# Problemas para la $\mathbf{20^a}$
# Olimpiada Mexicana de Matemáticas

(Problemas Avanzados)

**Edición: Carlos Jacob Rubio Barrios**
**Revisión: Gabriela Campero Arena**

**2006**

**Carlos Jacob Rubio Barrios**

Delegado de la Olimpiada de Matemáticas en Yucatán.
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.

**Gabriela Campero Arena**

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

# Contenido

# Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la $20^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores del certamen formarán las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2007: la XIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico que se llevará a cabo en el mes de marzo en México y los exámenes se corregirán en Corea; la $48^{a}$ Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en Vietnam durante el mes de julio, la XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre en Portugal y la IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se celebrará en alguno de los países participantes en el mes de julio.

En la $20^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del $1^{\text{o}}$ de agosto de 1987. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2006-2007 y, para el $1^{\text{o}}$ de julio de 2007, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

La intención de esta publicación es que sirva como guía para los alumnos que desean prepararse para el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela, son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con compañeros y profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que requiere de una mayor madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución al correo electrónico

bulajich@servm.fc.uaem.mx . Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.
Este folleto incluye problemas de las olimpiadas estatales de matemáticas de Distrito Federal, Morelos, Puebla, Querétaro y San Luis Potosí. También incluye problemas del Encuentro Interestatal de la Zona Centro 2005 (en el que participaron Distrito Federal, Estado de México, Hidalgo, Morelos, Puebla y Tlaxcala) y de la Olimpiada Regional del Noreste 2005 (en la que participaron Coahuila y Nuevo León). Finalmente, incluye problemas de la etapa final de los Concursos Estatales del año 2005 y del examen eliminatorio propuesto por el Comité Nacional 2005.

## Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

**Exámenes Estatales.** En cada estado hay un delegado que organiza esta etapa y de ella surgen las selecciones estatales que asisten al Concurso Nacional.

**Concurso Nacional.** Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, del 12 al 18 de noviembre de 2006. En él, se elegirá a la preselección mexicana.

**Entrenamientos.** A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2007. También, se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

# Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal y Campeche.

## Resultados de México en las Internacionales

Los resultados de las delegaciones mexicanas en las olimpiadas internacionales en las que se ha participado son los siguientes:

**Olimpiada Internacional de Matemáticas**

| *año* | *país sede* | *no. de países* | *lugar de México* |
|---|---|---|---|
| 1988 | Australia | 49 | 37 |
| 1989 | Rep. Fed. de Alemania | 50 | 31 |
| 1990 | Rep. Popular de China | 54 | 36 |
| 1991 | Suecia | 55 | 35 |
| 1992 | Rusia | 56 | 49 |
| 1993 | Turquía | 73 | 63 |
| 1994 | Hong Kong | 69 | 65 |
| 1995 | Canadá | 74 | 59 |
| 1996 | India | 75 | 53 |
| 1997 | Argentina | 82 | 32 |
| 1998 | Taiwán | 75 | 44 |
| 1999 | Rumania | 81 | 52 |
| 2000 | Corea | 82 | 30 |
| 2001 | Estados Unidos | 83 | 46 |
| 2002 | Escocia | 84 | 46 |
| 2003 | Japón | 82 | 41 |
| 2004 | Grecia | 84 | 37 |
| 2005 | México | 91 | 31 |

La $46^{\text{a}}$ Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Mérida, México, del 6 al 19 de julio de 2005. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Guevara Manuel Ángel Guevara López (Zacatecas), David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato), Pablo Soberón Bravo

(Morelos), Iván Joshua Hernández Maynez (Coahuila). Se obtuvieron 4 medallas de bronce (Isaac, Guevara Manuel Ángel, Iván Joshua y Pablo) y dos menciones honoríficas (Hector Daniel y David Guadalupe). México ocupó el lugar 31 de 91 países participantes.

**Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas**

| *año* | *país sede* | *no. de países* | *lugar de México* |
|---|---|---|---|
| 1989 | Cuba | 13 | 3 |
| 1990 | España | 15 | 3 |
| 1991 | Argentina | 16 | 5 |
| 1992 | Venezuela | 16 | 6 |
| 1993 | México | 16 | 9 |
| 1994 | Brasil | 16 | 6 |
| 1995 | Chile | 18 | 9 |
| 1996 | Costa Rica | 17 | 2 |
| 1997 | México | 17 | 3 |
| 1998 | República Dominicana | 18 | 5 |
| 1999 | Cuba | 20 | 3 |
| 2000 | Venezuela | 21 | 2 |
| 2001 | Uruguay | 21 | 3 |
| 2002 | El Salvador | 22 | 3 |
| 2003 | Argentina | 19 | 4 |
| 2004 | España | 22 | 5 |
| 2005 | Colombia | 22 | 2 |

La XX Olimpiada Iberoamericana se llevó a cabo en Cartagena, Colombia, del 25 de septiembre al $1^{\circ}$ octubre de 2005. Los alumnos que concursaron fueron: Héctor David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato), Guevara Manuel Ángel Guevara López (Zacatecas), Pablo Soberón Bravo (Morelos), Iván Joshua Hernández Maynez (Coahuila). Se obtuvieron dos medallas de oro (Guevara Manuel Ángel con un examen perfecto e Iván Joshua), una de plata (Pablo) y una de bronce (David Guadalupe). México ocupó el segundo lugar de 22 países que participaron.

## Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

| *año* | *país sede* | *no. de países* | *lugar de México* |
|---|---|---|---|
| 1999 | Costa Rica | 10 | 2 |
| 2000 | El Salvador | 9 | 2 |
| 2001 | Colombia | 10 | 2 |
| 2002 | México | 8 | 1 |
| 2003 | Costa Rica | 11 | 1 |
| 2004 | Nicaragua | 12 | 1 |
| 2005 | El Salvador | 12 | 1 |

Entre el 7 y el 11 de junio, se celebró en El Salvador, la VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Jan Marte Contreras Ortiz, Isaac Buenrostro Morales y Paúl Iván Gallegos Bernal (todos ellos de Jalisco). Los alumnos (Isaac y Paúl Iván) obtuvieron 2 medallas de oro y (Jan Marte) una medalla de plata. México ocupó la posición número 1 de 12 países participantes.

## Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico. No existe un registro estadístico sobre la participación de México antes del 2004.

| *año* | *país organizador* | *no. de países* | *lugar de México* |
|---|---|---|---|
| 2004 | Canadá | 19 | 9 |
| 2005 | Corea | 19 | 13 |

Durante el mes de marzo de 2005 se aplicó el examen de la XVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico a todos los alumnos que en ese momento se encontraban en los entrenamientos. Dicho examen llega por correo, y se aplica y califica en México. Los mejores exámenes se enviaron a Corea, país organizador, para ser evaluados por el comité coreano. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Pablo Soberón Bravo (Morelos, medalla de plata), Héctor Daniel García Lara (Chihuahua, medalla de bronce). Los alumnos que mencionamos a continuación obtuvieron mención honorífica: Paul Iván Gallegos Bernal (Jalisco), Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Guevara Manuel Ángel Guevara López (Zacatecas), Galo Higuera Rojo (Morelos), Iván Joshua Hernández Maynez (Coahuila), Andrés Ruíz Vargas (Yucatán), Mario Alejandro Huicochea Mason (Distrito Federal) y Francisco Javier Ibarra Goycoolea (Baja California). México ocupó el lugar número 13 de los 19 países participantes.

**Total de medallas obtenidas por México en las olimpiadas internacionales**

| *Olimpiada* | *Oro* | *Plata* | *Bronce* | *Mención Honorífica* |
|---|---|---|---|---|
| Internacional | 0 | 3 | 28 | 20 |
| Iberoamericana | 13 | 25 | 23 | 3 |
| Centroamericana | 12 | 7 | 2 | 0 |

## Resultados del Concurso Nacional de la $19^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 6 al 12 de noviembre de 2005 se llevó a cabo en Campeche, Campeche, el Concurso Nacional de la $19^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Ramírez Prado Juan Carlos (Baja California)
Ruelas Vázquez Juan Carlos (Chihuahua)
Hernández Máynez Iván Joshua (Coahuila)
Campos García Fernando (Distrito Federal)
Torres Flores David Guadalupe (Guanajuato)
Buenrostro Morales Isaac (Jalisco)
Contreras Ortiz Jan Marte (Jalisco)
Pacchiano Camacho Aldo (Morelos)
Soberón Bravo Pablo (Morelos)
Escalera Rodríguez Jesús Aarón (Nuevo León)
Sierra González Daniel Alfonso (Nuevo León)
Ramírez García Luna Valente (San Luis Potosí)
Bueno Contreras José Jorge (Sonora)
Rivera Arredondo Carolina (Sonora)
Ávila Ponce de León Marco Antonio (Yucatán)
Guevara López Manuel Ángel Guevara (Zacatecas).

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Gallegos Bernal Paul Iván (Jalisco)
Ríos Ferrusca José Daniel (Querétaro)
Gómez Emilsson Andrés Leonardo (Distrito Federal)
Novelo Puc Manuel Jesús (Yucatán)
Mendoza Orozco Rodrigo (Jalisco).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros diez lugares en la $19^a$ Olimpiada Nacional.

1. Jalisco
2. Morelos
3. Yucatán
4. Chihuahua
5. Guanajuato
6. San Luis Potosí
7. Nuevo León
8. Sonora
9. Distrito Federal
10. Querétaro

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "AH-KIM-PECH"y fue ganado por el estado de Yucatán. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, San Luis Potosí y Morelos.

## Agradecimientos

Agradecemos a todos los estados que colaboraron con los problemas que aparecen en este folleto. Igualmente queremos agradecer a Radmila Bulajich quien elaboró todas las figuras.

## Información sobre la Olimpiada

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visite nuestro sitio de internet:

http://erdos.fciencias.unam.mx/omm

**Comité Organizador de la**
**Olimpiada Mexicana de Matemáticas**

Enero de 2006

# Capítulo 1

# Enunciados de los Problemas

## 1.1. Problemas de Práctica

**Problema 1.** Determina todos los enteros positivos $n$ para los cuales existen $n$ enteros positivos consecutivos cuya suma es un número primo.

**Problema 2.** Decimos que un entero positivo $n$ es *creciente* si al leerlo de derecha a izquierda se obtiene un entero mayor que $n$. ¿Cuántos enteros positivos de cuatro dígitos son crecientes?

**Problema 3.** Un entero positivo $a > 1$ está dado (en notación decimal). Al copiar dos veces seguidas los dígitos de $a$ obtenemos el número $b$ el cual resulta ser múltiplo de $a^2$. Determina todos los valores posibles del cociente $\frac{b}{a^2}$.

**Problema 4.** En el triángulo $ABC$ la bisectriz del ángulo $A$, la perpendicular a $AB$ que pasa por su punto medio, y la altura desde el vértice $B$, se intersectan en el mismo punto. Prueba que la bisectriz del ángulo $A$, la perpendicular a $AC$ que pasa por su punto medio, y la altura desde el vértice $C$, se intersectan en un mismo punto.

**Problema 5.** ¿Es posible pintar cada lado y cada diagonal de un dodecágono regular usando 12 colores, de tal manera que para cualesquiera 3 colores exista un triángulo con vértices del polígono de lados pintados con los tres colores?

**Problema 6.** Determina todas las parejas de enteros positivos $(a, b)$ tales que $a - b$ es un número primo y $ab$ es un cuadrado perfecto.

**Problema 7.** Sea $n$ un entero positivo. Prueba que se pueden elegir al menos $2^{n-1} + n$ números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ de tal manera que para cualesquiera dos números distintos elegidos $x, y$, el número $x + y$ no divide a $xy$.

**Problema 8.** Cada casilla de un tablero de $100 \times 100$ se pinta con uno de cuatro colores de tal manera que hay exactamente 25 casillas de cada color en cada columna y en cada renglón. Demuestra que hay dos columnas y dos renglones que se intersectan en cuatro casillas pintadas de distinto color.

**Problema 9.** En el triángulo rectángulo $ABC$ con ángulo recto en $A$, sean $D$ y $E$ puntos en los lados $AC$ y $BC$ respectivamente, tales que $AE$ y $BC$ son perpendiculares, y $BD = DC = EC = 1$. Determina la longitud del lado $AC$.

**Problema 10.** Un programa de computadora genera una sucesión de 2005 números, de acuerdo con la siguiente regla: el primer número es 1, y a partir de allí, luego de generar el número $x$, el siguiente número es igual a $x + \frac{1}{[x]}$. Los primeros números de la sucesión son $1, 2, \frac{5}{2}, 3, \ldots$. Determina el último número que genera el programa. (Nota: Los corchetes indican la parte entera del número).

**Problema 11.** Determina todos los enteros positivos $a$ y $b$ tales que $8a + 1$ es múltiplo de $b$ y $8b + 1$ es múltiplo de $a$.

**Problema 12.** En el cuadrado $ABCD$ cuyos lados miden 6, sea $M$ el punto medio del lado $AD$ y $N$ el punto medio del lado $AB$. La diagonal $BD$ corta a $CN$ en $K$ y a $CM$ en $L$. Determina el área del cuadrilátero $KLMN$.

**Problema 13.** Sean $l_1$ y $l_2$ dos rectas paralelas. Se han marcado $k$ puntos en la recta $l_1$ y $n$ puntos en la recta $l_2$ $(k \geq n)$. Si se sabe que la cantidad total de triángulos que tienen sus tres vértices en puntos marcados es 220, determina todos los valores posibles de $k$ y $n$.

**Problema 14.** Determina el menor entero positivo $n \geq 2$, de modo que con $n$ piezas cuadradas de lado 1, $n - 1$ piezas cuadradas de lado 2, $n - 2$ piezas cuadradas de lado 3, ..., 2 piezas cuadradas de lado $n - 1$, y una pieza cuadrada de lado $n$, se pueda armar un rompecabezas cuadrado, sin huecos ni superposiciones, y sin que sobre ninguna pieza. Para el valor de $n$ hallado, muestra cómo se arma el rompecabezas.

**Problema 15.** El triángulo $ABC$ está inscrito en un círculo. Dos cuerdas se dibujan desde el vértice $A$, intersectando al lado $BC$ y al arco $BC$ en los puntos $K, L$ y $M, N$ respectivamente. Prueba que si el cuadrilátero $KLNM$ es cíclico, entonces el triángulo $ABC$ es isósceles.

**Problema 16.** Sea $n$ un entero positivo tal que $2^n + 2$ es múltiplo de $n$ y $2^n + 1$ es múltiplo de $n - 1$. Prueba que $2^{2^n+2} + 2$ es múltiplo de $2^n + 2$ y que $2^{2^n+2} + 1$ es múltiplo de $2^n + 1$.

**Problema 17.** ¿Es posible llenar una cuadrícula de $11 \times 11$ con los números del 1 al 121 de tal manera que todos los cuadrados perfectos estén en la misma columna, y que cualesquiera dos números consecutivos estén en cuadritos adyacentes?

**Problema 18.** Determina todos los números primos $p, q$ y $r$, tales que $p+q+r = 2005$ y $pqr + 1$ es un cuadrado perfecto.

**Problema 19.** Sean $E$ y $F$ los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita del triángulo $ABC$ con los lados $AB$ y $BC$, respectivamente. La bisectriz del ángulo $CAB$ intersecta a la recta $EF$ en $K$. Prueba que el ángulo $CKA$ es recto.

**Problema 20.** Se divide un triángulo equilátero de lado $n$ en $n^2$ triangulitos equiláteros de lado 1, mediante paralelas a los lados del triángulo. Se elige un paralelogramo con sus cuatro vértices en vértices de triangulitos y sus cuatro lados paralelos a los lados del triángulo. ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección del paralelogramo?

**Problema 21.** Muestra que en todo entero positivo de 16 dígitos, hay un bloque de uno o más dígitos consecutivos tal que el producto de estos dígitos es un cuadrado perfecto.

**Problema 22.** Sea $ABCDE$ un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean $P$, $Q$, $R$ y $S$ los baricentros de los triángulos $ABE$, $BCE$, $CDE$ y $DAE$ respectivamente. Prueba que $PQRS$ es un paralelogramo y que:

$$\text{Área}(PQRS) = \frac{2}{9} \cdot \text{Área}(ABCD).$$

**Problema 23.** Si se sabe que:

$$34! = 295,232,799,cd9,604,140,847,618,609,643,5ab,000,000,$$

determina los dígitos $a, b, c$ y $d$.

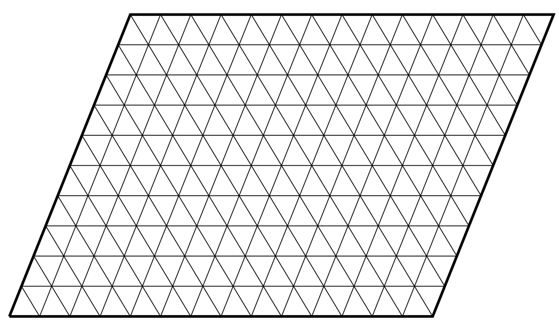
**Problema 24.** Dos circunferencias tangentes internamente se tocan en el punto $M$. Una recta es tangente a la circunferencia interior en el punto $P$ y corta a la circunferencia exterior en los puntos $Q$ y $R$. Prueba que $\angle QMP = \angle RMP$.

**Problema 25.** Se tienen suficientes cuadrados de papel de $1 \times 1$ en los que cada lado se ha pintado de uno de 4 colores (cada cuadrado tiene los 4 colores). Se quiere formar con estos cuadrados un rectángulo de $m \times n$, pegando sólo lados del mismo color de tal manera que también en el rectángulo cada lado quede de un solo color y los cuatro lados del rectángulo queden de distinto color. ¿Para qué $m$ y $n$ es esto posible?

**Problema 26.** Prueba que todo entero es suma de cinco cubos.

**Problema 27.** Prueba que si se tienen 6 puntos en el plano de manera que 8 de las distancias entre ellos son iguales, entonces hay 4 de estos puntos que forman un paralelogramo.

**Problema 28.** Considera el siguiente tablero hecho con triángulos equiláteros.



Determina si es posible llenar dicho tablero con piezas hechas con triángulos equiláteros de las siguientes formas:

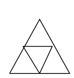


Figura 1

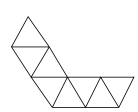


Figura 2

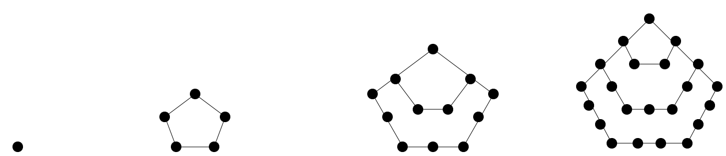
**Problema 29.** Considera un cuadrilátero cíclico $ABCD$. La prolongación de $BA$ más allá de $A$ se corta con la prolongación de $DC$ en un punto $P$ y las diagonales $AC$ y $BD$ se cortan en $Q$. Se sabe que $BQ = BC = CP$. Prueba que $\angle BAC = 60°$.

**Problema 30.** ¿Para qué valores de $k$ el número:

$$[2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k-2) \times 2k] + [1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-3) \times (2k-1)]$$

es divisible entre $(2k+1)$?

**Problema 31.** Los números pentagonales $V_1 = 1$, $V_2 = 5$, $V_3 = 12$, $V_4 = 22, \ldots$, se introducen mediante la siguiente sucesión de figuras:



Para cada entero positivo $n$, se define $f(n) = V_n$ (por ejemplo, $f(2) = V_2 = 5$). Prueba que el número $24 \cdot f(V_n)$ es producto de cuatro enteros consecutivos para cualquier entero positivo $n$.

**Problema 32.** Sea $ABCD$ un rectángulo. Sobre el lado $AB$ se toma un punto $P$ tal que $AP = AD$, y sobre el lado $AD$ se toma un punto $Q$ tal que $AQ = AB$. Si $BD = 6$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $APCQ$?

**Problema 33.** Una persona elige un número de tres dígitos y anota los residuos de las siguientes divisiones: la división de dicho número entre el número formado por sus dos últimos dígitos y la división del número formado por los dos últimos dígitos del número elegido entre su dígito de la derecha. (Si eligió, por ejemplo, el número 479 calculó $\frac{479}{79}$ y $\frac{79}{9}$ obteniendo 5 y 7 como residuos, respectivamente). ¿Qué número eligió la persona, si los residuos que obtuvo fueron, en ese orden, 1 y 5? Obtén todas las respuestas posibles.

**Problema 34.** Cada uno de los lados de un pentágnono convexo se divide en siete partes. ¿Cuántos triángulos se pueden construir usando tres de estos puntos de división como vértices?

**Problema 35.** Un cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia de radio 12. Sea $P$ el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$. Si $AB = BD$, $AC = 24$ y $CP = 6$, obtén la distancia de $AD$ al centro de dicha circunferencia.

**Problema 36.** Sea $n$ un entero positivo. ¿De cuántas formas es posible escribir $n$ como suma de enteros positivos: $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ con $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_p \leq 1 + a_1$? (Por ejemplo, si $n = 4$, existen 4 formas: $4, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1$.

**Problema 37.** Sea $n$ un entero positivo mayor que 1. Encuentra el mínimo valor de $n$ para el cual se tiene que el promedio de los números $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ es un cuadrado perfecto.

**Problema 38.** Una circunferencia de centro $I$, está inscrita en el cuadrilátero $ABCD$. Las perpendiculares a los lados $AB$ y $AD$, que pasan por $A$, cortan a $BI$ y $DI$ en $M$ y $N$, respectivamente. Demuestra que $MN$ es perpendicular a $AC$.

**Problema 39.** Dado un subconjunto $A$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, llamamos suma de $A$ a la suma de los elementos de $A$ (por ejemplo, si $A = \{1, 4, 8\}$, entonces la suma de $A$ es $13$ y si $A = \{9\}$, entonces su suma es $9$). El conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ quiere partirse en 12 subconjuntos (ajenos y no vacíos) con la misma suma. Determina el menor $n$ para el cual esto es posible.

**Problema 40.** Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos círculos con centros en $O$ y $O'$, respectivamente, y tales que se intersectan en dos puntos distintos $P$ y $Q$. Sea $\mathcal{L}$ una recta por $P$ que intersecta a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ en dos puntos $B$ y $B'$, respectivamente. Sea $A$ el circuncentro de $BB'Q$. Prueba que $A$ está en el circuncírculo de $O$, $O'$ y $Q$.

**Problema 41.** Hay 25 tarjetas numeradas del 1 al 25 sobre la mesa formando una fila de izquierda a derecha (en orden). Se van a revolver como sigue: Se toma primero la carta que está más a la derecha, luego la que está más a la izquierda, y luego la que quedó más a la derecha, y luego a la izquierda y así sucesivamente. Se colocan otra vez en fila de izquierda a derecha. Esto se repite varias veces. (Por ejemplo, al finalizar el primer paso, el orden en que quedan las cartas es $25, 1, 24, 2, 23, 3, \ldots, 14, 12, 13$, y al finalizar el segundo paso, quedan en el orden $13, 25, 12, 1, 14, 24, \ldots$.) Prueba que debe llegar un momento en que todas las cartas estén al mismo tiempo exactamente en el orden en que empezaron (el $1, 2, 3, 4, \ldots, 24, 25$) y encuentra el menor número de pasos en que esto ocurre.

**Problema 42.** Ocho cajas numeradas del 1 al 8 están colocadas en una fila en orden de numeración. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 8 esferas de Navidad en las cajas si de cada uno de 4 colores distintos hay dos esferas iguales, en cada caja va una esfera y esferas del mismo color no deben quedar en cajas con numeración consecutiva?

**Problema 43.** Prueba que para $n \geq 12$ es posible dibujar un "panal"con $n$ hexágonos regulares todos del mismo tamaño, de manera que cada uno tenga lado común con al menos otros tres hexágonos.

**Problema 44.** Sea $a_1, a_2, \ldots$ la sucesión definida por $a_1 = 1$ y, para $n \geq 2$,

$$a_n = (n-1)a_{n-1} + \cdots + ka_k + \cdots + 1a_1 + n.$$

¿Para qué $n'$s es $a_n$ múltiplo de 9?

**Problema 45.** Sea $ABCD$ un tetraedro en el que $AB = CD$, $AC = BD$ y $AD = BC$ y sean $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$, $R_1$ y $R_2$ los puntos medios de $AB$, $CD$, $AC$, $BD$, $AD$ y $BC$, respectivamente. Prueba que:
(a) $P_1P_2$ es perpendicular a $AB$.
(b) $P_1P_2$, $Q_1Q_2$ y $R_1R_2$ concurren y cualesquiera dos son perpendiculares.

**Problema 46.** En un tablero cuadriculado de madera de $n \times n$ un mago toca con su varita mágica uno de los cuadritos y, al tocarlo, desaparece toda la fila y columna del cuadrito. Al quitar una fila y una columna, el tablero se subdivide en tableros rectangulares a los que se les aplica el mismo acto mágico, es decir, se toca un cuadrito de alguno de los rectángulos y se elimina su fila y su columna (sólo en el rectángulo donde está el cuadrito que tocó). El acto de magia se repite varias veces hasta que todos los cuadritos han desaparecido. Si el mago quiere hacer el procedimiento el mínimo número posible de veces, ¿cuál es este número y cómo debe ir tocando los cuadritos?

**Problema 47.** Sean $a$ y $b$ enteros positivos tales que 7 divide a $a+b$ y $7^2$ divide a $a^2 + b^2$. Demuestra que $7^3$ divide a $a^3 + b^3$.

**Problema 48.** Los números $a$, $b$ y $c$ cumplen que $abc = 1$ y $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Demuestra que alguno de $a$, $b$ ó $c$ es igual a $1$.

**Problema 49.** Sea $M$ el punto medio del lado $BC$ del triángulo $ABC$. La recta que pasa por $M$ y es perpendicular a la bisectriz del ángulo $A$, corta a $AB$ en $D$. Demuestra que $2AD = AB + CA$.

**Problema 50.** Pablo y Galo tienen un número entero de pesos cada uno. Pablo le dice a Galo: "Si tú me das $3$ pesos, yo tendré $n$ veces más pesos que tú". Galo le dice a Pablo: " Si tú me das $n$ pesos, yo tendré 3 veces más pesos que tú". Si $n$ es un entero positivo, ¿cúales son los posibles valores de $n$?

**Problema 51.** Ciertos boletos están numerados con los números $1, 2, 3, \ldots, n$. Se sabe que exactamente la mitad de los boletos tienen el dígito 1 en ellos. Si $n$ es un número de tres dígitos, determina todos los posibles valores de $n$.

**Problema 52.** Sea $p$ un número primo mayor que 2. Si:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b},$$

prueba que $a$ es múltiplo de $p$.

**Problema 53.** Se colocan, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha negra y darle la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su izquierda y la de su derecha. Si al inicio hay una sola ficha negra, ¿será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba?

**Problema 54.** Considera el triángulo $ABC$ con circuncentro $O$. Sea $D$ la intersección de la bisectriz del ángulo en $A$ con $BC$. Demuestra que $OA$, la mediatriz de $AD$ y la perpendicular a $BC$ que pasa por $D$ son concurrentes.

**Problema 55.** Sea $ABC$ un triángulo con $\angle ACB = 2\angle CAB$ y $\angle ABC > 90°$. La perpendicular a $AB$ que pasa por $A$ intersecta a $BC$ en $D$. Demuestra que:

$$\frac{1}{BC} - \frac{1}{DC} = \frac{2}{CA}.$$

**Problema 56.** Si $a$ y $b$ son enteros distintos y $n$ es un entero positivo, prueba que $2^{2n-1}(a^{2n} + b^{2n}) - (a + b)^{2n}$ es divisible entre $(a - b)^2$.

**Problema 57.** Cada casilla de un tablero de $200 \times 200$ se colorea de blanco o negro. La diferencia entre el número de casillas blancas y negras es $404$. Demuestra que algún cuadrado de $2 \times 2$ contiene un número impar de casillas blancas.

**Problema 58.** Considera un tablero de $2n \times 2n$, donde se encuentran fichas blancas y negras, con a lo más una ficha en cada casilla. Primero, quitamos cada ficha negra que esté en la misma columna que una ficha blanca. Enseguida, quitamos cada ficha blanca que esté en el mismo renglón que una ficha negra que haya quedado. Demuestra que para algún color, a lo más $n^2$ fichas de ese color quedan sin quitar.

**Problema 59.** Determina un par de enteros positivos $a$ y $b$ tales que $ab(a+b)$ no sea múltiplo de 7 y $(a+b)^7 - (a^7 + b^7)$ sea múltiplo de $7^7$.

**Problema 60.** Sean $a_1 = 19$ y $a_2 = 98$. Para $n \geq 1$ definimos $a_{n+2}$ como el residuo de $a_n + a_{n+1}$ cuando se divide entre 100. Determina el residuo de:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{1998}^2$$

cuando se divide entre 8.

## 1.2. Problemas de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

**Problema 1.** (17a OMM) Dado un número $k$ de dos o más cifras, se forma otro entero $m$ insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de $k$. Encuentra todos los números $k$ para los cuales $m$ resulta ser un múltiplo de $k$.

**Problema 2.** (17a OMM) Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos colineales con $B$ entre $A$ y $C$. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a $AC$ en $B$, y sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros $AB$ y $BC$, respectivamente. Sea $P$ el otro punto (además de $B$) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea $Q$ el otro punto (además de $B$) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supón que la recta $PQ$ corta a $\mathcal{X}$ en un punto $R$ distinto de $P$, y que esa misma recta $PQ$ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto $S$ ditinto de $Q$. Demuestra que concurren $AR$, $CS$ y la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por $B$.

**Problema 3.** (17a OMM) En una fiesta hay el mismo número $n$ de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan $a$ muchachos y que a cada muchacho le gustan $b$ muchachas. ¿Para qué valores de $a$ y $b$ es correcto afirmar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

**Problema 4.** (17a OMM) Sea $ABCD$ un trapecio con $AB$ paralelo a $DC$. Se toman puntos $P$ y $Q$ sobre $AB$ y $CD$ respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea $M$ la intersección de $AQ$ con $DP$ y sea $N$ la intersección de $PC$ con $QB$. Pruebe que la longitud de $MN$ depende sólo de las longitudes de $AB$ y $DC$, y calcula su valor.

**Problema 5.** (17a OMM) Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros $(a, b)$ con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige $(a, b)$ (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?)

**Problema 6.** (17a OMM) Dado un entero $n$ un *cambio sensato* consiste en sustituir $n$ por $2n+1$ ó $3n+2$. Dos enteros positivos $a$ y $b$ se llaman *compatibles* si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de $a$, como a partir de $b$. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.

**Problema 7.** (18a OMM) Encuentra todos los números primos $p, q$ y $r$ con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

**Problema 8.** (18a OMM) ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos $a$ y $b$ (con $a \neq b$) cumplan que,

$$|a - b| \geq \frac{ab}{100}?$$

**Problema 9.** (18a OMM) Sean $Z$ y $Y$ los puntos de tangencia del incírculo del triángulo $ABC$ con los lados $AB$ y $CA$, respectivamente. La paralela a $YZ$ por el punto medio $M$ del lado de $BC$, corta a $CA$ en $N$. Sea $L$ el punto sobre $CA$ tal que $NL = AB$ (y $L$ del mismo lado de $N$ que $A$). La recta $ML$ corta a $AB$ en $K$. Muestra que $KA = NC$.

**Problema 10.** (18a OMM) Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugaron entre si exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos $A$, $B$ y $C$, si $A$ le ganó a $B$ y $B$ le ganó a $C$ entonces $A$ le ganó a $C$.

Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser $5000$. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.

**Problema 11.** (18a OMM) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos circunferencias tales que el centro $O$ de $\mathcal{B}$ esté sobre $\mathcal{A}$. Sean $C$ y $D$ los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto $A$ sobre $\mathcal{A}$ y un punto $B$ sobre $\mathcal{B}$ tales que $AC$ es tangente a $\mathcal{B}$ en $C$ y $BC$ es tangente a $\mathcal{A}$ en el mismo punto $C$. El segmento $AB$ corta de nuevo a $\mathcal{B}$ en $E$ y ese mismo segmento corta de nuevo a $\mathcal{A}$ en $F$. La recta $CE$ vuelve a cortar a $\mathcal{A}$ en $G$ y la recta $CF$ corta a la recta $GD$ en $H$. Prueba que el punto de intersección de $GO$ y $EH$ es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $DEF$.

**Problema 12.** (18a OMM) ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de $2004 \times 2004$ casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

**Problema 13.** (19a OMM) Sea $O$ el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, y sea $P$ un punto cualquiera sobre el segmento $BC$ ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo $BPO$ corta al segmento $AB$ en $R$ ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo $COP$ corta al segmento $CA$ en el punto $Q$ ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

(i) Considera el triángulo $PQR$; muestra que que es semejante al triángulo $ABC$ y que su ortocentro es $O$.

(ii) Muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos $BPO$, $COP$ y $PQR$ son todas del mismo tamaño.

**Problema 14.** (19a OMM) Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su *suma* se efectúa casilla a casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline\end{array}$$

Dado un entero positivo $N$, diremos que una cuadrícula es $N$-*balanceada* si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado es menor o igual que $N$.

(i) Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas $n$-balanceadas.

(ii) Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas $n$-balanceadas.

**Problema 15.** (19a OMM) Determina todas las parejas $(a, b)$ de enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero positivo $x$ primo relativo con $b$ y un entero cualquiera $y$, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

**Problema 16.** (19a OMM) Decimos que una lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_m$ contiene una *terna aritmética* $a_i, a_j, a_k$ si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, $8, 1, 5, 2, 7$ tiene una terna aritmética (8, 5 y 2) pero $8, 1, 2, 5, 7$ no.
Sea $n$ un entero positivo. Muestra que los números $1, 2, \ldots, n$ se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

**Problema 17.** (19a OMM) Sea $N$ un entero mayor que 1. En cierta baraja de $N^3$ cartas, cada carta está pintada de uno de $N$ colores distintos, tiene dibujada una de $N$ posibles figuras y tiene escrito un número entero del 1 al $N$ (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama *completa* si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números.
¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, ya se vuelven completas?

**Problema 18.** (19a OMM) Sea $ABC$ un triángulo y $AD$ la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con $D$ sobre $BC$. Sea $E$ un punto sobre el segmento $BC$ tal que $BD = EC$. Por $E$ traza $l$ la recta paralela a $AD$ y considera un punto $P$ sobre $l$ y dentro del triángulo. Sea $G$ el punto donde la recta $BP$ corta al lado $AC$ y sea $F$ el punto donde la recta $CP$ corta al lado $AB$. Muestra que $BF = CG$.

# Capítulo 2

# Olimpiadas Internacionales en las que participa México

## 2.1. XVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

**Problema 1.** Muestre que para cada número real irracional $a$, existen números reales irracionales $b$ y $b'$ tales que $a+b$ y $ab'$ son ambos racionales mientras que $ab$ y $a+b'$ son ambos irracionales.

**Problema 2.** Sean $a, b$ y $c$ números reales positivos tales que $abc = 8$. Muestre que:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

**Problema 3.** Muestre que existe un triángulo que puede dividirse en 2005 triángulos congruentes.

**Problema 4.** En una ciudad, hay $n \times n$ casas señaladas por $(i, j)$ con $1 \leq i, j \leq n$. La casa señalada por $(1, 1)$ es la que se encuentra en la esquina superior izquierda, donde $i$ y $j$ son los índices para los renglones y las columnas, respectivamente. Al tiempo 0, inicia un incendio en la casa señalada por $(1, c)$ con $c \leq \frac{n}{2}$. Durante cada intervalo de tiempo subsecuente $[t, t+1]$, los bomberos protegen una casa que aún no se ha incendiado, mientras el fuego se propaga de una casa que se incendia en el instante $t$ a todas las casas *vecinas* no protegidas. Una casa protegida, permanece protegida todo el tiempo. El proceso termina cuando el fuego ya no se puede propagar. ¿Cuál es el mayor número de casas que pueden salvar los bomberos? Una casa señalada por $(i, j)$ es *vecina* a una señalada por $(k, l)$ si $|i-k|+|j-l|=1$.

**Problema 5.** En un triángulo $ABC$, se consideran puntos $M$ y $N$ sobre los lados $AB$ y $AC$, respectivamente, tales que $MB = BC = CN$. Sean $R$ y $r$ el circunradio e inradio del triángulo $ABC$, respectivamente. Exprese la razón $\frac{MN}{BC}$ en términos de $R$ y $r$.

## 2.2. VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe

**Problema 1.** De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, ¿cuál ocupa la posición 2005?

**Problema 2.** Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

**Problema 3.** En el triángulo $ABC$ sean $P, Q$ y $R$ los puntos de tangencia del incírculo en los lados $AB, BC$ y $AC$ respectivamente. Sean $L, M$ y $N$ los pies de las alturas del triángulo $PQR$ en $PQ, QR$ y $PR$, respectivamente.
(a) Demuestre que las rectas $AN, BL$ y $CM$ se cortan en el mismo punto.
(b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo $PQR$.

**Problema 4.** Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de $10 \times 10$. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla: *Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.*

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

**Problema 5.** En un triángulo acutángulo $ABC$, sean $H$ su ortocentro y $M$ el punto medio del lado $AC$. Por $M$ se traza una recta $L$ paralela a la bisectriz del ángulo $AHC$. Demuestre que la recta $L$ divide al triángulo $ABC$ en dos partes que tienen el mismo perímetro.

**Problema 6.** Se tienen $n$ cartas numeradas del 1 al $n$ y $p$ cajas para guardarlas, con $p$ primo. Determine los posibles valores de $n$ para los que se pueden guardar todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.

## 2.3. XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

**Problema 1.** Determine todas las ternas de números reales $(x, y, z)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xyz &= 8, \\ x^2y + y^2z + z^2x &= 73, \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 &= 98. \end{aligned}$$

**Problema 2.** Una pulga salta sobre puntos enteros de la recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto $0$ y cae en el punto 1. Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto $a$ y cayó en el punto $b$, en el siguiente movimiento salta desde el punto $b$ y cae en uno de los puntos $b + (b - a) - 1$, $b + (b - a)$, $b + (b - a) + 1$.

Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto $n$, para $n$ entero positivo, entonces ha debido hacer $t$ movimientos, donde $t$ es el menor entero mayor o igual que $2\sqrt{n}$.

**Problema 3.** Sea $p > 3$ un número primo. Si:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^p} = \frac{n}{m}$$

donde el máximo común divisor de $n$ y $m$ es 1, demuestre que $p^3$ divide a $n$.

**Problema 4.** Dados dos enteros positivos $a$ y $b$, se denota por $(a \triangledown b)$ el residuo que se obtiene al dividir $a$ por $b$. Este residuo es uno de los números $0, 1, \ldots, b-1$. Encuentre todas las parejas de números $(a, p)$ tales que $p$ es primo y se cumple que:

$$(a \triangledown p) + (a \triangledown 2p) + (a \triangledown 3p) + (a \triangledown 4p) = a + p.$$

**Problema 5.** Sea $O$ el circuncentro de un triángulo acutángulo $ABC$ y $A_1$ un punto en el arco menor $BC$ de la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$. Sean $A_2$ y $A_3$ puntos en lo lados $AB$ y $AC$ respectivamente, tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demuestre que la recta $A_2A_3$ pasa por el ortocentro del triángulo $ABC$.

**Problema 6.** Dado un entero positivo $n$, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Cada punto se colorea de azul o rojo mediante el siguiente procedimiento:
En el plano dado se trazan $n$ circunferencias con diámetros de extremos $A_i$ y $A_j$, disyuntas dos a dos. Cada $A_k$, $1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una misma circunferencia lleven el mismo color.
Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las $n$ circunferencias y la distribución de los dos colores.

## 2.4. $46^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas

**Problema 1.** Se eligen seis puntos en los lados de un triángulo equilátero $ABC$: $A_1$ y $A_2$ en $BC$, $B_1$ y $B_2$ en $CA$, $C_1$ y $C_2$ en $AB$. Estos puntos son los vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cuyos lados son todos iguales. Demuestre que las rectas $A_1B_2, B_1C_2$ y $C_1A_2$ son concurrentes.

**Problema 2.** Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de enteros que tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supongamos que para cada entero positivo $n$, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen $n$ restos distintos al ser divididos entre $n$. Demuestre que cada entero se encuentra exactamente una vez en la sucesión.

**Problema 3.** Sean $x, y, z$ números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Demuestre que:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

**Problema 4.** Consideremos la sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ definida por:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Determine todos los enteros positivos que son primos relativos (coprimos) con todos los términos de la sucesión.

**Problema 5.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que tiene los lados $BC$ y $AD$ iguales y no paralelos. Sean $E$ y $F$ puntos en los lados $BC$ y $AD$, respectivamente, que son distintos de los vértices y satisfacen $BE = DF$. Las rectas $AC$ y $BD$ se cortan en $P$, las rectas $BD$ y $EF$ se cortan en $Q$, las rectas $EF$ y $AC$ se cortan en $R$. Consideremos todos los triángulos $PQR$ que se forman cuando $E$ y $F$ varían. Demuestre que las circunferencias circunscritas a esos triángulos tienen en común otro punto además de $P$.

**Problema 6.** En una competencia de matemáticas se propusieron 6 problemas a los estudiantes. Cada par de problemas fue resuelto por más de $\frac{2}{5}$ de los estudiantes. Nadie resolvió los 6 problemas. Demuestre que hay al menos 2 estudiantes tales que cada uno tiene exactamente 5 problemas resueltos.

# Capítulo 3

# Soluciones de los Problemas

## 3.1. Soluciones de los Problemas de Práctica

**Solución del problema 1.** Si $n = 1$ basta tomar cualquier número primo. Por otro lado, tenemos que $3 = 1 + 2$ y como todo número primo mayor que 3 es de la forma $6k - 1 = (3k - 1) + (3k)$ o $6k + 1 = (3k) + (3k + 1)$, con $k$ entero positivo, entonces $n = 2$ también es solución. Supongamos entonces que $n > 2$. Queremos que $k + (k + 1) + (k + 2) + \cdots + (k + n - 1)$ sea un número primo con $k \geq 1$, es decir, $n(2k + n - 1) = 2p$ con $p$ primo. Si $n$ es par, digamos $n = 2i$ con $i \geq 2$, entonces $i(2k + 2i - 1) = p$, lo que contradice que $p$ sea primo, pues $i \geq 2$ y $2k + 2i - 1 \geq 5$. Si $n$ es impar, digamos $n = 2i + 1$ con $i \geq 1$, entonces $(2i+1)(k+i) = p$, que contradice nuevamente que $p$ es primo, pues $2i+1 \geq 3$ y $k+i \geq 2$. Por lo tanto, las únicas soluciones son $n = 1$ y $n = 2$.

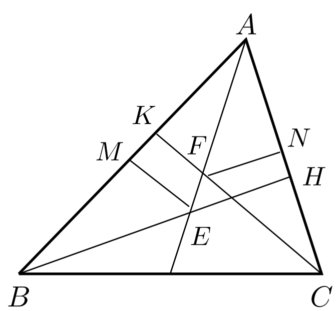
**Solución del problema 2.** Primero contaremos el número de enteros crecientes con cuatro dígitos de la forma $ABCA$. En este caso $C$ debe ser mayor que $B$. Para cada elección de $A$ $(1 \leq A \leq 9)$, tenemos $\binom{10}{2} = 45$ formas de elegir a $B$ y $C$ (ya que $0 \leq B < C \leq 9$). Luego tenemos $9 \times 45 = 405$ números crecientes de esta forma. Contemos ahora el número de enteros crecientes de la forma $ABCD$ con $A$ distinto de $D$. En este caso $D$ debe ser mayor que $A$, mientras que $B$ y $C$ pueden ser arbitrarios. Como $A$ y $D$ deben ser distintos de cero, hay $\binom{9}{2} = 36$ formas de elegir a $A$ y $D$, y $10^2 = 100$ formas de elegir a $B$

y $C$. Luego, hay $36 \times 100 = 3600$ números crecientes de esta forma. Se sigue que hay $405 + 3600 = 4005$ números crecientes de cuatro dígitos.

**Solución alternativa:** Es fácil ver que un número creciente no puede terminar en cero. Consideremos todos los enteros positivos de cuatro cifras que no terminan en cero. Tenemos en total $9\times10\times10\times9 = 8100$ enteros de este tipo. Entre ellos hay $9\times10 = 90$ de la forma $ABBA$, donde $1 \leq A \leq 9$ y $0 \leq B \leq 9$. Luego, hay $8100 - 90 = 8010$ enteros que no son de la forma $ABBA$. Agrupando a cada uno de estos con su reverso (al $ABCD$ lo agrupamos con $DCBA$), obtenemos $\frac{8010}{2} = 4005$ pares, y como en cada par sólo uno de ellos es creciente, la respuesta es 4005 como en la primer solución.

**Solución del problema 3.** Sea $a$ un entero de $n$ dígitos. Entonces $b = a(10^n+1)$ y por lo tanto $\frac{b}{a^2} = \frac{10^n+1}{a}$. Si $\frac{b}{a^2}$ es un entero, es fácil ver que $1 < \frac{10^n+1}{a} < 11$. Como $10^n + 1 \equiv 1 \pmod 2$, $10^n + 1 \equiv 2 \pmod 3$ y $10^n + 1 \equiv 1 \pmod 5$ se sigue que $10^n + 1$ no es divisible por 2, 3 ó 5. Así que el único valor posible para $\frac{b}{a^2}$ es 7. Los números $a = 143$ y $b = 143143$ muestran que 7 es la única solución.

**Solución del problema 4.** Sean $M$ y $N$ los respectivos puntos medios de los lados $AB$ y $AC$, y sean $H$ y $K$ las intersecciones de $BE$ con $AC$ y $CF$ con $AB$ respectivamente. Es fácil ver que los triángulos $AEH$, $AEM$ y $BEM$ son congruentes entre sí. Entonces $\angle BEM = \angle MEA = \angle AEH = \frac{180°}{3} = 60°$ y en consecuencia $\angle MAE = \angle EAH = 30°$. De la congruencia de los triángulos $AFN$ y $CFN$ se sigue que $\angle FCN = \angle EAH = 30°$ y por lo tanto $\angle CKA = 90°$. Es decir, $CF$ es perpendicular a $AB$.




**Solución del problema 5.** Supongamos que es posible. Consideremos todos los segmentos de un color, digamos rojo. El número total de triángulos con un lado rojo es igual al número de triángulos con dos lados pintados con los otros 11 colores, es decir, $\binom{11}{2} = \frac{11\cdot10}{2} = 55$. Pero como cada segmento rojo es un lado de 10 triángulos, el número de segmentos rojos es al menos 6. Lo mismo pasa con los otros 11 colores. Luego, el número total de segmentos es al menos $12 \cdot 6 = 72$. Pero el número total de lados y diagonales en un dodecágono es $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66 < 72$. Esta contradicción muestra que no existe tal coloración.

**Solución del problema 6.** Sea $p$ un número primo tal que $a - b = p$ y sea $ab = k^2$. Tenemos que $(b + p)b = k^2$ o lo que es lo mismo $b^2 + pb - k^2 = 0$. Completando el cuadrado obtenemos $(2b + p - 2k)(2b + p + 2k) = p^2$. Como $2b + p + 2k > 2b + p - 2k$ y $p$ es primo, concluimos que $2b + p + 2k = p^2$ y $2b + p - 2k = 1$, de donde $2b + p = \frac{p^2+1}{2}$, y en consecuencia $a = (\frac{p+1}{2})^2$ y $b = (\frac{p-1}{2})^2$. Por lo tanto, las soluciones son $(a, b) = ((\frac{p+1}{2})^2, (\frac{p-1}{2})^2)$ con $p$ un primo impar.

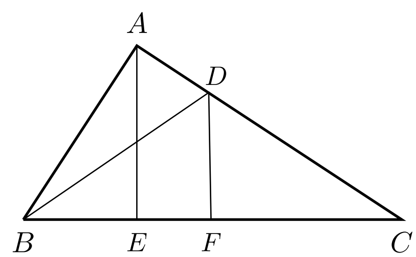
**Solución alternativa:** Como en la solución anterior tenemos que $(b+p)b = k^2$. Además es claro que mcd$(b, b + p) =$ mcd$(b, p) = 1$ o $p$.
Caso I. mcd$(b, b + p) = p$. Sea $b = b_1 p$. Entonces $p^2 b_1(b_1 + 1) = k^2$, de donde $b_1(b_1 + 1) = m^2$ para algún entero positivo $m$. Como mcd$(b_1, b_1 + 1) = 1$ se sigue que $b_1$ y $b_1 + 1$ son ambos cuadrados. Pero la diferencia más pequeña entre dos cuadrados es $4 - 1 = 3$. Luego, no hay soluciones en este caso.
Caso II. mcd$(b, b + p) = 1$. En este caso, $b = u^2$ y $b + p = v^2$, de donde $p = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$. Luego, $v - u = 1$ y $v + u = p$, y por lo tanto $a = (\frac{p+1}{2})^2$ y $b = (\frac{p-1}{2})^2$ con $p$ un primo impar, como en la primer solución.

**Solución del problema 7.** Elijamos a los números 1, 3, 5, $\ldots, 2^n - 1$ y 2, 4, 8, $\ldots, 2^n$, es decir, a todos los números impares y a todas las potencias de 2. Consideremos los siguientes casos:
1. Si $x = 2a-1$ e $y = 2b-1$, entonces $x+y = (2a-1)+(2b-1) = 2(a+b-1)$ es par y no divide a $xy = (2a - 1)(2b - 1)$ que es un número impar.
2. Si $x = 2^k$ e $y = 2^m$ con $k < m$, entonces $x + y = 2^k(2^{m-k} + 1)$ tiene un divisor impar mayor que 1 y por lo tanto no divide a $xy = 2^{k+m}$.
3. Si $x = 2^k$ e $y = 2b - 1$, entonces $x + y = 2^k + (2b - 1) > (2b - 1)$ es impar y por lo tanto no divide a $xy = 2^k(2b - 1)$ que tiene a $2b - 1$ como su mayor divisor impar.

**Solución del problema 8.** Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ los colores usados. Diremos que dos cuadrados del tablero son "bicromáticos" si están en el mismo renglón y tienen distinto color. Es fácil ver que cada renglón da lugar a $\binom{4}{2} \cdot 25^2 = 6 \cdot 25^2$ pares de cuadrados bicromáticos. Luego, en total hay $100 \cdot 6 \cdot 25^2$ pares de cuadrados bicromáticos. Como cada uno de estos pares es la intersección de un renglón con un par de columnas distintas, y tenemos $\binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2}$ pares de columnas, alguna pareja de columnas contiene al menos $\frac{100 \cdot 6 \cdot 25^2}{100 \cdot 99/2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 25^2}{99} > \frac{12 \cdot 25^2}{4 \cdot 25} = 75$

pares de cuadrados bicromáticos. De aquí que hay dos columnas que forman pares de cuadrados bicromáticos en al menos 76 renglones. Por lo tanto, podemos ignorar el resto de los renglones y columnas y asumir que tenemos un tablero de $76 \times 2$ pintado con cuatro colores, en el cual cada renglón tiene dos colores distintos y ningún color se usa más de 25 veces en cada columna.
Para cada renglón, consideremos el par de colores que contiene. Si las parejas de colores $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$ ocurren cada una en algún renglón, no hay nada que probar. Tampoco hay nada que probar en los casos $\{A, C\}, \{B, D\}$ y $\{A, D\}, \{B, C\}$. Supongamos entonces que a lo más una pareja de colores de cada uno de los tres casos anteriores ocurre. Tenemos entonces sólo dos posibilidades (salvo un reordenamiento de colores): o bien $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}$ son las únicas parejas que ocurren o bien $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$. En el primer caso, cada uno de los 76 renglones contiene un cuadrado de color $A$, lo cual es una contradicción. En el segundo caso, cada columna contiene solo los colores $A, B, C$. Como sólo puede haber 25 cuadrados de cada color $A, B, C$ en cada columna, hay a lo más 150 cuadrados en el tablero, lo cual es una contradicción pues hay 152 cuadrados en total.

**Solución del problema 9.** Tracemos $DF$ perpendicular a $BC$. Sean $AC = x$ y $FC = y$. Debido a que el triángulo $BDC$ es isósceles, tenemos que $BC = 2y$, y de la semejanza de los triángulos $DCF, ACE$ y $BCA$, obtenemos que $\frac{1}{y} = \frac{x}{1} = \frac{2y}{x}$. Luego, $y = \frac{1}{x}$ y $y = \frac{x^2}{2}$, de donde $x^3 = 2$ o $x = \sqrt[3]{2}$.




**Solución alternativa:** Sean $AC = x$ y $\angle DCE = \alpha$. Entonces $\angle CBD = \alpha$ y $\angle ADB = 2\alpha$ (por ser $\angle ADB$ un ángulo exterior del triángulo $BCD$). Luego, en el triángulo rectángulo $ACE$ tenemos que $\cos\alpha = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{x}$ y en el triángulo rectángulo $ABD$ tenemos que $\cos 2\alpha = \frac{AD}{BD} = x - 1$. Finalmente, aplicando la identidad $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, se sigue que $2(\frac{1}{x})^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow 2 - x^2 = x^3 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$, como en la primer solución.

**Solución del problema 10.** Supongamos que el entero $n > 1$ está en la sucesión. Entonces, los siguientes $n$ términos son:

$$\frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \ldots, \frac{n^2+n}{n} = n+1.$$

Luego, si escribimos todos los términos de la sucesión como fracciones tendremos un número con denominador 1, 2 números con denominador 2, 3 números con denominador 3, ... , $n$ números con denominador $n$, y así sucesivamente. Es decir:

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \ldots, \frac{n^2}{n}, \frac{n^2+1}{n}, \ldots, \frac{n^2+n-1}{n}, \ldots$$

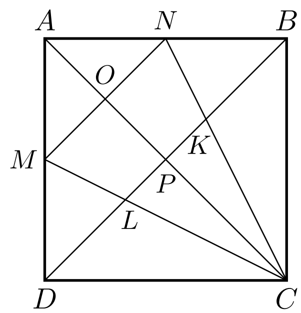
Denotemos por $x$ al último número de la sucesión. Si $x$ tiene denominador $k$, tenemos que $1+2+\cdots+k \leq 2005 \Leftrightarrow k(k+1) \leq 4010$. Es fácil ver que $k=62$ satisface esta desigualdad, y como la cantidad de términos en la sucesión hasta el último número con denominador 62 es $\frac{62(63)}{2} = 1953$ y $2005 - 1953 = 52$, se sigue que $x = \frac{63^2+(52-1)}{63} = \frac{4020}{63} = \frac{1340}{21}$.

**Solución del problema 11.** Si $a = b$, entonces $\frac{8a+1}{a} = 8 + \frac{1}{a}$ es entero si $a|1$, de donde $a = b = 1$. Supongamos que $a < b$. Entonces $b \geq a+1$ y $7b > 7a$, de donde $8b > 8a+1$. Luego, como $8a+1 = bk$ para algún entero positivo $k$, se sigue que $k < 8$ y como $k$ no puede ser par (ni tampoco $a$ y $b$), los valores posibles de $k$ son 1, 3, 5 y 7.
• Si $k = 1$, entonces $8a+1 = b$ y $\frac{8b+1}{a} = \frac{64a+9}{a} = 64 + \frac{9}{a}$ es entero si $a|9$. De aquí se sigue que las parejas $(1,9), (3,25)$ y $(9,73)$ son solución.
• Si $k = 3$, entonces $8a+1 = 3b$ y $\frac{8b+1}{a} = \frac{64a+11}{a} = 21 + \frac{a+11}{3a}$ es entero si $3a|a+11$. Luego $3a \leq a+11$ o $a \leq 5$. De aquí se sigue que la pareja $(1,3)$ es la única solución.
• Si $k = 5$, entonces $8a+1 = 5b$ y $\frac{8b+1}{a} = \frac{64a+13}{5a} = 12 + \frac{4a+13}{5a}$ es entero si $5a|4a+13$. Luego $5a \leq 4a+13$ o $a \leq 13$. De aquí se sigue que la pareja $(13,21)$ es la única solución.
• Si $k = 7$, entonces $8a+1 = 7b$ y $\frac{8b+1}{a} = \frac{64a+15}{7a} = 9 + \frac{15}{7a}$ es entero si $7a|15$. Luego $7a \leq 15$ o $a \leq 2$. Es fácil ver que en este caso no hay solución.
Por lo tanto, las soluciones son las parejas $(1,1)$, $(1,3)$, $(1,9)$, $(3,25)$, $(9,73)$, $(13,21)$ y las reflejadas.

**Solución alternativa:** Tenemos que $a|8b+1$ y $b|8a+1 \Rightarrow ab|(8b+1)(8a+1)$, es decir $ab|64ab + 8(a+b) + 1$, de donde $ab|8(a+b)+1$.
Supongamos que $a \leq b$. Entonces, $ab \leq 8(a+b)+1 \leq 8(2b)+1 \leq 16b+1$, de donde $a \leq 16 + \frac{1}{b}$, y como $b \geq 1$, se sigue que $a \leq 16+1 = 17$.
Como $a$ y $b$ deben ser impares, los valores posibles de $a$ son 1, 3, 5, 7, 9, 11,

13, 15 y 17. Verificando cada valor de $a$, obtenemos las soluciones $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 9)$, $(3, 25)$, $(9, 73)$, $(13, 21)$, como en la primer solución.

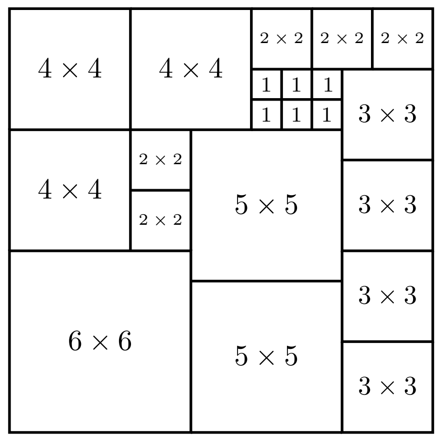
**Solución del problema 12.** Siendo $M$ y $N$ puntos medios de $AD$ y $AB$, tenemos que $MN$ y $BD$ son paralelas. Además, como $AC$ y $BD$ son perpendiculares por ser diagonales de un cuadrado, se sigue que $MN$ y $AC$ también son perpendiculares. Sean $O$ y $P$ los puntos de intersección de $AC$ con $MN$ y $BD$, respectivamente.



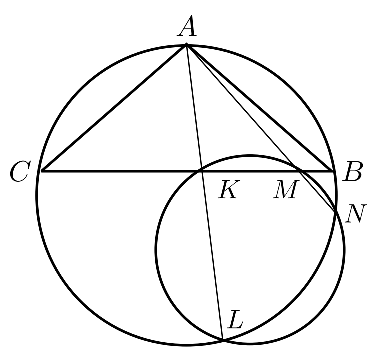

Entonces, el área del trapecio $KLMN$ es $\frac{(MN+KL)OP}{2}$.
De la semejanza de los triángulos $ABD$ y $ANM$ tenemos que $MN = \frac{1}{2}BD$ y por el Teorema de Thales tenemos que $1 = \frac{AN}{NB} = \frac{AO}{OP}$, de donde $OP = AO = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{4}AC$.
Por otra parte, de la congruencia de los triángulos $CBN$ y $CDM$ se sigue que $\angle DML = \angle KNB$, y como $MD = NB$ y $\angle ADB = \angle ABD$, tenemos que los triángulos $NBK$ y $MDL$ son congruentes. De aquí que $DL = KB$, y de la semejanza de los triángulos $NBK$ y $CDK$ se sigue que $\frac{DK}{KB} = 2 \Rightarrow KB + KL = DL + KL = DK = 2KB \Rightarrow KB = KL$, de donde $BD = 3KL$.
Finalmente, tenemos que:
$\frac{(MN+KL)OP}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}BD + \frac{1}{3}BD)(\frac{1}{4}AC) = \frac{5}{48}(BD)(AC) = \frac{5}{48}(72) = \frac{15}{2}$.

**Solución del problema 13.** Para formar un triángulo debemos elegir dos puntos de $l_1$ y uno de $l_2$, o uno de $l_1$ y dos de $l_2$. Hay $\binom{k}{2}n$ maneras distintas de escoger dos puntos de $l_1$ y uno de $l_2$, y hay $\binom{n}{2}k$ maneras distintas de escoger dos puntos de $l_2$ y uno de $l_1$. Luego, tenemos que $\binom{k}{2}n + \binom{n}{2}k = 220$, de donde, $k(k-1)n + n(n-1)k = nk(k+n-2) = 440$. Como $nk$ debe dividir a 440, tenemos que $nk \leq 440$ y como $n \leq k$, resulta que $n^2 \leq nk \leq 440$, de donde $n \leq \sqrt{440} < 21$. Por lo tanto, los posibles valores de $n$ son los divisores de 440 menores o iguales que 20, es decir, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11 y 20. Verificando cada uno de estos valores para $n$, encontramos que la única solución con $k \geq n$ es $k = 8$ y $n = 5$.

**Solución del problema 14.** Supongamos que el rompecabezas tiene lado $k$. Entonces, la suma de las áreas de los cuadrados que lo forman debe ser igual a $k^2$, es decir $1^2 \cdot n + 2^2 \cdot (n-1) + 3^2 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1)^2 \cdot 2 + n^2 = k^2$. La suma del lado izquierdo la podemos calcular como sigue:
$\sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n}(i^2 n - i^3 + i^2) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.
Luego, debemos tener que $n(n+1)^2(n+2) = 12k^2$. Verificando los primeros valores de $n \geq 2$ encontramos que $n = 6$ es el más pequeño que cumple. La figura muestra el armado del rompecabezas para $n = 6$.




**Solución del problema 15.** En el triángulo $ACK$ tenemos que $\angle ACK = \angle ACB = 180° - \angle CAK - \angle CKA$. Como $\angle CAK = \angle CNL$ (por subtender el mismo arco) y $\angle CKA = \angle MKL$ (por ser opuestos por el vértice), resulta que $\angle ACB = 180° - \angle CNL - \angle MKL$. Pero $\angle MKL = 180° - \angle MNL$ por ser $KMNL$ cíclico. Entonces $\angle ACB = \angle MNL - \angle CNL = \angle MNC$ y como $\angle MNC$ y $\angle ABC$ subtienden el mismo arco, se sigue que $\angle ACB = \angle ABC$, es decir el triángulo $ABC$ es isósceles.



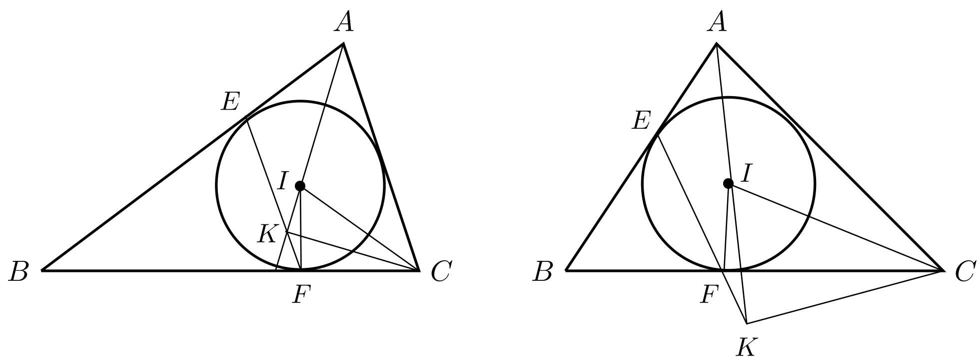
**Solución del problema 16.** Ya que $2^n+1=(n-1)k$ es impar, tenemos que $k$ es impar y $n$ es par. También tenemos que $2^n+2=2(2^{n-1}+1)=mn$, y como $n$ es par se sigue que $m$ debe ser impar (ya que $2^n+2$ no puede ser múltiplo de 4). Por otra parte, sabemos que $x^i+1=(x+1)(x^{i-1}-x^{i-2}+\cdots-x+1)$ para cualquier entero positivo impar $i$. Luego, como $k$ es impar resulta que $2^{2^n+2}+2=2(2^{2^n+1}+1)=2(2^{(n-1)k}+1)$ es múltiplo de $2(2^{n-1}+1)=2^n+2$, y análogamente, como $m$ es impar resulta que $2^{2^n+2}+1=2^{mn}+1$ es múltiplo de $2^n+1$.

**Solución del problema 17.** Supongamos que es posible. Entonces la cuadrícula quedaría dividida en dos partes por medio de la columna que contiene a los cuadrados perfectos, con $11n$ $(0\leq n\leq 5)$ casillas de un lado y $110-11n=11(10-n)$ casillas del otro lado. Notemos que los números entre dos cuadrados perfectos consecutivos, digamos $a^2$ y $(a+1)^2$, deben estar del mismo lado, y aquellos números entre $(a+1)^2$ y $(a+2)^2$ deben estar en el lado opuesto. Como el número de enteros estrictamente entre 1 y 4, 4 y 9, 9 y 16, ... , 100 y 121 es $2,4,6,8,\ldots,20$, respectivamente, un lado de la cuadrícula tiene $2+6+10+14+18=50$ números, mientras que el otro lado tiene $4+8+12+16+20=60$ números. Pero esto es imposible pues 50 y 60 no son múltiplos de 11. Por lo tanto, no es posible hacer lo que se pide.

**Solución del problema 18.** Si $p=2$ y $2<q<r$, entonces $p+q+r$ sería un número par, lo cual no es posible. Si $p=q=2$, entonces $r=2001=3\cdot 667$ que no es primo. Por lo tanto, podemos asumir que $2<p\leq q\leq r$.
Tenemos que $pqr+1$ es un cuadrado, de donde $pqr=k^2-1=(k+1)(k-1)$ para algún entero $k$. Dividimos en dos casos:
**(i)** $p|k-1$:
(a) Si $k+1=qr$, entonces $k-1=p$ y $qr-p=2$, lo cual no es posible ya que $qr>2r\geq 2p>p+2$.
(b) Si $k+1=q$, entonces $k-1=pr$, de donde $q>pr>r$, lo cual no es posible.
(c) Si $k+1=r$, entonces $k-1=pq$ y $pq=r-2=(2005-p-q)-2=2003-p-q$, de donde $(p+1)(q+1)=2004$. Es fácil verificar que esta ecuación no tiene soluciones en números primos.
(d) Si $k+1=1$, entonces $k=0$ y $pqr=-1$, lo cual no es posible.
**(ii)** $p|k+1$:
(a) Si $k-1=qr$, entonces $k+1=p$, de donde $p>qr>r$, lo cual no es posible.
(b) Si $k-1=q$, entonces $k+1=pr$ y $pr-q=2$, lo cual no es posible ya que $pr>2r\geq 2q>q+2$.

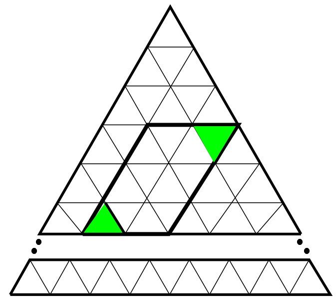
(c) Si $k-1=r$, entonces $k+1=pq$ y $pq=r+2=(2005-p-q)+2=2007-p-q$, de donde $(p+1)(q+1)=2008$. Es fácil verificar que esta ecuación no tiene soluciones en números primos.
(d) Si $k-1=1$, entonces $k=2$ y $pqr=3$, lo cual no es posible ya que $pqr>2^3=8$.
Por lo tanto, no existen números primos $p$, $q$ y $r$ que cumplan las condiciones del problema.

**Solución del problema 19.** Consideraremos los casos en que el punto $K$ está entre $E$ y $F$, y cuando $K$ está fuera del segmento $EF$.




Sea $I$ el incentro del triángulo $ABC$. Entonces $A$, $I$ y $K$ son colineales. Tenemos que $\angle CIK=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)$ por ser $\angle CIK$ un ángulo exterior del triángulo $AIC$ y porque $AI$ y $CI$ son bisectrices de los ángulos $BAC$ y $ACB$ respectivamente. Como $BE=BF$ tenemos que $\angle BEF=\angle BFE$ y en consecuencia $2\angle BFE=180°-\angle CBA$, es decir $\angle BFE=90°-\frac{1}{2}\angle CBA$.
(i) $K$ está entre $E$ y $F$. En este caso, $\angle CIK+\angle CFK=\angle CIK+(180°-\angle BFE)=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)+(180°-(90°-\frac{1}{2}\angle CBA))=90°+\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB+\angle CBA)=90°+\frac{1}{2}(180°)=180°$, de donde el cuadrilátero $CIKF$ es cíclico. Luego, $\angle CKA=\angle CFI=90°$.
(ii) $K$ está fuera del segmento $EF$. En este caso, $\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB)=90°\Rightarrow\angle CIK=\angle BFE$ y como $\angle CFK=\angle BFE$ por ser opuestos por el vértice, se sigue que $\angle CFK=\angle CIK$. Es decir, el cuadrilátero $CIFK$ es cíclico y por lo tanto $\angle CKA=\angle CFI=90°$.

**Solución del problema 20.** Llamemos *triángulo vértice* a un triangulito que comparte un vértice con el triángulo de lado $n$ (hay tres triángulos vértice). Diremos que el triángulo $\triangle$ tiene dirección 1 y el triángulo $\bigtriangledown$ tiene dirección 2. Es claro que cada paralelogramo está determinado por dos triangulitos con direcciones opuestas (ver figura).



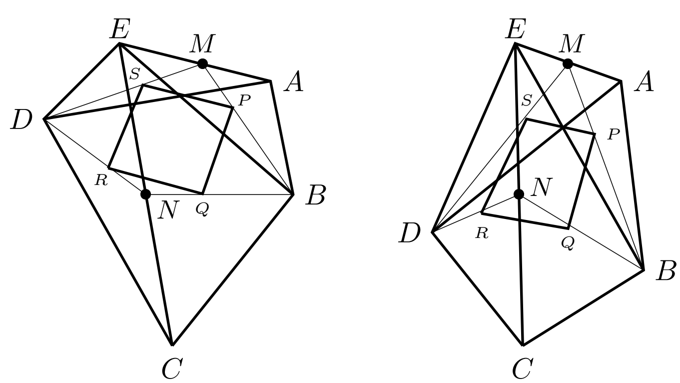
Fijémonos en un triángulo vértice y supongamos que tiene dirección 1. Observemos que este triángulo vértice determina paralelogramos con todos los triangulitos que tienen dirección 2. Es decir, determina paralelogramos con un triangulito del segundo nivel, dos triangulitos del tercer nivel, y así sucesivamente hasta con $n-1$ triangulitos del $n$-ésimo nivel. Luego, tenemos $1+2+\cdots+(n-1)$ paralelogramos determinados por el triángulo vértice considerado. En el segundo nivel tenemos entonces dos triangulitos, digamos $A$ y $B$, con dirección 1. Fijémonos en $A$ y consideremos el triángulo de lado $n-1$ que contiene a $A$ y que no contiene al triángulo vértice elegido. Entonces, por el argumento anterior, el triángulo $A$ determina $1+2+\cdots+(n-2)$ paralelogramos (y lo mismo sucede con $B$). Ahora, en el tercer nivel tenemos tres triangulitos, digamos $A_1, B_1$ y $C_1$, con dirección 1. Fijémonos en $A_1$ y consideremos el triángulo de lado $n-2$ que contiene a $A_1$ y que no contiene a ningún triangulito de un nivel anterior. Entonces, $A_1$ determina $1+2+\cdots+(n-3)$ paralelogramos (y lo mismo sucede con $B_1$ y $C_1$). Continuando de esta forma, tenemos que el triángulo vértice elegido y todos los triangulitos que tienen su misma dirección, determinan $\sum_{i=1}^{n-1}(1+2+\cdots+i)(n-i)$ paralelogramos. Luego, como hay tres triángulos vértice, el número total de paralelogramos es $3\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(1+2+\cdots+i)(n-i)$. Finalmente, no es difícil ver que $3\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(1+2+\cdots+i)(n-i) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}$.

**Solución del problema 21.** Sean $d_1$, $d_2 \ldots$, $d_{16}$ los dígitos del número. Si alguno de estos dígitos es 0, 1, 4 ó 9, no hay nada que probar. Luego, podemos asumir que cada uno de los dígitos es 2, 3, 5, $6 = 2\cdot 3$, 7 u $8 = 2^3$. Sea $x_0 = 1$ y $x_i = d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_i$ para $i = 1, 2, \ldots, 16$. Entonces $x_i = 2^{p_i}\cdot 3^{q_i}\cdot 5^{r_i}\cdot 7^{s_i}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, 16$, donde cada uno de $p_i, q_i, r_i, s_i$ es un entero mayor o igual que cero. Diremos que $x_i$ y $x_j$ tienen el mismo patrón de paridad si tienen la misma paridad $p_i$ y $p_j$; $q_i$ y $q_j$; $r_i$ y $r_j$; y $s_i$ y $s_j$. Luego, es fácil ver que hay $2^4 = 16$ posibles patrones de paridad. Entonces, por el principio de las casillas, dos de los diecisiete $x_i$'s, digamos $x_k$ y $x_l$ con $k < l$, tienen el mismo patrón de paridad. Es fácil ver que $d_{k+1} \times \cdots \times d_l = \frac{x_l}{x_k}$ es un cuadrado perfecto.

**Solución del problema 22.** Denotaremos por $(XYZ...)$ al área de la figura $XYZ...$. Sean $M$ y $N$ los puntos medios de $AE$ y $EC$ respectivamente. Por ser $DM$, $DN$, $BM$ y $BN$ medianas, tenemos que $2 = \frac{DS}{SM} = \frac{DR}{RN} = \frac{BP}{PM} = \frac{BQ}{QN}$, de donde por el Teorema de Thales se sigue que son paralelas $SR$ y $MN$; $MN$ y $PQ$; $SP$ y $BD$; y $BD$ y $RQ$. Tenemos entonces que $(DRS) = \frac{4}{9}(DNM)$, $(BQP) = \frac{4}{9}(BNM)$, $(MSP) = \frac{1}{9}(MDB)$ y $(NRQ) = \frac{1}{9}(NDB)$. Consideraremos los casos cuando el cuadrilátero $MBND$ es convexo y cuando es cóncavo.

(i) $MBND$ es convexo. En este caso, $(PQRS) = (MBND) - [(BQP) + (NRQ) + (DRS) + (MSP)] = (MBND) - [\frac{4}{9}((BNM) + (DNM)) + \frac{1}{9}((NDB) + (MDB))] = (MBND) - [\frac{4}{9}(MBND) + \frac{1}{9}(MBND)] = \frac{4}{9}(MBND)$, es decir $(MBND) = \frac{9}{4}(PQRS)$. Por otra parte, $(ABCD) = (ABE) + (BCE) + (CDE) - (AED)$ y como toda mediana divide a un triángulo en dos triángulos de la misma área, resulta que $(ABCD) = 2[(BEM) + (BNE) + (DEN) - (DEM)] = 2(MBND) = 2(\frac{9}{4}(PQRS)) = \frac{9}{2}(PQRS)$.

(ii) $MBND$ es cóncavo. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\angle BND > 180°$. En este caso, $(PQRS) = (MBND) + (NRQ) - [(BQP) + (DRS) + (MSP)] = (MBND) - [(MSP) - (NRQ)] - [(BQP) + (DRS)] = (MBND) - \frac{1}{9}((MDB) - (NDB)) - \frac{4}{9}((BNM) + (DNM)) = (MBND) - (\frac{1}{9}(MBND) + \frac{4}{9}(MBND)) = \frac{4}{9}(MBND)$. La conclusión se sigue como en el caso (i).

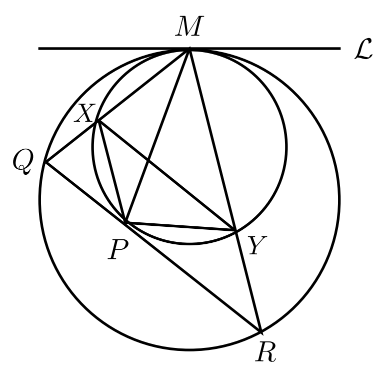



**Solución del problema 23.** Como $5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 30 = 5 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 6)$ es factor de $34!$, tenemos que $34!$ es múltiplo de $5^7$ y por lo tanto es múltiplo de $10^7$ (ya que $34!$ tiene al menos 17 veces 2 en su factorización, un 2 por cada factor par), de donde $b = 0$. Calculando $\frac{34!}{10^7}$ módulo 10 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{34!}{10^7} &= 29,523,279,9cd,960,414,084,761,860,964,35a \\
&= (34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 3\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16) \\
&\quad (3\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 3) \\
&\equiv 2,
\end{aligned}$$

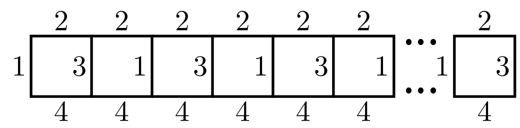
de donde $a = 2$. (Alternativamente, como $\frac{34!}{10^7}$ es múltiplo de 8, tenemos que $35a \equiv 0$ (mod 8) y como $a$ es un dígito, la única posibilidad es $a = 2$). Por otra parte, como $34!$ es múltiplo de 9 y de 11, tenemos que $141+c+d \equiv 6+c+d \equiv -3+c+d \equiv 0$ (mod 9) y $(80-d)-(61+c) = 19+d-c \equiv 8+d-c \equiv 0$ (mod 11). Es fácil ver que $c + d \equiv 3$ (mod 9) sólo si $c = 1, d = 2$; $c = 2, d = 1$; $c = 0, d = 3$ ó $c = 3, d = 0$. De estas posibilidades, la única que cumple con $c - d \equiv 8$ (mod 11) es $c = 0$ y $d = 3$. Por lo tanto, la respuesta es $a = 2, b = 0, c = 0$ y $d = 3$.

**Solución del problema 24.** Sean $X$ y $Y$ los puntos de intersección de $MQ$ y $MR$ con la circunferencia interior, y sea $\mathcal{L}$ la tangente común a ambas circunferencias. Ya que el cuadrilátero $MYPX$ es cíclico, tenemos que $\angle QMP = \angle XYP$. Además, $\angle RMP = \angle RPY$ por subtender el mismo arco. Como el ángulo formado por $\mathcal{L}$ y $MR$ subtiende a los arcos $MR$ y $MY$ en las circunferencias exterior e interior respectivamente, resulta que $\angle MXY = \angle MQR$, de donde $XY$ y $QR$ son paralelas. De aquí que $\angle XYP = \angle RPY$ y por lo tanto $\angle QMP = \angle RMP$.

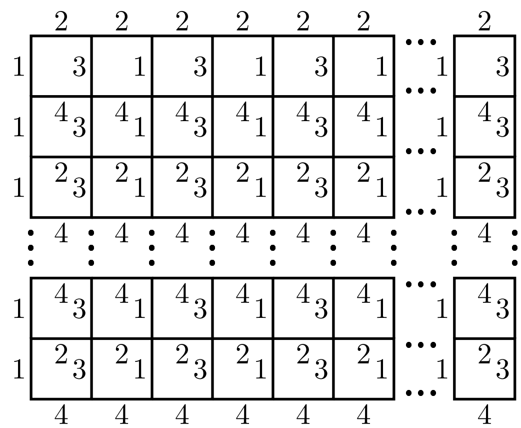



**Solución del problema 25.** Demostraremos que es posible si y sólo si $m$ y $n$ tienen la misma paridad. Los números 1, 2, 3 y 4 denotan los colores.

(a) $m$ y $n$ son ambos impares. Podemos formar un rectángulo de $1 \times n$ como sigue:



Utilizando estos rectángulos de $1 \times n$, podemos formar el rectángulo de $m \times n$ como sigue:



(b) $m$ y $n$ son ambos pares. Por el inciso anterior, podemos formar rectángulos de longitudes impares de dimensiones $(m-1)\times(n-1)$, $1\times(n-1)$, $(m-1)\times 1$ y $1 \times 1$. Estos cuatro rectángulos pueden ensamblarse para formar el rectángulo de $m \times n$.

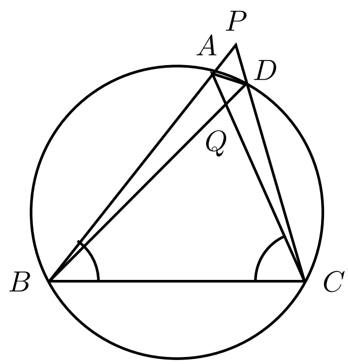
(c) $m$ es par y $n$ es impar. Supongamos que es posible formar el rectángulo de $m \times n$. Consideremos uno de los lados del rectángulo de longitud impar y supongamos que tiene el color 1. Contaremos de dos formas distintas el número de lados de cuadritos que tienen el color 1. En el perímetro del rectángulo tenemos $n$, que es impar. Ahora, en el interior del rectángulo tenemos un número par, ya que todo lado que tiene el color 1 es compartido por dos cuadritos. Luego, el número total de lados de cuadritos que tienen el color 1 es impar. Por otra parte, como todo cuadrito tiene los cuatro colores, el número total de lados de cuadritos que tienen el color 1, es igual al número total de cuadritos en el rectángulo que es $mn$. Esto es una contradicción, ya que $mn$ es par.

**Solución del problema 26.** Tenemos que cualquier entero $N$ se puede escribir en la forma $6k + r$ con $k$ y $r$ enteros, y $0 \leq r \leq 5$. Ahora, como $(k+1)^3 - k^3 - k^3 + (k-1)^3 = 6k$ tenemos que $6k$ se puede expresar como suma de cuatro cubos. Luego, si podemos escribir a $N$ como un múltiplo de 6 más un cubo tendríamos que $N = 6t + s^3 = (t+1)^3 - t^3 - t^3 + (t-1)^3 + s^3$. Como $N = 6k + r$ con $0 \leq r \leq 5$, entonces para $r = 0$, $N = 6k + 0^3$; para $r = 1$, $N = 6k + 1^3$; para $r = 2$, $N = 6k + 2 = 6(k-1) + 2^3$; para $r = 3$, $N = 6k + 3 = 6(k-4) + 3^3$; para $r = 4$, $N = 6k + 4 = 6(k+2) + (-2)^3$; y para $r = 5$, $N = 6k + 5 = 6(k+1) + (-1)^3$.

**Solución del problema 27.** Supongamos que la distancia que se repite entre ocho de los pares de puntos es $d$. Para resolver el problema podemos pensar que los puntos son vértices de una gráfica que están unidos por una arista si la distancia que hay entre ellos es $d$. Sean $V_1$, $V_2, \ldots, V_6$ los vértices de la gráfica. Si $a_i$ es la cantidad de aristas que tiene el vértice $V_i$, entonces tenemos que el número de aristas de la gráfica está dado por $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{2}$. De aquí podemos concluir que debe de haber un vértice de donde salen al menos tres aristas (de lo contrario no podríamos tener más de seis aristas). Supongamos que este vértice es $V_1$ y que está unido con los vértices $V_2$, $V_3$ y $V_4$ por una arista cada uno. Si entre los vértices $V_2$, $V_3$, $V_4$ hay dos aristas, entonces se forma un cuadrilátero con cuatro lados iguales, es decir un paralelogramo. Tenemos entonces dos casos:
(i) No hay aristas entre los vértices $V_2$, $V_3$, $V_4$. En este caso tenemos que cada uno de los vértices $V_5$ y $V_6$ sólo puede estar unido con a lo más dos vértices del conjunto $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ sin que se forme un cuadrilátero con cuatro lados iguales. Como falta una arista, ésta tiene que ser la que une $V_5$ con $V_6$ y forzosamente se forma un paralelogramo con los vértices $V_1$, $V_5$, $V_6$ y alguno de los restantes.
(ii) Hay una arista entre los vértices $V_2$, $V_3$, $V_4$. Podemos suponer que esta arista es la que une $V_2$ con $V_3$. Si $V_5$ ó $V_6$ se unen con dos de los vértices del conjunto $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, entonces se forma un paralelogramo. Supongamos que se unen con a lo más un vértice de este conjunto. Como faltan al menos dos aristas, una de ellas tendría que ser la que une $V_5$ con $V_6$, pero al poner la última arista forzosamente se forma un paralelogramo.

**Solución del problema 28.** Primero observemos que podemos pintar los triangulitos del tablero con dos colores, digamos blanco y negro, de forma que dos triángulos que compartan una arista no tengan el mismo color. Supongamos que podemos llenar el tablero con piezas iguales a las figuras. Cada una de estas piezas estaría coloreada también de dos colores. Tenemos dos casos para la figura 1, que la pieza tenga tres triángulos negros y uno blanco, o que tenga tres blancos y uno negro. Mientras que para la figura 2, siempre habrá la misma cantidad de triángulos blancos que de negros. El tablero tiene en total 260 triángulos, de los cuales 130 son negros y 130 son blancos. Para que la cantidad de triángulos blancos y negros sea la misma, es necesario que la cantidad de piezas iguales a la figura 1 de un caso y del otro sea la misma. Sean $P_1$ y $P_2$ el número de piezas de la figura 1 y 2, respectivamente. Recordando que $P_1$ es par, podemos ver que el número de triangulitos que se tienen usando las figuras es de la forma $P_1 + P_2 = 2(4n) + 8m$ que es divisible entre 8. Pero 260 no es divisible entre 8, por lo que no es posible llenar el tablero con las figuras 1 y 2.

**Solución del problema 29.** La condición $BQ = BC$ implica que $\angle BQC = \angle BCQ$, y $BC = CP$ implica que $\angle PBC = \angle BPC$. Sean $\alpha = \angle QCB$ y $\beta = \angle PBC$. Entonces $\angle BAC + \alpha + \beta = 180°$ y el problema se reduce a probar que $\alpha + \beta = 120°$.




Sea $\gamma = \angle PBQ = \angle QCP$. Como $180° = \angle PBC + \angle BCP + \angle CPB = \beta + (\alpha + \gamma) + \beta = 2\beta + \alpha + \gamma$ y $180° = \angle QBC + \angle BCQ + \angle CQB = (\beta - \gamma) + \alpha + \alpha = 2\alpha + \beta - \gamma$, sumando estas dos igualdades tenemos que $360° = 3\alpha + 3\beta$, de donde $120° = \alpha + \beta$.

**Solución del problema 30.** Sea $N$ el número dado. Módulo $(2k + 1)$ tenemos que $1 \equiv -2k$, $3 \equiv -(2k - 2), \ldots, (2k - 3) \equiv -4$ y $(2k - 1) \equiv -2$. Luego:

$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-3) \times (2k-1) \equiv (-1)^k \times [2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k-2) \times 2k].$$

Si $k$ es impar, tenemos que $N \equiv 0$. Si $k$ es par $N \equiv 2 \times [2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k - 2) \times 2k] = 2 \times 2^k \times k! = 2^{k+1} \times k!$. Supongamos que $2^{k+1} \times k! \equiv 0$. Como $2k + 1$ y $2^{k+1}$ son primos relativos, tenemos que $k! \equiv 0$. Si $2k + 1$ es primo, entonces $k! \not\equiv 0$ ya que $2k + 1 > k$. Supongamos entonces que $2k + 1 = ab$ con $a$ y $b$ enteros mayores que 1. Como $2k + 1$ es impar, tenemos que $a \geq 3$ y $b \geq 3$, de donde $k \geq 4$. Si $k = 4$, es fácil ver que $4! \not\equiv 0 \pmod 9$. Supongamos entonces que $k > 4$. Dividimos en dos casos:
(i) $a = b$. En este caso, $a \leq \frac{k}{2}$ ya que $a \geq \frac{k}{2} + 1 \Rightarrow a^2 = 2k + 1 \geq (\frac{k}{2} + 1)^2 \Rightarrow$

$k \leq 4$, lo cual es una contradicción. Luego, $2a \leq k \Rightarrow k! = a! \times (a+1) \times \cdots \times (2a) \times \cdots \times k \equiv 0 \pmod{a^2}$.
(ii) $3 \leq a < b$. En este caso, $b < k$ ya que $b \geq k \Rightarrow ab = 2k+1 \geq 3k \Rightarrow k \leq 1$, que es una contradicción. Luego, $k! = 2 \times 3 \times \cdots \times a \times \cdots \times b \times \cdots \times k \equiv 0 \pmod{ab}$.
En consecuencia, las soluciones son todos los $k$ impares, y los $k$ pares distintos de 4 tales que $2k+1$ no es primo.

**Solución del problema 31.** De acuerdo con la ilustración dada, al pasar de la $n$-ésima configuración a la siguiente, se agregan exactamente 3 lados con $n+1$ puntos cada uno, de los cuales sólo dos de los nuevos cuatro vértices del pentágono (los vértices de la base) se cuentan doble. Luego, $V_{n+1} = V_n + 3(n+1) - 2 = V_n + (3n+1)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mediante reemplazos sucesivos tenemos que:

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= V_n + (3n+1) \\
&= V_{n-1} + (3(n-1)+1) + (3n+1) \\
&= V_{n-2} + (3(n-2)+1) + (3(n-1)+1) + (3n+1) \\
&\vdots \\
&= V_1 + (3(1)+1) + \cdots + (3(n-1)+1) + (3n+1) \\
&= 1 + 3(1+2+\cdots+n) + n = 1 + \frac{3}{2}n(n+1) + n \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo $n$ por $n-1$ tenemos que $V_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y por lo tanto, $24 \cdot f(V_n) = 24 \cdot V_{V_n} = 24 \cdot \frac{1}{2}V_n(3V_n - 1) = 12(3V_n^2 - V_n) = 36(\frac{1}{4}n^2(3n-1)^2) - 12(\frac{1}{2}n(3n-1)) = (3n-2)(3n-1)(3n)(3n+1)$, que es el producto de cuatro enteros consecutivos.

**Solución del problema 32.** Observemos que área$(APCQ)$ = área$(APC)$ + área$(AQC) = \frac{1}{2}(AP)(BC) + \frac{1}{2}(AQ)(DC)$, esto por la fórmula "base por altura sobre dos" para el área de un triángulo. Ahora, $AP = AD = BC$, la primera igualdad por la manera en que se construyó $P$ y la segunda porque $ABCD$ es un rectángulo. De la misma forma, $AQ = AB = DC$. Entonces $\frac{1}{2}(AP)(BC) + \frac{1}{2}(AQ)(DC) = \frac{1}{2}AD^2 + \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}(AD^2 + AB^2)$. Por el Teorema de Pitágoras, $AD^2 + AB^2 = BD^2 = 6^2 = 36$. Por lo tanto, el área que buscamos es $\frac{1}{2}(36) = 18$.

**Solución del problema 33.** Supongamos que los dos dígitos de la derecha del número elegido son $a$ y $b$. Entonces la segunda operación que realizó la persona fue $(10a+b) \div b$. Si el residuo de esta división es 5, entonces $b \geq 6$ (el residuo es menor que el divisor). Pero $b \leq 9$, por ser un dígito. Además, $b$ divide a $(10a+b)-5$ y por lo tanto divide a $10a-5$. Pero $10a-5$ sólo puede tomar los valores $-5, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75$ u $85$, según el valor de $a$, que va de 0 a 9. De estos valores posibles para $10a-5$, sólo 35 y 45 tienen un divisor $\geq 6$ y $\leq 9$, luego alguna de las siguientes cosas ocurre: $10a-5=35$ y $b=7$, de donde $10a+b=47$; o bien, $10a-5=45$ y $b=9$, de donde $10a+b=59$. Así, el número elegido por la persona debe terminar en 47 o en 59 (y para cualquiera de estas terminaciones el residuo de la segunda división sería 5). 100 deja residuo 6 al dividirse entre 47, luego los números $147, 247, \ldots, 947$ dejan, respectivamente, residuos $6, 12, 18, \ldots, 42, 1$ y 7. Como se ve, el único de ellos que deja residuo 1 al dividirlo entre 47 es 847. De la misma manera se puede revisar que de los números $159, 259, \ldots, 959$, no hay ninguno que deje residuo 1 al dividirse entre 59. Por lo tanto, el número que eligió la persona es 847, y ésta es la única respuesta posible.

**Solución del problema 34.** Contando todas las ternas de puntos posibles, tenemos $\binom{30}{3}$. De éstas, hay que restar las ternas colineales. Es fácil ver que de éstas últimas hay $5\binom{6}{3}$. Luego, la respuesta es $\binom{30}{3}-5\binom{6}{3}=3960$. Alternativamente, podemos dividir en casos. Primero contamos los triángulos que provengan de tres lados distintos. De éstos hay $\binom{5}{3}\cdot 6^3$, ya que por cada uno de los tres lados elegidos del pentágono tenemos 6 posibilidades para elegir los vértices. Falta entonces contar los triángulos que provengan sólo de dos lados distintos (dos vértices en un lado y el tercero en el otro). De éstos hay $2[\binom{5}{2}\binom{6}{2}\cdot 6]$, ya que por cada uno de los dos lados elegidos del pentágono tenemos $\binom{6}{2}$ formas de elegir dos vértices de un lado y 6 formas de elegir el tercer vértice del otro lado. Luego, la respuesta es $\binom{5}{3}\cdot 6^3+2[\binom{5}{2}\binom{6}{2}\cdot 6]=2160+1800=3960$.

**Solución del problema 35.** Sea $M$ el punto medio de $AD$. Como $BM$ es perpendicular a $AD$ (por ser el triángulo $ABD$ isósceles con $AB=BD$), tenemos que el centro O, de la circunferencia está sobre $BM$ y como $AC$ es diámetro, se sigue que $O$ es el punto de intersección de $BM$ y $AC$. Además $CD$ es perpendicular a $AD$ y por lo tanto $OM$ y $CD$ son paralelas. Por la semejanza de los triángulos $OMA$ y $CDA$, se sigue que $OM=\frac{1}{2}CD$. Finalmente, de la semejanza de los triángulos $DPC$ y $BPO$ tenemos que $\frac{BO}{CD}=\frac{OP}{PC}$, es decir $\frac{12}{CD}=\frac{6}{6}$, y de aquí que $CD=12$. Por lo tanto, $OM$ (que es lo que buscamos) mide 6.

**Solución del problema 36.** Sea $p$ tal que $1\leq p\leq n$. Por el Algoritmo de la división, existe una única pareja de enteros $(q,r)$ tal que $n=pq+r$ con

$0 \leq r \leq p-1$. Entonces, $r$ veces $q+1$ y $p-r$ veces $q$ sumarán $n$. Luego, hay exactamente una forma de escribir $n$ con $p$ sumandos, de donde la respuesta es $n$.

**Solución del problema 37.** Como $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, tenemos que $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ y así $(n+1)(2n+1) = 6m^2$ para algún entero positivo $m$. Como $2n+1$ es impar, entonces $n+1$ es par y por lo tanto $n$ es impar. Sea $n = 2k-1$. Tenemos entonces que $k(4k-1) = 3m^2$. Luego, $3$ divide a $k$ o a $4k-1$, es decir, $3$ divide a $k$ o a $k-1$. Si $k = 3l$ entonces $l(12l-1) = m^2$. Como $l$ y $12l-1$ son primos entre sí, tenemos que $l = u^2$ y $12l-1 = v^2$. Esto es imposible, pues $12l-1 \equiv 2 \pmod 3$ y todo cuadrado es congruente con 0 ó 1 módulo 3. Supongamos entonces que $k = 3l+1$. Luego, $(3l+1)(4l+1) = m^2$. Como $3l+1$ y $4l+1$ son primos entre sí, tenemos que $3l+1 = u^2, 4l+1 = v^2, u > 1, v > 1$ con $v$ impar. Verificando para $v = 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$, obtenemos $l = 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots$ y $3l+1 = 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169 = 13^2, \ldots$. Por lo tanto, la respuesta es $n = 2k-1 = 2(3l+1)-1 = 2(169)-1 = 337$.

**Solución del problema 38.** Recordemos que las diagonales de un cuadrilátero $XYZW$ son perpendiculares si y sólo si $XY^2+ZW^2 = YZ^2+WX^2$. Entonces basta probar que $AN^2+CM^2 = AM^2+CN^2$. Si $P$ es el pie de la perpendicular a $BC$ desde $M$, entonces $CM^2 = CP^2+MP^2$. Como $BM$ es bisectriz, tenemos que $MP = AM$ y de aquí que $BP = AB$, de manera que $AN^2 + CM^2 = AN^2+AM^2+(BC-AB)^2$. Análogamente, si $Q$ es el pie de la perpendicular a $CD$ desde $N$, entonces $CN^2 = NQ^2+CQ^2$. Como $DN$ es bisectriz, tenemos que $NQ = NA$ y de aquí que $AD = DQ$, de manera que $AM^2 + CN^2 = AM^2 + NA^2 + (DC-AD)^2$. Finalmente, como $AB + CD = AD + BC$ (esta es una propiedad de los cuadriláteros que tienen circunferencia inscrita), entonces $BC - AB = DC - AD$ y con esto concluimos.

**Solución del problema 39.** Necesitamos que $S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ sea múltiplo de 12. Entonces $n(n+1)$ debe ser múltiplo de $2^3 \times 3$. Además, $n \geq 12$ pues el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ debe partirse en 12 subconjuntos. Las posibilidades son $n = 15, 23, 24, \ldots$. Para $n = 15$, $S_n = \frac{15\times16}{2} = 120$, así que la suma de cada subconjunto debería ser 10, pero como uno de los subconjuntos debe contener al 15, este caso es imposible. Para $n = 23$, $S_n = \frac{23\times24}{2} = 23 \times 12$, así que la suma de cada subconjunto debe ser 23. Este caso sí es posible tomando los subconjuntos: $A_1 = \{1, 22\}, A_2 = \{2, 21\}, A_3 = \{3, 20\}, \ldots, A_{11} = \{11, 12\}$ y $A_{12} = \{23\}$. Luego, la respuesta es $n = 23$.

**Solución del problema 40.** Demostraremos que $\angle OAO' + \angle OQO' = 180°$. Como $A$ es la intersección de la perpendicular a $BQ$ por $O$ y la perpendicular a

$B'Q$ por $O'$, tenemos que $\angle OAO' = 180° - \angle BQB'$. Basta entonces demostrar que $\angle OQO' = \angle BQB'$. Consideremos la recta paralela a $OO'$ que pasa por $P$. Ésta intersecta a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{C}'$ en $C$ y $C'$ respectivamente y, como $QP$ es perpendicular a $OO'$, entonces también es perpendicular a $CC'$, y por lo tanto $CQ$ y $CQ'$ son diámetros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, respectivamente. Por otro lado, por abarcar los mismo arcos, tenemos que $\angle B'BQ = \angle C'CQ$ y $\angle BB'Q = \angle CC'Q$, de donde los triángulos $BB'Q$ y $CC'Q$ son semejantes y $\angle BQB' = \angle CQC' = \angle OQO'$, como queríamos.

**Solución del problema 41.** Tenemos que el acomodo original de las tarjetas es:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25,$$

y después del primer paso es:

$$25\ 1\ 24\ 2\ 23\ 3\ 22\ 4\ 21\ 5\ 20\ 6\ 19\ 7\ 18\ 8\ 17\ 9\ 16\ 10\ 15\ 11\ 14\ 12\ 13.$$

Ahora observemos que de lo anterior se puede deducir qué va a pasar con cada tarjeta después de varios pasos. Por ejemplo, la tarjeta número 10 va al lugar 20 en el primer paso, así que en el segundo paso irá al lugar al que fue la tarjeta número 20 en el primer paso, que es el lugar 11, y en el tercer paso irá al lugar al que fue la tarjeta 11 en el primero (y éste será el segundo paso para la tarjeta con el número 20), o sea al lugar 22, y así sucesivamente. Escribamos entonces las posiciones en que va quedando la carta que lleva el número 1: $1, 2, 4, 8, 16, 19, 13, 25, 1, \ldots$.

De aquí en adelante sus posiciones se repiten y también sabemos cómo van quedando todas las tarjetas que aparecieron en esta lista. Tomemos ahora la primera tarjeta que no está en la lista: la número 3 y sigamos su trayectoria como lo hicimos con la del número 1 hasta lograr una repetición: $3, 6, 12, 24, 3, \ldots$.

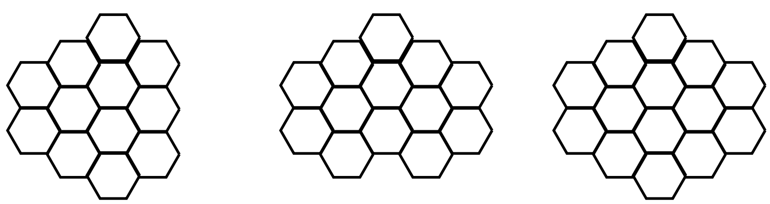
Ahora hagamos lo mismo con la tarjeta 5: $5, 10, 20, 11, 22, 7, 14, 23, 5, \ldots$.

Y ahora con la tarjeta 9: $9, 18, 15, 21, 9 \ldots$.

Falta sólo considerar la tarjeta 17, que queda siempre en su lugar. Como todas las tarjetas llevan un movimiento cíclico, vemos que todas llegan en algún momento a su lugar original, y que las tarjetas del primer ciclo (las de la lista del 1) se repiten cada 8 veces (la longitud del ciclo); las de la segunda lista se repiten cada 4 veces, las de la tercera, cada 8 veces, las de la cuarta, cada 4 veces y la última se repite siempre. Entonces se repiten juntas en el mínimo común múltiplo de 1, 4 y 8 que es 8.

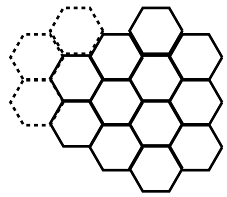
**Solución del problema 42.** Usaremos el principio de inclusión-exclusión. El número total de acomodos es $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{8!}{2^4}$. Para ver los acomodos en que al menos dos esferas del mismo color quedan juntas, nos fijamos en que las posibilidades de escoger dos lugares juntos son 7 (que son $(1\,2), (2\,3), \ldots, (7\,8)$). El color de las que quedan juntas puede escogerse de 4 formas. Las demás esferas pueden colocarse de $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ formas. Entonces, en total, el número de estos acomodos es $\frac{7!}{2^3} \times 4$. Contemos ahora los acomodos en que al menos dos parejas de esferas quedan juntas. Vemos que las posibilidades para los lugares donde quedan juntas son 15 ($(1\,2)(3\,4)$, $(1\,2)(4\,5)$, $(1\,2)(5\,6)$, $(1\,2)(6\,7)$, $(1\,2)(7\,8)$, $(2\,3)(4\,5)$, $(2\,3)(5\,6)$, $(2\,3)(6\,7)$, $(2\,3)(7\,8)$, $(3\,4)(5\,6)$, $(3\,4)(6\,7)$, $(3\,4)(7\,8)$, $(4\,5)(6\,7)$, $(4\,5)(7\,8)$, $(5\,6)(7\,8)$). Las posibilidades para el primer color de las que quedan juntas son 4, y para el segundo color son 3; las demás esferas pueden colocarse de $\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ formas. En total, el número de estos acomodos es $\frac{6!}{2^3} \times 4 \times 3$. Análogamente, las posibilidades de que al menos tres parejas de esferas queden juntas se cuenta como sigue: Son 10 posibilidades para los lugares donde quedan juntas ($(1\,2)(3\,4)(5\,6)$, $(1\,2)(3\,4)(6\,7)$, $(1\,2)(3\,4)(7\,8)$, $(1\,2)(4\,5)(6\,7)$, $(1\,2)(4\,5)(7\,8)$, $(1\,2)(5\,6)(7\,8)$, $(2\,3)(4\,5)(6\,7)$, $(2\,3)(4\,5)(7\,8)$, $(2\,3)(5\,6)(7\,8)$, $(3\,4)(5\,6)(7\,8)$); las posibilidades de escoger los colores para las que quedan juntas son $4 \times 3 \times 2$ y las últimas dos esferas tienen ya el lugar determinado: $\binom{2}{2}$. En esta cuenta tenemos en total $10 \times 4 \times 3 \times 2$. Finalmente, el número de posibilidades en que las cuatro parejas de esferas del mismo color queden juntas es $4!$. Juntando todo con inclusión-exclusión tenemos el resultado: $\frac{8!}{2^4} - \frac{7! \times 4}{2^3} + \frac{6!}{2^3} \times 4 \times 3 - 10 \times 4 \times 3 \times 2 + 4! = 864$.

**Solución del problema 43.** Para $n = 12, 13$ y $14$ los acomodos son como sigue:



$n = 12$ $\quad$ $n = 13$ $\quad$ $n = 14$

Supongamos que tenemos construido un "panal" con $n$ hexágonos para cierta $n \geq 12$ y construyamos un panal con $n + 3$ hexágonos agregando 3 hexágonos a cualquiera de las figuras que se tienen arriba. Si continuamos esta construcción indefinidamente (agregar 3 hexágonos a cualquiera de las nuevas figuras obtenidas), aseguramos que todos los enteros $n \geq 12$ están cubiertos. Los tres hexágonos que agregamos se indican con línea punteada en la siguiente figura:



**Solución del problema 44.** Tenemos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= a_1 + 2 = 3 = 2a_1 + 1, \\ a_3 &= 2a_2 + a_1 + 3 = 2a_2 + (a_1 + 2) + 1 = 3a_2 + 1, \\ a_4 &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 + 4 = 3a_3 + a_3 + 1 = 4a_3 + 1, \\ &\vdots \\ a_n &= na_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Entonces, módulo 9 tenemos que $a_1 \equiv 1, a_2 \equiv 3, a_3 \equiv 3 \times 3 + 1 \equiv 1, a_4 \equiv 4 \times 1 + 1 \equiv 5, a_5 \equiv 5 \times 5 + 1 \equiv 8, a_6 \equiv 6 \times 8 + 1 \equiv 4, a_7 \equiv 7 \times 4 + 1 \equiv 2, a_8 \equiv 8 \times 2 + 1 \equiv 8, a_9 \equiv 0 \times 8 + 1 \equiv 1, a_{10} \equiv 1 \times 1 + 1 \equiv 2, a_{11} \equiv 2 \times 2 + 1 \equiv 5, a_{12} \equiv 3 \times 5 + 1 \equiv 7, a_{13} \equiv 4 \times 7 + 1 \equiv 2, a_{14} \equiv 5 \times 2 + 1 \equiv 2, a_{15} \equiv 6 \times 2 + 1 \equiv 4, a_{16} \equiv 7 \times 4 + 1 \equiv 2.$
Observemos que $a_{16}$ se construyó igual que $a_7$ así que, como se usa la misma regla de recurrencia, a partir de aquí todo se repite (o sea, $a_{17} \equiv a_8$, $a_{18} \equiv a_9$, etc.). Entonces ningún $a_n$ es congruente con 0 módulo 9, de donde no hay $n'$s tales que $a_n$ sea múltiplo de 9.

**Solución del problema 45.** (a) Por la igualdad de los lados tenemos que los triángulos $ADC$ y $BCD$ son congruentes. Entonces sus medianas sobre $DC$ son iguales, es decir $AP_2 = BP_2$. Luego, el triángulo $AP_2B$ es isósceles y su mediana $P_1P_2$ es perpendicular al lado opuesto $AB$.
(b) Por la simetría de los argumentos, basta probar que $P_1P_2$ es perpendicular a $Q_1Q_2$ y que se intersectan en sus puntos medios. En el triángulo $ABC$ tenemos que $P_1Q_1$ y $BC$ son paralelas y $P_1Q_1 = \frac{1}{2}BC$. Análogamente, en el triángulo $DBC$ tenemos que $P_2Q_2$ y $BC$ son paralelas y $P_2Q_2 = \frac{1}{2}BC$. Luego, $P_1Q_1$ y $P_2Q_2$ son paralelas y $P_1Q_1 = P_2Q_2$. Análogamente, tenemos que $P_1Q_2$ y $P_2Q_1$ son paralelas y $P_1Q_2 = P_2Q_1$. Finalmente, como $P_1Q_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = P_1Q_2$, se sigue que $P_1Q_1P_2Q_2$ es un rombo y por lo tanto sus diagonales $P_1P_2$ y $Q_1Q_2$ se intersectan perpendicularmente en los respectivos puntos medios.

**Solución del problema 46.** Veremos que $n$ es el mínimo número de pasos necesarios. Para ver que con $n$ se puede, digamos que el mago siempre toca el cuadrito que está en la esquina de arriba a la izquierda (es decir, el mago va tocando los cuadritos de la diagonal de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha). Entonces, es claro que en $n$ pasos todo el tablero habrá desaparecido. Para ver que $n$ es el menor, supongamos que con $k$ pasos es posible y que $k < n$. Entonces, hay una fila cuyos cuadritos nunca tocó el mago; pero en esa fila hay $n$ cuadritos, y entonces la única forma en que éstos desaparecieron es porque el mago en algún momento tocó al menos un cuadrito en cada columna original. Pero esto es imposible, pues hay $n$ columnas.

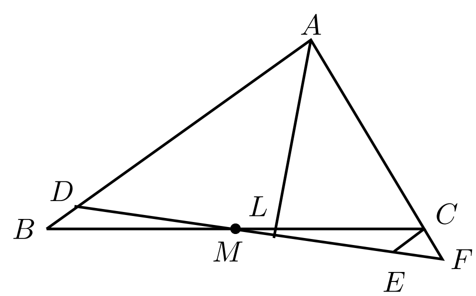
**Solución del problema 47.** Si $7|(a+b)$ y $7^2|(a^2+b^2)$, entonces $7^2|(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$, por lo que $7^2|ab$. Luego, $7^3|ab(a+b)$. Como $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $7^3|(a+b)^3$ y $7^3|3ab(a+b)$, se sigue que $7^3$ divide a $a^3+b^3$.

**Solución del problema 48.** Es fácil ver que $(a-1)(b-1)(c-1)=abc+(a+b+c)-(ab+bc+ca)-1$. Luego, como:

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}=bc+ca+ab,$$

se sigue que $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1=1-1=0$ y en consecuencia alguno de $a$, $b$ ó $c$ es igual a $1$.

**Solución del problema 49.** Sean $D$ y $F$ los puntos donde la perpendicular a la bisectriz $AL$ corta a los lados $AB$ y $AC$ respectivamente. Como $AL$ también es altura del triángulo $ADF$, resulta que este triángulo es isósceles, por lo que $AD=AF$. Sea $E$ sobre $DF$ de manera que $CE$ es paralelo a $AB$. Como los triángulos $BMD$ y $CME$ son congruentes, tenemos que $BD=CE$. Por otro lado tenemos que los triángulos $ADF$ y $CEF$ son semejantes por tener lados paralelos. Entonces, el triángulo $CEF$ es isósceles con $CE=CF$. Luego, $2AD=AD+AF=AD+AC+CF=AD+AC+BD=AB+AC$.



**Solución del problema 50.** Sean $P$ y $G$ la cantidad de dinero que tienen Pablo y Galo, respectivamente. Tenemos entonces que $P+3=n(G-3)$ y $G+n=3(P-n)$. De aquí que $G+n=3(n(G-3)-3-n)=3nG-12n-9$ y en consecuencia $n=\frac{G+9}{3G-13}$. Como $n$ es un entero positivo, debemos tener que $3G-13|G+9$, de donde $3G-13|3G+27$ y $3G-13|(3G+27)-(3G-13)$, es decir, $3G-13|40$. Analizando los posibles divisores de 40, es fácil ver que las únicas soluciones son $n=1,2,3$ y 7.

**Solución del problema 51.** Empezamos contando los números menores que 100 que contienen el dígito 1. Entre los números de un sólo dígito, únicamente está el 1; entre los números de dos dígitos, los números del 10 al 19 contienen un 1 y son 10; entre los números del 20 al 99 hay otros 8 números que contienen al 1. Luego, hay 19 números menores que 100 que contienen al 1.
De los números del 100 al 199, todos contienen al uno, es decir, hay 100 números que contienen al 1. De 200 a 299, tenemos el mismo escenario que para los números del 1 al 99; es decir, hay 19 números que contienen 1. Análogamente, para los números que están entre 300 y 399, 400 y 499,..., 900 y 999, exactamente 19 números contienen al 1.
Sea $T$ el número de boletos que tienen al 1. Queremos encontrar los valores de $n$ y $T$ tales que $T=\frac{n}{2}$, o bien tales que $\frac{T}{n}=\frac{1}{2}$. Ahora, para $n=99$ tenemos que $\frac{T}{n}=0{,}192$; para $n=199$, $\frac{T}{n}$ es aproximadamente 0.598; y para $n=299$, $\frac{T}{n}=0{,}462$. En cada grupo de 100 números la razón de crecimiento de $T$ es apenas mayor que $\frac{1}{2}$ con los primeros 20 números, y la razón de crecimiento de $n$ es mucho mayor. Entonces podemos olvidarnos de todos los valores de $n$ mayores que 319, ya que para $n=319$ el número de boletos que contienen al dígito 1 es $19+100+19+11=149$ y $\frac{T}{n}=\frac{149}{319}<\frac{1}{2}$. Por lo tanto, si $\frac{T}{n}=\frac{1}{2}$, entonces $n$ tiene que variar entre 1 y 299.
Si $100\leq n\leq 199$, entonces es fácil ver que $T$ aumenta en 1 cada vez que $n$ aumenta en 1 (ya que todos los números en este rango tienen al uno en el dígito de las centenas). Luego, estamos buscando un entero $k$ tal que:

$$\frac{T}{n}=\frac{20+k}{100+k}=\frac{1}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos que $k=60$, $n=160$ y $T=80$. Por lo tanto, 160 es una solución.
Si $200\leq n\leq 300$, entonces el crecimiento de $T$ no es proporcional al crecimiento de $n$. Consideremos primero el rango de valores $200\leq n\leq 209$. Entonces, $T=119$ para $n=200$ y $T=120$ para $n=209$. Para todos estos valores de $n$, tenemos que $\frac{T}{n}>\frac{1}{2}$. Ahora consideremos el rango de valores $210\leq n\leq 219$. En este rango de valores la razón $\frac{T}{n}$ crece, ya que $T$ crece en la misma cantidad

que $n$, lo que implica que $\frac{T}{n} > \frac{1}{2}$.
Para $n \geq 219$ debemos tener que $T \geq 130$, lo que quiere decir que necesitamos $n \geq 260$ para tener que $\frac{T}{n} = \frac{1}{2}$. Sin embargo, cuando $n = 260$, vemos que $T = 134$. Entonces necesitamos que $n \geq 268$, pero en este caso $T = 135$. Luego, $n$ tiene que ser al menos 270. En efecto, $n = 270$ es una solución. Como $n$ tiene que ser par, la siguiente posibilidad es $n = 272$ y en este caso $T = 136$, lo que quiere decir que $n = 272$ es también solución. Ahora el siguiente número que contiene el dígito 1 es el 281, pero en este momento $T = 137$, lo que implica que $\frac{T}{n} < \frac{1}{2}$. Como el valor de $\frac{T}{n}$ continuará decreciendo a partir de este momento, hemos encontrado todas las soluciones. Es decir, el conjunto de soluciones para $n$ es $\{160, 270, 272\}$.

**Solución del problema 52.** Sea $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$. Como $p$ es impar, $S$ tiene un número par de sumandos. Agrupando el primer sumando con el último, el segundo con el penúltimo, y así sucesivamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) \\ &= \frac{p}{p-1} + \frac{p}{2(p-2)} + \cdots + \frac{p}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)} \\ &= \frac{pm}{(p-1)!}, \end{aligned}$$

donde $m$ es el numerador de la suma $\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}$ y $(p-1)!$ el denominador. Como $(p-1)!$ no contiene a $p$ (por ser $p$ un número primo), se sigue que el numerador de $S$ es múltiplo de $p$.

**Solución alternativa.** Veamos primero que *para cualesquiera enteros $a$ y $b$ primos relativos con $n$ ($n$ entero positivo), el numerador de $\frac{c}{a} + \frac{d}{b}$ es divisible entre $n$ si y sólo si $ca^{-1} + db^{-1}$ es divisible entre $n$, donde $a^{-1}$ y $b^{-1}$ son los respectivos inversos de $a$ y $b$ módulo $n$ (recuerde que $k$ es un inverso de $k'$ módulo $n$ si $kk' \equiv 1$ (mod $n$))*. En efecto, tenemos que $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{bc+ad}{ab}$ y $bc + ad \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow a^{-1}b^{-1}(bc + ad) \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow ca^{-1} + db^{-1} \equiv 0 \pmod{n}$.
Regresando a la solución del problema, basta demostrar entonces que:

$$1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + (p-1)^{-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

donde $k^{-1}$ es el inverso de $k$ módulo $p$, para $k = 1, 2, \ldots, p-1$.
Por ser $p$ un número primo, todos los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$

tienen inverso módulo $p$ (ver [11]) y es fácil probar que el inverso de cada uno de ellos es único (¿por qué?). Luego:

$$1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + (p-1)^{-1} = 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2},$$

y $\frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}$, ya que $\frac{p-1}{2}$ es entero.

**Solución del problema 53.** Numeremos las fichas de 1 hasta 2004, y supongamos que la 1 es la negra y las restantes son blancas. Observemos que cada ficha inicialmente blanca debe ser "tocada" un número par de veces, para que al final del proceso siga teniendo la cara blanca hacia arriba. Además, cada movimiento posible cambia el número de fichas negras en un número impar:

**BNB** pasa a **NBN**, el número de fichas negras aumentó en 1;

**NNB** pasa a **BBN**, el número de fichas negras disminuyó en 1;

**BNN** pasa a **NBB**, el número de fichas negras disminuyó en 1

**NNN** pasa a **BBB**, el número de fichas negras disminuyó en 3.

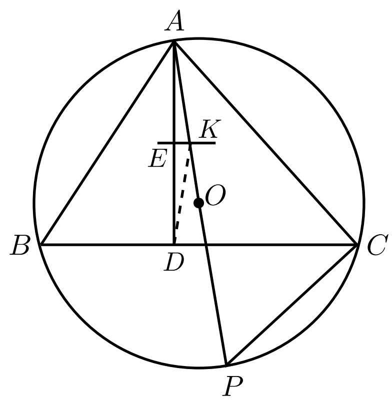
Como inicialmente hay exactamente una ficha negra, el número de movimientos para tener 2004 fichas con la cara blanca hacia arriba debe ser impar. Sea $x_i$ el número de movimientos realizados eligiendo la ficha $i$ (que debe ser negra). La ficha que ocupa el lugar $i$ cambia de color en los movimientos en que la elegimos a ella($i$), a la de su izquierda $(i-1)$ o a la de su derecha $(i+1)$ (2004 +1 se identifica con 1 y 2003 + 2 se identifica con 1). Por lo tanto, $x_{i-1} + x_i + x_{i+1}$ es el número de veces que hemos dado vuelta a la ficha que ocupa el lugar $i$. Luego, el número total de movimientos es:

$$N = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + \cdots + (x_{2002} + x_{2003} + x_{2004}).$$

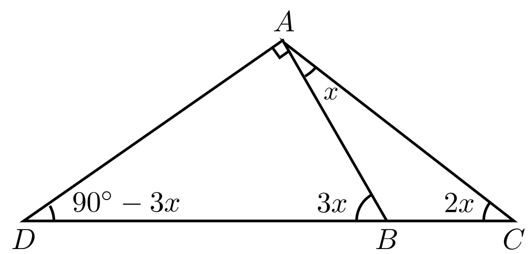
Como 2004 es múltiplo de 3, $N$ es la suma del número de veces que hemos dado la vuelta a las fichas en los lugares $2, 5, \ldots, 3k+2, \ldots, 2003$, todas ellas blancas al principio, así que $N$, que es suma de números pares, debería ser par. Pero esto es una contradicción, pues $N$ es impar. Por lo tanto, no será posible conseguir que las 2004 fichas tengan la cara blanca hacia arriba.

**Solución del problema 54.** Sean $K$ la intersección de $OA$ con la mediatriz de $AD$, $E$ la intersección de la mediatriz de $AD$ con $AD$ y $P$ el punto diametralmente opuesto de $A$ en el circuncírculo de $ABC$. Entonces, $\angle PAC + \angle APC = 90°$ y $\angle APC = \angle ABC$. Como $AD$ es bisectriz del ángulo en $A$, tenemos que

$\angle DAO + \angle PAC = \angle BAD$. Luego, $\angle BDA = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAD = 180^\circ - \angle APC - (\angle DAO + \angle PAC) = 180^\circ - (\angle APC + \angle PAC) - \angle DAO = 180^\circ - 90^\circ - \angle DAO = \angle AKE$, y por lo tanto $\angle KDC = 180^\circ - \angle KDA - \angle BDA = 180^\circ - \angle KAD - \angle AKE = 90^\circ$, es decir, $KD$ es perpendicular a $BC$.




**Solución del problema 55.** Sea $\angle CAB = x$. Entonces $\angle BCA = 2x$, $\angle DBA = 3x$, $\angle CBA = \pi - 3x$, $\angle CAD = \frac{\pi}{2} + x$ y $\angle CDA = \frac{\pi}{2} - 3x$.

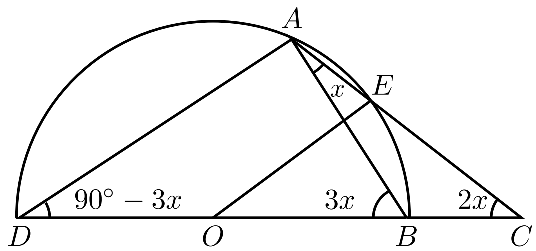



Utilizando la ley de los senos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{CA}{BC} - \frac{CA}{CD} &= \frac{\text{sen}\,\angle CBA}{\text{sen}\,\angle BAC} - \frac{\text{sen}\,\angle CDA}{\text{sen}\,\angle CAD} \\
&= \frac{\text{sen}\,(\pi - 3x)}{\text{sen}\,x} - \frac{\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - 3x)}{\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + x)} \\
&= \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,3x \cos x - \cos 3x\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x \cos x} \\
&= \frac{\text{sen}\,(3x - x)}{\frac{1}{2}\text{sen}\,2x} = 2,
\end{aligned}$$

de donde, $\frac{1}{BC} - \frac{1}{DC} = \frac{2}{CA}$.

**Solución alternativa.** Sea $O$ el punto medio del segmento $BD$. Como $\angle BAD = 90^\circ$, el circuncentro del triángulo $ADB$ está en $O$. Supongamos que el circuncírculo del triángulo intersecta a $CA$ en $E$. Entonces $\angle BOE = 2\angle BAE = \angle BCE$.




Por lo tanto, $CE = OE = \frac{1}{2}BD$. Luego,

$$\frac{1}{2}BD \cdot CA = CE \cdot CA = CB \cdot CD,$$

de donde:

$$\frac{2BC}{CA} = \frac{BD}{CD} = \frac{CD - BC}{CD} = 1 - \frac{BC}{CD},$$

y de aquí:

$$\frac{1}{BC} - \frac{1}{CD} = \frac{2}{CA},$$

como queríamos.

**Solución del problema 56.** Como $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, tenemos que $(a+b)^{2n} = ((a+b)^2)^n = ((a-b)^2 + 4ab)^n \equiv (4ab)^n \pmod{(a-b)^2}$. Luego, módulo $(a-b)^2$ tenemos que $2^{2n-1}(a^{2n}+b^{2n}) - (a+b)^{2n} \equiv 2^{2n-1}(a^{2n}+b^{2n}) - 4^n a^n b^n = 2^{2n-1}(a^{2n}+b^{2n}) - 2^{2n}a^n b^n = 2^{2n-1}(a^{2n}+b^{2n}-2a^n b^n) = 2^{2n-1}(a^n - b^n)^2 = 2^{2n-1}(a-b)^2(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})^2 \equiv 0$, donde usamos dos veces la factorización $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$.

**Solución del problema 57.** Etiquetemos las casillas del tablero con las parejas $(r, s)$, donde $1 \leq r \leq 200$ es el número del renglón (numerado de la parte superior a la parte inferior del tablero) y $1 \leq c \leq 200$ es el número de la columna (numerado de izquierda a derecha). Es fácil ver que si suponemos que cada cuadrado de $2 \times 2$ contiene un número par de casillas blancas, entonces $(i, j)$ y $(i+1, j)$ son del mismo color si y sólo si $(i, j+1)$ y $(i+1, j+1)$ son del mismo color.
Entonces, supongamos que cada cuadrado de $2 \times 2$ contiene un número par de casillas blancas, es decir que cada cuadrado de $2 \times 2$ contiene un número par

de casillas negras. Sean $b$ y $w$ el número de casillas negras y blancas respectivamente, en el primer renglón del tablero. Como $b+w=200$, entonces $|b-w|$ es un número par, digamos $2m \leq 200$.
Ahora, consideremos el siguiente renglón del tablero. Si la primera casilla en este segundo renglón es del mismo (respectivamente diferente) color que la casilla arriba de ella, entonces cada casilla en el segundo renglón es del mismo (respectivamente diferente) color que la casilla arriba de ella. Podemos repetir este razonamiento con los siguientes renglones para ver que cada renglón es igual o diferente en color al primer renglón. Sea $x$ el número de renglones del mismo color que el primero y sea $y$ el número de renglones de diferente color al primero. Como $x+y=200$, se tiene que $|x-y|$ es par, digamos $2n \leq 200$. Entonces la diferencia entre el número de casillas negras y blancas es $|b-w| \cdot |x-y| = 4mn = 404$. Entonces, $mn=101$, pero como $101$ es primo, esto implica que $m$ ó $n$ es $101$, lo cual es imposible ya que $2m$ y $2n$ son a lo más $200$.

**Solución del problema 58.** Después de quitar las fichas, no hay renglones o columnas que contengan fichas blancas y negras al mismo tiempo. Así, llamemos una columna o renglón negro si contiene sólo fichas negras y blanco si contiene sólo fichas blancas. Sea $r_b$ el número de renglones negros, $r_w$ el número de renglones blancos, $c_b$ el número de columnas negras y $c_w$ el número de columnas blancas. Como $r_b+r_w+c_b+c_w=4n$, tenemos que:

$$r_b r_w c_b c_w \leq n^4,$$

por la desigualdad de la media geométrica - media aritmética. Es decir, $r_w c_w \leq n^2$ ó $r_b c_b \leq n^2$. En el primer caso, a lo más $n^2$ fichas blancas quedan sin quitar, y en el segundo caso, a lo más $n^2$ fichas negras quedan sin quitar.

**Solución del problema 59.** Aplicando el binomio de Newton, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(a+b)^7-a^7-b^7 &= 7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6 \\
&= 7[a^5b(a+b)+2a^4b^2(a+b)+3a^3b^3(a+b)+ \\
&\quad 2a^2b^4(a+b)+ab^5(a+b)] \\
&= 7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4) \\
&= 7ab(a+b)[(a+b)^4-2ab(a+b)^2+a^2b^2] \\
&= 7ab(a+b)[(a+b)^2-ab]^2 \\
&= 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.
\end{aligned}$$

Como $a, b$ y $a+b$ no son múltiplos de 7, se sigue que $a^2+ab+b^2$ debe ser múltiplo de $7^3$, y por lo tanto $(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \geq 7^3 = 343$, lo cual implica que $(a+b) \geq 19$. Finalmente, es fácil ver que $a = 18$ y $b = 1$ es una solución, ya que $18^2 + 18 + 1 = 343$.

**Solución alternativa.** De la solución anterior, tenemos que $a^2+ab+b^2$ debe ser múltiplo de $7^3$, es decir $a^2 + ab + b^2 = 7^3k$ para algún entero positivo $k$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en $a$, obtenemos que $a = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4(b^2-7^3k)}}{2} = \frac{-b\pm\sqrt{4\cdot 7^3k-3b^2}}{2}$. Entonces $4 \cdot 7^3k - 3b^2$ debe ser un cuadrado sin ser $a$, ni $b$ ni $a + b$ múltiplos de 7. Haciendo $b = 1$ y $k = 1$ en la ecuación obtenemos la solución $a = 18$ y $b = 1$, como en la primer solución.

**Solución del problema 60.** Módulo 4, tenemos que $a_1 = 19 \equiv 3$, $a_2 = 98 \equiv 2$, $a_3 = 17 \equiv 1$, $a_4 = 15 \equiv 3$, $a_5 = 32 \equiv 0$, $a_6 = 47 \equiv 3$, $a_7 = 79 \equiv 3$, $a_8 = 26 \equiv 2, \ldots$. Es decir, la sucesión $a_n$ módulo 4 es periódica cada 6 términos. Ahora, es fácil ver que si $a \equiv b \pmod 4$ entonces $a^2 \equiv b^2 \pmod 8$. Luego, como $1998 = 6 \cdot 333$, se sigue que:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{1998}^2 \equiv (1 + 4 + 1 + 1 + 0 + 1) \cdot 333 \equiv 8 \cdot 333 \equiv 0 \pmod 8.$$

## 3.2. Soluciones de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

**Solución del problema 1.** Supongamos que $m = kt$. Notemos que $10k$ y $m$ coinciden salvo por los dígitos de las decenas y de las unidades. Específicamente, si el dígitos de las unidades de $k$ es $a$, entonces $m$ termina en $0a$ y $10k$ termina en $a0$. Si $a = 0$, entonces $10k = m$, de modo que todos los $k$ que acaban en 0 cumplen la condición. Supongamos ahora que $a$ no es cero. En este caso, $10k$ (que termina en $a0$) es mayor que $m$ (que acaba en $0a$). Por lo tanto, $t$ es cuando mucho 9. Por otra parte $t$ debe ser mayor que 1 porque $m > k$ (tiene un dígito más, de hecho).

Para cada valor de $t$ encontramos todas las posibilidades para $k$ como sigue: $a$, el dígito de las unidades de $k$, debe ser tal que $kt$ también tenga dígitos de las unidades $a$. Después, encontramos el dígito de las decenas usando que el dígito de las decenas de $m = kt$ es 0, de modo que $t$ por el dígito de las decenas de $k$ más lo que se lleva de calcular $at$ debe terminar en 0. A partir de este momento, cada dígito de $k$ debe ser tal que si se multiplica por $t$ y al producto se le suma lo que se lleve de la posición anterior, el resultado termine en el dígito anterior de $k$.

Para $t = 2$, 4 y 8 no hay ningún valor de $a$ tal que $at$ termine en $a$.

Para $t = 6$, $a$ puede ser 2, 4, 6 u 8. Con el procedimiento ya descrito obtenemos los números $X2$, $X34$, $X84$, $X18$ y $X68$, donde las $X$ denotan dígitos para los cuales no queda ninguna posibilidad (o sea que para $t = 6$ la única solución es $k = 18$). Notemos que si después de 18 continuamos con el método, se obtiene $\ldots 00018$, por lo que $k = 18$ realmente es la única solución en este caso.

Para $t = 5$ se obtiene $X5$.

Para $t = 3$ se obtiene $\ldots 28571428571435$ donde el grupo de dígitos 285714 se repite una infinidad de veces. Por lo tanto, no hay solución con $t = 3$.

Para $t = 7$ se obtiene $\ldots 0015$ con el 0 repitiéndose, por lo que la única solución con $t = 7$ es $k = 15$.

Para $t = 9$ se obtiene $\ldots 0045$ con el 0 repitiéndose, por lo que la única solución con $t = 9$ es $k = 45$.

En resumen las soluciones son 15, 18, 45 y los números que terminen en 0.

**Segunda Solución.** Si $b$ es el dígito de las unidades de $k$ y $a$ es el número formado por los demás dígitos, entonces $k = 10a+b$ y $m = 100a+b$. Supongamos que $m = kt$. Entonces, $100a + b = t(10a + b)$, o sea, $10(10 - t)a = (t - 1)b$. Como $t \geq 1$, el lado derecho es no negativo. Luego, el lado izquierdo también lo es, de donde $t \leq 10$. Si $t$ fuera 1, tendríamos $a = 0$, lo cual es absurdo pues $k$ tiene dos o más dígitos. Si $t = 10$, entonces $b = 0$ y todos estos valores de $k$ cumplen.

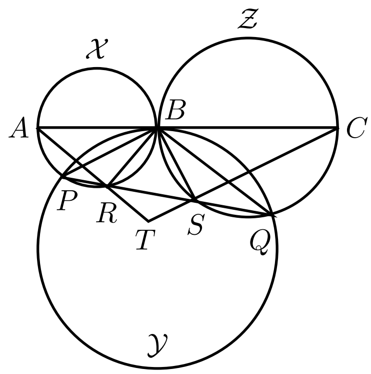
Ahora $(t - 1)b$ debe ser múltiplo de 10 y $t - 1$ no puede ser múltiplo de 10 ($t$ está entre 2 y 9). Por lo tanto, $b$ debe ser par, múltiplo de 5, o ambos. Si es ambos, $b = 0$ y esos valores ya los conocíamos.

Si $b = 5$, la ecuación se simplifica a $2(10-t)a = t-1$. Entonces, $2(10-t) \leq t-1$, o sea, $t \geq 7$. Como $t - 1$ es par, $t$ debe ser 7 ó 9. Para $t = 7$ obtenemos $a = 1$ y la solución $k = 15$. Para $t = 9$ obtenemos $a = 4$ y la solución $k = 45$.

Si $b$ es par (distinto de 0), $t - 1$ debe ser múltiplo de 5. Por lo tanto, $t = 6$. La ecuación se simplifica a $8a = b$, como $b$ es un dígito, la única solución es $a = 1$ y $b = 8$, o sea, $k = 18$.

En resumen, las soluciones son los múltiplos de 10, y también los números 15, 45 y 18.

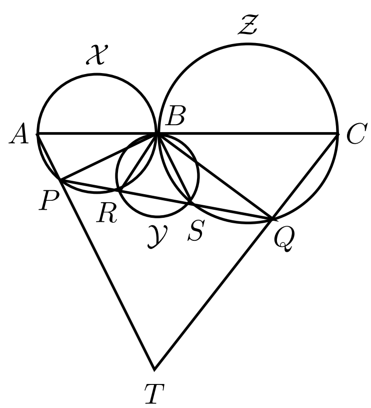
**Solución del problema 2.** Sea $T$ la interseccion de $AR$ con $CS$. Probaremos que $T$ está sobre la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ probando que el ángulo $ABT$ es recto. Como $AB$ es diámetro de $\mathcal{X}$, $\angle BRT$ es recto. Como $BC$ es diámetro de $\mathcal{Z}$, $\angle BST$ es recto. Por lo tanto el cuadrilátero $BRST$ es cíclico.



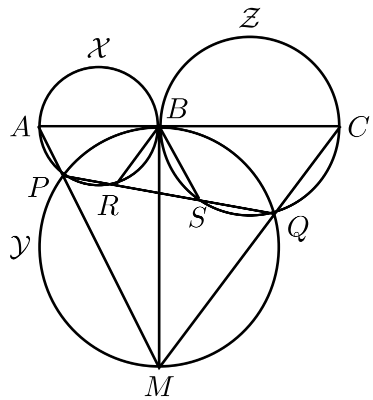

Si $R$ y $S$ están en $P$ y $Q$, tenemos que $\angle RBT = \angle RST = \angle CSQ = \angle CBQ = \angle BPQ = \angle BAR$ (la primer igualdad ocurre porque $BRST$ es cíclico, la segunda porque los ángulos son opuestos por el vértice, la tercera porque $BSQC$ es cíclico, la cuarta porque $BC$ es tangente a $\mathcal{Y}$, y la última porque $APBR$ es cíclico).

Si $P$ y $Q$ están en $R$ y $S$ es muy parecido: $\angle RBT = \angle RST = 180° - \angle CSQ = \angle CBQ = \angle BPQ = 180° - \angle BPR = \angle BAR$.

En cualquier caso, $\angle RBT = \angle BAR$. Como $\angle BAR + \angle ABR = 90°$, entonces $\angle RBT + \angle ABR = 90°$, o sea $\angle ABT = 90°$.




**Segunda Solución.** Sea $M$ el punto diametralmente opuesto a $B$ en $\mathcal{Y}$. Como $AB$ es diámetro de $\mathcal{X}$, el ángulo $APB$ es recto.




Como $BM$ es diámetro de $\mathcal{Y}$, el ángulo $BPM$ es recto. Por lo tanto, $A$, $P$ y $M$ son colineales. Análogamente, $C$, $Q$ y $M$ son colineales. Probaremos que $AR$, $CS$ y la tangente común concurren viendo que son alturas del triángulo $ACX$. Para ver que $AR$ es perpendicular a $CM$ bastaría ver que $BR$ y $CM$ son paralelas. Tenemos que $\angle ABR = \angle QPM = \angle QBM = \angle BCQ$ (la primera igualdad es porque $APRB$ es cíclico, la segunda porque $BPMQ$ lo es y la última porque $BM$ es tangente a $\mathcal{Z}$). Por lo tanto, $AR$ es altura de $ACM$. Análogamente, $CS$ es altura del triángulo y claramente $BM$ es altura. Por lo tanto, $AR$, $CS$ y $BM$ concurren.

**Solución del problema 3.** Son los valores de $a$ y $b$ que cumplen que $a+b > n$. Probemos primero que $a + b > n$, entonces forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente:
Primera Forma. Supondremos que no hay dos que se gustan mutuamente y demostraremos que $a + b \leq n$. A cada quien le preguntamos quienes le gustan y hacemos una lista de parejas en las que alguno de los dos le gusta al otro. Como no hay dos que se gusten mutuamente, al hacer así la lista no obtenemos parejas repetidas. Por lo tanto, obtenemos a lo más $n^2$ parejas en la lista. Por otra parte, por cada muchacha obtenemos $a$ parejas y por cada muchacho $b$, de modo que obtenemos exactamente $an + bn = (a + b)n$ parejas. Entonces, $(a + b)n \leq n^2$ de donde $a + b \leq n$.
Segunda Forma. Este es realmente el mismo argumento que el anterior dicho de otro modo. Numeramos los muchachos y las muchachas con los números del 1 al $n$, y hacemos una tabla $n \times n$ en la que el cuadro en el renglón $i$ y la columna $j$, lo pintamos de rojo si a la muchacha $i$ le gusta el muchacho $j$, de azul si la muchacha $i$ le gusta al muchacho $j$, y lo dejamos sin pintar en otro caso. Si no hay dos que se gusten mutuamente, ninguna casilla se pinta tanto de rojo como de azul. En cada renglón hay $a$ casillas rojas y en cada columna

hay $b$ casillas azules, de modo que en total hay $(a+b)n$ casillas pintadas. Por lo tanto, $(a+b)n \leq n^2$, o sea, $a+b \leq n$.

Tercera forma. Supongamos que $a+b > n$. Como a cada muchacha le gustan $a$ muchachos, en total hay $an$ "gustos"de parte de las muchachas. Entonces, a algún muchacho le tocan al menos $a$ "gustos", es decir, hay algún muchacho popular que le gusta a al menos $a$ muchachas. Como al muchacho popular le gustan $b$ muchachcas y $a+b > n$, no pueden ser todas distintas las $a$ muchachas a las que le gusta y las $b$ que le gustan a él. Por lo tanto, hay una muchacha que le gusta $a$ y a quien le gusta el muchacho popular.

Ahora probaremos que si $a+b \leq n$ puede suceder que no haya una muchacha y un muchacho que se gusten mutuamente.

**Primera Forma.** Numeramos los muchachos y las muchachas con los números del 1 al $n$. Imaginemos que a la muchacha $i$ le gustan los muchachos $i$, $i+1$,..., $i+a-1$ (los números se toman módulo $n$) y que al muchacho $j$ le gustan las muchachas $j+1, j+2, \ldots, j+b$. En este caso no hay dos que se gusten mutuamente. En efecto, si a la muchacha $i$ le gusta el muchacho $j$, $j$ debe ser uno de $i$, $i+1, \ldots, i+a-1$, digamos $i+t$. Entonces, al muchacho $j$ le gustan las muchachas $i+t+1, i+t+2, \ldots, i+t+b$. El primero de eso números es al menos $i+1$ y el último es a lo más $i+a+b-1 \leq i+n-1$, o sea que ninguno es $i$ (o $i+n$).

**Segunda Forma.** Por lo que se vió en la segunda forma de la primera parte, basta pintar una cuadrícula de manera que haya $a$ cuadros rojos en cada renglón y $b$ azules en cada columna. Empezamos pintando los primeros $a$ cuadros del primer renglón de rojo. El segundo renglón lo hacemos como el primero con los cuadros rojos recorridos un lugar a la derecha. El tercero es el segundo recorrido, etc. Cuando a la hora de recorrer un cuadro rojo se salga por el borde de la cuadrícula lo pasamos al principio de su renglón. Obtenemos una cuadrícula con $a$ cuadros rojos en cada renglón y $n-a$ cuadros vacíos en cada columna. Como $n-a \geq b$ podemos simplemente elegir $b$ cuadros de cada columna y pintarlos de azul.

**Tercera Forma.** Elegimos $a+b$ números distintos entre 1 y $n$, digamos $r_1, r_2, \ldots,$ $r_a$, $s_1, s_2, \ldots, s_b$. Imaginemos una fiesta donde a la muchacha $i$ le gusta el muchacho $j$ si $i-j$ es congruente módulo $n$ con algún $r_k$, y al muchacho $j$ le gusta la muchacha $i$ si $i-j$ es congruente módulo $n$ con un $s_k$. Así es fácil ver que a cada muchacha le gustan $a$ muchachos: a la muchacha $i$ le gustan los muchachos $i-r_1$, $i-r_2, \ldots, i-r_a$ (módulo $n$). Análogamente, a cada muchacho le gustan $b$ muchachas. Además, no hay dos que se gusten mutuamente pues si $i-j$ es congruente con a lo más uno de los $a+b$ números $r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b$.

**Solución del problema 4.** Primero probaremos que $MN$ es paralela a $AB$ y a $DC$. Los triángulos $APM$ y $QDM$ son semejantes, de donde $\frac{PM}{MD} = \frac{AP}{DQ}$. También son semejantes $PBN$ y $CQN$, de donde $\frac{PN}{NC} = \frac{PB}{QC}$. Pero por hipótesis, $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$, así que $\frac{PM}{MD} = \frac{PN}{NC}$ y por el teorema de Thales, $MN$ es paralela a $DC$.

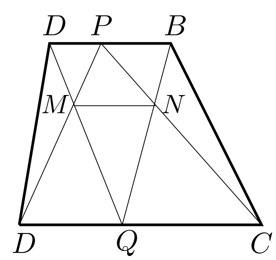
Hay muchas formas de concluir, presentamos dos.

Entonces, los triángulos $PMN$ y $PDC$ son semejantes, de donde

$$\frac{DC}{MN} = \frac{DP}{MP} = 1 + \frac{DM}{MP} = 1 + \frac{DQ}{AP} = 1 + \frac{DC}{AB}.$$

Aquí, la última igualdad ocurre porque $P$ divide al segmento $AB$ en la misma razón que $Q$ divide a $DC$. De aquí, despejamos

$$MN = \frac{AB \cdot DC}{AB + DC}.$$




Alternativamente, de la semejanza de los triángulos $PMN$ y $PDC$ obtenemos $\frac{MN}{DC} = \frac{PM}{PD}$ y de la semejanza de los triángulos $QMN$ y $QAB$ obtenemos que $\frac{MN}{AB} = \frac{MQ}{AQ}$. Por el teorema de Thales, $\frac{MQ}{AQ} = \frac{MD}{PD}$. Entonces, $\frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{PD} + \frac{DM}{PD} = 1$, de donde podemos despejar otra vez $MN$.

**Solución del problema 5.** Si el primer jugador empieza eligiendo la tarjeta $(1, p)$ con $p$ primo, pierde el jugador que no tome una tarjeta que incluya un múltiplo de $p$ (pues en ese momento el máximo común divisor pasa de $p$ a 1). Si la cantidad de tarjetas que incluyen un múltiplo de $p$ es impar (incluyendo la tarjeta $(1, p)$), al primer jugador le toca la última de ellas y gana. Desafortunadamente, $p = 2$ no cumple: el número de tarjetas con al menos un número par es igual al total de parejas menos el número de parejas con ambos impares, esto es, $\binom{2003}{2} - \binom{1002}{2} = 2003 \cdot 1001 - 501 \cdot 1001$ que es par. Pero $p = 3$ si cumple: como hay 1336 números entre 1 y 2003 que no son múltiplos de 3, hay $\binom{2003}{2} - \binom{1336}{2} = 2003 \cdot 1001 - 668 \cdot 1335$ parejas, donde al menos uno de los números es múltiplo de 3, y ese número es impar.

Se puede verificar que esta estrategia funciona para los siguientes valores de $p$: 3, 7, 11, 13, 23, 37, 43, 47, 73, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 131, 137, 139, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

**Solución del problema 6.** Primero veamos que no importa el orden en el que se efectúen los dos tipos de cambio sensato: en un orden tenemos $n \to 2n+1 \to 3(2n+1)+2 = 6n+5$, en el otro $n \to 3n+2 \to 2(3n+2)+1 = 6n+5$. Entonces, al hacer una serie de cambios sensatos, podemos hacer primero todos los del tipo $n \to 2n+1$ y después todos los del tipo $n \to 3n+2$.
¿Qué se obtiene si a $n$ se le aplican $k$ cambios sensatos del tipo $n \to 2n+1$? Calculemos los primeros pasos: $n \to 2n+1 \to 4n+3 \to 8n+7 \to 16n+15 \to \ldots$. Después de $k$ cambios se obiene $2^k n + 2^k - 1$.
Análogamente, si a $n$ se le aplican $k$ cambios sensatos del tipo $n \to 3n+2$ se obtiene $3^k n + 3^k - 1$.
Ahora, podemos determinar cuándo dos números $a$ y $b$ son compatibles: según lo anterior, si $c$ se obtiene con cambios sensatos a partir de $a$, usando $j$ del primer tipo y $k$ del segundo, entonces $c = 3^k(2^j a + 2^j - 1) + 3^k - 1 = 2^j 3^k (a+1) - 1$. Análogamente, si $c$ se obtiene a partir de $b$, $c$ se puede escribir como $c = 2^r 3^s (b+1) - 1$. Igualando, $2^j 3^k (a+1) = 2^r 3^s (b+1)$. Recíprocamente, si existen números $j$, $k$, $r$ y $s$ que cumplan la última igualdad, $a$ y $b$ son compatibles (pues si a $a$ le hacemos $j$ cambios del tipo $n \to 2n+1$ y $k$ del tipo $n \to 3n+2$ obtenemos el mismo resultado que si a $b$ le hacemos $r$ cambios del tipo $n \to 2n+1$ y $s$ del tipo $n \to 3n+2$).
Así que para que $a$ se compatible con 2003, debemos tener, para algunos números, $j$, $k$, $r$ y $s$, que $2^j 3^k (a+1) = 2^{r+2} 3^{s+1} \cdot 167$, es decir, $a = 2^{r+2-j} 3^{s+1-k} \cdot 167 - 1$. Por lo tanto, los números buscados son los de la forma $a = 2^l 3^m \cdot 167 - 1$ que son menores que $2003 = 12 \cdot 167 - 1$. Los números de la forma $2^l 3^m$ menores que 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 9, por lo que los números buscados son 166, 333, 500, 667, 1001, 1335 y 1502.

**Segunda Solución.** Supongamos que $c$ se obtiene a partir de $a$ con cambios sensatos y escribamos la lista de los números intermedios que se obtienen con los cambios sensatos: $a \to x \to y \to \ldots \to c$, donde $x = 2a+1$ ó $3a+2$, $y = 2x+1$ ó $3x+2$, etc. Si le sumamos uno a cada número de la lista, obtenemos otra listas $a+1 \to x+1 \to y+1 \to \ldots \to c+1$, en la que $x+1 = (2a+1)+1 = 2(a+1)$ ó $(3a+2)+1 = 3(a+1)$, es decir, el segundo

número es el doble o el triple del anterior. Consideremos ahora la factorización de $a+1$ como producto de potencias de primos distintos. La factorización de $c+1$ tiene las mismas potencias de los primos que no son ni 2, ni 3; y del 2 y el 3 puede tener cualquier potencia que sea mayor o igual que la que aparece en la factorización de $a+1$.
Por lo tanto, $a$ y $b$ con compatibles si y sólo si las factorizaciones de $a+1$ y $b+1$ tienen las mismas potencias de todos los primos que no son ni 2, ni 3. Como $2003+1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, los compatibles con 2003 son los de la forma $2^l 3^m \cdot 167 - 1$. De éstos, los menores que 2003 son los que tienen $2^l 3^m < 12$. Los valores posibles son $2^l 3^m = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9,$ por lo que los números buscados son 166, 333, 500, 667, 1001, 1335 y 1502.

**Solución del problema 7.** Tenemos que $pqr+1$ es cuadrado, por tanto $pqr = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$, para algún entero $m$.
Dividimos en dos casos:

$(i)$ Si $p \mid m-1$,

(a) Si $m+1 = qr$, entonces $m-1 = p$ y $qr - p = 2$, lo cual no es posible ya que $qr > p^2 \geq 2p \geq p+2$.

(b) Si $m+1 = q$, entonces $m-1 = pr$, luego $q > pr > r$, lo cual no es posible.

(c) Si $m+1 = r$, entonces $m-1 = pq$, luego $pq = r-2 = (2004 - 25pq) - 2$. Tenemos entonces que $26pq = 2002 \Rightarrow pq = 7 \cdot 11 \Rightarrow p = 7$ y $q = 11$. Luego, $r = pq + 2 = 7 \cdot 11 + 2 = 79$.

$(ii)$ Si $p \mid m+1$,

(a) Si $m-1 = qr$, entonces $m+1 = p$, pero entonces $p > qr > r$, lo cual no es posible.

(b) Si $m-1 = q$, entonces $m+1 = pr$ y $pr - q = 2$, pero esto no es posible ya que $pr > 2r > 2q > q+2$.

(c) Si $m-1 = r$, entonces $m+1 = pq$, luego $pq = r+2 = (2004 - 25pq) + 2$. Por lo que $26pq = 2006$, y no hay solución ya que $\frac{2006}{26}$ no es entero.

Por tanto la única solución es $p = 7$, $q = 11$ y $r = 79$.

**Segunda Solución.** Tenemos que $pq = \frac{2004-r}{25} < \frac{2004}{25} < 81$.
Luego, $p^2 < pq < 81 \Rightarrow p < 9$. Entonces tenemos cuatro casos:

$(i)$ Si $p = 2 \Rightarrow 25pq + r$ es impar, por tanto no hay solución.

$(ii)$ Si $p = 3$, entonces $r = 2004 - 25 \cdot 3 \cdot q = 3(668 - 25q) \Rightarrow 3$ divide a $r$, pero $r > 3$ y $r$ es primo, por tanto no hay solución.

$(iii)$ Si $p = 5$, entonces $5 < q < \frac{81}{5} < 17$ y tenemos los siguientes subcasos:

(a) Si $q = 7 \Rightarrow r = 2004 - 25 \cdot 5 \cdot 7 = 1129$ que es primo, pero $5 \cdot 7 \cdot 1129 + 1 \equiv 6 \pmod 9$ y no puede ser un cuadrado porque es múltiplo de 3 pero no de 9.

(b) Si $q = 11 \Rightarrow r = 2004 - 25 \cdot 5 \cdot 11 = 629 = 17 \cdot 37$ que no es primo.

(c) Si $q = 13 \Rightarrow r = 2004 - 25 \cdot 5 \cdot 13 = 379$ que es primo, pero $5 \cdot 13 \cdot 379 + 1 \equiv 3 \pmod 9$ y no puede ser un cuadrado.

$(iv)$ Si $p = 7$, entonces $7 < q < \frac{81}{7} < 12$ de donde $q = 11$ y $r = 2004 - 25 \cdot 7 \cdot 11 = 79$ que es primo, y $7 \cdot 11 \cdot 79 + 1 = 77 \cdot 79 + 1 = 78^2$.

Por lo tanto, la única solución es $p = 7$, $q = 11$ y $r = 79$, como en la primer solución.

**Solución del problema 8.** Supongamos que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ es una colección con la mayor cantidad de enteros con la propiedad.
Es claro que $a_i \geq i$, para toda $i = 1, ..., n$.
Si $a$ y $b$ son dos enteros de la colección con $a > b$, como $|a - b| = a - b \geq \frac{ab}{100}$, tenemos que $a(1 - \frac{b}{100}) \geq b$, por lo que si $100 - b > 0$, entonces $a \geq \frac{100b}{100-b}$.
Notemos que no existen dos enteros $a$ y $b$ en la colección mayores que $100$, en efecto si $a > b > 100$, entonces $a - b = |a - b| \geq \frac{ab}{100} > a$, lo cual es falso.
También tenemos que para enteros $a$ y $b$ menores que $100$, se cumple que $\frac{100a}{100-a} \geq \frac{100b}{100-b} \Longleftrightarrow 100a - ab \geq 100b - ab \Longleftrightarrow a \geq b$.
Es claro que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ es una colección con la propiedad.
Ahora, $a_{11} \geq \frac{100a_{10}}{100-a_{10}} \geq \frac{100 \cdot 10}{100-10} = \frac{100}{9} > 11$, lo que implica que $a_{11} \geq 12$.

$$a_{12} \geq \frac{100a_{11}}{100 - a_{11}} \geq \frac{100 \cdot 12}{100 - 12} = \frac{1200}{88} > 13 \implies a_{12} \geq 14.$$
$$a_{13} \geq \frac{100a_{12}}{100 - a_{12}} \geq \frac{100 \cdot 14}{100 - 14} = \frac{1400}{86} > 16 \implies a_{13} \geq 17.$$
$$a_{14} \geq \frac{100a_{13}}{100 - a_{13}} \geq \frac{100 \cdot 17}{100 - 17} = \frac{1700}{83} > 20 \implies a_{14} \geq 21.$$

$$a_{15} \geq \frac{100a_{14}}{100 - a_{14}} \geq \frac{100 \cdot 21}{100 - 21} = \frac{2100}{79} > 26 \implies a_{15} \geq 27.$$
$$a_{16} \geq \frac{100a_{15}}{100 - a_{15}} \geq \frac{100 \cdot 27}{100 - 27} = \frac{2700}{73} > 36 \implies a_{16} \geq 37.$$
$$a_{17} \geq \frac{100a_{16}}{100 - a_{16}} \geq \frac{100 \cdot 37}{100 - 37} = \frac{3700}{63} > 58 \implies a_{17} \geq 59.$$
$$a_{18} \geq \frac{100a_{17}}{100 - a_{17}} \geq \frac{100 \cdot 59}{100 - 59} = \frac{5900}{41} > 143 \implies a_{18} \geq 144.$$

Y como ya hemos observado que no hay dos enteros de la colección mayores que $100$, la mayor cantidad es $18$.
Una colección con $18$ enteros que cumple la condición es,

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,17,21,27,37,59,144\}\ .$$

**Segunda Solución.** Observemos que la condición es equivalente a $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}| \geq \frac{1}{100}$. Es fácil ver que $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ es una colección con la propiedad y que el siguiente número que es posible agregar a esta colección de modo que siga cumpliendo la propiedad es el $12$. Continuando de esta manera obtenemos una colección con $18$ enteros que cumple la condición:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,17,21,27,37,59,144\}\ .$$

Para ver que no puede haber una con más elementos, partimos los enteros positivos mayores que $9$ en los siguientes conjuntos:

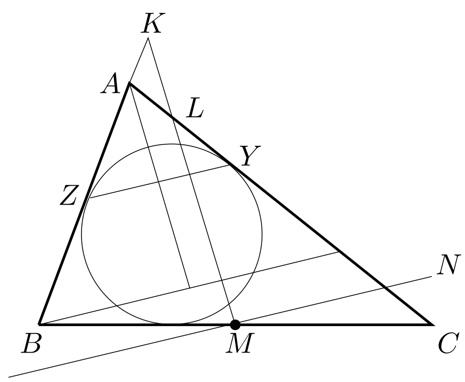
$$\begin{gathered}10,11\\12,13\\14,15,16\\17,18,19,20\\21,22,\ldots,26\\27,28,\ldots,36\\37,38,\ldots,58\\59,60,\ldots,143\\144,145,\ldots\end{gathered}$$

Observemos que si $a$ y $b$ son el mínimo y el máximo de alguno de los primeros $8$ renglones, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}| < \frac{1}{100}$. Por lo tanto, esto mismo sucede para cualesquiera $a$ y $b$ distintos que estén en el mismo renglón (de los primeros $8$), puesto que los extremos son los números cuyos recíprocos están más alejados.
Por otro lado, si $a$ y $b$ son dos números distintos del último renglón, suponiendo sin pérdida de generalidad que $a < b$, entonces $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}| = \frac{1}{a}-\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{144} < \frac{1}{100}$.
Consideremos una colección de enteros que cumple la propiedad. Por lo anterior, ésta puede tener a lo más un número de cada uno de los nueve renglones. Entonces, puesto que los números del $1$ al $9$ son los únicos que no aparecen en la tabla, la colección tiene a lo más $9+9=18$ elementos, lo cual junto con el ejemplo ya dado muestra que el máximo buscado es $18$.

**Solución del problema 9.** Como $AZ$ y $AY$ son tangentes al incírculo de $ABC$, se cumple que $AZ = AY$. Trazamos la paralela a $YZ$ por $B$ y llamamos $N'$ al punto donde esta recta corta a $CA$. También trazamos la perpendicular a $BN'$ por $A$ y llamamos $M'$ al punto donde ésta corta a $BN'$.

Como los triángulos $AZY$ y $ABN'$ son semejantes (tienen lados paralelos), se tiene que $ABN'$ es isósceles, por lo que $AM'$ es bisectriz del $\angle BAN'$ y $M'$ es punto medio de $BN'$.

Los triángulos $CMN$ y $CBN'$ son semejantes (tienen lados paralelos) y como $M$ es punto medio de $BC$, la razón de semejanza es $1:2$, por lo que $CN = NN'$ y $MN = M'N'$. También tenemos por ser $MN$ y $BN'$ paralelas que $\angle M'N'A = \angle MNL$, entonces, por el criterio $LAL$, los triángulos $M'N'A$ y $MNL$ son semejantes. Por lo que $LM$ y $MN$ son perpendiculares.

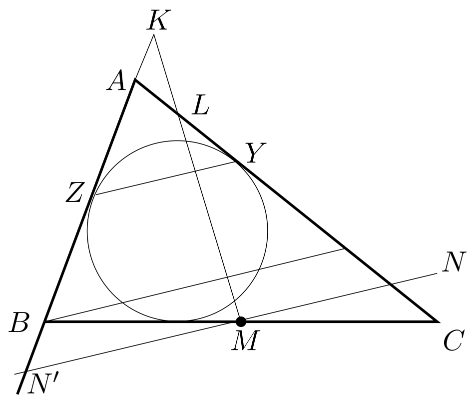



Ahora observemos que, $AL = AN - NL = AN - AB = AN - AN' = N'N = CN$.

Y también que, $\angle AKL = \angle BAM' = \angle M'AC = \angle ALK$ (ya que $AM'$ y $MK$ son paralelas y $AM'$ es bisectriz).

Luego el triángulo $ALK$ es isósceles con $AK = AL$ y por tanto $AK = CN$.

**Segunda Solución.** Sea $N'$ la intersección de $MN$ con $AB$. Como $AZ$ y $AY$ son tangentes al incírculo de $ABC$, entonces $AZ = AY$, y por ser $N'N$ paralela a $ZY$ tenemos que $AN' = AN$.



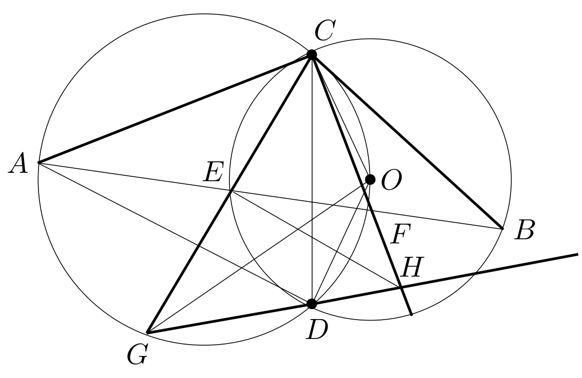

Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo $ABC$, con $N'$, $M$ y $N$ colineales obtenemos que $\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$, y como $BM = MC \Rightarrow CN = BN'$.
Observemos que $AC = AN + NC = AN' + NC = (AB + BN') + NC = AB + 2NC$ y que $AC = AL + LN + NC = AL + AB + NC$, por tanto $AL = NC$.
Aplicando otra vez el Teorema de Menelao al triángulo $ABC$, pero ahora con $K$, $M$ y $L$ colineales obtenemos que $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = -1 \Rightarrow \frac{CL}{LA} = \frac{KB}{KA} \Rightarrow \frac{CL}{LA} - 1 = \frac{KB}{KA} - 1 \Rightarrow \frac{CL-LA}{LA} = \frac{KB-KA}{KA} \Rightarrow \frac{CL-CN}{LA} = \frac{AB}{KA} \Rightarrow \frac{NL}{LA} = \frac{AB}{KA}$,y como $NL = AB \Rightarrow LA = KA \Rightarrow KA = CN$.

**Solución del problema 10.** Sea $n$ el número de equipos en el torneo, como cada equipo jugó contra todos los demás equipos exactamente una vez, entonces cada equipo jugó $n-1$ partidos.
Supongamos que dos equipos $X$ y $Y$ ganaron ambos $k$ partidos, entonces si $X$ le ganó a $Y$ ocurre que $X$ le ganó a todos los equipos que le ganó $Y$ (por la hipótesis), y entonces $X$ le ganó al menos a $k+1$ equipos, lo cual contradice que $X$ y $Y$ habían ganado el mismo número de partidos; el mismo argumento se usa para mostrar que $Y$ no le pudo haber ganado a $X$. Por tanto, como no hay empates, no hay dos equipos con el mismo número de partidos ganados. Como a lo más hay $n$ valores posibles para el número de partidos ganados, se tiene que los equipos ganaron $n-1$, $n-2$,..., $1$, $0$ en algún orden.
Si un equipo ganó $h$ partidos entonces perdió $n-1-h$ partidos, entonces su diferencia (positiva) entre el número de partidos ganados y perdidos es $|n-1-2h|$.
Sea $D$ la suma de todas estas diferencias, entonces:
a) Si $n$ es par, entonces $n = 2m$ con $m$ entero y
$D = (2m-1) + (2m-3) + ... + 1 + 1 + ... + (2m-3) + (2m-1) = 2[(2m-1) + (2m-3) + ... + 1] = 2m^2$.

b) Si $n$ es impar, entonces $n = 2m + 1$ con $m$ entero y
$D = 2m + (2m - 2) + ... + 2 + 0 + 2 + ... + (2m - 2) + 2m = 2[2m + (2m - 2) + ... + 2] = 4[m + (m - 1) + ... + 1] = 4\frac{m(m+1)}{2} = 2m(m + 1)$
Como $D = 5000$, entonces:
a) $2m^2 = D = 5000 \Rightarrow m = 50 \Rightarrow n = 2m = 100$.
b) $2m(m+1) = D = 5000 \Rightarrow m(m+1) = 2500$, pero $49 \cdot 50 < 2500 < 50 \cdot 51$, por tanto no hay solución en este caso.
Por tanto la única respuesta posible es $n = 100$.

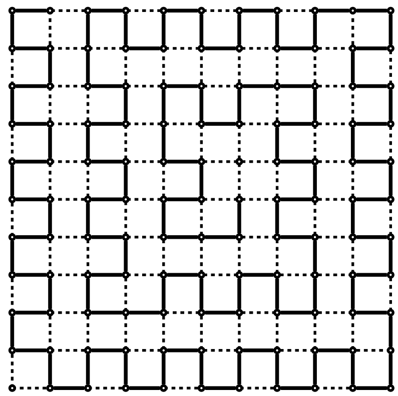
**Segunda Solución.** Sea $n$ el número de equipos que participaron en el torneo. Supongamos que $A$ es el equipo que más partidos ganó y digamos que ganó $k$. Entonces $k = n-1$, es decir, $A$ derrotó a todos los demás equipos. En efecto, si un equipo $Q$ le hubiera ganado a $A$, por la condición del problema, $Q$ también le habría ganado a los $k$ equipos que $A$ derrotó, de modo que $Q$ habría ganado al menos $k + 1$ partidos (lo cual contradice que $k$ es el máximo).
Análogamente, de los equipos restantes, el que más partidos ganó, digamos $B$, debe haberle ganado a todos los equipos salvo $A$. Luego, $C$, el equipo que después de $A$ y $B$ ganó más partidos, debe haberle ganado a todos los equipos salvo $A$ y $B$, y así sucesivamente.
Por lo tanto, si ordenamos los equipos del que más partidos ganó al que menos, entonces el $k$-ésimo equipo en la lista ganó $n - k$ partidos. Concluimos como en la primer solución.

**Solución del problema 11.** Como $O$ es centro de $\mathcal{B}$ se tiene $CO = OD$ y entonces $\angle DCO = \angle CDO$, y como $CGDO$ es cíclico, $\angle CGO = \angle CDO = \angle DCO = \angle DGO$, por tanto $GO$ es bisectriz de $\angle CGD$.



Como $CA$ es tangente a $\mathcal{B}$ tenemos que $\angle ACO = 90°$, por tanto, $\angle AFO = 90°$ (esto se sigue de que $AO$ es diámetro de $\mathcal{A}$ o de que $ACOF$ es cíclico). Entonces $OF$ es mediatriz de $EB$ lo cual implica $EF = FB$.
Luego, como $CA$ es tangente a $\mathcal{B}$ y $CB$ es tangente a $\mathcal{A}$ tenemos que $\angle ACE = \angle CBE = \alpha$ y $\angle BCF = \angle CAF = \beta$, entonces $\angle CEF = \angle ACE + \angle EAC = \alpha + \beta = \angle CBF + \angle BCF = \angle CFE$ por tanto $EC = CF$.
También, $CADF$ es cíclico, entonces $\angle DAF = \angle DCF = \gamma$, $\angle CDF = \angle CAF = \beta$ y $\angle COD = 180° - \angle DAC$, y como $CBDE$ también es cíclico, obtenemos $\angle DBE = \angle DCE = \theta$.
Por criterio $AAA$, los triángulos $CAE$ y $BCF$ son semejantes, entonces $\frac{AE}{CF} = \frac{CE}{BF} \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{CF}{BF}$.Tomando la potencia de $E$ con respecto a $\mathcal{A}$ obtenemos $AE \cdot EF = CE \cdot EG \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{EG}{EF}$,y entonces $\frac{CF}{BF} = \frac{EG}{EF} \Rightarrow \frac{EG}{CF} = \frac{EF}{BF} = 1 \Rightarrow EG = CF$.
En el triángulo $ABC$ tenemos $180° = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \beta + \alpha + (\beta + \gamma + \theta + \alpha)$, entonces $\angle COD = 180° - \angle DAC = 180° - (\angle CAF + \angle FAD) = 180° - (\beta + \gamma) = 2\alpha + \beta + \theta$; y por otro lado $\angle COD = 2\angle CBD = 2(\angle CBE + \angle EBD) = 2(\alpha + \theta)$, entonces $2\alpha + \beta + \theta = 2\alpha + 2\theta \Rightarrow \beta = \theta. \Rightarrow \angle CDF = \angle DCE \Rightarrow FD \parallel CG$.
Ahora, como $FD$ y $CG$ son paralelas, $DFCG$ es un trapecio isósceles (ya que también es cíclico) y entonces tenemos que $GD = CF$ y también que $\frac{HD}{DG} = \frac{HF}{FC} \Rightarrow HD = HF \Rightarrow HG = HC$ y entonces los triángulos $CHG$ y $FHD$ son isósceles. Además, como $GE = EC$ entonces $HE$ es mediatriz de $GC$, y por ser $FDGC$ trapecio isósceles, $HE$ también es mediatriz de $FD$.
Por último, como $GD = CF = EG$ el triángulo $EGD$ es isósceles, y como $GO$ es bisectriz de $\angle EGD$, entonces $GO$ también es mediatriz de $ED$, por tanto, la intersección de $GO$ y de $EH$ es el circuncentro del triángulo $DEF$.

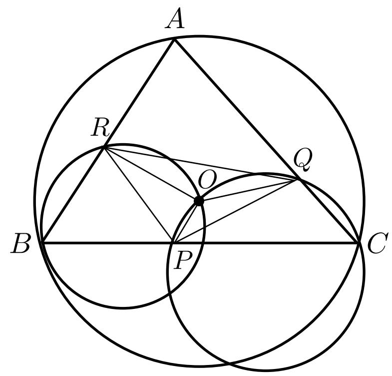
**Solución del problema 12.** Veamos primero que un recorrido no puede cambiar de dirección en cada uno de los puntos de una línea de la cuadrícula. En efecto, cada vez que el recorrido llega a la línea en cuestión, al cambiar de dirección pasa por otro punto de dicha línea antes de cambiar nuevamente de dirección y abandonar la línea. De este modo, suponiendo que cambiara de dirección en cada punto de la línea, estos puntos estarían agrupados por pares, lo cual es imposible dado que son $2005$ puntos.
Este argumento requiere una pequeña modificación para la línea en la que inicia el recorrido (es decir, la línea que contiene el primer segmento del recorrido). En ese caso, el punto inicial está apareado con el segundo punto del recorrido y el argumento aplica a los puntos restantes. De hecho, en esta línea hay al menos dos puntos en los que no se cambia de dirección: el que da el argumento y el punto inicial del recorrido.



Por lo tanto hay al menos $2006$ puntos en los que no se cambia de dirección, de donde hay a lo más $2005^2 - 2006$ puntos en los que sí.
Sólo falta encontrar un recorrido con $2005^2 - 2006$ cambios de dirección. El ejemplo con $2005^2 - 2006$ cambios de dirección lo construimos en forma similar al recorrido siguiente en una cuadrícula de $10 \times 10$. Como $10$ y $2004$ tienen igual paridad, en cada línea vertical seguirá habiendo un vértice donde no hay cambio de dirección, y uno al final que no se utiliza.

**Segunda Solución.** Sea $R$ un recorrido con el máximo número de cambios de dirección posible, sin pérdida de generalidad podemos suponer que comenzó con un segmento vertical. Pintemos las líneas horizontales de la cuadrícula de negro y blanco alternadamente, comenzando con negro. Entonces cada vértice de la cuadrícula es o bien blanco o bien negro.
Para el recorrido $R$ podemos hacer una lista $L(R)$ de los colores de los vértices que se van recorriendo, por ejemplo: $BBNNBNNNB$ (donde $B$ es Blanco, y $N$ es Negro).
Observemos que $R$ tiene un cambio de dirección en un vértice si y sólo si los vértices adyacentes a él en $R$ son de distinto color.
Separemos $L(R)$ en dos listas: $L_1(R)$ formada por las posiciones impares de $L(R)$,y $L_2(R)$ formada por las posiciones pares de $L(R)$. Entonces el número de cambios de dirección de $R$ es la suma de los cambios de color de $L_1(R)$ y de $L_2(R)$, y además por la forma en que coloreamos, alguna de las dos listas comienza con $B$, sin pérdida de generalidad suponemos que es $L_1(R)$.
Sea $i$ el número de cambios de color en $L_1(R)$ y sea $j$ el número de cambios de dirección en $L_2(R)$, entonces el número de $B$'s en $L_1(R)$ es al menos $\frac{i+1}{2}$ y en $L_2(R)$ es al menos $\frac{j}{2}$, por tanto el número de $B$'s en $L(R)$ es al menos $\frac{i+j+1}{2}$, entonces como $\frac{2004 \cdot 2005}{2}$ es el número de $B$'s en toda la cuadrícula, $\frac{i+j+1}{2} \leqslant \frac{2004 \cdot 2005}{2} \Rightarrow i + j \leqslant 2004 \cdot 2005 - 1$.

**Solución del problema 13.** Primero veamos que $OQAR$ es un cuadrilátero cíclico. Como $ORBP$ y $OPCQ$ son cíclicos, tenemos que $\angle ROP = 180° - \angle B$, $\angle QOP = 180° - \angle C$. Luego, $\angle ROQ = 360° - \angle ROP - \angle QOP = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, y por lo tanto $OQAR$ es cíclico.




Veamos ahora que $\angle P = \angle A$.
Como $ORBP$ es cíclico, $\angle OPR = \angle OBR = \angle OAB$, y como $OPCQ$ es cíclico, $\angle OPQ = \angle OCQ = \angle OAQ$. Luego, $\angle P = \angle OPR + \angle OPQ = \angle OAB + \angle OAQ = \angle A$. Análogamente, $\angle Q = \angle B$ y $\angle R = \angle C$. Por lo que $PQR$ y $ABC$ son semejantes.
Como $OQAR$ es cíclico tenemos que $\angle OQR = \angle OAR = 90° - \angle C$, y como $\angle PRQ = \angle C$, $QO$ es perpendicular a $RP$. Análogamente, $RO$ es perpendicular a $PQ$, por lo que $O$ es el ortocentro del triángulo $PQR$.
Notemos que los radios de las circunferencias circunscritas a $BPO$ y $COP$ son iguales, ya que dichas circunferencias tienen como cuerda común a $PO$ y se tiene que $\angle OBP = \angle OCP$. De igual manera, las circunferencias circunscritas a los triángulos $BPO$ y $PQR$ tienen el mismo radio, ya que estas últimas tienen la cuerda $PR$ en común y los ángulos $\angle RBP$ y $\angle PQR$ son iguales.
Otra manera de resolver (ii) es usando la ley de los senos generalizada. La circunferencia circunscrita a $BPO$ cumple que el doble de su radio es $\frac{OB}{\text{sen } \angle OPB}$ y el doble del radio de la que circunscribe a $COP$ es $\frac{OC}{\text{sen } \angle OPC}$. Pero $OB = OC$ y sen $\angle OPB =$ sen $\angle OPC$, por ser ángulos suplementarios. El doble del radio de la circunferencia circunscrita a $PQR$ está dado por $\frac{RP}{\text{sen } \angle PQR} = \frac{RP}{\text{sen } \angle RBP}$ que es igual al doble del radio de la circunferencia circunscrita a $BPO$.

**Solución del problema 14.** (i) Sea $C$ una cuadrícula $2n$-balanceada. Construyamos primero dos cuadrículas idénticas $A$ y $B$ poniendo en cada casilla la mitad del número correspondiente en $C$. Observemos que $A + B = C$, y además, tanto en $A$ como en $B$, números escritos en casillas que comparten un lado tienen diferencia menor o igual que $n$. Sin embargo, los números de $A$

y $B$ pueden no ser enteros. Para corregir esto, ajustemos $A$ redondeando sus números hacia abajo, y ajustemos $B$ redondeando sus números hacia arriba. $A+B$ sigue siendo $C$. La diferencia de dos números en casillas que comparten lado en $A$ pudo haber aumentado, por culpa del ajuste, máximo en $\frac{1}{2}$. Pero después del ajuste la diferencia es un número entero. Si este entero fuera mayor o igual que $n+1$, antes del ajuste la diferencia era mayor o igual que $n+\frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que $A$ es $n$-balanceada. Análogamente, $B$ es $n$-balanceada.
(ii) Sea $D$ una cuadrícula $3n$-balanceada. Construyamos tres cuadrículas idénticas $A$, $B$ y $C$ poniendo en cada casilla la tercera parte del número correspondiente en $D$. Entonces $A+B+C=D$, y en $A$, $B$ y $C$ números escritos en casillas que comparten un lado tienen diferencia menor o igual que $n$. Para hacer el ajuste, nos fijamos en el residuo módulo 3 de un número escrito en $D$. Si este residuo es cero, no hay nada que hacer (ya tenemos números enteros en $A$, $B$ y $C$). Si el residuo es 1, redondeamos los números correspondientes hacia abajo en $A$ y $B$ y hacia arriba en $C$. Si el residuo es 2, redondeamos hacia abajo en $A$ y hacia arriba en $B$ y $C$. Es claro que $A+B+C$ sigue siendo $D$. Además, en $A$, $B$ y $C$, la diferencia entre números escritos en casillas que comparten lado pudo haber aumentado, por culpa del ajuste, máximo en $\frac{2}{3}$ (por ejemplo, en $B$, un número de la forma $b+\frac{1}{3}$, con $b$ entero, cambia a $b$, y uno de la forma $b+\frac{2}{3}$ cambia a $b+1$, de forma que el ajuste aumenta o disminuye el valor de un número de $B$ en a lo más $\frac{1}{3}$). Pero después del ajuste la diferencia es un número entero. Si este número fuera mayor o igual que $n+1$, antes del ajuste la diferencia era mayor o igual que $n+\frac{1}{3}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que $A$, $B$ y $C$ son $n$-balanceadas.

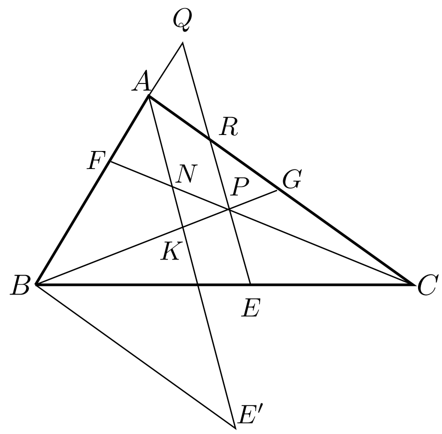
**Solución del problema 15.** Si $a$ es positivo, pongamos $x=a$ y $y=-1$. Con estos valores, para toda $n$ impar se tiene que $a+xy^n=0$, y por lo tanto todos los términos impares de la sucesión son enteros. Para poder tomar $x=a$ necesitamos que $a$ y $b$ sean primos relativos.
Si $a$ es negativo, pongamos $x=-a$ y $y=1$. En este caso todos los términos de la sucesión son enteros (y también es necesario que $a$ y $b$ sean primos relativos).
Ahora supongamos que $a$ y $b$ no son primos relativos y sea $p$ un primo que divide a ambos. Tomemos un entero positivo $k$ tal que $b^k$ divide a $a+xy^k$. Como $p$ divide a $b^k$, $p$ divide a $a+xy^k$, y como divide a $a$, divide $xy^k$. Pero como $x$ es primo relativo con $b$, $p$ divide a $y^k$, y por lo tanto divide a $y$. Sea $M$ la máxima potencia de $p$ que divide a $a$. $b^n$ no puede dividir a $a+xy^n$ para ningún valor $n>M$ porque $p^n$ divide tanto a $b^n$ como a $xy^n$, pero no divide a $a$.
Por lo tanto, la respuesta es *las parejas tales que $a$ y $b$ son primos relativos*.

**Solución del problema 16.** Para $n < 3$, ninguna reordenación tiene una terna aritmética. Para $n = 3$, la lista $2, 1, 3$, cumple.
Vamos a construir un ejemplo para $n$ utilizando los ejemplos para los valores anteriores. De un lado de la lista pondremos los números pares entre 1 y $n$, y del otro, los impares. Si son $j$ números pares, para ordenarlos utilizamos el ejemplo para $j$ simplemente multiplicando sus números por 2. Si son $k$ números impares, para ordenarlos utilizamos el ejemplo para $k$ multiplicando sus números por 2 y restándoles 1. De esta forma obtenemos una reordenación de los números del 1 al $n$. Si en la parte par, $2a$, $2b$ y $2c$ son una terna aritmética, entonces $a$, $b$ y $c$ lo eran en el ejemplo para $j$. Si en la parte impar $2a-1$, $2b-1$ y $2c-1$ son una terna aritmética, $a$, $b$ y $c$ lo eran en el ejemplo para $k$. Si tomamos un término de la parte par y otro de la parte impar, su suma es impar, y no hay un tercero en medio de ellos cuyo doble sea esta suma. Esto muestra que la ordenación que conseguimos no tiene ternas aritméticas.

**Solución del problema 17.** Tomemos una de las colecciones que queremos contar. No puede ser una colección vacía, porque una colección de una sola carta no es completa ($N > 1$).
Fijémonos en los colores que aparecen: no pueden estar todos. Supongamos que faltan dos, digamos $A$ y $B$. Tomemos una figura $\mathcal{F}$ y un número $n$ de los que sí aparecen. La carta de color $A$, figura $\mathcal{F}$ y número $n$ no está en nuestra colección. Sin embargo, al añadirla, la colección no se vuelve completa (pues no estamos agregando figuras nuevas ni números nuevos, y aunque estamos agregando el color $A$, aún falta que aparezca el color $B$), en contradicción con la característica de las colecciones que queremos contar. Entonces falta únicamente un color. Análogamente, aparecen todas salvo una de las figuras y todas salvo uno de los números.
Es claro además que en la colección están todas las cartas que usan estos colores, estas figuras y estos números (de lo contrario, al añadir una de éstas, la colección no se volvería completa).
Recíprocamente, todas las colecciones que se construyen eligiendo $N-1$ números, y poniendo en la colección todas las cartas que resultan de combinar estos colores con estas figuras y estos números, son colecciones incompletas que se vuelven completas si se añade cualquier otra carta de la baraja.
Por lo tanto, la respuesta es $N^3$ (elegir $N-1$ colores, por ejemplo, equivale a elegir el color que no va a aparecer, y hay $N$ formas de hacer esto).

**Solución del problema 18.** Sean $Q$ y $R$ las intersecciones de $l$ con $AB$ y $CA$ respectivamente. Sean $K$ y $N$ los puntos donde $BG$ y $CF$ cortan a $AD$ respectivamente. Sea $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$. Como $l$ y $AD$ son paralelas,

tenemos que $\angle ARQ = \angle DAC = \alpha$, y entonces el triángulo $AQR$ es isósceles con $AQ = AR$.
También, por ser $l$ y $AD$ paralelas, tenemos que $\angle ADB + \angle REC = 180°$, $\angle ADB = \angle QEB$ y $\angle ERC = \angle BAD = \angle BQE = \alpha$.
Por otro lado, como $BD = EC$, se tiene que $BE = CD$.




Sea $E'$ sobre la prolongación de $AD$ (con $D$ entre $A$ y $E'$) y tal que $DE' = ER$. Por el criterio $LAL$, los triángulos $BDE'$ y $CER$ son congruentes, lo que implica que $\angle BE'D = \angle CRE = \alpha$, y entonces el triángulo $ABE'$ es isósceles, con $BE' = AB$, pero $BE' = CR$ (por la congruencia) y entonces $AB = CR$. Tenemos también que, $BQ = BA + AQ = RC + AR = AC$. Ahora, del hecho de que $\triangle CRP \sim \triangle CAN$ y $\triangle BAK \sim \triangle BQP$, obtenemos:

$$\frac{AK}{QP} = \frac{BA}{BQ} = \frac{RC}{AC} = \frac{RP}{AN} \Rightarrow \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN},$$

y del hecho de que $\triangle AFN \sim \triangle QFP$ y $\triangle RGP \sim \triangle AGK$, obtenemos:

$$\frac{GK}{GP} = \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN} = \frac{FP}{FN} \Rightarrow \frac{GP + PK}{GP} = \frac{FN + NP}{FN} \Rightarrow \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{FN},$$

y finalmente:

$$\frac{AR}{RG} = \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{NF} = \frac{AQ}{AF} \Rightarrow RG = AF \Rightarrow BF = AB - AF = CR - RG = CG,$$

que es lo que queríamos probar.

Otra manera de probar que $AB = RC$ es usando la ley de senos en los triángulos $ABD$ y $REC$:

$$\frac{AB}{\text{sen}\,\angle ADB} = \frac{BD}{\text{sen}\,\angle BAD} = \frac{EC}{\text{sen}\,\angle ERC} = \frac{RC}{\text{sen}\,\angle REC} \Rightarrow AB = RC.$$

Otra manera es utilizando la semejanza de los triángulos $CRE$ y $CAD$:

$$\frac{RC}{AC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

donde la última igualdad se sigue por el teorema de la Bisectriz.

# Bibliografía


[1] Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] E. Gentile, *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[6] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[7] A. Illanes Mejía, *Principios de Olimpiada* en la colección *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí, *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí, *Teoría de Números*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[13] N. Vilenkin, *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

# Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Radmila Bulajich Manfrino
(Presidenta)

Anne Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Gabriela Campero Arena

Jesús Jerónimo Castro

Luis Cruz Romo

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Humberto Montalván Gámez

Arturo Morales López

Antonio Olivas Martínez

Elena Ruiz Velázquez

Carmen Sosa Garza

Rogelio Valdez Delgado