Problemas Introductorios

para la

31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Elena Aguilera Miranda
Luis Miguel García Velázquez
José Antonio Gómez Ortega
Isabel Hubard Escalera
María Luisa Pérez Seguí

2017

María Elena Aguilera Miranda

Departamento de Matemáticas y Estadística,
Universidad de Ciencia y Tecnología de Missouri

Luis Miguel García Velázquez

Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia,
Universidad Nacional Autónoma de México

José Antonio Gómez Ortega

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Isabel Hubard Escalera

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2018: la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en Rumania durante el mes de julio, la VIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas que se realizará en Europa en el mes de abril, la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en España y Portugal, y la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Cuba en el mes de junio.

En la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1998. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2017-2018, y para el 1^o de julio del año 2018 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los problemas que se incluyen en este folleto se propusieron por parte del Canguro Matemático Mexicano y tienen distintos niveles. Los comités estatales utilizaron los problemas a su conveniencia. En muchos estados los problemas aquí presentados fueron aplicados en los exámenes de diferentes etapas del proceso estatal. Los primeros doce problemas que aparecen en esta publicación formaron parte del Examen de Nivel Escolar del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos por niños de 5^o y 6^o de primaria en un lapso de una hora. Los siguientes doce problemas (del 13 al 24) formaron parte del Examen de Nivel Benjamín del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos por jóvenes de 1^o y 2^o de secundaria en un lapso de una hora. El resto de los problemas de opción múltiple (del 25 al 45) formaron parte del Examen del Nivel Olímpico del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de 3 horas, como un examen eliminatorio. Los últimos cinco problemas corresponden a las siguientes fases de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

El presente folleto se edita con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en Monterrey, Nuevo León del 5 al 10 de noviembre de 2017. En él se elegirán a las preselecciones mexicanas.

Entrenamientos. A los alumnos de las preselecciones que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2018. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las diferentes Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

A partir del 21 de abril -y durante un mes- se distribuirán los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página: `http://canguro.deltagauge.info/`

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca, Toluca, Guadalajara y Acapulco.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en los concursos internacionales donde participa han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31
2013	Colombia	97	17
2014	Sudáfrica	101	26
2015	Tailandia	104	19
2016	Hong Kong	109	23

En 2016, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León (medalla de plata), Antonio López Guzmán de Chihuahua (medalla de plata), Leonardo Ariel García Morán de Jalisco (medalla de plata), Victor Hugo Almendra Hernández de la Ciudad de México (medalla de plata), Olga Medrano Martín del Campo de Jalisco (medalla de bronce) y José Ramón Tuirán Rangel de Hidalgo (mención honorifica). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de oro, 23 medallas de plata, 54 medallas de bronce y 33 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6
2013	Panamá	20	3
2014	Honduras	22	1
2015	Puerto Rico	23	4
2016	Chile	22	4

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en 2016 obtuvieron medalla: Victor Hugo Almendra Hernández de la Ciudad de México (medalla de plata), Alfredo Alef Pineda Reyes del Estado de México (medalla de plata), Karol José Gutiérrez Suárez de Colima (medalla de plata) y Antonio López Guzmán de Chihuahua (medalla de bronce). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 27 medallas de oro, 43 medallas de plata, 34 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
2014	Turquía	28	17
2015	Bielorusia	30	9
2016	Rumania	39	13

En abril de 2016 México participó en la V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Busteni, Rumania. Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. México ocupó el lugar 13 de 39 países participantes. El equipo mexicano fue integrado por Olga Medrano Martín del Campo de Jalisco, Alka Xavier Earathu de Morelos, Jacqueline Lira Chávez de Morelos y Marcela Cruz Larios de Campeche. Olga obtuvo una medalla de oro y Alka logró una medalla de plata.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1
2013	Nicaragua	13	1
2014	Costa Rica	12	1
2015	México	13	1
2016	Jamaica	13	1

En la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo una medalla de oro de Diego Hinojosa Telléz de Jalisco y dos medallas de plata de Bruno Gutiérrez Chávez de Colima y de Alfredo Hernández Estrada de San Luis Potosí, ubicando a la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 34 medallas de oro, 17 de plata y 3 de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2016 se llevó a cabo en Acapulco, Guerrero, el Concurso Nacional de la 30^a OMM, con la participación de los treinta y dos Estados de la República. Los 18 alumnos ganadores del primer lugar y pre seleccionados para la Olimpiada Internacional de Matemáticas, fueron:

Axel Barba Razo (Baja California),
Sergio Felipe López Robles (Colima),
Edwin Tomy George (Chihuahua),
José Eduardo Payán Sosa (Chihuahua),
Alberto Sosa Borunda (Chihuahua),
Oriol Solé Pi (Ciudad de México),
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco),
Maximiliano Sánchez Garza (Nuevo León),
Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León),
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León),
Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México),
Enrique Aguilar Méndez (Puebla),
Alfredo Hernández Estrada (San Luis Potosí),
Issac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa),
Carlos Yaddiel Cortes Ruelas (Tlaxcala),
Fernando Issaí Saénz Meza (Tlaxcala),
Rodrigo Jesús Pantoja Vázquez (Yucatán) y
Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas).

Los 8 alumnos pre seleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas)
Bryan Calderón Rivera (Chihuahua),
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),

Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato),
David Vega Mena (Morelos),
Kenny Eduard Vercaemer González (Morelos),
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León) y
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).

Las 9 alumnas pre seleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Marcela Cruz Larios (Campeche),
Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas),
Arely Elizabeth Nataren Hidalgo (Chiapas),
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),
Cristina Irene Sotomayor Vivas (Ciudad de México),
Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México),
Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato),
Violeta Alitzel Martínez Escamilla (Morelos) y
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 30º Concurso Nacional:

1. Nuevo León
2. Chihuahua
3. Jalisco
4. Morelos
5. Ciudad de México
6. Yucatán
7. San Luis Potosí
8. Tlaxcala
9. Puebla
10. Sinaloa

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Tlaxcala. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Tabasco y Durango.

Material de estudio e información sobre la OMM

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

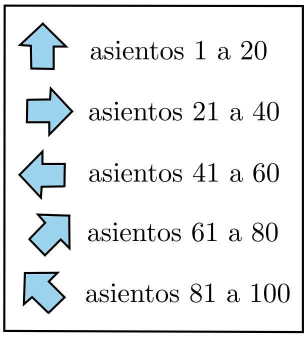
`http://ommenlinea.org/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Febrero 2017

Enunciados de los problemas

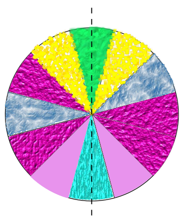
Los siguientes problemas son de nivel introductorio y son de calentamiento. Los conocimientos necesarios para resolverlos no pasan de aquellos del programa escolar de quinto de primaria, sin embargo debes leerlos con cuidado para entender qué se pide en cada caso.

Problema 1. Germán va con su papá al circo. Sus asientos tienen los números 71 y 72. ¿Hacia dónde deben dirigirse?



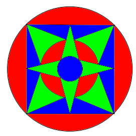
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

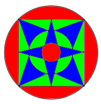
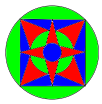
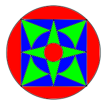
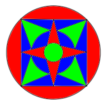
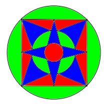
Problema 2. ¿Cuántos sectores deben cambiar su color para que la recta vertical sea eje de simetría?



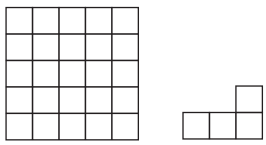
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 3. Lisa copió la figura de abajo pero cambió los colores. Donde vio rojo puso verde, donde vio verde puso azul y donde vio azul puso rojo. ¿Cuál es el dibujo que le quedó?



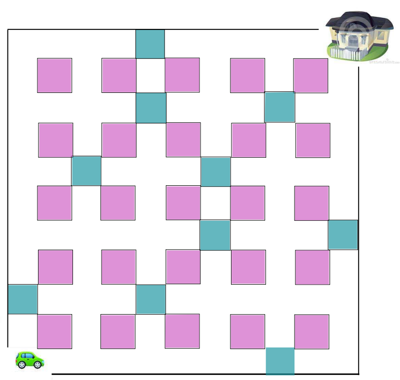
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 4. Una cuadrícula de papel de 5×5 como la que se muestra se quiere cortar de manera que se obtengan piezas iguales a la que se muestra al lado de la cuadrícula. ¿Cuál es el mayor número de piezas que se puede obtener?



(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 5. El coche irá por el camino blanco hasta la casa sin pasar dos veces por el mismo punto. ¿Cuántas veces dará vuelta a la izquierda?

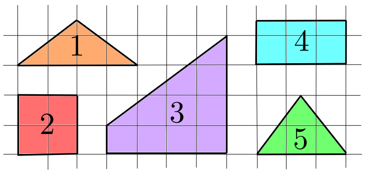


(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 6. La suma de los dígitos del año 2016 es 9. ¿Cuál es el siguiente año en que volverá a ser 9 la suma de los dígitos?

(a) 2007 (b) 2025 (c) 2034 (d) 2108 (e) 2134

Problema 7. Tres de las piezas de rompecabezas que se muestran se pueden juntar para formar un cuadrado. ¿Cuáles son?



(a) 1, 3 y 5 (b) 1, 2 y 5 (c) 1, 4 y 5 (d) 3, 4 y 5 (e) 2, 3 y 5

Problema 8. Raquel sumó algunos números y obtuvo 2016, pero se equivocó y sumó 201 en lugar de 102. ¿Cuál es el resultado correcto?

(a) 1816 (b) 1817 (c) 1905 (d) 1914 (e) 1917

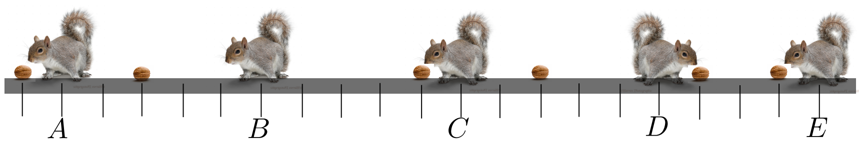
Problema 9. El número 2581953764 se escribe en una tira de papel. Rubén va a cortar la tira dos veces para obtener 3 números y sumarlos. ¿Cuál es la menor suma que puede lograr?

(a) 2675 (b) 2975 (c) 2978 (d) 4217 (e) 4298

Problema 10. María, Cristina y Natalia trabajan en una escuela. Cada día, entre el lunes al viernes, exactamente dos de ellas van a trabajar. María trabaja 3 días de la semana y Cristina trabaja 4. ¿Cuántos días trabaja Natalia?

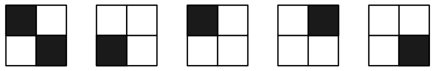
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 11. Cinco ardillas A, B, C, D y E están sentadas en línea en las posiciones que se indican. En un momento dado, las 5 corren a recoger la nuez que cada una tiene más cerca, y en cuanto la recoge, se va a recoger la siguiente nuez. ¿Cuál de las ardillas logra recoger 2 nueces?

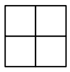
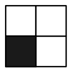
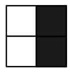
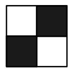


(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Problema 12. Un cubo se construyó a partir de 8 cubitos. Algunos cubitos son negros y otros son blancos. Se muestran 5 de las caras del cubo.

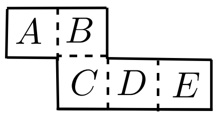


Sólo una de las opciones que se muestran abajo puede ser la otra cara del cubo. ¿Cuál es la otra cara del cubo?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

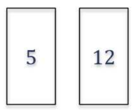
Los siguientes problemas son un poquito más difíciles que los anteriores, pero los seguimos considerando de calentamiento. Para algunos de ellos, necesitarás conocimientos básicos de secundaria.

Problema 13. La pieza de papel que se muestra se dobla a lo largo de las líneas punteadas para hacer una caja abierta. La caja se pone en la mesa con la parte abierta hacia arriba. ¿Qué cara queda abajo?



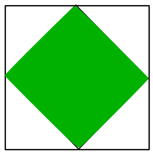
(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Problema 14. Laura tiene dos tarjetas. Escribió un número en cada uno de los lados de las tarjetas. En la figura se ve un lado de cada una de las tarjetas. La suma de los dos números de ambas tarjetas es igual. Además la suma de los cuatro números es 32. De los números que no se ven, se resta el menor del mayor. ¿Cuál es ese resultado?



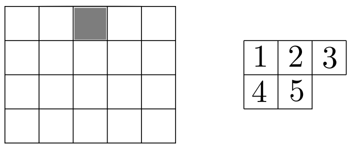
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 7

Problema 15. Lorena dibuja un cuadrado de lado 10 cm. Une los puntos medios de los lados para hacer un cuadrado más pequeño. ¿Cuál es el área del cuadrado pequeño?



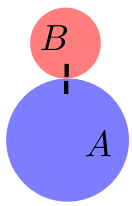
(a) 10 cm^2 (b) 20 cm^2 (c) 25 cm^2 (d) 40 cm^2 (e) 50 cm^2

Problema 16. Cuatro fichas numeradas iguales se quieren acomodar en cualquier posición, pero sin traslapar, en un rectángulo de 4×5. ¿Cuáles son todas las posibilidades del número que puede quedar sobre el cuadro sombreado?



(a) 2, 3 y 4 (b) sólo 3 (c) 1 y 4 (d) 1 y 3 (e) 1, 3 y 5

Problema 17. Una moneda A mide 18 mm de diámetro. Otra moneda más pequeña B gira alrededor de A, siempre tocándola. Ambas monedas tienen una marca en una orilla y al principio la marca coincide. Se sabe que el primer momento en que vuelven a coincidir las marcas es cuando B da dos vueltas completas alrededor de A. ¿Qué diámetro tiene B?



(a) 2 mm (b) 6 mm (c) 9 mm (d) 12 mm (e) 15 mm

Problema 18. En la cuadrícula aparecen los números 1, 2 y 3 como se muestra. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9 (una vez cada uno) de manera que la suma de los números de cada renglón y de cada columna sea la misma?

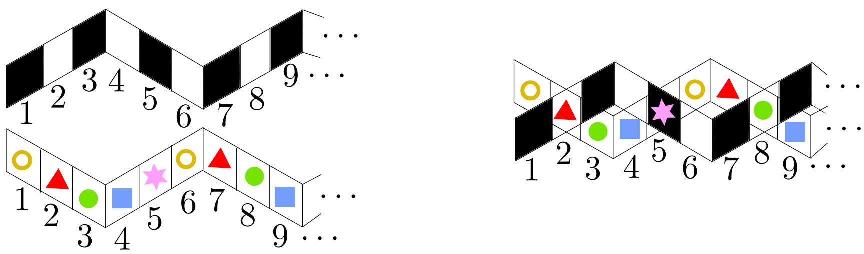
1		
	2	
		3

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 6

Problema 19. Tomás, Laureano y Joaquín son triates. Su hermano Pablo es 3 años más grande que ellos. ¿Cuál de las siguientes puede ser la suma de las edades de los cuatro?

(a) 27 (b) 28 (c) 29 (d) 30 (e) 40

Problema 20. En la figura, a la izquierda se muestra el principio de dos cintas transparentes con casillas numeradas del 1 al 100. La primera cinta alterna los colores negro y blanco en sus casillas. La segunda tiene cinco dibujos que se van mostrando en orden: aro, triángulo, círculo, cuadrado, estrella y esto se repite. Las cintas se enciman, como se ve a la derecha. La primera vez que la estrella queda sobre fondo negro es en la casilla con el número 5. ¿En qué número vuelve a coincidir la estrella con la parte negra?

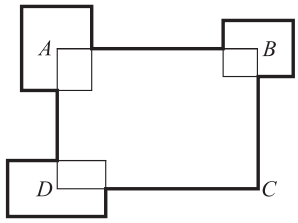


(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 30 (e) 35

Problema 21. La abuela compró suficiente comida para alimentar a sus 4 gatos durante 12 días. Cuando iba de regreso a casa recogió otros dos gatos. ¿Para cuántos días le alcanzará la comida?

(a) 8 (b) 7 (c) 6 (d) 5 (e) 4

Problema 22. El perímetro de un rectángulo $ABCD$ es 30 cm. Otros 3 rectángulos se ponen de manera que sus centros son los puntos A, B y D como se muestra en la figura. Si la suma de los perímetros de los tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es la longitud de la línea gruesa?



(a) 40 cm (b) 45 cm (c) 50 cm (d) 55 cm (e) falta información

Problema 23. Luis abrió un restaurante. Su amigo Jacobo le regaló mesas y sillas. Si pone las mesas de manera que cada mesa tenga 4 sillas, necesitaría 6 sillas más. Si las pone dobles de manera que cada pareja de mesas use 6 sillas, entonces le sobran 4 sillas. ¿Cuántas mesas le dio Jacobo?

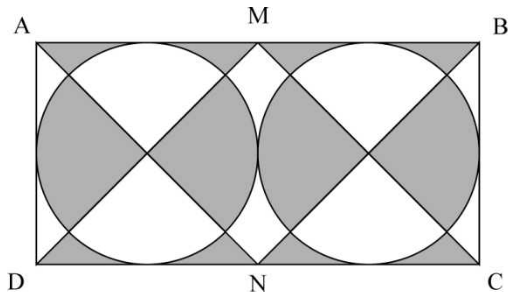
(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14 (e) 16

Problema 24. Paula está jugando con su calculadora. Empieza con el número 12 y va multiplicando o dividiendo por 2 o por 3 los números que va obteniendo. Si hace 60 operaciones en total, ¿cuál de los números no puede obtener?

(a) 12 (b) 18 (c) 36 (d) 72 (e) 108

Los siguientes problemas forman parte del examen eliminatorio de la 30a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que se aplicó en varios estados de la república. Los problemas se parecen mucho a los que encontrarás en el Examen de Invitación de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del 2017.

Problema 25. En la figura se muestran dos círculos dentro de un rectángulo. Si M y N son puntos medios de AB y DC, respectivamente, y $AD = 10$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

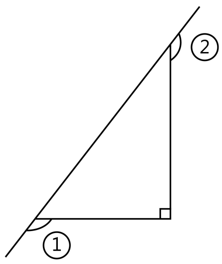


(a) 50 (b) 80 (c) 100 (d) 120 (e) 150

Problema 26. Julieta tiene dos dados iguales, que en sus caras tienen escritos los números -1, 2, -3, 4, -5 y 6. Julieta tiró ambos dados y sumó los dos números que salieron. ¿Cuál de las siguientes cantidades no pudo ser la que obtuvo?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 8

Problema 27. ¿Cuál es la suma de los ángulos marcados con 1 y 2 en la figura?



(a) 150º (b) 180º (c) 270º (d) 320º (e) 360º

Problema 28. La suma de las edades de Miguel y Tere es 5. La suma de las edades de Miguel e Inés es 6. La suma de las edades de Tere e Inés es 7. ¿Cuál es la edad del mayor de los 3?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

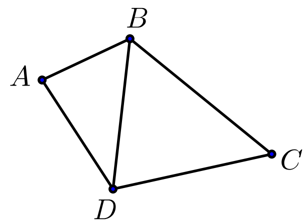
Problema 29. Adriana tiene dos pedazos de cuerda con longitudes de 1 y 2 m. Si los cortó en varios trozos, todos del mismo tamaño ¿Cuál de las siguientes no pudo ser el total de trozos que obtuvo?

(a) 8 (b) 9 (c) 12 (d) 21 (e) 27

Problema 30. Daniele escribió los números del 1 al 9 en un pizarrón. Después de borrar cuatro de ellos, se dio cuenta de que al elegir cualesquiera dos de ellos y sumarlos el resultado siempre era distinto a 10. ¿Cuál de los siguientes no pudo ser uno de los números que Daniele borró?

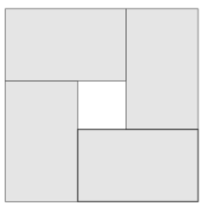
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 31. Las ciudades A, B, C y D están conectadas por carreteras, según se muestra en la figura. Se está organizando una carrera de autos que empiece en la ciudad D y termine en la ciudad B, utilizando cada carretera exactamente una vez. ¿Cuántas rutas posibles hay para la carrera?



(a) 10 (b) 8 (c) 6 (d) 4 (e) 2

Problema 32. En la figura se muestran cuatro rectángulos iguales dibujados dentro de un cuadrado. Si el perímetro de cada rectángulo mide 16 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrado original?

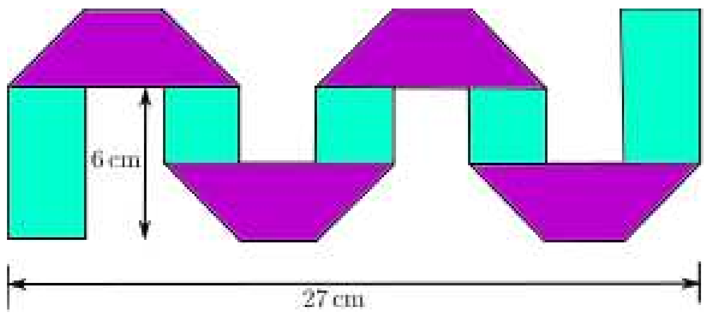


(a) 16 cm (b) 20 cm (c) 24 cm (d) 28 cm (e) 32 cm

Problema 33. Sobre la mesa hay 49 fichas azules y una roja. ¿Cuántas fichas se deben quitar para que el 90% de las fichas sobre la mesa sean azules?

(a) 4 (b) 10 (c) 29 (d) 40 (e) 45

Problema 34. Una tira de papel con 3 cm de ancho se dobla como se muestra en la figura. Si los cuatro trapecios son iguales, ¿cuál es el largo de la tira?



(a) 36 cm (b) 48 cm (c) 54 cm (d) 57 cm (e) 81 cm

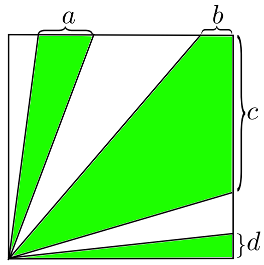
Problema 35. Los Canguros Salt y Arín empezaron a saltar al mismo tiempo, desde el mismo lugar y en la misma dirección, a razón de un salto por segundo. La longitud de cada uno de los saltos de Salt fue 5 m. La longitud del primer salto de Arín fue 1 m, la del segundo fue 2 m, la del tercero fue 3 m y así sucesivamente. ¿Después de cuántos saltos Arín alcanzó a Salt?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 36. Hay 20 estudiantes en una clase, sentados por parejas. La maestra observa que exactamente la tercera parte de los chicos se sientan junto a una chica, y que exactamente la mitad de las chicas se sientan con un chico. ¿Cuántas chicas hay en la clase?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 11 (e) 14

Problema 37. Dentro de un cuadrado de área 36 se han sombreado tres regiones, como se muestra en la figura. El área sombreada total mide 27. ¿Cuál es el valor de $a+b+c+d$?



(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) falta información

Problema 38. El reloj de Marisol va retrasado por 10 minutos, pero ella cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Mónica está adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Marisol cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Mónica que es?

(a) 11:30 (b) 11:45 (c) 12:00 (d) 12:30 (e) 12:45

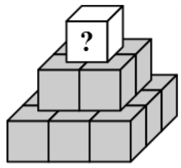
Problema 39. Caperucita roja le lleva panecillos a sus tres abuelitas. Ella empieza con una canasta llena de panecillos. Antes de entrar a la casa de cada una de sus abuelitas, el Lobo Feroz se come la mitad de los panecillos que hay en la canasta. Cuando ella sale de la casa de su tercera abuelita, ya no le queda ningún panecillo. Si ella le entregó la misma cantidad de panecillos a cada abuelita, ¿cuál de los siguientes puede ser el número de panecillos con los que empezó?

(a) 28 (b) 26 (c) 24 (d) 20 (e) 18

Problema 40. Varios números enteros positivos están escritos en el pizarrón. El producto de los dos más pequeños es 16. El producto de los dos más grandes es 225. Además, todos los números del pizarrón son distintos. ¿Cuál es la suma de todos los números escritos en el pizarrón?

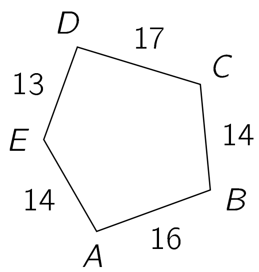
(a) 44 (b) 52 (c) 60 (d) 64 (e) 243

Problema 41. Víctor escribe un número positivo en cada uno de los catorce cubos de la pirámide que se muestra en la figura. La suma de los nueve enteros escritos en los cubos del nivel más bajo es 50. Los enteros escritos en cada uno de los otros cubos es igual a la suma de los cuatro enteros escritos en los cubos que están abajo de él. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tener escrito el cubo del nivel más alto?



(a) 110 (b) 118 (c) 172 (d) 180 (e) 210

Problema 42. En el pentágono de la figura se dibujaron cinco círculos, con centros en A, B, C, D y E. Para cada uno de los lados del pentágono, se cumple que los dos círculos que tienen centro en sus extremos se tocan exactamente en un punto. Si las longitudes de los lados del pentágono son las que se muestran en la figura, ¿cuál vértice es el centro del círculo más grande que se dibujó?



(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Problema 43. En el cuadrado de la figura se van a acomodar los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100 de forma que el producto de los tres números en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal sean iguales. Algunos números ya se escribieron, ¿qué número se debe escribir en el cuadrado con el signo de interrogación?

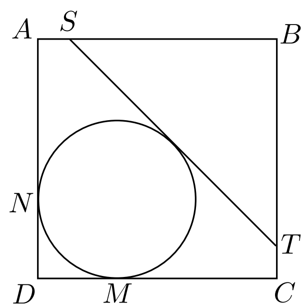
20	1	
		?

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 10 (e) 25

Problema 44. Un tren tiene cinco vagones, cada uno con al menos un pasajero. Dos pasajeros son "vecinos" si están en el mismo vagón o en vagones consecutivos. Cada pasajero tiene exactamente 5 vecinos o exactamente 10 vecinos. ¿Cuántos pasajeros hay en el tren?

(a) 13 (b) 15 (c) 17 (d) 20 (e) Hay más de una posibilidad.

Problema 45. En la figura el círculo es tangente al cuadrado $ABCD$ en los puntos M y N. Los puntos S y T están sobre los lados del cuadrado de manera que $AS = CT$ y ST es tangente al círculo. Si el diámetro del círculo es 2 y también la distancia de M a C, ¿cuál es la longitud de ST?

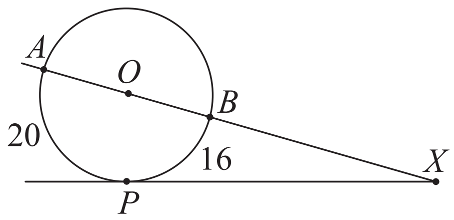


(a) $\sqrt{8}$ (b) $4\sqrt{2}-2$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) 3 (e) $\sqrt{6}+1$

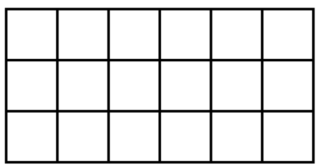
En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Al final encontrarás las respuestas.

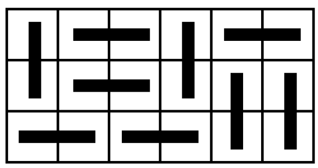
Problema 46. Encontrar todos los enteros de dos dígitos que son iguales al doble del producto de sus dígitos.

Problema 47. Las medidas de los arcos AP y PB en la figura son 20 y 16, respectivamente. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo AXP?



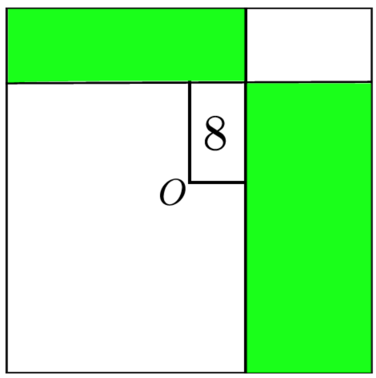
Problema 48. El tablero de 3×6 que se muestra a la izquierda en la figura se quiere cubrir con fichas de 2×1 de forma que exactamente 5 fichas vayan en posición horizontal. ¿De cuántas formas es esto posible? (Por ejemplo, abajo a la derecha se muestra una forma.)





Problema 49. Encontrar un entero positivo n que tenga exactamente seis divisores positivos (incluyendo 1 y n) y tal que el producto de cinco de sus divisores sea 648.

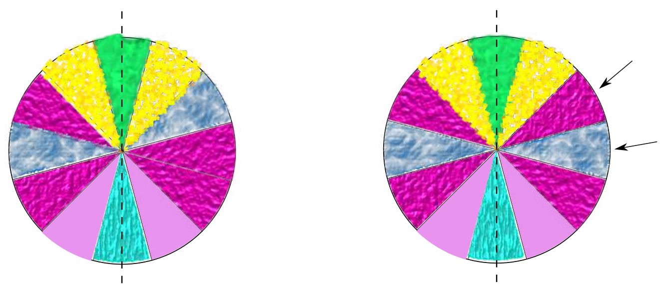
Problema 50. La figura muestra un cuadrado de 10×10. Si O es el centro del cuadrado y el rectángulo central tiene área 8, ¿cuánto mide el área sombreda?



Soluciones de los Problemas

Solución 1. Vemos el cartel de las direcciones de los asientos y nos damos cuenta que los asientos 71 y 72 están entre los asientos 61 y 80. La respuesta es (d).

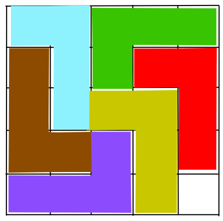
Solución 2. Basta cambiar los dos sectores que se indican en la figura:



La respuesta es (b).

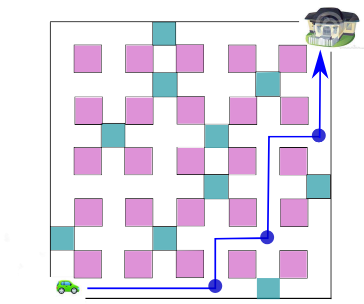
Solución 3. Observamos que la parte de afuera de la figura original es roja, por lo que la tiene que cambiar por verde, esto nos elimina varias opciones, dejando únicamente la (b) y la (e). Por otra parte el centro de la figura original es azul, por lo que la tiene que cambiar por rojo. De aquí que la única opción posible es la (e). Nos fijamos que el resto de los colores de la figura (e) están bien cambiados. La respuesta es (e).

Solución 4. El número de cuadritos en un tablero de 5×5 es 25. Como la pieza tiene 4 cuadritos y $4 \times 7 = 28$, no es posible poner 7. Se muestra, en la siguiente figura, una forma de poner 6 piezas.



La respuesta es (d).

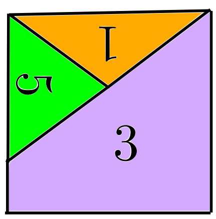
Solución 5. La única forma que tiene el coche para llegar a la casa sin pasar dos veces por el mismo punto, es por el camino marcado. Se han puesto círculos donde da vuelta a la izquierda.



La respuesta es (c).

Solución 6. Observamos las opciones. El 2007 fue antes del 2016, por lo que no puede ser la respuesta correcta. El siguiente año de las opciones es el 2025, que sí cumple con que la suma de sus dígitos sea 9, y es después del 2016. La respuesta es (b).

Solución 7. Podemos usar las piezas 1, 3 y 5, que encajan como se muestra en la figura.



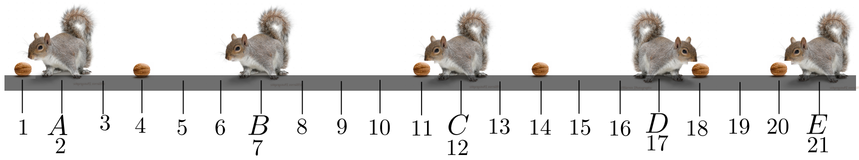
La respuesta es (a).

Solución 8. Como $201 - 102 = 99$, el resultado de Raquel se pasó por 99. Entonces, el nuevo resultado debe de ser 99 menos que lo que le dió a Raquel. Es decir, el resultado correcto es $2016 - 99 = 1917$. La respuesta es (e).

Solución 9. La suma menor se obtiene de manera que los números tengan menos cifras. Como son 10 cifras, lo mejor es partirlas en 3, 3 y 4. Además, el que tiene 4 cifras debe empezar con la cifra más pequeña. En este caso, lo partimos en 258, 1953 y 764, y la suma es $258 + 1953 + 764 = 2975$. La respuesta es (b).

Solución 10. Hay un total de 10 turnos de trabajo. Entre María y Cristina trabajan 7 turnos, así que Natalia trabaja los otros 3. La respuesta es (c).

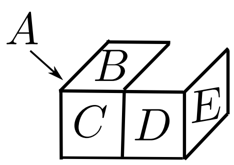
Solución 11. Numeremos las posiciones como se indica en la figura.



En el paso 1 las ardillas A, B, C, D y E se encuentran en las posiciones 1, 6, 11, 18 y 20, respectivamente, y todas, salvo B ya tienen una nuez. Quedan nueces en las posiciones 4 y 14. La ardilla C está a distancia 3 de su segunda nuez y B llega antes que A a la nuez que está en la posición 4, por lo que la ardilla C es la que recoge dos nueces. La respuesta es (c).

Solución 12. Cada cubito pertenece a tres caras. Las caras que se ven nos muestran 6 lados negros y 14 blancos. Para que haya múltiplos de 3 tanto negros como blancos deberíamos poner 0 negros y 4 blancos, o 3 negros y 1 blanco. Sólo aparece la opción de 4 blancos. Para formar el cubo, podemos pensar que la cara que aparece a la izquierda es la que queda al frente y las otras 4 quedan alrededor de ésta; la cara blanca queda por detrás. La respuesta es (a).

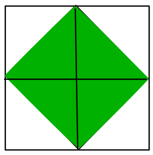
Solución 13. La doblamos parcialmente como se muestra, observando que A queda abajo de B y al lado de C. Al seguir doblando con C al frente, D queda al lado de C y E queda atrás. Al voltear la caja se tiene que B queda abajo.



La respuesta es (b).

Solución 14. Como $12 + 5 = 17$ y la suma total es 32, nos faltan 15. A 5 le faltan 7 para 12 y entonces sobran 8 para repartir entre las dos tarjetas, de manera que atrás de 5 hay $7 + 4 = 11$ y atrás de 12 hay 4. El resultado de la diferencia es 7. La respuesta es (e).

Solución 15. Partamos el cuadrado como se muestra en la figura. El cuadrado grande queda partido en 8 triángulos iguales, de los cuales la mitad forman el cuadrado pequeño con área 50 cm^2.



La respuesta es (e).

Solución 16. A la derecha se muestra cómo acomodar las fichas para que 1 y 3 queden en el cuadro sombreado. Los demás números son imposibles.

La respuesta es (d).

Solución 17. Para que justo en dos vueltas las marcas coincidan, se debe tener que la primera vez que la marca de la moneda B vuelve a tocar la moneda A es cuando ha recorrido $\frac{2}{3}$ de la orilla de A. Entonces, el perímetro de B es $\frac{2}{3}$ del perímetro de A, esto es $\frac{2}{3}18 = 12$. La respuesta es (d).

Solución 18. Como la suma de los números del 1 al 9 es 45, la suma en cada renglón y columna debe ser 15. Entonces 1 debe estar con 5 y 9, o con 6 y 8. En la figura se muestra cómo acomodar si 9 está junto a 1 (en renglón o en columna). A la derecha se ve cómo es imposible que 5 esté junto a 1 en el renglón (en la columna sería lo mismo), pues entonces a la derecha de 2 debería ir 3, y esto es imposible. También es imposible que 8 esté junto al 1 pues entonces a la derecha de 2 debería ir 6 que ya se usó. Luego, solamente hay dos maneras de acomodar los números.

1	9	5
6	2	7
8	4	3

1	6	8
9	2	4
5	7	3

1	5	9
	2	
		3

1	8	6
	2	
		3

La respuesta es (c).

Solución 19. Como Pablo tiene 3 años más que sus hermanos, si restamos 3 a la suma, obtenemos un número múltiplo de 4. El único número que cumple la condición es 27. La edad de los triates es 8 años y la de Pablo es de 11 años. La respuesta es (a).

Solución 20. Los lugares de traslape son cada 3, así que van alternando blanco y negro. La estrella aparece cada 5 veces (en las casillas con número múltiplo de 5), pero sólo aparece en lugar de traslape cada 15 veces (pues los traslapes son en las casillas que tienen los números que dejan residuo 2 al dividirlos entre 3). Entonces la estrella aparece en lugar de traslape negro cada 30 veces. Como la primera vez fue en la casilla con número 5, la siguiente será en casilla con número 35. La respuesta es (e).

Solución 21. Como la comida le dura 12 días para 4 gatos, para un gato le duraría 48 días. Entonces para 6 gatos le dura 8 días. La respuesta es (a).

Solución 22. Primero observemos que al partir un rectángulo en 4 partes usando líneas que pasen por su centro y que sean paralelas a los lados, obtenemos 4 longitudes iguales en las 4 esquinas. En cada uno de los rectángulos pequeños, uno de esos cuartos es igual a lo que no se considera en el grande. Entonces el perímetro buscado es $30 + \frac{20}{2} = 40$. La respuesta es (a).

Solución 23. Podemos pensar que cada mesa de las dobles tiene 3 sillas. Si se tuvieran 6 sillas más, las mesas de 4 estarían completas y sobrarían 10 sillas para cada una de las de 3 sillas. Supongamos entonces que quitamos 1 silla de cada una de las que tienen 4 sillas; deben sobrar las mismas 10 y esto nos dice que hay 10 mesas. La respuesta es (b).

Solución 24. Observemos que $12 = 2^2 \cdot 3$, , $18 = 2 \cdot 3^2$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ y $108 = 2^2 \cdot 3^3$. Hay que hacer 60 operaciones y 60 es un número par. Como se empieza con 12 y la suma de los exponentes de 12 es impar, al final el número que quede también debe cumplir con que la suma de sus exponentes sea impar. De las opciones, el único número que no cumple esto es 36. La respuesta es (c).

Solución 25. Observemos primero que el lado AB mide el doble del AD, así que $AD = 10$, $AB = 20$ y por lo tanto el área del rectángulo es 200. Por otro lado, recortando y reacomodando las regiones sombreadas es fácil ver que forman un cuadrado de la mitad del área del rectágulo $ABCD$. La respuesta es (c).

Solución 26. La única manera de obtener un resultado impar es sumando un par y un impar. Notamos que en los dados de Julieta todos los números impares son negativos. Por lo anterior, el mayor impar que se puede obtener es $5 = 6 - 1$, así que 7 no se puede conseguir. Los demás números se obtienen como sigue: $3 = 6 - 3$, $4 = 2 + 2$, $5 = 6 - 1$ y $8 = 4 + 4$. La respuesta es (d).

Solución 27. Los dos ángulos marcados son suplementarios de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo. Como la suma de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo es 90^o, la suma de los ángulos marcados es $180^o + 180^o - 90^o = 270^o$. La respuesta es (c).

Solución 28. Llamemos M a la edad de Miguel, T a la edad de Tere e I a la edad de Inés. Tenemos que $M + T = 5$, $M + I = 6$ y $T + I = 7$. Entonces, $(M + T) + (M + I) = 5 + 6 = 11$ y por lo tanto $2M + T + I = 11$. Luego, $2M = 11 - (T + I) = 11 - 7 = 4$, de donde $M = 2$. Así, $T = 5 - 2 = 3$ e $I = 6 - 2 = 4$. La respuesta es (d).

Solución 29. Como los trozos que obtuvo tienen la misma longitud, del pedazo más largo Adriana cortó el doble de trozos que del pedazo más pequeño. Por lo anterior, la cantidad de trozos debe ser un múltiplo de 3, así que no es posible conseguir 8 pedazos. Como $9 = 6 + 3$, $12 = 8 + 4$, $21 = 14 + 7$ y $27 = 18 + 7$, las demás cantidades de pedazos son posibles. La respuesta es (a).

Solución 30. De las siguientes parejas, a lo más uno de los números puede haber quedado escrito: $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$ y $\{4, 6\}$, ya que la suma de los números de cada pareja es 10. Como quedaron cinco números en el pizarrón, Daniele pudo haber dejado un número de cada pareja y aún le quedó otro número. Como el único número que no está en las parejas es el 5, forzosamente debió quedar escrito. La respuesta es (e).

Solución 31. Las rutas posibles son:

$$\begin{array}{ll} D - A - B - C - D - B, & D - A - B - D - C - B, \\ D - B - A - D - C - B, & D - B - C - D - A - B, \\ D - C - B - A - D - B, & D - C - B - D - A - B. \end{array}$$

La respuesta es (c).

Solución 32. Llamemos a a la longitud del lado mayor de cada rectángulo y b a la longitud del lado menor. Como el perímetro de cada rectángulo es 16, tenemos que $2(a+b)=16$. El contorno del cuadrado tiene perímetro igual a $4(a+b)=32$. La respuesta es (e).

Solución 33. No podemos tener únicamente fichas azules en la mesa, pues tendríamos el 100% de fichas azules. Por lo que la ficha roja debe quedarse en la mesa. Además, la ficha roja debe ser el 10% del total de fichas sobre la mesa, así es que debe haber 10 fichas en total. De esas 10 fichas, 9 son azules. Entonces debemos de quitar $49-9=40$ fichas azules. La respuesta es (d).

Solución 34. Llamemos a a la longitud del lado menor del trapecio. De la figura observamos que la longitud de lado mayor del rectángulo en donde se encierra la tira de papel doblada es 27 cm. Esta longitud se obtiene de sumar 5 veces el ancho de la banda (que es 3 cm) más 4 veces a. Entonces $27=4\cdot a+5\cdot 3$, de donde $a=\frac{27-5\cdot 3}{4}=\frac{12}{4}=3$. Además, los pedazos triangulares que quedan encimados son triángulos rectángulos isósceles de lado 3 y así la longitud de la tira es $19\cdot 3=57$. La respuesta es (d).

Solución 35. La primera vez que Arín alcanza un múltiplo de 5 es cuando da 4 saltos, pero la distancia que alcanza es $1+2+3+4=10$, que es menor que $4\times 5=20$. La segunda vez que Arín alcanza un múltiplo de 5 es cuando da 5 saltos, pero la distancia que alcanza es $1+2+3+4+5=15$, que es menor que $5\times 5=25$. La tercera vez que Arín alcanza un múltiplo de 5 es cuando da 9 saltos y la distancia que alcanza es $1+2+\ldots+9=45$, que es igual a 9×5. La respuesta es (b).

Solución 36. Llamemos m a la cantidad de niñas y h a la cantidad de niños, Tenemos que $m+h=20$ y que $\frac{1}{2}m=\frac{1}{3}h$, así que $\frac{1}{2}m=\frac{1}{3}(20-m)$ y entonces $3m=40-2m$. Por lo anterior $m=8$. La respuesta es (b).

Solución 37. Cada lado del cuadrado mide 6. Podemos dividir la región sombreada en 4 triángulos cuyas bases son, respectivamente, a, b, c y d, y cuyas alturas son todas iguales a 6. Así, tenemos que $\frac{6\times a}{2}+\frac{6\times b}{2}+\frac{6\times c}{2}+\frac{6\times d}{2}=27$, de donde $a+b+c+d=9$. La respuesta es (c).

Solución 38. Si Marisol cree que son las 12:00, es porque su reloj marca las 12:05 (dado que cree que está adelantado 5 minutos). Como el reloj de Marisol en realidad está atrasado 10 minutos, entonces la hora real es las 12:15. Dado que el reloj de Mónica está adelantado 5 minutos, marca las 12:20. Pero Mónica cree que su reloj está atrasado 10 minutos, por lo que cree que son las 12:30. La respuesta es (d).

Solución 39. Digamos que la canasta de Caperucita tiene inicialmente p panecillos y que a cada abuelita le da a de ellos. Al entrar a casa de la primera abuelita, el lobo ya se comió la mitad de los panecillos, por lo que la canasta tiene $\frac{p}{2}$

panecillos. Al salir de esta casa, a la canasta le quedan $\frac{p}{2} - a$ panecillos. Al entrar a la casa de la segunda abuelita, la canasta tiene $\frac{p}{4} - \frac{a}{2}$ panecillos y al salir de ésta le quedan $\frac{p}{4} - \frac{3a}{2}$. Finalmente al entrar a la casa de la última abuelita, la canasta tiene $\frac{p}{8} - \frac{3a}{4}$ panecillos y al salir de esta le quedan $\frac{p}{8} - \frac{7a}{4}$ panecillos. Pero sabemos que al salir de casa de la tercera abuelita, la canasta ya no tiene panecillos. Por lo tanto $\frac{p}{8} - \frac{7a}{4} = 0$, de donde obtenemos que $p = 14a$. Es decir, el número de panecillos que tiene originalmente la canasta es un múltiplo de 14 y de las opciones 28 es el único múltiplo de 14. La respuesta es (a).

Solución 40. Como todos los números escritos en el pizarrón son diferentes, los más pequeños pueden ser 1 y 16 o 2 y 8 (para que su producto sea 16). Observamos que $225 = 3^2 \times 5^2 = 15^2$. Esto quiere decir que si el producto de dos números diferentes es 225, entonces uno de ellos tiene que ser mayor que 15 y el otro menor que 15. Por lo tanto, los dos números más pequeños deben ser 2 y 8. Esto implica que los dos números más grandes tienen que ser ambos mayores a 8. Para que su producto sea 225 la única opción es que los dos números más grandes sean 9 y 25. Como entre 8 y 9 no hay ningún número entero, entonces hay exactamente cuatro números escritos en el pizarrón: 2, 8, 9 y 25. La suma de estos es 44. La respuesta es (a).

Solución 41. Para calcular la suma del número que se escribe hasta arriba, los 4 de las esquinas de la base se suman una vez, el del centro de la base se se suma 4 veces y los 4 restantes de la base 2 veces. Claramente, conviene escribir en todos los de la base (menos en el del centro) un 1 y escribir un 42 en el del centro. Así, el número que se escribirá en la punta de la pirámide es $45 \times 4 = 180$. La respuesta es (d).

Solución 42. Denotemos por a, b, c, d y e los radios de los círculos con centros en A, B, C, D y E, respectivamente. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rrl} (1) & a+b & = 16, \\ (2) & b+c & = 14, \\ (3) & c+d & = 17, \\ (4) & d+e & = 13, \\ (5) & e+a & = 14. \end{array}$$

Notemos que $2a = (a+b)+(c+d)+(e+a)-(b+c)-(d+c) = 16+17+14-14-13 = 20$. Luego $a = 10$ y entonces $b = 6$, $c = 8$, $d = 9$ y $e = 4$, por lo que le vértice buscado es A. La respuesta es (a).

Solución 43. Como cada renglón tiene el mismo producto, éste debe ser igual a la raíz cúbica del producto de todos los números, es decir, 1000. De esta forma, arriba del signo de interrogación debe ser 50. En la columna del 1 también el producto debe ser 1000, y la única forma de conseguirlo es escribiendo los números

10 y 100. Para que el producto de la diagonal donde está escrito 20 sea igual a 1000 la única posibilidad es que se escriba 10 en el centro, entonces 5 va en la esquina y 4 va arriba de 5, en el lugar de la interrogación. La figura completa queda como se muestra a la derecha.

20	1	50
25	10	4
2	100	5

La respuesta es (b).

Solución 44. Llamemos A, B, C, D y E a los vagones, suponiendo que están en ese orden, usemos las mismas letras para representar el número de pasajeros en cada vagón. Un pasajero que está en el primer vagón tiene $(A-1)+B$ vecinos; un pasajero que está en el segundo vagón tiene $A+(B-1)+C$ vecinos. Como todos los vagones tienen al menos un pasajero, entonces $C \neq 0$, de donde tenemos que $A+B-1=5$ y $A+B+C-1=10$, por lo tanto $C=5$. Por simetría $E+D-1=5$, luego $A+B+C+D+E = 2\times(A+B)+C = 2\times 6+5 = 12+5 = 17$. La respuesta es (c).

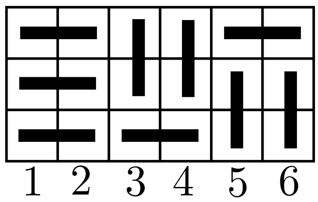
Solución 45. El lado del cuadrado mide 3. Sea O el centro del círculo y sea P el punto de tangencia de ST con el círculo. Entonces OB es la diagonal de un cuadrado de lado 2, así que, por el teorema de Pitágoras, $OB=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$ y $PB=\sqrt{8}-1$. Por simetría, el triángulo SBT es isósceles, así que sus ángulos en S y T son de 45°. Como PB es perpendicular a ST, tenemos que $\angle PBT = 45^\circ$, de donde $PT=PB$ y así $ST = 2(\sqrt{8}-1) = 4\sqrt{2}-2$. La respuesta es (b).

Solución 46. Vamos a ver que el único entero que satisface la condición es 36. Llamemos n al número y a y b a sus dígitos, con $n=10a+b$. Como n es par, también b es par (distinto de 0). Si $b=2$, entonces $10a+2=4a$, de donde $6a=-2$ y esto es imposible. De la misma manera no es posible el caso $b=4$. Si $b=6$, entonces $10a+6=12a$, de donde $2a=6$ y de aquí que $n=36$. Si $b=8$, entonces $10a+8=16a$, de donde $6a=8$, lo cual es imposible. La respuesta es (36).

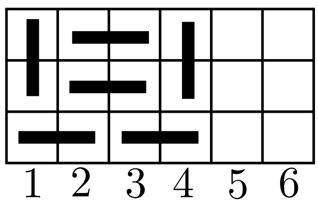
Solución 47. El arco BP mide $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ de la mitad de la circunferencia, así que el ángulo POX mide $\frac{4}{9}\cdot 180^\circ = 80^\circ$. Dado que OPB es un triángulo rectángulo, tenemos que $\angle AXP = \angle OXP = 180^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$. La respuesta es (10 grados).

Solución 48. Como son 18 cuadritos, el tablero se cubre con 9 fichas de manera que 4 son verticales. Esas cuatro atraviesan forzosamente el segundo renglón, de manera que quedan exactamente dos cuadritos del renglón central que deben cubrirse con una ficha horizontal (así que deben estar juntos). Numeremos las columnas del 1 al 6 de izquierda a derecha y consideremos los diferentes casos en que puede quedar la ficha horizontal en el renglón central.

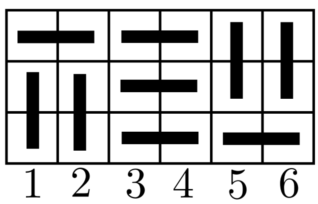
Si queda entre las columnas 1 y 2, en esas columnas debe haber tres horizontales, y las siguientes dos fichas verticales (en columnas 3 y 4) deben usar los mismos dos renglones lo cual puede hacerse de 2 formas, y lo mismo para las fichas verticales en las columnas 5 y 6. En total son 4 posibilidades. A la derecha mostramos una posibilidad.



Si queda entre las columnas 2 y 3, en esas columnas, en la primera columna hay 2 posibilidades para colocar la ficha vertical y cualquiera de las dos colocaciones determina por completo la colocación de las fichas en las primeras 4 columnas. A la derecha se muestra una de ellas. Otra vez, hay dos posibilidades para colocar las fichas verticales en las columnas que falta llenar. En total en este caso son 4 posibilidades.



Si queda entre las columnas 3 y 4, en esas columnas las tres fichas quedan en forma horizontal y hay 2 posibilidades de colocar las fichas verticales en las primeras dos columnas y dos posibilidades de colocar las verticales en las últimas 2 columnas, de modo que también en este caso hay 4 posibilidades. Mostramos a la derecha una de esas 4.

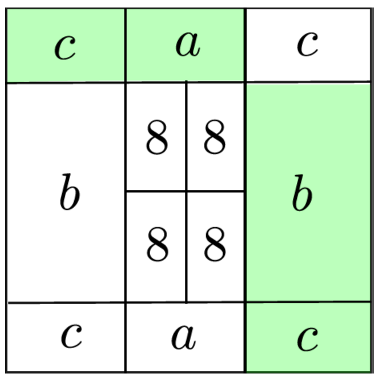


El caso de que quede entre las columnas 4 y 5 es análogo al de las columnas 2 y 3, y el caso de que quede entre las columnas 5 y 6 es análogo al de que quede en las columnas 1 y 2, así que cada uno de estos casos contribuye con 4 posibilidades más. En total son $5 \times 4 = 20$. La respuesta es (20).

Solución 49. *Primera forma.* Observemos primero que $648 = 2^3 \cdot 3^4$ y que los números que tienen seis divisores son de la forma p^5 y pq^2 con p y q primos. En el primer caso, el producto de cualesquiera de sus divisores sería potencia de p, así que no es éste el caso. En el segundo caso, los primos que aparecen en n son 2 y 3. Tenemos dos posibilidades: $n = 2 \cdot 3^2$ y $n = 3 \cdot 2^2$. Si $n = 2 \cdot 3^2$, sus divisores son 1, 2, $2 \cdot 3$, 3, 3^2 y $2 \cdot 3^2$. El producto de todos salvo 3^2 es justo 648, y entonces el sexto factor es $3^2 = 9$. Si $n = 3 \cdot 2^2$, entonces los divisores de n son 1, 2, 2^2, 3, $2 \cdot 3$ $2^2 \cdot 3$ y no hay forma de que cinco de ellos tengan producto 648. Entonces la única posibilidad es $n = 18$ y el sexto factor es 9.

Segunda forma. Dado un divisor d de n, tenemos que $\frac{n}{d}$ también es divisor de n. Como la cantidad de divisores de n es par, entonces cada d es diferente de $\frac{n}{d}$. Luego, el producto de los seis divisores es igual a n^3. Dado que $648 = 2^3 \cdot 3^4$, para que el producto de los 6 divisores sea un cubo es necesario que el divisor faltante sea un múltiplo de $3^2 = 9$. Por lo anterior, $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3^2 = 18$ debe ser un divisor de n. Como 18 tiene exactamente 6 divisores, $n = 18$ y el divisor faltante es 9. La respuesta es ($n = 18$ y 9 el divisor faltante).

Solución 50. Partamos el cuadrado en rectángulos en forma simétrica y llamemos a, b y c a las áreas de los rectángulos, como se indica.



Tenemos que $2a + 2b + 4c + 32 = 100$, así que $a + b + 2c = 34$, y ésta es la respuesta. La respuesta es (34).

Concentrado de Respuestas

1. (d)
2. (b)
3. (e)
4. (d)
5. (c)
6. (b)
7. (a)
8. (e)
9. (b)
10. (c)
11. (c)
12. (a)
13. (b)
14. (e)
15. (e)
16. (d)
17. (d)
18. (c)
19. (a)
20. (e)
21. (a)
22. (a)
23. (b)
24. (c)
25. (c)
26. (d)
27. (c)
28. (d)
29. (a)
30. (e)
31. (c)
32. (e)
33. (d)
34. (d)
35. (b)
36. (b)
37. (c)
38. (d)
39. (a)
40. (a)
41. (d)
42. (a)
43. (b)
44. (c)
45. (b)
46. 36
47. 10 grados
48. 20
49. $n = 18$ y 9 el divisor faltante
50. 34

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
Ciudad de México
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: http://www.ommenlinea.org/

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Victor Manuel Barrero Calderón

José Alfredo Cobián Campos

Julio Cesar Díaz Calderón

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Héctor Raymundo Flores Cantú

Luis Eduardo García Hernández

Luis Miguel García Velázquez

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Leonardo Martínez Sandoval

Daniel Perales Anaya

Olga Rivera Bobadilla

Carlos Jacob Rubio Barrios

Didier Adán Solís Gamboa

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Rita Vázquez Padilla

Hugo Villanueva Méndez.