TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2010, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Enero de 2010.

Contenido

Presentación v

Artículos de matemáticas: Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras 1

Problemas de práctica 13

Soluciones a los problemas de práctica 21

Problemas propuestos 35
- **Problemas propuestos. Año 2010 No. 1** 35
- **Soluciones a los problemas propuestos. Año 2009 No. 3** 36

Concurso Nacional 2009, 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas 43

Olimpiadas Internacionales 47
- **XXIV Olimpiada Iberoamericana** 47
- **XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe** 48

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales 51
- **50ª Olimpiada Internacional** 51

Información Olímpica 59

Apéndice 61

Bibliografía 65

Directorio 67

Presentación

Tzaloa es una publicación periódica trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y su objetivo es fomentar el estudio de las matemáticas como una disciplina dinámica y creativa. El diseño de las secciones y la cuidadosa selección de sus contenidos buscan apoyar de manera efectiva, con información y con materiales de calidad, a estudiantes y profesores de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los diferentes concursos de la Olimpiada de Matemáticas.

Esta revista, con orgullo, toma su nombre del náhuatl porque está hecha por y para los mexicanos. Tzaloa significa aprender y las páginas que la conforman buscan ayudar a satisfacer la necesidad de contar con espacios adecuados para profesores, estudiantes y, en general, para todas aquellas personas interesadas en desarrollar e incrementar sus capacidades para el razonamiento lógico matemático y la resolución de problemas.

Tzaloa, Año 2010, Número 1

Con este nuevo número celebramos el primer cumpleaños de tu revista e iniciamos nuestras actividades del 2010. Como siempre, hemos incluido secciones con interesantes problemas así como los exámenes de los concursos más importantes que se llevaron a cabo en el último trimestre del año pasado. La participación de nuestros lectores se ve reflejada en varias contribuciones que enriquecen notablemente la publicación.

Además, el artículo de esta ocasión trata sobre el *Teorema de Pitágoras*, que aunque es bien conocido no deja de seguir teniendo un atractivo especial. El tratamiento que Ana Retchman hace sobre este tema, incluye aspectos históricos y algunas demostraciones clásicas que estamos seguros serán de interés para muchos. La selección de las demostraciones del teorema que nos presenta el artículo, es muestra de que la solución de cualquier problema puede tener tantos caminos como imaginación y cretividad hay en la mente humana.

Por último, mencionamos que se han actualizado todas las secciones con información olímpica así como el directorio del Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Esperamos que este año esté lleno de logros para todos nuestros lectores y, nosotros, refrendamos el firme compromiso de seguir poniendo todo nuestro entusiasmo, dedicación y esfuerzo para que Tzaloa sea una revista útil para todos ustedes.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 23 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

24ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1991. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar

2010-2011 y, para el 1° de julio de 2011, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 21 al 26 de noviembre de 2010 en Ensenada, Baja California. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2011: la XXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 52^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Amsterdam, Países Bajos, y la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Costa Rica.

Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras

Por Ana Rechtman Bulajich

Nivel básico

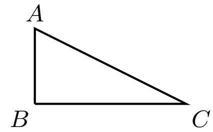
El teorema de Pitágoras es sin duda uno de los más utilizados en los problemas de geometría de las olimpiadas. En este texto vamos a presentar varias demostraciones de dicho teorema, y una de su recíproco. Empecemos con un poco de historia.

Pitágoras nació en la isla de Samos, en Grecia, en el año 582 antes de nuestra era. Siendo muy joven viajó a Mesopotamia y Egipto para estudiar con los filósofos de la época. Tras regresar a Samos, finalizó sus estudios con Hermodamas de Samos. Ahí, fundó su primera escuela. Posteriormente, abandonó Samos y se estableció en la Magna Grecia: en Crotona, en el sur de Italia, alrededor del año 525 de nuestra era, donde fundó su segunda escuela. Las doctrinas de este centro cultural eran regidas por reglas muy estrictas de conducta. Su escuela estaba abierta a hombres y mujeres indistintamente, y la conducta discriminatoria estaba prohibida (excepto impartir conocimiento a los no iniciados). Sus estudiantes pertenecían a todas las razas, religiones, y estratos económicos y sociales. Tras ser expulsados por los pobladores de Crotona, los pitagóricos se exiliaron en Tarento, donde Pitágoras fundó su tercera escuela.

Pitágoras era ciertamente instruido, aprendió a tocar la lira, a escribir poesía y a recitar a Homero. El esfuerzo para deducir la generalidad de un teorema matemático a partir de su cumplimiento en casos particulares ejemplifica el método pitagórico para la purificación y perfección del alma. El método pitagórico enseñaba a conocer el mundo como armonía; en virtud de ésta, el universo era un cosmos: un conjunto ordenado en el que los cuerpos celestes guardaban una disposición armónica que hacía que sus distancias estuvieran entre sí en proporciones similares a las correspondientes a los intervalos de la octava musical. En un sentido sensible, la armonía era musical; pero su naturaleza inteligible era de tipo numérico, y si todo era armonía, el número resultaba

ser la clave de todas las cosas. La voluntad unitaria de la doctrina pitagórica quedaba plasmada en la relación que establecía entre el orden cósmico y el moral. Para los pitagóricos, el hombre era también un verdadero microcosmos en el que el alma aparecía como la armonía del cuerpo.
Los pitagóricos atribuían todos sus descubrimientos a Pitágoras por lo que es difícil determinar con exactitud cuáles resultados son obra del maestro y cuáles de los discípulos. Entre estos descubrimientos está el teorema de Pitágoras, atribuido a los pitagóricos.

Teorema 1 (Pitágoras) *Sea ABC un triángulo rectángulo, tal que el ángulo ABC mide* $90°$*, entonces* $AB^2 + BC^2 = AC^2$.



El recíproco del teorema de Pitágoras también es cierto, es decir,

Teorema 2 *Sea ABC un triángulo. Si $AB^2 + BC^2 = AC^2$, entonces el ángulo ABC mide* $90°$.

Estos dos teoremas se pueden escribir en un solo enunciado,

"El ángulo ABC de un triángulo ABC mide $90°$ si y solamente si $AB^2 + AC^2 = BC^2$."

Anteriormente a la escuela pitagórica, se conocían, en Mesopotamia y en Egipto, ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los triángulos rectángulos. Este hecho está indicado en algunas tablillas y papiros, pero no ha perdurado ningún documento que exponga la relación para TODO triángulo rectángulo. La pirámide de Kefrén, que data del siglo XXVI a.c., fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, cuyos lados están en proporción 3-4-5. Actualmente, a las ternas de números naturales que pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama ternas pitagóricas: una terna de números (a, b, c) es pitagórica si $a^2 + b^2 = c^2$.

Demostraciones del teorema de Pitágoras.

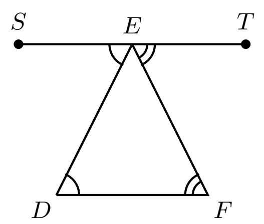
El matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro *The Pythagorean Proposition*. Aquí vamos a explicar algunas de ellas. Empezaremos por las demostraciones que se les atribuyen a algunos matemáticos griegos, y dejaremos al final las demostraciones *gráficas* que son las más conocidas actualmente.

Demostración que algunos autores adjudican a Pitágoras

Esta es una demostración que utiliza la semejanza de triángulos[1]. Primero, necesitamos demostrar la siguiente proposición básica, que nos será útil en otras demostraciones.

Proposición 3 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a* $180°$.

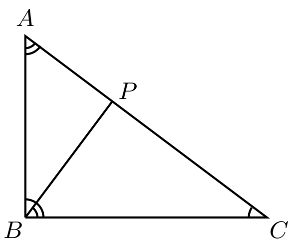
Sea EDF un triángulo cualquiera. Tracemos la recta ST paralela a DF que pasa por E.



Entonces, la relación de los ángulos entre paralelas[2] implica que

$$\angle EDF + \angle DFE + \angle FED = \angle SED + \angle TEF + \angle FED,$$

que es claramente igual a $180°$. Esto demuestra la proposición.
Regresemos ahora a la demostración del teorema de Pitágoras. Tomemos un triángulo rectángulo ABC, y sea P la base de la altura del triángulo ABC sobre la hipotenusa.



Observemos que el ángulo $\angle ABP$ es igual a $\angle BCP$, ya que como la suma de los ángulos internos de un triángulo es igua a $180°$,

$$\angle ABP = 180° - (\angle PAB + 90°) = \angle BCP.$$

Análogamente,

$$\angle PBC = 180° - (\angle BCP + 90°) = \angle PAB.$$

Por el criterio AA de semejanza[3], tenemos que los triángulos ABC, BPC y APB son

[1] Ver en el apéndice la definición SEMEJANZA.
[2] Ver en el apéndice el teorema ÁNGULOS ENTRE PARALELAS.
[3] Ver en el apéndice el criterio AA.

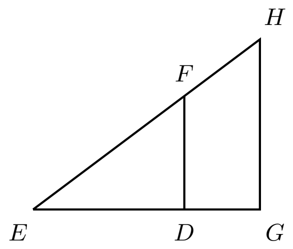
semejantes. Entonces,

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB^2 = AC \times AP$$
$$\frac{BC}{PC} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC^2 = AC \times PC.$$

Luego, $AB^2 + BC^2 = AC(AP + PC) = AC^2$.

Otra demostración utilizando semejanzas de triángulos

Empecemos considerando dos triángulos rectángulos semejantes EDF y EGH.



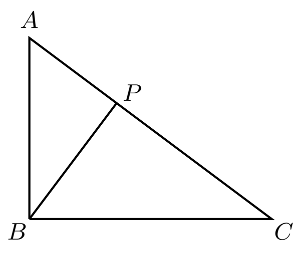
Queremos demostrar que la razón entre las áreas de los triángulos es igual al cuadrado de su razón de semejanza. La razón de semejanza es igual a

$$r = \frac{ED}{EG} = \frac{DF}{GH}.$$

Como los triángulos son rectángulos tenemos que

$$\frac{\text{área}(EDF)}{\text{área}(EGH)} = \frac{\frac{ED \times DF}{2}}{\frac{EG \times GH}{2}} = r^2.$$

Es decir, la relación entre las áreas de dos triángulos rectángulos semejantes es igual al cuadrado de su relación de semejanza.
Regresemos a nuestro triángulo ABC, con P la base de la altura sobre la hipotenusa. Vamos a volver a demostrar el teorema de Pitágoras.



Sabemos que los triángulos BPC y APB son semejantes, luego

$$\frac{\text{área}(BPC)}{\text{área}(APB)} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2,$$

entonces

$$\frac{\text{área}(BPC)}{BC^2} = \frac{\text{área}(APB)}{AB^2}.$$

Escrito de otra forma,

$$\begin{aligned}
AB^2[\text{área}(BPC)] &= BC^2[\text{área}(APB)] \\
AB^2[\text{área}(BPC) + \text{área}(APB)] &= [\text{área}(APB)](AB^2 + BC^2) \\
\frac{\text{área}(BPC) + \text{área}(APB)}{AB^2 + BC^2} &= \frac{\text{área}(APB)}{AB^2} = \frac{\text{área}(BPC)}{BC^2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como los triángulos BPC y ABC son semejantes tenemos que

$$\frac{\text{área}(ABC)}{AC^2} = \frac{\text{área}(BPC)}{BC^2} = \frac{\text{área}(BPC) + \text{área}(APB)}{AB^2 + BC^2}.$$

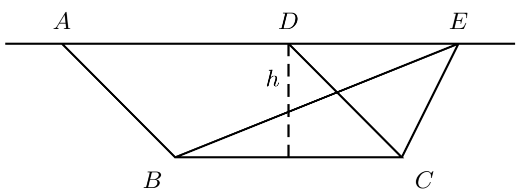
Como área$(ABC) =$ área$(BPC) +$ área(APB), concluimos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

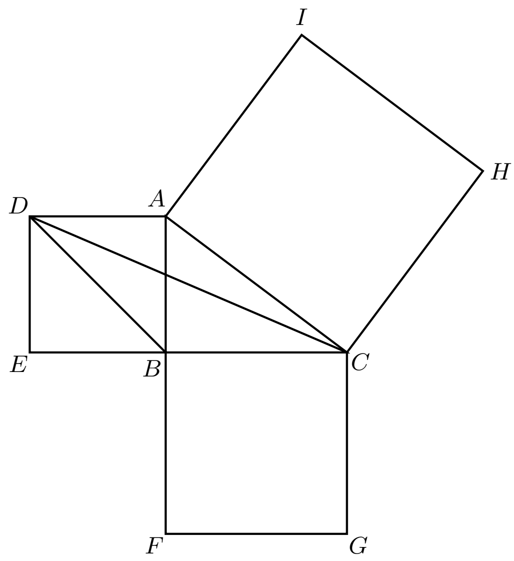
La demostración de Euclides

El filósofo Euclides, quien vivió alrededor del año 300 antes de nuestra era, es considerado el padre de la geometría del plano, que en su honor es conocida como geometría euclidiana. La demostración que vamos a explicar es la que aparece en su libro *Los Elementos*. Para la demostración necesitamos probar el siguiente resultado, que utilizaremos también en otras demostraciones.

Proposición 4 *Un paralelogramo $ABCD$ y un triángulo EBC tienen la misma base BC y el vértice E está en la recta que contiene a AD. Entonces el área del paralelogramo es el doble que el área del triángulo.*



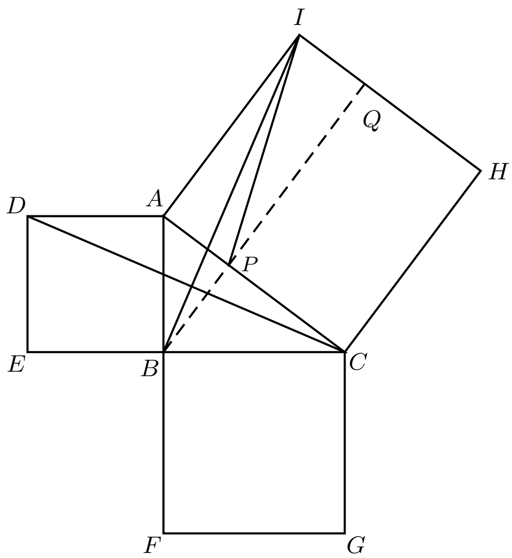
La demostración de esta proposición es muy sencilla. Sea h la distancia que hay entre las rectas paralelas que contienen los segmentos AD y BC. Entonces, el área del paralelogramo es igual a $BC \times h$ y el área del triángulo EBC es igual a $\frac{BC \times h}{2}$, sin importar donde esté el punto E, siempre y cuando esté en la recta que contiene AD.
Demostremos ahora el teorema de Pitágoras. Sea ABC un triángulo rectángulo, cuyo ángulo recto es ABC. Dibujemos en cada lado del triángulo un cuadrado.



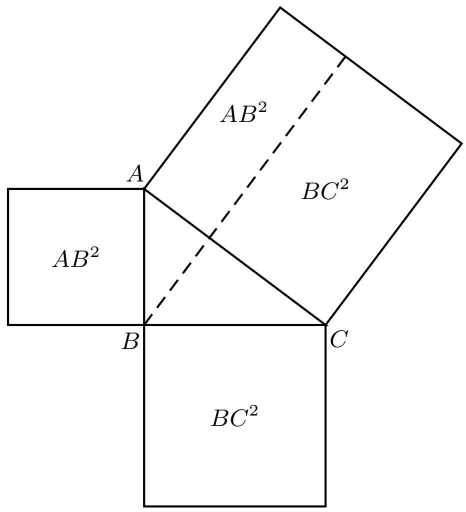
Como BC es paralela a AD, tenemos que los triángulos ADB y ADC tienen la misma área (esto es una consecuencia de la proposición anterior). Ahora, si rotamos el triángulo ADC en el vértice A, de forma que el lado AC coincida con AI y AD con AB, concluimos que los triángulo ADC y ABI son congruentes[4]. En particular, tienen la misma área. Por lo tanto, ADB y ABI tienen las mis área.

Tracemos la recta paralela a AI por B, y sea P su punto de intersección con AC. La proposición 4 implica que los triángulos ABI y API tienen la misma área, ya que BP es paralela a AI. Entonces, los triánglos ADB y API tienen la misma área. Observemos que el área del cuadrado $ADEB$ es igual a dos veces el área del triángulo ADB e igual a AB^2. Además, el área de $APQI$ es dos veces el área del triángulo API, que también es igual al área de $ADEB$, y que también es igual a AB^2.

[4]Ver en el apéndice la definición CONGRUENTES.



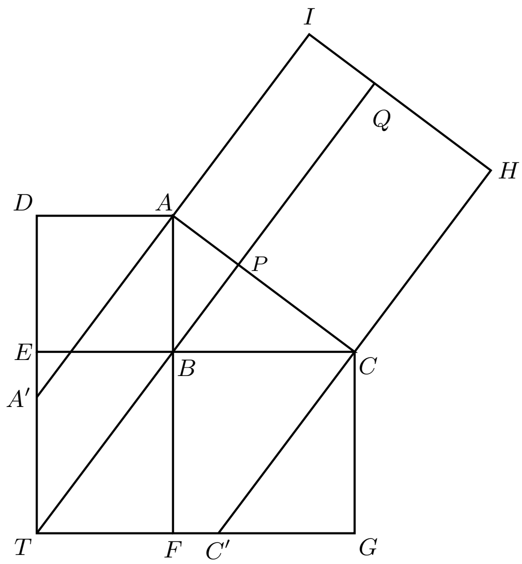
Haciendo lo mismo para el rectángulo $PCHQ$, concluimos que su área es igual a BC^2. Por lo tanto, AC^2 que es igual al área del cuadrado $ACHI$, es igual a la suma de las áreas de $APQI$ y $PCHQ$, que es igual a $AB^2 + BC^2$. Es decir, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.



La demostración de Pappus

Pappus nació en Alejandría, de ahí que se le conoce como Pappus de Alejandría, aproximadamente en el año 290 de nuestra era y murió alrededor del 350. Es considerado como el último de los grandes geómetras griegos. La demostración de Pappus está también basada en la proposición 4, y la describiremos a continuación.

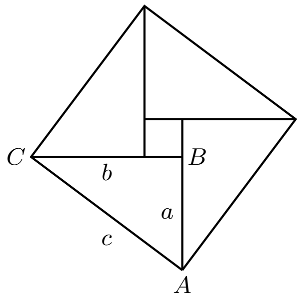
Sea ABC un triángulo rectángulo y dibujemos en cada uno de sus lados un cuadrado. Sea P la base de la altura sobre la hipotenusa, y continuemos esta recta en las dos direcciones: por un lado hasta el punto Q, que es la intersección con HI; y por otro lado hasta T que es la intersección con la prolongación de FG. Como EC es paralela a FG y AF es paralela a DE, el punto T está en la intersección de las rectas FG y DE.



La proposición 4 implica que los paralelogramos $ADEB$ y $AA'TB$ tienen la misma área. Además, los lados el triángulo BET cumplen que $AB = BE$, $BC = ET$ y $AC = BT$. Luego, $BT = AA' = AC = AI$ y los paralelogramos $AA'TB$ y $APQI$ tienen la misma área. Análogamente, concluimos que $BTC'C$ y $PCHQ$ tienen la misma área. Calculando estas áreas en términos de los lados del triángulo ABC concluimos que $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Algunas demostraciones gráficas

Como siempre tomemos un triángulo rectángulo ABC. Llamemos a, b y c a las longitudes de los lados AB, BC y AC, respectivamente. En la figura, los cuatro triángulos son congruentes entre si y congruentes a ABC.



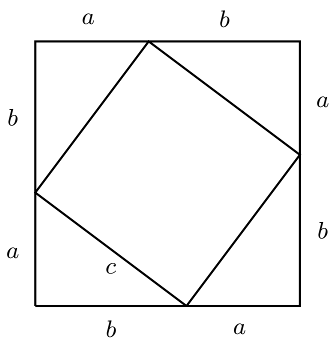
Entonces, tenemos que el área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los cuatro triángulos más el área del cuadrado pequeño, es decir,

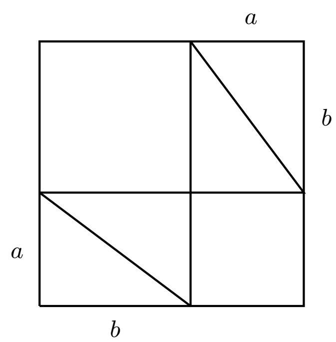
$$\begin{aligned} c^2 &= 4\left(\frac{a \times b}{2}\right) + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema de Pitágoras.

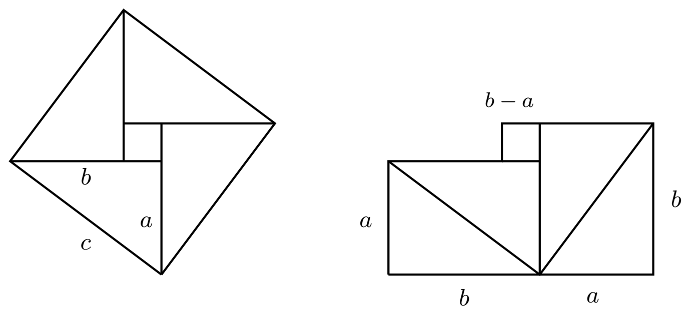
Dejamos como ejercicio para el lector desarrollar los razonamientos que pueden acompañar las siguientes figuras para demostrar el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1. En cada figura, los cuatro triángulos son congruentes con catetos a, b e hipotenusa c.

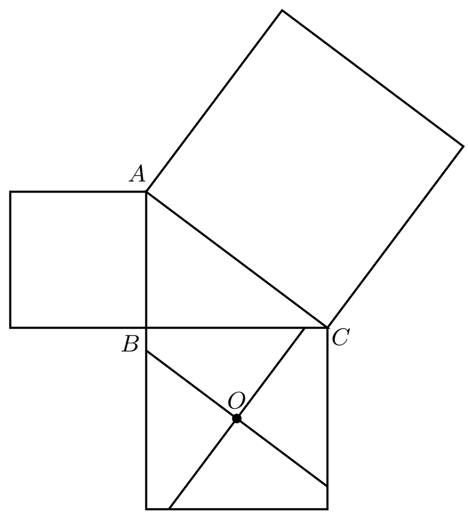




Ejercicio 2. En cada figura, los cuatro triángulos son congruentes con catetos a, b e hipotenusa c. Demuestra que las dos figuras tiene la misma área (la de la primera es igual a c^2 y la de la segunda a $a^2 + b^2$).



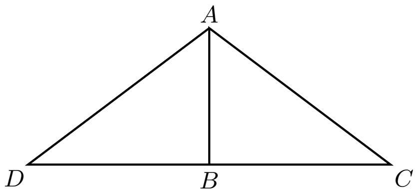
Ejercicio 3. En la figura, el punto O es el centro del cuadrado de lado BC (¿podría ser otro punto?) y se trazaron por este punto una recta paralela a la hipotenusa y otra perpendicular a la hipotenusa. Si recortas este cuadrado por dichas rectas obtienes cuatro piezas. Acomoda estas cuatro piezas y el cuadrado de lado AB dentro del cuadrado de lado AC, para encontrar otra demostración del teorema de Pitágoras.



Demostración del recíproco del teorema de Pitágoras

Vamos a dar una demostración del recíproco del teorema de Pitágoras, que es la demostración que aparece en el libro *Los Elementos* de Euclides.

Sea ABC un triángulo tal que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, vamos a demostrar que el ángulo ABC es recto. Tracemos el segmento DB que mide lo mismo que BC y es perpendicular a AB.



Como ABD es un triángulo rectángulo tenemos que $AD^2 = AB^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$, es decir $AD = AC$. Luego, los triángulos ABC y ABD son congruentes pues sus lados miden lo mismo[5]. Esto implica que $\angle ABC = \angle ABD$ y el triángulo ABC es rectángulo.

Ejercicio 4. Encuentra otra demostración del recíproco del teorema de Pitágoras.

Ejercicios

Los problemas de práctica $8, 10$ y 18 de este número utilizan el teorema de Pitágoras. Te invitamos a resolverlos.

Bibliografía

1.- E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*. NCTM. Michigan, 1940.

2.- Animación (en francés): http://www.mathkang.org/swf/pythagore2.html.

[5] Ver en el apéndice el CRITERIO CONGRUENCIA LLL

Problemas de práctica

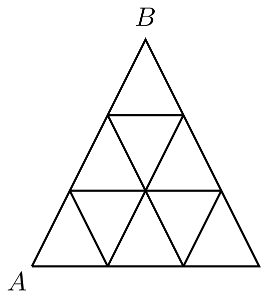
Como su nombre lo indica, en esta sección presentamos problemas cuyo objetivo es brindar material que te permita trabajar en tu preparación para participar en los concursos. La dificultad de los problemas seleccionados aumentará conforme transcurra el año, de manera que la revista te acompañará a medida que tus habilidades y capacidades vayan aumentando.

Decidimos iniciar el año con 30 problemas presentados con el formato de opción múltiple. La elección del formato obedece a que en las primeras etapas de muchos concursos estatales los problemas se presentan así. De cualquier manera, es importante que no sólo te limites a determinar la respuesta por eliminación de las opciones incorrectas, sino que, además, intentes encontrar la justificación o procedimientos que permiten llegar a la solución. Esto es muy importante porque en etapas más avanzadas los exámenes no se presentan con este formato y entonces deberás llegar a la respuesta sin la ayuda que brindan las opciones.

Como se mencionó arriba, buscamos que el nivel de dificultad de esta primera selección del año no fuera muy elevado, sin embargo, esto no quiere decir que todos los problemas vayan a ser fáciles de resolver. Te invitamos a poner en práctica todas tus habilidades y a hacer uso de todos tus conocimientos para encontrar la solución de cada uno. En la siguiente sección de la revista encontrarás las respuestas de todos ellos, pero te recomendamos que no la consultes sino hasta después que hayas llegado por ti mismo a la solución. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de tu revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que concoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. ¿Cuántos caminos hay de A a B siguiendo las líneas de la figura, si no se permite caminar horizontalmente hacia la izquierda, ni bajar?



(a) 16 (b) 2 (c) 30 (d) 22 (e) 20

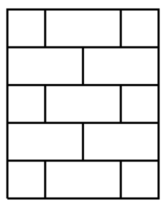
Problema 2. ¿Cuál es el menor entero positivo formado sólo por dígitos 1 y 0 que es divisible entre 15?

(a) 10 (b) 110 (c) $1,110$ (d) $11,110$ (e) 111

Problema 3. Se tiene una sucesión de números enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tal que si un término es par, entonces el siguiente es la mitad del anterior y si el término es impar, entonces el siguiente es la suma de los 2 anteriores. Si el primer término de la sucesión es 2010, ¿qué número está en el lugar 2011?

(a) 4020 (b) 1005 (c) 2010 (d) 3015 (e) 2011

Problema 4. En la figura vemos una pared de una chimenea de base cuadrada. Si no se cortó ningún ladrillo para construir la chimenea, ¿cuántos ladrillos se utilizaron para construirla?

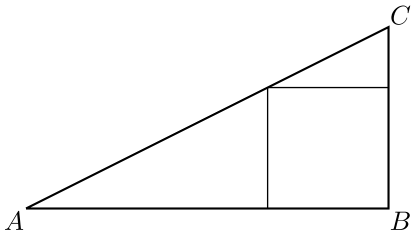


(a) 30 (b) 26 (c) 52 (d) 10 (e) 13

Problema 5. ¿Cuánto mide el ángulo menor que se forma entre las dos manecillas de un reloj cuando éste marca las 4:36?

(a) 91° (b) 78° (c) 75° (d) 96° (e) 45°

Problema 6. En un triángulo rectángulo ABC está inscrito un cuadrado como se muestra en la figura. Si sabemos que $AB = 6\,cm$ y $BC = 3\,cm$, ¿cuánto mide el área del cuadrado?



(a) $6\,cm^2$ (b) $9\,cm^2$ (c) $4\,cm^2$ (d) $8\,cm^2$ (e) $16\,cm^2$

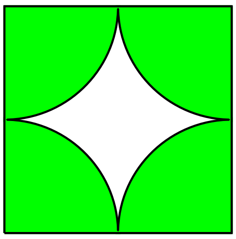
Problema 7. Un número de teléfono es de la forma $ABC - DEF - GHIJ$, donde cada letra representa un dígito distinto. Se sabe que $A > B > C$; $D > E > F$; $G > H > I > J$; D, E, F son dígitos pares consecutivos; G, H, I, J son dígitos impares consecutivos y $A + B + C = 9$. ¿Cuánto vale A?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 8. Sean $ABCD$ un rectángulo con $AB < BC$ y M, N los puntos medios de los lados CD y DA, respectivamente. Si el ángulo BNM es recto y $AB = 6\,cm$, ¿cuánto mide BC?

(a) $6\sqrt{2}\,cm$ (b) $6\,cm$ (c) $4\sqrt{2} + 2\,cm$ (d) $3\sqrt{2}\,cm$ (e) $3 + 2\sqrt{2}\,cm$

Problema 9. Un piso de $8\,m \times 10\,m$ está cubierto por mosaicos de $50\,cm \times 50\,cm$, como el de la figura. ¿Cuál es el total de la superficie blanca?



(a) $20,000(4 - \pi)\,cm^2$ (b) $200,000(4 - \pi)\,cm^2$ (c) $60,000\pi\,cm^2$
(d) $150,000\,cm^2$ (e) $200,000(\pi - 3)\,cm^2$

Problema 10. A partir de un cuadrado se forma un octágono regular cortando un triángulo rectángulo isósceles de cada esquina. Si cada lado del cuadrado mide $20\,cm$, ¿cuánto mide cada lado del octágono?

(a) $12\,cm$ (b) $20(\sqrt{2} - 1)\,cm$ (c) $10\sqrt{2}\,cm$ (d) $16\,cm$ (e) $25\sqrt{2} - 12\,cm$

Problema 11. ¿Cuántos números distintos pueden ser expresados como la suma de tres números distintos del conjunto $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$?

(a) 37 (b) 36 (c) 18 (d) 42 (e) 13

Problema 12. Sean $A2$ y $B4$ dos números de dos dígitos tales que al sumarlos se obtiene un múltiplo de 3. ¿Cuántas soluciones se pueden obtener para A y B?

(a) 28 (b) 30 (c) 25 (d) 27 (e) 36

Problema 13. ¿Cuál es el menor entero positivo por el cual hay que dividir al número $108,675$ para que el cociente sea un cuadrado perfecto?

(a) 805 (b) 543 (c) 483 (d) 110 (e) 161

Problema 14. Si a un número de dos dígitos le sumamos el cuadrado de la suma de sus dígitos, obtenemos el número original con los dígitos invertidos. ¿Cuál es la suma de todos los números que satisfacen las condiciones del problema?

(a) 72 (b) 37 (c) 63 (d) 36 (e) 27

Problema 15. La base mayor de un trapecio tiene longitud de $15\,cm$ y el segmento de recta que une los puntos medios de las dos diagonales tiene longitud de $3\,cm$. ¿Cuánto mide la base menor del trapecio?

(a) $6\,cm$ (b) $9\,cm$ (c) $10\,cm$ (d) $12\,cm$ (e) $11\,cm$

Problema 16. La siguiente sucesión se forma al escribir los dígitos de los números naturales en orden

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, ...$$

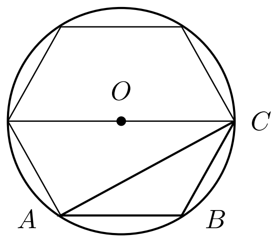
¿Cuál es el dígito en el lugar 2010?

(a) 6 (b) 1 (c) 3 (d) 0 (e) 2

Problema 17. Un círculo de área A_1 está contenido en el interior de un círculo mayor de área $A_1 + A_2$. Si el radio del círculo mayor es $3\,cm$, y si A_1, A_2, $A_1 + A_2$ forman una progresión aritmética, ¿cuánto mide el radio del círculo menor?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$ (b) $\frac{2}{\sqrt{8}}\,cm$ (c) $\frac{3}{2}\,cm$ (d) $\sqrt{3}\,cm$ (e) $\frac{\sqrt{6}}{2}\,cm$

Problema 18. Si el área del círculo es $1\,m^2$, ¿cuánto mide el área del triángulo ABC?

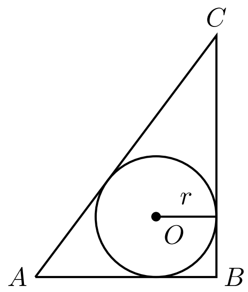


(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,m^2$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,m^2$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\,m^2$ (d) $2\sqrt{3}\,m^2$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}\,m^2$

Problema 19. Supongamos que tenemos 21 monedas, de las cuales 20 son originales y una es falsa. La moneda falsa tiene distinto peso, pero no sabemos si pesa más o menos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que se deben hacer en una balanza para saber si la moneda falsa pesa más o pesa menos? (No es necesario especificar cuál es la moneda falsa, únicamente queremos saber si pesa más o menos.)

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 20. La longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC es h, y el radio del círculo inscrito es r. ¿Cuál es la razón entre el área del círculo y el área del triángulo?



(a) $\frac{\pi r}{h+2r}$ (b) $\frac{\pi r}{h+r}$ (c) $\frac{\pi r}{2h+r}$ (d) $\frac{\pi r^2}{h^2+r^2}$ (e) $\frac{\pi r^2}{h+r}$

Problema 21. Si $a^2 = a + 2$, entonces a^3 es igual a

(a) $a + 4$ (b) $2a + 8$ (c) $3a + 2$ (d) $4a + 8$ (e) $27a + 8$

Problema 22. Encuentra el valor de

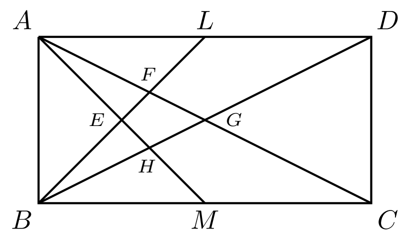
$$\sqrt[3]{\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + 4 \times 8 \times 16 + \cdots}{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + 3 \times 9 \times 27 + 4 \times 12 \times 36 + \cdots}}$$

(a) 1 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{4}$

Problema 23. En un condominio, todos los números de teléfono son de la forma $555 - abc - defg$, donde a, b, c, d, e, f y g son dígitos distintos en orden creciente, y ninguno de ellos es 0 ó 1. ¿Cuántos números de teléfono se pueden formar?

(a) 1 (b) 2 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 24. Sea $ABCD$ un rectángulo de base $BC = 2\,m$ y altura $AB = 1\,m$. Si L y M son los puntos medios de AD y BC respectivamente, determina el área del cuadrilátero $EFGH$.



(a) $\frac{1}{12}\,m^2$ (b) $\frac{1}{24}\,m^2$ (c) $\frac{1}{4}\,m^2$ (d) $\frac{1}{2}\,m^2$ (e) $\frac{2}{3}\,m^2$

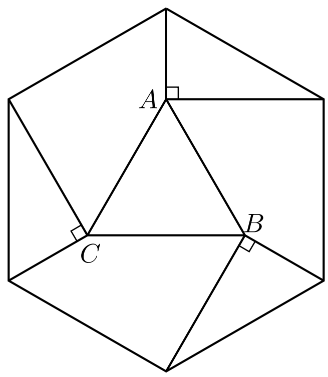
Problema 25. ¿Cuántos enteros positivos n menores o iguales que 24 cumplen que

$$\frac{n!}{1 + 2 + \cdots + n}$$

es un número entero?

(a) 8 (b) 12 (c) 16 (d) 17 (d) 21

Problema 26. En la siguiente figura se muestra un hexágono regular cuya área es a. ¿Cúal es el área del triángulo ABC?



(a) $\frac{a}{2}$ (b) $\frac{a}{3}$ (c) $\frac{a}{6}$ (d) $\frac{a}{12}$ (e) $\frac{a}{8}$

Problema 27. En la expresión $c \cdot a^b - d$, los valores de a, b, c y d son los números $0, 1, 2$ y 3, aunque no necesariamente en ese orden. ¿Cuál es el mayor valor posible de tal expresión?

(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Problema 28. Paty tiene 20 monedas de las cuales algunas son de 5 centavos y otras de 10 centavos. Si sus monedas de 5 centavos fueran de 10 centavos y sus monedas de 10 centavos fueran de 5 centavos, ella tendría 70 centavos más. ¿Cuánto dinero tiene Paty?

(a) $\$1.15$ (b) $\$1.20$ (c) $\$1.25$ (d) $\$1.30$ (e) $\$1.35$

Problema 29. ¿Cuántos cubos positivos dividen a $3! \cdot 5! \cdot 7!$?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 30. En un trapecio $ABCD$, se tiene que AB es paralela a DC, E es el punto medio de BC, y F es el punto medio de DA. Si el área del trapecio $ABEF$ es el doble del área del trapecio $FECD$, entonces el valor de $\frac{AB}{DC}$ es:

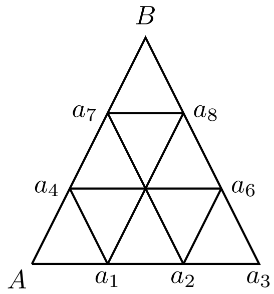
(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que hemos preparado para los 30 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que no sólo se ha determinado la opción correcta, sino que además, para cada problema se incluye la argumentación que establece su validez. Observa que, en todos los casos, la justificación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos y que en ningún problema la solución se ha determinado por eliminación de las otras opciones de respuesta.

Las soluciones que aquí se presentan no pretenden ser únicas ni tampoco las mejores o las más elegantes, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que se busca estimular en los problemas de la olimpiada. Como puedes ver en el artículo que presentamos sobre el *Teorema de Pitágoras*, cada problema puede tener un gran número de soluciones. Si encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La respuesta es (d). Una manera de contar los caminos es contar los caminos a cada vértice (o intersección) y luego ir sumando. Numeremos los vértices (el del centro es a_5):



A cada vértice podemos llegar a lo más desde tres direcciones: horizontalmente desde su izquierda, desde abajo a la derecha o desde abajo a la izquierda. Observemos primero que para llegar a a_1, a_2 ó a_3 tenemos un sólo camino (el horizontal). Para llegar a a_4 hay dos caminos: el camino directo desde A y el que pasa por a_1. Para contar los caminos que llegan a a_5 tenemos que sumar los que pasan por a_4, más los que pasan por a_1, más los que pasan por a_2. Luego, hay $2+1+1=4$ caminos de A a a_5. Continuando este proceso tenemos que de A a:

- a_6 hay 6 caminos;
- a_7 hay 6 caminos;
- a_8 hay 16 caminos;
- B hay 22 caminos.

Solución del problema 2. La respuesta es (c). Para que un número sea divisible entre 15 tiene que ser divisible entre 3 y 5 (ver criterios 2 del apéndice). Un número cuyos únicos dígitos son 0 y 1 es divisible entre 5 si el dígito de las unidades es 0, y es divisible entre 3 si el número de dígitos 1 es un múltiplo de 3. Por lo tanto, el menor número que cumple con las condiciones del problema es el $1,110$.

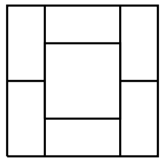
Solución del problema 3. La respuesta es (d). Como $a_1 = 2010$ es un número par, entonces $a_2 = \frac{2010}{2} = 1005$. Como $a_2 = 1005$ es impar, entonces $a_3 = a_1 + a_2 = 3015$. Como $a_3 = 3015$ es impar, entonces $a_4 = a_2 + a_3 = 4020$. Por último, como $a_4 = 4020$ es par, entonces $a_5 = 2010$. A partir de este punto la sucesión se vuelve cíclica, por lo que para determinar el valor de cualquier término de ella, basta con fijarnos en el valor del residuo que salga al dividir el índice del término entre 4. Sea r el residuo que resulte de dividir $\frac{n}{4}$.

- si $r = 1$, entonces $a_n = 2010$,
- si $r = 2$, entonces $a_n = 1005$,
- si $r = 3$, entonces $a_n = 3015$,

- si $r = 0$, entonces $a_n = 4020$.

Como $2011 = (4 \times 502) + 3$, entonces $r = 3$ y $a_{2011} = 3015$.

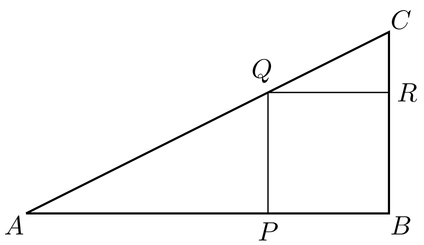
Solución del problema 4. La respuesta es (a). Veamos que cada una de las líneas tiene 6 ladrillos, como en la figura.



Como hay 5 líneas de ladrillos, se utilizaron $6 \times 5 = 30$ ladrillos para construir la chimenea.

Solución del problema 5. La respuesta es (b). El dial de un reloj está dividido en 60 marcas correspondientes a los 60 minutos de 1 hora. El arco de círculo entre dos de estas marcas consecutivas equivale a un ángulo de $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Para facilitar la explicación, supondremos que para las marcas correspondientes a los minutos múltiplos de 5, la carátula de nuestro reloj tiene la numeración tradicional, del I al XII.
Es fácil ver que cuando el reloj marca las 4:30 (posición incial), las manecillas están formando un ángulo de 45°, ya que la manecilla de los minutos se encuentra exactamente en la marca VI y la manecilla de las horas está exactamente a la mitad entre las marcas IV y V. Nótese que entre las marcas V y VI hay un ángulo de 30° y que el ángulo entre la manecilla de las horas y la marca V es de 15°.
A partir de ese momento y hasta las 4:36, la manecilla de los minutos avanzará un ángulo de $6 \times 6^\circ = 36^\circ$. Por otro lado, la manecilla de las horas avanza más lento con un ritmo de $5 \times 6^\circ = 30^\circ$ en 60 minutos, por lo que en 6 minutos avanzará sólo $\left(\frac{1}{10}\right) 30^\circ = 3^\circ$. De esta manera, mientras la manecilla de los minutos avanza 36° de la posición incial, la de las horas avanza 3°, por lo que en 6 minutos la separación efectiva entre ambas es de $36^\circ - 3^\circ = 33^\circ$. De lo anterior se concluye que a las 4:36 el ángulo que separa a las manecillas es de $45^\circ + 33^\circ = 78^\circ$.

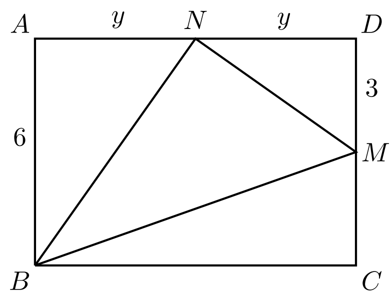
Solución del problema 6. La respuesta es (c). Llamemos P, Q y R a los vértices del cuadrado tal y como se muestra en la figura.



Dado que QR es paralela con AB, tenemos que $\angle CQR = \angle CAB$ ya que son ángulos correspondientes (ver la definición 8 del apéndice). Como $\angle QCR = \angle ACB$ por ser un ángulo común y además $\angle QRC = \angle ABC = 90°$, por el criterio AA (ver el criterio 17 del apéndice), tenemos que los triángulos ABC y QRC son semejantes.
Sean $PB = BR = x$ y $RC = 3 - x$, entonces como los triángulos ABC y QRC son semejantes, tenemos que sus lados correspondientes son proporcionales, es decir $\frac{x}{3-x} = \frac{6}{3}$, de donde se sigue que $x = 2(3-x)$ y por lo tanto $x = 2\,cm$. Con lo anterior concluimos que el área del cuadrado $PQRB$ es $2 \times 2 = 4\,cm^2$ (ver el teorema 7 del apéndice).

Solución del problema 7. La respuesta es (d). Como G, H, I, J son impares consecutivos, un solo dígito entre $A > B > C$ es impar y es igual a 1 ó 9. Como $A+B+C = 9$, tenemos que uno es igual a 1 y la suma de los otros dos es 8. Por otro lado tenemos que D, E, F son iguales a $0, 2, 4$; $2, 4, 6$ ó $4, 6, 8$, respectivamente. En cada caso los dos dígitos pares entre A, B, C son los dos dígitos restantes, como su suma es 8 la única posibilidad es $A = 8$, $B = 1$ y $C = 0$.

Solución del problema 8. La respuesta es (a). Como el ángulo $\angle BNM = 90°$, el triángulo BMN es rectángulo.



Denotemos por y a la medida de $AN = ND$. Utilizando el teorema de Pitágoras (ver el teorema 11 del apéndice) en los triángulos rectángulos ABN y MDN, tenemos que

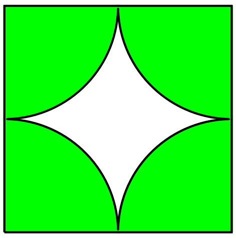
$$\begin{aligned} BN^2 &= 36 + y^2, \\ MN^2 &= 9 + y^2. \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos BMN y BCM, obtenemos

$$\begin{aligned} BN^2 + MN^2 &= BM^2 = BC^2 + CM^2, \\ 36 + y^2 + 9 + y^2 &= 4y^2 + 9, \end{aligned}$$

ya que $BC = 2y$. Luego,$2y^2 = 36$ y $y = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,cm$ y el lado BC mide $6\sqrt{2}\,cm$.

Solución del problema 9. La respuesta es (b). Los radios de los arcos de círculo de cada mosaico miden $25\,cm$. Observemos que los 4 cuartos de círculo de cada mosaico, cubren la misma superficie que un círculo de radio $25\,cm$.

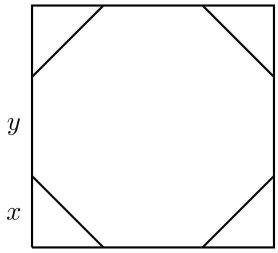


Luego, en cada mosaico el área blanca es igual al área del cuadrado menos el área del círculo (ver el teorema 7 del apéndice), es decir, es igual a

$$50^2 - \pi(25^2) = 625(4 - \pi)\,cm^2.$$

Ahora bien, como el piso tiene $80\,m^2 = 800{,}000\,cm^2$ y cada mosaico cubre una superfice de $2{,}500\,cm^2$, se necesitan $\frac{800{,}000}{2{,}500} = 320$ mosaicos para cubrir el piso. Por lo tanto, el total de la superficie blanca es igual a $320[625(4-\pi)] = 200{,}000(4-\pi)\,cm^2$.

Solución del problema 10. La respuesta es (b). Llamemos x a la longitud de los catetos de los triángulos isósceles y y a la longitud de cada lado del octágono. Luego, $2x+y = 20\,cm$.



Entonces, cada triángulo rectángulo isósceles tiene lados x, x, y. Utilizando el teorema de Pitágoras (ver el teorema 11 del apéndice), tenemos que $2x^2 = y^2$, o bien $y = \sqrt{2}x$. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{2}x &= 20, \\ x &= \frac{20}{2+\sqrt{2}} = \frac{20(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 20 - 10\sqrt{2}\,cm. \end{aligned}$$

Luego,

$$y = \sqrt{2}x = \sqrt{2}(20 - 10\sqrt{2}) = 20(\sqrt{2} - 1)\,cm.$$

Por lo tanto, cada lado del octágono mide $20(\sqrt{2}-1)\,cm$.

Solución del problema 11. La respuesta es (e). Observemos que el número más pequeño que podemos obtener es el $12 = 1+4+7$ y el más grande es el $48 = 13+16+19$. Veamos cuáles números intermedios podemos escribir como suma de tres números distintos del conjunto $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$.
Los números en el conjunto son de la forma $1 + 3n$ con $n = 0, 1, \ldots, 6$, entonces la suma de cualesquiera tres de ellos es igual a

$$(1 + 3n) + (1 + 3m) + (1 + 3k) = 3 + 3(n + m + k) = 3(n + m + k + 1),$$

con $n, m, k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ y distintos entre sí. Entonces, tenemos que

$$\begin{array}{ccc} 12 \leq & 3(n+m+k+1) & \leq 48 \\ 3 \leq & n+m+k & \leq 15. \end{array}$$

Observemos que podemos encontrar n, m y k tales que al sumarlos obtenemos todos los valores enteros entre 3 y 15:

$$\begin{array}{ll} 3 = 0+1+2 & 10 = 0+4+6 \\ 4 = 0+1+3 & 11 = 0+5+6 \\ 5 = 0+1+4 & 12 = 1+5+6 \\ 6 = 0+1+5 & 13 = 2+5+6 \\ 7 = 0+1+6 & 14 = 3+5+6 \\ 8 = 0+2+6 & 15 = 4+5+6 \\ 9 = 0+3+6. & \end{array}$$

Por lo tanto, todos los múltiplos de 3 entre 12 y 48 pueden ser suma de tres números distintos del conjunto, es decir, en total hay 13 valores posibles.

Solución del problema 12. La respuesta es (d). La solución se basa en el criterio de divisibilidad entre 3, el cual establece que un número es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos también lo es. Como $4 + 2 = 6$ es divisible entre 3, entonces $A + B$ también tiene que ser divisible entre tres. Por inspección, es fácil determinar que existen 15 parejas de dígitos tales que su suma es divisible entre tres: $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(1, 8)$, $(2, 4)$, $(2, 7)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$, $(3, 9)$, $(4, 5)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$, $(6, 6)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$ y $(9, 9)$. Quitando las parejas $(3, 3)$, $(6, 6)$ y $(9, 9)$, el resto de ellas debe contarse doble pues, por ejemplo, de la pareja $(1, 2)$ salen 2 soluciones $A = 1$, $B = 2$ y $A = 2$, $B = 1$. Por lo tanto, el número total de soluciones es $3 + (2 \times 12) = 27$.

Solución del problema 13. La respuesta es (c). Observemos que

$$108,675 = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 23.$$

Como en la descomposición en primos de un cuadrado perfecto todos los exponentes son pares, entonces el cociente que queremos obtener es $3^2 \times 5^2$, ya que es el mayor cuadrado perfecto que podemos obtener. Luego, se debe dividir entre $3 \times 7 \times 23 = 483$.

Solución del problema 14. La respuesta es (e). Denotemos por ab al número de dos dígitos que satisface las condiciones del problema, es decir,

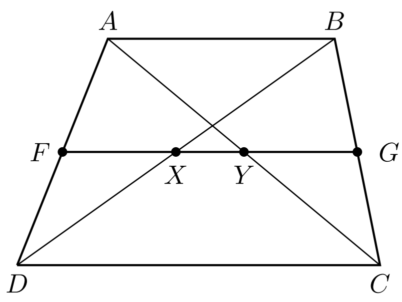
$$\begin{aligned} 10a + b + (a+b)^2 &= 10b + a, \\ (a+b)^2 &= 9(b-a). \end{aligned}$$

Como a es distinto de cero, $(b-a) < 9$ y tenemos que $(a+b)^2 = 9(b-a) < 81$. Los únicos cuadrados perfectos múltiplos de 9 que son menores a 81 son: $9 = 3^2$ y $36 = 6^2$. Veamos cada caso:

1. si $(a+b) = 3$ entonces $b - a = 1$, tenemos que $a = 1$, $b = 2$ y $10a + b = 12$;
2. si $(a+b) = 6$ entonces $b - a = 4$, tenemos que $a = 1$, $b = 5$ y $10a + b = 15$.

Por lo tanto, los únicos números que cumplen la condición son 12 y 15 y su suma es 27.

Solución del problema 15. La respuesta es (b). Sea $ABCD$ el trapecio, donde AB es paralela a CD, con CD la base mayor. Sea X el punto medio de la diagonal BD y sea G el punto medio de BC. Entonces por el teorema de Thales (ver el teorema 9 del apéndice), XG es paralela a DC. Extendemos la recta XG hasta que intersecte a AD en F y llamemos Y a la intersección con AC.



Utilizando nuevamente el teorema de Thales, tenemos que F es punto medio de AD y Y es punto medio de AC. Por hipótesis, tenemos que $XY = 3\,cm$. Si nos fijamos en el triángulo BDC, tenemos (ver el lema 12 del apéndice) que $XG = \frac{1}{2}DC = \frac{15}{2}\,cm$. Como $XG = XY + YG = 3 + YG$, tenemos que $YG = XG - 3 = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}\,cm$. Finalmente si nos fijamos en el triángulo ABC, como YG es paralela a AB y $YG = \frac{1}{2}AB$, tenemos que $AB = 9\,cm$.

Solución del problema 16. La respuesta es (a). Observemos que del 1 al 9 ocupamos 9 lugares y del 10 al 99, ocupamos $180 = 2(99 - 10 + 1)$ lugares. Luego, del 1 al 99 ocupamos 189 lugares. Del 100 al 199 se utilizan $300 = 3(199 - 100 + 1)$ lugares, entonces del 1 al 699 se utilizan $189 + (6 \times 300) = 1989$ lugares. Como $2010 - 1989 = 21$, entonces necesitamos escribir otros 7 números de 3 dígitos, es decir, al escribir el 706 llegamos al lugar 2010 en la sucesión. Por lo tanto, el dígito en el lugar 2010 es el 6.

Solución del problema 17. La respuesta es (d). Denotemos por s al radio del círculo menor, entonces su área es $A_1 = \pi s^2\, cm^2$ (ver el teorema 7 del apéndice). Por otro lado, el área del círculo mayor es $A_1 + A_2 = 9\pi\ cm^2$. Como A_1, A_2 y $A_1 + A_2$ forman una progresión aritmética, tenemos que $A_1 + r = A_2$ y $A_1 + 2r = A_1 + A_2$ para algún número r. Luego,

$$A_1 + r = \pi s^2 + r = 9\pi - \pi s^2.$$

Despejando r tenemos que,

$$r = 9\pi - 2\pi s^2\, cm. \tag{1}$$

Por otro lado,

$$A_1 + 2r = \pi s^2 + 2r = 9\pi = A_1 + A_2,$$

despejando r

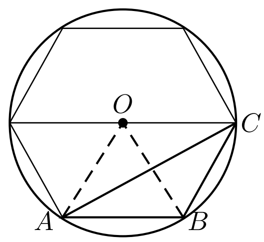
$$r = \frac{9\pi - \pi s^2}{2}\, cm. \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) y despejando s obtenemos:

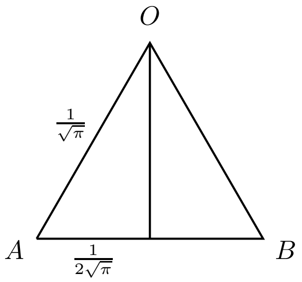
$$\begin{aligned} 9\pi - 2\pi s^2 &= \frac{9\pi - \pi s^2}{2} \\ 18\pi - 4\pi s^2 &= 9\pi - \pi s^2 \\ 9\pi - 3\pi s^2 &= 0 \\ s^2 &= 3 \\ s &= \sqrt{3}\, cm. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio del círculo menor mide $\sqrt{3}\, cm$.

Solución del problema 18. La respuesta es (c). Sea r la longitud del radio del círculo. Como el área del círculo es $\pi r^2 = 1\, m^2$, entonces $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, m$ (ver el teorema 7 del apéndice).



Como OC y AB son paralelas, los triángulos OAB y ABC tienen la misma base y la misma altura, y por lo tanto tienen la misma área.
Ahora bien, el triángulo OAB es equilátero de lado $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, m$.



Luego, utilizando el teorema de Pitágoras (ver el teorema 11 del apéndice), tenemos que su altura mide

$$\sqrt{OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4\pi}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\, m.$$

Entonces, su área es

$$\frac{AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\, m^2.$$

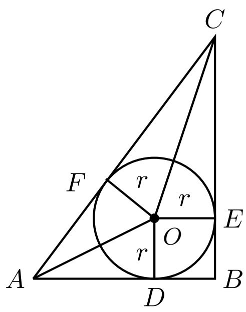
Solución del problema 19. La respuesta es (b). En la primera pesada colocamos 10 monedas en cada platillo y nos sobra una. Tenemos dos posibilidades.

- si la balanza queda equilibrada entonces la moneda que sobra es la falsa. Tomamos una moneda de cualquier platillo y la comparamos con la falsa para saber si pesa más o pesa menos;

- si la balanza no está equilibrada, tomamos las 10 monedas que pesan más y las dividimos en dos grupos de 5 para pesarlas. Si la balanza queda equilibrada, la moneda falsa no está en este grupo de 10 monedas y está en el otro, que pesó menos, luego la moneda falsa pesa menos. Si al comparar los dos grupos de 5 monedas la balanza no queda equilibrada, entonces la moneda falsa está en el grupo que pesa más y por lo tanto pesa más que las demás.

En cualquier caso el mínimo número de pesadas fueron 2.

Solución del problema 20. La respuesta es (b). Observemos que los radios que van a los puntos de tangencias del círculo con el triángulo son perpendiculares a los lados del triángulo.



Los triángulos AFO y ADO son congruentes, ya que el segmento AO es bisectriz del ángulo CAB (ver el teorema 19 del apéndice), lo que implica que los triángulos tienen los mismos ángulos y dos lados correspondientes de la misma longitud. Análogamente, los triángulos CFO y CEO son congruentes. El área del triángulo CAO es $\frac{hr}{2}$, luego, el área del triángulo ABC es

$$2\left(\frac{hr}{2}\right)+r^2=r(h+r).$$

Por lo tanto, la razón entre las áreas es $\frac{\pi r^2}{r(h+r)}=\frac{\pi r}{h+r}$.

Solución del problema 21. La respuesta es (c). Multiplicando por a la igualdad $a^2=a+2$, obtenemos $a^3=a^2+2a$. Pero como $a^2=a+2$, resulta que $a^3=(a+2)+2a=3a+2$.

Solución del problema 22. La respuesta es (b). Observemos que

$$1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12+\cdots=(1\times2\times4)+2^3(1\times2\times4)+3^3(1\times2\times4)+\cdots$$

y

$$1\times3\times9+2\times6\times18+3\times9\times27+\cdots=(1\times3\times9)+2^3(1\times3\times9)+3^3(1\times3\times9)+\cdots$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12+\cdots}{1\times3\times9+2\times6\times18+3\times9\times27+\cdots} &= \frac{(1\times2\times4)(1+2^3+3^3+\cdots)}{(1\times3\times9)(1+2^3+3^3+\cdots)}\\ &= \frac{1\times2\times4}{1\times3\times9}\\ &= \frac{8}{27}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

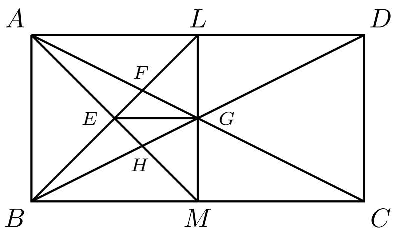
$$\sqrt[3]{\frac{1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12+\cdots}{1\times3\times9+2\times6\times18+3\times9\times27+\cdots}}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}.$$

Solución del problema 23. La respuesta es (d). Los últimos siete dígitos de un número de teléfono se deben elegir entre los ocho dígitos:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Luego, todos excepto uno de estos 8 dígitos se deben usar. El dígito que no se usa se puede elegir de 8 formas distintas, y los restantes siete dígitos se ordenan entonces de menor a mayor para obtener así un posible número de teléfono. Por lo tanto, se pueden formar 8 números de teléfono.

Solución del problema 24. La respuesta es (a). En primer lugar observamos que $ABML$ es un cuadrado y que E es el punto de intersección de sus diagonales AM y BL, por lo tanto, podemos concluir que E es el centro de dicho cuadrado. Trazamos el segmento EG y observamos que el cuadrilátero $EFGH$ queda dividido en dos triángulos congruentes EGF y EGH. Lo anterior puede justificarse con facilidad apoyándose en el teorema de ángulos entre paralelas y en el criterio ALA (ver la definición 8 y el criterio 14 del apéndice).



Ahora, centremos nuestra atención en el triángulo rectángulo isósceles EGL. Como $EG = GL = \frac{1}{2}\,m$, podemos calcular el área de dicho triángulo, misma que es igual a $\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}\,m^2$ (ver el teorema 7 del apéndice).
Por otro lado, con base en el teorema de ángulos entre paralelas y en el criterio de semejanza AA, podemos afirmar que los triángulos LAF y EGF son semejantes. Como sus lados correspondientes son proporcionales, tenemos que $\frac{LF}{EF} = \frac{LA}{EG}$. Además sabemos que $EG = \frac{1}{2}\,m$ y $LA = 1\,m$, por lo que $\frac{LF}{EF} = 2\,m$ y entonces $LF = 2EF$.
Por último, observamos que el área del triángulo EGF es la mitad del área del triángulo FGL, ya que sus bases EF y FL están en razón 1:2 y tienen la misma altura desde el vértice G. De lo anterior podemos concluir que el área del triángulo EGF es $\frac{1}{3}$ del área de EGL, la cual es $\frac{1}{8}\,m^2$. Por lo tanto el área de EGF es igual a $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}\,m^2$ y el área del cuadrilátero $EFGH$ es igual a $2(\frac{1}{24}) = \frac{1}{12}\,m^2$.

Solución del problema 25. La respuesta es (c). Observemos que si $n = 1$, la fracción es igual a 1 que es un número entero. Queremos ver para qué enteros positivos n, con

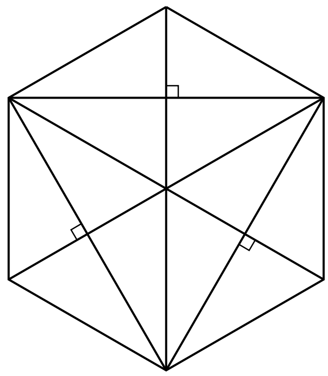
$1 < n \leq 24$, se cumple que

$$\frac{n!}{1+2+\cdots+n} = \frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n!}{n(n+1)} = \frac{2(n-1)!}{n+1}$$

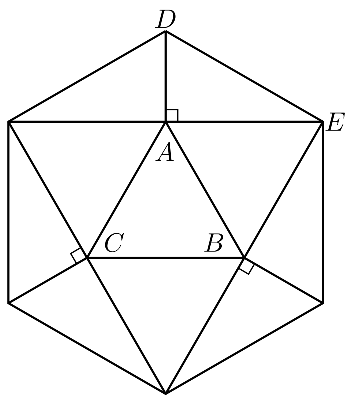
es un entero.

Es fácil ver que esta fracción siempre es un número entero a menos que $n+1$ sea un primo impar. Como hay 8 primos impares menores o iguales que 24 (dichos primos son 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23), se sigue que hay $24 - 8 = 16$ enteros menores o iguales que 24 que satisfacen el problema.

Solución del problema 26. La respuesta es (e). Trazando algunas diagonales del hexágono, éste queda dividido en 12 triángulos rectángulos congruentes donde cada uno de ellos tiene área $\frac{a}{12}$, como en la figura.



Dividimos nuevamente al hexágono, pero ahora lo hacemos tomando sólo 6 de estos triángulos rectángulos y el resto lo dividimos usando 4 triángulos equiláteros congruentes al triángulo ABC.



Ahora es fácil encontrar el área buscada. Nótese que 4 veces el área de ABC es igual a 6 veces el área de ADE, que es igual a $6(\frac{a}{12}) = \frac{a}{2}$. Sabiendo que 4 veces el área de ABC es igual a $\frac{a}{2}$, concluimos que el área de ABC es $\frac{a}{8}$.

Solución del problema 27. La respuesta es (d). Si $d \neq 0$, el valor de la expresión $c \cdot a^b - d$ se puede incrementar intercambiando 0 con el valor de d. Por lo tanto, el valor máximo debe ocurrir cuando $d = 0$. Luego,

1. si $a = 1$, entonces $c \cdot a^b - d = c = 2$ ó 3,

2. si $b = 1$, entonces $c \cdot a^b - d = c \cdot a = 6$,

3. si $c = 1$, entonces $c \cdot a^b - d = a^b$ que es igual a $2^3 = 8$ ó $3^2 = 9$.

Por lo tanto, el valor mayor posible para $c \cdot a^b - d$ es 9 con $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ y $d = 0$.

Solución del problema 28. La respuesta es (a). Como el dinero de Paty se incrementaría si se intercambiaran sus monedas de 5 centavos por las de 10 centavos, ella debe tener más monedas de 5 centavos que de 10 centavos. Al intercambiar una moneda de 5 centavos por una de 10 centavos, su dinero se aumenta en 5 centavos, de modo que ella tiene $\frac{70}{5} = 14$ monedas más de 5 centavos que de 10 centavos. Por lo tanto, Paty tiene $\frac{1}{2}(20 - 14) = 3$ monedas de 10 centavos y $20 - 3 = 17$ monedas de 5 centavos, es decir, en total tiene $3(10) + 17(5) = 115$ centavos ó $1.15.

Solución del problema 29. La respuesta es (e). Observemos que:

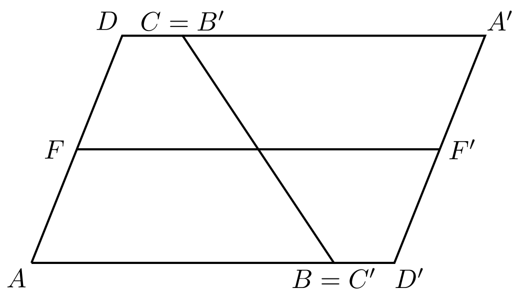
$$3! \cdot 5! \cdot 7! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Luego, un divisor cubo positivo de $3! \cdot 5! \cdot 7!$ debe ser de la forma $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$, donde p, q, r y s son todos múltiplos de 3. Tenemos 3 posibles valores para p: 0, 3 y 6. Hay 2 posibles valores para q: 0 y 3. El único valor posible para r ó s es 0. Por lo tanto, hay $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ cubos positivos distintos que dividen a $3! \cdot 5! \cdot 7!$. Ellos son:

$$1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, \qquad 8 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, \qquad 27 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0,$$

$$64 = 2^6 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, \qquad 216 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0, \qquad 1728 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0.$$

Solución del problema 30. La respuesta es (c). Ponemos una copia $A'B'C'D'$ de $ABCD$ a un lado y volteada.



Entonces $AD'A'D$ es un paralelogramo y

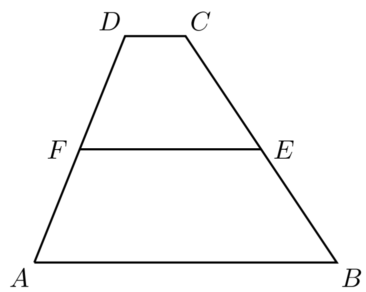
$$EF = \frac{1}{2}F'F = \frac{1}{2}(AB + C'D') = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Como los trapecios $ABEF$ y $FECD$ tienen la misma altura h, la razón entre sus áreas es igual a

$$2 = \frac{\frac{(AB+FE)h}{2}}{\frac{(FE+DC)h}{2}},$$

de donde,

$$\begin{aligned}
AB + FE &= 2(FE + DC) \\
AB + \frac{AB + DC}{2} &= 2\left(\frac{AB + DC}{2} + DC\right) \\
\frac{3AB + DC}{2} &= AB + 3DC \\
3AB + DC &= 2AB + 6DC \\
\frac{AB}{DC} &= 5.
\end{aligned}$$



Problemas propuestos

Tzaloa necesita de tu participación y esta sección de la revista está especialmente diseñada para hacerlo. En cada número presentamos 5 problemas nuevos que necesitan de ti para encontrar una respuesta. Como sabemos que te gustan los retos, los problemas escogidos para esta sección pueden ser un poco más difíciles que los que aparecen en la sección anterior. Sin embargo, esto no debe ser motivo de espanto, debes saber que aquí también seguimos el mismo criterio que consiste en comenzar con problemas más sencillos e ir aumentando la complejidad conforme avanza el año.

Problemas propuestos.
Año 2010 No. 1.

Para dar tiempo a que lleguen y puedan ser analizadas las contribuciones de todos los lectores, las soluciones de los problemas propuestos en cualquier número de la revista, se publicarán con dos números de diferencia. Es así, que en este número (Tzaloa 1, año 2010), publicamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 3, año 2009. Las soluciones de los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 3, año 2010, por lo que aún tienes tiempo para preparar y enviarnos tus soluciones.

Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país. Siempre esperamos con ansia la llegada de las valiosas contribuciones de todos los lectores, por lo que no dudes en mandarnos la tuya.

Problema 1. (Introductorio) Encuentra todas las parejas de números enteros (p, q) tales que la diferencia entre las dos soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ sea 2010.

Problema 2. (Introductorio) Si n es un entero divisible entre 7 que es igual al producto de tres números consecutivos, ¿cuál (o cuáles) de los enteros 6, 14, 21, 28 y 42 no es necesariamente un divisor de n?

Problema 3. (Introductorio) Sea $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ un polígono regular de nueve lados. ¿Cuántos triángulos equiláteros se pueden formar tales que al menos dos de sus vértices estén en el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$?

Problema 4. (Intermedio) Sea ABC un triángulo acutángulo e isósceles con $AC = AB$. Sean O su circuncentro e I su incentro. Si D es el punto de intersección de AC con la perpendicular a CI que pasa por O, demuestra que ID y AB son paralelas.

Problema 5. (Avanzado) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. A cada subconjunto B de A se le asocia su suma alternada S_B, definida como sigue: si $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, entonces $S_B = a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - \cdots \pm a_1$. Por ejemplo, si $n = 10$ y $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ entonces $S_B = 8 - 7 + 5 - 4 + 2 = 4$.
Si n es un número fijo, determina el valor de la suma

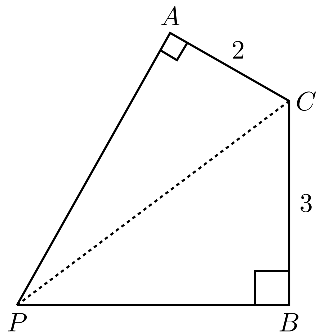
$$\sum_{B \subset A} S_B,$$

es decir, la suma de todos los números S_B con B subconjunto de A.

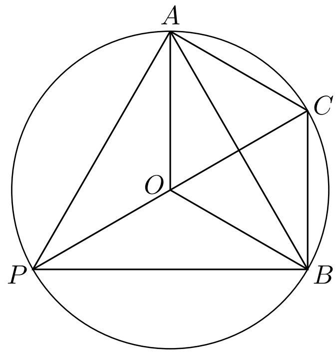
Soluciones a los problemas propuestos. Año 2009 No. 3.

Como se mencionó al principio de esta sección, a continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 3, año 2009. Felicitamos a Luis Brandon Guzmán Navarrete, de Tamaulipas, quien nos envió soluciones para los problemas 2 y 5. Asimismo, queremos felicitar a María del Rosario Soler Zapata y a Martín Velasco Hernández, de Chiapas, por su solución para el problema 5. Por último, también nos da mucho gusto reconocer el trabajo de Irving Daniel Calderón Camacho, del Estado de México, quien aportó una excelente contribución al resolver los problemas 1, 2 y 5. A todos ustedes enviamos un afectuoso saludo y nuestro más sincero agradecimiento.

Problema 1. (Principiante) Si $CA = 2$, $CB = 3$, $\angle CAP = 90°$, $\angle PBC = 90°$ y $\angle APB = 60°$, ¿cuánto mide PC?



Solución. (Irving Daniel Calderón Camacho, Estado de México). Como $\angle CAP + \angle PBC = 180°$, el cuadrilátero $PACB$ es cíclico (ver la definición 22 y los teoremas 23 y 21 del apéndice). Como $\angle CAP = 90°$, entonces $PACB$ está inscrito en la circunferencia de diámetro PC.



Sea O el centro de la circunferencia, punto medio de PC, entonces tenemos que $\angle AOB = 2(\angle APB) = 120°$. Sea r el radio de la circunferencia circunscrita a $PACB$. Aplicando la ley de cosenos al triángulo AOB (ver el teorema 20 del apéndice), obtenemos

$$AB^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(120°) = 3r^2.$$

Por otro lado, aplicando la ley de cosenos al triángulo ABC, obtenemos

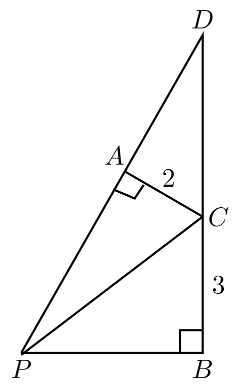
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2(CA)(CB)\cos(120°).$$

De las dos ecuaciones anteriores se sigue que

$$3r^2 = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 19,$$

por lo que concluimos que $r = \sqrt{\frac{19}{3}}$. Finalmente, como $PC = 2r$, obtenemos $PC = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$.

Solución alternativa. Sea D la intersección de PA y BC. Como el triángulo DPB es rectángulo y $\angle DPB = 60°$, entonces $\angle BDP = 30°$ (ver el teorema 10 del apéndice). Luego, el triángulo BPD es la mitad de un triángulo equilátero de lado $2PB$, de donde $PB = \frac{1}{\sqrt{3}}DB$ (ver el teorema 11 del apéndice).



Ahora bien, como los ángulos del triángulo DCA miden $30°$, $60°$ y $90°$, tenemos que $CD = 2CA = 4$ y $DB = 7$, luego $PB = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Entonces,

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 = \frac{49}{3} + 9 = \frac{76}{3},$$

de donde $PC = \sqrt{\frac{76}{3}} = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$.

Problema 2. (Intermedio) Demuestra que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i$$

se cumple para todo entero $n \geq 2$ y todos los números reales no negativos $x_1, \ldots, x_n$.

Solución. (Irving Daniel Calderón Camacho, Estado de México). Se hará una demostración por inducción sobre n, pero antes demostraremos por casos la siguiente desigualdad, la cual se cumple para cualquier número real x no negativo y para todo entero $n \geq 2$.

$$(n+1)x \leq n + x^{n+1} \tag{3}$$

Comencemos transformando la desigualdad (3) mediante las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} (n+1)x \leq n + x^{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n - nx + x^{n+1} - x \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n(1-x) - (1-x)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq (1-x)\left(n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x)\right). \end{aligned}$$

Para $x = 1$, se cumple la igualdad. Si $x < 1$, tenemos que $0 < 1 - x$ y

$$n > x^n + x^{n-1} + \cdots + x \Leftrightarrow 0 < n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x),$$

por lo que concluimos

$$0 < (1-x)\big(n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x)\big).$$

Si $x > 1$, tenemos que $0 > 1 - x$ y

$$n < x^n + x^{n-1} + \cdots + x \Leftrightarrow 0 > n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x),$$

por lo que concluimos

$$0 < (1 - x)\big(n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x)\big).$$

Con esto terminamos la demostración de (3). Ahora, comenzamos nuestra prueba por inducción. Para $n = 2$, tenemos que

$$x_1 + 2x_2 \leq \binom{2}{2} + x_1 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_2^2 - 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x_2 - 1)^2,$$

donde la última desigualdad es evidente. Ahora, supongamos que la desigualdad se cumple para algún entero $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

Usando la fórmula de Pascal (ver el teorema 6 del apéndice), tenemos

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n}{2} + n\,.$$

Sea x_{n+1} un número real no negativo cualquiera, usando (3) tenemos

$$(n+1)x_{n+1} \leq n + x_{n+1}^{n+1}\,.$$

Finalmente, sumando las dos últimas desigualdades obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} ix_i \leq \binom{n}{2} + n + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} ix_i \leq \binom{n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^i.$$

Eso completa nuestra prueba por inducción y la demostración de la desigualdad.

Solución alternativa. Para cada número real no negativo x y para cada entero positivo k tenemos, por la desigualdad media aritmética-media geométrica (ver teorema 5 del apéndice), que

$$x^k + k - 1 = x^k + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k-1} \geq k\sqrt[k]{x^k \times 1 \times \cdots \times 1} = kx.$$

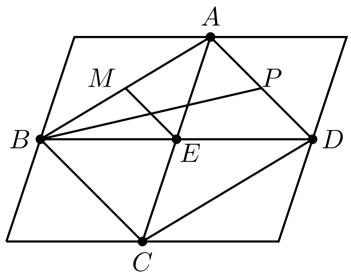
La igualdad se da, para $k \geq 2$, si y sólo si $x = 1$.
Luego, utilizando lo anterior para cada x_i y sumando, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \sum_{i=1}^{n}((i-1) + x_i^i) = \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

La igualdad se da si y sólo si $x_2 = \cdots = x_n = 1$ y $x_1 \geq 0$ es arbitraria.

Problema 3. (Intermedio) En un paralelogramo están marcados el centro y los puntos medios de los lados. Considera todos los triángulos cuyos vértices están en estos puntos marcados. Ahora, en cada triángulo marca los puntos medios de los lados y los puntos medios de la medianas. ¿Cuántos puntos marcados habrá en total?

Solución. Denotemos por A, B, C, D y E, a los puntos medios de los lados del paralelogramo y a su centro respectivamente, como se muestra en la figura. Hay 8 triángulos cuyos vértices están en estos puntos, cuatro que tienen un vértice en E y cuatro para los cuales E es punto medio de uno de sus lados.



Consideremos los triángulos que tienen un vértice en E y marquemos los puntos medios de los lados y las medianas. Al marcar los puntos medios de los lados AB, BC, CD, AD, AE, BE, CE y DE, obtenemos 8 puntos. Si marcamos ahora los puntos medios de las medianas, obtenemos 12 puntos más, pues cada triángulo tiene 3 medianas.

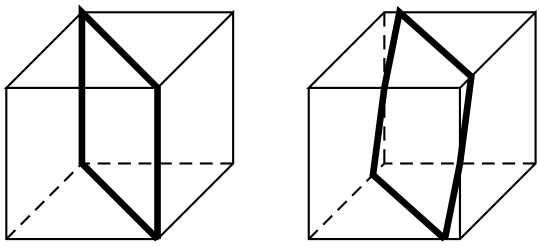
Ahora consideremos los triángulos para los cuales E es punto medio de uno de sus lados. Por ejemplo, en el triángulo ABD los puntos medios de los lados ya están marcados. Llamemos M al punto medio del lado AB, entonces el punto medio de la recta EM está marcado, ya que EM es mediana del triángulo ABE. Observemos que como E es punto medio de BD, la recta EM es paralela a AD. Esto implica que el punto medio de la mediana BP del triángulo ABD está en EM (ver el teorema 9 del apéndice). Además, como P es punto medio de AD, el punto de intersección de EM y BP es el punto medio de EM. Esto implica que los puntos medios de las medianas del triángulo ABD que pasan por B y D ya están marcados. La tercera mediana del triángulo ABD es AE, cuyo punto medio ya está marcado. Es decir, con el triángulo ABD no marcamos ningún nuevo punto y lo mismo pasa con los otros tres triángulos para los cuales E es el punto medio de uno de sus lados.

Por lo tanto, al final habrá $5 + 8 + 12 = 25$ puntos marcados.

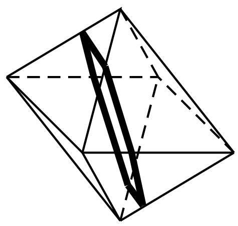
Problema 4. (Avanzado) Con un plano, ¿cuál es el máximo número de caras de un cubo, un octaedro y un dodecaedro que puedes cortar?

Solución. Un plano está definido por tres puntos, es decir, dados tres puntos en el espacio hay un sólo plano que los contiene. Entonces, al cortar un poliedro con un plano, el plano no puede cortar más de dos aristas de cada cara (ya que si no el plano sería la cara). Además, si queremos maximizar el número de caras cortadas, no debe de cortar todas las aristas que salen de un mismo vértice. Analicemos los tres poliedros.

Por los argumentos anteriores, el plano no puede cortar más de $\frac{2(6)}{2} = 6$ aristas, ya que un cubo tiene 6 caras. Por lo tanto, no puede cortar más de 6 caras. En la figura, presentamos un tal corte del cubo: empezamos con un plano que contiene una diagonal y lo rotamos un poco para cortar las 6 caras.



Como las caras del octaedro son triángulos, si una cara es cortada por el plano, de las otras tres caras que pasan por cada uno de sus vértices hay al menos una que no es cortada por el plano. Por lo tanto, se pueden cortar a lo más 6 caras, una manera de hacerlo es la siguiente.



Por los argumentos anteriores, el máximo número de aristas que se pueden cortar es $\frac{2(12)}{2} = 12$. Si colocamos el dodecaedro en un plano y cortamos con un plano paralelo, es fácil ver que el máximo número de caras cortadas es 10. Veamos que este es el mejor corte. Tomemos una cara que es cortada con el plano. Si el plano corta las cinco caras adyacentes a ella, corta sólo estas 6 caras. Entonces, por cada cara cortada, al menos una de las caras adyacentes no es cortada. Esto implica que el máximo número de caras cortadas es 10.

Problema 5. (Avanzado) Determina el número de enteros $n > 1$ que cumplen que $a^{13} - a$ es divisible entre n para todo entero a.

Solución. (María del Rosario Soler Zapata y Martín Velasco Hernández, Chiapas). Supongamos que $n > 1$ cumple la condición. Entonces, $n|2^{13}-2$ y $n|3^{13}-3$, por lo que $n|3^{13}-3-2^{13}+2$, esto es, $n|3^{13}-2^{13}-1$. Como $2^{13}-2 = 8,190 = 2\times3^2\times5\times7\times13$ y $3^{13}-2^{13}-1 = 1,594,323-8,192-1 = 1,586,130 = 2\times3\times5\times7^2\times13\times83$, entonces los números primos que aparecen en la descomposición en primos de n pertenecen al conjunto $A = \{2,3,5,7,13\}$ y tienen exponente a lo más 1 (ver el teorema 1 del apéndice).
Ahora, si a es par (o impar), entonces a^{13} es par (o impar), por lo que $a^{13} - a$ es par.

Luego, $2|a^{13}-a$ para todo entero a, y por lo tanto, $n=2$ cumple la condición.
Por otra parte, por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que para todo entero a se cumple que (ver la definición 3 y el teorema 4 del apéndice)

$$a^3 \equiv a \pmod 3, \tag{4}$$
$$a^5 \equiv a \pmod 5, \tag{5}$$
$$a^7 \equiv a \pmod 7, \tag{6}$$
$$a^{13} \equiv a \pmod{13}. \tag{7}$$

Veamos que si $n \neq 2$ está en A, entonces n cumple la condición, es decir, $a^{13} \equiv a \pmod n$ para todo entero a.

1. De (4) se sigue que $a^{12} \equiv a^4 \pmod 3$, luego $a^{13} \equiv a^5 \equiv a^3 \equiv a \pmod 3$, por lo que $a^{13} \equiv a \pmod 3$.
2. De (5) se sigue que $a^{10} \equiv a^2 \pmod 5$, luego $a^{13} \equiv a^5 \equiv a \pmod 5$, por lo que $a^{13} \equiv a \pmod 5$.
3. De (6) se sigue que $a^{13} \equiv a^7 \pmod 7$, luego $a^{13} \equiv a \pmod 7$.
4. De (7) se sigue que $n=13$ cumple la condición.

De lo anterior, se sigue que todos los elementos de A satisfacen la condición. Como cualesquiera dos elementos de A son primos relativos, entonces todo entero de la forma $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 13^e$ (con a, b, c, d, e enteros mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1) también será divisor de $a^{13}-a$ para todo entero a. Luego, los enteros $n>1$ que cumplen el problema son precisamente los divisores positivos distintos de 1 del número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Por lo tanto, la respuesta es $2^5-1=31$ enteros.

Solución alternativa. Sea $n>1$ un entero tal que $a^{13}-a$ es divisible entre n para todo entero a. Tenemos que p^2, con p primo, no divide a n, ya que p^2 no divide a $p^{13}-p$. Luego, n es producto de primos distintos. Como n debe dividir al número $a^{13}-a$ para todo entero a, en particular n debe dividir al número $2^{13}-2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Ahora, es claro que para todo entero a se cumple que $a^2 \equiv a \pmod 2$ (ver la definición 3 del apéndice), ya que $a^2-a = a(a-1)$ es producto de dos enteros consecutivos. Luego,

$$a^{13} = (a^2)^6 \cdot a \equiv a^6 \cdot a \equiv (a^2)^3 \cdot a \equiv a^3 \cdot a \equiv a^4 \equiv (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a \pmod 2.$$

Análogamente, tenemos que $a^3 \equiv a \pmod 3$ para todo entero a, pues $a^3-a = a(a-1)(a+1)$ es producto de tres enteros consecutivos. Luego,

$$a^{13} = (a^3)^4 \cdot a \equiv a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2 \equiv a \cdot a^2 = a^3 \equiv a \pmod 3.$$

Usando congruencias módulo 5, 7 y 13 es fácil demostrar (se deja al lector) que para todo entero a,

$$a^5 \equiv a \pmod 5,\ a^7 \equiv a \pmod 7 \text{ y } a^{13} \equiv a \pmod{13},$$

y como en los dos casos anteriores se sigue que $a^{13} \equiv a \pmod 5$ y $a^{13} \equiv a \pmod 7$. Luego, $a^{13} \equiv a \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$ para todo entero a, y por lo tanto los enteros $n>1$ que cumplen el problema son precisamente los divisores positivos distintos de 1 del número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Por lo tanto, la respuesta es $2^5-1=31$ enteros.

Concurso Nacional 2009
23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 8 al 14 de noviembre de 2009 se llevó a cabo en Campeche, Campeche, el Concurso Nacional de la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 31 estados de la República. El estado de Tabasco no participó. Los 17 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)
Arreola Gutiérrez Fernando Ignacio (Aguascalientes)
Zhou Tan David (Baja California)
Dosal Bustillos Manuel Enrique (Chihuahua)
Embarcadero Ruiz Daniel (Distrito Federal)
Calderón Camacho Irving Daniel (Estado de México)
Leal Camacho Manuel Alejandro (Jalisco)
Miranda Olvera José Luis (Jalisco)
Ortiz Rhoton Juan Carlos (Jalisco)
Belanger Albarrán Georges (Morelos)
Perales Anaya Daniel (Morelos)
Añorve López Fernando Josafath (Nuevo León)
Roque Montoya Diego Alonso (Nuevo León)
Jiménez Reichow Tilman (Oaxaca)
Guardiola Espinosa José Ramón (San Luis Potosí)
Jiménez Benítez José Manuel (San Luis Potosí)
Ucán Aké Raúl Eugenio (Yucatán)

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

García González Héctor Benjamín (Colima)
Ortiz Rhoton Juan Carlos (Jalisco)
González Cázares Jorge Ignacio (Jalisco)
Arancibia Alberro María Natalie (Morelos)
Roque Montoya Diego Alonso (Nuevo León)
Añorve López Fernando Josafath (Nuevo León)
Díaz Calderón Julio César (Oaxaca)
Cervantes Pérez Ángel Gustavo (Yucatán)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Morelos
3. San Luis Potosí
4. Nuevo León
5. Distrito Federal
6. Yucatán
7. Chihuahua
8. Baja California
9. Aguascalientes
10. Oaxaca

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**San Francisco de Campeche**" y fue ganado por San Luis Potosí. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Distrito Federal y Nuevo León, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2009. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Examen del Concurso Nacional 2009

Problema 1. Sean ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P, y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

(Sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Problema 2. En cajas marcadas con los números $0, 1, 2, 3, \ldots$ se van a colocar todos los enteros positivos de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si p es un número primo éste se coloca en la caja con el número 1.

- Si el número a se coloca en la caja con el número m_a y b se coloca en la caja con el número m_b, entonces el producto de a y b, es decir ab, se coloca en la caja con el número $am_b + bm_a$.

Encuentra todos los enteros positivos n que cuando se coloquen queden en la caja con el número n.

(Sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Problema 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1 \quad \text{y que} \quad \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1.$$

(Sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero impar y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que

$$m < s < M.$$

(Sugerido por Juan José Alba González)

Problema 5. Considera un triángulo ABC y un punto M sobre el lado BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y sólo si M es punto medio de BC.

(Sugerido por Eduardo Velasco Barreras)

Problema 6. En una fiesta con n personas, se sabe que de entre cualesquiera 4 personas, hay 3 de las 4 que se conocen entre sí o hay 3 que no se conocen entre sí. Muestra que las n personas se pueden separar en 2 salones de manera que en un salón todos se conocen entre sí y en el otro salón no hay dos personas que se conozcan entre sí.
Nota: conocerse se considera una relación mutua.

(Sugerido por Pablo Soberón Bravo)

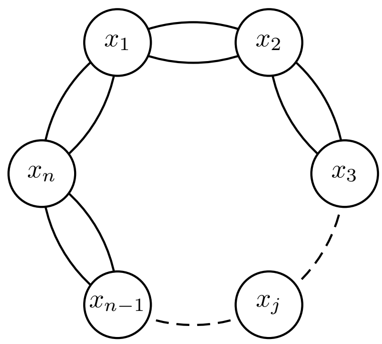
Olimpiadas Internacionales

XXIV Olimpiada Iberoamericana

Este a no, México tuvo el privilegio de organizar la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Ésta se llevó a cabo en la ciudad de Querétaro, del 17 al 27 de septiembre de 2009. México ocupó el 5° lugar de entre los 21 países que participaron. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua), Erik Alejandro Gallegos Baños (Oaxaca), Daniel Perales Anaya (Morelos), y César Bibiano Velasco (Morelos).
Manuel Guillermo obtuvo medalla de oro, Erick Alejandro y Daniel obtuvieron medalla de plata y César mención honorífica.

A continuación presentamos los problemas de la XXIV Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea n un natural mayor que 2. Supongamos que n islas están ubicadas en un círculo y que entre cada dos islas vecinas hay dos puentes como en la figura.



Comenzando en la isla x_1, ¿de cuántas maneras se pueden recorrer los $2n$ puentes pasando por cada puente exactamente una vez?

Problema 2. Para cada entero positivo n se define $a_n = n + m$ donde m es el mayor entero tal que $2^{2^m} \leq n2^n$. Determinar qué enteros positivos no aparecen en la sucesión a_n.

Problema 3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de centros O_1 y O_2 con el mismo radio, que se cortan en A y en B. Sea P un punto sobre el arco AB de $\mathcal{C}_2$ que está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta AP corta a $\mathcal{C}_1$ en C, la recta CB corta a $\mathcal{C}_2$ en D y la bisectriz de $\angle CAD$ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en E y a $\mathcal{C}_2$ en L. Sea F el punto simétrico a D con respecto al punto medio de PE. Demostrar que existe un punto X que satisface $\angle XFL = \angle XDC = 30^\circ$ y $CX = O_1O_2$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro de ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI intersecta por segunda vez al circuncírculo de ABC en el punto J. Demostrar que los circuncírculos de los triángulos JIB y JIC son tangentes a IC y a IB, respectivamente.

Problema 5. La sucesión a_n está definida por:

$$a_1 = 1, \;\; a_{2k} = 1 + a_k \;\text{ y }\; a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}, \;\; \text{para todo entero } \; k \geq 1.$$

Demostrar que todo número racional positivo aparece exactamente una vez en esta sucesión.

Problema 6. Alrededor de una circunferencia se marcan 6000 puntos y cada uno se colorea con uno de 10 colores dados, de manera tal que entre cualesquiera 100 puntos consecutivos siempre figuran los 10 colores. Hallar el menor valor k con la siguiente propiedad: Para toda coloración de este tipo existen k puntos consecutivos entre los cuales figuran los 10 colores.

XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 4 al 10 de octubre de 2009, se celebró en Girardot, Colombia, la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua), Jorge Vargas Garza (Distrito Federal), y Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León).
Jorge y Manuel Enrique obtuvieron medalla de oro, y Diego Alonso medalla de plata. México ocupó el primer lugar de 12 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $P(n)$ el producto de los dígitos no nulos del entero positivo n. Por ejemplo, $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Halle el valor de la suma:

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(2008) + P(2009).$$

Problema 2. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se intersectan en los puntos A y B. Considere una circunferencia Γ contenida en Γ_1 y Γ_2, tangente a ellas respectivamente en D y E. Sean C uno de los puntos de intersección de la recta AB con Γ_1, F la intersección de la recta EC con Γ_2 y G la intersección de la recta DC con Γ_1. Sean H e I los puntos de intersección de la recta ED con Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Demuestre que F, G, H e I están sobre una misma circunferencia.

Problema 3. Se tienen 2009 cajas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Una jugada consiste en seleccionar una caja i que no esté vacía, tomar una o más piedras de esa caja y ponerlas en la caja $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras que se tomen se desechan. El jugador que retire la última piedra (dejando todas las cajas vacías) gana.

1. Suponiendo que inicialmente en la caja 2 hay 2009 piedras y todas las demás cajas $(1, 3, 4, 5, \ldots, 2009)$ están vacías, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

2. Suponiendo que inicialmente cada caja contiene exactamente una piedra, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

Problema 4. Se desea colocar números naturales alrededor de una circunferencia cumpliendo la siguiente propiedad: Las diferencias entre cada par de números vecinos, en valor absoluto, son todas diferentes.

1. ¿Será posible colocar los números del 1 al 2009 satisfaciendo la propiedad?

2. ¿Será posible suprimir alguno de los números del 1 al 2009, de tal manera que los 2008 números restantes se puedan colocar satisfaciendo la propiedad?

Problema 5. Dado ABC un triángulo acutángulo y escaleno, sea H su ortocentro, O su circuncentro, E y F los pies de las alturas trazadas desde B y C, respectivamente. La recta AO corta nuevamente al circuncírculo del triángulo en un punto G y a los segmentos FE y BC en los puntos X y Y, respectivamente. La recta AH corta a la tangente al circuncírculo trazada por G en un punto Z. Demuestre que HX es paralelo a YZ.

Problema 6. Encuentre todos los números primos p y q tales que $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

50ª Olimpiada Internacional

La 50^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 10 al 22 de julio de 2009 en Bremen, Alemania, con la participación de 104 países. México ocupó el lugar número 50. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Flavio Hernández González (Aguascalientes), Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua), Luis Ángel Isaías Castellanos (Colima), César Bibiano Velasco (Morelos), César Ernesto Rodríguez Angón (Distrito Federal) y Erik Alejandro Gallegos Baños (Oaxaca). Los alumnos, Manuel Guillermo, César Bibiano y Erik Alejandro obtuvieron medalla de bronce, y Flavio obtuvo mención honorífica.

A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de la 50^a Olimpiada Internacional. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Hemos incluido en el problema 6 una solución de un exolímpico debido a que es una solución muy elegante.

Problema 1. Sea n un entero positivo y sean $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tales que n divide a $a_i(a_{i+1}-1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demostrar que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Solución. Por hipótesis, para $i = 1, \ldots, k-1$ tenemos que

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n},$$

lo cual implica que

$$a_1 \ldots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \cdots a_{k-1} \equiv a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_1 \pmod{n}.$$

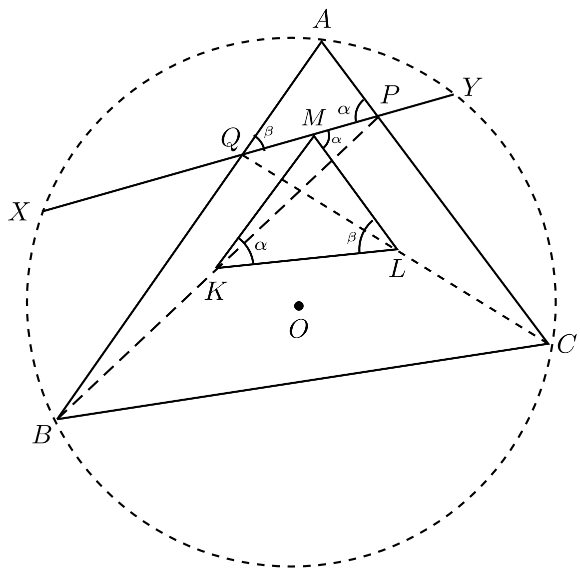
Ahora bien, supongamos que $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$, entonces

$$a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_k a_1 \cdots a_{k-1} \equiv a_k a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}.$$

Luego, $a_1 \equiv a_k \pmod{n}$. Como a_1 y a_k son números del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, entonces $a_1 = a_k$, lo cual es una contradicción.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M. Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ. Demostrar que $OP = OQ$.

Solución de César Bibiano Velasco. Como PQ es tangente a Γ, entonces $\angle MKL = \angle LMP = \alpha$. Como M y L son puntos medios de PQ y QC, respectivamente, tenemos que ML y PC son paralelas y $\angle LMP = \angle APQ = \alpha$. Por lo tanto, $\angle MKL = \angle APQ = \alpha$. Análogamente $\angle AQP = \angle MLK = \beta$.



Entonces los triángulos AQP y MLK son semejantes, luego tenemos que $\frac{AQ}{ML} = \frac{QP}{LK} = \frac{AP}{MK}$, de donde

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{\frac{PC}{2}}{\frac{QB}{2}} = \frac{PC}{QB},$$

dado que $ML = \frac{PC}{2}$, pues M y L son puntos medios y ML es paralela a PC. Entonces,

$$AQ \cdot QB = AP \cdot PC.$$

Sean X y Y los puntos de intersección de PQ con el circuncírculo del triángulo ABC. Por potencia desde Q en $AXYB$, tenemos que $AQ \cdot QB = XQ \cdot QY$. Por potencia desde P en $AYCX$, tenemos que $AP \cdot PC = XP \cdot PY$. Ahora bien, como $AQ \cdot QB = AP \cdot PC$, entonces $XQ \cdot QY = XP \cdot PY$. Si $a = XQ$, $b = QP$ y $c = PY$, entonces

$$\begin{aligned} a(b+c) &= (a+b)c \\ ab+bc &= ac+bc \\ a &= c, \end{aligned}$$

es decir, $XQ = PY$. Pero M es punto medio de PQ, luego M es punto medio de XY, entonces MO es perpendicular a XY, y como $MP = MQ$, entonces $OQ = OP$.

Problema 3. Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsucesiones

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{y} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demostrar que la sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es también una progresión aritmética.

Solución. Sea D la diferencia común de la progresión $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$. Consideremos para $n = 1, 2, \ldots$,

$$d_n = s_{n+1} - s_n.$$

Debemos probar que d_n es constante. Primero probaremos que el número d_n está acotado. De hecho, por hipótesis $d_n \geq 1$ para toda n. Entonces, tenemos que para toda n

$$d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{(n+1)}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D.$$

El hecho de que d_n esté acotado implica que existen

$$m = \min\{d_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

y

$$M = \max\{d_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Basta probar que $m = M$. Supongamos que $m < M$. Escogemos n tal que $d_n = m$. Si consideramos una suma telescópica de $m = d_n = s_{n+1} - s_n$ elementos no mayores que M, obtenemos

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \leq mM,$$

donde la igualdad se da si y sólo si todos los términos de la suma son iguales a M. Ahora, escogemos n tal que $d_n = M$ y consideramos una suma telescópica de M elementos no menores que m, obteniendo

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+M} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+M-1} \geq Mm,$$

donde la igualdad se da si y sólo si todos los términos de la suma son iguales a m. Las desigualdades anteriores implican que $D = Mm$, de donde

$$\begin{aligned} d_{s_n} &= d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{(n+1)}-1} = M \text{ si } d_n = m, \\ d_{s_n} &= d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{(n+1)}-1} = m \text{ si } d_n = M. \end{aligned}$$

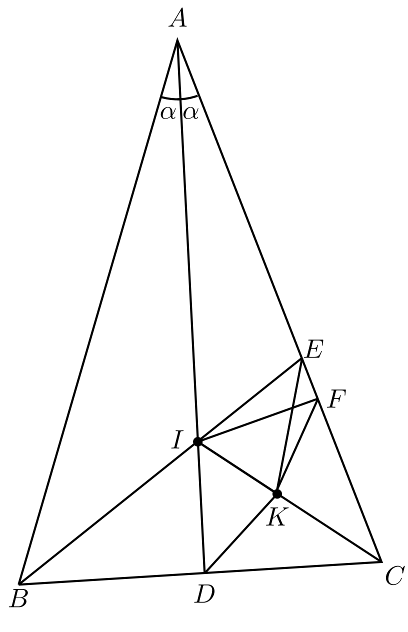
Por lo tanto, $d_n = m$ implica que $d_{s_n} = M$. Observemos que $s_n \geq s_1 + (n-1) \geq n$ para toda n, además $s_n > n$ si $d_n = n$, dado que en el caso en que $s_n = n$ tendríamos $m = d_n = d_{s_n} = M$ en contradicción con el hecho de que supusimos que $m < M$. De la misma manera $d_n = M$ implica que $d_{s_n} = m$ y $s_n > n$. En consecuencia, existe una sucesión estrictamente creciente $n_1, n_2, \ldots$ tal que

$$d_{s_{n_1}} = M, \;\; d_{s_{n_2}} = m, \;\; d_{s_{n_3}} = M, \;\; d_{s_{n_4}} = M, \;\; \ldots$$

La sucesión $d_{s_1}, d_{s_2}, \ldots$ es la sucesión de las diferencias por pares de $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$, que también es una sucesión aritmética. Por lo tanto, $m = M$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC. Supongamos que el ángulo $\angle BEK = 45°$. Determinar todos los posibles valores de $\angle CAB$.

Solución. Veamos que $\angle CAB = 60°$ ó $\angle CAB = 90°$ son posibles valores para el ángulo y que son los únicos posibles valores.
Como KC es bisectriz de $\angle ACD$ e IC es bisectriz de $\angle ACB$, entonces I, K y C son colineales.



Como DK es bisectriz de $\angle ADC = 90°$, entonces $\angle IDK = \angle CDK = 45°$. Sea F el pie de la perpendicular de I sobre AC. Como I equidista de BC y AC, entonces $ID = IF$. Luego, los triángulos IDC e IFC son congruentes (ambos son triángulos rectángulos y tienen dos lados iguales). Entonces FK es bisectriz de $\angle IFC$, de donde $\angle IFK = 45°$, luego $\angle IEK = \angle IFK$, entonces, $IEFK$ es cíclico.
Sea $\angle A = 2\alpha$. Entonces, $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, luego $\angle ABI = \angle DBI = \angle DCI = \angle ACI = 45° - \frac{\alpha}{2}$, de donde $\angle BIC = 90° + \alpha$, y por lo tanto,

$$\angle EIK = 90° - \alpha.$$

Como $\angle BEK = 45°$, tenemos tres posibles casos:

1. Si E está entre F y C, entonces $\angle FIC > \angle EIC$, de donde, $45° + \frac{\alpha}{2} > 90° - \alpha$, es decir, $30° < \alpha$. Como $IFEK$ es cíclico, entonces $\angle EFK = \angle EIK = 45°$, luego $\angle EIK = 45° = 90° - \alpha$, de donde $\alpha = 45°$ y $\angle CAB = 90°$.

2. Si F está entre E y C, entonces $\alpha < 30°$. Como $IFEK$ es cíclico, tenemos que $\angle EIK = 180° - \angle EFK = 45°$, pero $\angle EIK = 90° - \alpha$, luego $\alpha = 45°$, lo cual es una contradicción pues $\alpha < 30°$.

3. Si $F = E$, entonces BI es perpendicular a AC, luego BI es altura y bisectriz, de donde el triángulo ABC es isósceles con $AB = BC$, pero $AB = AC$, luego ABC es equilátero y $\angle CAB = 60°$.

Por lo tanto, $\angle CAB = 60°$ ó $\angle CAB = 90°$.
Ahora bien, si $\angle CAB = 60°$, entonces el triángulo ABC es equilátero. Más aún tenemos que $F = E$, luego $\angle BEK = \angle IFK = 45°$. Por lo tanto, $60°$ es un valor posible para $\angle CAB$. Ahora consideremos el caso en que $\angle CAB = 90°$, entonces $\angle CBA = \angle ACB = 45°$ y $\angle EIK = \angle EFK = 45°$. Luego, $\angle BEK = 45°$. Por lo tanto, también $90°$ es un posible valor para $\angle CAB$.

Problema 5. Determinar todas las funciones f del conjunto de los enteros positivos en el conjunto de los enteros positivos tales que, para todos los enteros positivos a y b, existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden

$$a, \ f(b) \ \text{ y } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es *no degenerado* si sus vértices no están alineados).

Solución. Veamos que la función identidad, $f(x) = x$ es la única función que satisface las condiciones del problema.
Si $f(x) = x$ para todo entero positivo x, entonces las medidas de los tres lados son: x, $y = f(y)$ y $z = f(y + f(x) - 1) = x + y - 1$. Como $x \geq 1$ y $y \geq 1$, tenemos que $z \geq \max\{x, y\} > |x - y|$ y $z < x + y$. Luego, tenemos que existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden, x, y y $x + y - 1$. Ahora bien, veamos que no existe otra función.

1. Demostraremos que $f(1) = 1$. Supongamos que $f(1) = 1 + m > 1$. Considerando el triángulo cuyos lados miden 1, $f(y)$ y $f(y+m)$, tenemos que

$$1 + f(y) > f(y+m) > f(y) - 1,$$

lo cual implica que $f(y+m) = f(y)$. Luego, f es m-periódica y por lo tanto es acotada. Sea B una cota, es decir $f(x) \leq B$ para toda x. Si escogemos $x > 2B$, entonces

$$x > 2B \geq f(y) + f(y + f(x) - 1),$$

lo cual es una contradicción, ya que el triángulo de lados x, $f(y)$ y $f(y+f(x)-1)$ sería degenerado. Por lo tanto, $f(1) = 1$.

2. 2. Demostraremos que para todo entero z tenemos que $f(f(z)) = z$. Tomando el triángulo cuyos lados miden z, $f(1) = 1$ y $f(1 + f(z) - 1) = f(f(z))$, se deduce que $f(f(z)) = z$ para todo z.

3. Demostraremos que para todo entero $z \geq 1$, se cumple que $f(z) \leq z$. Supongamos que existe alguna z tal que $f(z) > z$. Sea $f(z) = w + 1$. Por el Paso 1 sabemos que $w \geq z \geq 2$. Sea $M = \max\{f(1), f(2), \ldots, f(w)\}$ el mayor valor de f para los primeros w enteros. Primero demostraremos que no existe un entero positivo t con

$$f(t) > \frac{z-1}{w} \cdot t + M, \tag{8}$$

de lo contrario descomponemos el menor valor t como $t = wr + s$, donde r es un entero y $1 \leq s \leq w$.
Por reducción al absurdo, supongamos que (8) es válida y tomemos t el mínimo número que cumple (8). Por la definición de M tenemos que $t > w$. Tomando el triángulo con lados z, $f(t-w)$ y $f((t-w) + f(z) - 1)$ tenemos que

$$z + f(t-w) > f((t-w) + f(z) - 1) = f(t).$$

Entonces,

$$f(t-w) \geq f(t) - (z-1) > \frac{z-1}{w}(t-w) + M,$$

en contradicción con que t es el mínimo. Por lo tanto, la desigualdad (8) falla para toda $t \geq 1$, y hemos probado que

$$f(t) \leq \frac{z-1}{w} \cdot t + M. \tag{9}$$

Ahora bien, utilicemos la desigualdad (9) para terminar de demostrar el Paso 3. Como $z \leq w$, tenemos que $\frac{z-1}{w} < 1$ y podemos escoger un entero t suficientemente grande que cumpla la condición

$$\left(\frac{z-1}{w}\right)^2 t + \left(\frac{z-1}{w} + 1\right) M < t.$$

Aplicando dos veces la desigualdad (9) tenemos

$$f(f(t)) \leq \frac{z-1}{w}f(t) + M \leq \frac{z-1}{w}\left(\frac{z-1}{w}t + M\right) + M < t$$

en contradicción con el Paso 2. Por lo tanto, para todo entero $z \geq 1$, tenemos que $f(z) \leq z$.

4. Finalmente, por el Paso 2 y el Paso 3, obtenemos que

$$z = f(f(z)) \leq f(z) \leq z.$$

Por lo tanto, $f(z) = z$ para todo entero positivo z.

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n-1$ enteros positivos que no contiene al número $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Un saltamontes se dispone a saltar a lo largo de la recta real. Empieza en el punto 0 y da n saltos hacia la derecha de longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en algún orden. Demostrar que el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M.

Solución de Pablo Soberón Bravo. La demostración la haremos por inducción fuerte sobre n. Para eso ordenemos los pasos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y los elementos de M, $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1}$. Sea $s' = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Si quitamos a a_n y a b_{n-1} tenemos dos casos.

1. s' no está entre los primeros $n-2$ elementos de M. En este caso por inducción ordenamos los primeros $n-1$ saltos para llegar a s'. Si en algún momento llegamos a b_n cambiamos ese último paso por a_n y luego seguimos de cualquier manera para llegar a s.

2. s' es uno de los primero $n-2$ elementos de M. Si esto sucede, entonces como $s' = s - a_n$ está entre M, entre los $2(n-1)$ números de la forma $s - a_i, s - a_i - a_n$ con $1 \leq i \leq n-1$ hay a lo más $n-2$ en M. Con esto hay un número i tal que $s - a_i$ y $s - a_i - a_n$ no están en M. Notemos que entre $s - a_i - a_n$ y s debe haber al menos 2 números de M, por lo que por inducción podemos usar los otros $n-2$ saltos para llegar a $s - a_i - a_n$, luego usar a_i y luego a_n para llegar a s.

Solución alternativa. Representemos una ruta del saltamontes por la secuencia de índices $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)$, si realizó los saltos consecutivos $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}$. Demostraremos por inducción. Los casos $n = 0, 1$ son triviales. Ahora supongamos que para todos los valores menores que n el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M. Podemos suponer que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$. Sea $d = \min M$.

1. Supongamos que $d < a_n$.

   Si a_n no pertenece a M, entonces por hipótesis de inducción el saltamontes puede saltar de a_n a s, no pasando por los puntos de $M \backslash \{d\}$, utilizando los saltos $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Luego, si ponemos a a_n al inicio de la secuencia de saltos obtendremos la ruta deseada.

Ahora supongamos que a_n pertenece a M. Consideremos n conjuntos ajenos por parejas $\{a_n\}, \{a_1, a_1 + a_n\}, \{a_2, a_2 + a_n\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Uno de ellos no intersecta a M, digamos que es $\{a_i, a_i + a_n\}$. Entonces

$$|M \cap [a_i + a_n, s]| \leq n - 3,$$

pues $d < a_n < a_i + a_n$. Luego, el saltamontes puede saltar de $a_i + a_n$ a s utilizando todos los saltos excepto a_i y a_n. Entonces, poniendo a_i y a_n al inicio de la secuencia de saltos obtendremos la ruta deseada.

2. Supongamos que $d \geq a_n$.

   $M' = M \backslash \{d\}$. Por hipótesis de inducción, el saltamontes puede saltar de a_n a s, sin pasar por los puntos de M', utilizando los saltos $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y la correspndiente secuencia de índices $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1})$. Si la ruta no pasa también por d (en particular, se cumple si $d > a_n$), entonces la secuencia $U = (n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ provee la ruta deseada. De lo contrario, esta ruta contiene exactamente un punto de M (el punto d), y tenemos que $a_n + a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} = d$ para algún $0 \leq k \leq n - 1$.

   En el último caso, consideremos la ruta representada por

   $$(i_1, \ldots i_{k+1}, n, i_{k+2}, \ldots, i_{n-1}).$$

   Como $a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k+1}} < a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} + a_n = d$, el saltamontes no puede caer en los puntos de M durante los primeros $k + 1$ saltos. Por otro lado, durante el resto del recorrido cae en los mismos puntos que en la ruta U (y estos puntos no son menores que $a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k+1}} + a_n > d$), de modo que tampoco caerá en los puntos de M. Por lo tanto, hemos encontrado las rutas deseadas en todos los casos.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para el primer trimestre del año 2010.

Segunda quincena de enero

Envío de material a los estados: primer número de la revista Tzaloa, convocatoria, tríptico y nombramiento de delegado.

Del 21 al 31 de enero de 2010 en Colima, Colima

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento.

Primera quincena de marzo

Envío a los estados del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 4 al 14 de marzo en Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento y del examen de la XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

19 y 20 de marzo

Aplicación, en los estados resgistrados con este propósito, del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 26 al 28 de marzo en Guanajuato, Guanajuato

Curso de entrenadores.

Apéndice

Teorema 1 (Factorización en primos) *Todo entero* n *mayor que* 1 *puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [5, 7].

Criterios 2 (Divisibilidad) *Un número entero es divisible*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *ó* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 7*, si lo es también el número de dos cifras que obtengamos con el siguiente proceso: tomamos el dígito de las unidades y lo duplicamos; el resultado se lo restamos al número original sin el dígito de las unidades; repetimos el proceso hasta obtener un número de dos cifras.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*
- *entre* 10*, si el dígito de las unidades es* 0*.*
- *entre* 11*, si obtenemos* 0 *o un múltiplo de* 11 *con el siguiente proceso: numeramos todos los dígitos del número de izquierda a derecha. Sumamos todos los dígitos que ocupan un lugar par en el número y le restamos la suma de todos los dígitos que ocupan una posición impar en el número.*

Ver [7, 8].

Definición 3 (Módulos) *Dados dos números enteros positivos* n, m *decimos que* $n \equiv r(mod\ m)$ *si el residuo al dividir* n *entre* m *es igual a* r*. Dicho de otra forma,* $\frac{n}{m} = d + \frac{r}{m}$*.*
Ver [8].

Teorema 4 (Pequeño teorema de Fermat) *Si* p *es un número primo, para cualquier número natural* a *tenemos que* $a^p \equiv a\ (mod\ p)$*.*
Ver [5, 7].

Teorema 5 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*
Ver [3].

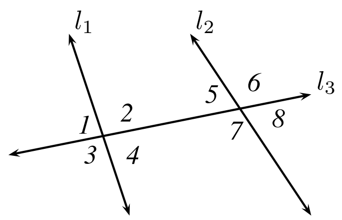
Teorema 6 (Fórmula de Pascal) *Para dos enteros no negativos* n, m *con* $n > m$ *tenemos que*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Ver [4, 6, 9].

Teorema 7 (Fórmulas de área) *El área de un rectángulo de lados* a *y* b *es* $a \times b$*.*
El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$*, donde* l *es la medida de un lado y* h *es la medida de la altura sobre dicho lado.*
El área de un círculo de radio r *es igual a* πr^2*.*
Ver [1, 2].

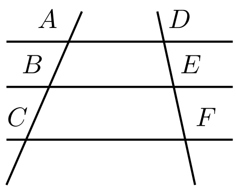
Definición 8 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del* 1 *al* 8*, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 *intersecta a las rectas* l_1 *y* l_2*, decimos que es* **transversal** *a ellas. Los ángulos* 2*,* 4*,* 5 *y* 7 *están entre las rectas* l_1 *y* l_2*, los llamamos* **ángulos internos***, los ángulos restantes los llamamos* **ángulos externos***. Los ángulos en lados opuestos por la transversal* l_3 *se llaman* **ángulos alternos***, como por ejemplo* 3 *y* 5*. A los ángulos* 4 *y* 5 *les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos* 3 *y* 6 *son* **alternos externos***.*
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 *y* 7 *los llamamos* **ángulos correspondientes***. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son* 3 *y* 7*,* 1 *y* 5*,* 4 *y* 8*,* 2 *y* 6*.*

Si l_1 y l_2 son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.
Ver [2].

Teorema 9 (Teorema de Thales) *Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.*



Ver [1, 2].

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.
Ver [1, 2].

Teorema 11 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 2] y el artículo de este número.

Lema 12 (Segmento entre puntos medios) *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de tal tercer lado.*
Ver [1, 2].

Definición 13 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*
Ver [1, 2].

Criterio 14 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **ángulo-lado-ángulo** *y lo denotamos como* **ALA**.
Ver [1, 2].

Criterio 15 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL**.
Ver [1, 2].

Definición 16 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

Criterio 17 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Definición 18 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. Equivalentemente, la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ es la recta que equidista de AB y BC.*
Ver [1, 2].

Teorema 19 (Bisectrices) *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama el incentro.*
Ver [1, 2].

Teorema 20 (Ley de los cosenos) *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.
Ver [2].

Teorema 21 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

Definición 22 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si existe un círculo que pase por lo cuatro vértices.*
Ver [2].

Teorema 23 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [2].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[6] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[7] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[8] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[9] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Laura Soledad Casillas Serna*

CECYTEA, Plantel Morelos
Área de Matemáticas y Física de Ingeniería
Chichen-Itzá s/n, Cd. Satélite Morelos
Rincón 505, Colonia Guadalupe
C.P. 20059, Aguascalientes, Aguascalientes
Cel. (449) 414 13 85
lscasillass@yahoo.com.mx
www.ommags.com

Baja California–*Carlos Yee Romero*

Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ciencias
Km. 103 Carretera de Tijuana-Ensenada
Unidad Universitaria
C.P. 22860, Ensenada, Baja California
Tel. (646) 1 74 59 25, ext. 116
Fax (646) 1 74 45 60
cyeer@uabc.mx

Baja California Sur–*Edgar Netzahualcóyotl Soriano Arellano*

Instituto Mar de Cortés
Desierto de Sonora esquina Prolongación Francisco J. Mújica
Fracc. Villas de San Lorenzo
C.P. 23000, La Paz, Baja California Sur
Tel. y Fax (612) 123 22 02
netza_soriano@hotmail.com
direccion@institutomardecortes.edu.mx

Campeche–*Juan Jesús Moncada Bolón*

Universidad Autónoma de Campeche
Facultad de Ingeniería
Av Agustín Melgar s/n entre Juan de la Barrera y Calle 20
Col. Lindavista, CP 24030
San Francisco de Campeche, Campeche
Tel. (981) 811 98 00 ext 70000
Cel. (981) 117 52 07
jjmb72@gmail.com

Chiapas–*María del Rosario Soler Zapata*

Universidad Autónoma de Chiapas
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas
Calle 4^a Oriente 1428, entre 13^a y 14^a Norte
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
Tel. (961) 6 18 30 21
msolerza@unach.mx

Chihuahua–*David Cossío Ruiz*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Instituto de Ingeniería y Tecnología
Departamento de Física y Matemáticas
Av. del Charro 450 Nte
C.P. 32310, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 6 88 48 87
Fax (656) 6 88 48 13
sirio11@gmail.com
http://ommch.blogspot.com

Coahuila–*Silvia Carmen Morelos Escobar*

Universidad Autónoma de Coahuila
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Edif. D, Unidad Camporredondo
C.P. 25000, Saltillo, Coahuila
Tel. (844) 414 47 39, 414 88 69 y 411 82 57
Fax (844) 411 82 57
Tel. casa (844) 431 34 85 y Tel. cel. (844) 437 72 19
smorelos@mate.uadec.mx
silvia.morelos@gmail.com

Colima–*Ing. Martín Eliseo Isaías Ramírez*

Universidad de Colima, Facultad de Ciencias
Bernal Díaz del Castillo 340
Col. Villa San Sebastián
C.P. 28045, Colima, Colima
Tel. (312) 31 610 00, ext. 47058
http://ommcolima.ucol.mx
ommcol@ucol.mx
martin_isaias@ucol.mx

Distrito Federal–*Alejandro Bravo Mojica*

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, cubículo 230
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
C.P. 04510, México D.F
Tel. (55) 56 22 38 99 # 45747
Fax (55) 56 22 54 10
abm@hp.fciencias.unam.mx

Durango–*Armando Mata Romero*

Universidad Juárez del Estado de Durango
Escuela de Matemáticas
Av. Veterinaria 210, Col. Valle del Sur
C.P. 34120, Durango, Durango
Tel. y Fax (618) 1 30 11 39
angel_hiram@hotmail.com

Guanajuato–*Dr. Manuel Cruz López*

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n Valenciana Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 1 02 61 02 ext. 1203
direc.demat@quijote.ugto.mx

Guerrero–*Gonzalo Delgado Espinoza*

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Calle Carlos E. Adame 54, Col. Garita
C.P. 39650, Acapulco, Guerrero
Tel. y Fax: (744) 4 87 25 00
Tel. cel. (744) 4 30 92 54
deg_gonzalo@yahoo.com.mx

Hidalgo–*Anna Tarasenko*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Edif. Centro de Investigación en Matemáticas, Instituto de Ciencias Básicas
Carretera Pachuca Tulancingo km. 4.5
C.P. 42074, Mineral de la Reforma, Hidalgo
Tel. (771) 7 17 21 58
Fax (771) 7 17 21 58
anataras@uaeh.edu.mx

Jalisco–*María Eugenia Guzmán Flores*

Universidad de Guadalajara
Centro Univ. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas
Av. Revolución 1500, Edificio V, planta baja
C.P. 44420, Guadalajara, Jalisco
Tel. y Fax (33) 13 78 59 00 ext. 7753
floresguz55@yahoo.com.mx

Estado de México–*Olga Rivera Bobadilla*

Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias
Instituto Literario No. 100, Col. Centro
C.P. 50000, Toluca, Estado de M”exico
Tel. (722) 2 96 55 56
Fax (722) 2 96 55 54
orb@uaemex.mx
matematicas_olimpiada@yahoo.com.mx

Michoacán–*Armando Sepúlveda López*

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Departamento de Matematica Educativa
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Ciudad Universitaria
C.P. 58060, Morelia, Michoacán
Tel. (443) 3 26 21 46, ext. 130 y (443) 3 22 35 00, ext. 3063
asepulve@umich.mx

Morelos–*Larissa Sbitneva*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Facultad de Ciencias
Av. Universidad 1001, Col. Chamilpa
C.P. 62209, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
larissa@uaem.mx

Nayarit–*Francisco Javier Jara Ulloa*

Universidad Autónoma de Nayarit
Secretaría de educación media y superior
Cd. de la cultura, Amado Nervo
C.P. 63157, Tepic, Nayarit
Tel. (311) 2 11 88 00 ext. 8809
jaraulloa@gmail.com

Nuevo León–*Alfredo Alanís Durán*

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Del Colegio 1077
Col. Valle de las Flores
C.P. 66450, San Nicolás, Nuevo León
Tel. (81) 83 29 40 30, ext. 6130 y (81) 83 13 16 26
Fax (81) 83 52 29 54
aalanis56@hotmail.com

Oaxaca–*Sara Carrillo Uribe*

Academia de Matemáticas, Escuela de Ciencias
Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca
Ciudad Universitaria, Av. Universidad s/n
Ex Hacienda de 5 Seores, CP 68120, Oaxaca, Oaxaca
Tel. y Fax (951) 1 44 80 56
mushe_wini@hotmail.com

Puebla–*María Araceli Juárez Ramírez*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
San Claudio y Río Verde, Ciudad Universitaria
C.P. 72570, Puebla, Puebla
Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578
Fax (222) 2 29 56 36
arjuarez@fcfm.buap.mx

Querétaro–*Teresa de Jesús Valerio*

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería
Cerro de las Campanas s/n
Centro Universitario
C.P. 76010, Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 00, ext. 6015
valeriotere@gmail.com
teresa.valerio@webtelmex.net.mx

Quintana Roo–*Alicia Ramón Barrios*

Colegio de Bachilleres
Planteles Cancún 2 y Colegio Británico
Región 236, Manzana 24, Lote 5
C.P. 77500, Cancún, Quintana Roo
Tel. (998) 1 74 01 56
Fax (998) 8 88 72 04 y (998) 8 84 12 95
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com
tita1970@hotmail.com

San Luis Potosí–*Eugenio Daniel Flores Alatorre*

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Instituto de Física
Av. Salvador Nava 6, Zona Universitaria
C.P 78290, San Luis Potosí, San Luis Potosí
Tel. (444) 8 26 23 62 al 65
Fax (444) 8 13 38 74
floreseugenio@hotmail.com

Sinaloa–*Nicolás Pardo Viera*

Universidad Autónoma de Sinaloa
Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas
Ciudad Universitaria
C.P. 80010, Culiacán, Sinaloa
Tel. y Fax (667) 7 16 11 54
pardo@uas.uasnet.mx

Sonora–*Misael Avendao Camacho*

Universidad de Sonora
Departamento de Matemáticas
Av. Rosales y Boulevard Domínguez s/n, Col. Centro
C.P. 83000, Hermosillo, Sonora
Tel. (662) 2 59 21 55
Fax (662) 2 59 22 19
misaelave@mat.uson.mx

Tabasco–*Antonio Guzmán Martínez*

División Académica de Ciencias Básicas
Unidad Chontalpa
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
Km. 1 Carretera Cunduacán, Jalpa de Méndez
C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco
Tel. y Fax (914) 3 36 09 28 y (914) 3 36 03 00
antonio.guzman@dacb.ujat.mx
antonioguzman@hotmail.com

Tamaulipas–*Ramón Jardiel Llanos Portales*

Universidad Autónoma de Tamaulipas
Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades
Centro Universitario Victoria
Cd. Victoria, Tamaulipas
Tel. (834) 3 18 17 23
rllanos@uat.edu.mx
rjardiel5@hotmail.com

Tlaxcala–*José Erasmo Pérez Vázquez*

Universidad Autónoma de Tlaxcala
Facultad de Ciencias Básicas
Calzada a Apizaquito Km 1.5
Apartado Postal 140
C.P. 90300, Apizaco, Tlaxcala
Tel. (241) 4 17 25 44
Fax (241) 4 17 25 44 y (241) 4 17 58 44
joserasmo25@gmail.com

Veracruz–*Raquiel Rufino López Martínez*

Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n, Lomas del Estadio
Zona Universitaria, Col. Centro
Apartado Postal 270
C.P. 91090, Xalapa, Veracruz
Tel. (228) 8 18 24 53 y (228) 8 42 17 45
Fax (228) 8 18 24 53
ralopez@uv.mx
raquiel1971@yahoo.com.mx

Yucatán–*Didier Adán Solís Gamboa*

Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas
Periférico Norte Tablaje 13615
Parque industrial, junto al local del FUTV
C.P. 97110, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 9 42 31 47, ext 1102
Fax (999) 9 42 31 40
didier.solis@uady.mx
ommyuc@tunku.uady.mx

Zacatecas–*Nancy Janeth Calvillo Guevara*

Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Matemáticas
Camino a la Bufa s/n, intersección con Calzada Solidaridad
C.P. 98068, Zacatecas, Zacatecas
Tel. (492) 922 99 75 ext. 31 y (492) 923 94 07 ext. 1703
ncalvill@mate.reduaz.mx
matematicas.reduaz.mx

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Gerardo Arizmendi Echegaray
Centro de Investigación en Matemáticas
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valenciana
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
gerardo@cimat.mx

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
marcant@cimat.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa Primera Sec, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`