Enunciados de los Problemas

Para mostrar el tipo de problemas que se manejan en la fase estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, presentamos aquí algunos ejemplos de ellos. Las soluciones se encuentran después.

Problema 1. Jorge Luis cortó un cuadrado de papel que tenía 20 cm de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos recortados es 16 cm, ¿cuál es el perímetro del otro?

(a) 8 cm (b) 9 cm (c) 12 cm (d) 14 cm (e) 16 cm

Problema 2. En la cuadrícula de la figura se deben escribir los números 1, 2 y 3 de manera que un número no aparezca dos veces en el mismo renglón o en la misma columna. ¿Qué números pueden escribirse en la celda que está marcada con un $*$?

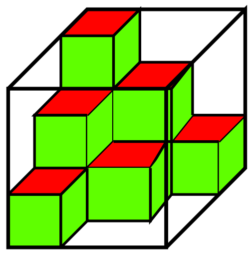
1	$\star$	
2	1	

(a) Sólo 3 (b) Sólo 2 (c) Sólo 1
(d) Cualquiera de 2 o 3 (e) Cualquiera de 1, 2 o 3

Problema 3. Mario, Pedro, Ignacio, Jorge y Angélica están formados en una fila. Mario está después de Ignacio, Angélica está antes de Mario y justo después de Jorge. Jorge está antes de Ignacio pero Jorge no es el primero de la fila. ¿Cuál es el lugar de Pedro en la fila?

(a) Primero (b) Segundo (c) Tercero (d) Cuarto (e) Quinto

Problema 4. Natalia tiene varios cubos de plástico y los acomodó dentro de una pecera cúbica de cristal, tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos más necesita Natalia para llenar la pecera por completo?



(a) 9 (b) 13 (c) 17 (d) 21 (e) 27

Problema 5. Un cubo de madera blanca se mete en una cubeta con pintura azul. Cuando la pintura se ha secado, el cubo se corta en 27 cubitos idénticos. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente dos caras pintadas?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 6. Después de partir un pastel, Sandra se quedó con $\frac{2}{3}$ mientras que Verónica se quedó con $\frac{1}{3}$. Para evitar que su amiga se enojara, Sandra cortó $\frac{1}{4}$ de su porción y se lo dio a Verónica. En este momento:

(a) Sandra tiene $\frac{5}{12}$ del pastel
(b) Sandra tiene $\frac{1}{4}$ del pastel
(c) Sandra tiene $\frac{7}{12}$ del pastel
(d) Sandra tiene $\frac{1}{2}$ del pastel
(e) Sandra tiene $\frac{1}{3}$ del pastel

Problema 7. Los números $\frac{1234}{321}$, 10^2, $\sqrt[3]{100000}$, $1 + 10 + 10^2$, π^5, se van a acomodar en orden creciente. ¿Cuál número debe quedar en medio?

(a) $\frac{1234}{321}$ (b) 10^2 (c) $\sqrt[3]{100000}$ (d) $1 + 10 + 10^2$ (e) π^5

Problema 8. Arturo, Juan Pablo y Francisco tienen 30 canicas entre los tres. Si Francisco le da 5 canicas a Juan Pablo, Juan Pablo le da 4 canicas a Arturo y Arturo le da 2 canicas a Francisco, todos quedan con la misma cantidad. ¿Cuántas canicas tenía Francisco al principio?

(a) 8 (b) 9 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Problema 9. Los asientos de un carrusel están numerados con los números $1, 2, 3, \ldots$. Si Arturo está sentado en el número 11 y Brenda está sentada en el número 4, diametralmente opuesta a él, ¿cuántos asientos tiene el carrusel?

(a) 13 (b) 14 (c) 16 (d) 17 (e) 22

Problema 10. La letra que está en la posición 2007 de la secuencia $CANGUROCANGUROCANG$... es:

(a) C (b) A (c) N (d) G (e) U

Problema 11. En una hoja de papel de 15 cm $\times$ 9 cm se cortaron cuadrados en cada una de sus esquinas para obtener una cruz. Si cada uno de los cuadrados tenía un perímetro de 8 cm, ¿cuál es el perímetro de la cruz?

(a) 48 cm (b) 40 cm (c) 32 cm (d) 24 cm (e) 16 cm

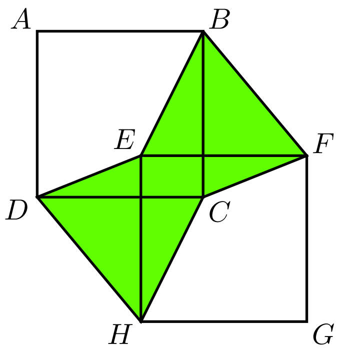
Problema 12. Sabiendo que x es un entero negativo, ¿cuál de los siguientes números es mayor?

(a) $-2x$ (b) $2x$ (c) $x + 1$ (d) $6x + 2$ (e) $x - 2$

Problema 13. Para obtener 8^8 debemos elevar 4^4 a la potencia:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 8 (e) 16

Problema 14. En la figura, $ABCD$ y $EFGH$ son dos cuadrados iguales. El área de la región sombreada es 1. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$?

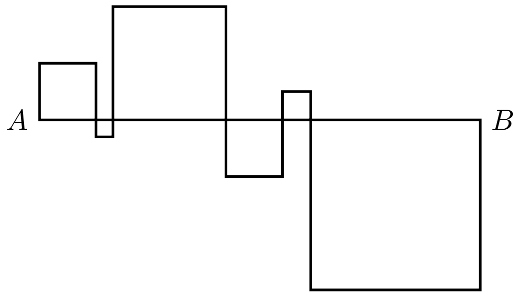


(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1 (e) Depende de la figura

Problema 15. Hay 60 pájaros en tres árboles. Después de escuchar un disparo vuelan 6 pájaros del primer árbol, 8 pájaros del segundo y 4 pájaros del tercero. Si ahora hay el doble de pájaros en el segundo que en el primer árbol, y el doble en el tercero respecto al segundo, ¿cuántos pájaros había originalmente en el segundo árbol?

(a) 7 (b) 11 (c) 15 (d) 20 (e) 24

Problema 16. En la figura se muestran 6 cuadrados. Sabiendo que el segmento de A a B mide 24, ¿cuál es la suma de los perímetros de los 6 cuadrados?

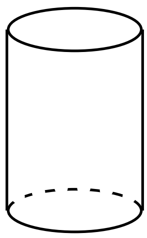


(a) 48 cm (b) 72 cm (c) 96 cm (d) 56 cm (e) 106 cm

Problema 17. Jorge pensó un número, Liz multiplicó por 5 o 6 al número que pensó Jorge, Óscar le sumó 5 o 6 al resultado de Liz y finalmente Alejandro le restó 5 o 6 al resultado de Óscar y obtuvo 78. ¿Cuál fue el número que pensó Jorge?

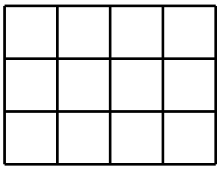
(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 18. El cilíndro de la figura está hecho de dos círculos y un rectángulo de papel. Si el área de cada una de las piezas es π, ¿cuál es la altura del cilíndro?



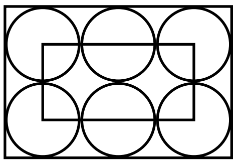
(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\pi}$ (d) π^2 (e) Depende de la forma en que fue construido

Problema 19. En la tabla de la figura hay 12 celdas, que han sido dibujadas usando 4 líneas horizontales y 5 verticales. ¿Cuál es la mayor cantidad de celdas que se pueden obtener dibujando 15 líneas en total?



(a) 30 (b) 36 (c) 40 (d) 42 (e) 60

Problema 20. En la figura se muestran 6 círculos idénticos. Sabiendo que el rectángulo pequeño pasa sobre los centros de todos los círculos y que su perímetro es 60 cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo grande?



(a) 160 cm (b) 140 cm (c) 120 cm (d) 100 cm (e) 80 cm

Problema 21. Una calculadora descompuesta no muestra el número 1 en la pantalla. Por ejemplo, si escribimos el número 3131 en la pantalla se ve escrito el 33 (sin espacios). Pepe escribió un número de seis dígitos en la calculadora, pero apareció 2007. ¿Cuántos números pudo haber escrito Pepe?

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 22. Mónica salió a correr durante dos horas. Su recorrido empezó en un terreno plano donde su velocidad fue de 4 km/h y siguió con un terreno inclinado donde su velocidad fue de 3 km/h. Regresando por el mismo lugar, la velocidad en la parte inclinada fue de 6 km/h mientras que la velocidad en la parte plana fue de 4 km/h. ¿Cuál es la distancia total (ida y vuelta) que recorrió Mónica?

(a) Imposible de determinar (b) 6 km (c) 75 km (d) 8 km (e) 10 km

Problema 23. El primer dígito de un número de 4 dígitos es la cantidad de ceros que aparecen en él, el segundo dígito es la cantidad de 1's, el tercer dígito es la cantidad de 2's y el último dígito es la cantidad de 3's. ¿Cuántos números de cuatro dígitos cumplen con estas condiciones?

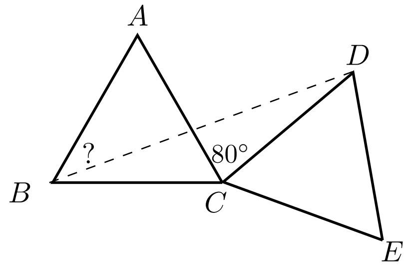
(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 24. Gaby tachó cuatro números de la cuadrícula que se muestra en la figura y Lilia tachó cuatro números de los restantes. Si sabemos que la suma de los números tachados por Lilia es el triple de la suma de los números tachados por Gaby, ¿cuál es el número que no se tachó?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 9

Problema 25. En la figura, ABC y CDE son dos triángulos equiláteros iguales. Si el ángulo ACD mide $80°$, ¿cuánto mide el ángulo ABD?



(a) $25°$ (b) $30°$ (c) $35°$ (d) $40°$ (e) $45°$

Problema 26. Cinco enteros se escriben en círculo de forma que no haya dos o tres números consecutivos cuya suma sea múltiplo de tres. ¿Cuántos de esos cinco números son divisibles entre tres?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Imposible de determinar

Problema 27. Si M es el 30 % de Q, Q es el 20 % de P, y N es el 50 % de P, ¿cuánto vale $\frac{M}{N}$?

(a) $\frac{3}{250}$ (b) $\frac{3}{25}$ (c) 1 (d) $\frac{6}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$

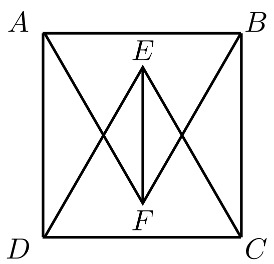
Problema 28. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar borrando al menos una de las letras de la palabra ANTENA? Por ejemplo, algunas palabras que se obtienen así son A, TNA, ANTNA.

(a) $2^6 - 4$ (b) 2^5 (c) $3 \cdot 2^4$ (d) $6! - 4!$ (e) $6! - 2!$

Problema 29. ¿Cuántos números n satisfacen al mismo tiempo las 5 condiciones siguientes?
1. n es par.
2. n deja residuo 1 al dividirlo entre 5.
3. n es múltiplo de 7.
4. n es menor que 1000.
5. La suma de los dígitos de n es 23.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 30. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y los triángulos ABF y DEC son equiláteros. Si $AB = 1$, ¿cuál es la longitud de EF?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3} - 1$ (e) $\frac{3}{2}$

Problema 31. Mi clave secreta es un número de tres dígitos. Si lo divido entre 9 tengo como resultado un número cuya suma de dígitos disminuye en 9 con respecto a la suma de los dígitos de mi clave. ¿Cuántos números pueden ser mi clave secreta?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 11

Problema 32. ¿Cuántos números de cuatro cifras $N = abcd$ cumplen las siguientes tres condiciones?
1. $4,000 \leq N < 6,000$. 2. N es múltiplo de 5. 3. $3 \leq b < c \leq 6$.

(a) 10 (b) 18 (c) 24 (d) 36 (e) 48

Problema 33. La gráfica de la función $f(x)$ es una recta y se verifica que $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ y $f(5) = 5$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) $f(0) < 0$ (b) $f(0) = 0$ (c) $f(1) < f(0) < f(-1)$
(d) $f(0) = 5$ (e) $f(0) > 5$

Problema 34. Los números reales $a \neq 0$ y $b \neq 0$ cumplen que $ab = a - b$. ¿Cuál de los siguientes valores es un valor posible para $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$?

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) 2

Problema 35. Si unimos los centros de cada par de caras adyacentes de un cubo, formamos un octaedro regular. ¿Cuál es el cociente entre el volumen del octaedro y el volumen del cubo?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (b) $\frac{\sqrt{16}}{16}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (e) $\frac{1}{4}$

Problema 36. Sean x, y, z, enteros no negativos tales que $x + y + z = 12$. ¿Cuál es el valor más grande de la suma $xyz + xy + yz + zx$?

(a) 62 (b) 72 (c) 92 (d) 102 (e) 112

Problema 37. ¿Cuál de los siguientes enteros se puede escribir como suma de 100 enteros positivos consecutivos?

(a) $1,627,384,950$ (b) $2,345,678,910$ (c) $3,579,111,300$
(d) $4,692,581,470$ (e) $5,815,937,260$

Problema 38. En el triángulo ABC se sabe que $3 \operatorname{sen} A + 4 \cos B = 6$ y $4 \operatorname{sen} B + 3 \cos A = 1$. ¿Cuánto mide el ángulo C?

(a) $30°$ (b) $60°$ (c) $90°$ (d) $120°$ (e) $150°$

Problema 39. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface que $a_1 = 19$, $a_9 = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es el promedio de los primeros $n - 1$ términos. Encuentra el valor de a_2.

(a) 29 (b) 59 (c) 79 (d) 99 (e) 179

Problema 40. Los vértices de un triángulo inscrito en una circunferencia dividen a ésta en tres arcos de longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

(a) 6 (b) $\frac{18}{\pi^2}$ (c) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

(d) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$ (e) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$

Problema 41. Sea $E(n)$ la suma de los dígitos pares de n. Por ejemplo, $E(5681) = 6 + 8 = 14$. ¿Cuál es el valor de $E(1) + E(2) + \cdots + E(100)$?

(a) 200 (b) 360 (c) 400 (d) 900 (e) 2250

Problema 42. Si se sabe que: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, ¿cuál es el valor de:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots ?$$

(a) $\frac{\pi^2}{7}$ (b) $\frac{\pi^2}{8}$ (c) $\frac{\pi^2}{9}$ (d) $\frac{\pi^2}{10}$ (e) $\frac{\pi^2}{12}$

Problema 43. En el triángulo isósceles ABC se tiene que $AB = 2BC$. Si el perímetro de ABC es 300 cm, ¿cuánto mide AC?

(a) 60 cm (b) 80 cm (c) 100 cm (d) 120 cm (e) 140 cm

Problema 44. Una función f definida en los enteros satisface que:

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Si k es un entero impar y $f(f(f(k))) = 27$, ¿cuál es la suma de los dígitos de k?

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 12 (e) 15

Problema 45. La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja rectangular es 140 y la distancia de una esquina de la caja a la esquina más lejana es 21. ¿Cuál es el área total de la caja?

(a) 776 (b) 784 (c) 798 (d) 800 (e) 812

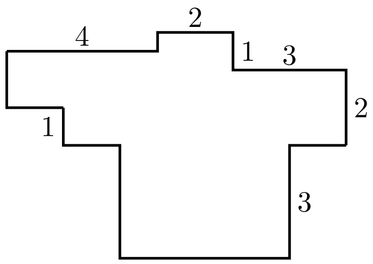
Problema 46. Un número *alcanzable* como 34689, es un entero positivo en el que cada dígito es mayor que el que está a su izquierda. Se sabe que hay $\binom{9}{5} = 126$ números alcanzables de cinco dígitos. Cuando estos números se ordenan de menor a mayor, el que ocupa el lugar número 97 en la lista no contiene el dígito:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 47. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una sucesión de números enteros que satisface las siguientes propiedades:
1. $-1 \leq x_i \leq 2$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
2. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 19$.
3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 99$.
Sean m y M los valores mínimo y máximo de la expresión $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$, respectivamente. ¿Cuál es el valor de $\frac{M}{m}$?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 48. En la siguiente figura cada número indica la medida de cada segmento. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

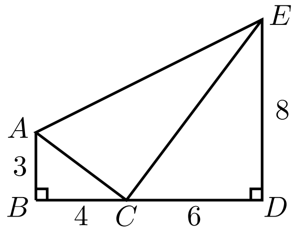


(a) 16 (b) 15 (c) 32 (d) 30 (e) No se puede determinar

Problema 49. ¿De cúantas formas se pueden acomodar los números del 1 al 9 en una cuadrícula de 3×3 de tal manera que no haya dos números de la misma paridad en casillas que comparten un lado?

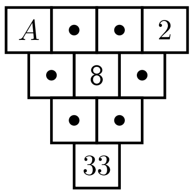
(a) 2808 (b) 3000 (c) 2880 (d) 2900 (e) 144

Problema 50. En la siguiente figura se tiene que los ángulos ABC y CDE son rectos. ¿Cuánto mide el segmento AE?



(a) 5 (b) $5\sqrt{3}$ (c) 10 (d) $5\sqrt{5}$ (e) $3\sqrt{5}$

Problema 51. Originalmente en la siguiente figura había un entero en cada casilla. Los números de la segunda fila, tercera fila y cuarta fila cumplían con la propiedad de que cada número en la casilla era igual a la suma de los dos números en las dos casillas que están inmediatamente arriba de ella. Después de un tiempo algunos números se borraron. ¿Qué número estaba en la casilla marcada con la letra A?

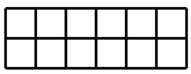


(a) 8 (b) 2 (c) 7 (d) 14 (e) No se puede determinar

Problema 52. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 10000 que no sean múltiplos de 100?

(a) 25 (b) 16 (c) 0 (d) 9 (e) 34

Problema 53. ¿De cuántas formas se puede llenar el siguiente arreglo con 1's y -1's de tal manera que la suma de los números en cada renglón y en cada columna sea 0?

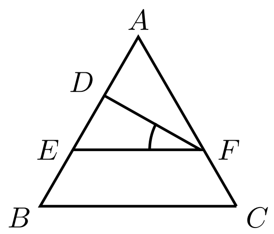


(a) 20 (b) 1 (c) 10 (d) 15 (e) 18

Problema 54. Los lados de un triángulo son 2, 3 y x. Si el área también es x, ¿cuánto vale x?

(a) $\sqrt{5}$ (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

Problema 55. En la siguiente figura se tiene que el triángulo ABC es equilátero de lado 3, con $BE = DA = FC = 1$. ¿Cuánto mide el ángulo DFE?



(a) $10°$ (b) $15°$ (c) $45°$ (d) $80°$ (e) $30°$

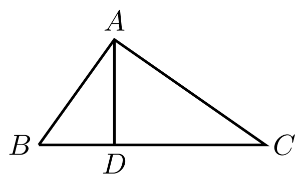
Problema 56. El máximo número de valores enteros que pueden ser obtenidos de la expresión:

$$\frac{100}{2n-1},$$

donde n es un entero positivo es:

(a) 9 (b) 7 (c) 5 (d) 3 (e) 1

Problema 57. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea D el pie de la altura desde A. Si $AB = 5$ y $BD = 3$, determina el área del triángulo ADC.



(a) 2 (b) $\frac{3}{4}$ (c) 9 (d) $\frac{5}{3}$ (e) $\frac{32}{3}$

Problema 58. Para elegir el número ganador de una rifa, se elegirá al azar un número entre el 1 y el 2007, se le restará la suma de sus dígitos y finalmente se le sumará 5. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser premiado?

(a) 1272 (b) 1922 (c) 1031 (d) 518 (e) 1769

Problema 59. Empiezas con el número 1. Una "operación" consiste en multiplicar el número 1 por 3 y sumarle 5, luego, multiplicar el resultado anterior por 3 y sumarle 5, y así sucesivamente. ¿Cuál es el dígito de las unidades después de aplicar la operación 2007 veces?

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 8 (e) 9

Problema 60. ¿Cuántas ternas x, y, z de números reales positivos satisfacen el sistema:

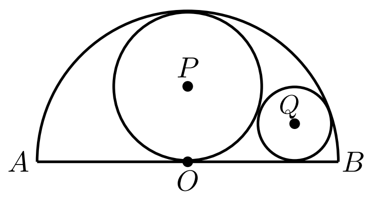
$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28? \end{aligned}$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Ninguna

Problema 61. ¿De cuántas formas se puede colorear un tablero de 3×3, si cada cuadrito se debe colorear con uno de los colores azul, blanco o café y además en cada columna y en cada renglón deben estar los tres colores?

(a) 12 (b) 14 (c) 16 (d) 20 (e) 24

Problema 62. El segmento AB es diámetro de un semicírculo con centro en O. Un círculo con centro en P es tangente a AB en O y también al semicírculo. Otro círculo con centro en Q es tangente a AB, al semicírculo y al círculo de centro en P. Si $OB = 1$, ¿cuál es la medida del radio del círculo con centro en Q?



(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{1}{4}$

Problema 63. ¿Cuál es la suma de todos los números enteros entre el 1 y el 999 que se escriben con exactamente dos unos?

(a) 6000 (b) 6666 (c) 6668 (d) 6880 (e) 6882

Problema 64. Si a y b son números enteros positivos, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación:

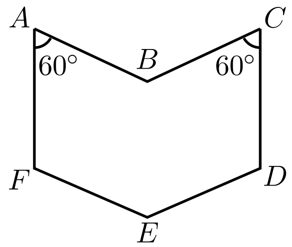
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{500}?$$

(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 35 (e) 40

Problema 65. Enrique tiene 3 hermanas y 5 hermanos. Su hermana Enriqueta tiene y hermanas y z hermanos. ¿Cuánto vale el producto yz?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 15 (e) 18

Problema 66. En la figura, los lados AF y CD son paralelos, AB y FE son paralelos, y BC y ED son paralelos. Si cada lado tiene longitud 1 y $\angle FAB = \angle BCD = 60°$, entonces el área de toda la figura es:



(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) 2

Problema 67. Si el promedio de 15 enteros positivos distintos es 13, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar el segundo número más grande de estos enteros?

(a) 51 (b) 52 (c) 53 (d) 54 (e) 55

Problema 68. En el triángulo ABC, el ángulo en C mide $90°$. Sean E y F puntos en la hipotenusa AB tales que $AE = AC$ y $BF = BC$. Entonces, el ángulo ECF mide:

(a) $30°$ (b) Entre $30°$ y $45°$ (c) $45°$ (d) Entre $45°$ y $60°$ (e) $60°$

Problema 69. ¿Cuántos enteros positivos de dos dígitos son menores que el producto de sus dígitos?

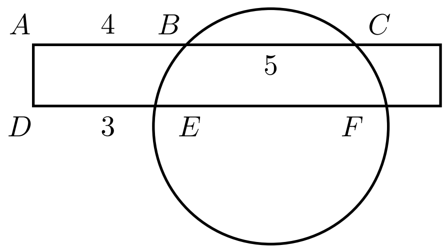
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 45

Problema 70. ¿Cuánto es:

$$2007^2 - 2006^2 + 2005^2 - 2004^2 + \cdots + 3^2 - 2^2?$$

(a) $1004 \cdot 2007 + 1$ (b) 1003^2 (c) $1004 \cdot 2007$
(d) $1003^2 - 1$ (e) $1004 \cdot 2007 - 1$

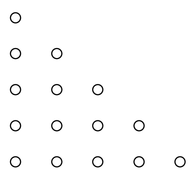
Problema 71. Un rectángulo corta a un círculo como se muestra en la figura.



Si $AB = 4$, $BC = 5$ y $DE = 3$, entonces EF es igual a:

(a) 6 (b) 7 (c) $\frac{20}{3}$ (d) 8 (e) 9

Problema 72. Hay 5 clavijas amarillas, 4 clavijas rojas, 3 verdes, 2 azules y 1 anaranjada que se van a colocar en el arreglo triangular que se muestra. ¿De cuántas maneras pueden colocarse las clavijas de tal modo que ninguna fila (horizontal) ni ninguna columna (vertical) contenga dos clavijas del mismo color?



(a) 0 (b) 1 (c) $5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ (d) $\frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$ (e) $15!$

Problema 73. ¿Para cuántos enteros positivos n, el número $n^3 - 8n^2 + 20n - 13$ es un número primo?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) Más de 4

Problema 74. Si a y b son números distintos tales que:

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2,$$

¿cuánto vale $\frac{a}{b}$?

(a) 0.4 (b) 0.5 (c) 0.6 (d) 0.7 (e) 0.8

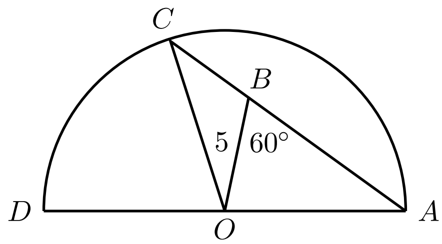
Problema 75. Se quieren pintar las casillas de un tablero de 4×4 de blanco y de negro, de tal manera que haya exactamente dos casillas negras y dos casillas blancas en cada renglón y en cada columna. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

(a) 36 (b) 54 (c) 72 (d) 120 (e) 90

Problema 76. Si se sabe que $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$, entonces $27^7 + 84^7 + 110^7 + 133^7$ es:

(a) Menor que $144^7 - 1$ (b) Igual a $144^7 - 1$ (c) Igual a 144^7
(d) Igual a $144^7 + 1$ (e) Mayor que $144^7 + 1$

Problema 77. En un círculo con centro O, AD es un diámetro, ABC es una cuerda, $BO = 5$ y $\angle ABO = \widehat{CD} = 60°$ como se muestra en la figura. Entonces, la longitud de BC es:



(a) 3 (b) $3 + \sqrt{3}$ (c) $5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 5 (e) Ninguna de las anteriores

Problema 78. Si $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$ y $f(-7) = 3$, ¿a qué es igual $f(7)$?

(a) 3 (b) -3 (c) -11 (d) 11 (e) -7

Problema 79. Simplifica:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

suponiendo que ningún denominador es igual a cero.

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1 (e) 2

Problema 80. Para cada entero positivo k, sea S_k la progresión aritmética creciente de enteros cuyo primer término es 1 y cuya diferencia común es k. Por ejemplo, S_3 es la progresión $1, 4, 7, 10, \ldots$. ¿Para cuántos valores de k, S_k contiene el número 2008?

(a) 0 (b) 2 (c) 6 (d) 10 (e) 2008

Problema 81. Si $x = \dfrac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}$, encuentra el valor de $(x+1)^{48}$.

(a) 100 (b) 125 (c) 148 (d) 216 (e) 224

Problema 82. Si n es un entero positivo, denotamos con $\tau(n)$ al número de divisores positivos de n, incluyendo a 1 y a n. Por ejemplo, $\tau(1) = 1$ y $\tau(6) = 4$. Definimos $S(n) = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)$. Si a denota al número de enteros positivos $n \leq 2008$ con $S(n)$ impar, y b denota al número de enteros positivos $n \leq 2008$ con $S(n)$ par, calcula $|a - b|$.

(a) 28 (b) 42 (c) 68 (d) 100 (e) 106

Problema 83. Un ciclista ha recorrido dos tercios de su trayecto cuando se le poncha una llanta. Decide terminar su recorrido a pie, pero este tramo del viaje le toma el doble de tiempo del que hizo en bicicleta. ¿Cuántas veces más rápido anda en bicicleta que a pie?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 84. Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O. Sobre los lados DC y AD se han construido los triángulos equiláteros EDC y FAD. ¿Cuál es la razón del área del triángulo FDE entre el área del triángulo DOC?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) 2

Problema 85. Considera un entero positivo M que cumple la siguiente propiedad: si escogemos al azar un número x del conjunto $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, la probabilidad de que x sea un divisor de M es igual a $\frac{1}{100}$. Si $M \leq 1000$, ¿cuál es el mayor valor posible de M?

(a) 540 (b) 976 (c) 1084 (d) 1460 (e) 2008

Problema 86. La ecuación $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ tiene tres soluciones reales: a, b y c. ¿Cuál es el valor de $a^5 + b^5 + c^5$?

(a) 3281 (b) 2381 (c) 8321 (d) 1283 (e) 2813

Problema 87. Dos circunferencias C_1 y C_2 tienen una cuerda común AB. Se elige un punto P en C_1 de manera que quede afuera de C_2. Sean X, Y los puntos de intersección de PA y PB con C_2, respectivamente. Si $AB = 4$, $PA = 5$, $PB = 7$ y $AX = 16$, ¿cuánto mide XY?

(a) 6 (b) 7 (c) 9 (d) 12 (e) 14

Problema 88. Una bolsa contiene 8 fichas negras y las demás son rojas. Si la probabilidad de sacar una ficha roja es de $\frac{2}{3}$, ¿cuántas fichas hay en la bolsa?

(a) 16 (b) 18 (c) 20 (d) 22 (e) 24

Problema 89. Si a y b son números reales tales que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, ¿cuánto vale $\operatorname{sen}(a + b)$?

(a) 0 (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{3}{2}$

Problema 90. ¿Cuántos divisores tiene 2008^{2008} que son cuadrados perfectos?

(a) 1005×1006 (b) 1005^2 (c) 1005×3013 (d) 1005×4015 (e) 1005^3

Problema 91. En el triángulo ABC, M es el punto en BC tal que $BM = 5$ y $MC = 6$. Si $AM = 3$ y $AB = 7$, ¿cuánto mide AC?

(a) $\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{3}$ (d) $7\sqrt{3}$ (e) $9\sqrt{3}$

Problema 92. Después de desarrollar y reducir términos semejantes, ¿cuántos términos quedan en la expresión:

$$(x+y+z)^{2008}+(x-y-z)^{2008}?$$

(a) 1001^2 (b) 1002^2 (c) 1003^2 (d) 1004^2 (e) 1005^2

Problema 93. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que satisface $P(17) = 10$ y $P(24) = 17$. Si la ecuación $P(x) = x + 3$ tiene en total dos soluciones enteras distintas a y b, ¿a qué es igual $a \times b$?

(a) 400 (b) 418 (c) 430 (d) 476 (e) 488

Problema 94. ¿A qué es igual $\sqrt{\operatorname{sen}^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x}$?

(a) $\cos x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos 3x$ (d) $\cos 4x$ (e) $\cos 5x$

Problema 95. ¿Cuántos divisores primos distintos tiene el entero positivo N si:

$$\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11?$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 7

Problema 96. Un poliedro convexo P tiene 26 vértices, 60 aristas y 36 caras. De las 36 caras, 24 son triángulos y 12 son cuadriláteros. Una "diagonal espacial" es una recta que une dos vértices no adyacentes que no pertenecen a la misma cara. ¿Cuántas diagonales espaciales tiene P?

(a) 217 (b) 229 (c) 241 (d) 265 (e) 325

Problema 97. El número:

$$\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2008}$$

se puede escribir en la forma $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$, donde a, b y c son enteros positivos. ¿Cuánto vale el producto abc?

(a) 312 (b) 936 (c) 468 (d) 234 (e) 104

Problema 98. Sean x, y, z números reales que satisfacen:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{16}}, \\ y &= \sqrt{z^2 - \frac{1}{25}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{25}}, \\ z &= \sqrt{x^2 - \frac{1}{36}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{36}}, \end{aligned}$$

y además $x+y+z = \frac{m}{\sqrt{n}}$ donde m y n son enteros positivos y n no es divisible por el cuadrado de ningún número primo. ¿A qué es igual $m+n$?

(a) 9 (b) 15 (c) 23 (d) 31 (e) 37

Problema 99. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean AA', BB', CC' y DD' rayos paralelos en el espacio del mismo lado del plano determinado por $ABCD$. Si $AA' = 10$, $BB' = 8$, $CC' = 18$, $DD' = 22$ y M y N son los puntos medios de $A'C'$ y $B'D'$, respectivamente, hallar la longitud de MN.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 100. ¿Cuántas parejas ordenadas de enteros (m, n) tales que $mn \geq 0$, cumplen que $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$?

(a) 2 (b) 3 (c) 33 (d) 35 (e) 99