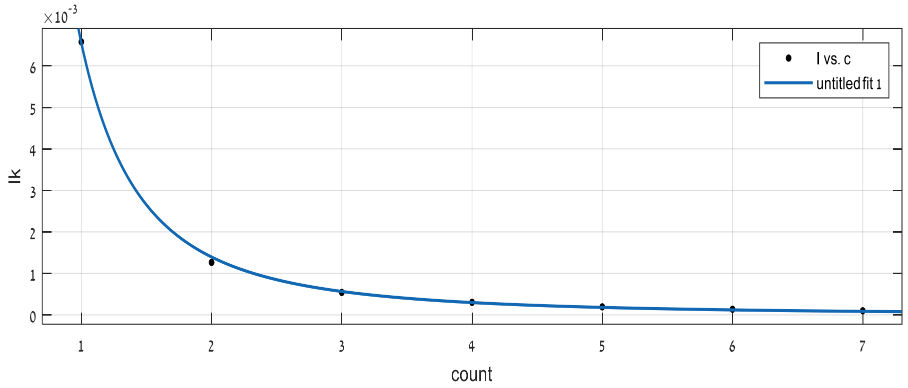
תרגיל נומרי

תשובות סופיות

1.א.

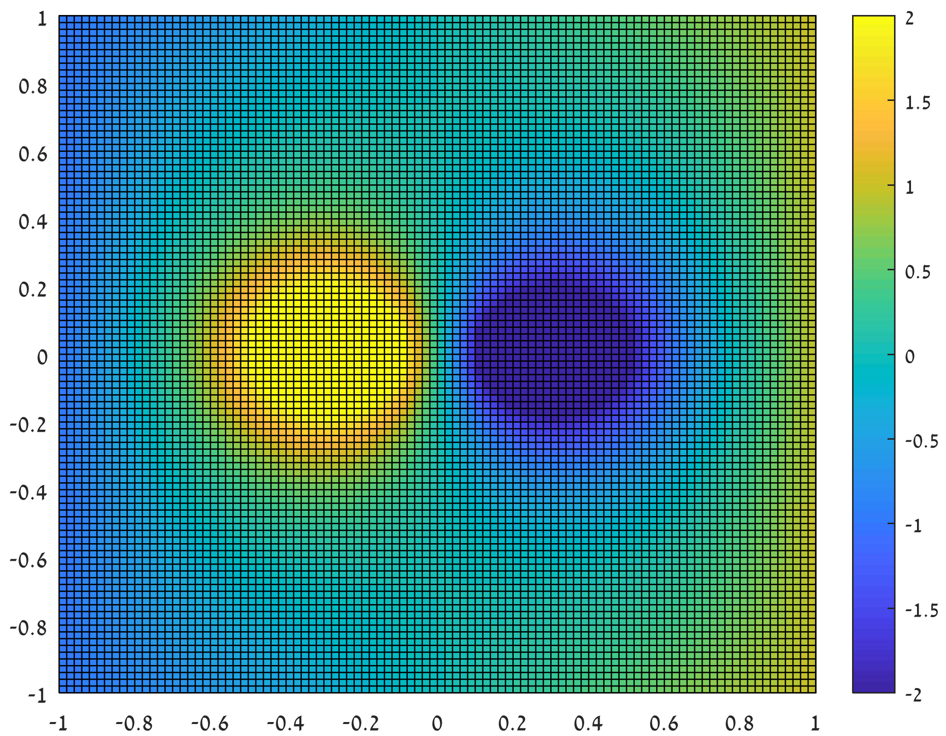
זהו גרף ההתכנסות לפי מספר האיטרציות:



ניתן לראות שמ7 איטרציות ($epsilon=10^{-4}$) ומעלה, הגרף שואף להתכנסות מסוימת ולא משתנה משמעותית כאשר הepsilon קטן.

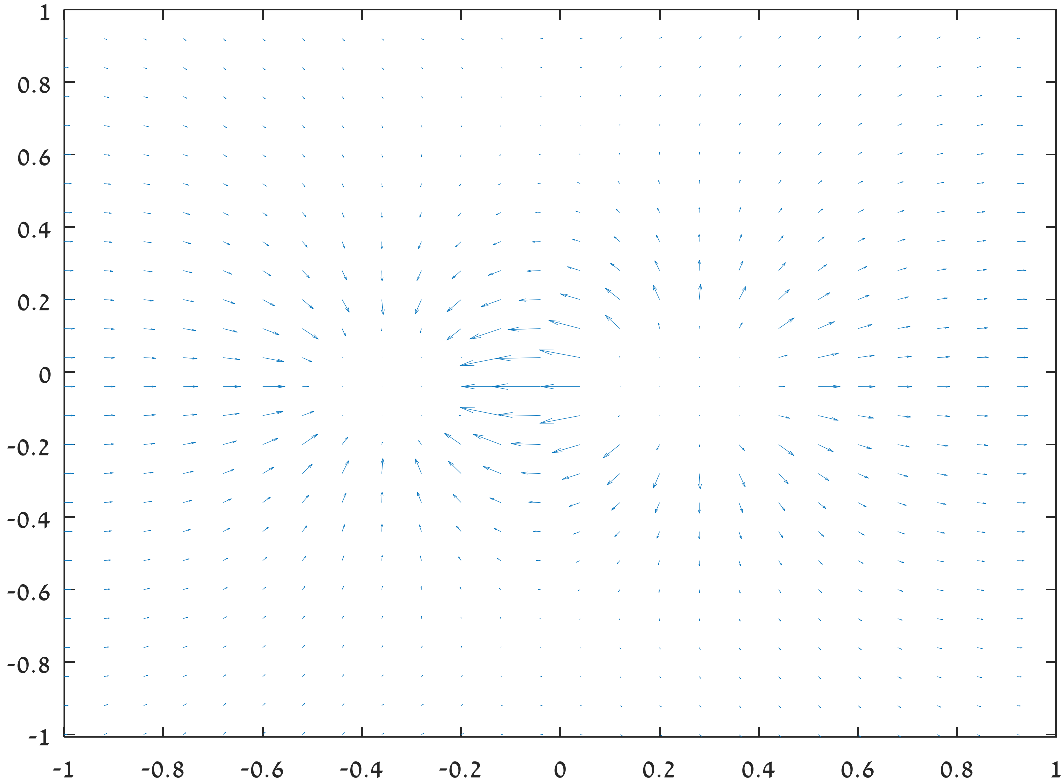
בדיקת ההתכנסות ברזולוציה מוצגת בפונקציה בנספחים. הרזולוציה האידאלית יצאה n=50, כלומר מטריצת הפוטנציאל בגודל 101x101.

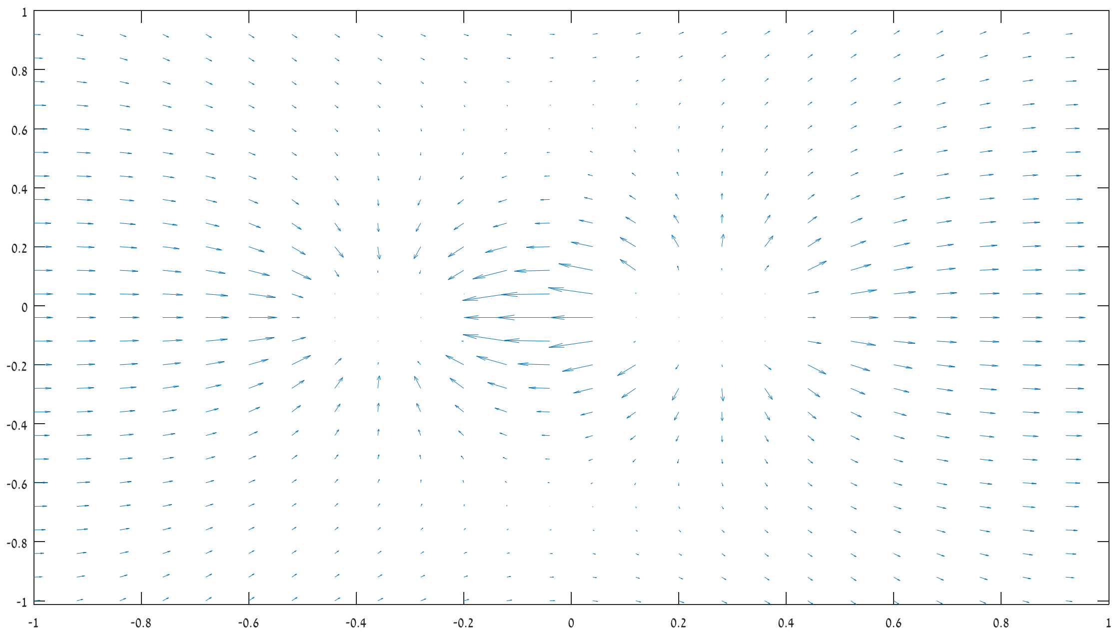
נשרטט את הפוטנציאל לפי הרזולוציה ומספר האיטרציות האידאליים:



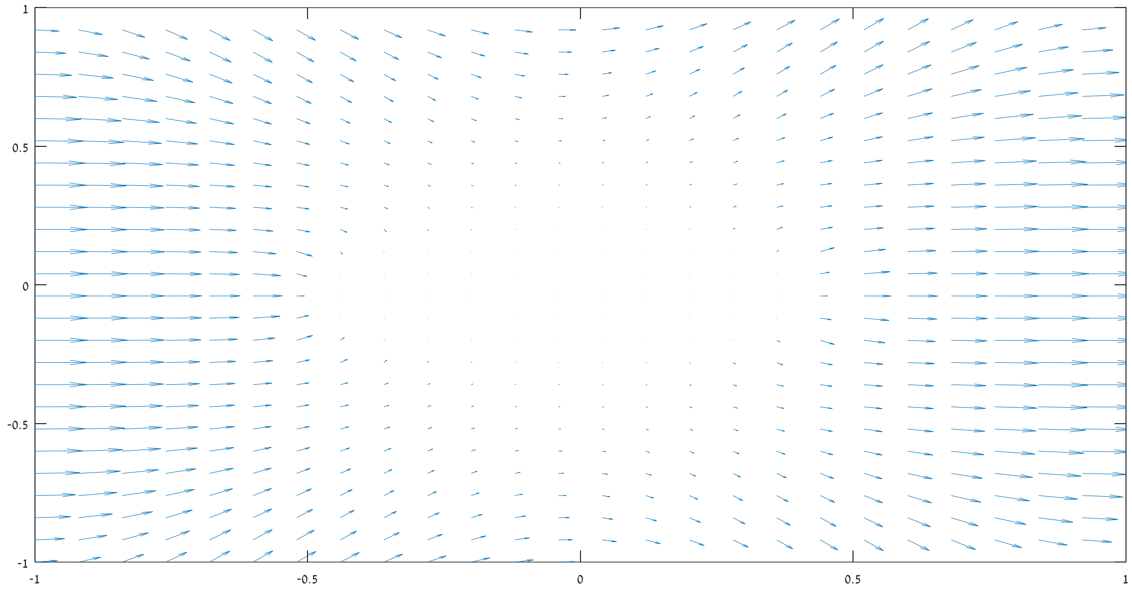
2.א. נשנה את הפוטנציאל במרכז הגלילים ונשרטט את השדה עבור כל אחד מן הפוטנציאלים: 0,1,2,-1,-2.

$\varphi cyl = 2$

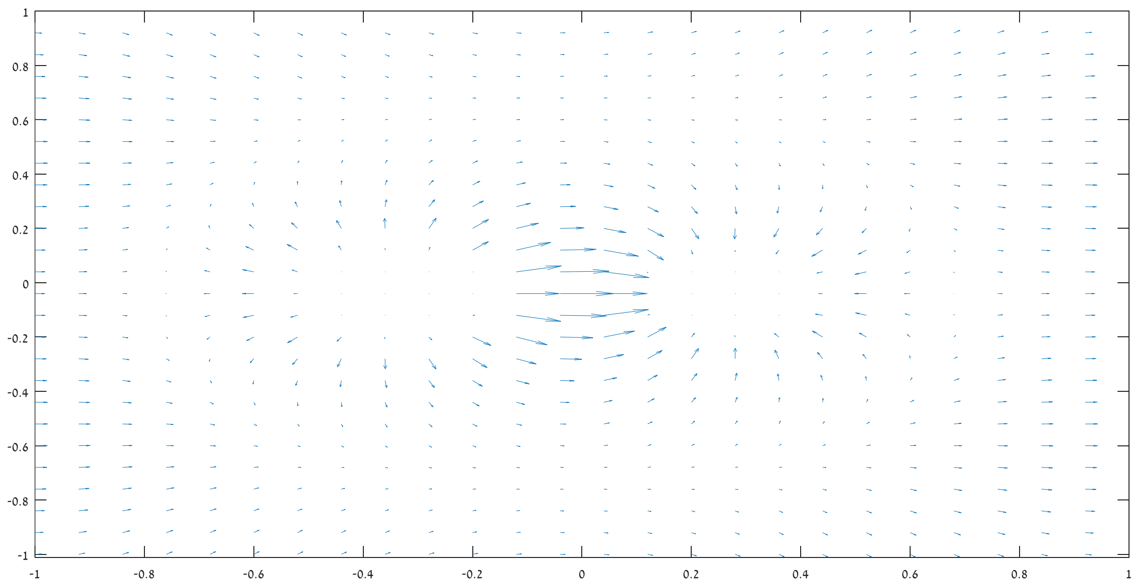




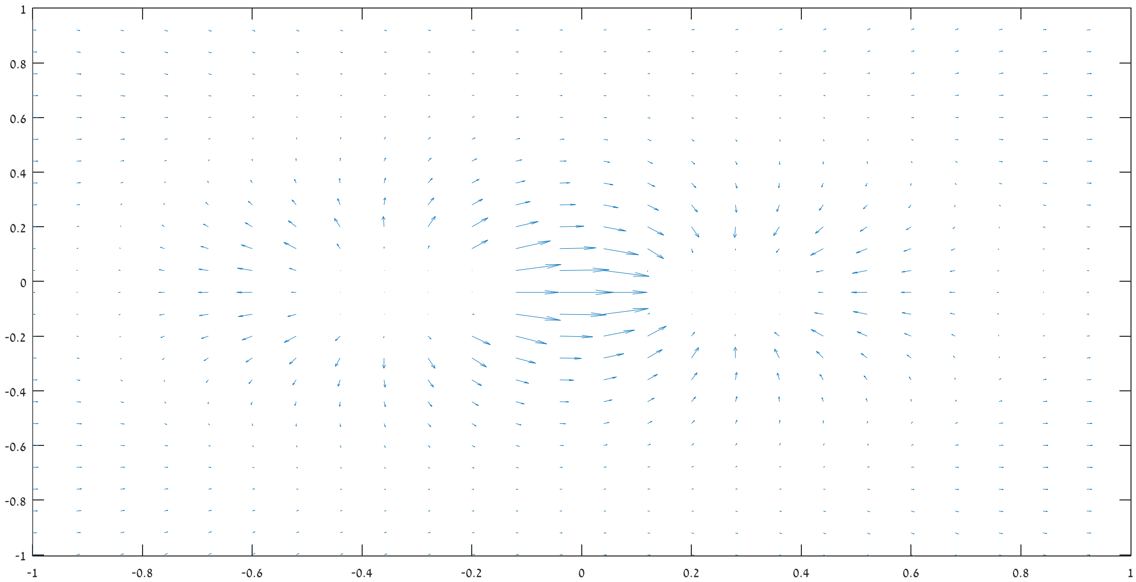
$\varphi cyl = 0$



$\varphi cyl = -1$



$\varphi cyl = -2$



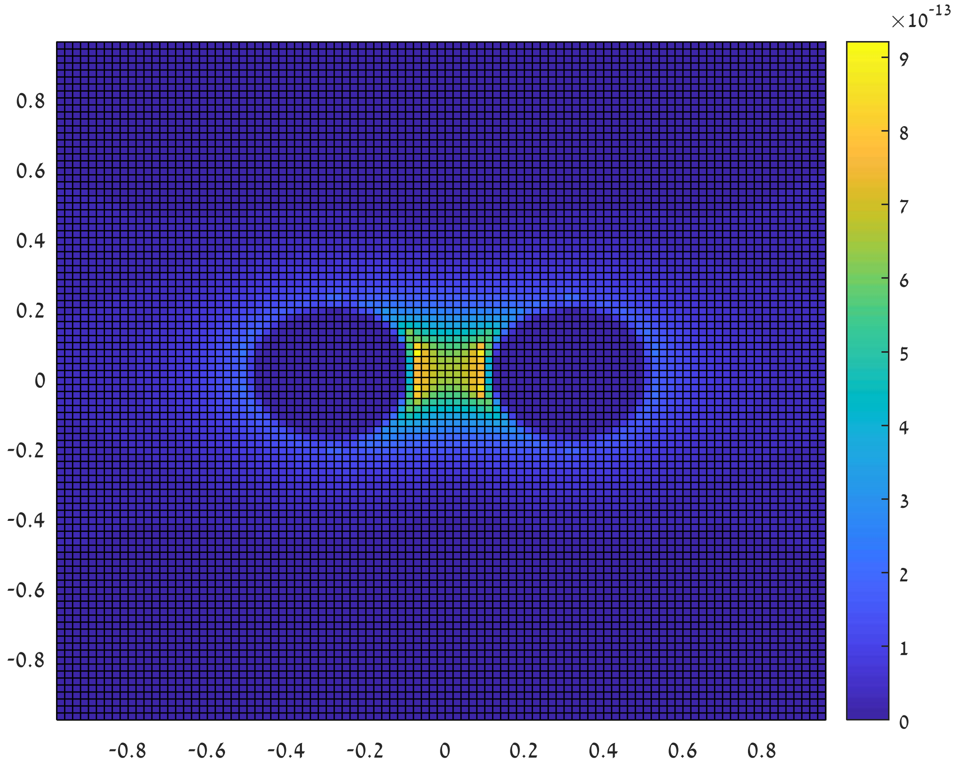
2.ב. נבדוק מהו המטען הכולל על כל גליל עבור השינוי בפוטנציאל במרכז הגלילים. סיכום התוצאות בטבלה:

פוטנציאל במרכז(v)	-2	-1	0	1	2
מטען על גליל שמאלי	$10^{-9} * -5.1858$	$10^{-9} * -2.4960$	$10^{-10} * 2.2964$	$10^{-9} * 2.9848$	$10^{-9} * 5.7639$
מטען על גליל ימני	$10^{-9} * 5.1593$	$10^{-9} * 2.4982$	$10^{-10} * -2.0035$	$10^{-9} * -2.929$	$10^{-9} * -5.6833$

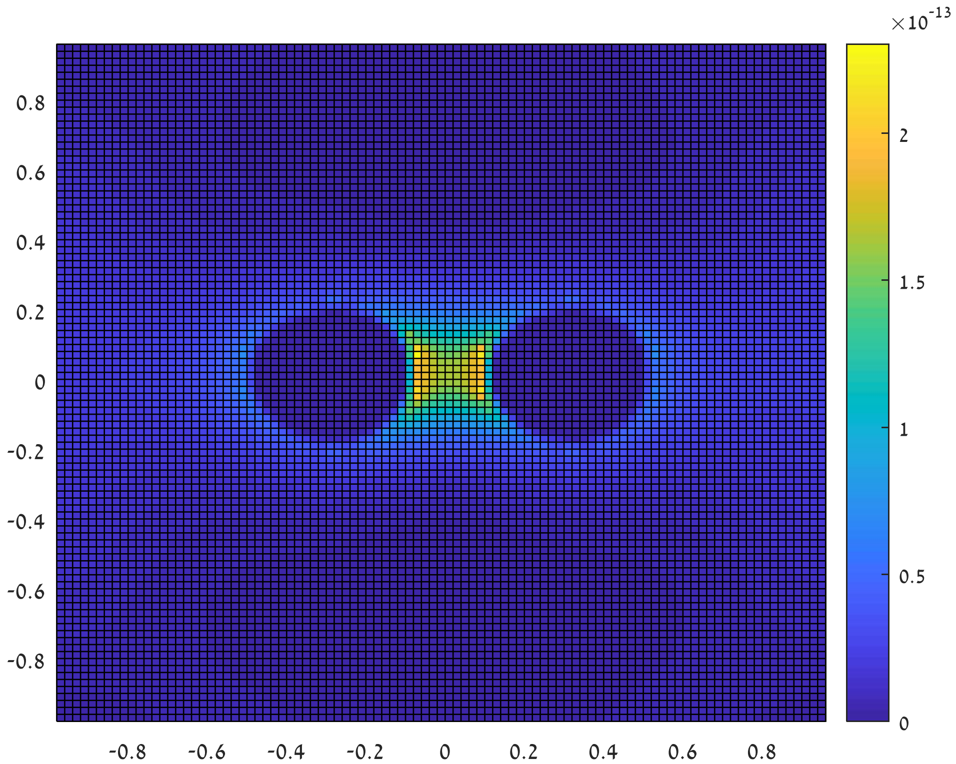
ניתן לראות שהמטען על הגלילים עבור כל פוטנציאל כמעט זהה בסימן הפוך, כפי שציפינו עבור בעיה סימטרית.

2.ג. נחשב ונשרטט את האנרגיה במערכת ליחידת אורך עבור כל פוטנציאל:

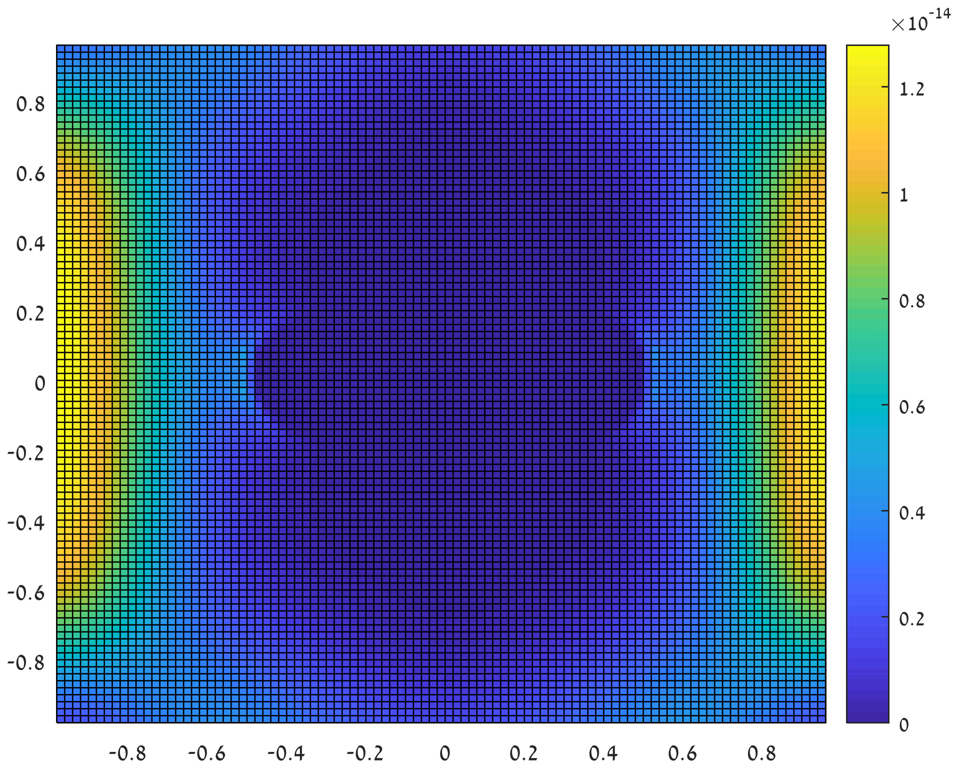
$$\varphi cyl = 2$$



$\varphi\text{cyl} = 1$

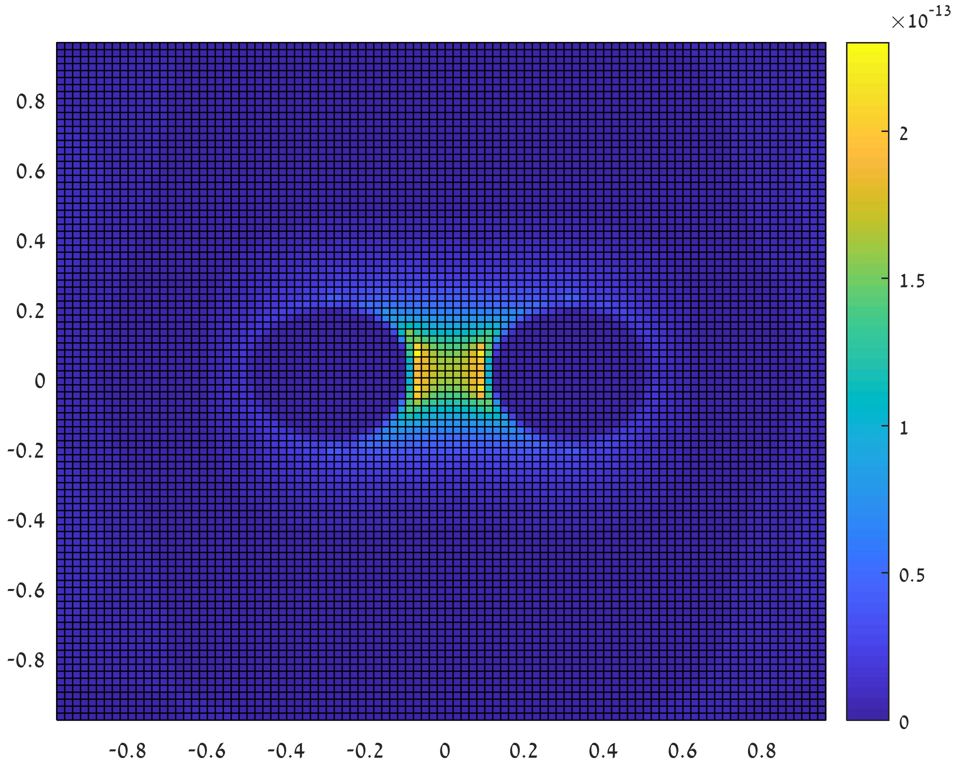


$\varphi cyl = 0$

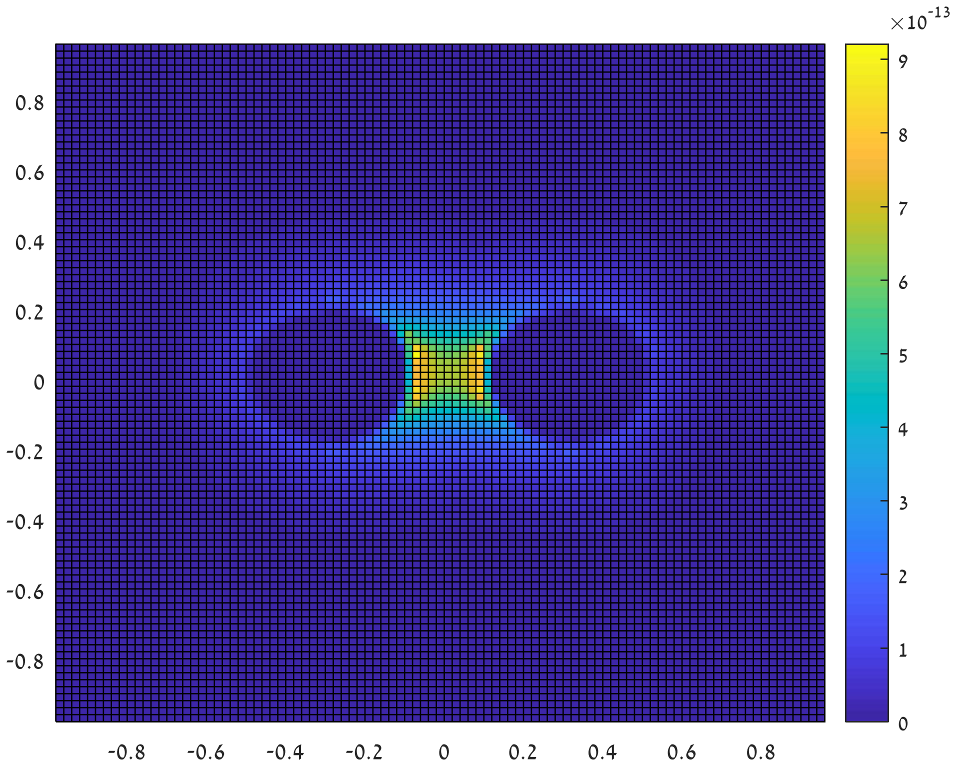


×10^-14
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8

$\varphi cyl = -1$

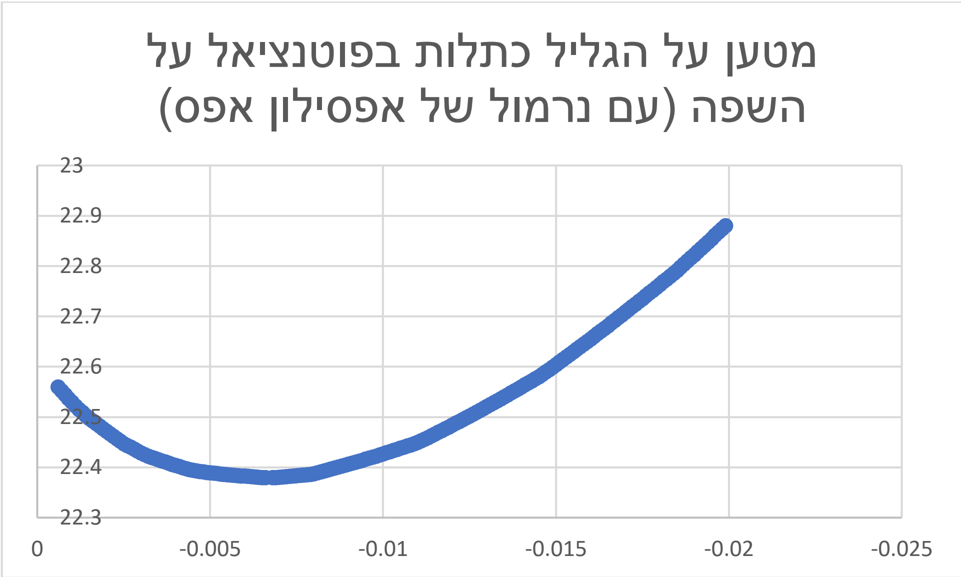


$\varphi cyl = -2$



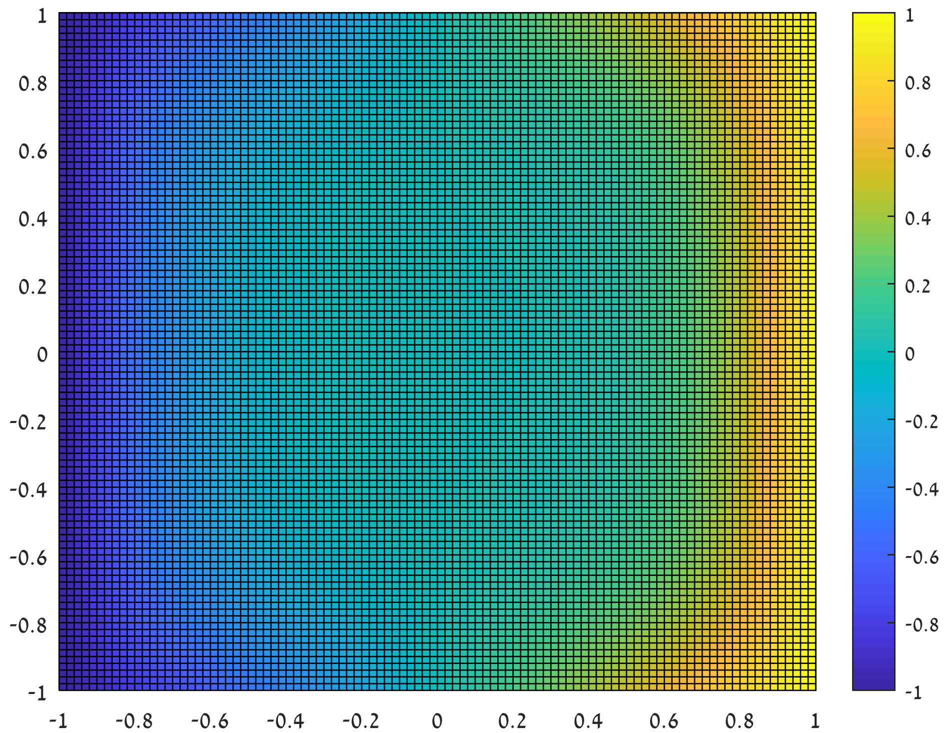
3.א הפוטנציאל עבורו המטען מתאפס הוא $\varphi cyl = -0.067$:

מטען על הגליל כתלות בפוטנציאל על השפה (עם נרמול של אפסילון אפס):

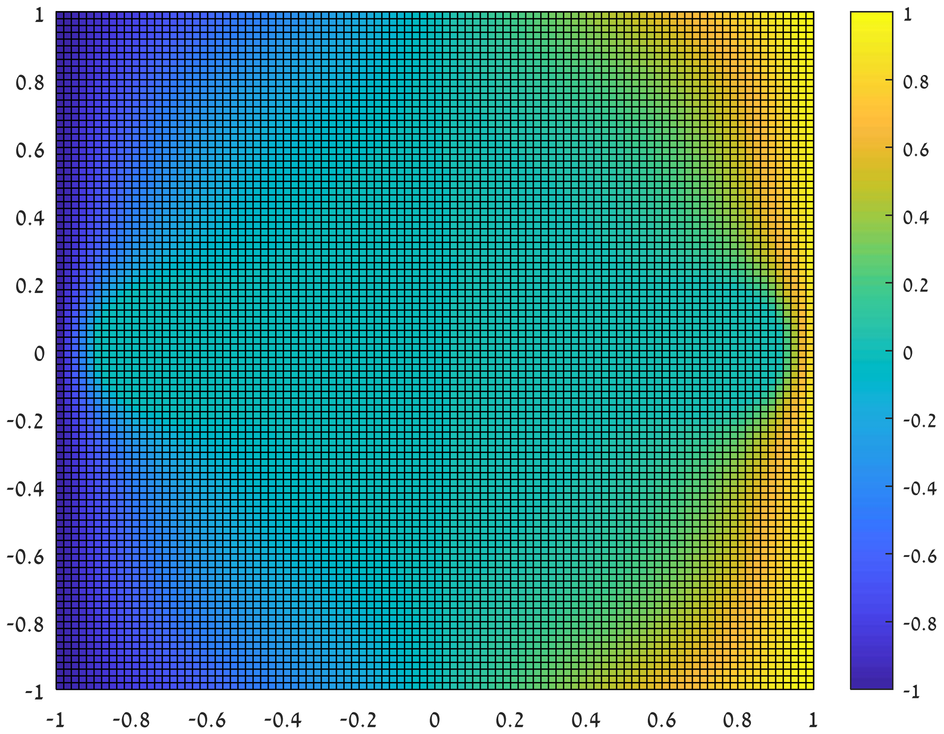


שינינו את המרחק d להיות ±0.7L, ניתן לראות כי במרחק זה השפעת הגלילים זה על זה זניחה.

הפוטנציאל עבור מערכת עם גליל אחד:



הפוטנציאל עבור מערכת עם שני גלילים במרחק $L1.4$:



ב. ראשית נציג את הפתרון האנליטי:

<u>פתרון אנליטי:</u>

נסתכל על הפוטנציאל של גליל אחד הנמצא בראשית. ניתן לעשות זאת מכיוון שאין השפעה של הגלילים אחד על השני.

נשים מטעני דמות – 2 תילים אינסופיים במרחקים ±d מהראשית.

$$\varphi_{total} = \varphi_{ext} + \varphi_{\lambda^-} + \varphi_{\lambda^+}$$

$$\varphi_{\lambda^-} + \varphi_{\lambda^+} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(|r\hat{r} + d\hat{x}|) - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(|r\hat{r} - d\hat{x}|)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{|r\hat{r} + d\hat{x}|}{|r\hat{r} - d\hat{x}|}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{|(r + dcos\theta)\hat{r} - dsin\theta\hat{x}|}{|(r - dcos\theta)\hat{r} + dsin\theta\hat{x}|}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{r^2 + 2rdcos\theta + d^2}{r^2 - 2rdcos\theta + d^2}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{r^2(1 + 2\frac{d}{r}cos\theta + \frac{d^2}{d^2}}{r^2(1 - 2\frac{d}{r}cos\theta + \frac{d^2}{r^2}}\right)$$

$$\approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left((1+2\frac{d}{r}cos\theta)^2\right)$$

$$\approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(1+4\frac{d}{r}cos\theta\right)$$

$$\approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\frac{d}{r}cos\theta = \frac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0 r}cos\theta$$

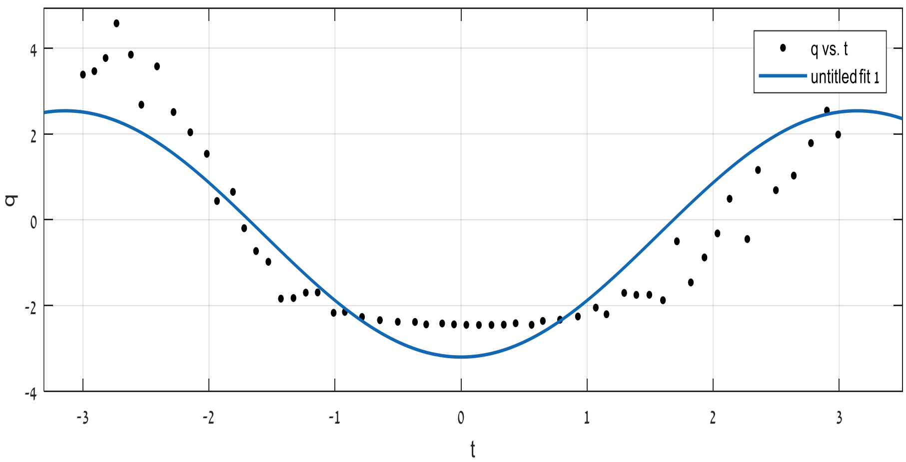
$$\varphi_{total} = -E_0 r cos\theta + \frac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0 r}cos\theta$$

$$\varphi_{total}\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{E_0}{5}cos\theta + \frac{5\lambda d}{\pi\varepsilon_0}cos\theta = E_0\cos\theta\left(\frac{1}{25r} - r\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}_r = E_0\cos\theta\left(\frac{1}{25r^2}+1\right)$$

$$\sigma = \varepsilon_0\Delta\mathrm{E}_r = \varepsilon_0\left(E_0\cos\theta\left(\frac{1}{25\left(\frac{1}{5}\right)^2}+1\right)\right) = 2\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

ניתן לראות כי בפתרון הנומרי התלות של המטען בזווית הוא במתכונת של קוסינוס כמו בפתרון האנליטי:



נספחים

ראשית, ע"י שימוש בנוסחת הנגזרת הדיסקרטית, ניסינו לבדוק מה יהיה דיוק הנגזרת של cos(x) בנקודה $\frac{\pi}{2}$, כתלות בגודל אפסילון (כאשר אפסילון=dx). ציפינו לקבל נגזרת של 1-.

```
def d_cos(x, dx):
    import math
    df_dis = (math.cos(x+dx) - math.cos(x))/dx
```

```python
    df_anal = -1
    epsilon = 1-abs(df_dis/df_anal)
    return df_dis, epsilon


from math import pi

# >>> d_cos(pi/2, 10^(-7))
# (-0.03232054129435699, 0.967679458705643)
# >>> d_cos(pi/2, 10^(-10))
# (0.1892006238269821, 0.8107993761730179)
# >>> d_cos(pi/2, 10^(-12))
# (-0.4546487134128408, 0.5453512865871593)
# >>> d_cos(pi/2, 10^(-14))
# (-0.12366978082792271, 0.8763302191720773)
# >>> d_cos(pi/2, 10^(-13))
# (-0.09385522838839844, 0.9061447716116016)
# >>> d_cos(pi/2, 10^(-11))
# (-0.8414709848078964, 0.1585290151921036)
```

ניתן לראות שבהתחלה ההתכנסות הולכת ונעשית מדויקת יותר ככל שמקטינים את אפסילון, עד לסביבת אפסילון מסדר גודל של 10^{-11} , ושם המגמה משתנה להיות פחות מדויקת ככל שנגדיל את אפסילון.

1. א. כעת נחשב את הפוטנציאל החשמלי במערכת הנתונה ע"י שיטת הרלקסציה:

```matlab
function [A,B,count] = numeri(n,a,epsilon)
    A=zeros(2*n+1,2*n+1);
    B=ones(2*n+1,2*n+1);
     A(:,1)=-1;
     A(:,end)=1;
     A(1,:)=-1:1/n:1;
     A(end,:)=-1:1/n:1;


    for y = -0.2:1/n:0.2
        t=asin(5*y);

        inxi1=n+1+round((-0.3-0.2*cos(t))*n);
        inxf1=n+1+round((-0.3+0.2*cos(t))*n);
        iny=n+1+round(n*y);
        A(iny,inxi1:inxf1)= a;
        B(iny,inxi1:inxf1)=0;

        inxi2=n+1+round((0.3-0.2*cos(t))*n);
        inxf2=n+1+round((0.3+0.2*cos(t))*n);
        iny=n+1+round(n*y);
        A(iny,inxi2:inxf2)= -1*a;
        B(iny,inxi2:inxf2)=0;
    end

    A=A+100;
    dy=1/(2*n+1);
    dx=1/(2*n+1);
    Ik=1;
    count=0;
```

```
    while Ik>epsilon
         F=A;
         for j= 2:(2*n)
              for i= 2:(2*n)
                   if B(i,j)==1
                        A(i,j)= 0.5*((dy^2)*(A(i+1,j)+A(i-
1,j))+(dx^2)*(A(i,j+1)+A(i,j-1)))/(dx^2+dy^2);
                   end
              end
         end
         Ik=max(abs(A(i,j)-F(i,j))/F(i,j));
         count=count+1;
    end
    A=A-100;
end
```

את בעיית החילוק ב-0 פתרנו ע"י הוספת קבוע 100 והפחתתו בסוף התהליך.

בדקנו מהי הרזולוציה האידאלית ע"י הקוד הבא:

```
epsilon=10^(-2);
 n=25;
 flag=1;
 while flag == 1
      flag = 0;
      A=numeri(n,2, epsilon);
      [C,B,count]=numeri(2*n,2 epsilon);
      C(:,[1,2,4*n+1])=[];
      C([1,2,4*n],:)=[];
      c=mat2cell(C,2*ones(1,2*n-1),2*ones(1,2*n-1));
      for j= 3:(2*n)-1
             for i= 3:(2*n)-1
                 if B(i,j)==1
                 In=max(max(abs(c{i,j}-A(i,j))));
             if In>epsilon;n=2*n;flag=1; break
             end
                 end
             end
      if In>epsilon; break
      end
      end
 end
```

כאשר הכפלנו את הרזולוציה פי 2 בכל פעם ובדקנו את ההתכנסות. הרזולוציה האידאלית לפי הקוד הינה n=50, כלומר גודל המטריצה, הרזולוציה, היא 101x101.

2. א. עבור הרזולוציה מסעיף א', חישבנו את השדה החשמלי ע"י שימוש בנגזרת הדיסקרטית:

```
function[E,dx,dy] = field(A,n)
    dx = zeros(2*n,2*n);
    dy = zeros(2*n,2*n);
    for k= 1:2*n
        for j= 1:2*n
            dx(k,j)=(A(k,j+1)-A(k,j))/(1/(n));
            dy(k,j)=(A(k+1,j)-A(k,j))/(1/(n));
        end
    end
    E=(dx.^2+dy.^2).^0.5;
```

את הגרף שרטטנו בצורה ברורה יותר ע"י ייצוג כל 4 חצים על ידי חץ אחד. השתמשנו בפקודות meshgrid, quiver במטלאב:

```
n=50;
D=numeri(50,a, epsilon));
[~,dx,dy]=df1(D,n);

z=4;
l = floor (2*n/z);
new_dx=zeros(l);
new_dy=zeros(l);
for px=0:(l-1)
    for py=0:(l-1)
        for w1=0:(z-1)
            for w2=0:(z-1)

new_dx(1+px,1+py)=new_dx(1+px,1+py)+dx(1+px*z+w1,1+py*z+w2);

new_dy(1+px,1+py)=new_dy(1+px,1+py)+dy(1+px*z+w1,1+py*z+w2);
            end
        end
    end
end


figure
[x,y]=meshgrid(1:l,1:l);
quiver(x,y,new_dx,new_dy,'LineWidth',0.1)
```

ב. נחשב את המטען הכולל על כל אחד מהגלילים לפי הקפיצה בשדה על השפה:

```
unction [ql,qr,m] = q(a)
n=50;
% A = numeri2(a);
A = numeri(n,a, epsilon);
m = zeros(2*n,2*n);
[E,dx,dy] = df1(A,n);
ql=0;
qr=0;
for x= 2:(2*n-1)
    for y= 2:(2*n-1)
        if  (E(y+1,x)==0 || E(y-1,x)==0  || E(y,x+1)==0 || E(y,x-
1)==0) && E(y,x) ~= 0
            if x<n
                ox = 3*n/10+1;
                oy = n+1;
            else
                ox = 7*n/10+n+1;
                oy = n+1;
            end

            ax = x-ox;
            ay = y-oy;

            if ax==0
                if ay>0
                    teta = pi/2;
                else
                    teta = pi/-2;
                end
```

```
            elseif ax>0
                teta=atan(ay/ax);
            else
                teta = atan(ay/ax)+pi;
            end

            aq = dx(x,y)*cos(teta)+dy(x,y)*sin(teta);

            m(y,x)=aq;

            if x<n
                ql = ql+aq;
            else
                qr = qr+aq;
            end
        end
    end
end
```

ג. נחשב את האנרגיה ליחידת אורך, כלומר אנרגיה לכל נקודה במישור xy, לפי הנוסחה הנתונה בהוראות, ע"י הקוד:

```
function[en] = energy(E,n)
    ix = zeros(2*n-1,2*n-1);
    i = zeros(2*n-2,2*n-2);
    t=E.^2;
    for k= 1:(2*n-1)
        for j= 1:(2*n-1)
            ix(k,j)=(t(k,j)+t(k,j+1))/(2*n);
        end
    end
    for k= 1:(2*n-2)
        for j= 1:(2*n-2)
            i(k,j)=(ix(k,j)+ix(k+1,j))/(2*n);
        end
    end
    en=i*8.857*10^(-12)*0.5;
```

3. א. בשביל לראות מהו הפוטנציאל עבור גליל אחד\ גלילים מורחקים כאשר d משתנה, השתמשנו בפונקציה numeri שהראנו בשאלה 1 עם שינויים קטנים.

ב. מציאת התלות של המטען בזווית:

```
n=50;
[A,B,count] = numeri2(-0.0067);
[~,~,m] = new_q(-0.0067);
q=[];
t=[];
ox = floor(3*n/10+1);
oy = n+1;
for x= 2:n
    for y= 2:(2*n-1)
        if  m(x,y)  ~= 0
            bx = x-ox;
            by = y-oy;
            if bx==0
                if by>0
                    teta = pi/2;
```

```
                else
                    teta = pi/-2;
                end
            elseif bx>0
                teta=atan(by/bx);
            else
                teta = atan(by/bx)+pi;
            end
            q = [q,m(y,x)];
            t = [t,teta];

        end
    end
end

% cftool(t,p)
```