Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione Industriale

Relazione finale Progetto

Analisi di un Manipolatore TR4: Pianificazione della Traiettoria, Analisi Cinematica e Dinamica e Sistema di Controllo

Referente: Ch.mo Prof. Giovanni Legnani

Laureandi:
Campregher Francesco
Matricola n. 723547

Mirandola Edoardo
Matricola n. 723993

Anno Accademico 2021 - 2022

Abstract

Nel documento viene esposto lo studio di un robot TR4 con l'elaborazione delle traiettorie da eseguire e delle leggi di moto necessarie per l'attuazione. Analisi cinematica, diretta ed inversa, e dinamica inversa tramite jacobiano e matrici.
Verifica della correttezza degli approcci tramite derivazione numerica e realizzazione di un modello del robot con l'utilizzo dei software Solidworks e simulazione mediante l'utilizzo del tool Simscape di Simulink con successivo sviluppo di un sistema di controllo tramite PID in configurazione a cascata con un'azione feedfoward di compensazione della coppia di gravitá.

Materiali e codice sorgente sono disponibili al seguente link.

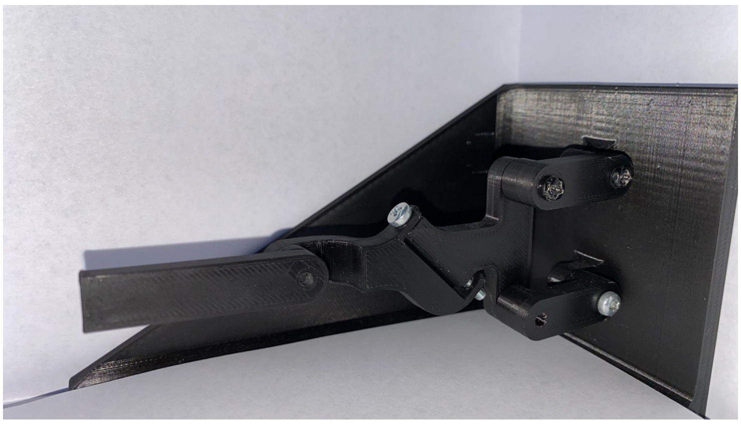
Introduzione

L'elaborato presenta lo svolgimento del progetto finale per il corso Servosystems and Robotics, tenuto dal prof. Giovani Legnani (a.a. 2021 - 2022).
Il progetto consiste nella modellizzazione di un manipolatore seriale che sia in grado di prelevare la temperatura in 4 punti prestabiliti lungo una traiettoria a scelta con una pausa nel punto di prelevamento della temperatura.
Tutte le movimentazioni devono essere svolte rispettando i limiti di spostamento, velocitá e accellerazione dei giunti e i valori massimi di coppia e forza che gli attuattori possono fornire.

Nota: durante la relazione per semplicitá di lettura delle formule e per motivi di spazio, quando necessario, verrá utilizzata la seguente convenzione:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Cq}_1 = cos(q_1) & \mathrm{Cq}_2 = cos(q_2) & \mathrm{Cq}_3 = cos(q_3) \\ \mathrm{Sq}_1 = sin(q_1) & \mathrm{Sq}_2 = sin(q_2) & \mathrm{Sq}_3 = sin(q_3) \end{array}$$

Nota: la simulazione del progetto é stata realizzata con le dimensioni e peso di un modellino in PLA stampato in 3D



Indice

Capitolo 1

Descrizione Manipolatore e Task

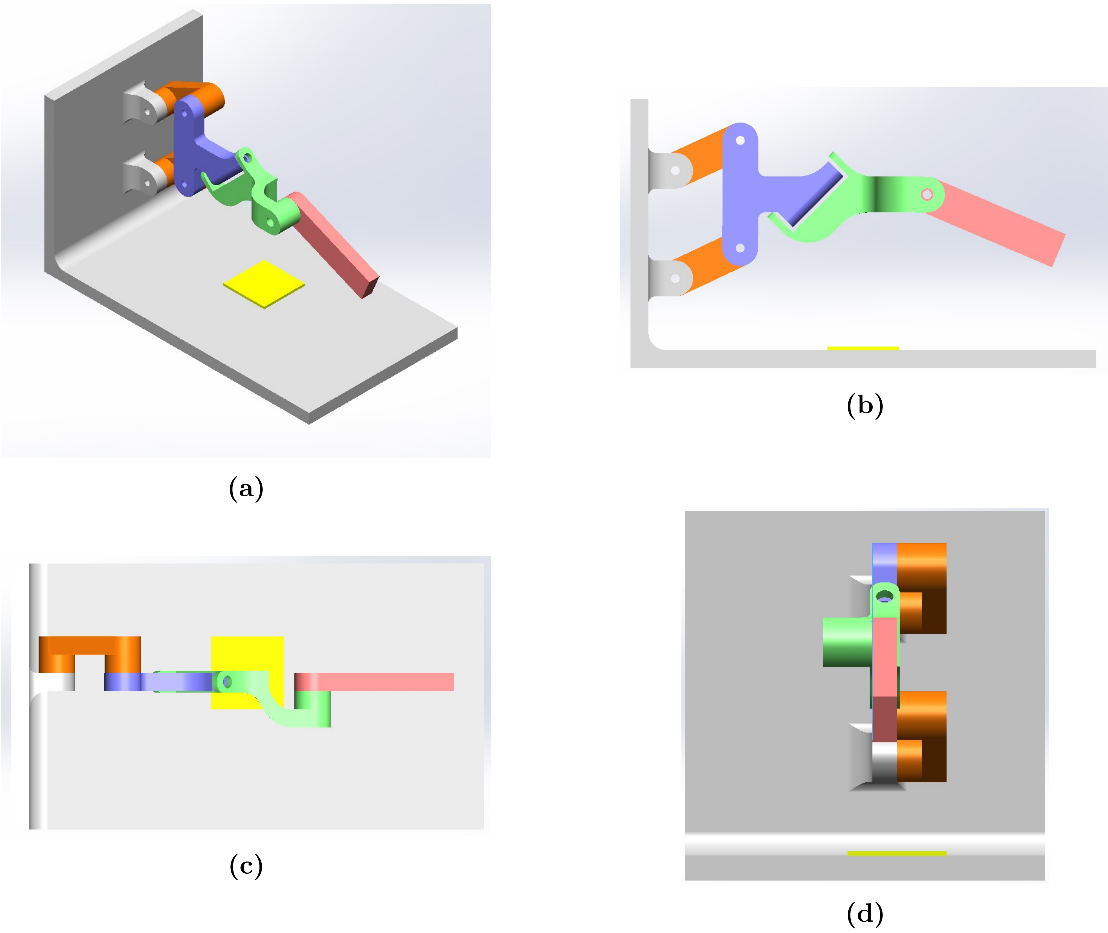
In questo capitolo introduttivo vengo mostrate le caratteristiche del manipolare sotto esame illustrando la zona di lavoro e le traiettorie che esso deve svolgere per eseguire la movimentazione richiesta.

1.1 Geometria del Manipolatore

Una rappresentazione grafica del manipolatore é mostrata nelle viste multiple di figura 1.1 mentre gli schemi di principio e movimentazione vengono mostrati nel capito 2 che é dedicato all'analisi cinematica.

Il manipolare in esame é costituito da 5 parti tre delle quali compongono un quadrilatero articolato che ora vediamo nel dettaglio:

- il **link 1**, arancione, possiede una geometria semplice che giustifica la posizione centrale del suo baricentro in sagoma. É collegato alla base attraverso un giunto rotoidale il cui asse di rotazione é parallelo all'asse Y del riferimento fisso. É descritto dalla dimensione principale $l = 20\,mm$.
- il **link 2**, blu, ha una forma complessa e il suo baricentro si trova leggermente decentrato rispetto alla sua figura triangolare per via del fatto che vi sono dei fori. É collegato ai link precedenti attraverso due giunti rotoidali il cui asse di rotazione é par-



(a) (b) (c) (d)

Figure 1.1: *Rappresentazione con piú viste del robot TR4*

allelo all'asse Y del riferimento fisso. Le sue dimensioni principali sono $l_{2a} = 30\,mm$ e $l_{2b} = 20.23\,mm$. L'insieme dei link 1 e 2 formano un quadrilatero articolato che conferisce al link 2 una movimentazione puramente traslatoria nello spazio.

- il **link 3**, verde, ha una forma complessa e il suo baricentro é sbilanciato rispetto all'asse X del riferimento fisso per permettere al link 4 di restare in sagoma. É collegato al link precedente mediante un giunto rotoidale con un asse di rotazione planare al piano XZ del riferimento fisso parallelo alla bisettrice del primo quadrante del medesimo. La dimensione principale é $l_3 = 31.92\,mm$.
- il **link 4**, rosso, é quello piú esterno e si puó interfacciare con l'end effector nel caso in esame una termocoppia per la misurazione della temperatura di un oggetto quadrato mostrato nella figura 1.1 con il colore giallo. É collegato al link precedente mediante un giunto rotoidale il cui asse di rotazione, nella configurazione base mostrata in 1.1 é parallelo all'asse Y del riferimento fisso. La dimensione principale é $l_4 = 40\ mm$.

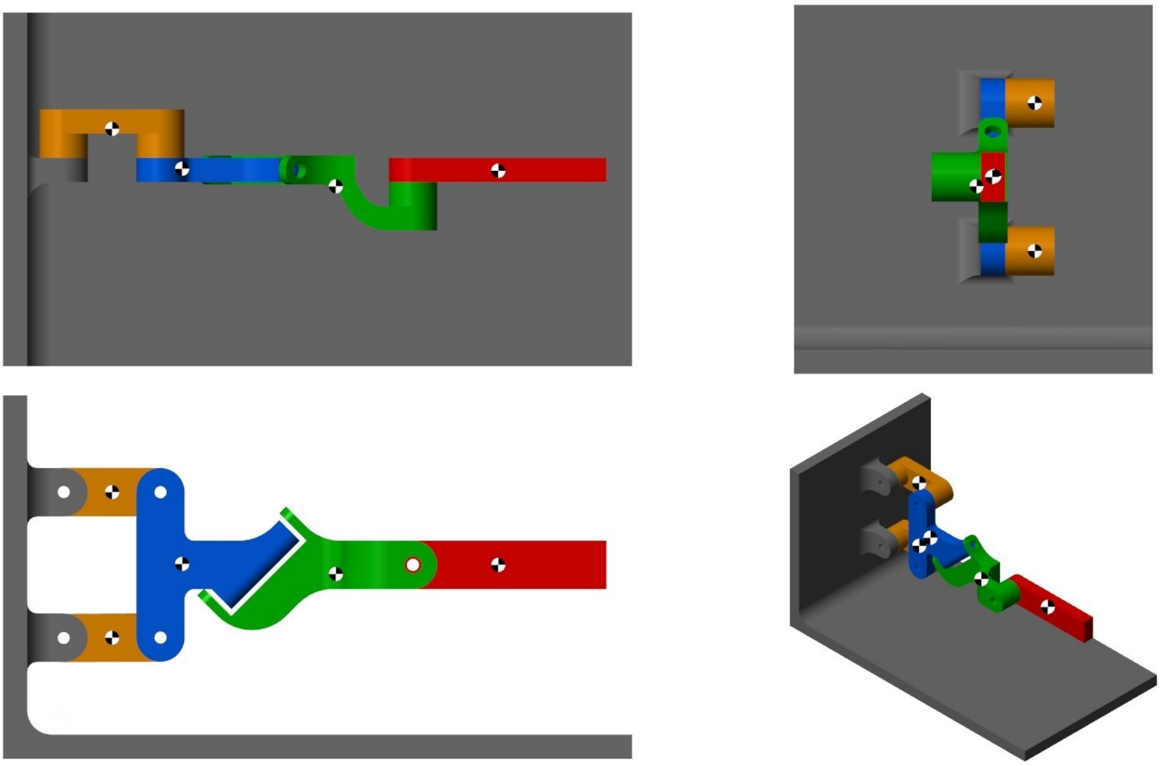


Figure 1.2: *Rappresentazione in 4 viste della posizione dei baricentri dei vari link*

La posizione dei baricentri dei link sono riferiti rispetto al giunto di collegamento con il link precedente, nella figura 1.2 sono mostrate le posizioni dei baricentri. Le coordinate dei baricentri sono espresse di seguito:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= [\ 10,\ 5.98,\ 0.00]\ mm, \\
G_2 &= [\ 4.47,\ -2.25,\ -14.80\ ]\ mm, \\
G_3 &= [\ 8.86,\ -3.36,\ -9.70\ ]\ mm. \\
G_4 &= [\ 17.63,\ 7.34,\ 0.00\ ]\ mm.
\end{aligned}
$$

Le masse dei link valgono rispettivamente:

$$
m_1 = 2.64\ g, \qquad m_2 = 4.12\ g, \qquad m_3 = 4.05\ g, \qquad m_4 = 3.19\ g.
$$

Le matrici di inerzia dei link sono state calcolate in automatico da Solidworks ed é stata applicata una conversione dalla convenzione adottata dal software a quella di piú vasto utilizzo:

$$
J_g = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.1}
$$

di seguito vengono riportati i valori approssimati dei momenti d'inerzia di tutti e quattro i link, espressi in un sistema di riferimento baricentrale con assi paralleli alla terna posta sul link in $[g\,mm^2]$:

$$J_{g_1} = \begin{bmatrix} 41.11 & 0 & 0 \\ 0 & 224.74 & 0 \\ 0 & 0 & 222.57 \end{bmatrix} \qquad J_{g_2} = \begin{bmatrix} 386.33 & -4.67 & 18.06 \\ -4.67 & 618.86 & -0.21 \\ 18.06 & -0.21 & 260.02 \end{bmatrix}$$

$$J_{g_3} = \begin{bmatrix} 174.46 & -157.99 & 126.26 \\ -157.99 & 665.26 & -25.49 \\ 126.26 & -25.49 & 651.67 \end{bmatrix} \qquad J_{g_4} = \begin{bmatrix} 34.77 & 9.22 & 0.00 \\ 9.22 & 551.34 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 534.91 \end{bmatrix}$$

Sempre a livello di informazioni generali, sull'*end-effector* non sono applicate forze o coppie esterne, come nessuna massa aggiuntiva apportata dal sensore di misurazione della temperatura é stata considerata.

1.2 Limiti degli Attuatori

Il manipolatore presenta 3 gradi di libertá, ciascuno attuato da un motore di tipo rotativo. Nella Sez. 2 é descritta in maniera rigorosa l'analisi cinematica, mentre di seguito ci si limita ad un accenno delle variabili di giunto e alla definizione dei limiti che sono stati imposti. Realisticamente i motori presenteranno delle limitazioni di spostamento, velocitá, accelerazione e coppia.

Di seguito vengono riportati i valori assoluti dei vincoli:

- rotazione del *link 1* rispetto all'ancoraggio: q_1.

$$q_{1,max} = \pi \; rad, \quad \dot{q}_{1,max} = \pm 1 \; rad/s, \quad \ddot{q}_{1,max} = \pm 3 \; rad/s^2, \quad T_{1,max} = \pm 4 \; mNm;$$

- rotazione del *link 3* rispetto al *link 2*: q_2.

$$q_{2,max} = 11\pi/9 \; rad, \quad \dot{q}_{2,max} = \pm 1 \; rad/s, \quad \ddot{q}_{2,max} = \pm 3 \; rad/s^2, \quad T_{2,max} = \pm 1 \; mNm;$$

- rotazione del *link 4* rispetto al *link 3*: q_3.

$$q_{3,max} = 13\pi/9\ rad, \quad \dot{q}_{3,max} = \pm 5\ rad/s, \quad \ddot{q}_{3,max} = \pm 10\ rad/s^2, \quad T_{3,max} = \pm 0.7\ mNm.$$

1.3 Workspace secondo UNI ISO 29946

Lo spazio di lavoro é definito come lo spazio raggiungibile dal punto di riferimento del polso, nel nostro caso coincidente con l'estremitá dell'ultimo link ed é mostrato secondo normativa UNI ISO nella figura 1.4 mentre una rappresentazione tridimensionale per fornire un'idea generale dello spazio raggiungibile é presentata in figura1.5.
Cw é il centro dello spazio di lavoro, individuabile assegnando a tutte le coordinate di giunto il loro valore intermedio; in questo caso, pertanto, il robot viene rappresentato nella configurazione raggiunta con valori delle variabili di giunto pari a $(q1, q2, q3) = (0, 0, 0)rad$.

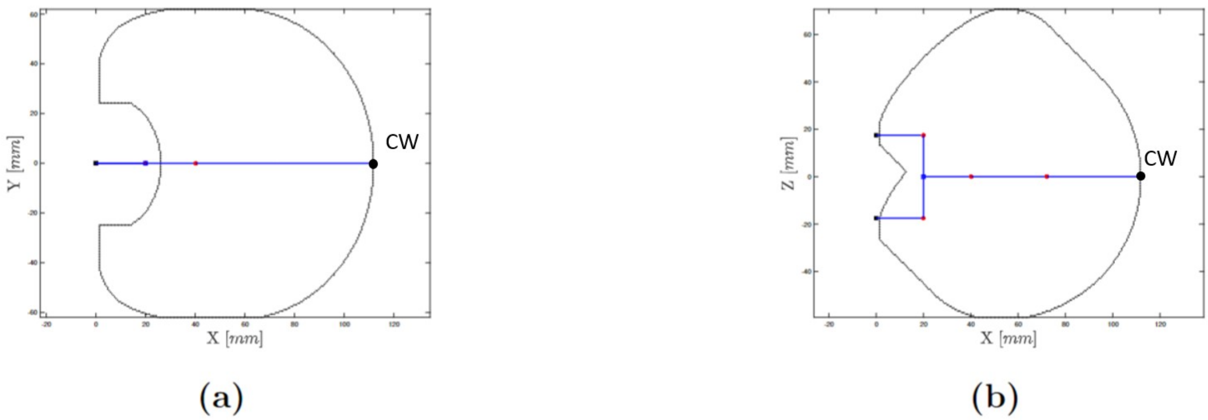


Figure 1.3

Figure 1.4: *Rappresentazione del working space secondo normativa UNI ISO 29946 nel piano XY e XZ*

1.4 Task

Il compito che il manipolatore deve svolgere puó essere suddiviso in cinque sotto-task che possono essere trattate indipendentemente, essendo che tra una movimentazione e la

(a) (b)

Figure 1.5: *Rappresentazione tridimensionale del working space*

successiva é presente una pausa per permettere la misurazione di temperatura.
Una rappresentazione della composizione delle traiettorie é mostrata nella figura 1.6 dove le singole task sono evidenziare da un colore diverso. Nei paragrafi successivi vengono analizzate nel dettaglio le specifiche di ogni traiettoria.

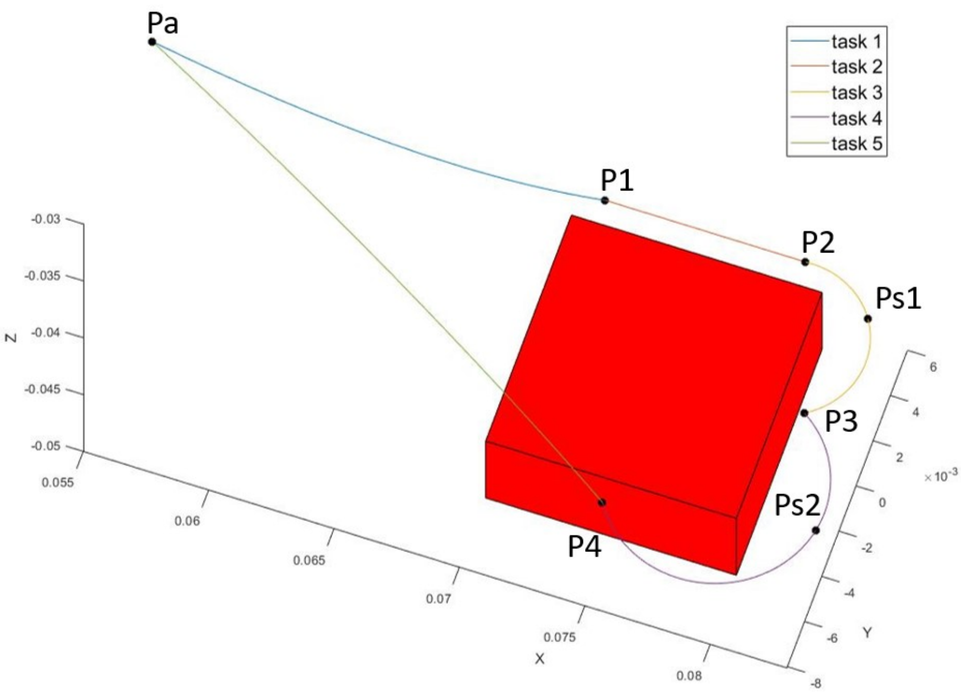


Figure 1.6: *Rappresentazione tridimensionale dalle traiettorie da eseguire*

1.4.1 Task 1 e Task 5

Il task 1(figura 1.7)e il task 5(figura 1.8) sono del tutto analoghi: consistono nella movimentazione da un punto di partenza ad un punto di arrivo con legge di moto cicloidale e minimo tempo di attuazione nello spazio delle variabili di giunto. In particolare, il task 1 consente di passare dalla posizione P_a di attesa alla posizione P_1, punto iniziale della traiettoria da seguire nel task 2, mentre il task 5 consiste nel eseguire la movimentazione dalla posizione P_4, punto finale del task 4, alla posizione P_a.

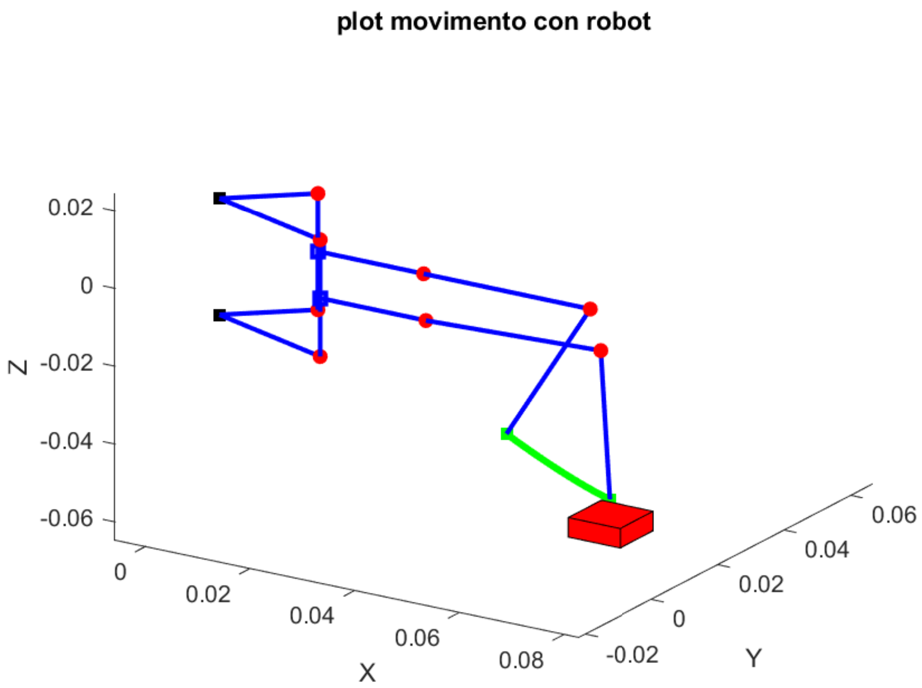


Figure 1.7: *Rappresentazione traiettoria 1 con robot in posizione iniziale e finale*

1.4.2 Task 2

Il task 2(figura 1.9) esegue una movimentazione lineare dell'end effector con una legge di moto cicloidale, partendo dal punto P_1 e raggiungendo il punto P_2 in un tempo fissato di cinque secondi.

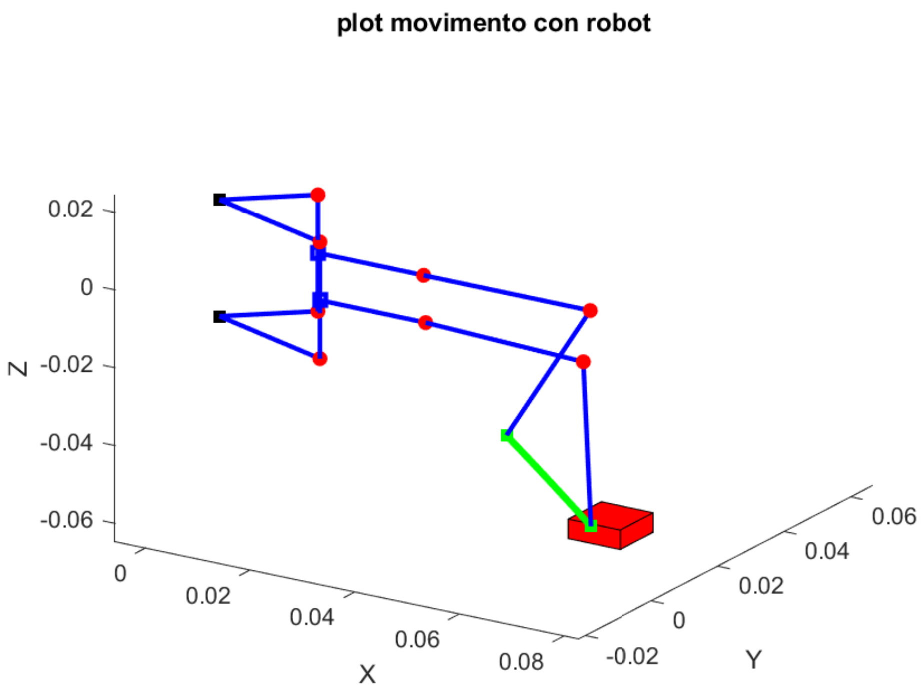


Figure 1.8: *Rappresentazione traiettoria 5 con robot in posizione iniziale e finale*

1.4.3 Task 3 e Task 4

Il task 3(figura 1.10) e il task 4(figura 1.11) sono analoghi in quanto tutti e due eseguono una movimentazione da un punto di partenza ad un punto di arrivo con legge di moto cicloidale in un tempo di cinque secondi e seguendo una traiettoria circolare. In particolare, il task 3 consente di passare dalla posizione P_2 alla posizione P_3, passando per un punto intermedio P_{S1}, punto iniziale della traiettoria da seguire nel task 4. Il task 4 permette di passare dalla posizione P_3 alla successiva posizione di misura P_4 passando per un punto intermedio P_{S2}.

I punti intermedi delle traiettorie sono utilizzati per individuare un unica circonferenza nello spazio.

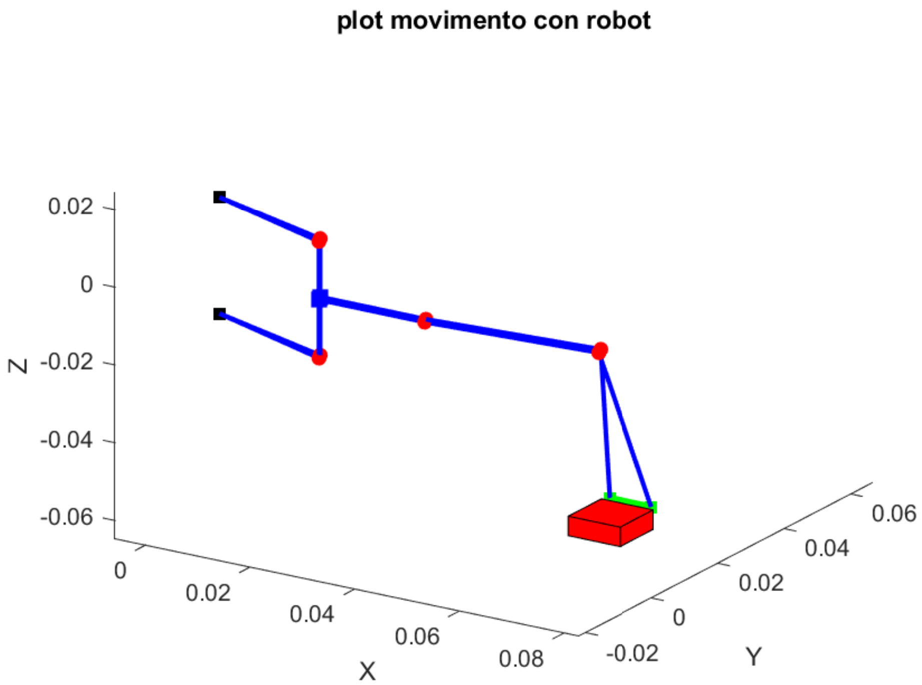


Figure 1.9: *Rappresentazione traiettoria 2 con robot in posizione iniziale e finale*

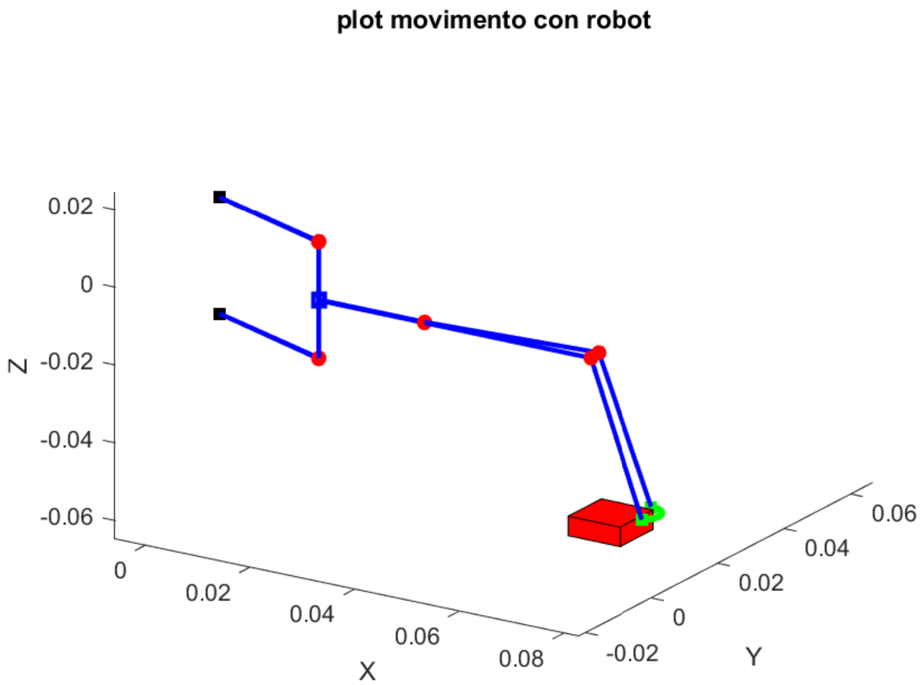


Figure 1.10: *Rappresentazione traiettoria 3 con robot in posizione iniziale e finale*

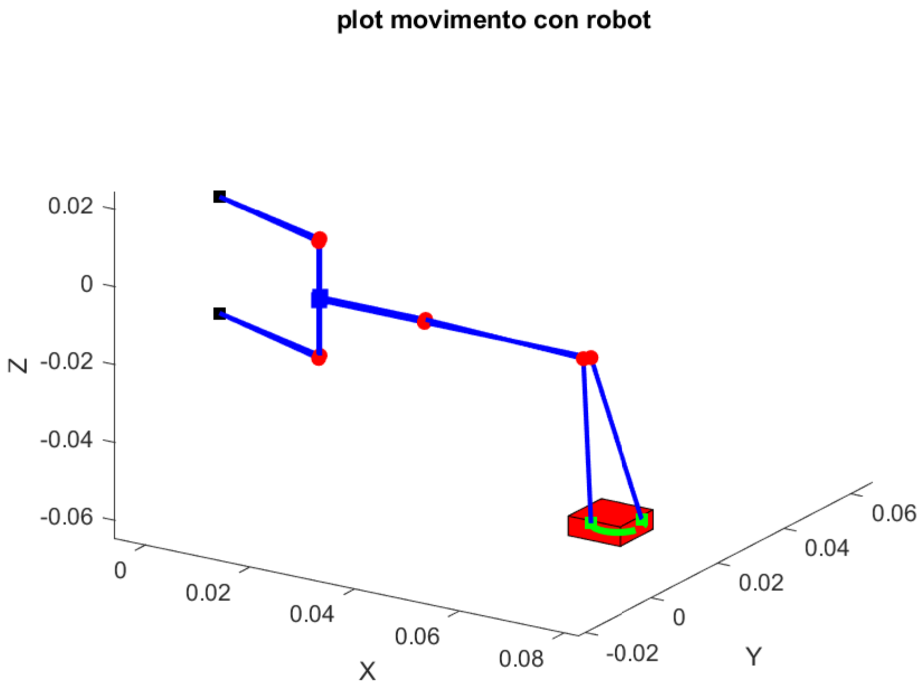


Figure 1.11: *Rappresentazione traiettoria 4 con robot in posizione iniziale e finale*

Capitolo 2

Analisi Cinematica

2.1 Cinematica Diretta

Lo studio della cinematica diretta del manipolatore si basa su equazioni che legano le coordinate nello spazio dei giunti a quelle nello spazio cartesiano, in maniera tale che note le prime é possibile determinare la posizione del robot nello spazio. In particolare é possibile scrivere le tre equazioni che descrivono la posizione del end-effector nello spazio lungo gli assi di riferimento del sistema preso alla base del robot rispetto alle variabili di giunto sfruttando le matrici di trasposizione.
Mediante l'utilizzo della matrice jacobiana, sará poi possibile calcolare velocitá ed accelerazione dei punti scelti.

2.1.1 Posizione

Denotando con Q il vettore delle m coordinate di giunto (i.e. i gradi di libertá del manipolatore) e con S le n coordinate nello spazio di lavoro, tali relazioni si possono esprimere mediante il sistema di equazioni:

$$S = F(Q) \tag{2.1}$$

dove :

$$Q = [q_1, q_2, ..., q_m]^T \tag{2.2}$$

$$S = [s_1, s_2, ..., s_n]^T \tag{2.3}$$

Nel caso sotto studio il vettore delle variabili di giunto é costituito nel seguente modo:

- q1: rotazione del primo link rispetto all'asse X del riferimento fisso
- q2: rotazione del terzo link rispetto al piano XZ del riferimento fisso
- q3: rotazione del quarto link rispetto alla posizione di allineamento col link precedente

da qui si ricava dal eq.2.2 $Q = [q_1, q_2, q_3]^T$. Mentre il vettore delle coordinate cartesiane é composto dalla posizione (x, y, z) del end-effector:

$$S = \begin{pmatrix} l_2 + \frac{l_3}{2} + \mathrm{Cq}_1\, l_1 + \frac{\mathrm{Cq}_2\, l_3}{2} + \frac{\mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} + \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} + \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} \\ \frac{\mathrm{Sq}_2\, \left(\sqrt{2}\, l_3 + 2\, l_4\, \sin\left(q_3 + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2} \\ \frac{l_3}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_2\, l_3}{2} + \frac{\mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} - \mathrm{Sq}_1\, l_1 - \frac{\mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

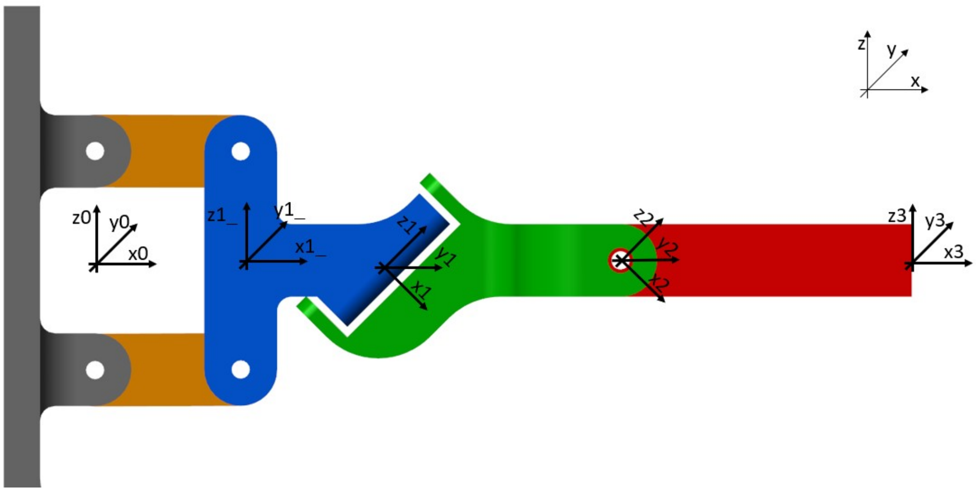


Figure 2.1: *Rappresentazione robot TR4 con i sistemi di riferimento*

L'equazione 2.4 deriva dalla scrittura delle matrici di trasposizione esprimendo in maniera sequenziale ogni link rispetto al precedente, posizionando i sistemi di riferimento

come mostrato in figura 2.1. Per rendere i calcoli piú agevoli abbiamo considerato i riferimenti ruotati di $\pi/4\,rad$ rispetto all'asse Y di riferimento.
Le matrici ricavate sono le seguenti:

$$M01\_ = \begin{pmatrix} \delta_2 - \delta_1 & 0 & \delta_1 + \delta_2 & -l_1\,(\delta_1 - \delta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_1 - \delta_2 & 0 & \delta_2 - \delta_1 & -l_1\,(\delta_1 + \delta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

dove:

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2}\,\sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2} \qquad \delta_2 = \frac{\sqrt{2}\,\cos\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$M1\_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) & 0 & -\sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}\,l_2\,\cos\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}\,l_2\,\sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}\,l_2\,\cos\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}\,l_2\,\sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$M12 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & \frac{\sqrt{2}\,l_3\,\cos(q_2)}{2} \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & \frac{\sqrt{2}\,l_3\,\sin(q_2)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}\,l_3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$M23 = \begin{pmatrix} \cos\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right) & l_4\,\cos\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right) & -l_4\,\sin\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

L'equazione 2.4 é stata ricavata semplicemente calcolando la posizione dell'origine del sistema di riferimento 3 rispetto a quello fisso 0:

$$M03 = M01\_ \cdot M1\_1 \cdot M12 \cdot M23 \tag{2.9}$$

$$S = M03 \cdot [0\ 0\ 0\ 1]^T \tag{2.10}$$

Il codice utilizzato é il seguente:

```
 function [M01_,M1_1,M12,M23] = TR4_positionMat(Q,L)
%INPUT:
%    Q: joint angles
%    L: link lengths
%OUTPUT:
%    Mij: convertion matrix from j-frame to i-frame
M00_ = [ cos(pi/4) 0 cos(pi/4) 0
               0    1        0    0
        -cos(pi/4) 0 cos(pi/4) 0
               0    0        0    1];
M0_g = [ cos(Q(1)-pi/4) 0 sin(Q(1)-pi/4) 0;
               0         1        0         0;
        -sin(Q(1)-pi/4) 0 cos(Q(1)-pi/4) 0;
               0         0        0         1];
Mg1_ = [1 0 0 L(1);
        0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1];

M01_ = M00_ * M0_g * Mg1_;

M1_g = [ cos(-Q(1)+pi/4) 0 sin(-Q(1)+pi/4) 0;
                0         1         0         0;
        -sin(-Q(1)+pi/4) 0 cos(-Q(1)+pi/4) 0;
                0         0         0         1];
Mg1 = [1 0 0 L(2)*cos(pi/4);
       0 1 0 0;
       0 0 1 L(2)*cos(pi/4);
       0 0 0 1];

M1_1 = M1_g * Mg1;
```

```

M11_ = [1 0 0 0;
        0 1 0 0;
        0 0 1 L(3)*cos(pi/4);
        0 0 0 1];
M1_2_ = [cos(Q(2)) -sin(Q(2)) 0 0;
         sin(Q(2))  cos(Q(2)) 0 0;
               0           0   1 0;
               0           0   0 1];

M12_ = M11_ * M1_2_;


M2_2 = [1 0 0 L(3)*sin(pi/4);
        0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1];

M12 = M12_ * M2_2;

M23_ = [ cos(Q(3)-pi/4)  0 sin(Q(3)-pi/4)  0;
               0         1       0         0;
        -sin(Q(3)-pi/4)  0 cos(Q(3)-pi/4)  0;
               0         0       0         1];
M3_3 = [1 0 0 L(4);
        0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1];

M23 = M23_ * M3_3;
end
```

2.1.2 Velocitá

Una volta nota l'espressione della posizione del end-effector é possibile calcolare la velocitá mediante l'utilizzo delle derivata temporale mostra nella seguente formula:

$$\dot{S} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = J \cdot \dot{Q} \tag{2.11}$$

dove il termine $J = \frac{\partial F}{\partial Q}$ é detto matrice jacobiana del sistema.
Di seguito viene riportata la matrice jacobiana nel caso sotto studio:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{Sq}_1}{50} & -\frac{4\,\mathrm{Sq}_2}{250} - \frac{\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3\,\mathrm{Sq}_2}{50} & \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} \\ 0 & \frac{\mathrm{Cq}_2\left(\frac{2\,\sin\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)}{25}+\frac{6.5}{144.1}\right)}{2} & \frac{\mathrm{Sq}_2\,\cos\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)}{25} \\ -\frac{\mathrm{Cq}_1}{50} & \frac{4\,\mathrm{Sq}_2}{250} + \frac{\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} + \frac{\mathrm{Cq}_3\,\mathrm{Sq}_2}{50} & \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3}{50} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Questa matrice é stata ricavata sfruttando il calcolo simbolico di Matlab, piú nello specifico il comando *jacobian*() permette di calcolare la matrice jacobiana di una matrice rispetto alle variabili richieste, nel nostro caso le variabili di giunto.

```
%definizione variabili simboliche
Q=sym("q",[1 3])';
L=sym("l",[1 4]);
%calcolo posizione rispetto alle variabili di giunto e alle lunghezze dei
%link
S=TR4_dirKin(Q,L)
%calcolo jacobiana
J=jacobian(S,Q)
```

2.1.3 Accelerazione

Per ottenere l'accelerazione dei punti é sufficiente derivare rispetto al tempo le singole velocitá, ottenendo la seguente espressione:

$$\ddot{S} = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial F}{\partial Q}\frac{d^2Q}{dt^2} = J\ddot{Q} + \dot{J}\dot{Q}. \tag{2.13}$$

La derivata temporale della matrice jacobiana assume la seguente espressione nel caso in esame:

$$\dot{J} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\frac{\partial}{\partial t}q_1(t)}{50} & \delta_1-\delta_3-\delta_6-\delta_8-\delta_9 & \delta_2-\delta_4-\delta_5-\delta_7+\delta_{10}-\delta_{11} \\ 0 & \delta_{13} & \frac{\mathrm{Cq}_2\,\cos(\delta_{12})\,\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{25}-\frac{\mathrm{Sq}_2\,\sin(\delta_{12})\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{25} \\ \frac{\mathrm{Sq}_1\,\frac{\partial}{\partial t}q_1(t)}{50} & \delta_3-\delta_1+\delta_6+\delta_8+\delta_9 & \delta_4-\delta_2+\delta_5+\delta_7+\delta_{10}-\delta_{11} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

dove:

$$\delta_1 = \frac{\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{50} \quad \delta_2 = \frac{\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{50} \quad \delta_3 = \frac{\mathrm{Cq}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{50}$$

$$\delta_4 = \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Sq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{50} \quad \delta_5 = \frac{\mathrm{Cq}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{50} \quad \delta_6 = \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Sq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{50}$$

$$\delta_7 = \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{50} \quad \delta_8 = \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{50} \quad \delta_9 = \frac{4\,\mathrm{Cq}_2\,\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{250}$$

$$\delta_{10} = \frac{\mathrm{Sq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{50} \quad \delta_{11} = \frac{\mathrm{Cq}_3\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{50} \quad \delta_{12} = \frac{\pi}{4} + q_3(t)$$

$$\delta_{13} = \frac{\mathrm{Cq}_2\,\cos(\delta_{12})\,\frac{\partial}{\partial t}q_3(t)}{25} - \frac{\mathrm{Sq}_2\left(\frac{2\,\sin(\delta_{12})}{25}+\frac{6.5}{144.1}\right)\frac{\partial}{\partial t}q_2(t)}{2}$$

Per calcolare la derivata temporale della matrice jacobiana abbiamo riutilizzato il calcolo simbolico di Matlab in particolare la funzione $diff()$, come mostrato nelle seguenti linee di codice.

```
%definizione delle variabili di giunto dipendenti dal tempo
syms t q1(t) q2(t) q3(t)
Q(1)=q1;
Q(2)=q2;
Q(3)=q3;
Q=Q.';
%definizione delle variabili che descrivono le lunghezze dei giunti
L=sym("l",[1 4]);
%calcolo della matrice jacobiana attraverso la funzione TR4_jacobian()
J=TR4_jacobian(Q,L)
%differenziazione rispetto al tempo della matrice appena calcolata
Jp=diff(J,t)
```

2.2 Cinematica Inversa

Lo studio cinematico inverso consiste nel calcolo delle variabili di giunto Q che consentono di ottenere una certa posizione dell'end-effector $S_{grip} = [x_{grip},\ y_{grip},\ z_{grip}]^T$. In generale la soluzione non é unica e ciascuna di esse rappresenta una configurazione spaziale che puó assumere il manipolatore.

2.2.1 Posizione

Nel caso in esame, le relazioni che permettono di ottenere le variabili di giunto rispetto a una posizione nello spazio di lavoro non sono ottenibili per via analitica. Quindi abbiamo adottato un metodo numerico denominato Newton - Raphson.
Esso permette di determinare una terna di variabili di giunto che determinino la posizione desiderata.

```
    for i = 1:Nmax
        Si = TR4_dirKin(Qi,L);
        Si = Si(1:end-1);
        J = TR4_jacobian(Qi,L);
        if abs(det(J)) <= eps
            break
        end
        Qi = Qi + inv(J)*(s-Si);
        err = s - Si;
        if (norm(err)<= 10^-10 && Qi(1)>-cons(1,1)/2 && Qi(1)<cons(1,1)/2 && Qi(2)>-cons(1,2)/2 && Qi(2)<cons(1,2)/2 && Qi(3)>-cons(1,3)/2 && Qi(3)<cons(1,3)/2)
            Q(1,index) = mod(Qi(1)+pi, 2*pi) - pi;
            Q(2,index) = mod(Qi(2)+pi, 2*pi) - pi;
            Q(3,index) = mod(Qi(3)+pi, 2*pi) - pi;
            break
        end
    end
```

L'estratto di codice sovrastante presenta l'implementazione di questo metodo. Esso é di tipologia iterativa:

- inizialmente calcola la posizione associata alla terna di partenza Q_i e la matrice jacobiana associata, che serve a linearizzare la funzione nel punto.
- successivamente si calcola la nuova terna Q_i sfruttando la relazione $\dot{Q} = J^{-1}\dot{S}$ si utilizza la formula incrementale $Q_i = Q_i + J^{-1}\Delta S$.
- Infine si controlla che la distanza tra il punto calcolato e quello desiderato sia inferiore a una certa tolleranza (10^{-10}) e che le variabili di giunto siano all'interno dei limiti fissati.

La funzione oltre all'algoritmo principale appena descritto include la possibilitá di poter calcolare una terna di variabili di giunto Q associate a una posizione S senza determinare una terna di partenza Q_i, poiché in generale non é facile determinare a priori una terna di partenza.
La funzione é cosí composta:

```
function Q = TR4_invNumeric(S,L,Nmax,cons,Qi)
%INPUT:
%   -S posizzione nello spazio di lavoro di cui bisogna calcolare le
%   variabili di giunto
%   -L lunghezze dei link del robot
%   -Nmax numero massimo di iterazioni
%   -cons limiti in spostamento
%   -Qi terna di variabili di giunto iniziale.
%   Opzionale: nel caso non venga fornita la funzione cerca la terna
%   desiderata provando 8000 terne di partenze all'interno dello spazio
%   dei giunti definito dai limiti
%OUTPUT:
%   -Q terna delle variabili di giunto che produce la posizione
%   richiesta, nel caso non sia stata trovata restituisce NaN
```

2.2.2 Velocitá e accelerazione

Il calcolo di velocità ed accelerazione per le coordinate nello spazio dei giunti é immediato ed si ricava mediante le seguenti equazioni:

$$\dot{Q} = J^{-1}\,\dot{S} \tag{2.15}$$

$$\ddot{Q} = J^{-1}\,(\ddot{S} - \dot{J}\dot{Q}) \tag{2.16}$$

Questa metodologia di calcolo richiede di conoscere se la matrice jacobiana é invertibile, condizione generalmente vera ma non nel caso di configurazioni singolari, per le quali il valore del determinante di tale matrice é nullo. A livello numerico, anche un determinante pressoché nullo genera una singolaritá, dovuta a un numero di condizionamento molto elevato della matrice.

2.2.3 Configurazione Singolari

Proprio l'annullamento del determinante della matrice jacobiana (i.e. lo jacobiano) é la condizione da imporre per trovare le configurazioni singolari del manipolatore. Questo metodo puó essere accompagnato da ragionamenti di tipo geometrico: una configurazione é singolare quando essa é il risultato di due o piú soluzioni coincidenti. In tal caso esisteranno alcune particolari direzioni nelle quali la pinza non potrá muoversi, poiché la componente della sua velocitá lungo quella direzione sará sempre nulla, qualsiasi sia la velocitá dei motori. A livello dinamico, invece, in queste direzioni il manipolatore potrá esercitare forze elevate con ridotto sforzo degli attuatori.
La ricerca delle configurazioni singolari é basata sul calcolo del determinante della matrice

jacobiana 2.17 eseguito attraverso il calcolo simbolico.

$$J = \begin{pmatrix} -\mathrm{Sq}_1\, l_1 & -\frac{\mathrm{Sq}_2\, l_3}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_3\, \mathrm{Sq}_2\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Sq}_2\, \mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} & \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} \\ 0 & \frac{\mathrm{Cq}_2 \left(\sqrt{2}\, l_3 + 2\, l_4\, \sin\left(q_3 + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2} & \mathrm{Sq}_2\, l_4\, \cos\left(q_3 + \frac{\pi}{4}\right) \\ -\mathrm{Cq}_1\, l_1 & \frac{\mathrm{Sq}_2\, l_3}{2} + \frac{\mathrm{Cq}_3\, \mathrm{Sq}_2\, l_4}{2} + \frac{\mathrm{Sq}_2\, \mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} & \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Sq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_2\, \mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} - \frac{\mathrm{Cq}_3\, l_4}{2} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Di seguito viene riportato il risultato del determinante dello jacobiano 2.17 appena riportato :

$$det(J) = detJ_1 + detJ_2 \tag{2.18}$$

Dove:

$$\begin{aligned} detJ_1 = & \frac{l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)\, \sin(q_1(t))\, \sin(q_2(t))^2}{2} + \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_1(t))\, \cos(q_3(t))\, \cos\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)\, \sin(q_2(t))^2}{2} + \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_1(t))\, \cos(q_2(t))^2\, \cos(q_3(t))\, \sin\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)}{2} + \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_1(t))\, \cos\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)\, \sin(q_2(t))^2\, \sin(q_3(t))}{2} - \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_1(t))\, \cos(q_2(t))^2\, \sin(q_3(t))\, \sin\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)}{2} + \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_3(t))\, \cos\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)\, \sin(q_1(t))\, \sin(q_2(t))^2}{2} + \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2 \cos(q_2(t))^2\, \cos(q_3(t))\, \sin(q_1(t))\, \sin\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)}{2} + \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)\, \sin(q_1(t))\, \sin(q_2(t))^2\, \sin(q_3(t))}{2} - \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2 \cos(q_2(t))^2\, \sin(q_1(t))\, \sin(q_3(t))\, \sin\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)}{2} - \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_1(t))\, \cos(q_2(t))\, \cos(q_3(t))\, \sin\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)}{2} - \\ & \frac{l_1\, {l_4}^2\, \cos(q_1(t))\, \cos(q_2(t))\, \sin(q_3(t))\, \sin\left(\frac{\pi}{4} + q_3(t)\right)}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
detJ_2 =& \frac{l_1\, l_4^{\,2}\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_3\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_1\left(t\right)\right)\, \sin\left(\frac{\pi}{4}+q_3\left(t\right)\right)}{2} + \\
& \frac{l_1\, l_4^{\,2}\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_1\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_3\left(t\right)\right)\, \sin\left(\frac{\pi}{4}+q_3\left(t\right)\right)}{2} + \\
& \frac{l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_1\left(t\right)\right)\, \cos\left(\frac{\pi}{4}+q_3\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_2\left(t\right)\right)^2}{2} + \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_1\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)^2\, \cos\left(q_3\left(t\right)\right)}{4} - \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_1\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)^2\, \sin\left(q_3\left(t\right)\right)}{4} + \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4 \cos\left(q_2\left(t\right)\right)^2\, \cos\left(q_3\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_1\left(t\right)\right)}{4} - \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4 \cos\left(q_2\left(t\right)\right)^2\, \sin\left(q_1\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_3\left(t\right)\right)}{4} - \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_1\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_3\left(t\right)\right)}{4} - \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_1\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_3\left(t\right)\right)}{4} + \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)\, \cos\left(q_3\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_1\left(t\right)\right)}{4} + \\
& \frac{\sqrt{2}\, l_1\, l_3\, l_4\, \cos\left(q_2\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_1\left(t\right)\right)\, \sin\left(q_3\left(t\right)\right)}{4}
\end{aligned}
$$

Uguagliando l'eq.2.18 a zero si ottengono le configurazioni singolari dipendenti dalle dimensioni dei link. Le configurazioni singolari relative al nostro robot si ottengono sostituendo nell'equazione 2.18 i parametri dei link e uguagliandola a zero, cosí si ottiene l'equazione 2.19.

$$detJ = -\frac{\left(\cos\left(q_1\right)\, \sin\left(q_3\right) - \cos\left(q_2\right)\, \cos\left(q_3\right)\, \sin\left(q_1\right)\right)\, \left(14.7\, \cos\left(q_3\right) + 8.3\right)}{46116.8} = 0 \qquad (2.19)$$

Le soluzioni si ottengono quando i termini del numeratore si annullano, le soluzioni ottenute sono rappresentate nelle equazioni 2.20 e 2.21 dove si ottengo due valori della variabile di giunto q_3 e da una superficie dipende dei valori dei giunti rappresentata in figura 2.2.

$$\cos\left(q_1\right)\, \sin\left(q_3\right) - \cos\left(q_2\right)\, \cos\left(q_3\right)\, \sin\left(q_1\right) = 0 \qquad (2.20)$$

$$14.7 \cos(q_3) + 8.3 = 0 \tag{2.21}$$

Risolvendo l'equazione 2.21 rispetto a q_3 si ottiene:

$$q_3 = \begin{pmatrix} \pi + \text{acos}\left(\frac{83}{147}\right) \\ \pi - \text{acos}\left(\frac{83}{147}\right) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Le configurazioni singolari sono rappresentate nelle figure 2.2 nello spazio dei giunti e 2.3 nello spazio di lavoro. Alcune rappresentazioni delle configurazioni singolari del robot sono rappresentate nella multifigura 2.4

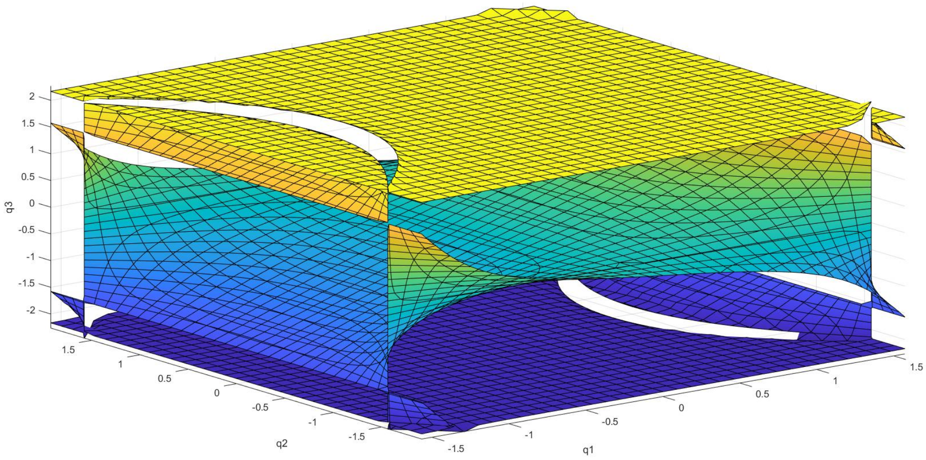


Figure 2.2: *Singolaritá nello spazio dei giunti*

2.3 Task

Per calcolare le variabili di giunto necessarie allo svolgimento dei task é stata sviluppata la funzione $TR4\_move()$ che racchiude al suo interno tutti gli algoritmi che permettono il calcolo delle segiuenti movimentazioni:

- nello spazio dei giunti
- lineari nello spazio di lavoro

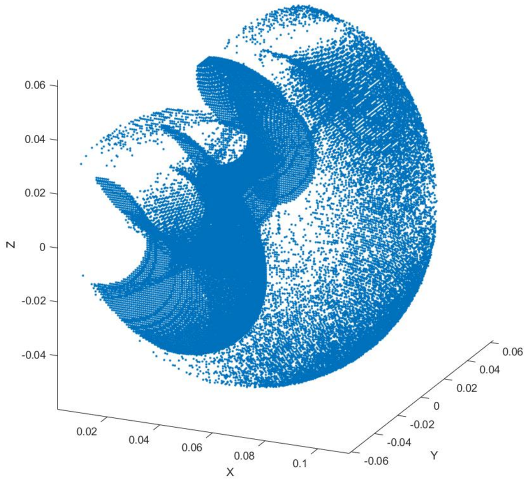


Figure 2.3: *Singolaritá nello spazio di lavoro*

(a) **(b)**

Figure 2.4: *Esempi di configurazioni singolari*

- circolari nello spazio di lavoro
- minimo tempo di attuazione nello spazio dei giunti

```
function [Q,Qp,Qpp,Fq,T,X,Xp,Xpp]=TR4_move(S,T,law,L,M,F,mode,cons,Qi,
    lambda)
%INPUT:
%   -S punti della movimentazione
%   -T tempo di movimentazione (non utilizzato nel caso di movimentazione
%   con tempo di attuazione minimo)
%   -law funzione della legge oraria da seguire
%   -L lunghezza dei link
```

```
%   -M matrice generalizzata delle masse
%   -F forze esterne
%   -mode tipologia di movimentazione:
%       *linear movimentazione lineare tra due punti
%       *joint movimentazione nello spazio dei giunti
%       *circular movimentazione circolare con un punto di partenza uno
%       di arrivo e uno per definire la circonferenza desiderata
%       *minimum_time_TS movimentazione nello spazio dei giunti con tempo
%       minimo di movimentazione considerando la legge di moto tre tratti
%       e le limitazioni di accelerazione e velocita' dei giunti
%       *minimum_time_C movimentazione nello spazio dei giunti con tempo
%       minimo di movimentazione considerando la legge di moto cicloidale
%       e le limitazioni di accelerazione e velocita' dei giunti
%   -cons vincoli dei giunti
%   -Qi terna di variabili dei giunti (opzionale, se non fornita viene
%   cercata all'interno dello spazio dei giunti raggiungibile)
%   -lambda parametro che definisce la percentuale di accelerazione e
%   decelerazione nel caso di legge tre tratti (opzionale nel caso non si
%   usi la legge di moto tre tratti)
%OUTPUT:
%   -Q vettore degli angoli di giunto
%   -Qp vettore delle velocita' angolari di giunto
%   -Qp vettore delle accelerazioni angolari di giunto
%   -Fq vettore delle coppie dei giunti
%   -T vettore dei tempi
%   -X vettore delle posizioni assunte nello spazio di lavoro
%   -Xp vettore delle velocita' assunte nello spazio di lavoro
%   -Xpp vettore delle accelerazioni assunte nello spazio di lavoro
```

All'interno di questa funzione si utilizzano altre funzioni specifiche per ogni tipologia di movimentazione che ora vengono spiegate nel dettaglio.

Nota: Nella funzione $TR4\_jointMov()$ e $TR4\_circularMove$ non si é riporta il significato delle variabili di input e output essendo le stesse spiegate all'interno del paragrafo descrittivo della funzione $TR4\_linearMov()$.

TR4_linearMov()

Questa funzione passati: il punto iniziale, quello finale, il tempo di movimentazione e la legge di moto restituisce tutte le informazioni riguardanti la movimentazione. Essa calcola inizialmente la retta che collega i 2 punti, la discretizza in 100 punti e verifica se tutti rientrano all'interno dello spazio di lavoro del robot grazie alla funzione $isWS()$. In seguito, attraverso l'uso della funzione $TR4\_invNumeric()$ descritta in precedenza nella sezione 2.2.1, calcola tutte le variabili di giunto e le variabili dello spazio di lavoro, mentre attraverso la funzione $TR4\_Torque()$ calcola le coppie richieste ai motori. Nel caso i vincoli non siano rispettati la funzione restituisce dei valori NaN.

```
function [Q,Qp,Qpp,Fq,T,X,Xp,Xpp] = TR4_linearMov(S,law,time,L,M,F,Qi,cons,lambda)
%INPUT:
%   -S vettore composto da due punti, quello di partenza e arrivo
%   -law legge di moto imposta sulla traiettoria lineare nello spazio di
%   lavoro
%   -time tempo di movimentazione
%   -L lunghezza dei link del robot
%   -M matrice delle masse generalizzate
%   -F forze esterne
%   -Qi terna delle variabili di giunto da utilizzare come partenza per la
%   cinematica inversa
%   -cons vincoli dei giunti
%   -lambda parametro che definisce la percentuale di accelerazione e
%   decelerazione nel caso di legge tre tratti (opzionale nel caso non si
%   usi la legge di moto tre tratti)
%OUTPUT:
%   --Q vettore degli angoli di giunto
%   -Qp vettore delle velocita' angolari di giunto
%   -Qp vettore delle accelerazioni angolari di giunto
```

```
%   -Fq vettore delle coppie dei giunti
%   -T vettore dei tempi
%   -X vettore delle posizioni assunte nello spazio di lavoro
%   -Xp vettore delle velocita' assunte nello spazio di lavoro
%   -Xpp vettore delle accelerazioni assunte nello spazio di lavoro
```

TR4_jointMov()

Questa funzione passati: il punto iniziale, quello finale, il tempo di movimentazione e la legge di moto restituisce tutte le informazioni riguardanti la movimentazione. Essa calcola inizialmente le terne delle variabili di giunto associate alla posizione iniziale e finale, determina la direzione di rotazione dei mototri che minimizza lo spostamento, discretizza in 100 punti le distanze cosí ricavate. In seguito, attraverso l'uso della funzione $TR4\_dirKin()$ che incorpora i concetti affrontati nella sezione 2.1 e gli altri concetti necessari per il calcolo della velocitá e accelerazione, calcola tutte le variabili di giunto e le variabili dello spazio di lavoro, mentre attraverso la funzione $TR4\_Torque()$ calcola le coppie richieste ai motori. Nel caso i vincoli non siano rispettati la funzione restituisce dei valori NaN.

```
function [Q_,Qp_,Qpp_,Fq_,T,X_,Xp_,Xpp_] = TR4_jointMov(S,law,time,L,M,F,
    Qi,cons,lambda)
```

TR4_circularMov()

Questa funzione passati: il punto iniziale, quello finale, quello intermedio, il tempo di movimentazione e la legge di moto restituisce tutte le informazioni riguardanti la movimentazione. Essa calcola inizialmente l'arco di circonferenza che collega i 2 punti estremi passando per quello intermedio, la discretizza in 100 punti e verifica se tutti rientrano all'interno dello spazio di lavoro del robot grazie alla funzione $isWS()$. In seguito, attraverso l'uso della funzione $TR4\_invNumeric()$ descritta in precedenza nella sezione 2.2.1, calcola tutte le variabili di giunto e le variabili dello spazio di lavoro, mentre attraverso la funzione $TR4\_Torque()$ calcola le coppie richieste ai motori. Nel caso i vincoli non siano rispettati la funzione restituisce dei valori NaN.

```
function [Q,Qp,Qpp,Fq,T,X,Xp,Xpp] = TR4_circularMov(S,law,time,L,M,F,Qi,
    cons,lambda)
```

Di seguito viene descritto il procedimento per determinare la circonferenza adeguata che viene svolto mediante l'utilizzo della funzione *circle3point*() di seguito riportata.

```
        [displ, displp, displpp] = law(t, time, 0, disp_, lambda);
        fff = displ/disp_;
        [Xc, Xpc, Xppc] = circle3point(P1, P2, P3, fff, displp, displpp);
        Q(find(T==t),:) = TR4_invNumeric(Xc(1:3), L, 1000, cons, Qi);
```

Essa richiede in ingresso: i tre punti che caratterizzano la circonferenza desiderata e le variabili che individuano il punto e lo stato di moto del robot nella variabile s della traiettoria, restituiscono le variabile nello spazio di lavoro corrispondenti.

```
function [X, Xp, Xpp] = circle3point(P1,P2,P3,s,sp,spp)
%INPUT:
%   -P1,P2,P3 tre punti per cui passa la circonferenza
%   -s,sp,spp spostamento, velocita' e accelerazione che ha il robot
%   sulla traiettoria, considerando un caso monodimensionale
%OUTPUT:
%   -X,Xp,Xpp variabili dello spazio di lavoro per il punto considerato
%   sulla traiettoria
```

Inizialmente definisce il centro della circonferenza rispetto ai punti definiti e il raggio di quest'ultima. Successivamente costruisce una circonferenza con centro nell'origine sul piano XY con il punto di partenza localizzato sull'asse X e calcola il punto attuale col relativo momento di moto. Infine con la matrice di trasposizione riporta il punto nello spazio di lavoro. Per calcolare le variabili riguardanti i task da eseguire é stato prodotto uno script.

```
F = zeros(21,1);
[Q1,Qp1,Qpp1,Fq1,T1,X1,Xp1,Xpp1] = TR4_move([P1(1:3) P2(1:3)],1,
    @Cicloidale,link,M,F,'minimum_time_C',Con);
[Q2,Qp2,Qpp2,Fq2,T2,X2,Xp2,Xpp2] = TR4_move([P2(1:3) P3(1:3)],5,
    @Cicloidale,link,M,F,'linear',Con,Q1(end,:)');
[Q3,Qp3,Qpp3,Fq3,T3,X3,Xp3,Xpp3] = TR4_move([P3(1:3) P34(1:3) P4(1:3)],5,
    @Cicloidale,link,M,F,'circular',Con,Q2(end,:)');
```

```
[Q4,Qp4,Qpp4,Fq4,T4,X4,Xp4,Xpp4] = TR4_move([P4(1:3) P45(1:3) P5(1:3)],5,
    @Cicloidale,link,M,F,'circular',Con,Q3(end,:)');
[Q5,Qp5,Qpp5,Fq5,T5,X5,Xp5,Xpp5] = TR4_move([P5(1:3) P1(1:3)],1,
    @Cicloidale,link,M,F,'minimum_time_C',Con,Q4(end,:)');
```

Inizialmente calcola le variabili necessarie alla movimentazione dei singoli movimenti.

```
Q_ = {Q1 Q2 Q3 Q4 Q5};
Qp_ = {Qp1 Qp2 Qp3 Qp4 Qp5};
Qpp_ = {Qpp1 Qpp2 Qpp3 Qpp4 Qpp5};
X_ = {X1 X2 X3 X4 X5};
Xp_ = {Xp1 Xp2 Xp3 Xp4 Xp5};
Xpp_ = {Xpp1 Xpp2 Xpp3 Xpp4 Xpp5};
T_ = {T1 T2 T3 T4 T5};
Fq_ = {Fq1 Fq2 Fq3 Fq4 Fq5};
[Q,Qp,Qpp,Fq,T,X,Xp,Xpp] = pauses(Q_,Qp_,Qpp_,Fq_,T_,X_,Xp_,Xpp_,1);
```

Successivamente attraverso la funzione *pauses*() si compone la movimentazione completa che comprende una pausa di 1 s tra le varie movimentazioni.

2.3.1 Task 1

Il task 1, come descritto nella sezione 1.4.1, é costituito da una movimentazione con minimo tempo di attuazione nello spazio dei giunti con legge di moto cicloidale per evitare l'innesco di vibrazioni all'interno del robot essendo le movimentazioni piú critiche da questo punto di vista.

Qui di seguito analizziamo l'algoritmo utilizzato per produrre la movimentazione desiderata.

```
        dQ = Q_in(:,1)-Q_in(:,2);
        T_min1 = minimumTimeC(abs(dQ(1)),cons(2,1),cons(3,1));
        T_min2 = minimumTimeC(abs(dQ(2)),cons(2,2),cons(3,2));
        T_min3 = minimumTimeC(abs(dQ(3)),cons(2,3),cons(3,3));
        T_min=max([T_min1,T_min2,T_min3]);
```

Una volta definite le terne delle variabili di giunto associate al punto iniziale e finale si determina la distanza angolare che devono percorrere i motori. Successivamente si calcolano i tempi minimi di attuazione considerando i vincoli dei motori con la funzione $mimumTimeC()$.

```
function T_min = minimumTimeC(dq,vmax,amax)
```

Essa calcola i tempi minimi imposti dalla velocitá e dalla accelerazione del motore restituendo il massimo dei due, cosí vengono rispettate entrambe le specifiche richieste. Il calcolo si basa sulle seguenti formule:

$$S = S_0 + \frac{\mathrm{S_{tot}}\left(t - \frac{\mathrm{T_{tot}}\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{\mathrm{T_{tot}}}\right)}{2\,\pi}\right)}{\mathrm{T_{tot}}} \tag{2.23}$$

$$\dot{S} = -\frac{\mathrm{S_{tot}}\left(\cos\left(\frac{2\,\pi\,t}{\mathrm{T_{tot}}}\right) - 1\right)}{\mathrm{T_{tot}}} \tag{2.24}$$

$$\ddot{S} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{S_{tot}}\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{\mathrm{T_{tot}}}\right)}{\mathrm{T_{tot}}^2} \tag{2.25}$$

Dove S_{tot} é lo spostamento totale da eseguire durante la movimentazione, T_{tot} il tempo totale della movimentazione, S_0 lo spostamento iniziale, t il tempo per cui vengono calcolate le tre componenti S, $\dot{S}$ e $\ddot{S}$ che determinano il movimento.

Considerando la forma della legge di moto presentata in figura 2.5, la velocitá massima si trova in $T_{tot}/2$ e l'accelerazioni massime si troveranno in $T_{tot}/4$. Quindi sostituendo nell'equazione 2.24 $T_{tot}/2$ e in quella 2.25 $T_{tot}/4$ al posto del tempo e ponendo la prima uguale alla velocitá massima e la seconda all'accelerazione massima si ottengono le seguenti formule:

$$T_v = \frac{2\,\mathrm{S_{tot}}}{\mathrm{Vmax}} \tag{2.26}$$

$$T_a = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{\mathrm{S_{tot}}}{\mathrm{Amax}}} \\ -\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{\mathrm{S_{tot}}}{\mathrm{Amax}}} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

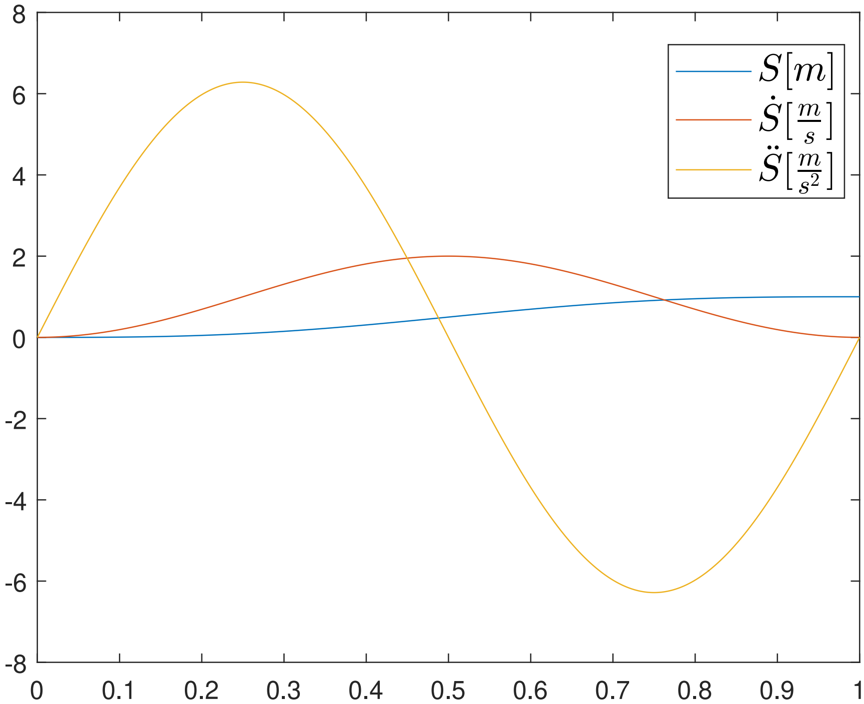


Figure 2.5: *Rappresentazione di una traettoria cicloidale*

Dove T_v e T_a sono rispettivamente il tempo minimo di movimentazione considerando il limite di velocitá e accelerazione.

Considerando che il tempo non puó essere negativo si considera solo la prima soluzione della formula 2.27 e diventa:

$$T_a = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{\mathrm{S_{tot}}}{\mathrm{Amax}}} \tag{2.28}$$

La rappresentazione dei risultati ottenuti sia delle variabili di giunto che della posizione dell'end-effector sono mostrate nelle figure 2.6 e 2.7.

2.3.2 Task 2

Il task 2, come descritto nella sezione 1.4.2, consiste in una movimentazione lineare tra i due punti P_1 e P_2. Esso si basa sulla funzione $TR4\_linearMov()$ spiegata in precedenza nella sezione 2.3. I risultati sono mostrati nelle figure 2.8 e 2.9.

2.3.3 Task 3

Il task 3, come descritto nella sezione 1.4.3, consiste in una movimentazione circolare partendo dal punto P_2 arriva al punto P_3 passando per il punto ausiliario P_{s1}. Esso si basa sulla funzione $TR4\_circularMov()$ spiegato in precedenza nella sezione 2.3. I risultati sono mostrati nelle figure 2.10 e 2.11.

2.3.4 Task 4

Il task 4 é del tutto analogo al task 3 2.3.3, con la differenza dei punti utilizzati: P_3 punto di partenza, P_4 punto di arrivo e P_{s2} come punto ausiliario. I risultati ottenuti sono mostrati nelle figure 2.12 e 2.13.

2.3.5 Task 5

Il task 5 é analogo al task 1 (2.3.1),con la differenza dei punti utilizzati: P_4 punto di partenza e P_a punto di arrivo. La rappresentazione dei risultati ottenuti sia delle variabili di giunto che della posizione dell'end-effector sono mostrate nelle figure 2.14 e 2.15.

2.3.6 Risultati e Debug

Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti dallo sviluppo dell'analisi cinematica dei vari task;il tempo visualizzato nei grafici si riferisce al tempo di esecuzione della singola traiettoria e non al tempo effettivo in cui essa viene svolta durante il processo.

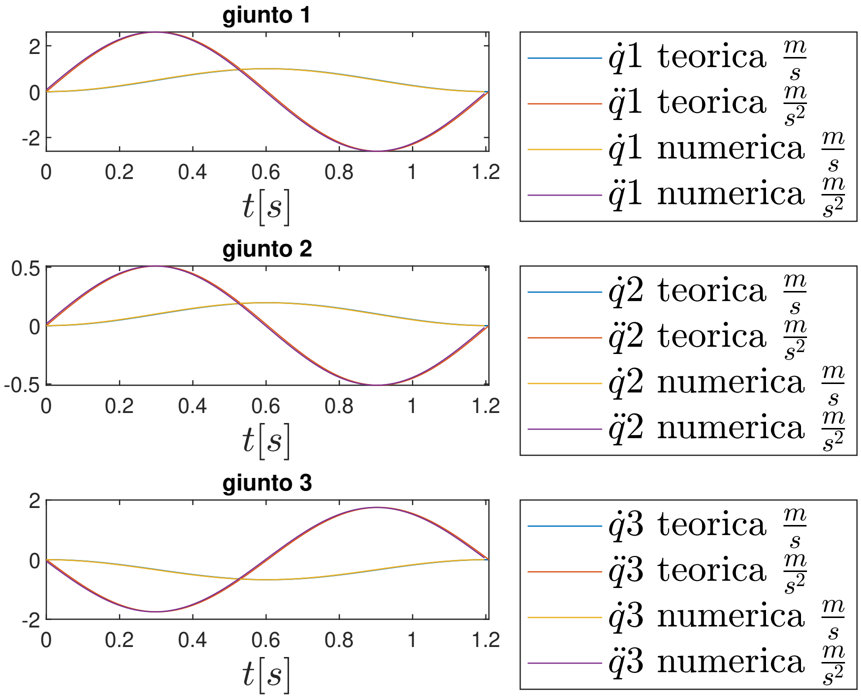


Figure 2.6: *Rappresentazione variabili di giunto Task 1*

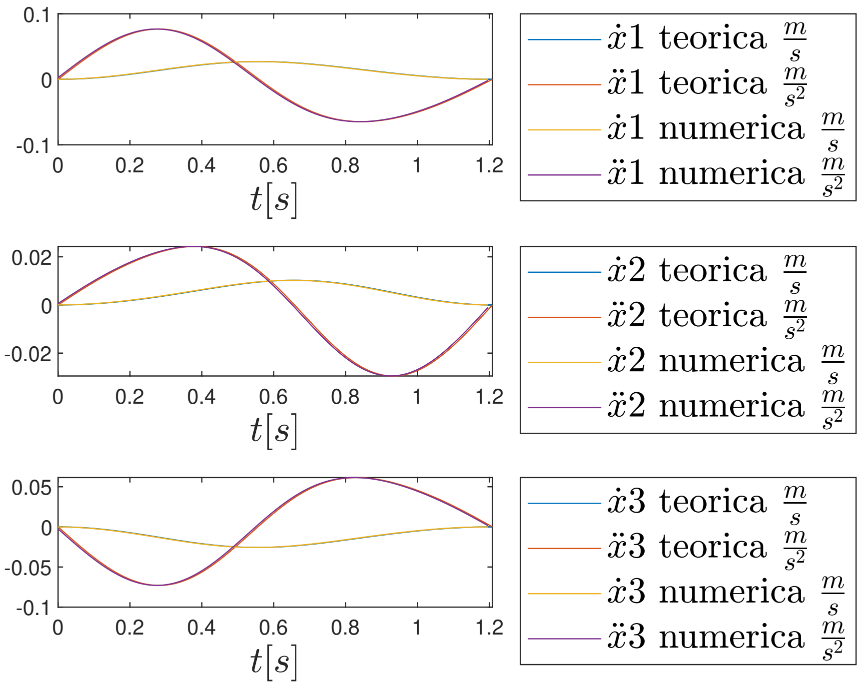


Figure 2.7: *Rappresentazione coordinate dell'end-effector Task 1*

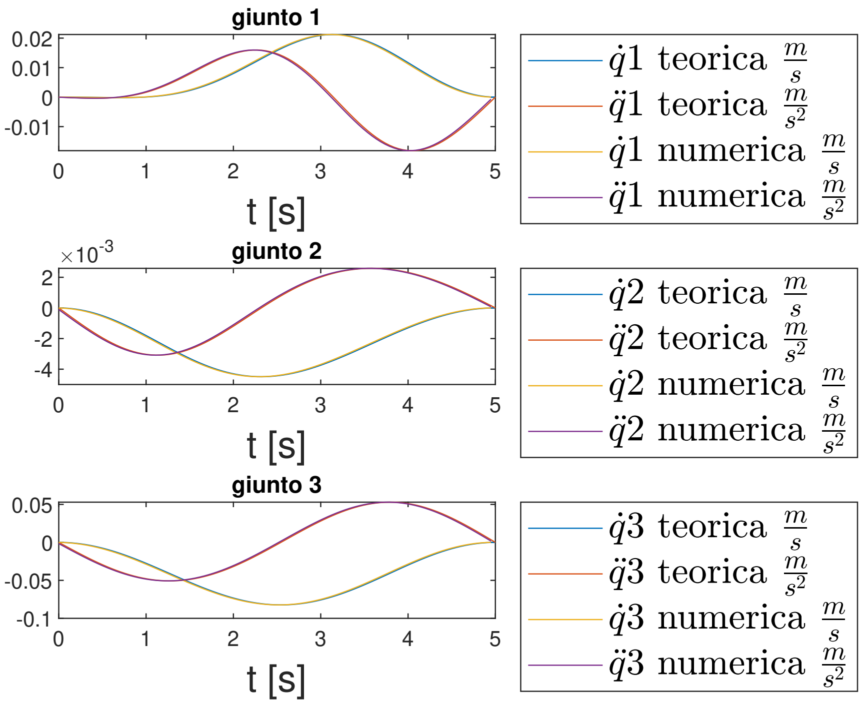


Figure 2.8: *Rappresentazione variabili di giunto Task 2*

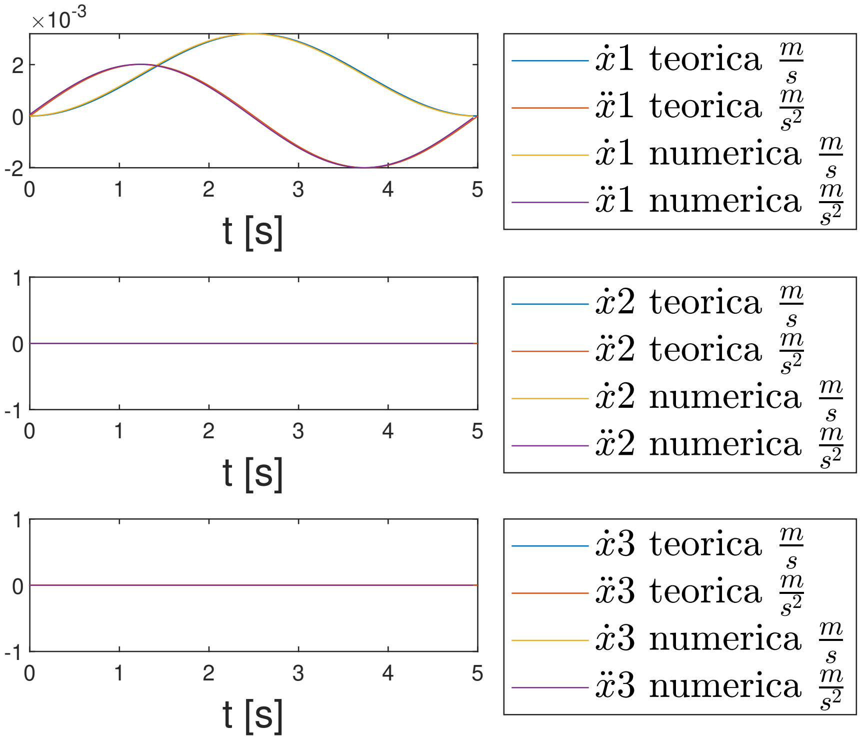


Figure 2.9: *Rappresentazione coordinate dell'end-effector Task 2*

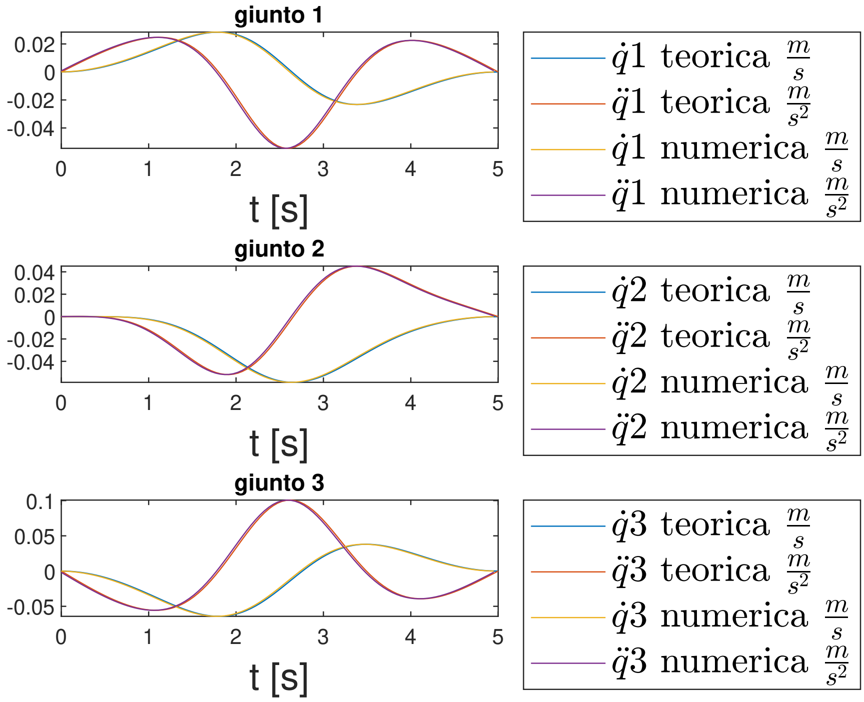


Figure 2.10: *Rappresentazione variabili di giunto Task 3*

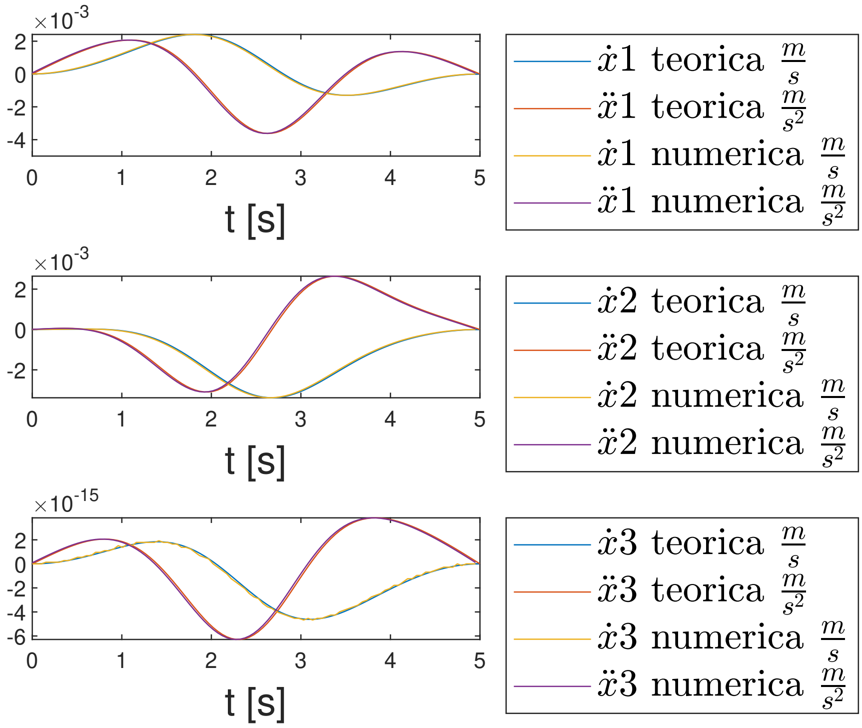


Figure 2.11: *Rappresentazione coordinate dell'end-effector Task 3*

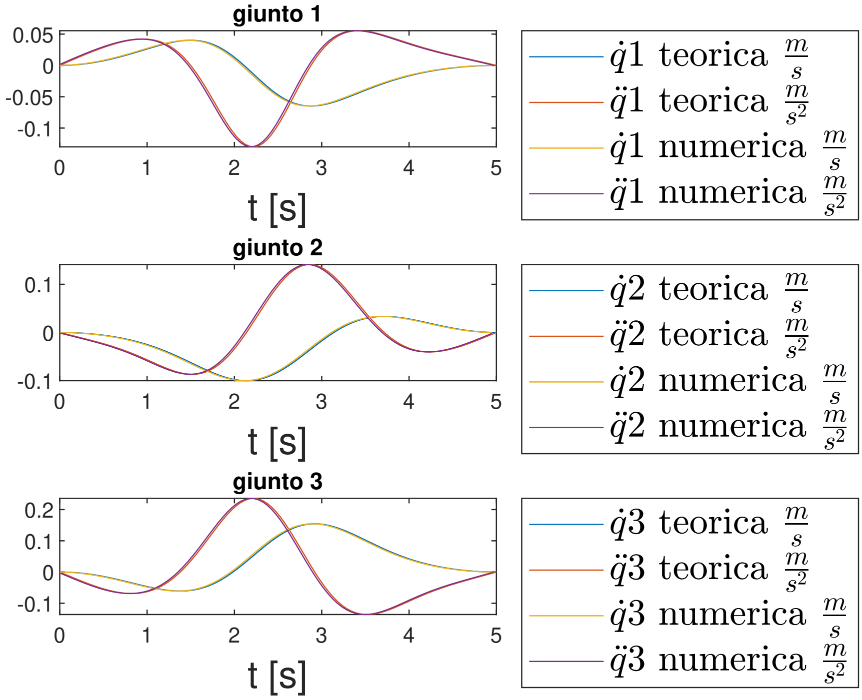


Figure 2.12: *Rappresentazione variabili di giunto Task 4*

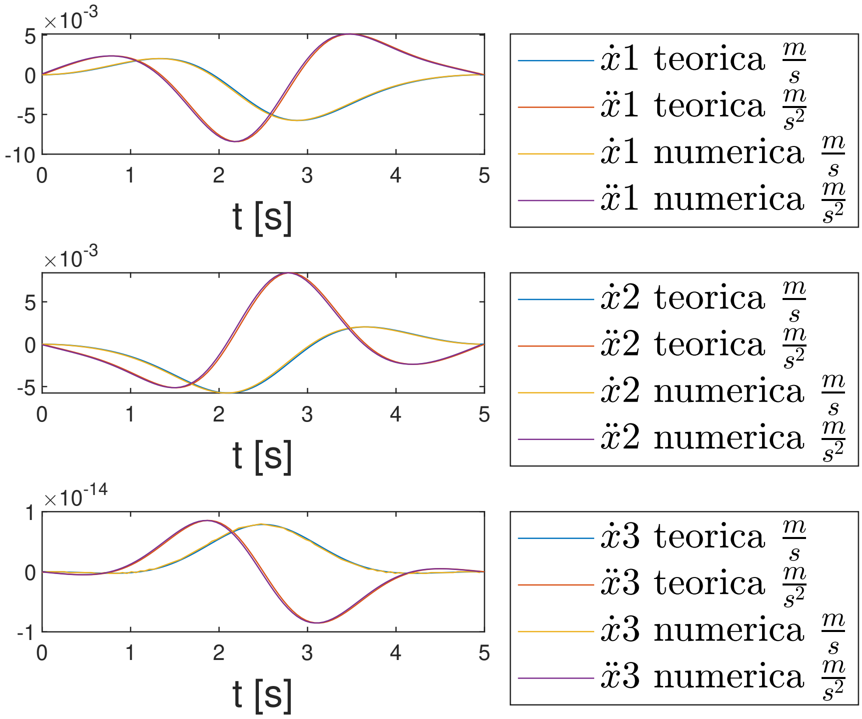


Figure 2.13: *Rappresentazione coordinate dell'end-effector Task 4*

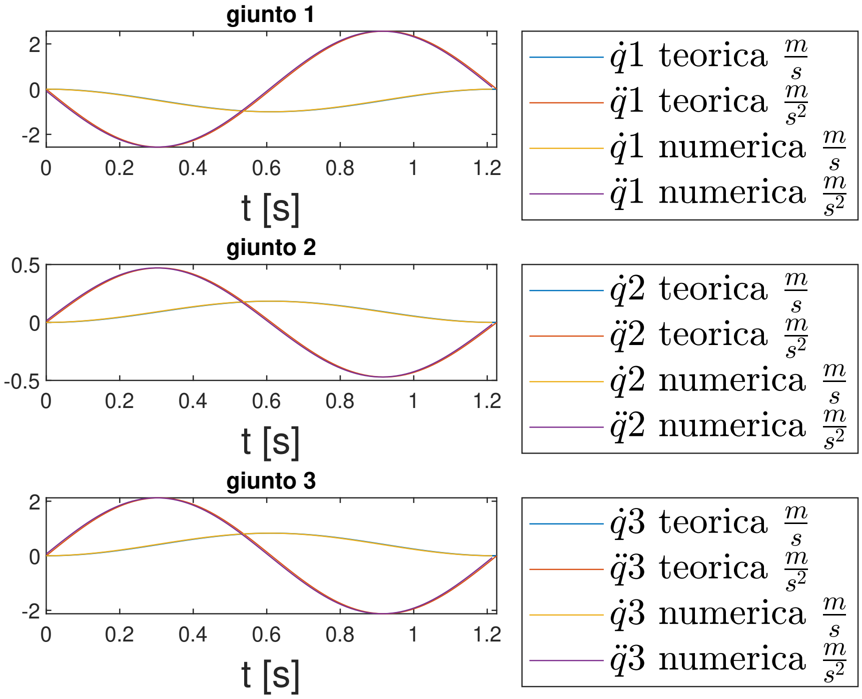


Figure 2.14: *Rappresentazione variabili di giunto Task 5*

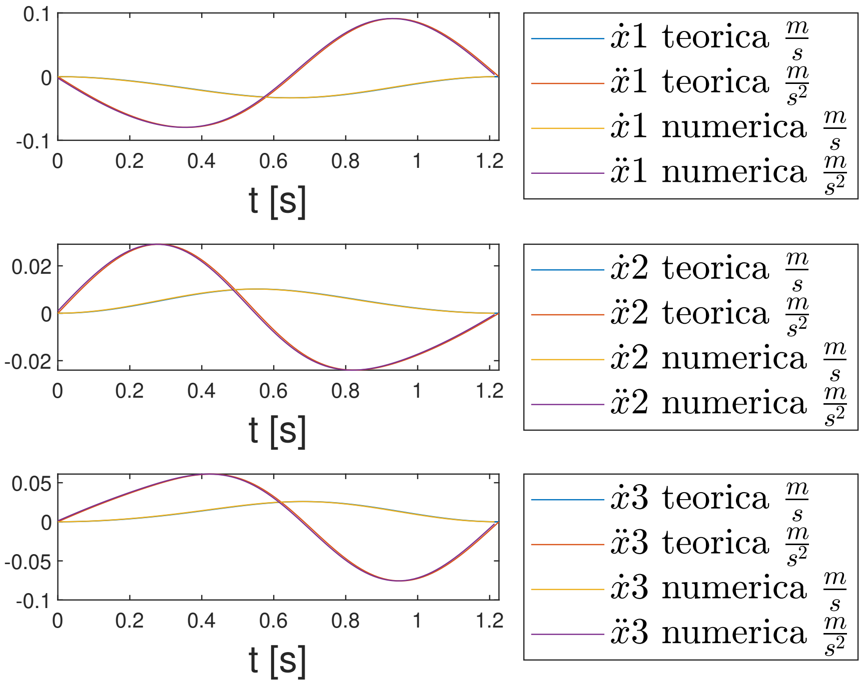


Figure 2.15: *Rappresentazione coordinate dell'end-effector Task 5*

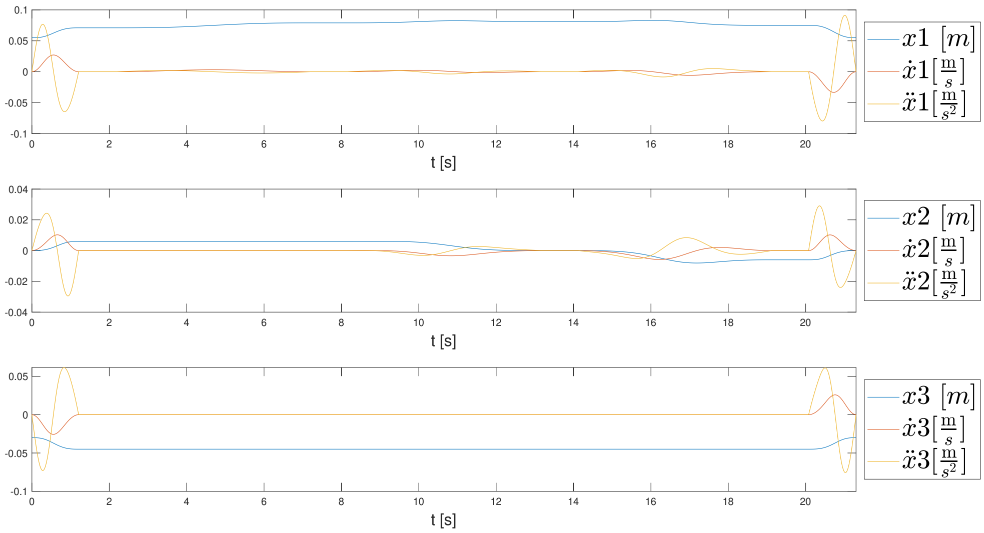


Figure 2.16: *Rappresentazione coordinate dell'end-effector*

Capitolo 3

Analisi Dinamica

Dati i valori di massa, posizioni dei baricentri, momenti d'inerzia baricentrali, forze e coppie esterne (nulle nel caso specifico, nonostante il codice scritto si presti anche a tenere conto di eventuali azioni esterne), si procede con la descrizione dell'analisi dinamica del manipolatore in esame.
L'analisi é di tipo inverso: a partire dalle azioni sul manipolatore, si vuole calcolare le forze e/o le coppie che gli attuatori devono esercitare, al fine di garantire la movimentazione imposta con l'analisi cinematica.

3.1 Studio

Il primo passaggio da svolgere consiste nella scrittura delle equazioni cinematiche estese, in cui non viene rappresentata solamente la posizione del end-effector, ma anche quella dei baricentri e gli angoli che sono responsabili delle coppie d'inerzia.

$$S_e = F_e(Q) \tag{3.1}$$

Dove le espressioni dei vettori delle m variabili di giunto e delle l coordinate estese nello spazio cartesiano sono:

$$Q = [\ q_1,\ q_2,\ q_j,\ ...,\ q_m\ ]^T$$
$$S_e = [\ s_1,\ s_2,\ s_i,\ ...,\ s_l\ ]^T$$

Le coordinate Se contengono anche le posizioni (x, y, z) dei baricentri dei link, necessarie per includere gli effetti inerziali di tipo traslazionale, e le variabili di giunto $q1$, $q2$ e $q3$, necessarie per tenere conto di effetti inerziali dovuti alla rotazione dei link attorno all'asse del rispettivo giunto.
Nel caso in esame, l'equazione delle coordinate estese risulta essere:

$$\begin{aligned} S_e =& [x_{grip},\ y_{grip},\ z_{grip},\ x_{G1u},\ y_{G1u},\ z_{G1u},\ x_{G1d},\ y_{G1d},\ z_{G1d}, \\ & x_{G2},\ y_{G2},\ z_{G2},\ x_{G3},\ y_{G3},\ z_{G3},\ x_{G4},\ y_{G4},\ z_{G4},\ q1,\ q2,\ q3]^T \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il calcolo delle velocitá e delle accelerazioni puó essere ripetuto utilizzando ancora le formule 2.11 e 2.13, avendo cura di far riferimento alle coordinate estese ($J \rightarrow J_e$, $S \rightarrow S_e$).

La matrice jacobiana estesa e la sua derivata temporale assumono le seguenti espressioni:

$$J_e = \begin{pmatrix}
-\frac{\mathrm{Sq_1}}{50} & -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Sq_2}\,\left(2.9\,\sin\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)+1.6\right)}{144.1} & \frac{\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Cq_3}}{50}-\frac{\mathrm{Sq_3}}{50}-\frac{\mathrm{Cq_3}}{50}-\frac{\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Sq_3}}{50} \\
0 & \frac{\mathrm{Cq_2}\,\left(2.9\,\sin\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)+1.6\right)}{72.1} & \frac{\mathrm{Sq_2}\,\cos\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)}{25} \\
-\frac{\mathrm{Cq_1}}{50} & \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Sq_2}\,\left(2.9\,\sin\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)+1.6\right)}{14.4} & \frac{\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Sq_3}}{50}-\frac{\mathrm{Sq_3}}{50}-\frac{\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Cq_3}}{50}-\frac{\mathrm{Cq_3}}{50} \\
-\frac{\mathrm{Sq_1}}{100} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{Cq_1}}{100} & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{Sq_1}}{100} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{Cq_1}}{100} & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{Sq_1}}{50} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{Cq_1}}{50} & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{Sq_1}}{50} & \frac{2.1\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq_2}}{1250}-\frac{76.4\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sq_2}}{2305.8} & 0 \\
0 & \frac{7.6\,\mathrm{Cq_2}}{1152.9}+\frac{2.1\,\mathrm{Sq_2}}{625} & 0 \\
-\frac{\mathrm{Cq_1}}{50} & \frac{7.6\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sq_2}}{2305.8}-\frac{2.1\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq_2}}{1250} & 0 \\
-\frac{\mathrm{Sq_1}}{50} & \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Cq_2}}{12500}-\frac{1.7\,\mathrm{Sq_2}\,\mathrm{Sq_3}}{200}-\frac{6.5\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sq_2}}{576.5}-\frac{1.7\,\mathrm{Cq_3}\,\mathrm{Sq_2}}{200} & \frac{1.7\,\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Cq_3}}{200}-\frac{1.7\,\mathrm{Sq_3}}{200}-\frac{1.7\,\mathrm{Cq_3}}{200}-\frac{1.7\,\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Sq_3}}{200} \\
0 & \frac{6.5\,\mathrm{Cq_2}}{288.2}+\frac{\mathrm{Sq_2}}{6250}+\frac{1.7\,\mathrm{Cq_2}\,\sin\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)}{100} & \frac{1.7\,\mathrm{Sq_2}\,\cos\left(q_3+\frac{\pi}{4}\right)}{100} \\
-\frac{\mathrm{Cq_1}}{50} & \frac{1.7\,\mathrm{Sq_2}\,\mathrm{Sq_3}}{200}-\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Cq_2}}{12500}+\frac{6.5\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sq_2}}{576.5}+\frac{1.7\,\mathrm{Cq_3}\,\mathrm{Sq_2}}{200} & \frac{1.7\,\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Sq_3}}{200}-\frac{1.7\,\mathrm{Sq_3}}{200}-\frac{1.7\,\mathrm{Cq_2}\,\mathrm{Cq_3}}{200}-\frac{1.7\,\mathrm{Cq_3}}{200} \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\dot{J}_e = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\dot{\mathrm{q}}_1}{50} & \dot{J}_{e1,2} & J_{e1,3} \\ 0 & \dot{J}_{e2,2} & \dot{J}_{e2,3} \\ \frac{\dot{\mathrm{q}}_1\,\mathrm{Sq}_1}{50} & \dot{J}_{e3,2} & \dot{J}_{e3,3} \\ -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\dot{\mathrm{q}}_1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\mathrm{q}}_1\,\mathrm{Sq}_1}{100} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\dot{\mathrm{q}}_1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\mathrm{q}}_1\,\mathrm{Sq}_1}{100} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\dot{\mathrm{q}}_1}{50} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\mathrm{q}}_1\,\mathrm{Sq}_1}{50} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\dot{\mathrm{q}}_1}{50} & -\frac{3.8\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2}{1152.9} - \frac{21\,\sqrt{2}\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_2}{12500} & 0 \\ 0 & \frac{2.1\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2}{625} - \frac{7.6\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_2}{1152.9} & 0 \\ \frac{\dot{\mathrm{q}}_1\,\mathrm{Sq}_1}{50} & \frac{3.8\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2}{1152.9} + \frac{2.1\,\sqrt{2}\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_2}{1250} & 0 \\ -\frac{\mathrm{Cq}_1\,\dot{\mathrm{q}}_1}{50} & \dot{J}_{e16,2} & \dot{J}_{e16,3} \\ 0 & \dot{J}_{e17,2} & \dot{J}_{e17,3} \\ \frac{\dot{\mathrm{q}}_1\,\mathrm{Sq}_1}{50} & \dot{J}_{e18,2} & \dot{J}_{e18,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Dove:

$$\begin{aligned}
\dot{J}_{e1,2} =& \frac{\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_2}{50} - \frac{4.1\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2}{360.3} - \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_2}{50} \\
\dot{J}_{e1,3} =& \frac{\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_2}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_3}{50} + \frac{\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} \\
\dot{J}_{e2,2} =& \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_3\,\cos\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{25} - \frac{\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_2\,\left(2.9\,\sin\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right) + 1.6\right)}{72.1} \\
\dot{J}_{e2,3} =& \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\cos\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{25} - \frac{\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\sin\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{25} \\
\dot{J}_{e3,2} =& \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_2}{50} + \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50} + \frac{\mathrm{Cq}_3\,\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_2}{50} + \frac{4.1\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{\mathrm{q}}_2}{360.3} - \frac{\dot{\mathrm{q}}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50}
\end{aligned}$$

$$\dot{j}_{e3,3} = \frac{\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3}{50} + \frac{\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3}{50} + \frac{\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2}{50} + \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_3}{50} - \frac{\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{50}$$

$$\dot{j}_{e16,2} = \frac{2.5\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_2}{288.2} - \frac{4.1\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_2}{360.3} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_2}{288.2} - \frac{\sqrt{2}\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2}{12500}$$

$$\dot{j}_{e16,3} = \frac{2.5\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} + \frac{2.5\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{288.2}$$

$$\dot{j}_{e17,2} = \frac{\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_2}{6250} - \frac{6.5\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2}{288.2} + \frac{1.7\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_3\,\cos\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{100} - \frac{1.7\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2\,\sin\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{100}$$

$$\dot{j}_{e17,3} = \frac{1.7\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_2\,\cos\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{100} - \frac{1.7\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\sin\left(Q_3 + \frac{\pi}{4}\right)}{100}$$

$$\dot{j}_{e18,2} = \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_2}{288.2} + \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} + \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_2}{288.2} + \frac{4.1\,\sqrt{2}\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_2}{360.3} - \frac{2.5\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} + \frac{\sqrt{2}\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2}{12500}$$

$$\dot{j}_{e18,3} = \frac{2.5\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3}{288.2} + \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_3}{288.2} + \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_3\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2}{288.2} + \frac{2.5\,\mathrm{Cq}_2\,\dot{q}_3\,\mathrm{Sq}_3}{288.2} - \frac{2.5\,\dot{q}_2\,\mathrm{Sq}_2\,\mathrm{Sq}_3}{288.2}$$

Infine per ottenere le forze F_q necessarie alla movimentazione del robot si ricavano dalla seguente formula:

$$F_q = J_e^T F_s \tag{3.5}$$

Dove F_s sono le forze sul robot nello spazio di lavoro e F_q sono le forze applicate dai motori per generare il movimento. Le forze nello spazio di lavoro si possono suddividere in due categorie: di inerzia F_{si} e esterne F_{se}.
Le forze d'inerzia vengono definite dall'approccio di Newton-Eulero nel modo seguente:

$$F_{si} = -M\ddot{S}_e \tag{3.6}$$

Dove M é la matrice diagonale delle masse definita di seguito:

$$M = diag\begin{pmatrix} m_{grip} & m_{g1u} & m_{g1d} & m_{g2} & m_{g3} & m_{g4} & J \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Dove le masse m_{gx} sono le masse dei baricentri sui tre assi principali, m_{grip} é la massa del gripper sulle tre direzioni principali che in questo caso é nulla mentre i momenti d'inerzia J sono defінti come segue:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{4.6}{4.7}, & \frac{3.2\left(\frac{1.8\,\cos\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right)}{100} + \frac{6.5}{28.8}\right)^2}{1000} - \frac{1.7\cos\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right)^2}{188894659.3} + \frac{3.9\sin\left(q_3 - \frac{\pi}{4}\right)^2}{15111572.7} + \frac{1.6}{1511157.3}, & \frac{4.0}{2361183.2} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Mentre $\ddot{S}_e$ é il vettore delle accelerazioni dei punti materiali nello spazio di lavoro e viene calcolato con la seguente formula rispetto alle variabili di giunto:

$$\ddot{S}_e = \dot{J}_e\dot{Q} + J_e\ddot{Q} \tag{3.9}$$

Quindi sostituendo le equazioni 3.6 e 3.9 nell'equazione 3.5 si ottiene la seguente equazione:

$$F_q = (J_e^T M J_e)\ddot{Q} + J_e^T M \dot{J}_e\dot{Q} - J_e^T F_{se} \tag{3.10}$$

3.2 Risultatati e Debug

Per eseguire la verifica delle coppie é stata calcolata la derivata dell'energia totale prima attraverso la derivazione della somma dell'energia cinetica e potenziale e successivamente attraverso la moltiplica delle coppie dei motori per la loro velocitá angolare.

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = \frac{\partial(E_k + E_p)}{\partial t} = F_q\dot{Q} \tag{3.11}$$

Dove $\frac{\partial E_t}{\partial t}$ é la derivata dell'energia totale, E_k é l'energia cinetica, E_p é l'energia potenziale,mentre F_q é il vettore delle forze e coppie generate dai motori e $\dot{Q}$ é il vettore delle velocitá di movimento dei motori.
Quindi si definiscono l'energia cinetica e potenziale nel seguente modo:

$$E_k = \frac{1}{2}\dot{S}_e^T M \dot{S}_e \tag{3.12}$$

$$E_p = F_g^T S_e \tag{3.13}$$

Dove F_g sono le forze peso definete nel seguente modo:

$$F_g = MG \tag{3.14}$$

Il vettore G rappresenta le accelerazioni di gravitá, ed é cosí definito:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Quindi utilizzando il metodo simbolico di Matlab e sostituendo le variabili con quelle specifiche del caso in esame abbiamo ottenuto la formula che ci ha permesso di calcolare la derivata dell'energia totale nel tempo in ogni istante di tempo durante la movimentazione. Successivamente viene presentato il grafico dell'energia cinetica calcolata nei due modi sopra descritti.

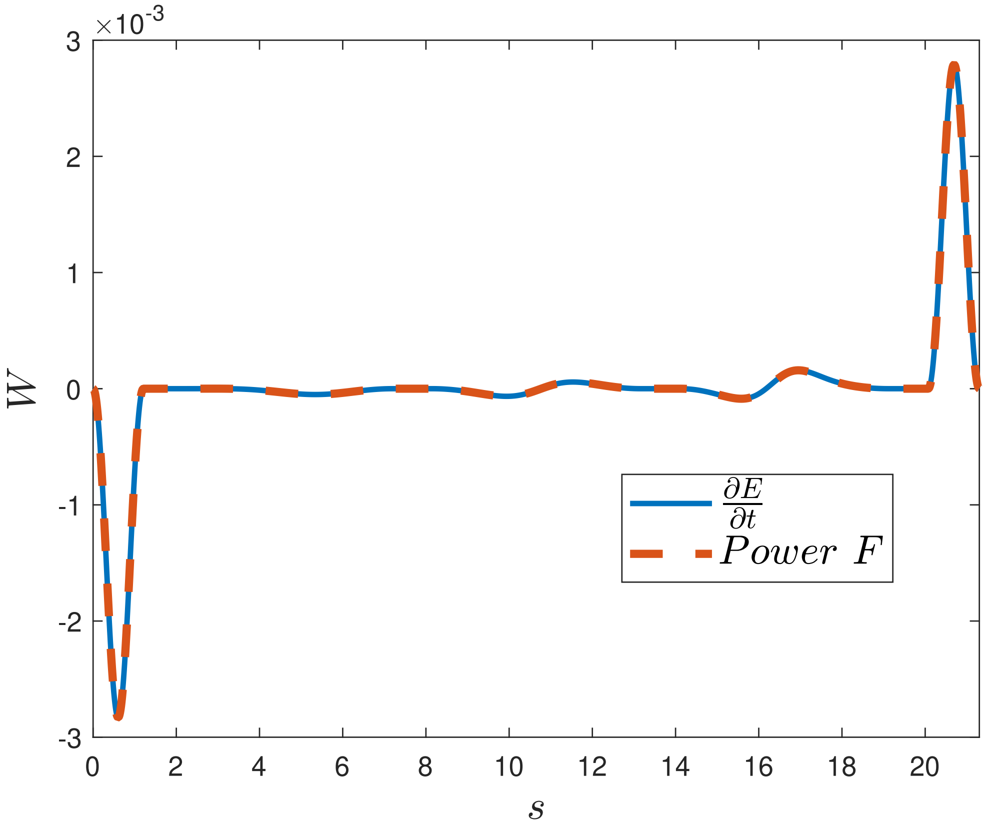


Figure 3.1: *Derivata dell'energia totale e potenza delle forze*

Capitolo 4

Modellazione in Simscape Multibody

In questo capitolo viene mostrato il modello realizzato in 3d e il metodo di importazione del modello in simscape con la successiva verifica.

4.1 Progettazione in SolidWorks

Completato lo studio della cinematica e dinamica in Matlab e ottenute le coppie e forze che gli attuatori devono esercitare per garantire l'esecuzione corretta della movimentazione lungo le traiettorie assegnate si è passati a uno studio del moto con un modello più realistico.
Per ottenere i dati di inerzia corretti per la realizzazione del progetto abbiamo realizzato una modellazione del nostro robot in ambiente SolidWorks, dove, una volta assegnate le terne di riferimento dei singoli link, composto l'assieme e dato le proprietà del materiale da utilizzare è stato possibile eseguire una valutazione automatica delle posizioni dei baricentri, delle masse e delle matrici di inezia.
L'utilizzo di questo approccio ha permesso di non adottare delle semplificazioni per quanto riguarda i link numero 2 e 3 data la loro complessa geometria non assimilabile a un cilindro o parallelepipedo.
Un render del modello realizzato in Solidworks è mostrato in figura 4.1.

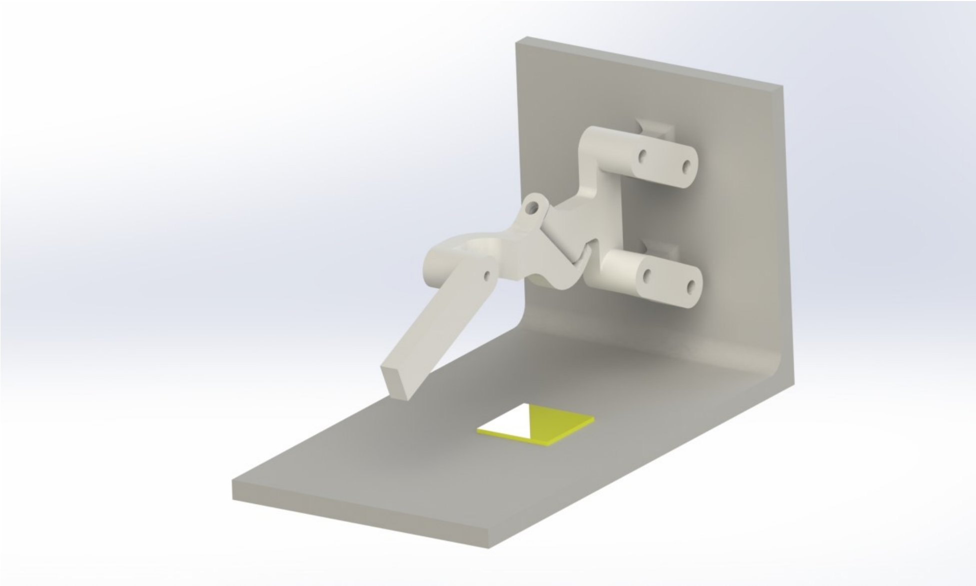


Figure 4.1: *Render Solidwork del modello del robot TR4*

4.2 Importazione in simscape

Grazie all'utilizzo di Solidworks è stato possibile importare automaticamente in ambiente simscape il modello del robot, in quanto attraverso l'utilizzo del disegno CAD è possibile salvare i singoli file in formato STEP che possono essere facilmente importati in file solid di simscape. Successivamente i vari blocchi sono stati collegati tra di loro dai blocchi di giunto che permetto l'accoppiamento tra i vari link e la loro movimentazione lo schema di collegamento è rappresentato nella seguente figura 4.2.

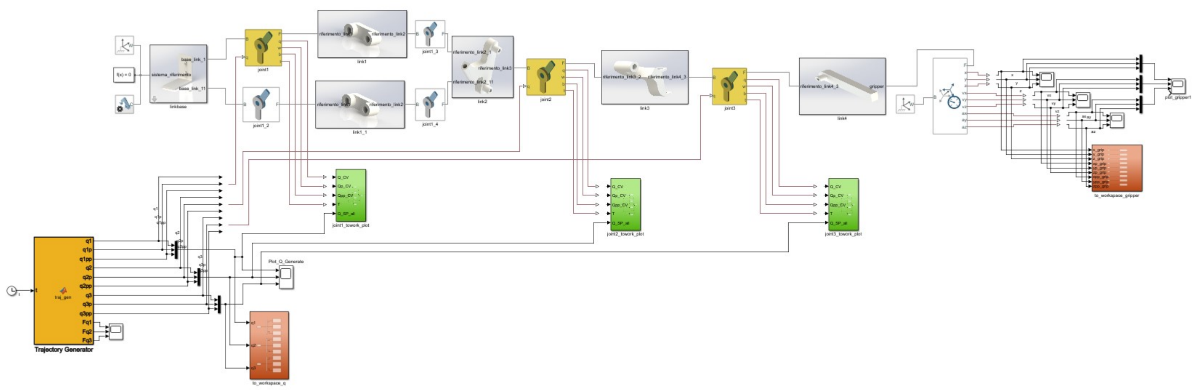


Figure 4.2: *Schema base del collegamento del robot TR4 in simscape*

Nello schema di figura 4.2:

- in bianco: sono visualizzati i giunti non attuati dal controllore e che compongono il quadrilatero articolato.
- in giallo: sono visualizzati i giunti attuati dal controllore.
- in arancio: blocco per la'ttuazione dei giunti spiegato nel paragrafo 4.3.
- in rosso: sono dei subsistem utilizzati per salvare nel workspace di Matlab il valore delle variabili di interesse.
- in verde: sono dei subsistem realizzati per la visualizzazione della posizione, velocitá e accelerazione dei singoli giunti.
- in bianco/grigio: sono dei subsistem realizzati per interfacciarsi tra i giunti e i file solid contenenti i link.

4.3 Attuazione dei Giunti

Oltre allo schema a blocchi del manipolatore é stato necessario definire una funzione che fornisca il riferimento di posizione, velocitá ed accelerazione ai singoli assi.
Dai valori teorici calcolati in Matlab e ottenuti dall'algoritmo di percorrenza della traiettoria, di volta in volta diversi a seconda dei vari task, questo blocco interpolatore si occupa semplicemente di infittire il campionamento dei dati stessi, in modo da renderlo compatibile con gli intervalli del tempo di simulazione e garantire cosí una simulazione della movimentazione fluida.
Per l'esecuzione della simulazione é stato scelto un variable-step e il solutore ode15s, che consente di ottenere grafici lisci, privi di oscillazioni e picchi di natura puramente numerica.

Capitolo 5

Sistema di Controllo

5.1 Controllore

Dopo un primo test di verifica di movimentazione del modello in Simscape si é passati all'elaborazione di un'architettura di controllo dei giunti.
Nonostante la scelta di un controllo di tipo centralizzato permetta in alcuni casi di migliorare le prestazioni grazie al fatto che riesce a tener conto di eventuali mutue influenze tra i vari giunti, nel caso in esame si é optato per un controllo di tipo decentralizzato, azionando ciascun giunto in maniera singola.
In figura 5.1 é mostrato lo schema generale dello schema di controllo mentre nelle figure 5.2, 5.3 é illustrato lo schema del controllore utilizzato e le porte di input e output.
Per realizzare i controllori si é implementato uno schema a cascata, tarando il loop interno in maniera piú aggressiva per permettere il controllo di velocitá e la reiezione di eventuali disturbi e gestendo il raggiungimento del set point dato mediante il loop esterno che viene mostrato nel paragrafo successivo 5.2. Inoltre per smorzare le vibrazioni immesse nel sistema dal riferimento in posizione composto da scalini si é deciso di utilizzare dei PID con filtro sull'uscita e in ingresso al PID dell'anello esterno dei controllori l'errore é stato normalizzato tra 0 e 1 per avere una taratura piú agevole. Infine é stata implementata un'azione di FeedForward per andare a compensare la coppia dovuta alla forza peso dei

link, dal momento che, come mostrato in figura 5.4, é la pcoppia predominante, rendendo cosí piú agevole il lavoro dei controllori.

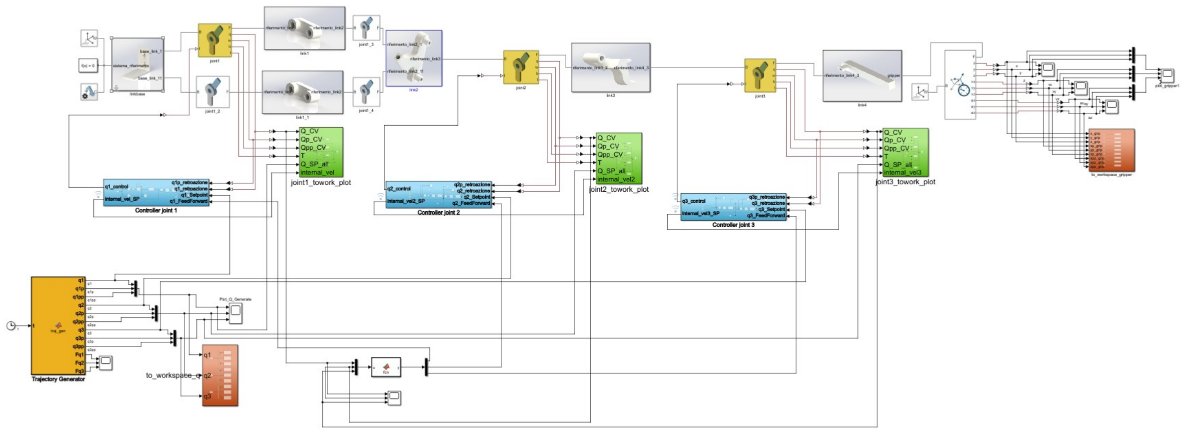


Figure 5.1: *Schema robot TR4 in simscape con aggiunta dei controllori in azzurro.*

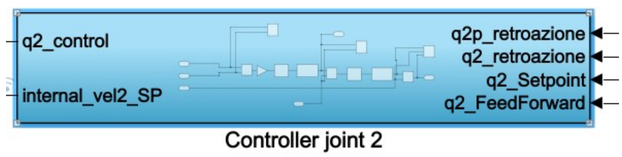


Figure 5.2: *Porte di input e output del controllore.*

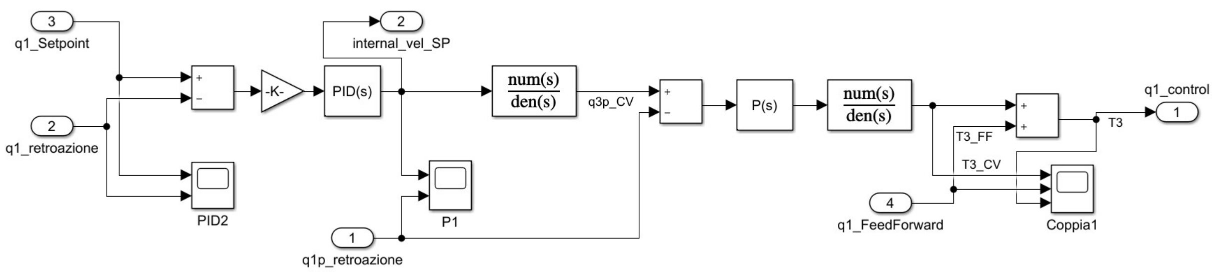


Figure 5.3: *Schema del controllore utilizzato.*

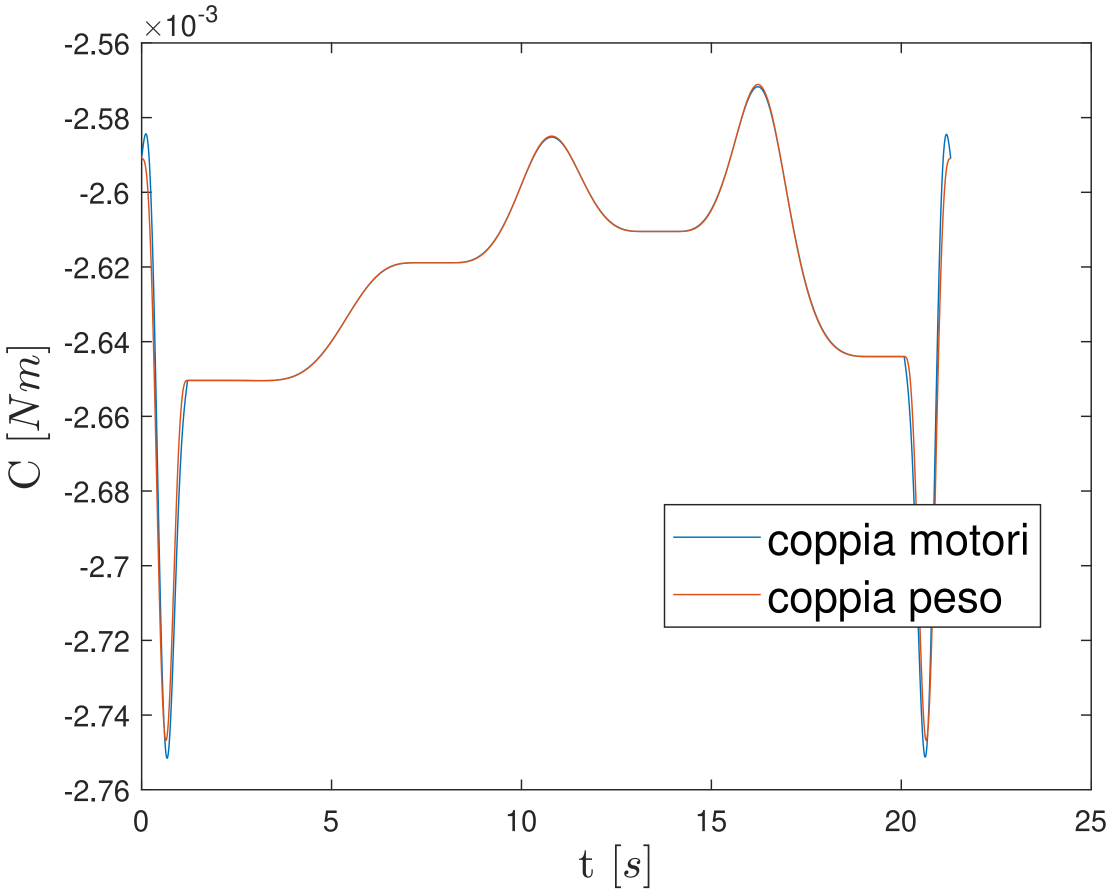


Figure 5.4: *Confronto fra la coppia totale del motore del giunto 1 e quella dovuta alla forza peso.*

5.2 Tuning del Controllore

La procedura di tuning si é basata su un metodologia try-and-error considerando il significato fisico e le rispettive conseguenze delle azioni del PID, ovvero:

- **P**, azione proporzionale all'errore che permette di avere una risposta piú veloce, ma non permette di azzerare completamente l'errore.
- **I** azione integrale proporzionale all'integrale temporale dell'errore che permetta innanzitutto di avere un errore a regime nullo e in secondo luogo aumenta la velocitá di risposta.
- **D** azione proporzionale alla derivata temporale dell'errore che permette di man-

tenere delle prestazioni elevate conservando comunque il sistema stabile, quindi, proporzionale all'andamento dell'errore.

- $\boldsymbol{K_e}$ é un coefficiente che normalizza l'errore tra 0 e 1, noi abbiamo considerato che l'errore sia 1 quando vi é un errore assoluto di 5 $mrad$ che corrispondono a 0.28 deg dal momento che i controllori devono compensare solo incertezze di modello.
- $\boldsymbol{\tau_f}$ é la costante di tempo del filtro in uscita dai controllori, essa determina la banda passante del controllore come $BW = \frac{1}{\tau_f \; 2\pi}$ per smorzare i segnali ad alta frequenza, per avere segnali di controllo il meno rumorosi possibile.

parametri	PID1	P1	PID2	P2	PID3	P3
K_p	0.6	0.5	3	0.25	10	0.5
K_i	7	-	0.5	-	10	-
K_d	3	-	2.5	-	1	-
N	1	-	1	-	1	-
K_e	200	-	200	-	200	-
τ_f	0.02	0.02	0.1	0.1	0.04	0.04

Table 5.1: *Tabella controllori PID*

I risultati finali del tuning dei parametri sono riportati in tabella 5.1 e sono riferiti al controllore PID in forma ideale come riportato nell'equazione 5.1 con l'inserimento del filtro in uscita:

$$PID = K_p \left(1 + K_i \, \frac{1}{s} + K_d \, \frac{N}{1 + N \, \frac{1}{s}}\right) \frac{1}{\tau_f \; s + 1} \tag{5.1}$$

5.3 Risultatati

Ora vengono presentati i risultati raggiunti attraverso utilizzo dei controllori su tutta la movimentazione nelle figure dalla 5.5 alla 5.9.

Come si puó osservare dai grafici delle coppie in uscita dai controllori si nota il problema del riferimento discretizzato come somma di scalini, come giá precedentemente visto nella sezione 5.1.

Inoltre possiamo affermare che il tuning dei controllori per i task in esame é soddisfacente in quanto l'errore massimo é di $14.8 \cdot 10^-3$ rad che corrispondono a 0.848 deg nel terzo controllore. Questo errore si verifica durante il transitorio della movimentazione piú veloce, quindi non é un errore di posizionamento, comunque implica un discostamento dalla traiettoria di riferimento di 0.592 mm.

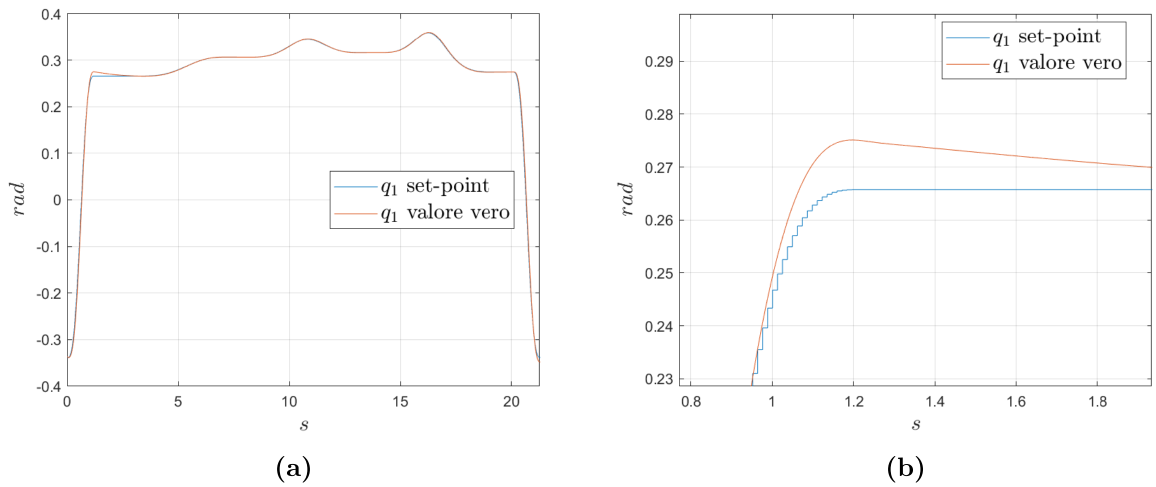


Figure 5.5: *a) Confronto tra il riferimento e la variabile di uscita del sistema dal controllore1 b) ingrandimento della sovraelongazione nel punto massimo in* $t = 1.2$

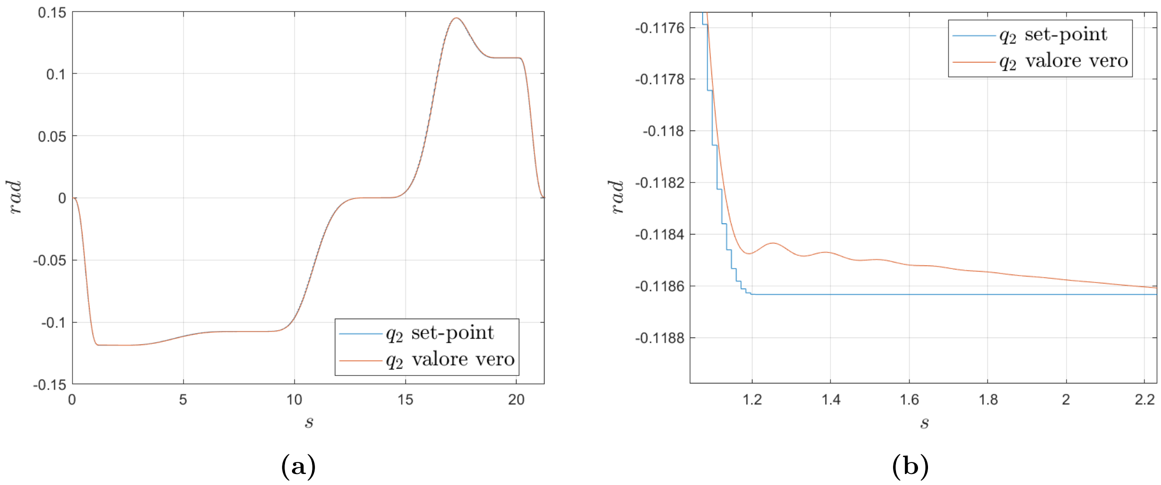
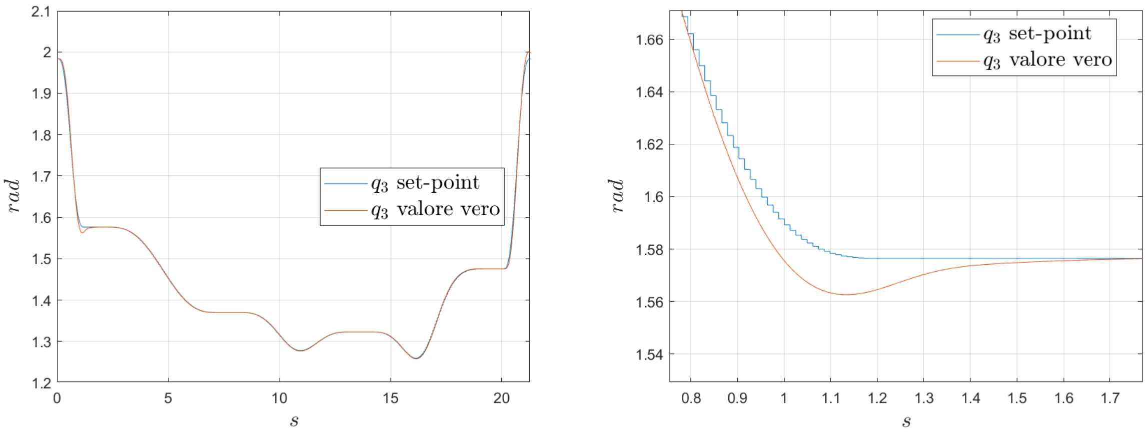
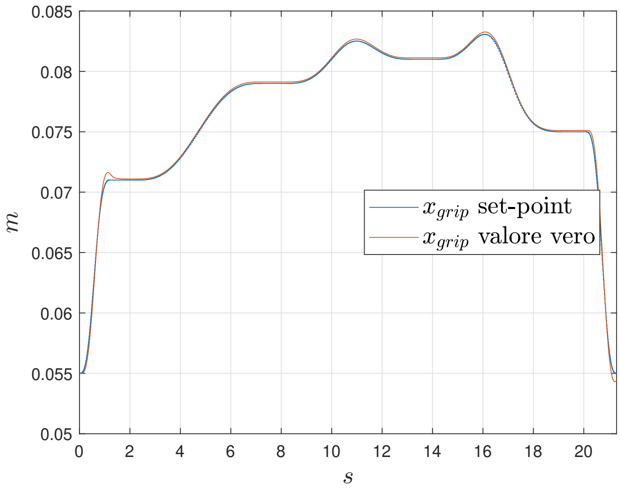


Figure 5.6: *a) Confronto tra il riferimento e la variabile di uscita del sistema dal controllore2 b)ingrandimento dell'assestamento della traiettoria per* $t = 1.2s$

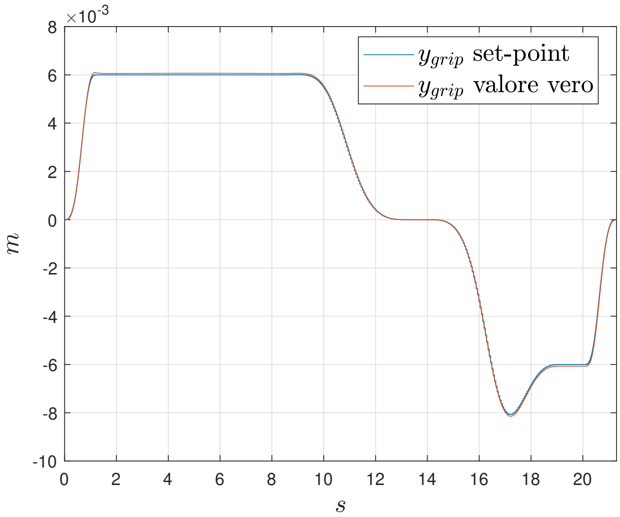


(a) **(b)**

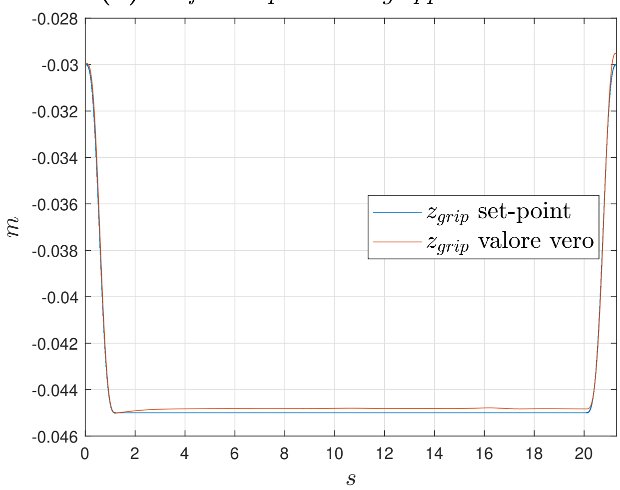
Figure 5.7: *a) Confronto tra il riferimento e la variabile di uscita del sistema dal controllore3 b) ingrandimento della sovraelongazione nel punto* $t = 1.2s$



(a) *confronto posizione gripper in X*

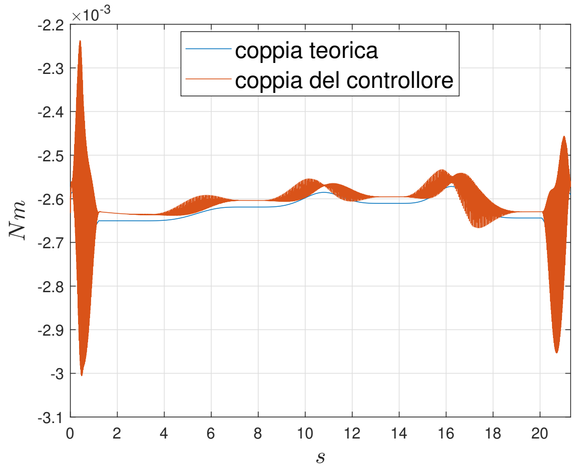


(b) *confronto posizione gripper in Y*

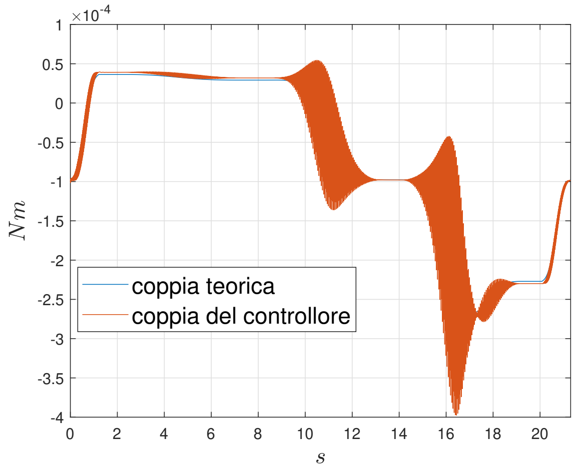


(c) *confronto posizione gripper in Z*

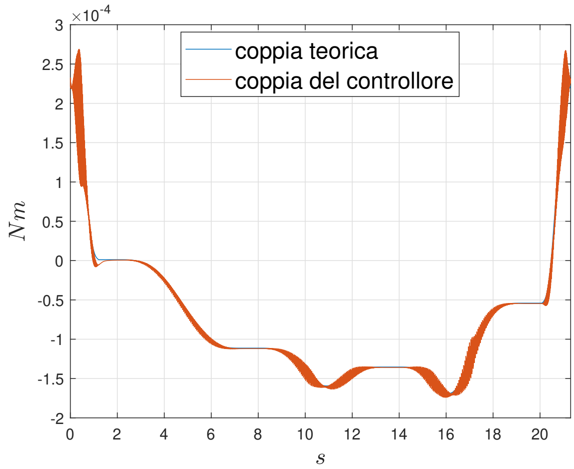
Figure 5.8: *Confronto fra le coordinate teoriche e quelle reali*



(a) *confronto coppia teorica e calcolata dal primo controllore*



(b) *confronto coppia teorica e calcolata dal secondo controllore*



(c) *confronto coppia teorica e calcolata dal terzo controllore*

Figure 5.9: *Confronto tra coppie Reali e Teoriche*

Capitolo 6

Conclusioni

In conclusione il codice sviluppato nel corso del progetto risulta flessibile a eventuali variazioni sui limiti degli attuatori o interazioni con azioni esterne: modificando tali parametri nel file di configurazione si ottengono automaticamente i risultati corrispondenti.
Come giá presentato nel corso nella sezione 2.3 il sistema previene eventuali problematiche di non fattibilitá della traiettoria in quanto si verifica che i punti della traiettoria assegnata ricadano all'interno del workspace.
Una possibile idea per lo sviluppo del progetto in futuro consiste nel realizzare un bilanciamento statico tramite masse o molle del primo link essendo che la coppia richiesta al motore presenta un regione di lavoro tra i $-2\ mNm$ e i $-4\ mNm$, quindi come affermato nella sezione 1.2 é necessario un motore da $4\ mNm$, mentre applicando questa strategia sarebbe sufficiente un motore da $2mNm$. Un ragionamento simile potrebbe essere previsto anche per l'ultimo link, ma per via del fatto che la forza peso dipende anche dal secondo giunto l'approccio risulta impraticabile.
All'interno dei controllori grazie all'inserimento di una azione di feedforward, che compensa la forza peso, é possibile rendere il sistema sotto controllo piú lineare, dal momento che essa introduce una componente fortemente non lineare. La taratura empirica attuata consente di seguire con precisione i riferimenti di traiettoria e velocitá, rispettando i limiti

fisici degli attuatori. Nel caso di movimentazioni piú complesse potrebbe essere opportuno valutare altre soluzioni piú spinte per la tarature dei controllori con differenti metodi di controllo che non sono state esplorate in quanto i risultati sono giá soddisfacenti, potrebbero prevedere l'impiego di set-point weight per smorzare i proportinal kick nella risposta e magari una taratura secondo regole di tuning rigorose (Ziegler-Nichols, CHR, Haalman, Kapa-Tau,...), che richiedono peró un'identificazione piú approfondita del sistema tempo-variante, potrebbe rivelarsi efficace per l'ottimizzazione della taratura dei controllori.