PMCNS formulario

Servente singolo, coda infinita

$E(S) = \frac{1}{\mu}$ — Tempo di servizio medio

$E(r) = \frac{1}{\lambda}$ — Tempo di interarrivo medio

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S]$ — Utilizzazione media

$E(T_s) = E(T_q) + E(S)$ — Tempo di risposta medio

$E(N_s) = E(N_q) + \rho$ — Popolazione media

$\chi = \begin{cases} \lambda & se\ \rho < 1 \\ \mu & se\ \rho \geq 1 \end{cases}$ — Throughput

Relative al servente

$E(N_q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}[1 + \frac{\sigma^2(s)}{E(S)^2}]$ — Khinchin-Pollaczek equation M/G/1

$E(N_q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$ $\quad E(T_q) = \frac{\rho E(S)}{2(1-\rho)}$ — KP per M/D/1

$E(N_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ $\quad E(T_q) = \frac{\rho E(S)}{1-\rho}$ — KP per M/M/1

$E(N_q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + \frac{1}{k})$ $\quad E(T_q) = \frac{\rho E(S)}{2(1-\rho)}(1 + \frac{1}{k})$ — KP per M/E$_k$/1

$E(N_q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho}(1 + g(p))$ $\quad E(T_q) = \frac{\rho E(S)}{2(1-\rho)}(1 + g(p))$ — KP per M/H$_2$/1

$$g(p) = \frac{1}{2p(1-p} - 1$$

$E(S_{rem}) = \frac{\lambda}{2}E(S^2)$ — Tempo di servizio rimanente

$E(S_{rem}) = \rho E(S)$ — Tempo di servizio rimanente per distribuzione esponenziale

$E(T_q) = \frac{E(S_{rem})}{1-\rho}$ — Tempo di attesa in coda

$$E(sd(x)) = \frac{E(T_s(x))}{x} = 1 + \frac{\frac{\lambda}{2}E(S^2)}{x(1-\rho)} = 1 + \frac{E[T_{qH}]}{X}$$

Slowdown medio per un job di taglia x

in caso di processor sharing

$E[sd(x)] = 1/(1-\rho)$; $E[T_s/x] = x/\rho$

$E[T_s] = E[S]/(1-\rho)$

$$E(sd) = \int_x E(sd(x))$$ Slowdown totale

Processor sharing

$$E(N_s) = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad E(T_s) = \frac{E(S)}{1-\rho} \qquad E(sd(x)) = \frac{1}{1-\rho}$$

$$Pr\{N_s = n\} = \rho^n(1-\rho)$$ Probabilità di avere n job nel sistema

---

Multiserver

$$\rho = \rho_{globale} = \rho_i = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Leggi di Little

$$E(N_s) = \lambda E(T_s) \qquad \int_0^\tau l(t)dt = \sum_{i=0}^{n} w_i \rightarrow \bar{l} = \frac{n}{\tau}\bar{w}$$

$$E(N_q) = \lambda E(T_q) \qquad \int_0^\tau q(t)dt = \sum_{i=0}^{n} d_i \rightarrow \bar{q} = \frac{n}{\tau}\bar{d}$$

$$\rho = \lambda E(S) \qquad \int_0^\tau x(t)dt = \sum_{i=0}^{n} s_i \rightarrow \bar{x} = \frac{n}{\tau}\bar{s}$$

Statistiche

$$\bar{r} = \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$ Tempo di interarrivo medio

$$\bar{s} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i$$ Tempo di servizio medio

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$$ Tempo medio di attesa

$$\bar{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i = \bar{d} + \bar{s}$$ Tempo medio di risposta

$$\bar{l} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau l(t)dt$$ Popolazione totale nel servizio

$\bar{q} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} q(t)dt$ Popolazione totale in coda

$\bar{x} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)dt$ Utilizzazione media

---

Generatore di Lehmer

$x_i = g(x_{i-1}) = a x_{i-1} mod\ m$ Dove a è un intero fissato e m il modulo primo

$g(x) = \gamma(x) + m\delta(x) \quad \begin{cases} \gamma(x) = a(x\ mod\ q) - r\lfloor x/q \rfloor \\ \delta(x) = \lfloor x/q \rfloor - \lfloor ax/q \rfloor \end{cases}$ Dove r è il resto e q il quoziente di m/a

---

Server singolo con feedback

$\lambda' = \lambda + \beta\bar{x}\nu$ Arrivi, ν è il tasso di servizio, diverso dal tasso di uscita
$\mu = \bar{x}(1-\beta)\nu$ Tasso di uscita
$\lambda = \bar{x}(1-\beta)\nu$ Bilanciamento
$\rho = \frac{\lambda'}{\nu} = \frac{\lambda}{(1-\beta)\nu}$ Utilizzazione

---

Distribuzioni

Pareto $f(x) = \alpha k^{\alpha} x^{-\alpha-1} \quad k \leq x \leq \infty,\ 0 \leq \alpha \leq 2$

$$E(x) = \frac{\alpha k}{\alpha - 1} \qquad \sigma^2(x) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Bounded Pareto $f(x) = \alpha x^{-\alpha-1}\frac{k^{\alpha}}{1-(\frac{k}{p})^{\alpha}} \quad k \leq \alpha \leq p,\ 0 < \alpha < 2$

Troncamento di distribuzione

$$Pr(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-1) \Rrightarrow f_t(x) = \frac{F(x) - F(a-1)}{F(b) - F(a-1)}$$

Erlang-C: M/M/m abstract scheduling

$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{n!}(m\rho)^n p(0)\ per\ n = 1 \ldots m \\ \frac{m^m}{m!}\rho^n p(0) \quad per\ n > m \end{cases}$ Probabilità di n elementi nel servizio

$p(0) = (\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)})^{-1}$ Probabilità sistema vuoto

$$Pq = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} p(0)$$
Probabilità che ci sia coda

$$E(Nq) = Pq \frac{\rho}{1-\rho}$$
Numero di job in coda

$$E(Tq) = \frac{PqE(S)}{1-\rho}$$
Tempo di attesa in coda

$$E(S) = \frac{E(S_i)}{m} = \frac{1}{m\mu}$$
Tempo di servizio medio

$$E(c) = \sum_{n=0}^{m-1} np(n) + \sum_{n=m}^{\infty} mp(n) = m\rho$$
Numero medio di server occupati

$$\rho = P_q + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{n}{m} p(n)$$
Utilizzazione

Servente singolo, coda finita

$$\pi_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i \Pi_0$$
Probabilità di i job nel sistema

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} (\frac{\lambda}{\mu})^i}$$
Probabilità sistema vuoto, c è la capienza massima

$$p_{loss} = \pi_c = (\frac{\lambda}{\mu})^c \pi_0$$
Probabilità che un job venga perso

$$\lambda' = \lambda(1 - p_{loss})$$
Arrivi effettivi

Erlang B:M/M/m/m, multiserver senza coda

$$\pi_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i \frac{1}{i!} \pi_0$$
Probabilità di i job nel sistema

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} (\frac{\lambda}{\mu})^i \frac{1}{i!}}$$
Probabilità che il sistema sia vuoto

$$p_{loss} = \pi_m = (\frac{\lambda}{\mu})^m \frac{1}{m!} \pi_0$$
Probabilità di perdita

$E(T_{S_k}) = E(T_{Q_k}) + E(S)$

$E(T_{S_k}) \le E(T_{S_{k+1}})$

Vale Little per gli indici locali (quelli con k)

$E(T_S) = E(T_Q) + E(S)$

Priorità astratta

$$E(S_k) = E(S) = \frac{1}{\mu} \qquad \sigma^2(S_k) = \sigma^2(S) \qquad \rho_k = \lambda_k E(S) = p_k \lambda E(S) = p_k \rho$$

SENZA PRELAZIONE

$$E(T_{q_k}) = \frac{\frac{\lambda}{2}E(S^2)}{(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i)}$$ Attesa in coda per la classe k senza prelazione

$$p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda} \left[\rightarrow \lambda_k = p_k \lambda\right]$$ Probabilità di avere un job di classe k

$$E(T_q) = E(E(T_{q_k})) = \sum_{k=1}^{r} p_k E(T_{q_k})$$ Attesa in coda media del sistema senza prelazione

$$E(S_{rem_k}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i E(S^2)$$ Tempo di servizio rimanente per un job di classe k

CON PRELAZIONE

$$E(T_{q_k}) = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i E(S^2)}{(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i)}$$ Attesa in coda per la classe k con prelazione

$$E(S_{virt_k}) = \frac{E(S)}{1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i}$$ Tempo di servizio virtuale

$$E(T_q) = p_1\frac{P_{q_1}E(S)}{1-\rho_1} + p_2\frac{P_qE(S)}{(1-\rho)(1-\rho_1)}$$ Tempo di attesa per servente multiplo con due code

$$P_{q_1} = \frac{(m\rho_1)^2}{m!(1-\rho_1)}p(0)$$ Probabilità che in ogni servente ci sia un job di classe 1

$$p(0) = \left[\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}\right]^{-1}$$

Size based-priority

$$E(S_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} t f^n(t)dt \,;\, E(S_k) = \frac{1}{p_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} t f(t) dt$$ Tempo di servizio per la classe k

$$f^n(t) = \frac{f(t)}{F(x_k)-F(x_{k-1})}$$ Densità normalizzata

$$\rho_k = \lambda\int_{x_{k-1}}^{x_k} t f(t)dt$$ Utilizzazione per la classe k

$$E(T_{q_k}) = \frac{\frac{\lambda}{2}E(S^2)}{(1-\lambda\int_0^{x_k} tf(t)dt)(1-\lambda\int_0^{x_{k-1}} tf(t)dt)}$$ Tempo di attesa in coda per la classe k

senza prelazione

$$E(T_q) = \frac{\lambda}{2} E(S^2) \int_0^\infty \frac{dF(x)}{1 - \lambda \int_0^x tf(t)dt)^2}$$

Shortest job first, tempo di attesa

$$E(T_{q_k}) = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^{x_k} t^2 dF(t) + \frac{\lambda}{2} x_k^2 (1 - F(x_k))}{(1 - \sum_{i=0}^{k} \rho_i)(1 - \sum_{i=0}^{k-1} \rho_i)}$$

Tempo di attesa in coda per la classe k

con prelazione

$$E(T_q) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \frac{\int_0^x t^2 dF(t) + (1 - F(x))x^2}{(1 - \lambda \int_0^x tf(t)dt)^2} dF(x)$$

Shortest remaining process time

$$E(T_q(x)) = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^x t^2 f(t)dt + \frac{\lambda}{2} x^2 (1 - F(x))}{(1 - \rho_x)^2}$$

SRPT attesa per job con taglia x

$$E(T_s(x)) = E(T_q(x)) + \int_0^x \frac{dt}{1 - p_t}$$

SRPT tempo di risposta per job con taglia x

Distribuzioni

Esponenziale: (v.a X parametro λ)

- Densità: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$;
- Funzione di Ripartizione: $F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $P(X > x) = e^{-\lambda x}$
- Valore Atteso: $E(X) = 1/\lambda$
- Varianza: $\sigma^2(X) = 1/\lambda^2$
- $E(X^2) = \sigma^2(X) + E^2(X) = 1/\lambda^2 + 1/\lambda^2 = 2/\lambda^2$

Uniforme: (v.a. X su [a,b])

- Densità: $f(x) = 1/(b-a)$
- Funzione di Ripartizione: $F(x) = (x-a)/(b-a)$
- Valore atteso: $(a+b)/2$
- Varianza: $\sigma^2(x) = (b-a)^2/12$
- $E(X^2) = \sigma^2(X) + E(x)^2$

Reti di Code- equazioni operazionali

Bilanciamento del flusso: $X_j = \sum_{i=0}^{K} X_i p_{ij}$

Visit Ratio Equations

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_j = p_{0j} + \sum_{i=0}^{K} V_i p_{ij} \end{cases}$$

Legge dell'utilizzazione: $U_i = X_i S_i$

Little: $\bar{n}_i = X_i R_i$

Legge del flusso di output: $X_0 = \sum_{i=0}^{K} X_i p_{i0}$

Legge generale del tempo di risposta: $R = \sum_{i=1}^{K} V_i R_i$

Tempo di Risposta Interattivo: $R = \frac{M}{X_0} - Z$

Rete Aperta $V_i = \lambda_i / \lambda$

Legge del flusso forzato: $X_i = V_i X_0$

Tempo di residenza (tempo totale che viene speso su un componente, contando tutte le visite)

$D_i = V_i S_i$

MVA

$E(n_i(0)) = \emptyset$

$$v_{j/i} = \frac{x_j}{x_i} \quad \left[v_{a/b} = \frac{x_a}{x_b} \right]$$

$$E(t_i(n)) = \begin{cases} E(S_i) & \text{delay center} \\ E(S_i)[1 + E(n_i(n-1))] & \text{queuing center} \end{cases}$$

$$\lambda_i(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{M} v_{j/i} E[t_j(n)]} \quad ; \quad E(n_i(n)) = \lambda_i(n) E(t_i(n))$$

costante se $N \simeq \sum_{i=1}^{M} E\, n_i(n)$, devono essere n job.

$E(t_{r/i}(N=m)) = \sum v_{j/i} E(t_j(m))$

$E(t_{r/1}(N=m)) = \sum v_{j/i} E(t_j(m))$

$$\lambda_i(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{M} v_{j/i} E(t_j(n))}$$

$E(n_i(n)) = \lambda_i(n) E(t_i(n))$

↳ popolazione media in coda i-esima quando ci sono n job nel sistema.