Problemas Introductorios

para la

30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Elena Aguilera Miranda
Luis Miguel García Velázquez
José Antonio Gómez Ortega
Isabel Hubard Escalera
María Luisa Pérez Seguí

2016

María Elena Aguilera Miranda

Plantel No. 94,
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios

Luis Miguel García Velázquez

Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia,
Universidad Nacional Autónoma de México

José Antonio Gómez Ortega

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Isabel Hubard Escalera

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2017: la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en Brasil durante el mes de julio, la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en Argentina, la VI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas que se realizará en abril en Suiza y la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Panamá en el mes de junio.

En la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1997. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2016-2017, y para el 1^o de julio del año 2017 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Todos los problemas que se incluyen en el problemario han formado parte de distintas etapas del Canguro Matemático Mexicano. Los primeros treinta problemas que aparecen en esta publicación formaron parte del Examen del Nivel Olímpico del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de 3 horas, como un examen eliminatorio. Los siguientes quince problemas formaron parte de exámenes de otros niveles, también del Canguro Matemático Mexicano. Aunque pueden variar en la dificultad, no requieren más teoría que la de una etapa eliminatoria. Los últimos cinco problemas corresponden a las siguientes fases de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en Acapulco, Guerrero del 6 al 11 de noviembre de 2016. En él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2017. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

A partir del 21 de abril -y durante un mes- se distribuirán los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página

`http://canguro.deltagauge.info/`

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca, Toluca y Guadalajara.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en los concursos internacionales donde participa han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31
2013	Colombia	97	17
2014	Sudáfrica	101	26
2015	Tailandia	104	19

En 2015, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Juan Carlos Ortiz Rothon de Jalisco (medalla de oro), Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León (medalla de plata), Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán (medalla de plata), Pablo Meré Hidalgo de Querétaro) (medalla de bronce), Leonardo Ariel García Morán de Jalisco (medalla de bronce) y Antonio López Guzmán de Chihuahua (medalla de bronce). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de oro, 19 medallas de plata, 53 medallas de bronce y 32 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6
2013	Panamá	20	3
2014	Honduras	22	1
2015	Puerto Rico	23	4

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2015 obtuvieron medalla: dos de oro (Antonio López Guzmán de Chihuahua y Pablo Meré Hidalgo de Querétaro) y dos de bronce (Leonardo Ariel García Morán de Jalisco y Olga Medrano Martín del Campo de Jalisco). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 27 medallas de oro, 40 medallas de plata, 33 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1
2013	Nicaragua	13	1
2014	Costa Rica	12	1
2015	México	13	1

En la XVII Olimpiada Mexicana de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo dos medallas de oro (Leonardo Ariel García Morán de Jalisco y Víctor Hugo Almendra Hernández del D.F.) y una medalla de plata (Enrique Domínguez Lucero de Chihuahua), ubicándose así la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 33 medallas de oro, 15 de plata y 3 de bronce.

En abril de 2015 México participó en la IV Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Minsk, Bielorusia. Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. México ocupó el lugar 9 de 30 países participantes. El equipo mexicano fue integrado por María Cecilia Rojas Cuadra de Puebla, Olga Medrano Martín del Campo de Jalisco, Alka Xavier Earathu de Morelos y Naomi Mastache López de Guerrero. Cecilia obtuvo medalla de plata, mientras que Olga, Alka y Naomi obtuvieron medalla de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 29a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2015 se llevó a cabo en Guadalajara, Jalisco el 29º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Gustavo Meza García (Aguascalientes),
Axel Barba Razo (Baja California),
Karol José Gutiérrez Suárez (Colima),
Arturo Arenas Esparza (Chihuahua),
Alonso Granados Baca (Chihuahua),
Antonio López Guzmán (Chihuahua),
Victor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal),
Israel Bonal Rodríguez (Guanajuato),
José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo),
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México),
Alka Xavier Earathu (Morelos),
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos),
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León) y
Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas).

Los 7 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Bruno Gutiérrez Chávez (Colima),
Ana Paula Jiménez Díaz (Distrito Federal),
Sebastian Stephan Dulong Salazar (Distrito Federal),
Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato),
Diego Hinojosa Téllez (Jalisco),
Alfredo Hernández Estrada (San Luis Potosí) y
Ricardo de Jesús Balam Ek (Yucatán).

Las 7 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil fueron:

Myriam Hernández Ketchul (Baja California Sur),
Marcela Cruz Larios (Campeche),
Ana Paula Jiménez Díaz (Distrito Federal),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Alka Xavier Earathu (Morelos),
Jacqueline Lira Chávez (Morelos) y
Violeta Alitzel Martínez Escamilla (Morelos).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 29º Concurso Nacional:

1. Chihuahua
2. Morelos
3. Jalisco
4. Nuevo León
5. Guanajuato
6. Yucatán
7. Distrito Federal
8. Zacatecas
9. Sinaloa
10. San Luis Potosí

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Guanajuato. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Tlaxcala y Zacatecas.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://ommenlinea.org/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Marzo 2016

Agradecimientos

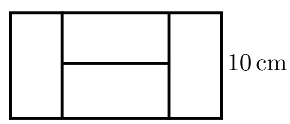
La invención de problemas y la elaboración de los exámenes que forman parte de este problemario se realizó parcialmente con el apoyo de la Coordinación de la Investigación Científica de la UMSNH. La elaboración del examen eliminatorio se realizó con apoyo del proyecto *Estrategias de mejora en enseñanza y aprendizaje creativos de las matemáticas a través de resolución de problemas* de la Convocatoria SEP/SEB-CONACYT 2013. La selección de los problemas que integran este problemario y la revisión final se realizó con apoyo del proyecto PAPIME PE105416 de la UNAM. El presente folleto se edita con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Enunciados de los problemas

Problema 1. ¿Cuál de los siguientes números no es un entero?

(a) $\frac{2011}{1}$ (b) $\frac{2012}{2}$ (c) $\frac{2013}{3}$ (d) $\frac{2014}{4}$ (e) $\frac{2015}{5}$

Problema 2. Utilizando cuatro rectángulos idénticos se forma un rectángulo mayor, como se muestra en la figura. La longitud del lado más pequeño del rectángulo mayor es 10 cm. ¿Cuál es la longitud del otro lado del rectángulo mayor?

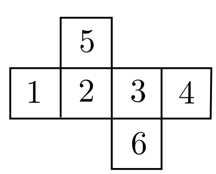


(a) 10 cm (b) 20 cm (c) 30 cm (d) 40 cm (e) 50 cm

Problema 3. Jimena dibujó un triángulo con longitudes 6, 10 y 11. Carlos dibujó un triángulo equilátero con el mismo perímetro. ¿Cuánto mide cada uno de los lados del triángulo que dibujó Carlos?

(a) 18 (b) 11 (c) 10 (d) 9 (e) 6

Problema 4. En la figura se muestra un cubo de cartón, desdoblado. Hansel sumó correctamente los números en las caras opuestas del cubo. ¿Cuáles son los resultados que obtuvo Hansel?

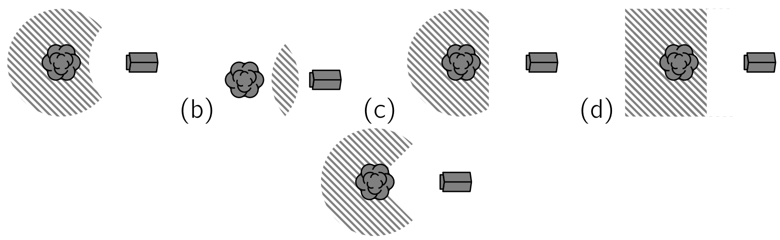


(a) 4, 6, 11 (b) 5, 7, 9 (c) 5, 6, 10 (d) 5, 8, 8 (e) 4, 5, 12

Problema 5. Sofía tiene un libro nuevo de 239 páginas. Planea leer 3 páginas cada día entre semana y 5 páginas cada sábado y cada domingo. Va a empezar un domingo. ¿Qué día de la semana terminará de leer todo el libro?

(a) sábado (b) domingo (c) lunes (d) martes (e) miércoles

Problema 6. Cuando la ardilla Dorita baja al piso, no se aleja más de 5 m del tronco de su árbol. Además, nunca se acerca a menos de 5 m de la casa del perro. ¿Cuál de las siguientes figuras es más aproximada a la forma de la región del piso donde Dorita puede ir?

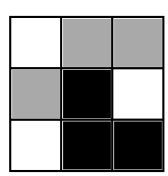


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 7. Tres hermanas, Fernanda, Juana y María José, compraron una bolsa de 30 galletas. Cada una se quedó con 10 galletas. Sin embargo, Fernanda pagó 8 pesos, Juana 5 y María José 2. Si se hubieran repartido las galletas proporcionalmente al precio que cada una pagó, ¿cuántas galletas le habrían tocado a Fernanda?

(a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15 (e) 16

Problema 8. Los 9 cuadritos de una cuadrícula de 3×3 se deben pintar de negro, gris y blanco. Gretel los coloreó como se muestra. ¿Al menos cuántos cuadros deben repintarse para que cuadros que compartan lado tengan diferente color?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

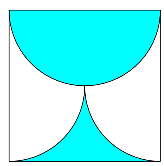
Problema 9. Un ciclista viaja a una velocidad de 5 m por segundo. Las ruedas de su bicicleta tienen una circunferencia de 125 cm. ¿Cuántas vueltas completas da la rueda en 5 segundos?

(a) 4 (b) 5 (c) 10 (d) 20 (e) 25

Problema 10. Max le preguntó a sus cinco amigos que cuántos de ellos habían estudiado para el examen de Matemáticas. Octavio dijo que ninguno. Gabriela dijo que solamente uno. Sunya dijo que exactamente dos. Marco dijo que exactamente tres y Claudia dijo que exactamente cuatro. Max sabe que los que no estudiaron están diciendo mentiras, y que aquellos que estudiaron están diciendo la verdad. ¿Cuántos de los amigos de Max estudiaron para el examen?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 11. Dentro de un cuadrado de lado 2 se trazaron semicírculos (con 3 de los lados como diámetros) y se sombreó como muestra la figura. ¿Cuál es el área?

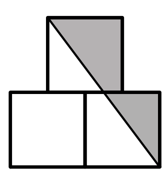


(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 12. En mi fiesta no hay dos mujeres que hayan nacido el mismo mes, ni tampoco dos hombres que hayan nacido el mismo día de la semana. Si llegara una persona más, se rompería la regla. ¿Cuántas personas hay en mi fiesta?

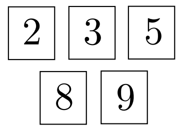
(a) 18 (b) 19 (c) 20 (d) 24 (e) 25

Problema 13. En la figura se muestran tres cuadrados de lado 1 cm. Si el cuadrado de arriba está centrado respecto a los cuadrados de abajo, ¿cuál es el área de la región sombreada?



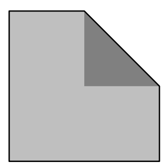
(a) $\frac{3}{4}$ cm^2 (b) $\frac{7}{8}$ cm^2 (c) 1 cm^2 (d) $\frac{5}{4}$ cm^2 (e) $\frac{3}{2}$ cm^2

Problema 14. Hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. En la figura se muestran 5 de las tarjetas. Las restantes se quieren aparear con las que se muestran de manera que las sumas de las parejas sean 9, 10, 11, 12 y 13 (sin repetir). ¿De cuántas maneras es posible hacer esto?



(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 15. Un cuadrado de papel se dobló hasta colocar una de sus esquinas exactamente en el centro, como se muestra en la figura. Con el doblez se formó un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?



(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16 (e) 32

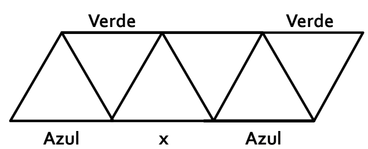
Problema 16. Un arbusto tiene 9 ramas. Cada rama tiene 5 hojas o tiene una flor y dos hojas, como se muestra en la figura. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la cantidad de hojas en el arbusto?

(a) 45 (b) 39 (c) 36 (d) 32 (e) 24

Problema 17. En un examen, el promedio de las calificaciones obtenidas por los estudiantes fue de 6. Exactamente el 60% de los estudiantes tuvieron una calificación aprobatoria. El promedio de los estudiantes que aprobaron fue 8. ¿Cuál fue el promedio de los estudiantes que no aprobaron?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 18. Patricio hizo un dibujo en papel como el que se muestra en la figura y quiere colorear cada uno de los segmentos de verde, de rojo o de azul. Ya pintó algunos segmentos. Si cada triángulo debe tener un lado de cada color, ¿qué color debe tener el segmento marcado con x?



(a) verde (b) rojo (c) azul (d) rojo o azul (e) es imposible

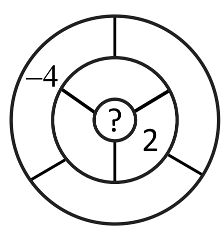
Problema 19. Monserrat sumó las longitudes de tres lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. Isabela también sumó las lontigudes tres lados del mismo rectángulo, pero ella obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

(a) 42 cm (b) 56 cm (c) 64 cm (d) 84 cm (e) 112 cm

Problema 20. Cada asterisco en la ecuación $2*0*1*5*2*0*1*5*2*0*1*5=0$ será sustituido por $+$ o por $-$. ¿Cuál es la menor cantidad de asteriscos que puede sustituirse por $+$ para que la igualdad se cumpla?

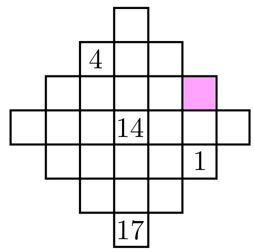
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 5

Problema 21. Guillermo quiere escribir un número en cada una de las siete regiones de la figura. Dos regiones son vecinas si comparten parte de los trazos que las delimitan. El número de cada región debe ser la suma de todos sus vecinos. Guillermo ya ha escrito en dos de las regiones, como se muestra. ¿Qué número debe escribir en la región del centro?



(a) 6 (b) 0 (c) -2 (d) -4 (e) no es posible

Problema 22. Ana Paula tiene que poner números enteros en los cuadrados de la figura de tal manera que por cada 3 cuadrados consecutivos en la misma línea (tanto horizontal como vertical) el número que quede en el cuadrado de enmedio sea el promedio de sus dos vecinos. Algunos números ya se escribieron, ¿qué número debe escribir en el cuadrado sombreado?

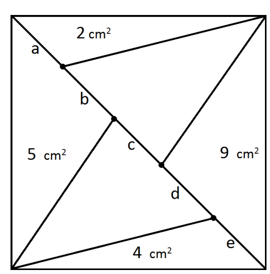


(a) 9 (b) 11 (c) 15 (d) 19 (e) 22

Problema 23. Los enteros del 1 al 5 se escriben en una libreta de manera que cada número se escribe con verde o con rojo. Además, si la suma de dos números de la lista está también en la lista (o sea, es un número entre el 1 y el 5) y los dos números sumados tienen el mismo color entonces el color de la suma coincide con el de los sumandos. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Problema 24. En un cuadrado con $30\,\mathrm{cm}^2$ de área se dibujó una diagonal. Posteriormente, se dividió en 6 triángulos, como se muestra la figura, en donde también se han marcado las áreas de algunos de esos triángulos. ¿Cuál de los segmentos a, b, c, d y e de la diagonal es el más largo?

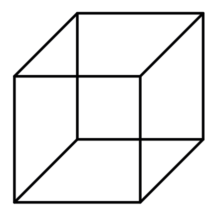


(a) a (b) b (c) c (d) d (e) e

Problema 25. En un grupo de canguros la suma de los pesos de los dos canguros más livianos representa exactamente el 25% del peso total del grupo. La suma de los pesos de los tres canguros más pesados representa el 60% del peso total. ¿Cuántos canguros hay en el grupo?

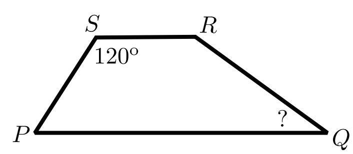
(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 15 (e) 20

Problema 26. Fernando tiene siete piezas de alambre con longitudes de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm y 7 cm. Fernando utiliza algunas de ellas para armar un cubo que tiene aristas de longitud 1 cm como el que se muestra en la figura, sin traslapar los alambres. ¿Cuál es la menor cantidad de alambres que pudo haber utilizado?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 27. En la figura se muestra un trapecio $PQRS$. Los lados PQ y SR son paralelos, el ángulo RSP mide 120º y $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. ¿Cuánto mide el ángulo PQR?



(a) 15º (b) 22.5º (c) 25º (d) 30º (e) 45º

Problema 28. Hay cinco puntos en una línea. Diego mide las distancias entre cada dos de ellos y obtiene, en orden ascendente, las medidas 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 y 22, todas en centímetros. ¿Cuál es el valor de k?

(a) 10 cm (b) 11 cm (c) 12 cm (d) 13 cm (e) 14 cm

Problema 29. Anoche escribí el número telefónico de un amigo en una servilleta. El número que escribí es 142709. Como los números telefónicos en mi ciudad deben tener 7 cifras, me faltó una pero no sé ni qué dígito era ni en qué posición iba. El dígito que me faltó puede haber sido cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántos números diferentes debo marcar para asegurar comunicarme con mi amigo?

(a) 55 (b) 60 (c) 64 (d) 72 (e) 80

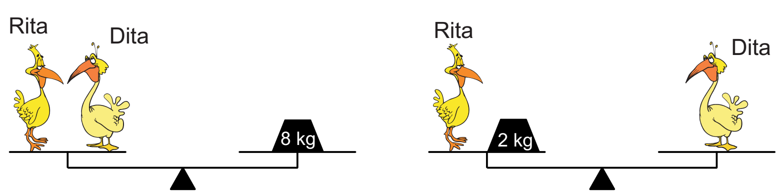
Problema 30. Juan Pablo tiene tres dispensadores de dulces que dan un dulce a la vez. No puede ver lo que tienen adentro, pero sabe que uno contiene dulces de cereza, otro está lleno con dulces de limón y otro tiene de los dos sabores. También sabe que todas las etiquetas de los dispensadores se cambiaron entre sí y quedaron equivocados. ¿Cuál es la menor cantidad de dulces que puede sacar para reetiquetar los dispensadores correctamente?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 9

Problema 31. Pepe tiene 4 juguetes: un carro, un muñeco, una pelota y un barco. Quiere ponerlos en línea en un estante. El barco debe estar junto al carro y también el muñeco debe quedar junto al carro. ¿De cuántas maneras puede acomodar los juguetes?

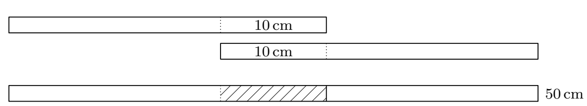
(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 32. ¿Cuánto pesa Dita?



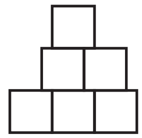
(a) 2 Kg (b) 3 Kg (c) 4 Kg (d) 5 Kg (e) 6 Kg

Problema 33. Azucena tiene 4 tiras de madera de la misma longitud. Pega dos de ellas con con un traslape de 10 cm y así obtiene una tira de 50 cm de longitud. Con las otras dos quiere hacer una tira de 56 cm de longitud. ¿Cuánto debe medir el traslape?



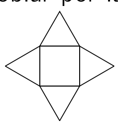
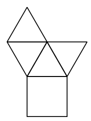
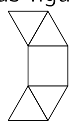
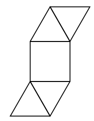
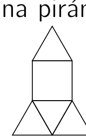
(a) 4 cm (b) 6 cm (c) 8 cm (d) 10 cm (e) 12 cm

Problema 34. La figura que se muestra consta de 6 cuadrados de lado 1. ¿Cuál es su perímetro?



(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Problema 35. Tomás va a recortar por la orilla las figuras que se muestran y va a doblar por las líneas. Con cuál de las figuras no puede obtener una pirámide?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 36. El área de un rectángulo es $12\,\text{cm}^2$. Las longitudes de sus lados son números enteros. ¿Cuál de los siguientes puede ser el perímetro del rectángulo?

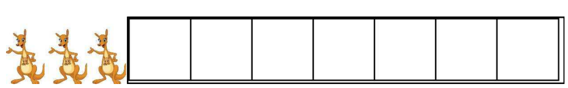
(a) 20 cm (b) 26 cm (c) 28 cm (d) 32 cm (e) 48 cm

Problema 37. En la suma que se muestra, letras iguales representan dígitos iguales y letras distintas representan dígitos distintos. ¿Qué dígito representa la letra X?

$$\begin{array}{rccc} & & & X \\ + & & & X \\ & & Y & Y \\ \hline & Z & Z & Z \end{array}$$

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 38. De cuántas maneras se pueden colocar los 3 canguros dentro de tres cuadritos distintos, de manera que no haya dos canguros en cuadrados que compartan lado?

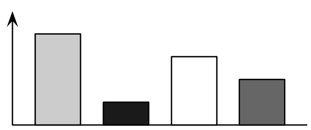


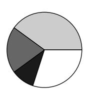
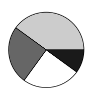
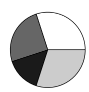
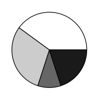
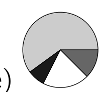
(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 39. Andrea nació en 1997. Carlota, su hermana menor, nació en 2001. ¿Qué puede decirse con seguridad de la diferencia de edades entre las dos hermanas?

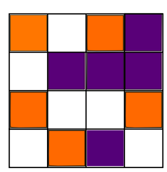
(a) Es menos de 4 años. (b) Es al menos 4 años. (c) Es exactamente 4 años.
(d) Es más de 4 años. (e) No es menos de 3 años.

Problema 40. Diana dibujó una tabla que representa la cantidad de árboles de 4 especies distintas que observó durante una excursión. ¿Cómo sería la gráfica circular que mejor representaría la misma proporción de las 4 especies de árboles?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 41. Los 16 cuadritos de una cuadrícula de 4×4 se deben pintar con tres colores. Ya están pintados como se muestra. ¿Al menos cuántos cuadros deben repintarse para que cuadros que compartan lado tengan diferente color?



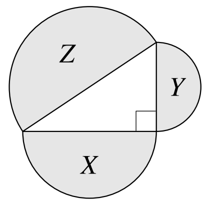
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 42. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)}$$

(a) $\sqrt{2015}$ (b) 2015 (c) 2016 (d) 2017 (e) 4030

Problema 43. Tres semicírculos tienen por diámetros a los lados de un triángulo rectángulo. Sus áreas son $X\,\text{cm}^2$, $Y\,\text{cm}^2$ y $Z\,\text{cm}^2$, como se muestra en la figura. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones seguro es verdadera?

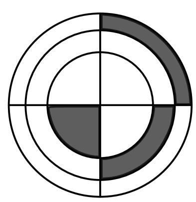


(a) $X+Y<Z$ (b) $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\sqrt{Z}$ (c) $X+Y=Z$ (d) $X^2+Y^2=Z^2$ (e) $X^2+Y^2=Z$

Problema 44. Si se leen las afirmaciones en las opciones de izquierda a derecha, ¿cuál es la primera que es cierta?

(a) "(c) es cierta" (b) "(a) es cierta" (c) "(e) es falsa" (d) "(b) es falsa" (e) "$1+1=2$"

Problema 45. En la figura hay 3 círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres áreas sombreadas son iguales y el radio del círculo menor es 1, ¿cuál es el producto de los tres radios?

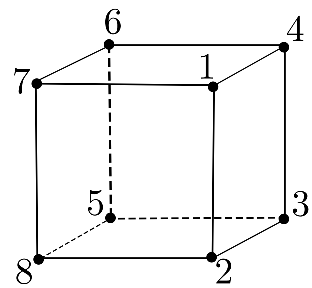


(a) $\sqrt{6}$ (b) 3 (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (d) $2\sqrt{2}$ (e) 6

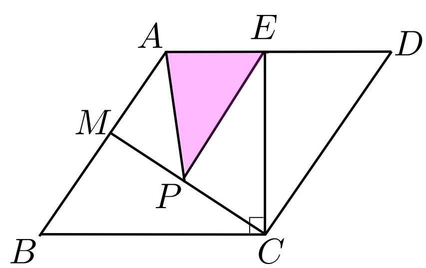
En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Al final encontrarás las respuestas.

Problema 46. Tres números enteros x, y, z entre 1 y 9 se juntan como dígitos para formar los números yx, yz y xz (por ejemplo, si $x=5$ y $y=1$, entonces yx es el número quince). La suma de estos nuevos números es el número xyz de tres dígitos. ¿Cuántas posibilidades hay para x, y y z?

Problema 47. Sabemos que por tres puntos cualesquiera no alineados en el espacio hay un único plano que los contiene. ¿Cuántos planos distintos determinan las tercias de vértices de un cubo? (Por ejemplo, en el cubo de la figura, la tercia de vértices $\{1, 2, 3\}$ determina el mismo plano que la tercia $\{1, 3, 4\}$ pero la tercia $\{3, 6, 8\}$ determina un plano distinto.)

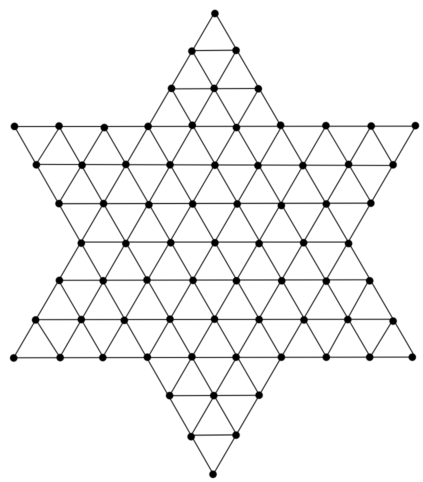


Problema 48. El paralelogramo $ABCD$ de la figura tiene área 20 y cada lado mide 5 (es decir, es un rombo); M es punto medio de AB, P es punto medio de MC y E es el punto donde la perpendicular a BC por C corta a AD. ¿Cuánto vale el área de APE?



Problema 49. Se escriben en el pizarrón 5 números enteros positivos (no necesariamente distintos) y se calculan todas las posibles sumas de parejas de estos números. Los únicos resultados que se obtienen son 31, 38 y 45 (algunos de ellos, varias veces). ¿Cuál es la suma de los 5 números?

Problema 50. La estrella de la figura está formada por 99 triangulitos. El número total de vértices (marcados con •) es 73. Se desea sombrear algunos triangulitos de manera que cada vértice quede en algún triangulito sombreado. ¿Cuál es el mínimo número de triangulitos que deben sombrearse?



Soluciones de los Problemas

Solución 1. Haciendo las divisiones correspondientes es fácil darse cuenta de que el único que no es entero es $\frac{2014}{4}$. La respuesta es (d).

Solución 2. En la figura puede verse que la longitud de uno de los lados menores del rectángulo pequeño es la mitad que la longitud del lado mayor, es decir, mide 5 cm. Luego, la longitud del lado mayor del rectángulo mayor es $5+10+5=20$. La respuesta es (b).

Solución 3. El perímetro del triángulo de Jimena es $6+10+11=27$, así que cada uno de los lados del triángulo equilátero mide $\frac{27}{3}=9$. La respuesta es (d).

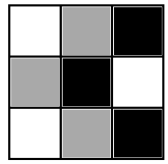
Solución 4. Al armar el cubo las parejas de lados opuestos son $\{1,3\}$, $\{2,4\}$ y $\{5,6\}$, así que las sumas que obtiene Hansel son 4, 6 y 11. La respuesta es (a).

Solución 5. Cada semana completa leerá 25 páginas. Entonces, en 9 semanas completas habrá leído 225 páginas. Esto ocurrirá un sábado. Como $239-225=14$, el domingo leerá 5 páginas y $14-5=9$, terminará un miércoles. La respuesta es (e).

Solución 6. Dorita se mueve dentro de un círculo con centro en el árbol y fuera de un círculo con centro en la casa del perro, ambos con radio de 5 m. La respuesta es (a).

Solución 7. En total pagaron 15 pesos, así que cada galleta costó 50 centavos. A Fernanda deberían haberle tocado 16 galletas. La respuesta es (e).

Solución 8. Como hay grises juntos y también negros, al menos deben pintarse 2. Con 2 basta repintando como se muestra:



La respuesta es (b).

Solución 9. En 5 segundos recorre $500 \times 5 = 2500\,\text{cm}$, así que la rueda da $\frac{2500}{125} = 20$ vueltas. La respuesta es (d).

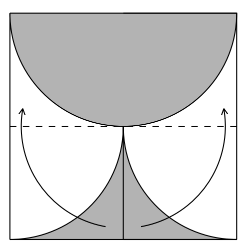
Solución 10. Como todos los amigos de Max dicen una cantidad diferente, a lo más uno de ellos puede estar diciendo la verdad; por tanto, a lo más uno de sus amigos estudió. Tenemos dos posibilidades:

$*$ Si ninguno de sus amigos estudió, entonces Octavio dice la verdad, pero entonces tendríamos que Octavio estudió y, en consecuencia, sería falso que ninguno de sus amigos estudió. Luego, tenemos que esta opción no puede suceder.

$*$ Si exactamente uno de sus amigos estudió, entonces Gabriela dice la verdad (y es la única que estudió). La respuesta es (b).

Solución 11. *Primera forma.* El área del semicírculo es de $\frac{\pi}{2}$. La parte sombreada de abajo es la mitad de la diferencia entre el área del cuadrado y la de dos semicírculos, o sea, $\frac{4-\pi}{2}$. En total el área sombreada es de $\frac{\pi}{2} + \frac{4-\pi}{2} = 2$.

Segunda forma. Basta girar las dos mitades de la parte sombreada de abajo, para completar medio cuadrado.

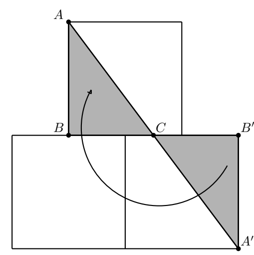


La respuesta es (c).

Solución 12. Si la persona adicional fuera mujer se repetiría el mes de nacimiento, así que ya hay 12 mujeres en la fiesta (una de cada mes). Si la persona adicional fuera hombre se repetiría el día de la semana en que nació, así que ya hay 7 hombres en la fiesta (uno que nació cada día de la semana). En total, hay 19 personas. La respuesta es (b).

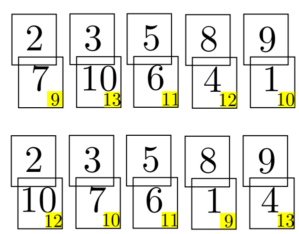
Solución 13. *Primera forma.* Prolonguemos la horizontal superior y la vertical derecha hasta que se corten. Se formaría, junto con las partes sombreadas, un triángulo rectángulo con área $\frac{1.5\times 2}{2} = 1.5$ y el pedazo agregado tiene área .5 así que el área sombreada es 1.

Segunda forma. Los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C$ son congruentes por tener lados paralelos y un cateto igual. Basta girar 180° alrededor de C para llevar $A'B'C$ a ABC y completar el cuadrado de arriba juntando ambas regiones sombreadas.



La respuesta es (c).

Solución 14. Como las tarjetas 2 y 9 ya están ocupadas, la suma que cada una forme con su pareja no puede ser 11; lo mismo ocurre con la 3 y la 8, por lo que concluimos que la tarjeta que se aparea con la 5 es la 6. Entonces la suma 9 sólo se puede lograr apareando 7 con 2 o 1 con 8. En el primer caso, 10 debe aparearse con 3, 4 con 8 y 1 con 9. En el segundo caso, 10 debe aparearse con 2, 7 con 3 y 4 con 9.



La respuesta es (c).

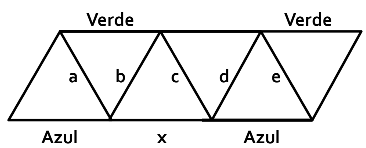
Solución 15. Como el área del cuadrado y el pentágono son consecutivos, el área del triangulito que se forma al doblar la esquina es de 1 cm. Luego, como el cuadrado puede dividirse en 8 triángulos iguales a ese, su área es 8 cm^2. La respuesta es (c).

Solución 16. Llamemos a a la cantidad de ramas con 5 hojas, b a la cantidad de ramas con 2 hojas y h al número total de hojas. Tenemos que $5a + 2b = h$.

También sabemos que $a + b = 9$. Multiplicando esta última ecuación por 5 y restándole la primera tenemos que $3b = 45 - h$; de aquí deducimos que h debe ser múltiplo de 3, de manera que la respuesta 32 no es posible. Las demás sí son posibles: $5(9)+2(0) = 45$, $5(7)+2(2) = 39$, $5(6)+2(3) = 36$ y $5(2)+2(7) = 24$. La respuesta es (d).

Solución 17. Llamemos p al promedio de los alumnos que no aprobaron. Luego, tenemos que $.6(8) + .4(p) = 6$, de donde $p = 3$. La respuesta es (c).

Solución 18. Llamemos a, b, c, d y e a los segmentos marcados en la figura. Al analizar los colores de los dos dos triángulos que contienen al segmento a, notamos que a no puede ser verde ni azul, así que debe ser rojo. Luego, el segmento marcado con b debe ser azul. El segmento e de la figura está en una situación similar a la que tenía originalmente el segmento a, así que debe ser rojo. Luego, el segmento marcado con d debe ser verde. Ahora el segmento c está en una situación similar a la que tenía originalmente el segmento a, así que debe ser rojo. Finalmente tenemos que el segmento marcado con x debe ser verde.



La respuesta es (a).

Solución 19. Llamemos L a la longitud del lado mayor del rectángulo y l a la longitud del lado menor. De acuerdo a las cantidades que obtuvieron, tenemos que Monserrat sumó tres lados sin incluir uno de los menores (de donde obtenemos $2L + l = 44$) e Isabela sumó tres lados sin incluir uno de los mayores (de donde obtenemos $L + 2l = 40$). Sumando ambas ecuaciones obtenemos $3L + 3l = 84$, de donde $L+l = 28$. Luego, el perímetro del rectángulo mide 56 cm. La respuesta es (b).

Solución 20. La suma de los números es 24, así que para que la suma con signos sea 0, deberá haber una suma positiva con valor 12. Al inicio hay un 2, así que bastarán poner dos símbolos + antes de dos números 5. La respuesta es (c).

Solución 21. Coloreemos de amarillo todas las regiones vacías, con excepción de la central. Observemos que todas las regiones amarillas son vecinas de la que tiene escrito -4, así que su suma es -4. Ahora, 2 debe ser el resultado de sumar la central con todas las regiones amarillas (cuya suma es -4), así que en el centro debe estar escrito 6. Por la simetría del círculo con respecto al centro podemos ver que sí es posible la solución poniendo -4 en todas las casillas de afuera y 2 en todas las de adentro. La respuesta es (a).

Solución 22. Observemos primero que para conocer todos los renglones de cualquier línea, basta conocer dos de los números de la línea, pues en cada línea los números consecutivos se obtienen sumando o restando la misma cantidad. Como hay dos números en la columna central, es fácil completar ésta. De ahí se puede pasar fácilmente a completar los renglones que tienen el 1 y el 4. Pero entonces ya se tendrán dos números en el renglón que contiene el cuadro sombreado. En la primera figura mostramos sólo las cuentas necesarias para obtener la respuesta. En la segunda mostramos la cuadrícula completa.

		4	12	20		
			13	16	19	
			14	12		
			15	8	1	
			16			
			17			

			11			
		4	12	20		
	7	10	13	16	19	
20	18	16	14	12	10	8
	29	22	15	8	1	
		28	16	4		
			17			

La respuesta es (d).

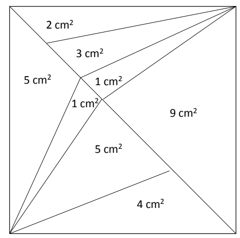
Solución 23. Si el primero que tiene el mismo color que el 1 es el 2, entonces todos tienen ese color pues $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ y $5 = 4 + 1$. Aquí contamos 2 posibilidades (de acuerdo al color que tenga el 1).

Si el primero que tiene el mismo color que el 1 es el 3, entonces, también el $4 = 1 + 3$ y el $5 = 1 + 4$ tienen ese color. Aquí contamos otras dos posibilidades.

No es posible que el primero igual al 1 sea el 4 porque $1 + 4 = 2 + 3$, ni tampoco que sea el 5 pues $2 + 3 = 5$.

Tenemos otras 2 posibilidades cuando no hay ningún otro del mismo color que el 1. La respuesta es (d).

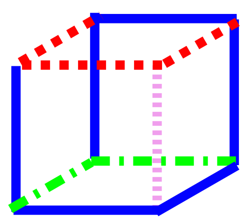
Solución 24. Haciendo los trazos que se muestran en la figura, por la simetría podemos calcular el área de cada uno de los triángulos marcados. Como todos tienen la misma altura, el área de los triángulos es proporcional a sus bases. Fijándonos en las áreas de los triángulos que tienen por bases a los segmentos a, b, c, d y e, podemos concluir que el segmento mayor es d.



La respuesta es (d).

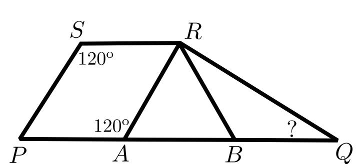
Solución 25. Como $25 + 60 = 85$ deducimos que por lo menos hay un canguro más. Ordenemos los pesos y llamemos x al segundo más ligero y y al antepenúltimo más pesado. Sabemos que x aporta al menos el 12.5% del peso total (es decir, la mitad de 25%) y que y aporta a lo más el 20% (la tercera parte de 60%). Faltan 15% que no pueden estar distribuidos entre dos canguros, así que sólo hay un canguro más. La respuesta es (a).

Solución 26. A cada vértice del cubo llegan 3 aristas, como no se traslapan los alambres, al menos en cada vértice debe haber el extremo de una de las piezas de alambre. De esta forma, debe haber al menos 8 extremos de alambre para formar el cubo, es decir, deben usarse al menos 4 pedazos. En la figura se muestra cómo los alambres que miden 1, 2, 3 y 6 cm de longitud pueden rodear al cubo.



La respuesta es (d).

Solución 27. Sean A y B los puntos sobre PQ de manera que $PA = AB = BQ$. Tenemos entonces que $PARS$ es paralelogramo, de donde $\angle PAR = 120^o$. De aquí resulta que $\angle RAB = 60^o$ y entonces el triángulo RAB es equilátero. En consecuencia, el triángulo RBQ es isósceles, con $RB = BQ$ y el ángulo QBR es igual a 120^o. El ángulo buscado es $\frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$.



La respuesta es (d).

Solución 28. Sean a, b, c y d las distancias entre puntos consecutivos. Los números 2, 5 y 6 no son suma de otros así que tres de los números a, b, c y d son 2, 5 y 6. Por otro lado, 22 es la distancia mayor así que debe ser la suma de a, b, c y d, y entonces las cuatro distancias entre puntos consecutivos son 2, 5, 6, 9. Ahora, 8 es una de las sumas, por lo que 2 y 6 están juntos, También 15 es una suma, y por lo tanto 6 y 9 están juntos. Como 7 no es ninguna suma, 2 y 5 no están juntos. El único acomodo posible es que las distancias estén en orden 2, 6, 9 y 5 (o a la inversa). El número faltante es $9 + 5 = 14$. La respuesta es (e).

Solución 29. Hay que intentar poner cada uno de los 10 dígitos en todas las posiciones marcadas con guiones en _1_4_2_7_0_9_. Eso nos daría un total de 70 posibilidades, pero al hacer esa lista, los números 1142709, 1442709, 1422709, 1427709, 1427009 y 1427099 aparecen dos veces. Luego, en total hay que intentar $70 - 6 = 64$ números. La respuesta es (c).

Solución 30. Basta que saque 1 del que dice "surtidos" y el sabor de ese dulce será la etiqueta de ese dispensador. La que dice el sabor del que sacó será la del otro y la que dice el otro sabor será la mixta. Por ejemplo, si saca un dulce de limón, no es posible que la que dice "dulces de limón" sea la surtida, puesto que entonces la de cereza tendría correcta su etiqueta. La respuesta es (a).

Solución 31. El carro debe estar entre el barco y el muñeco y eso da las dos posibilidades:

barco/carro/muñeco y muñeco/carro/barco. En cada una de estas dos la pelota puede ir al principio o al final, así que en total son 4 posibilidades. La respuesta es (b).

Solución 32. Entre las dos pesan 8 Kg, pero Dita pesa 2 Kg más que Rita, así que Dita pesa 5 Kg y Rita pesa 3 Kg. La respuesta es (d).

Solución 33. Las dos tiras juntas miden 50 cm y el traslape es de 10 cm, así que cada regla mide 30 cm. Para lograr 56 cm el traslape debe de ser de 4 cm pues $56 = 30 + 30 - 4$. La respuesta es (a).

Solución 34. En cada nivel horizontal, salvo en la base, la longitud es 1 (pues al poner encima cada cuadrado, lo que queda de un lado se compensa con lo que queda del otro). Entonces, la suma de las longitudes horizontales es $3+1+1+1 = 6$. Verticalmente, de cada lado hay una longitud de 3. En total hay $3+3+6 = 12$. La respuesta es (d).

Solución 35. Con cualquiera de (a), (b), (d), (e) se puede formar una pirámide con base cuadrada. La respuesta es (c).

Solución 36. Las formas en que podemos obtener 12 como producto de dos enteros positivos son $12 = 12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3$. Entonces, las posibilidades para el perímetro son $2(1 + 12) = 26$, $2(2 + 6) = 16$ y $2(3 + 4) = 14$. La respuesta es (b).

Solución 37. Los dos números de más de un dígito, lo más que podrían ser es 9 y el número de dos dígitos lo máximo que podría ser es 99. Entonces la suma es menor a 200 y así obtenemos que $ZZZ = 111$. Esto nos dice que Y es impar (pues al sumar dos X con una Y obtenemos un numero terminado en 1). Si Y fuera 7 o menos, entonces, por más grande que fuera X, la suma $X + X + YY \leq 9 + 9 + 77 < 111$. Entonces $Y = 9$ y $X = 6$. La respuesta es (e).

Solución 38. Numeremos los cuadritos de izquierda a derecha. Las posibilidades de numeración para colocar los canguros de manera que no queden juntos son

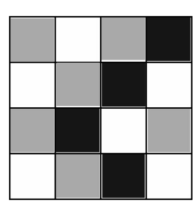
1/3/5	1/4/6	1/5/7	2/4/6	3/5/7
1/3/6	1/4/7		2/4/7	
1/3/7			2/5/7	

La respuesta es (d).

Solución 39. Lo menos que puede ser es que Andrea haya nacido el 31 de diciembre de 1997 y Carlota el 1 de enero de 2001, en cuyo caso la diferencia de edades sería de 3 años y un día. Lo más que puede ser es que Andrea haya nacido el 1 de enero de 1997 y Carlota el 31 de didiembre de 2001, en cuyo caso la diferencia de edades sería de 5 años menos 1 día. La respuesta es (e).

Solución 40. Es fácil ver que la primera gráfica es la única que conserva las proporciones. La respuesta es (a).

Solución 41. Es claro que deben ser al menos 3. Con 3 basta, por ejemplo podemos repintar de la siguiente manera:



La respuesta es (b).

Solución 42. Resolvemos una por una las operaciones:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)} \\
= \; & \sqrt{(2\cdot 2015)+(0)+(2015\cdot 2015)+(1)} \\
= \; & \sqrt{(2015+1)^2} \\
= \; & 2016.
\end{aligned}$$

La respuesta es (c).

Solución 43. Si los catetos miden x y y, y la hipotenusa mide z, tenemos que $x^2+y^2=z^2$ por el teorema de Pitágoras. Además,

$$X=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2,\ Y=\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 \text{ y } Z=\pi\left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

Entonces

$$X+Y=\pi\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}z^2=\pi\left(\frac{z}{2}\right)^2=Z.$$

La respuesta es (c).

Solución 44. Si (a) fuera cierto, entonces también lo sería (c), pero (c) es falso porque dice que (e) es falso. Entonces (a) es falso. Entonces (b) tampoco puede ser cierto. Como ya vimos, (c) es incorrecto, así que la primera afirmación cierta es (d). La respuesta es (d).

Solución 45. Digamos que los radios son $R>r>1$. Tenemos:

$$\frac{1}{4}\pi 1^2=\frac{1}{4}(\pi r^2-\pi 1^2)=\frac{1}{4}(\pi R^2-\pi r^2),$$

así que $1=r^2-1=R^2-r^2$, de donde $2=r^2$ y $R^2=3$. La respuesta es (a).

Solución 46. Vamos a ver que la única solución para xyz es 189.

Primera forma. La condición en notación decimal

$$yx+yz+xz=xyz$$

se reescribe algebraicamente como

$$(x+2y)10+2z+x=x10^2+y10+z,$$

que se reduce a

$$x89=y10+z.$$

Como $y10 + z \leq 94$, se tiene que $x = 1$. Luego, de $89 = y10 + z$, se concluye que $y = 8$ y $z = 9$. Por lo anterior, $xyz = 189$.

Segunda forma. Observemos primero que, como $3 \times 99 = 297$, seguro la primera cifra de la suma es 1 o 2. Llamemos S a la suma. Tenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r} y\,x \\ y\,z \\ x\,z \\ \hline S\ =\ x\,y\,z \end{array}$$

Observamos que las posibilidades para la cifra de las unidades son:

$$x + 2z = \begin{cases} z, \\ z + 10, \\ z + 20. \end{cases}$$

El primero y tercer casos son claramente imposibles. Para el segundo caso tenemos $x + z = 10$. También sabemos que $x = 1$ o $x = 2$.

Si $x = 1$ entonces $z = 9$ y en la cifra de las decenas tenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2y + x &= 10x + y \\ y + 2 &= 10 \\ y &= 8. \end{aligned}$$

Aqui tenemos la solución $S = 189$.

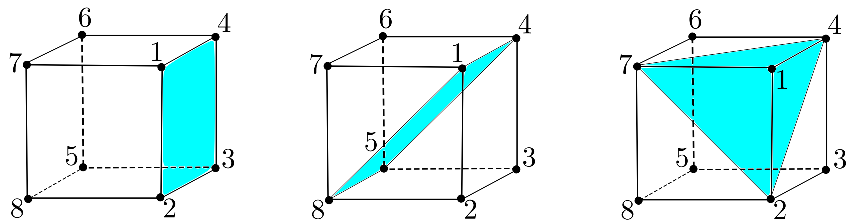
Si $x = 2$ entonces $z = 8$ y en la cifra de las decenas tenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2y + x &= 10x + y \\ 1 + 2y + 2 &= 20 + y \\ y &= 17. \end{aligned}$$

Como la solución no es un dígito, este caso es imposible.

Solución 47. Nombremos a los vértices con números como se muestra en la figura. Si A y B son dos vértices que forman arista, a la arista la nombramos AB. De la misma manera, si A, B, y C son vértices del cubo que determinan un plano, al plano lo denotaremos por ABC, y si otro vértice D (distinto de A, B y C) pertenece al plano ABC, el mismo plano lo podemos escribir como $ABCD$.

Las 6 caras del cubo determinan 6 planos (1234, 3465, 5678, 7821, 1467 y 2358). Los vértices de aristas opuestas como 14 con 58 determinan, cada una, un plano; de este estilo tenemos 6, a saber, 1458, 4628, 6723, 1735, 1256 y 3478. Los planos que hemos contado hasta ahora contienen, todos, alguna arista. Nos falta contar planos como el determinado por 247 y observamos que los vértices que lo forman son los adyacentes a uno mismo (por ejemplo, 2, 4 y 7 son los vértices adyacentes a 1). Así tenemos 8 planos más (uno por cada vértice: 247, 138, 245, 136, 368, 457, 168 y 257). En total son 20.



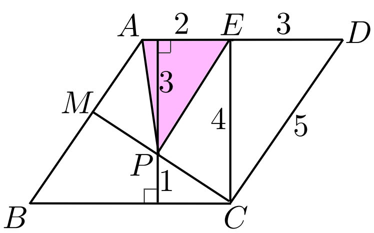
Solución 48. Como el área es 20 y el lado es 5, tenemos que $|CE| = \frac{20}{5} = 4$. Entonces, en el triángulo rectángulo DEC, la hipotenusa DC mide 5 y el cateto EC mide 4, de donde, por Pitágoras,

$$|ED| = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

De aquí obtenemos que $|AE| = 2$.

Por otro lado, el que P sea punto medio de MC nos dice que la distancia de P a BC es la mitad de la distancia de M a BC la cual, a su vez, es la mitad de la distancia de A a BC y ya sabemos que esta última es 4, así que la distancia de P a BC es 1 y la distancia de P a AD (esto es, la altura del triángulo AEP en P) es 3.

El área buscada es $\frac{2 \times 3}{2} = 3$.



Solución 49. *Primera forma.* Si hubiera 3 números pares o más, digamos que a, b y c son pares, entonces las sumas de parejas de ellos serían todas 38:

$$\begin{array}{rcl} a+b & = & 38 \\ b+c & = & 38 \\ a+c & = & 38 \end{array}$$

Restando cualesquiera dos de estas ecuaciones deducimos que $a = b = c$ y entonces $a = b = c = \frac{38}{2} = 19$, contradiciendo que a, b y c son pares.

Entonces, por lo menos hay tres impares y, otra vez, si a, b y c son impares, sus sumas de parejas de ellos es 38 de donde, como arriba, tenemos que $a = b = c = \frac{38}{2} = 19$. Los otros dos números deben ser $31 - 19 = 12$ y $45 - 19 = 26$.

Como $12 + 26 = 38$, que está en la lista de sumas, los números buscados son éstos, es decir: 19, 19, 19, 12 y 26.

Segunda forma. Ordenemos los números de menor a mayor: $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Como $31 \leq 38 \leq 45$, los dos primeros números suman 31 y los dos últimos suman 45:

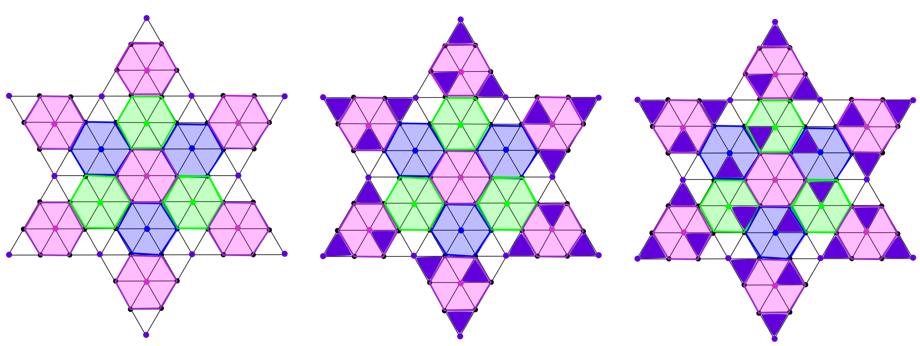
$$\begin{aligned} a + b &= 31, \\ d + e &= 45. \end{aligned}$$

Pero 31 y 45 son impares, así que $a \neq b$ y $d \neq e$ y entonces $a+d < a+e < b+e$, de donde

$$\begin{aligned} a + d &= 31, \\ a + e &= 38, \\ b + e &= 45. \end{aligned}$$

Ya teníamos que $a + b = 31$ y ahora tenemos que $a + d = 31$ y, como $b \leq c \leq d$ resulta que $b = c = d$. De $a + b = 31$ y $a + e = 38$, obtenemos $e - b = 7$ que, junto con $b + e = 45$ nos da $2e = 52$, de donde $e = 26$ y de aquí $b = c = d = 19$ y $a = 12$.

Solución 50. Como el número de vértices es 73, cada triángulo tiene tres vértices y $3 \times 24 = 72$, no sería posible abarcar todos los vértices con menos de 25 triangulitos. Veremos que con 25 es suficiente. Para ello presentaremos aquí una forma de sombrear 25 triangulitos que abarcarán todos los vértices. Empecemos por remarcar algunos hexágonos como se muestra en la primera figura y notemos que forzosamente deben escogerse los triangulitos en los picos de la estrella y al menos uno en cada hexágono. Escojamos entonces primero los picos de la estrella y los triangulitos como se muestra en la segunda figura (están situados todos de la misma manera respecto al pico). A continuación se escogen 6 triangulitos más (situados de la misma manera respecto al hexágono central). Sólo falta escoger cualquier triangulito en el hexágono central y es fácil verificar que así cada vértice pertenece a alguno de los triangulitos escogidos.



Concentrado de Respuestas

1. (d)
2. (b)
3. (d)
4. (a)
5. (e)
6. (a)
7. (e)
8. (b)
9. (d)
10. (b)
11. (c)
12. (b)
13. (c)
14. (c)
15. (c)
16. (d)
17. (c)
18. (a)
19. (b)
20. (c)
21. (a)
22. (d)
23. (d)
24. (d)
25. (a)
26. (d)
27. (d)
28. (e)
29. (c)
30. (a)
31. (b)
32. (d)
33. (a)
34. (d)
35. (c)
36. (b)
37. (e)
38. (d)
39. (e)
40. (a)
41. (b)
42. (c)
43. (c)
44. (d)
45. (a)
46. 1
47. 20
48. 3
49. 95
50. 25

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
Ciudad de México
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: `omm@ciencias.unam.mx`
Sitio Web: `http://www.ommenlinea.org/`

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas