas sólo hay una manera de colocar al resto de los números.
(ii) Supongamos ahora que el 1 y el $2n$ no están en la misma columna. Dividimos en dos subcasos.
(a) Si el 1 está en una esquina y el $2n$ está en la columna i, entonces es fácil ver que el 2 tiene que estar en la misma columna del 1. Luego, si consideramos ahora la cuadrícula que se obtiene quitando esta columna, entonces el 3 está en una esquina de esta nueva cuadrícula y análogamente, el 4 tiene que estar en la misma columna del 3. Continuando de esta forma, tenemos una única manera de acomodar a los números entre 1 y $2i - 2$. Ahora, como el $2i - 1$ debe estar en la misma columna del $2n$, completamos la cuadrícula como en el caso (i), tomando el $2i - 1$ como si fuera el 1. Por lo tanto, sólo hay una única manera de llenar la cuadrícula en este subcaso, como se muestra en la siguiente figura.

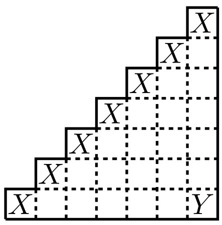


(b) Supongamos que el 1 está en la columna j y que el $2n$ está en la columna i con $1 < j < i \leq n$. Entonces, es fácil ver que los números $2, 3, \ldots, j$ tienen que estar en las columnas $j - 1, j - 2, \ldots, 1$, respectivamente, dejando como única posibilidad que los números desde $j + 1$ hasta $2j + 1$ estén en la misma fila. Luego, el $2j + 1$ está en la columna $j + 1$ y ahora completamos la cuadrícula como en el subcaso (a), tomando el $2j+1$ como si fuera el 1. Por lo tanto, sólo hay una única manera de llenar la cuadrícula en este subcaso, como se muestra en la siguiente figura.



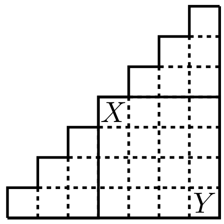
Luego, en el caso (i) hay 4 formas de llenar la cuadrícula. Y en el caso (ii), hay $2n(n - 1)$ formas de llenar la cuadrícula, ya que hay $2n$ maneras de colocar el 1 y como la casilla del $2n$ tiene distinto color que la del 1, entonces hay $n - 1$ maneras de colocar el $2n$. Por lo tanto, hay $2n(n - 1) + 4 = 2n^2 - 2n + 4$ formas de llenar la cuadrícula.

Solución del problema 16. Llamemos construibles a dichos números n. Tomemos un n construible y fijémonos en los cuadritos marcados con X.



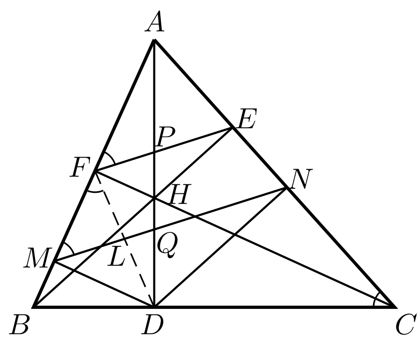
En total tenemos n de estos cuadritos. Si consideramos un cuadrado de los que no se salen de la figura, éste puede cubrir a lo más un cuadrito de los marcados con X. Como sólo tenemos n cuadrados para cubrir la figura, concluimos que cada cuadrado ocupará uno y sólo uno de estos cuadritos (de los marcados con X).

Ahora nos fijamos en el cuadrito marcado con Y. El cuadrado que lo cubra, deberá también cubrir a un cuadrito marcado con X, y por lo tanto, este cuadrito marcado con X tiene que estar a la mitad de la escalera. Luego, n es impar (ver figura).

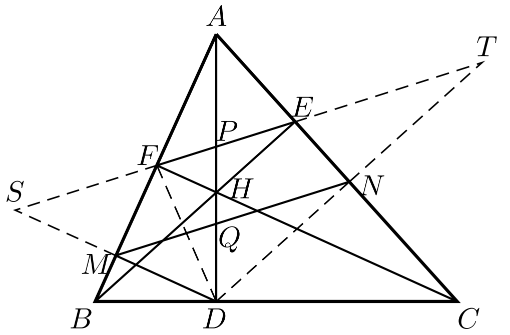


Este cuadrado separa a la escalera original en dos escaleras, cada una de $\frac{n-1}{2}$ escalones. Por lo tanto, $\frac{n-1}{2}$ es construible. Continuando de esta forma, $\frac{n-1}{2}$ es impar y $\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2} = \frac{n-3}{4}$ es construible, y así sucesivamente hasta llegar al 1 que es el menor construible. Además, si m es construible entonces también lo es $2m+1$. Entonces concluimos que todos los números construibles son: $1, 3, 7, 15, \ldots$, es decir son todos los números de la forma $2^k - 1$ para $k \geq 1$.

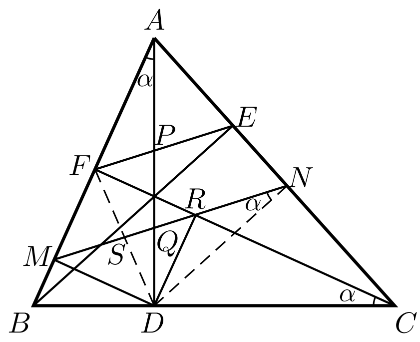
Solución del problema 17. Sea H el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Dado que AD es diámetro de la circunferencia, tenemos que $\angle DMA = \angle DNA = 90°$. De aquí tenemos que DN es paralelo a BE y DM es paralelo a CF, lo que a su vez implica que $\frac{AE}{EN} = \frac{AH}{HD} = \frac{AF}{FM}$, es decir, MN es paralelo a FE. Sea L el punto donde FD intersecta a MN. Como el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico entonces $\angle MFL = \angle ACD$; también, como $BFEC$ es cíclico tenemos que $\angle AFE = \angle ECB$, y como MN es paralela a FE tenemos que $\angle FML = \angle AFE$. Hemos probado que $\angle MFL = \angle FML$, y como el triángulo FMD es rectángulo entonces L es el punto medio de FD. Dado que FE es paralelo a MN entonces $\frac{DQ}{QP} = \frac{DL}{LF} = 1$, es decir, Q es el punto medio de PD.



Segunda Solución. Al reflejar el pie de la altura D sobre los lados AB y AC obtenemos los puntos S y T, respectivamente. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Como MF es la mediatriz del segmento SD, tenemos que $\angle SFM = \angle DFM$; además, como el cuadrilátero $BFHD$ es cíclico, tenemos que $\angle DFB = \angle DHB$. A su vez, tenemos que $\angle DHB = \angle AHE = \angle AFE$ (esta última igualdad se sigue de que el cuadrilátero $AFHE$ es cíclico), de aquí se sigue que S, F y E son colineales. Análogamente se prueba que T, E y F son colineales y obtenemos que S, F, E y T son colineales. Como M y N son los puntos medios de los segmentos SD y TD, tenemos que MN es paralelo a ST. Como $\frac{DQ}{QP} = \frac{DM}{MS} = 1$ se concluye que Q es punto medio de PD.



Tercera Solución. Sean S y R los puntos donde FD y FC intersectan a MN, respectivamente. Probaremos que $FMDR$ es un rectángulo y de aquí se seguirá que S es el punto medio de FD. Para esto, como el cuadrilátero $AMDN$ es cíclico entonces $\angle MAD = \angle MND$. Además, como $\angle MAD = \angle FCB$ tenemos que el cuadrilátero $DRNC$ es cíclico. Se sigue que $\angle DRC = \angle DNC = 90^\circ$ y entonces $FMDR$ es un rectángulo (tiene tres ángulos rectos y por tanto el cuarto también). Sea T el punto donde ED intersecta a MN. Análogamente se prueba que T es el punto medio de ED. Concluimos entonces que ST es paralela a FE. Como $\frac{DQ}{QP} = \frac{DS}{SF} = 1$ se sigue que Q es el punto medio de PD.



Solución del problema 18. Sea n la suma de los dígitos del entero positivo A. Si $1, 2, ..., 8$ se obtienen como suma de dígitos de A, entonces $n \geq 8$. Si $n = 8$ no hay nada que hacer. Supongamos que $n \geq 9$.

(i) Veamos que el 9 se puede escribir como suma de dígitos de A.

Si 9 es un dígito de A, entonces se puede escribir el 9.

Si algún 1, de entre los dígitos de A, no se utilizó en la escritura del 8, sumando a estos dígitos el 1, obtenemos 9.

Si todos los unos que aparecen como dígitos de A se utilizaron en la escritura del 8, sea j el menor de los dígitos del número A que no se utilizó en dicha escritura. Entonces en ésta se utilizan todos los dígitos de la escritura de $j - 1$, (en efecto, la expresión de $j - 1$ como suma de dígitos de A utiliza dígitos menores que j y cada uno de ellos debe aparecer en la escritura del 8, ya que j es el menor de los que no aparecen en la escritura del 8). Ahora sustituimos estos por j y obtenemos 9.

(ii) Veamos ahora que si m $(9 \leq m < n)$, es un entero positivo que se puede escribir como suma de dígitos de A, entonces $m + 1$ también.

Si un 1, de entre los dígitos de A, no se utilizó en dicha suma, agregamos 1 y obtenemos $m + 1$.

Si todos los unos que aparecen como dígitos de A, se utilizaron en la escritura del m, sea j el menor de los dígitos del número A que no se utilizó en dicha escritura. Entonces, en la escritura del m, se utilizaron todos los dígitos de la escritura de $j - 1$. Sustituyendo estos por j, obtenemos $m + 1$.

Luego, (i) y (ii) garantizan que cada uno de los números $1, 2, \ldots, n$, es suma de dígitos de A.

El número $A = 1249$ no es surtido y cumple que $1, 2, \ldots, 7$ son sumas de dígitos de A.

Capítulo 4

Soluciones de las Olimpiadas Internacionales

4.1. XVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Solución del problema 1. (Solución de Pablo Soberón). Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$, entonces $a_i = \frac{k}{n}$ y $|a_i - \frac{1}{2}| = |\frac{2k-n}{2n}|$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Si n es par, podemos elegir k tal que $2k = n$ y entonces $f(n) = 0$ en este caso. Si n es impar, sea k tal que $2k - n = 1$. Entonces, $|a_i - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2n}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, de modo que $f(n) \leq \frac{1}{2n}$. Veamos en este caso que $f(n) = \frac{1}{2n}$. Consideremos la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k'$. Tenemos que $(a_1 - \frac{1}{2}) + (a_2 - \frac{1}{2}) + \cdots + (a_n - \frac{1}{2}) = k' - \frac{n}{2} = m + \frac{1}{2}$ donde m es un entero. Como $|(a_1 - \frac{1}{2}) + (a_2 - \frac{1}{2}) + \cdots + (a_n - \frac{1}{2})| = |m + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$, se sigue que alguno de $a_1 - \frac{1}{2}$, $a_2 - \frac{1}{2}, \ldots, a_n - \frac{1}{2}$ tiene un valor absoluto de al menos $\frac{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2n}$. Luego, hemos encontrado un i con $|a_i - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2n}$. Por lo tanto, $f(n) = \frac{1}{2n}$ si n es impar y $f(n) = 0$ si n es par.

Solución del problema 2. Haremos la prueba por inducción, utilizando la igualdad $\tau^2 = \tau + 1$.
Si $n = 1$, entonces $1 = \tau^0$. Supongamos que $n - 1$ se puede escribir como una suma finita de potencias enteras de τ, digamos:

$$n - 1 = \sum_{i=-k}^{k} a_i \tau^k, \tag{4.1}$$

donde $a_i \in \{0,1\}$ y $n \geq 2$. Escribiremos (4.1) como:

$$n-1 = a_k \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-k}. \tag{4.2}$$

Por ejemplo, $1 = 1.0 = 0.11 = 0.1011 = 0.101011$.
Primero demostraremos que podemos asumir en (4.2) que $a_i a_{i+1} = 0$ para todo i con $-k \leq i \leq k-1$. En efecto, si aparecen varios 11, entonces tomamos el que está más a la izquierda. Ya que podemos asumir que hay un cero antes de él, podemos reemplazar 011 por 100 usando la identidad $\tau^{i+1} + \tau^i = \tau^{i+2}$. Continuando de esta forma, si es necesario, habremos eliminado todas las ocurrencias de dos unos seguidos. Tenemos entonces la representación:

$$n-1 = \sum_{i=-k}^{k} b_i \tau^k, \tag{4.3}$$

donde $b_i \in \{0,1\}$ y $b_i b_{i+1} = 0$.
Si $b_0 = 0$ en (4.3), entonces sólo sumamos $1 = \tau^0$ en ambos lados de (4.3) y terminamos.
Supongamos ahora que hay un 1 en la posición de las unidades, es decir $b_0 = 1$. Si hay dos ceros a la derecha de b_0, es decir, si $n-1 = \cdots 1.00 \cdots$, podemos reemplazar $1 \cdot 00$ con 0.11 ya que $1 = \tau^{-1} + \tau^{-2}$, y terminamos nuevamente ya que tenemos 0 en la posición de las unidades. Podemos asumir entonces que:

$$n-1 = \cdots 1.010 \cdots .$$

Otra vez, si tenemos $n-1 = \cdots 1.0100 \cdots$, podemos reescribirlo como:

$$n-1 = \cdots 1.0100 \cdots = \cdots 1.0011 \cdots = \cdots 0.1111 \cdots$$

y obtenemos 0 en la posición de las unidades. Por lo tanto, podemos asumir que:

$$n-1 = \cdots 1.01010 \cdots .$$

Como el número de unos es finito, eventualmente obtendremos un 100 al final, es decir:

$$n-1 = \cdots 1.01010 \cdots 100.$$

Entonces podemos mover todos los unos a la derecha para obtener 0 en la posición de las unidades, es decir:

$$n-1 = \cdots 0.11 \cdots 11,$$

y terminamos.

Solución del problema 3. (Solución de Joshua Hernández). Las formas de acomodar las damas como se pide es $r = \binom{p^2}{p} - p$. Tenemos que:
$r = \frac{p^2(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1))}{p!} - p = p\left(\frac{(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1))-(p-1)!}{(p-1)!}\right)$.
Basta demostrar entonces que $\frac{(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1))-(p-1)!}{(p-1)!} \equiv 0 \pmod{p^4}$.
Como p^4 y $(p-1)!$ son primos entre sí, lo que queremos es equivalente a $(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1)) - (p-1)! \equiv 0 \pmod{p^4}$. Sea P la expresión del lado izquierdo. Desarrollando, tenemos que:
$P = p^{2(p-1)} + s_{p-2}p^{2(p-2)} + \cdots + s_2p^4 + \left(\frac{(p-1)!}{-1} + \frac{(p-1)!}{-2} + \cdots + \frac{(p-1)!}{-(p-1)}\right)p^2$,
donde $s_{p-2}, \ldots, s_2$ son enteros.
Luego, $P \equiv 0 \pmod{p^4}$ si y sólo si $p^2(p-1)!\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) \equiv 0 \pmod{p^4}$ si y sólo si el numerador de $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ es múltiplo de p^2. Como $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{p}{i(p-i)} = \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i(p-i)}$, entonces basta demostrar que el numerador de $\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i(p-i)}$ es múltiplo de p.
Veamos primero que si a y b son enteros primos relativos con n (n entero positivo), el numerador de $\frac{c}{a} + \frac{d}{b}$ es divisible entre n si y sólo si $ca^{-1} + db^{-1}$ es divisible entre n, donde a^{-1} y b^{-1} son los respectivos inversos de a y b módulo n (recuerde que k es un inverso de k' módulo n si $kk' \equiv 1 \pmod{n}$). En efecto, tenemos que $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{bc+ad}{ab}$ y $bc + ad \equiv 0 \pmod{n}$ si y sólo si $a^{-1}b^{-1}(bc + ad) \equiv 0 \pmod{n}$ si y sólo si $ca^{-1} + db^{-1} \equiv 0 \pmod{n}$.
Regresando a la solución del problema, debemos probar entonces que $(1(p-1))^{-1} + (2(p-2))^{-1} + \cdots + ((p-1)1)^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$. Como $p-i \equiv -i \pmod{p}$, basta probar que $(-1^2)^{-1} + (-2^2)^{-1} + \cdots + (-(p-1)^2)^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$. Como $(-1^2)^{-1} + (-2^2)^{-1} + \cdots + (-(p-1)^2)^{-1} = -((1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \cdots + ((p-1)^{-1})^2)$, y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ existe un único $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tal que $ij \equiv 1 \pmod{p}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \cdots + ((p-1)^{-1})^2 &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2 \\ &= \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \equiv 0 \pmod{p},\end{aligned}$$

ya que $\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$ es entero si p es un primo mayor o igual que 5.

Solución del problema 4. Sea S el punto de tangencia de las circunferencias O y O_1 y sea T el punto de intersección, distinto de S, de la circunferencia O con la recta SP. Sea X el punto de tangencia de l con O_1 y sea M el punto medio del segmento XP. Como $\angle TBP = \angle ASP$, el triángulo TBP es semejante al triángulo ASP. Luego, $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PS}$. Como la recta l es tangente a O_1 en X, tenemos que $\angle SPX = 90° - \angle XSP = 90° - \angle APM = \angle PAM$, lo que implica que el triángulo PAM es semejante al triángulo SPX. En consecuencia, $\frac{XS}{XP} = \frac{MP}{MA} = \frac{XP}{2MA}$ y $\frac{XP}{PS} = \frac{MA}{PA}$. Se sigue entonces que:

$$\frac{XS}{XP} \cdot \frac{PT}{PB} = \frac{XP}{2MA} \cdot \frac{PA}{PS} = \frac{XP}{2MA} \cdot \frac{MA}{XP} = \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

Sea A' el punto de intersección de O con la mediatriz de la cuerda BC de tal manera que A y A' están del mismo lado de la recta BC y sea N el punto de intersección de las rectas $A'Q$ y CT. Como $\angle NCQ = \angle TCB = \angle TCA = \angle TBA = \angle TBP$ y $\angle CA'Q = \frac{\angle CAB}{2} = \frac{\angle XAP}{2} = \angle PAM = \angle SPX$, el triángulo NCQ es semejante al triángulo TBP y el triángulo $CA'Q$ es semejante al triángulo SPX. Luego, $\frac{QN}{QC} = \frac{PT}{PB}$ y $\frac{QC}{QA'} = \frac{XS}{XP}$ y por lo tanto $QA' = 2QN$ según (4.4). Esto implica que N es el punto medio de QA'. Supongamos que O_2 toca al segmento AC en el punto Y. Como $\angle ACN = \angle ACT = \angle BCT = \angle QCN$ y $CY = CQ$, los triángulos YCN y QCN son congruentes, de modo que NY y AC son perpendiculares, y $NY = NQ = NA'$. Por lo tanto, N es el centro de O_2 y esto termina la prueba.

Solución del problema 5. (Solución de Fernando Campos). Observemos primero que $5n \leq 12 \times 20 = 240$, de donde $n \leq 48$. Veamos que $n = 48$ se alcanza dando una configuración. Denotemos a los colores con los números $1, 2, \ldots, 12$. Para los primeros 12 payasos, consideramos las quintetas de colores (i (mod 12), $i+1$ (mod 12), $i+2$ (mod 12), $i+3$ (mod 12), $i+4$ (mod 12)), $i = 1, 2, \ldots, 12$. Es claro que dos de estas quintetas ordenadas son iguales si y sólo si $i = j$ donde i, j son los números con los que empiezan las dos quintetas. Como la rotación es cíclica, cada i aparece exactamente 5 veces.
Ahora hacemos $(b_1, b_2, \ldots, b_{12}) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10, 12)$, y generamos las 12 quintetas de colores:

$$\left(b_{i \text{ (mod 12)}}, b_{i+1 \text{ (mod 12)}}, b_{i+2 \text{ (mod 12)}}, b_{i+3 \text{ (mod 12)}}, b_{i+4 \text{ (mod 12)}}\right)$$

para $i = 1, 2, \ldots, 12$. Análogamente, haciendo $(c_1, c_2, \ldots, c_{12}) = (1, 4, 7, 10, 2, 5, 8, 11, 3, 6, 9, 12)$ y $(d_1, d_2, \ldots, d_{12}) = (1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 12)$, podemos hacer las otras 24 quintetas de colores. Por simetría, cada color se usa exactamente 5 veces. Falta demostrar que las quintetas son distintas. Las primeras doce son distintas entre sí por lo que se dijo anteriormente. De manera análoga, las quintetas generadas con las b_i's son distintas entre sí, así como las generadas con las c_i's y d_i's. Ahora, ninguna de las primeras doce quintetas puede ser igual a una quinteta de b_i's, c_i's o d_i's, ya que las primeras tienen al menos 3 números consecutivos mientras que las otras tienen 0, 1 o 2 respectivamente. Luego, tampoco hay quintetas iguales entre las b_i's, c_i's y d_i's. Por lo tanto, el mayor valor de n es 48.

4.2. VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe

Solución del problema 1. Denotemos por $\mathcal{U}(S_d)$ a la última cifra del número S_d. Claramente, $\mathcal{U}(S_0) = 1$ y $\mathcal{U}(S_1) = \mathcal{U}(1 + 2006) = 7$. Para calcular los restantes $\mathcal{U}(S_d)$ observemos que para cualquier entero positivo k:

$$\mathcal{U}(d^{4k} + d^{4k+1} + d^{4k+2} + d^{4k+3}) = 0,$$

excepto para $d = 6$. Para $d = 6$, tenemos que:

$$\mathcal{U}(6^{5k} + 6^{5k+1} + 6^{5k+2} + 6^{5k+3} + 6^{5k+4}) = 0.$$

Explícitamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(S_2) &= \mathcal{U}[1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \cdots + (2^{2001} + \cdots + 2^{2004}) + 2^{2005} + 2^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 2 + 4) = 7, \\
\mathcal{U}(S_3) &= \mathcal{U}[1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \cdots + (3^{2001} + \cdots + 3^{2004}) + 3^{2005} + 3^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 3 + 9) = 3, \\
\mathcal{U}(S_4) &= \mathcal{U}[1 + (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) + \cdots + (4^{2001} + \cdots + 4^{2004}) + 4^{2005} + 4^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 4 + 6) = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(S_5) &= \mathcal{U}[1 + (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + \cdots + (5^{2001} + \cdots + 5^{2004}) + 5^{2005} + 5^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 5 + 5) = 1, \\
\mathcal{U}(S_6) &= \mathcal{U}[1 + (6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5) + \cdots + (6^{2001} + \cdots + 6^{2005}) + 6^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 6) = 7, \\
\mathcal{U}(S_7) &= \mathcal{U}[1 + (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \cdots + (7^{2001} + \cdots + 7^{2004}) + 7^{2005} + 7^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 7 + 9) = 7, \\
\mathcal{U}(S_8) &= \mathcal{U}[1 + (8 + 8^2 + 8^3 + 8^4) + \cdots + (8^{2001} + \cdots + 8^{2004}) + 8^{2005} + 8^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 8 + 4) = 3, \\
\mathcal{U}(S_9) &= \mathcal{U}[1 + (9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) + \cdots + (9^{2001} + \cdots + 9^{2004}) + 9^{2005} + 9^{2006}] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 9 + 1) = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{U}(S_0 + S_1 + \cdots + S_9) = \mathcal{U}(1 + 7 + 7 + 3 + 1 + 1 + 7 + 7 + 3 + 1) = 8.$$

Segunda Solución. Sea $S = S_0 + S_1 + \cdots + S_9$. Calculemos los residuos de S al ser dividido entre 2 y 5. Es fácil ver que cada S_i es impar, de modo que S es par, es decir, $S \equiv 0 \pmod 2$. Ahora, como cada S_i aporta un 1 a la suma S y $S_5 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, tenemos que $S \equiv S - 10 = (S_0 - 1) + (S_1 - 1) + (S_2 - 1) + \cdots + (S_9 - 1) = (S_1 - 1) + (S_2 - 1) + \cdots + (S_9 - 1) \equiv (S_1 - 1) + (S_2 - 1) + (S_3 - 1) + (S_4 - 1) + (S_6 - 1) + (S_7 - 1) + (S_8 - 1) + (S_9 - 1) \pmod 5$. Ahora, como $i^n \equiv (i + 5)^n \pmod 5$ para cualquier entero i y cualquier entero positivo n, tenemos que $S_i \equiv S_{i+5} \pmod 5$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Entonces, $S \equiv 2((S_1 - 1) + (S_2 - 1) + (S_3 - 1) + (S_4 - 1)) \pmod 5$. Por otro lado, tenemos que:

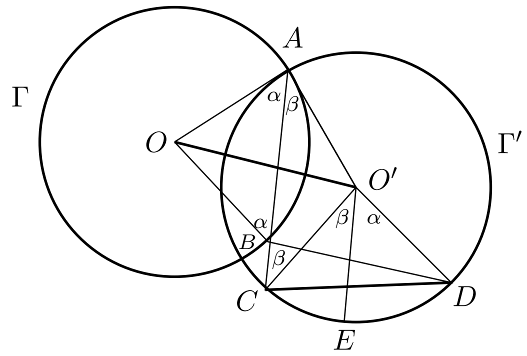
$$(S_1 - 1) + (S_2 - 1) + (S_3 - 1) + (S_4 - 1) = \sum_{n=1}^{2006} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n).$$

Además, por el pequeño Teorema de Fermat tenemos que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$ para cada entero a primo relativo con 5, en particular para $a = 1, 2, 3, 4$. Luego, como $1 + 2 + 3 + 4 \equiv 0 \pmod 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \equiv 0 \pmod 5$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \equiv 0 \pmod 5$ y $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 \equiv 4 \pmod 5$, se sigue que $1^{n+4} + 2^{n+4} + 3^{n+4} + 4^{n+4} \equiv 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \pmod 5$ para todo entero positivo n. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{2006} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n) \equiv (0 + 0 + 0 + 4) \left(\frac{2004}{4} \right) \equiv 4 \pmod 5.$$

Luego, $S \equiv 2(4) \equiv 3 \pmod 5$ y como $S \equiv 0 \pmod 2$, concluimos que $S \equiv 8 \pmod{10}$. Por lo tanto, la última cifra de S es 8.

Solución del problema 2. Como los triángulos OAB y $O'AC$ son isósceles, tenemos que $\angle OAB = \alpha = \angle OBA$ y $\angle O'AC = \beta = \angle O'CA$.
Construyamos un punto E tal que AC y $O'E$ sean paralelas. Entonces, $\angle ACO' = \angle CO'E = \beta$ por ser alternos internos, y $\angle OBA = \angle EO'D = \alpha$ porque OB es paralela a $O'D$ y AB es paralela a $O'E$. Luego, $\angle OAO' = \alpha + \beta = \angle CO'D$.
Primera forma de concluir. Como Γ y Γ' son circunferencias de radios iguales, tenemos que el triángulo OAO' es congruente con el triángulo $CO'D$ y por lo tanto $CD = OO'$, es decir, CD es constante independientemente de la ubicación de B.
Segunda forma de concluir. Usando la ley de los cosenos en el triángulo CDO', tenemos que $CD = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos(\alpha + \beta)}$ donde R es el radio de Γ'. Es decir, CD es constante independientemente de la ubicación de B. (Nótese que aquí no usamos que Γ y Γ' tienen radios iguales).



Solución del problema 3. Consideremos la función $g(n) = f(f(n)) - f(n)$. De la definición de f tenemos que $g(n) = \left[\sqrt{f(n)} + \frac{1}{2}\right]$. Se trata entonces de resolver la ecuación:

$$g(n) = \left[\sqrt{f(n)} + \frac{1}{2}\right] = k, \quad \text{para } \ k \geq 1.$$

Observemos lo siguiente:

1. f es estrictamente creciente.

2. g es creciente.

3. $g(k^2) = k$.

4. $g(k^2 + 1) = k + 1$.

Veamos el caso $k = 1$.
Claramente, $n = 1$ es solución de la ecuación $g(n) = 1$, pues $f(f(1)) - f(1) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1$. Además, $g(2) = f(f(2)) - f(2) = f(3) - 3 = 5 - 3 = 2$, por lo que $g(n) \geq 2$ para $n \geq 2$. Así, la única solución es $n = 1$ y esto prueba el resultado en el caso $k = 1$.
Supongamos entonces que $k \geq 2$, y tomamos n tal que $k^2 - 2k + 2 \leq n \leq k^2$. Hay exactamente $2k - 1$ de tales n. Como g es creciente, tenemos que $k = g(k^2 - 2k + 2) \leq g(n) \leq g(k^2) = k$. Por lo tanto, $g(n) = k$. Hemos encontrado $2k - 1$ soluciones de la ecuación. Para demostrar que no hay más soluciones, observemos que $m \leq k^2 - 2k + 1$ implica que $g(m) \leq g(k^2 - 2k + 1) = k - 1$, y $k^2 + 1 \leq m$ implica que $k + 1 = g(k^2 + 1) \leq g(m)$.

Demostraremos ahora las afirmaciones 1 a 4.
1. Sea $n \geq 1$. Entonces:
$f(n+1)-f(n) = n+1+\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-n-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = 1+\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$.
Como $\sqrt{n+1}+\frac{1}{2} > \sqrt{n}+\frac{1}{2}$, se tiene que $\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] \geq 0$. Por lo tanto, $f(n+1)-f(n) > 0$, es decir, f es estrictamente creciente.

2. Sea $n \geq 1$. Entonces, $g(n+1)-g(n) = \left[\sqrt{f(n+1)}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{f(n)}+\frac{1}{2}\right]$.
Como f es estrictamente creciente tenemos que $\sqrt{f(n+1)}+\frac{1}{2} > \sqrt{f(n)}+\frac{1}{2}$, y por lo tanto $\left[\sqrt{f(n+1)}+\frac{1}{2}\right] \geq \left[\sqrt{f(n)}+\frac{1}{2}\right]$. Por lo tanto, g es creciente.

3. Como $f(k^2) = k(k+1)$, tenemos que $g(k^2) = \left[\sqrt{f(k^2)}+\frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{k(k+1)}+\frac{1}{2}\right]$.
De las desigualdades $k < \sqrt{k(k+1)}+\frac{1}{2} < k+1$, se sigue que $g(k^2) = k$.

4. Como $k^2 < k^2+1 < (k+1)^2$, y g es creciente, tenemos que $k = g(k^2) \leq g(k^2+1) \leq g((k+1)^2) = k+1$. Probemos que $g(k^2+1) > k$. Supongamos que $g(k^2+1) = k$. Entonces, $\left[\sqrt{f(k^2+1)}+\frac{1}{2}\right] = k$, de modo que $k \leq \sqrt{f(k^2+1)}+\frac{1}{2} < k+1$. Luego, $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 < f(k^2+1) < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2$. Según la definición de f, tenemos que $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 < k^2+1+\left[\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{2}\right] < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2$. Estas últimas desigualdades se pueden reescribir como $-k-\frac{3}{4} < \left[\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{2}\right] < k-\frac{3}{4}$, de donde $\left[\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{2}\right] < k$, lo que implica que $\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{2} < k$ lo cual es imposible. Por lo tanto, $g(k^2+1) = k+1$.

Solución del problema 4. Tenemos que $2006^2 = 2^2 \times 17^2 \times 59^2$. A cada conjunto que cumple las condiciones del enunciado y tal que la suma de sus elementos es ese menor valor, lo llamaremos un conjunto mínimo.
Primero veremos que cada conjunto mínimo tiene 6 o menos elementos.
Consideremos un conjunto mínimo cualquiera. Marcamos algunos de sus elementos siguiendo los siguientes pasos:

(a) Primero marcamos o bien dos elementos múltiplos de 2, o un elemento múltiplo de 4 (esto tiene que existir ya que el producto es múltiplo de 2006^2).
(b) Luego marcamos o bien dos elementos múltiplos de 17, o un elemento múltiplo de 17^2 (existen por la misma razón anterior).
(c) Finalmente marcamos o bien dos elementos múltiplos de 59, o un elemento múltiplo de 59^2.

Nótese que los elementos marcados satisfacen que su producto es múltiplo de 2006^2, y no se marcaron más de 6 elementos. Además, la suma de los elementos marcados es menor o igual a la suma de todos los elementos del conjunto. Dado que este conjunto es un conjunto mínimo, necesariamente se tienen que haber marcado todos sus elementos, por lo que el conjunto no tiene más de 6 elementos.

Ahora veremos que ninguno de los elementos de un conjunto mínimo es múltiplo de 17^2.

Supongamos que un conjunto mínimo es de la forma $\{17^2k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (con k un entero positivo). Consideremos las parejas de números:

$$\begin{gathered} 17k, 15\times 17k \\ 2\times 17k, 14\times 17k \\ 3\times 17k, 13\times 17k \\ 4\times 17k, 12\times 17k \\ \vdots \\ 7\times 17k, 9\times 17k \end{gathered}$$

En total hay 7 parejas, y no hay más de 6 elementos en el conjunto $\{17^2k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, por lo que una de las parejas satisface que ninguno de sus dos elementos está en ese conjunto. Sea $a(17k), (16-a)17k$ esa pareja. Consideremos entonces el nuevo conjunto $\{a(17k), (16-a)17k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El nuevo conjunto satisface que el producto de sus elementos es múltiplo del producto de los elementos del conjunto original, y por lo tanto es múltiplo de 2006^2. Además, la suma de los elementos de este nuevo conjunto es:

$$16\times 17k + \sum_{i=1}^{n} a_i < 17^2k + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Por lo tanto, el conjunto original no puede ser un conjunto mínimo, lo cual contradice lo asumido inicialmente.

Usando el mismo argumento, pero con las parejas:

$$\begin{gathered} 59k, 15\times 59k \\ 2\times 59k, 14\times 59k \\ 3\times 59k, 13\times 59k \\ 4\times 59k, 12\times 59k \\ \vdots \\ 7\times 59k, 9\times 59k \end{gathered}$$

se tiene que ningún conjunto mínimo tiene un elemento múltiplo de 59^2.
Ahora veremos que ningún conjunto mínimo tiene un elemento múltiplo de 17×59. Supongamos que algún conjunto mínimo es de la forma $\{17\times 59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con k un entero positivo. Consideremos las parejas de números:

$$\begin{gathered} 17k, 59k \\ 2\times 17k, 2\times 59k \\ 3\times 17k, 3\times 59k \\ \vdots \\ 7\times 17k, 7\times 59k \end{gathered}$$

En total son 7 parejas, y el conjunto $\{17\times 59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ no tiene más de 6 elementos, por lo que alguna de las parejas satisface que ninguno de sus dos elementos está en $\{17\times 59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sea $a(17k), a(59k)$ dicha pareja. Consideramos entonces el nuevo conjunto $\{a(17k), a(59k), a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El producto de los elementos del nuevo conjunto también es múltiplo de 2006^2, y la suma de sus elementos es:

$$a(17+59)k+\sum_{i=1}^{n} a_i = a(76k)+\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 7\times 76k+\sum_{i=1}^{n} a_i < 17\times 59k+\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Entonces el conjunto original no podría ser un conjunto mínimo, lo cual contradice la suposición inicial.
Tenemos entonces que las siguientes afirmaciones son ciertas para cada conjunto mínimo S:
(a) Ningún elemento de S es múltiplo de 17^2.
(b) Ningún elemento de S es múltiplo de 59^2.
(c) Ningún elemento de S es múltiplo de 17×59.
Entonces el conjunto S debe ser de la forma:

$$\{17x_1, 17x_2, \ldots, 17x_p, 59y_1, 59y_2, \ldots, 59y_q, z_1, z_2, \ldots, z_r\}$$

(r podría ser 0), donde ninguno de los números x_1, $x_2, \ldots, x_p$, $y_1, y_2, \ldots, y_q$, z_1, z_2, $\ldots$, z_r es múltiplo de 17, ni de 59.
Tenemos además que $p\geq 2$ y $q\geq 2$ (para que el producto sea divisible entre 17^2 y 59^2). Por otro lado, como los $x_i's$ son distintos, se tiene que $x_1+x_2\geq 1+2$ y de la misma manera $y_1+y_2\geq 1+2$. Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum(S) &= 17(x_1+x_2+\cdots+x_p)+59(y_1+y_2+\cdots+y_p)+z_1+z_2+\cdots+z_r \\ &\geq 17(x_1+x_2)+59(y_1+y_2)\geq 17(3)+59(3)=228. \end{aligned}$$

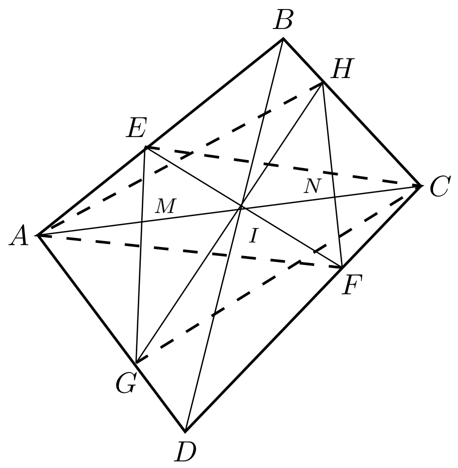
Basta entonces dar un ejemplo de un conjunto tal que el producto de sus elementos es múltiplo de 2006^2 y tal que la suma de sus elementos es 228: $\{17, 2 \times 17, 59, 2 \times 59\}$.

Solución del problema 5. Veamos primero que la red de puentes de Olimpia no puede contener ciclos. Sean $I_1, I_2, \ldots, I_n$ las islas de Olimpia, y supongamos que hay un ciclo. Como por cada dos islas hay a lo más un puente, el ciclo tiene al menos tres islas. Supongamos que I_1 es Panacentro. Si I_1 está en dicho ciclo, digamos que el ciclo es $I_1 \leftrightarrow I_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow I_m \leftrightarrow I_1$, con $m \leq n$, al ir de I_1 a I_m pasando por $I_2, I_3, \ldots, I_{m-1}$, tenemos que el número de habitantes de I_m es menor que el número de habitantes de I_2. Y si vamos de I_1 a I_2 pasando por $I_m, I_{m-1}, \ldots, I_3$ tenemos que el número de habitantes de I_m es mayor que el número de habitantes de I_2, lo cual es una contradicción. Si I_1 no está en el ciclo, digamos que el ciclo es $I_2 \leftrightarrow I_3 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow I_m \leftrightarrow I_2$, sea I_i una de las islas del ciclo. Como podemos llegar de I_1 a I_i, consideremos la primera isla del ciclo en ese camino de I_1 a I_i, y sin pérdida de generalidad supongamos que es I_2 (podría ser la misma I_i). Entonces hay un camino que conecta a I_1 con I_2 que no usa más islas del ciclo. Luego, si vamos de I_1 a I_3 y de I_1 a I_m por los caminos más largos, llegaremos a una contradicción como en el caso anterior. Por lo tanto, la red de puentes de Olimpia no contiene ciclos.

Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ las respectivas poblaciones de $I_1, I_2, \ldots, I_n$, de forma que $p_i > p_j$ si y sólo si $i > j$. Entonces, la primera isla en el orden, I_1, debe ser justamente Panacentro. Ahora, I_2 debe estar directamente unida a I_1, ya que de I_1 es posible llegar a I_2 y en ese camino no deberían encontrarse islas de menor cantidad de habitantes. Para I_3, es posible unirla con un puente directamente a I_1 o directamente a I_2, pero no a las dos, ya que se formaría un ciclo. Se tienen entonces 2 posibilidades. Para I_4, se le puede unir directamente con I_1, I_2 o I_3, para obtener 3 posibilidades. Siguiendo el proceso, hasta llegar a I_n para la que existen $n-1$ posibilidades (unir directamente con cualquiera de las islas anteriores) se tiene que el total de opciones para conformar los puentes de Olimpia está dado por:

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!.$$

Solución del problema 6. Notemos que podemos determinar doce pares de triángulos, ya sea con lados en común o con ángulos comunes, o bien con dos ángulos congruentes, uno por cada triángulo del par.



Estableciendo relaciones entre áreas y lados, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{AM}{IM}\cdot\frac{IN}{CN} &= \frac{(AEG)}{(IEG)}\cdot\frac{(IFH)}{(CHF)}\\
&= \frac{(IFH)}{(IEG)}\cdot\frac{(CBD)}{(CHF)}\cdot\frac{(ABD)}{(CBD)}\cdot\frac{(AEG)}{(ABD)}\\
&= \frac{IF\cdot IH}{IE\cdot IG}\cdot\frac{CD\cdot CB}{CF\cdot CH}\cdot\frac{IA}{IC}\cdot\frac{AE\cdot AG}{AB\cdot AD}\\
&= \frac{(FAC)}{(EAC)}\cdot\frac{(HAC)}{(GAC)}\cdot\frac{(DAC)}{(FAC)}\cdot\frac{(BAC)}{(HAC)}\cdot\frac{IA}{IC}\cdot\frac{(EAC)}{(BAC)}\cdot\frac{(GAC)}{(DAC)}\\
&= \frac{IA}{IC},
\end{aligned}$$

donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.

4.3. XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Solución del problema 1. (Solución de Fernando Campos). Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Como $\angle BAC = 90^\circ$, entonces O es el punto medio de BC y $AO = BO = CO$. Sean $2\beta = \angle CBA$ y $2\theta = \angle ACB$. Entonces $\angle OAC = 2\theta$ y $\angle BAO = 2\beta$. Como $AR = AS$ (son tangentes desde A al incírculo), $\angle ARS = \angle ASR$ por lo que $\beta + \theta = \angle ARS = \angle NRB$. Además, $\angle NBR = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$ y $\angle BNR = 180^\circ - \angle NRB - \angle NBR = \beta - \theta$.

Como AM y AO son perpendiculares y $\angle BAC = 90^\circ$, entonces $\angle MAB = \angle OAC$ (ambos iguales a $90^\circ - \angle BAO$), de donde $\angle MAB = 2\theta$. Como además

$\angle MBR = 180° - 2\beta$, tenemos que $\angle AMB = 2\beta - 2\theta$. Pero como $\angle AMB$ es un ángulo externo del triángulo MUN, tenemos que $\angle MUN = \angle AMB - \angle MNU = 2\beta - 2\theta - (\beta - \theta) = \beta - \theta$. Luego $\angle MUN = \beta - \theta = \angle UNM$, de donde $MN = MU$.

Solución del problema 2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, sea $d_k = a_{k+1} - a_k$. Es claro que $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$. Calculemos s en términos de los d_k. Un d_k, con $k = 1, 2, \ldots, n-1$ aparece en aquellas diferencias $a_i - a_j$, $i < j$, en las que a_i es uno de los números $a_1, \ldots, a_k$, mientras que a_j es uno de los números $a_{k+1}, \ldots, a_n$. Es decir, en total d_k aparece $k(n-k)$ veces en la suma s. Entonces, tenemos que:

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k.$$

Como $k(n-k) \geq n-1$ si y sólo si $kn - k^2 - n + 1 \geq 0$ si y sólo si $(k-1)(n-k-1) \geq 0$, y esta última desigualdad es cierta, tenemos que:

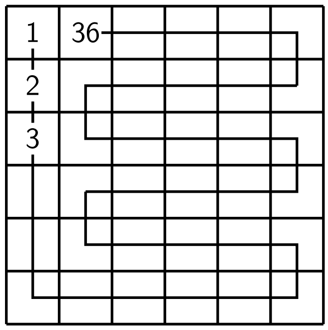
$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \geq \sum_{k=1}^{n-1}(n-1)d_k = (n-1)d.$$

Por otro lado, por la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$, de modo que:

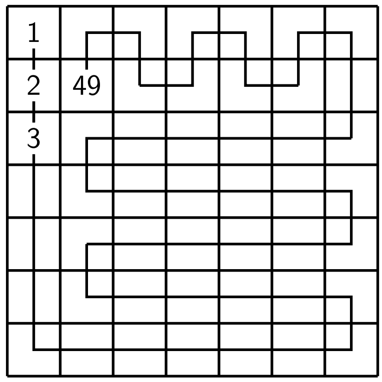
$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2}{4} d_k = \frac{n^2}{4} d.$$

Ahora, la igualdad en $k(n-k) \geq n-1$ se da sólo en $k = 1$ y $k = n-1$. Entonces, para tener $s = (n-1)d$ sólo d_1 y d_{n-1} pueden ser distintos de cero. Luego, $s = (n-1)d$ si y sólo si $a_1 \leq a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} \leq a_n$.
Por otro lado, la igualdad en $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ se da si y sólo si $k = n-k$, si y sólo si $k = \frac{n}{2}$. Entonces, si n es impar, para que $s = \frac{n^2}{4}d$ debemos tener que $d_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$. Luego, $s = \frac{n^2}{4}d$ si y sólo si $a_1 = \cdots = a_n$ para n impar. Si n es par, digamos $n = 2k$, entonces sólo d_k puede ser distinto de cero, de modo que $s = \frac{n^2}{4}d$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_k \leq a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$.

Solución del problema 3. Como en cada viaje la ficha da por lo menos un paso, $N \geq n^2$. Si n es par, podemos acomodar los números de manera que cada viaje sea de 1 paso (abajo se ilustra como hacerlo para $n = 6$). En cambio, si n es impar, alguno de los viajes debe ser de 2 o más pasos: de lo contrario, si pintamos la cuadrícula como tablero de ajedrez, el viaje empezaría y terminaría en casillas de diferente color. Pero podemos acomodar los números de manera que el primer viaje sea de 2 pasos y los demás de 1 (abajo se ilustra como hacerlo para $n = 7$).



$n = 6$



$n = 7$

Ahora determinemos el N máximo. Para cada k entre 1 y n^2, sean r_k y c_k el renglón y la columna donde aparece k. Observemos que cuando la ficha viaja de la casilla con el número j a la casilla con el número $j+1$, da $|r_{j+1}-r_j|+|c_{j+1}-c_j|$ pasos. Escribamos los números $r_1, r_2, \ldots, r_{n^2}$ alrededor de una circunferencia, en ese orden. Al hacerlo, ponemos cada número del 1 al n exactamente n veces. En el espacio entre cada dos números consecutivos r_j y r_{j+1} de la circunferencia, escribamos en rojo el mayor de ellos y en azul, el menor. En cada espacio, el número rojo menos el azul es $|r_{j+1} - r_j|$. Además, cada número del 1 al n aparece pintado, en los espacios, exactamente $2n$ veces. Sean r a la suma de los n^2 números rojos, a la suma de los n^2 números azules y $R = r - a$. Sea C el resultado análogo para las columnas (escribimos los c_j's alrededor de una circunferencia, escribimos números rojos y azules entre los espacios, y efectuamos los mismo cálculos). Entonces $N = R + C$.

Supongamos ahora que n es impar. Entonces, r alcanza su máximo M si de los $2n^2$ números pintados, los rojos son los n^2 más grandes (específicamente, los $2n$ n's, los $2n$ (n-1)'s, etcétera, y n de los $\frac{n+1}{2}$'s). De igual manera, a alcanza su mínimo m si de los $2n^2$ números pintados, los azules son los n^2 más pequeños (específicamente, los $2n$ 1's, los $2n$ 2's, etcétera, y n de los $\frac{n+1}{2}$'s). Entonces $R \leq M - m = \frac{1}{2}(n^3 - n)$. Análogamente, $C \leq \frac{1}{2}(n^3 - n)$ y por lo tanto, $N \leq n^3 - n$. Veremos que este valor de N puede alcanzarse. Digamos que los números del 1 al $\frac{n+1}{2} - 1$ son *pequeños*, que el número $\frac{n+1}{2}$ es *mediano*, y que los números del $\frac{n+1}{2} + 1$ al n son *grandes*. Escribamos en una sucesión s

los números del 1 al n de manera que queden ordenados así: pequeño, grande, pequeño, grande, etcétera, pequeño, grande y mediano. Dividamos dos circunferencias en n sectores cada una. En cada sector de la primera circunferencia, pongamos copias de s. En los sectores de la segunda circunferencia, pongamos las n combinaciones cíclicas de s. De esta manera, al asociar cada número de la primera circunferencia con su correspondiente en la segunda, obtenemos todas las combinaciones (r, c) con r y c entre 1 y n, y por lo tanto obtenemos una manera de acomodar los números del 1 al n^2 en la cuadrícula. Si además ponemos, en la segunda circunferencia, primero todas las permutaciones que empiezan en pequeño y terminan en grande, luego la que empieza en pequeño y termina en mediano, luego todas las que empiezan en grande y terminan en pequeño, y finalmente la que empieza en mediano y termina en grande, es claro que tanto en la primera circunferencia como en la segunda, los números rojos y azules son exactamente los que necesitamos para que N alcance el valor deseado.
Ahora supongamos que n es par. Como en el otro caso, r alcanza su máximo M si de los $2n^2$ números pintados, los rojos son los n^2 más grandes (específicamente, los $2n$ n's, los $2n$ (n-1)'s, etcétera, y los $2n$ $\frac{n}{2}+1$'s), mientras que a alcanza su mínimo m si de los $2n^2$ números pintados, los azules son los n^2 más pequeños (específicamente, los $2n$ 1's, los $2n$ 2's, etcétera, y los $2n$ $\frac{n}{2}$'s). Entonces $N \leq n^3$.
Digamos que los números del 1 al $\frac{n}{2}$ son *pequeños* y que los números del $\frac{n}{2}-1$ al n son *grandes*. Si ponemos los números pequeños y los grandes alternados tanto en la circunferencia de los renglones como en la de las columnas, al asociar los números de la primera circunferencia con los de la segunda, no obtendremos todas las parejas (r, c). Por lo tanto, en alguna de las dos circunferencias, tenemos que poner dos números pequeños uno junto al otro, y también dos números grandes uno junto al otro. En el espacio entre los dos números pequeños, queda pintado de rojo uno de ellos, digamos p, y en el espacio entre los dos grandes, queda pintado de azul uno de ellos, digamos g. Entonces, $N \leq n^3 - 2(g-p) \leq n^3 - 2$. Veremos que este valor de N puede alcanzarse.
Escribamos en una sucesión s los números del 1 al n de manera que queden ordenados así: pequeño, grande, pequeño, grande, etcétera, pequeño y grande. Dividamos dos circunferencias en n sectores cada una. En cada sector de la primera circunferencia pongamos copias de s y en los sectores de la segunda, las n permutaciones cíclicas de s, ordenadas de esta manera: primero todas las permutaciones que empiezan en pequeño y terminan en un número grande distinto de $\frac{n}{2}+1$, luego la que empieza en pequeño y termina en $\frac{n}{2}+1$, luego todas las que empiezan en grande y terminan en un número pequeño distinto de $\frac{n}{2}$ y finalmente la que empieza en grande y termina en $\frac{n}{2}$. Es claro que los números rojos y los azules son los que necesitamos para que N alcance el valor

deseado. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos.

	N mínimo	N máximo
n par	n^2	n^3-2
n impar	n^2+1	n^3-n

Solución del problema 4. (Solución de Fernando Campos). Como $a+b$ divide a $4ab+1$ y a $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, tenemos que $a+b$ divide a $a^2+2ab+b^2-(4ab+1) = (a-b)^2-1 = (a-b-1)(a-b+1)$. Por otro lado, $(2b-1, 2a+1) = 1 \Rightarrow (2a+1+2b-1, 2a+1) = 1 \Rightarrow (2a+2b, 2a+1) = 1 \Rightarrow (a+b, 2a+1) = 1 \Rightarrow (a+b, 2a+1-a-b) = 1$, es decir $(a+b, a-b+1) = 1$. Entonces $a+b$ divide a $a-b-1$. Como $a+b > a-b-1$, necesariamente se tiene que cumplir que $a-b-1 = 0$, de modo que $a = b+1$.
Por último, notemos que las parejas (a,b) con $a = b+1$, satisfacen que $2a+1 = 2b+3$ y $2b-1$ son primos relativos, ya que si p es un primo que divide a $2b+3$ y a $2b-1$, entonces p divide a la resta que es 4, de modo que $p = 2$ lo cual no puede ser porque $2b+3$ y $2b-1$ son impares. Además, es claro que $2b+1$ divide a $4b(b+1)+1 = (2b+1)^2$.
Por lo tanto, la respuesta es: todas las parejas de la forma $(b+1, b)$.

Solución del problema 5. (Solución de Joshua Hernández). Sea O el centro de $\mathcal{C}$. Como XY es una cuerda de $\mathcal{C}$ entonces $\angle OMD = 90°$. Como PD y QD son tangentes a $\mathcal{C}$ en P y Q respectivamente, tenemos que $\angle OPD = 90° = \angle OQD$. Luego, el cuadrilátero $MQDP$ es cíclico, y como el triángulo PQD es isósceles, tenemos que $\angle PMD = \angle PQD = \angle DPQ = \angle DMQ = \alpha$.
Análogamente, si R y S son los puntos de tangencia de $\mathcal{C}$ con BC y AC respectivamente, entonces el cuadrilátero $BSMR$ es cíclico y $\angle SMB = \angle BMR = \angle BSR = \angle BRS = \beta$.
Sean $\angle RMC = c_1$, $\angle CMQ = c_2$, $\angle SMA = a_1$ y $\angle AMP = a_2$.
Por la ley de los senos en los triángulos BMR y MRC tenemos que $\frac{BR}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{MB}{\operatorname{sen}\angle MRB}$ y $\frac{RC}{\operatorname{sen} c_1} = \frac{MC}{\operatorname{sen}\angle MRC} = \frac{MC}{\operatorname{sen}(180° - \angle MRB)} = \frac{MC}{\operatorname{sen}\angle MRB}$, de donde:

$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{MB}{MC}. \tag{4.5}$$

De manera análoga, usando la ley de los senos en los triángulos MCQ y MQD, tenemos que $\frac{MC}{\operatorname{sen}\angle MQC} = \frac{CQ}{\operatorname{sen} c_2}$ y $\frac{QD}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{MD}{\operatorname{sen}\angle MQD} = \frac{MD}{\operatorname{sen}(180° - \angle MQC)} = \frac{MD}{\operatorname{sen}\angle MQC}$, de donde

$$\frac{CQ}{QD} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} c_2} = \frac{MC}{MD}. \tag{4.6}$$

Multiplicando (4.5) y (4.6), y usando que $RC = CQ$, tenemos que $\frac{BR}{QD} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen} c_2} = \frac{MB}{MD}$, es decir, $\frac{\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen} c_2} = \frac{MB}{MD} \cdot \frac{QD}{BR} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$.
Si hacemos lo mismo pero ahora en el triángulo ABD, tenemos que $\frac{\operatorname{sen} a_1}{\operatorname{sen} a_2} = \frac{MB}{MD} \cdot \frac{PD}{BS} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$. Luego, $\frac{\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen} c_2} = \frac{\operatorname{sen} a_1}{\operatorname{sen} a_2}$, ya que $QD = PD$ y $BR = BS$.
Por otro lado, tenemos que $c_1 + c_2 = 180° - \alpha - \beta = a_1 + a_2$. Luego, si $M = 180° - \alpha - \beta$ tenemos que $\frac{\operatorname{sen}(M-c_2)}{\operatorname{sen} c_2} = \frac{\operatorname{sen}(M-a_2)}{\operatorname{sen} a_2}$. Desarrollando, resulta que:

$$\operatorname{sen} M \cos c_2 \operatorname{sen} a_2 - \operatorname{sen} c_2 \cos M \operatorname{sen} a_2 = \operatorname{sen} M \cos a_2 \operatorname{sen} c_2 - \operatorname{sen} a_2 \cos M \operatorname{sen} c_2,$$

de donde $\operatorname{sen} M \cos c_2 \operatorname{sen} a_2 = \operatorname{sen} M \cos a_2 \operatorname{sen} c_2$. Como $0° < M < 180°$, entonces $\operatorname{sen} M \neq 0$ y por lo tanto $\cos c_2 \operatorname{sen} a_2 = \cos a_2 \operatorname{sen} c_2$, es decir, $\operatorname{sen}(a_2 - c_2) = 0$. Pero como $-180° < a_2 - c_2 < 180°$, entonces $a_2 - c_2 = 0$, de donde $a_2 = c_2$ y $a_1 = c_1$, que es lo que queríamos demostrar.

Solución del problema 6. Numeremos los vértices del polígono del 0 al $n-1$, de manera consecutiva. Para cada entero no negativo k, sea a_k el número del vértice P_k. Para cada $k \geq 2$ el triángulo $P_{k-2}P_{k-1}P_k$ es isósceles con $P_{k-2}P_k = P_kP_{k-1}$. Por lo tanto, $a_k - a_{k-2} \equiv a_{k-1} - a_k$ (mod n). De aquí, $a_{k-2} \equiv 2a_k - a_{k-1}$ (mod n). Dos términos consecutivos de la sucesión determinan el siguiente. Como hay una cantidad finita de parejas ordenadas de vértices del polígono, a partir de cierto momento la sucesión $P_0, P_1, P_2, \ldots$ se vuelve periódica. La fórmula que acabamos de deducir nos indica que dados dos términos de la sucesión, es posible determinar el término precedente. Entonces el periodo debe incluir a P_0, P_1. Además, podemos dar respuesta al problema considerando la sucesión en *sentido inverso*, es decir, considerando una sucesión de enteros $b_0, b_1, \ldots$ módulo n tal que b_0 y b_1 son los números correspodientes a dos vértices consecutivos del polígono y tal que $b_{k+2} \equiv 2b_k - b_{k+1}$ (mod n) para todo entero no negativo k. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $b_0 = 0$ y $b_1 = 1$. La ecuación característica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ de la relación de recurrencia $b_{k+2} \equiv 2b_k - b_{k+1}$ tiene raíces $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$. De las condiciones iniciales $b_0 = 0$ y $b_1 = 1$ se sigue fácilmente que:

$$b_k \equiv \frac{1-(-2)^k}{3} \pmod{n},$$

para todo entero no negativo k. El problema se reduce a investigar para qué enteros positivos impares n mayores que 1, la expresión $\frac{1-(-2)^k}{3}$ toma todos los valores módulo n.
Supongamos que n tiene un factor primo p distinto de 3. Como n es impar, p debe ser impar. Si la expresión $\frac{1-(-2)^k}{3}$ toma todos los valores módulo n,

entonces también toma todos los valores módulo p. Pero de acuerdo al pequeño Teorema de Fermat, $1-(-2)^{p-1+t}=1-(-2)^{p-1}(-2)^t\equiv 1-(-2)^t$ (mod p) para cualquier entero no negativo t. Es decir, $3b_{p-1+t}\equiv 3b_t$ (mod p). Como 3 y p son primos entre sí, esto implica que $b_{p-1+t}\equiv b_t$ (mod p). Entonces la sucesión $b_0,b_1,\ldots$ es periódica módulo p y el tamaño de dicho periodo es, como máximo $p-1$. Por lo tanto, alguno de los p distintos residuos módulo p, no aparece en dicha sucesión.

Para que n tenga la propiedad requerida, es necesario que sea potencia de 3. Veremos ahora que todas las potencias de 3 cumplen. Usaremos el siguiente resultado.

Proposición. Sea m un entero positivo. El orden O de -2 módulo 3^{m+1} es 3^m.

Prueba. Primero mostraremos por inducción que la máxima potencia de 3 que divide a $(-2)^{3^j}-1$ es 3^{j+1}. Claramente 3^2 es la máxima potencia de 3 que divide a $(-2)^{3^1}-1=-9$. Supongamos que el resultado es cierto para algún entero positivo j. Observemos que:

$$(-2)^{3^{j+1}}-1=((-2)^{3^j}-1)((-2)^{2\cdot 3^j}+(-2)^{3^j}+1). \qquad (4.7)$$

Módulo 9, la sucesión $(-2)^0,(-2)^1,\ldots$ es $1,7,4,1,7,4,\ldots$. Luego, $(-2)^{2\cdot 3^j}+(-2)^{3^j}+1\equiv 1+1+1=3$ (mod 9), de modo que la máxima potencia de 3 que divide al segundo factor del lado derecho de (4.7) es 3. También para $j=0$ se cumple el resultado. Esto completa la inducción.

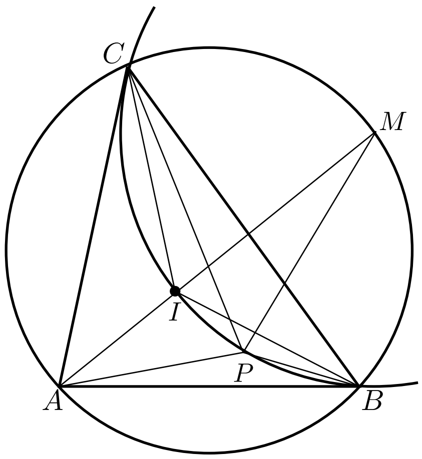
Tenemos entonces que $(-2)^{3^m}\equiv 1$ (mod 3^{m+1}), de modo que O divide a 3^m. Pero por otra parte, 3^{m+1} no divide a $(-2)^{3^{m-1}}-1$, ya que la máxima potencia de 3 que divide a $(-2)^{3^{m-1}}-1$ es 3^m. Entonces, O no divide a 3^{m-1} y por lo tanto $O=3^m$. Esto termina la prueba de la proposición.

Sea, pues, $n=3^m$ con m un entero positivo. Supongamos que k y K son enteros no negativos con $k<K$, tales que $b_K\equiv b_k$ (mod n). Entonces $3b_K=1-(-2)^K\equiv 1-(-2)^k=3b_k$ (mod $3n$). De aquí, $(-2)^K\equiv(-2)^k$ (mod 3^{m+1}) y en vista de que -2 y 3^{m+1} son primos entre sí, tenemos que $(-2)^{K-k}\equiv 1$ (mod 3^{m+1}). Luego, el orden de -2 módulo 3^{m+1} divide a $K-k$. Pero de acuerdo con la proposición, dicho orden es $n=3^m$. Es decir, $K-k$ es múltiplo de n. Esto significa que entre los primeros n términos $b_0,\ldots,b_{n-1}$ de la sucesión, no hay dos que sean congruentes entre sí módulo n, y así todos los residuos aparecen.

4.4. 47^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Solución del problema 1. (Solución de Isaac Buenrostro Morales). Sean $\angle PBC=\alpha$ y $\angle PCB=\beta$. Entonces $\angle BPC=180^\circ-\alpha-\beta$, y como $\angle PBA+\angle PCA=$

$\angle PBC + \angle PCB = \alpha + \beta$ tenemos que $2\alpha + 2\beta = \angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = 180° - \angle BAC$, es decir, $\alpha + \beta = \frac{180° - \angle BAC}{2}$. Luego, $\angle BPC = 180° - \frac{180° - \angle BAC}{2}$, que es fijo. Además, $\angle BPC = \angle BIC$, y como P e I están del mismo lado de BC, tenemos que los puntos B, C, I y P son concíclicos. En otras palabras, P está en el circuncírculo del triángulo BCI.



Sea M la intersección de AI con el circuncírculo del triángulo ABC. Es resultado conocido que $MB = MI = MC$, de modo que los triángulos MBI, MPI y MBC son isósceles. Luego, las mediatrices de IB, BC y CI pasan por M y así M es el circuncentro del triángulo BIC. Por lo tanto, M es el centro de la circunferencia que pasa por B, C, I y P.
Si trazamos la circunferencia con centro en A y radio AI, entonces como A, I y M son colineales, tenemos que I es el punto de tangencia de esta circunferencia con la circunferencia que pasa por B, C, I y P. Luego, si $P \neq I$, entonces P no está sobre la circunferencia con centro en A y por lo tanto $AP > AI$. Finalmente, es claro que $AP = AI$ si y sólo si $P = I$.

Solución del problema 2. Llamaremos a un triángulo isósceles *impar* si tiene dos lados impares. Supongamos que tenemos una división como lo dice el problema. Un triángulo isósceles impar en la división será llamado *iso-impar* por brevedad. Demostraremos primero el siguiente resultado.
Proposición. Sea AB una de las diagonales que dividen a P y sea $\mathcal{L}$ la parte más corta de la frontera de P con extremos A, B. Supongamos que $\mathcal{L}$ está formado de n segmentos. Entonces, el número de triángulos iso-impares con vértices en $\mathcal{L}$ no es mayor que $\frac{n}{2}$.
Prueba. El resultado es claro para $n = 2$. Sea n tal que $2 < n \leq 1003$ y supon-

gamos que el resultado es cierto para cada $\mathcal{L}$ de longitud menor que n. Sea PQ la diagonal más grande que es lado de un triángulo iso-impar PQS con todos los vértices en $\mathcal{L}$ (si no existe dicho triángulo, no hay nada que probar). Cada triángulo cuyos vértices están en $\mathcal{L}$ es obtusángulo o rectángulo, así que S es el vértice más alto de PQS. Supongamos que los cinco puntos A, P, S, Q y B están en $\mathcal{L}$ en este orden y particionemos $\mathcal{L}$ en cuatro piezas $\mathcal{L}_{AP}$, $\mathcal{L}_{PS}$, $\mathcal{L}_{SQ}$ y $\mathcal{L}_{QB}$ (algunas de ellas podrían ser sólo un punto).
Por definición de PQ, un triángulo iso-impar no puede tener vértices en $\mathcal{L}_{AP}$ y en $\mathcal{L}_{QB}$. Luego, cada triángulo iso-impar con vértices en $\mathcal{L}$ tiene todos sus vértices exactamente en una de las cuatro piezas. Aplicando a cada una de estas piezas la hipótesis de inducción y sumando las cuatro desigualdades, tenemos que el número de triángulos iso-impares con vértices en $\mathcal{L}$, además de PQS, no es mayor que $\frac{n}{2}$. Como $\mathcal{L}_{PS}$ y $\mathcal{L}_{SQ}$ están formados por un número impar de lados, las desigualdades para estas dos piezas son desigualdades estrictas, dejando $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ en exceso. Luego, el triángulo PSQ también está cubierto por la estimación $\frac{n}{2}$. Esto completa la prueba de la proposición.
Consideremos ahora la diagonal más grande XY que divide a P. Sea $\mathcal{L}_{XY}$ la parte más corta de la frontera de P con extremos X, Y, y sea XYZ el triángulo en la división tal que el vértice Z no está en $\mathcal{L}_{XY}$. Notemos que XYZ es un ángulo agudo o recto, ya que de no ser así uno de los segmentos XZ, YZ, sería mayor que XY. Denotando por $\mathcal{L}_{XZ}$ y $\mathcal{L}_{YZ}$ a las dos piezas definidas por Z y aplicando la proposición a cada una de $\mathcal{L}_{XY}$, $\mathcal{L}_{XZ}$ y $\mathcal{L}_{YZ}$, tenemos que no hay más de $\frac{2006}{2}$ triángulos iso-impares en total, a menos que XYZ sea uno de ellos. Pero en ese caso, XZ y YZ son diagonales impares y las desigualdades correspondientes son estrictas. Esto muestra que también en este caso el número total de triángulos iso-impares en la división, incluyendo XYZ, no es mayor que 1003.
Veamos que esta cota se puede alcanzar. Para esto, basta seleccionar un vértice de P y unir cada segundo vértice comenzando a partir del seleccionado. Como 2006 es par, la línea quebrada se cierra. Esto nos da los 1003 triángulos iso-impares requeridos. Finalmente, podemos completar la triangulación de manera arbitraria.

Segunda Solución. Con las definiciones de la primer solución, sea ABC un triángulo iso-impar con AB y BC lados impares. Entonces, tenemos un número impar de lados de P entre A y B y también entre B y C. Diremos que estos lados *pertenecen* al triángulo iso-impar ABC.
Además, al menos un lado en cada uno de estos grupos no pertenece a ningún otro triángulo iso-impar, ya que cualquier triángulo iso-impar con vértices en los puntos entre A y B (y análogamente entre B y C), tiene dos lados de la misma

longitud y por lo tanto tiene un número par de lados que le pertenecen en total. Eliminando todos los lados pertenecientes a cualquier otro triángulo iso-impar, dejamos dos lados (uno en cada grupo) que no pertenecen a ningún otro triángulo iso-impar. Asignemos estos dos lados al triángulo ABC, y hagamos lo mismo con cada triángulo iso-impar. Entonces, a cada triángulo iso-impar le hemos asignado dos lados, tales que no hay dos triángulos que comparten un lado asignado. De aquí, se sigue que a lo más 1003 triángulos iso-impares pueden aparecer en la división. Este valor se puede alcanzar como se mostró en la primer solución.

Solución del problema 3. Consideremos el polinomio cúbico:

$$P(t) = tb(t^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ct(c^2 - t^2).$$

Es fácil verificar que $P(b) = P(c) = P(-b-c) = 0$, de modo que:

$$P(t) = (b-c)(t-b)(t-c)(t+b+c)$$

ya que el coeficiente de t^3 es $b - c$. Luego:

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| = |P(a)| = |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|.$$

El problema se reduce a encontrar el menor número M que satisface la desigualdad:

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq M \cdot (a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (4.8)$$

Como esta expresión es simétrica, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \leq b \leq c$. Con esta suposición, tenemos que:

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leq \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}, \quad (4.9)$$

con la igualdad si y sólo si $b-a = c-b$, es decir, $2b = a+c$. También tenemos que:

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \leq \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2},$$

o equivalentemente:

$$3(c-a)^2 \leq 2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2], \qquad (4.10)$$

y la igualdad se da nuevamente si y sólo si $2b = a+c$. De (4.9) y (4.10) tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \\
\leq\ & \frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)| \\
=\ & \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \\
\leq\ & \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right)^3(a+b+c)^2} \\
=\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Por la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2} \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4},
\end{aligned}
$$

con la igualdad si y sólo si $\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2$.
Luego:

$$
\begin{aligned}
& |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \\
\leq\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 \\
=\ & \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2.
\end{aligned}
$$

Así, la desigualdad (4.8) se cumple para $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$, y la igualdad se da si y sólo si $2b = a+c$ y:

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2.$$

Sustituyendo $b = \frac{a+c}{2}$ en la igualdad anterior, tenemos que $2(c-a)^2 = 9(a+c)^2$. Luego, las condiciones para la igualdad son $2b = a+c$ y $(c-a)^2 = 18b^2$. Haciendo $b = 1$, encontramos que $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ y $c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Por lo tanto, $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$ es el menor valor que satisface la desigualdad, y la igualdad se da para cualquier terna (a, b, c) proporcional a $(1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}, 1, 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2})$ salvo permutación.

Solución del problema 4. Si (x, y) es una solución, entonces es claro que $x \geq 0$ y $(x, -y)$ es también solución. Para $x = 0$ tenemos las dos soluciones $(0, 2)$ y $(0, -2)$. Sea (x, y) una solución con $x > 0$, y sin pérdida de generalidad supongamos que $y > 0$. La ecuación reescrita como $2^x(1+2^{x+1}) = (y-1)(y+1)$ muestra que los factores $y - 1$ y $y + 1$ son pares, y sólo uno de ellos es divisible entre 4. De aquí que $x \geq 3$ y uno de estos factores es divisible entre 2^{x-1} pero no entre 2^x. Luego, $y = 2^{x-1}m + k$ con m impar y $k = \pm 1$. Sustituyendo en la ecuación original tenemos que:

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}m + k)^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2^x mk,$$

es decir, $1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + mk$, de donde $1 - mk = 2^{x-2}(m^2 - 8)$.
Si $k = 1$, entonces $m^2 - 8 \leq 0$, y por lo tanto $m = 1$, lo cual no puede ser. Si $k = -1$, entonces $1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geq 2(m^2 - 8)$, de donde $2m^2 - m - 17 \leq 0$. Luego, $m \leq 3$. Claramente m no puede ser igual a 1, y como m es impar, entonces $m = 3$ y por lo tanto $x = 4$. Se sigue entonces que $y = 23$. Es fácil ver que estos valores de x y y satisfacen la ecuación original. Finalmente, recordando que $y = -23$ también es solución, concluimos que todas las soluciones son $(0, 2), (0, -2), (4, 23), (4, -23)$.

Solución del problema 5. La afirmación es obvia si cada entero que es punto fijo de Q es un punto fijo de P. Así que asumiremos de aquí en adelante que este no es el caso. Tomemos cualquier entero x_0 tal que $Q(x_0) = x_0$, $P(x_0) \neq x_0$ y definamos inductivamente $x_{i+1} = P(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces, $x_k = x_0$.
Es claro que:

$$P(u) - P(v) \quad \text{es divisible entre} \quad u - v \quad \text{para enteros distintos} \quad u, v, \tag{4.11}$$

ya que si $P(x) = \sum a_i x^i$ entonces $a_i(u^i - v^i)$ es divisible entre $u - v$. Luego, cada término en la secuencia de diferencias distintas de cero:

$$x_0 - x_1, x_1 - x_2, \ldots, x_{k-1} - x_k, x_k - x_{k+1},$$

es un divisor del siguiente término, y como $x_k - x_{k+1} = x_0 - x_1$, todas estas diferencias son iguales en valor absoluto. Para $x_m = \text{mín}(x_1, \ldots, x_k)$, esto significa que $x_{m-1} - x_m = -(x_m - x_{m+1})$. Luego, $x_{m-1} = x_{m+1}$ $(\neq x_m)$. Se sigue que las diferencias consecutivas en la secuencia anterior tienen signos opuestos. Por lo tanto, $x_0, x_1, x_2, \ldots$, es una secuencia alternante de dos valores

distintos. En otras palabras, cada entero que es punto fijo de Q es un punto fijo del polinomio $P(P(x))$. Nuestro objetivo es probar que hay a lo más n de dichos puntos.
Sea a uno de ellos tal que $b = P(a) \neq a$ (habíamos asumido antes que dicho a existe). Entonces, $a = P(b)$. Tomemos cualquier otro entero α punto fijo de $P(P(x))$ y sea $P(\alpha) = \beta$, de modo que $P(\beta) = \alpha$. Los números α y β no son necesariamente distintos (α puede ser punto fijo de P), pero α y β son distintos de a y b. Aplicando la propiedad (4.11) a las cuatro parejas de enteros $(\alpha, a), (\beta, b), (\alpha, b), (\beta, a)$, tenemos que los números $\alpha - a$ y $\beta - b$ se dividen entre sí, y también los números $\alpha - b$ y $\beta - a$ se dividen entre sí. Luego:

$$\alpha - b = \pm(\beta - a), \quad \alpha - a = \pm(\beta - b). \tag{4.12}$$

Supongamos que tenemos el signo "más" en ambas igualdades: $\alpha - b = \beta - a$ y $\alpha - a = \beta - b$. Restándolas, tenemos que $a - b = b - a$, que es una contradicción ya que $a \neq b$. Entonces, al menos una de las igualdades en (4.12) se cumple con el signo "menos". Esto significa que $\alpha + \beta = a + b$, o bien, $a + b - \alpha - P(\alpha) = 0$. Si hacemos $C = a + b$, hemos demostrado que cada entero que es punto fijo de Q distinto de a y b, es una raíz del polinomio $F(x) = C - x - P(x)$, lo cual es cierto también para a y b. Y como P tiene grado $n > 1$, el polinomio F tiene el mismo grado, y por lo tanto no puede tener más de n raíces. De aquí se sigue el resultado.

Solución del problema 6. Demostraremos primero el siguiente resultado.
Proposición. Cada $2n$-ágono convexo de área S, tiene un lado y un vértice que al unirlos generan un triángulo de área no menor que $\frac{S}{n}$.
Prueba. Por *diagonales principales* del $2n$-ágono nos referiremos a aquellas que particionan el $2n$-ágono en dos polígonos con la misma cantidad de lados. Para cualquier lado b del $2n$-ágono, denotaremos por Δ_b al triángulo ABP donde A y B son los vértices de b y P es el punto de intersección de las diagonales principales AA' y BB'.
Afirmamos que la unión de los triángulos Δ_b, tomada sobre todos los lados, cubre todo el polígono.
Para mostrar esto, tomemos un lado AB y consideremos la diagonal principal AA' como un segmento dirigido. Sea X un punto del polígono que no está en ninguna diagonal principal. Supongamos que X está del lado izquierdo de AA'. Consideremos la secuencia de diagonales principales $AA', BB', CC', \ldots$, donde $A, B, C, \ldots$ son vértices consecutivos situados a la derecha de AA'.
La n-ésima diagonal en esta secuencia es la diagonal $A'A$ (es decir, AA' al revés), teniendo a X a su derecha. Luego, hay dos vértices sucesivos K, L en la secuencia $A, B, C, \ldots$ antes de A' tales que X está del lado izquierdo de KK',

pero del lado derecho de LL'. Esto significa que X está en el triángulo $\Delta_{l'}$, donde $l' = K'L'$. Un razonamiento análogo se puede aplicar a los puntos X del lado derecho de AA' (los puntos que caen en diagonales principales pueden ser ignorados). Así, todos los triángulos Δ_b cubren el polígono.

La suma de sus áreas no es menor que S. Luego, podemos encontrar dos lados opuestos digamos $b = AB$ y $b' = A'B'$ (con AA' y BB' diagonales principales) tales que $[\Delta_b] + [\Delta_{b'}] \geq \frac{S}{n}$, donde los corchetes indican el área de la figura que encierran. Supongamos que AA' y BB' se intersectan en P, y supongamos sin pérdida de generalidad que $PB \geq PB'$. Entonces:

$$[ABA'] = [ABP] + [PBA'] \geq [ABP] + [PA'B'] = [\Delta_b] + [\Delta_{b'}] \geq \frac{S}{n},$$

lo que concluye la prueba de la proposición.

Ahora, sea $\mathcal{P}$ cualquier polígono convexo de área S con m lados $a_1, \ldots, a_m$. Sea S_i el área del triángulo más grande en $\mathcal{P}$ con lado a_i. Supongamos, por contradicción, que:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2.$$

Entonces, existen números racionales $q_1, \ldots, q_m$ tales que $\sum q_i = 2$ y $q_i > \frac{S_i}{S}$ para cada i. Sea n el común denominador de las m fracciones $q_1, \ldots, q_m$. Escribamos $q_i = \frac{k_i}{n}$. Entonces $\sum k_i = 2n$. Particionemos cada lado a_i de $\mathcal{P}$ en k_i segmentos iguales, generando así un $2n$-ágono convexo de área S (con algunos ángulos de tamaño $180°$). De acuerdo con la proposición anterior, este polígono tiene un lado b y un vértice H que generan un triángulo T de área $[T] \geq \frac{S}{n}$. Si b es un pedazo de un lado a_i de $\mathcal{P}$, entonces el triángulo W con base a_i y vértice más alto H tiene área:

$$[W] = k_i \cdot [T] \geq k_i \cdot \frac{S}{n} = q_i \cdot S > S_i,$$

en contradicción con la definición de S_i. Esto termina la prueba.

Apéndice

Definición 1 (Divisor) *Un entero $a \neq 0$ es divisor del entero b, si existe un entero c tal que $b = a \cdot c$. Se denota esto por $a|b$. También se dice que a divide a b, o que b es divisible entre a, o que b es múltiplo de a.*

Definición 2 (Número primo y número compuesto) *Un entero $p > 1$ es un número primo si los únicos divisores positivos de p son 1 y p. Un entero $n > 1$ que no es primo, se dice que es compuesto. Por ejemplo, 2 y 3 son números primos y 6 es compuesto.*

Definición 3 (Máximo Común Divisor) *Un entero $d \geq 1$ es el máximo común divisor de los enteros a y b si:*
(1) $d|a$ y $d|b$.
(2) Si $c|a$ y $c|b$, entonces $c|d$.
Se denota por (a, b). Si $(a, b) = 1$, se dice que a y b son primos relativos o primos entre sí.

Teorema 4 *El máximo común divisor de a y b es el menor entero positivo que se puede escribir en la forma $am + bn$ con m, n enteros.*

Definición 5 (Mínimo Común Múltiplo) *Un entero $m \geq 1$ es el mínimo común múltiplo de los enteros a y b si:*
(1) $a|m$ y $b|m$.
(2) Si $a|c$ y $b|c$, entonces $m|c$.
Se denota por $[a, b]$.

Teorema 6 (Teorema Fundamental de la Aritmética) *Todo entero es producto de primos. Su descomposición como producto de primos es única salvo el orden de los factores primos.*

Teorema 7 *Se cumple que:*
(1) $(a, b)\,[a, b] = ab$.
(2) *Si $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con α_i, β_i enteros no negativos y p_i números primos distintos, entonces $(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$ y $[a, b] = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$ donde $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ y $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.*

Teorema 8 (Algoritmo de la división) *Para a y b enteros, con $b \neq 0$, existen enteros únicos q y r tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < |b|$.*
El número r se llama el "residuo" que deja a al dividirlo entre b.

Teorema 9 (Algoritmo de Euclides) *Es un proceso para encontrar el máximo común divisor de dos enteros positivos a y b. Utiliza el algoritmo de la división como sigue:*

$$\begin{array}{rcll} a & = & n_0 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b & = & n_1 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 & = & n_2 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ & \vdots & & \\ r_{k-2} & = & n_{k-1} r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} & = & n_k r_k & \end{array}$$

Entonces, el último residuo distinto de cero es el máximo común divisor de a y b, es decir, $r_k = (a, b)$.
Además, $r_k = (a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{k-2}, r_{k-1}) = (r_{k-1}, r_k)$.

Teorema 10 (Congruencias) *Si a y b son enteros y n es un entero positivo, decimos que a es congruente con b módulo n si n divide a $a - b$, y se denota por $a \equiv b \ (\text{mod}\, n)$.*
Para a, b, c enteros y n, m, r enteros positivos, tenemos las siguientes propiedades:
(1) $a \equiv a \ (\text{mod}\, n)$.
(2) Si $a \equiv b \ (\text{mod}\, n)$, entonces $b \equiv a \ (\text{mod}\, n)$.
(3) Si $a \equiv b \ (\text{mod}\, n)$ y $b \equiv c \ (\text{mod}\, n)$, entonces $a \equiv c \ (\text{mod}\, n)$.
(4) Si $a \equiv b \ (\text{mod}\, n)$ y $c \equiv d \ (\text{mod}\, n)$, entonces $a + c \equiv b + d \ (\text{mod}\, n)$ y $ac \equiv bd \ (\text{mod}\, n)$.
(5) Si $a \equiv b \ (\text{mod}\, n)$, entonces $a^m \equiv b^m \ (\text{mod}\, n)$ para todo entero positivo m.
(6) Si $a = nc + r$ con $0 \leq r < n$, entonces $a \equiv r \ (\text{mod}\, n)$.

Definición 11 (Función ϕ de Euler) *Sea n un entero positivo. Se define $\phi(n)$ como el número de enteros positivos menores que n y primos relativos con n.*

Teorema 12 (Teorema de Euler) *Si n es un entero positivo y a es un entero primo relativo con n, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (\text{mod}\, n)$.*

Teorema 13 (Pequeño Teorema de Fermat) *Si a es un entero positivo y p es un número primo que no divide a a, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod}\, p)$.*

Definición 14 (Orden) *Si a y n son primos entre sí, el orden de a módulo n, denotado por O, es el menor entero positivo tal que $a^O \equiv 1$ (mod n).*

Teorema 15 (Propiedad del orden) *Si a y n son primos entre sí y $a^m \equiv 1$ (mod n), entonces el orden de a módulo n es un divisor de m.*

Teorema 16 (Fórmulas útiles) *Si n es un entero positivo, tenemos que:*
(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(4) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ *para cualquier número real* $x \neq 1$.

Teorema 17 (Teorema del Binomio) *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Teorema 18 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Para cualesquiera números reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se tiene que:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Teorema 19 (Principio fundamental del conteo) *Si una tarea puede realizarse de m formas diferentes y, para cada una de estas maneras, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas pueden realizarse (en ese orden) de mn formas distintas.*

Teorema 20 (Principio de las casillas) *Si $nk + 1$ objetos (o más) se distribuyen en k casillas, entonces alguna casilla tiene al menos $n + 1$ objetos.*

Definición 21 (Triángulos) *(1) Triángulo acutángulo. Es aquel que tiene sus tres ángulos agudos, es decir, menores de $90°$.*
(2) Triángulo rectángulo. Es aquel que tiene un ángulo recto o de $90°$.
(3) Triángulo obtusángulo. Es aquel que tiene un ángulo obtuso, es decir, un ángulo mayor de $90°$.
(4) Triángulo equilátero. Es aquel que tiene sus tres lados iguales.
(5) Triángulo isósceles. Es aquel que tiene dos lados iguales.
(6) Triángulo escaleno. Es aquel que no tiene dos lados iguales.

Teorema 22 *(1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es* $180°$*.*
(2) (Desigualdad del triángulo) En un triángulo de lados a*,* b *y* c*, las siguientes tres desigualdades se cumplen:* $a+b \geq c, a+c \geq b, b+c \geq a$*, y las igualdades se cumplen si y sólo si los vértices del triángulo son colineales.*

Definición 23 (Puntos y rectas notables de un triángulo) *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.
Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices.
Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.
Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas.
Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.
Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.

Definición 24 (Triángulos semejantes) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son semejantes si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:*
(1) $\angle A = \angle A'$*,* $\angle B = \angle B'$*,* $\angle C = \angle C'$*.*
(2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$*.*

Teorema 25 (Criterios de semejanza) *Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
(1) Tienen sus lados correspondientes proporcionales.
(2) Tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(3) Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

Definición 26 (Triángulos congruentes) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales.*

Teorema 27 (Criterios de congruencia) *Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
(1) (LAL) Tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(2) (ALA) Tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual.
(3) (LLL) Tienen los tres lados correspondientes iguales.

Teorema 28 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre AB y CA respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 29 (Teorema de Pitágoras) *Si ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, entonces $AB^2 = BC^2 + CA^2$. El recíproco del Teorema de Pitágoras también es cierto, es decir, si en un triángulo ABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$, entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto en C.*

Teorema 30 (Ley de los cosenos) *En un triángulo ABC, de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B) y c (opuesto al ángulo C), se tiene que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema 31 (Ley de los senos) *En un triángulo ABC, de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B) y c (opuesto al ángulo C), se tiene que:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. (La circunferencia circunscrita o circuncírculo es la que pasa por los tres vértices del triángulo).

Teorema 32 (Área de un triángulo) *El área de un triángulo ABC, denotada por (ABC), de lados a, b, c, y alturas h_a, h_b, h_c (donde h_i es la altura trazada sobre el lado i) es:*

$$(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

También:

$$(ABC) = sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R} = \frac{bc\operatorname{sen} A}{2},$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$, R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, y r es el radio de la circunferencia inscrita del triángulo ABC. (La circunferencia inscrita o incírculo es la que tiene como centro al punto de intersección de las bisectrices internas (incentro) y es tangente a los tres lados).

Teorema 33 (Teorema de la Bisectriz) *Si AP es la bisectriz interna del ángulo en A del triángulo ABC (con P sobre BC), se tiene que:*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Definición 34 (Colineales) *Puntos colineales son los que se encuentran sobre una misma recta.*

Teorema 35 *(1) En un triángulo ABC el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*
(2) (La circunferencia de los nueve puntos) Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Teorema 36 (Teorema de Ceva) *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 37 (Teorema de Menelao) *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB respectivamente, del triángulo ABC, entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$.*

Definición 38 (Ángulos en la circunferencia) *(1) Ángulo inscrito. En una circunferencia, es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
(2) Ángulo semi-inscrito. En una circunferencia, es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.
(3) Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 39 *(1) La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*
(2) La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.
(3) El ángulo entre dos secantes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior, es igual a la mitad de la diferencia de los dos arcos subtendidos.
(4) El ángulo entre dos cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia, es igual a la mitad de la suma de los dos arcos subtendidos.

Teorema 40 (Potencia de un punto) *(1) Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
(2) Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C, intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PC^2 = PA \cdot PB$.

Definición 41 (Cuadriláteros) *(1) Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Un cuadrilátero $ABCD$ es convexo si al trazar sus diagonales AC y BD, éstas quedan dentro del cuadrilátero. Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si sus vértices están sobre una misma circunferencia.*
(2) Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. A los lados paralelos del trapecio se les llaman bases. Si los lados no paralelos del trapecio son iguales, se dice que el trapecio es isósceles.
(3) Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos.
(4) Un rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
(5) Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.
(6) Un cuadrado es un rectángulo que tiene sus cuatro lados iguales.

Teorema 42 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(1) $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.
(2) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.
(3) $\angle ADB = \angle ACB$.
(4) $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (Teorema de Ptolomeo).

Teorema 43 (Teorema de Varignon) *Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.*

Teorema 44 (Fórmula de Brahmagupta) *El área A de un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c y d está dada por:*

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Teorema 45 *El cuadrilátero convexo $ABCD$ es circunscrito, es decir, sus lados son tangentes a una misma circunferencia, si y sólo si $AB + CD = BC + DA$.*

Bibliografía

[1] Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] E. Gentile, *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[6] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[7] A. Illanes Mejía, *Principios de Olimpiada* en la colección *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí, *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí, *Teoría de Números*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[13] N. Vilenkin, *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Radmila Bulajich Manfrino
(Presidenta)

Anne Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Gabriela Campero Arena

José Antonio Climent Hernández

José Alfredo Cobián Campos

Luis Cruz Romo

Marco Antonio Figueroa Ibarra

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Jesús Jerónimo Castro

Arturo Morales López

Antonio Olivas Martínez

Carlos Jacob Rubio Barrios

Elena Ruiz Velázquez

Carmen Sosa Garza

Rogelio Valdez Delgado