

Pisa, 21/10/2020

Cultural Dynamics: il Modello di Axelrod

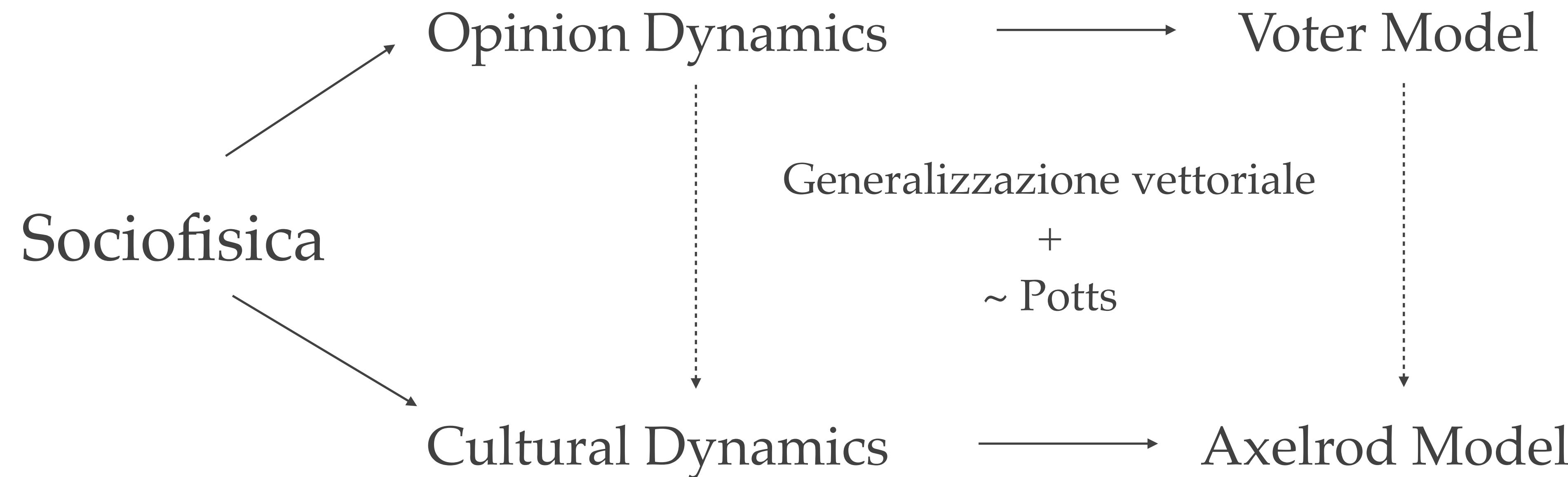
Seminario per l'esame di Sistemi
Complessi

di Edoardo Maggioni

Relazione

edo.magg@me.com

Introduzione



Voter Model

Individuo $\rightarrow s_i \in \{-1, +1\}$

Interazioni random tra primi vicini

$$S_i \leftrightarrow S_j$$



$$S_i = S_j$$

Processo stocastico fuori equilibrio risolvibile esattamente in qualunque dimensione d .

Voter Model

Probabilità di spin flip:

$$W_k(S) \equiv W(s_k \rightarrow -s_k) = \frac{d}{4} \left(1 - \frac{1}{2d} s_k \sum_j s_j \right)$$

Dove j scorre tra tutti i possibili $2d$ primi vicini e il prefattore serve per la normalizzazione

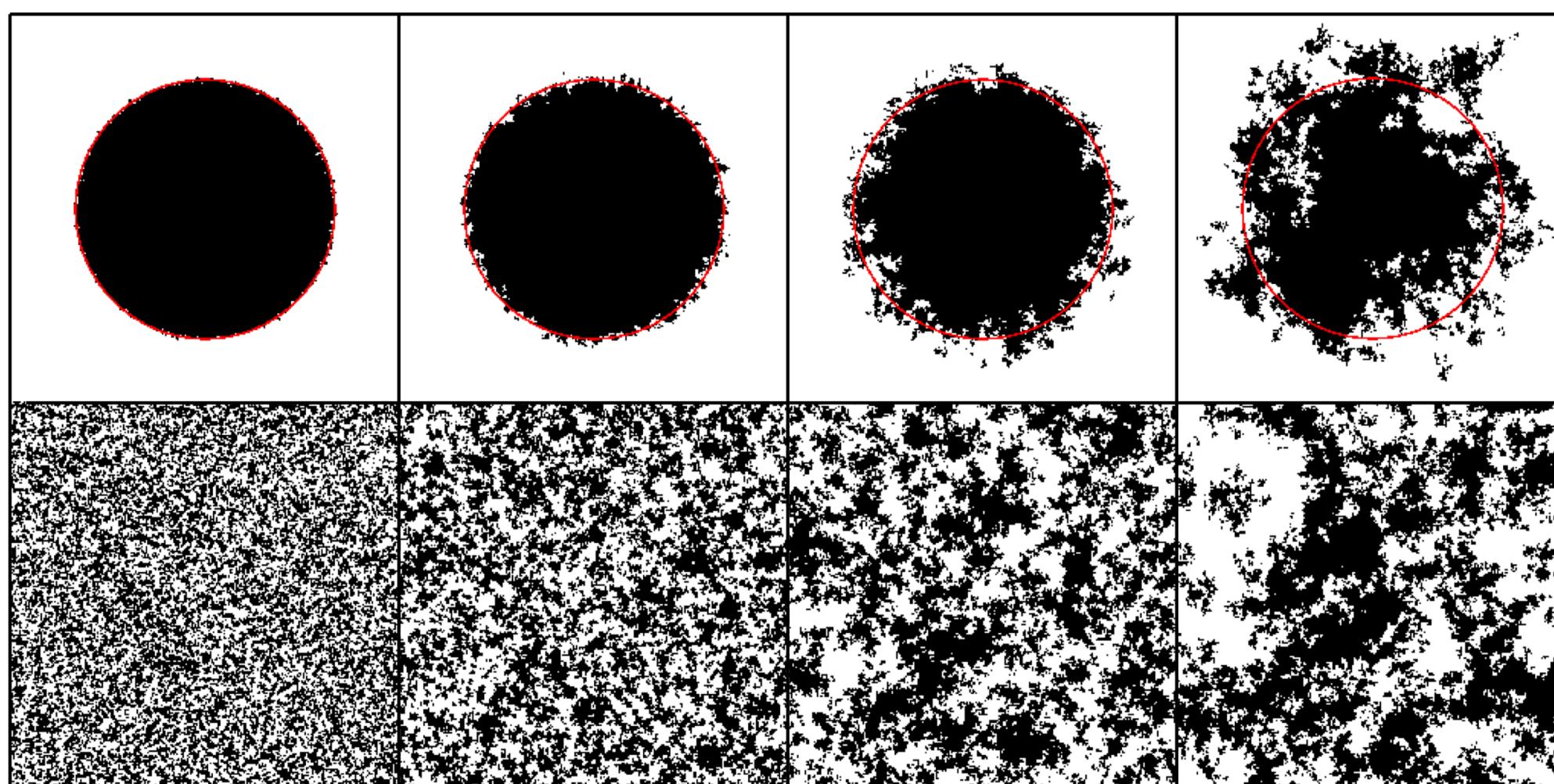
Master Equation:

$$\frac{d}{dt} P(S, t) = \sum_k [W_k(S^k)P(S^k, t) - W_k(S)P(S, t)]$$

Dove $S=\{s_i\}$ è lo stato del sistema, mentre $S^k=S$ tranne lo spin s_k girato.

Voter Model

La dinamica tende ad aumentare l'ordine del sistema \Rightarrow cluster



Senza un bordo liscio, regnano le fluttuazioni.

Maggioranza ha un peso solamente in media.

Axelrod Model

Individuo $\rightarrow q_i = \{ q_{i,0}, q_{i,1}, \dots, q_{i,F} \}$



Features culturali: “linguaggio, arte, norme tecniche e regole sociali” [1]

$q_{i,f} \in \{ 0, 1, \dots, Q \}$

Tratti delle features culturali:

No istituzioni centrali e mass media, solo interazioni sociali tra individui

Axelrod Model

Probabilità di interazione
tra due individui i e j :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{F} \sum_{f=1}^F \delta_{q_{i,f} q_{j,f}}$$

Detto anche overlap

Interazione:

Uno dei tratti non uguali viene scelto e il
secondo viene imposto uguale al primo

$$q_{i,f} \neq q_{j,f} \implies q_{j,f} = q_{i,f}$$

Axelrod Model

Caratteristiche principali:

1. Individui che condividono un maggior numero di features hanno maggiore probabilità di interazione (homophily)
2. Ogni interazione aumenta il numero di features che i due soggetti hanno in comune.

Algoritmo

Reticolo quadrato di lato L

$$i \in \{1, \dots, N = L^2\}$$

$$f \in \{1, \dots, F\}$$

$$q_{i,f} \in \{1, \dots, Q\}$$

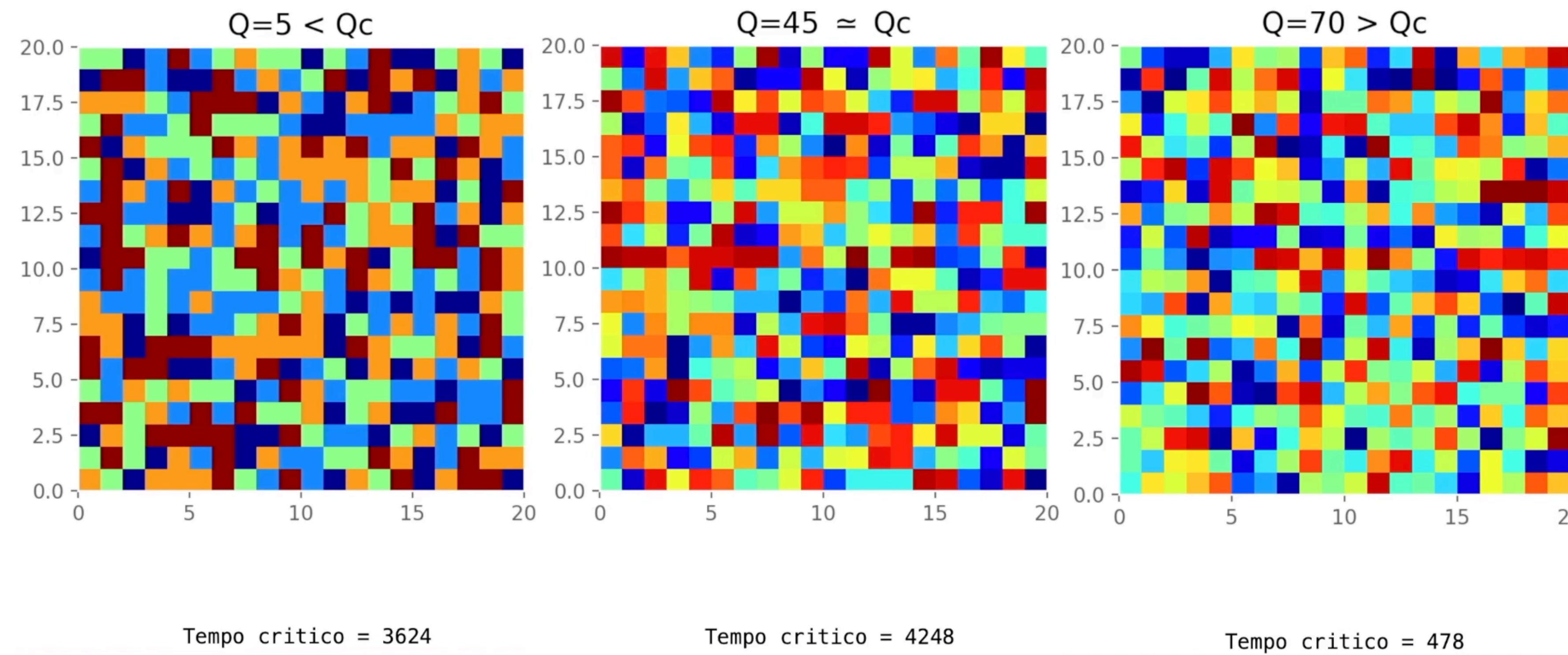
Stato iniziale random

Se $\forall i, j \in S \quad q_{i,f} = q_{j,f} \text{ o } q_{i,f} \neq q_{j,f} \quad \forall f \Rightarrow \omega_{ij} = 1,0 \Rightarrow$ l'algoritmo si arresta.

1. Estrazione random di i tra 0 ed N
2. Estrazione random di j tra i primi vicini di i
3. Estrazione random di f tra 0 ed F
4. Se $q_{i,f} \neq q_{j,f}$:
 - A. Step elementare successivo
5. Altrimenti se $q_{i,f} = q_{j,f}$:
 - A. Estrazione random di f' tale che $q_{i,f'} \neq q_{j,f'}$
 - B. Si impone $q_{i,f'} = q_{j,f'}$
 - C. Step elementare successivo

Implementazione

$L=20, F=10$



Video disponibile al sito: youtu.be/bV126I_cU1k

Implementazione

Parametri d'ordine:

$$s_{max} = \max \left(\frac{\# \text{ di siti con lo stesso } q}{\# \text{ totale di individui}} \right)$$

$nA = \# \text{ di collegamenti attivi}$

$t_c = \text{tempo di congelamento}$

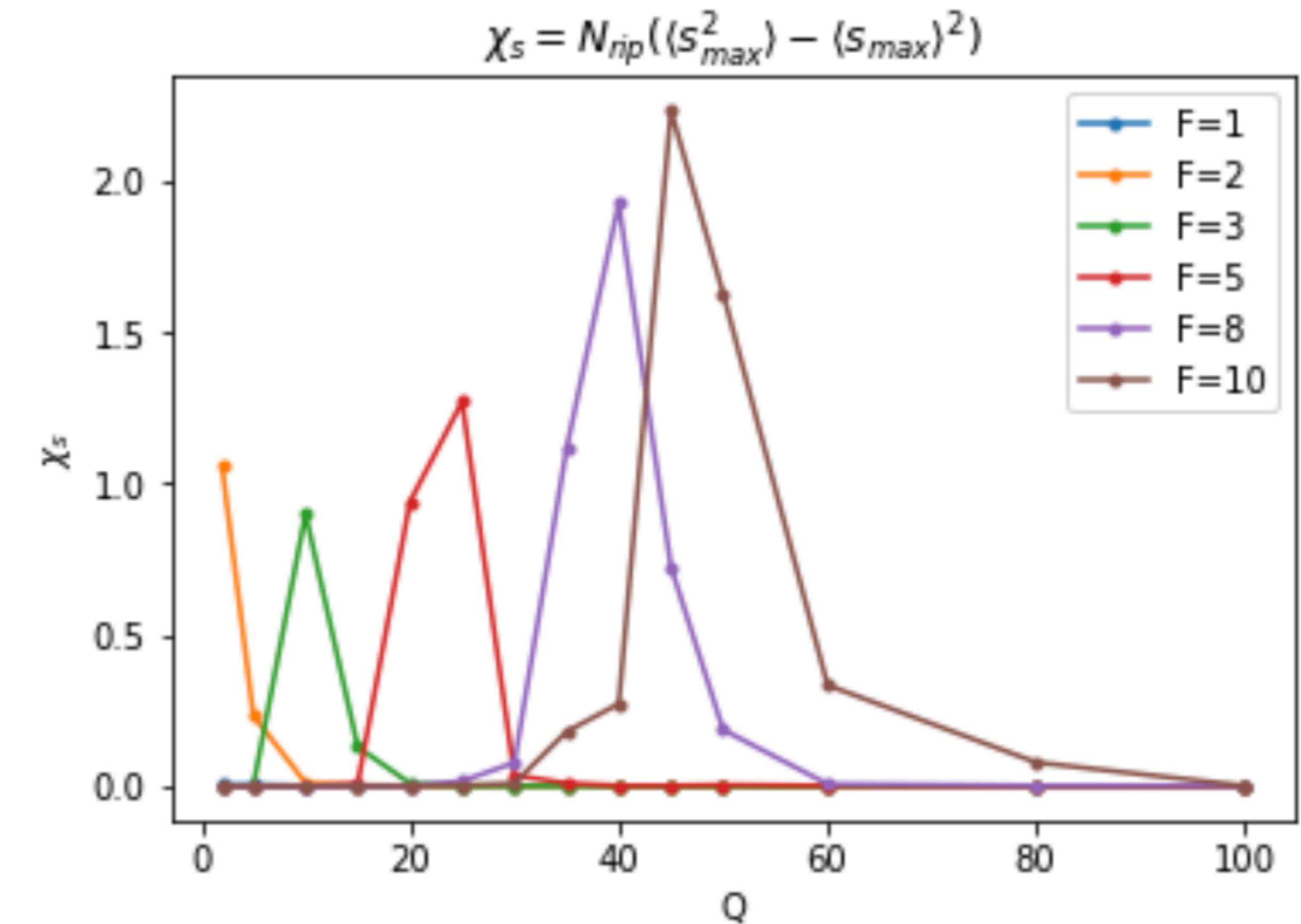
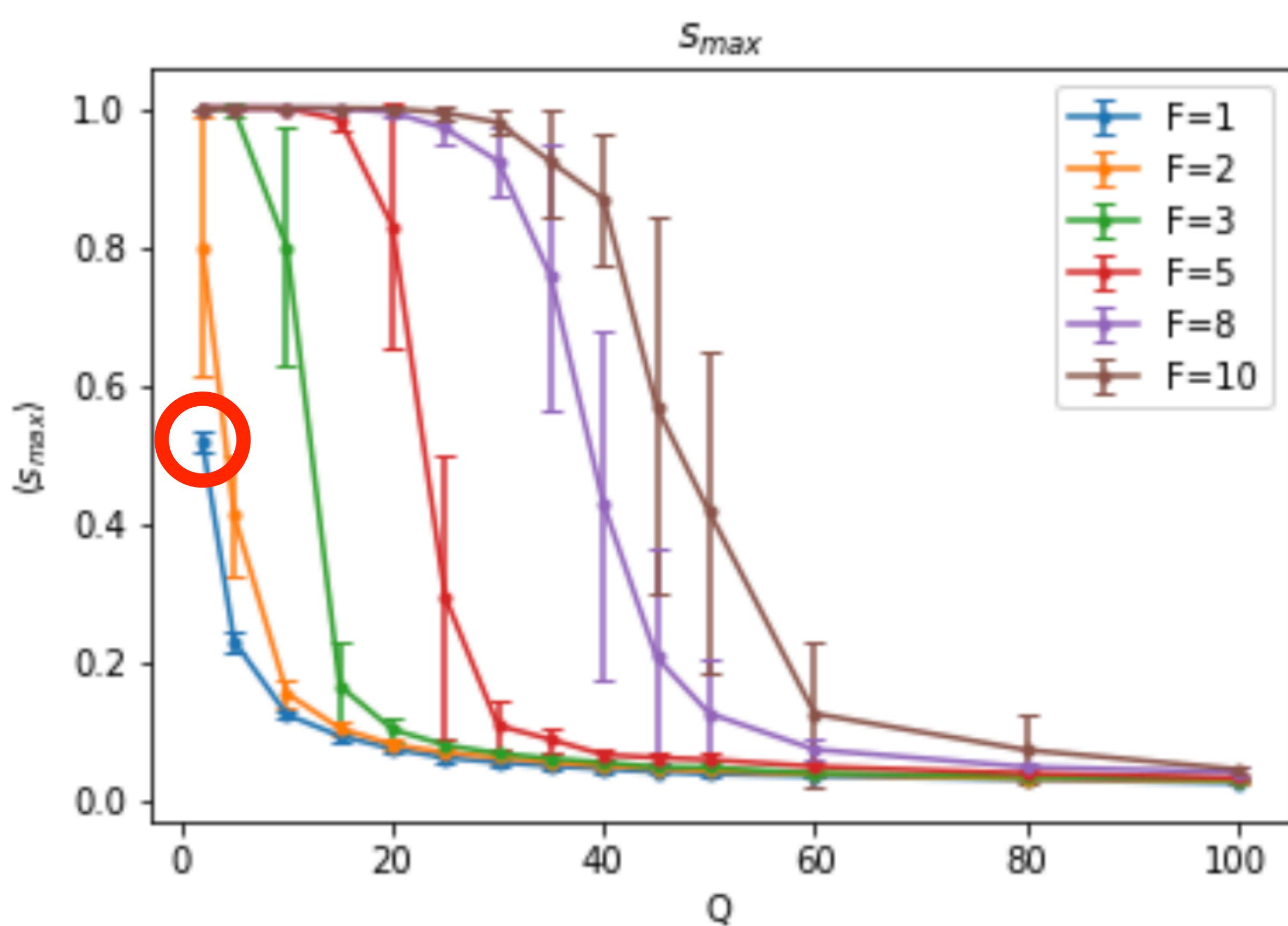
Parametri di controllo:

$Q = \# \text{ di possibili valori per ogni feature}$

$L = \text{taglia del sistema}$

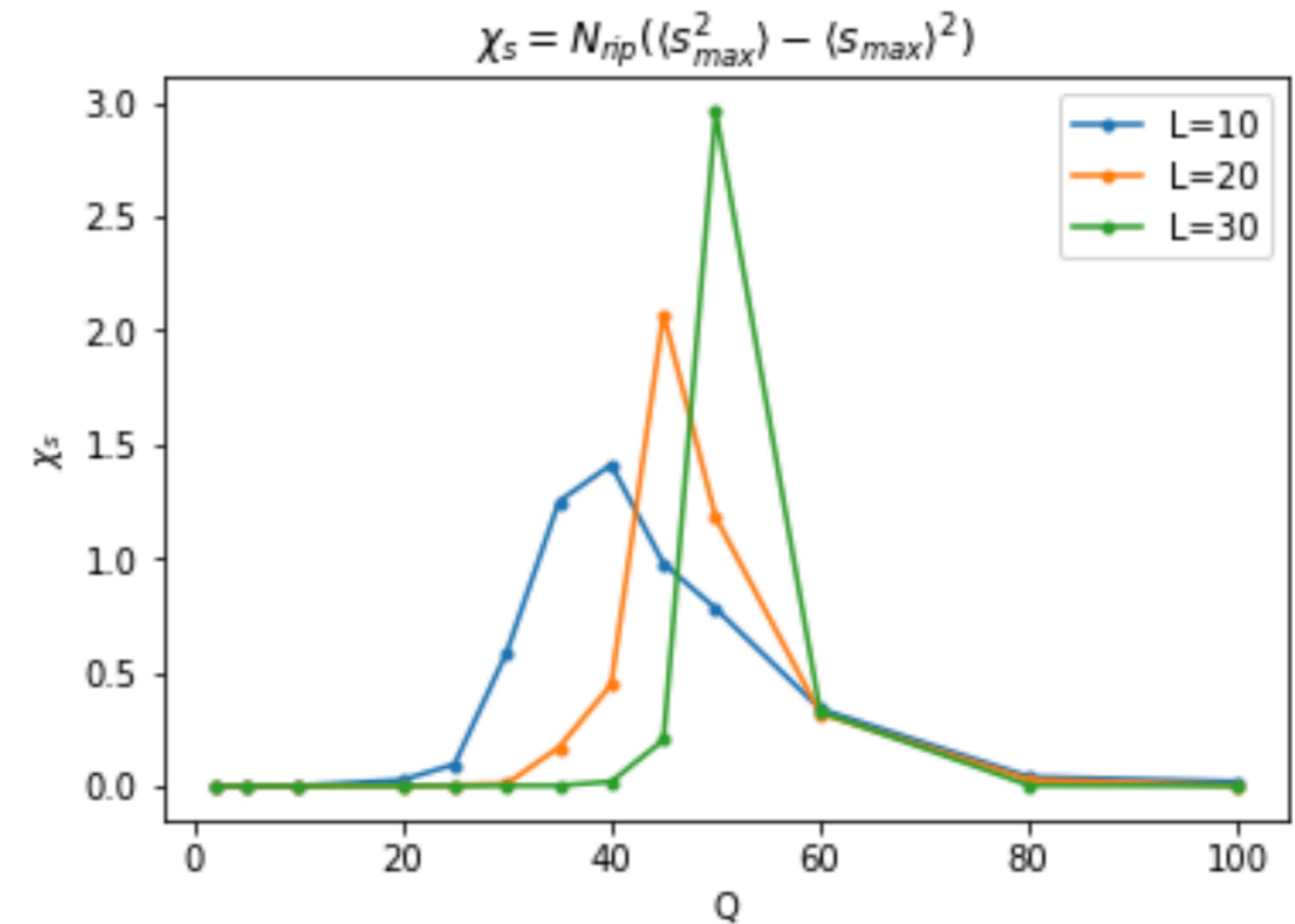
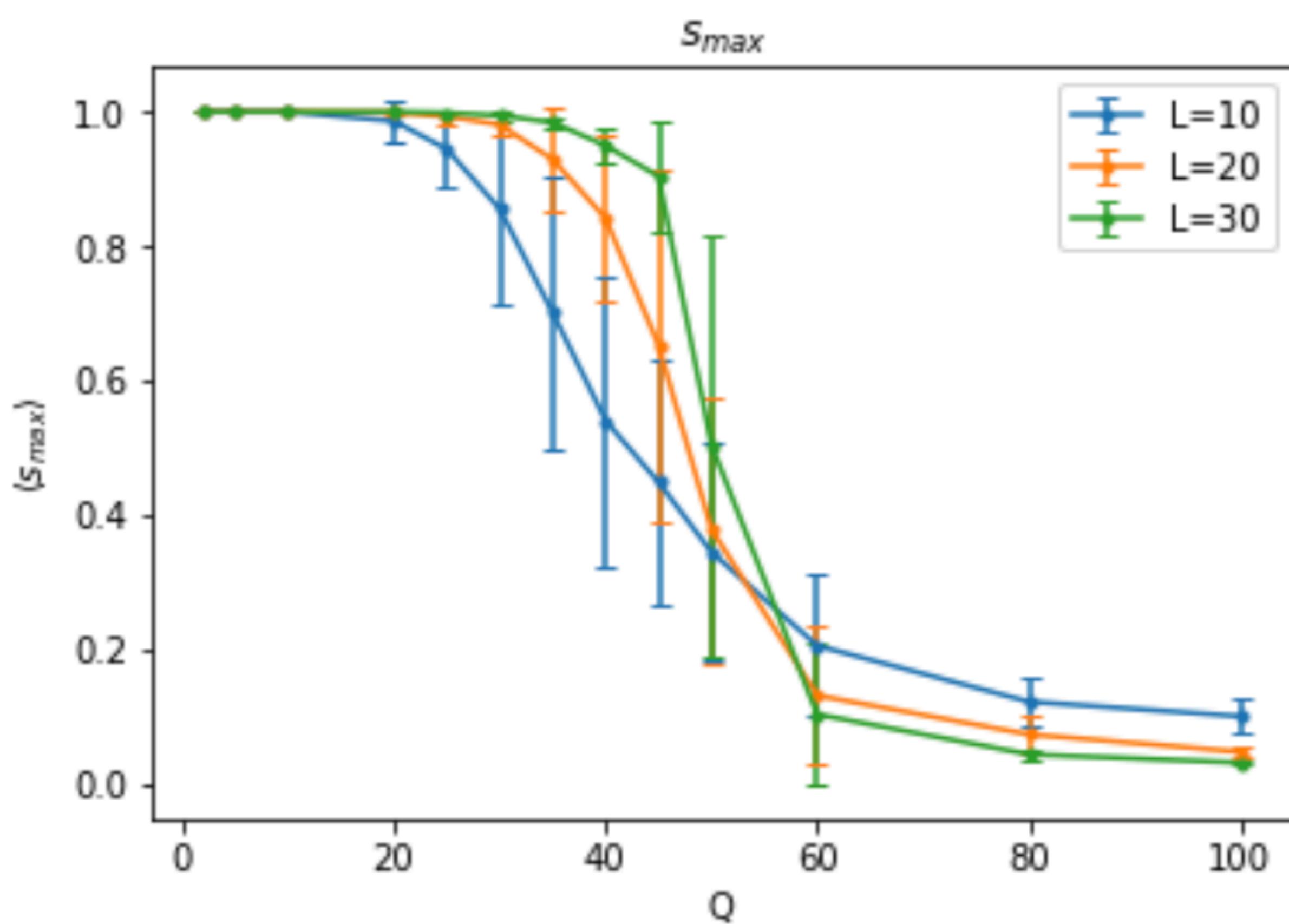
$N = L^2 = \# \text{ totale di individui}$

Studio degli stati finali: Absorbing States



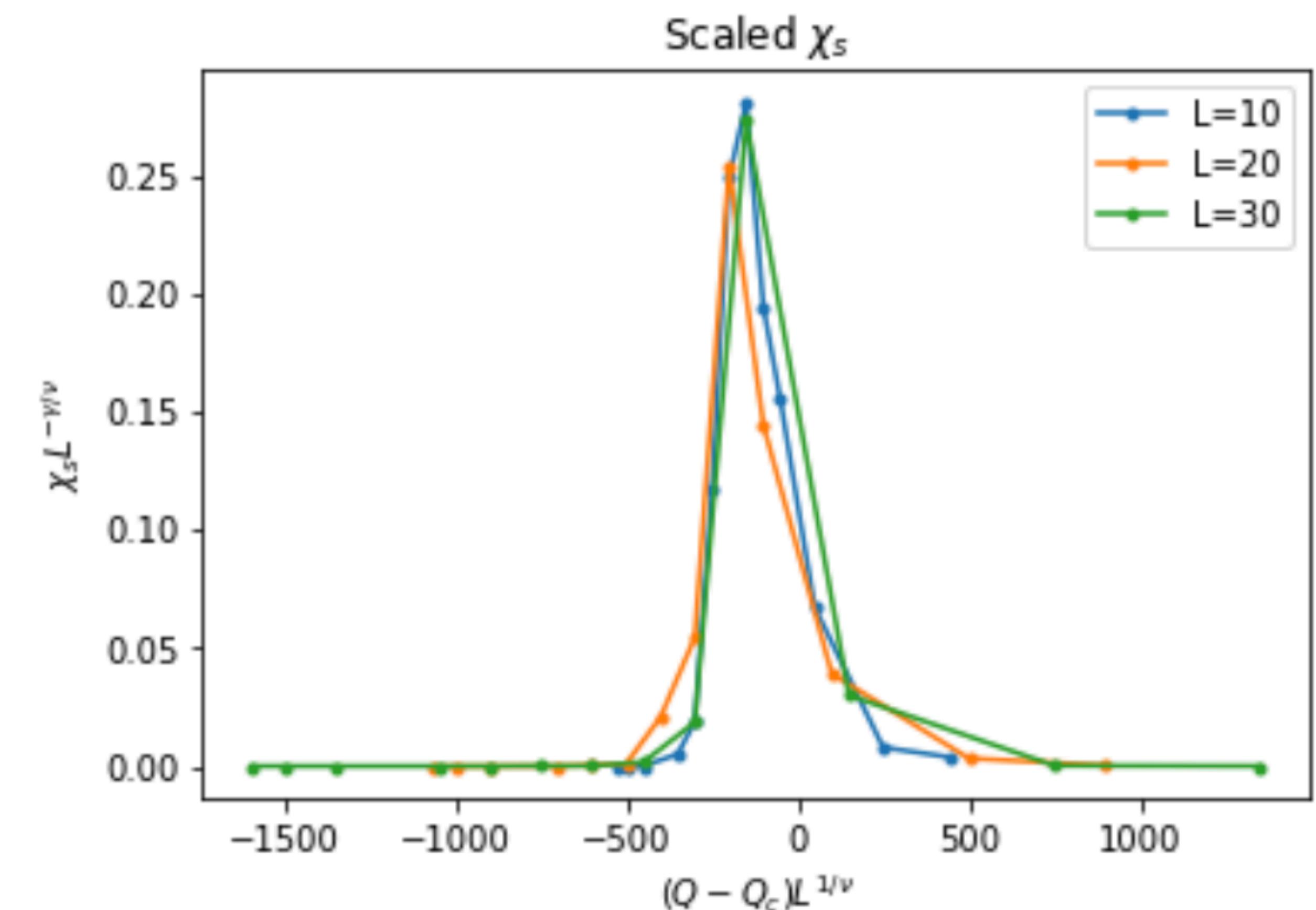
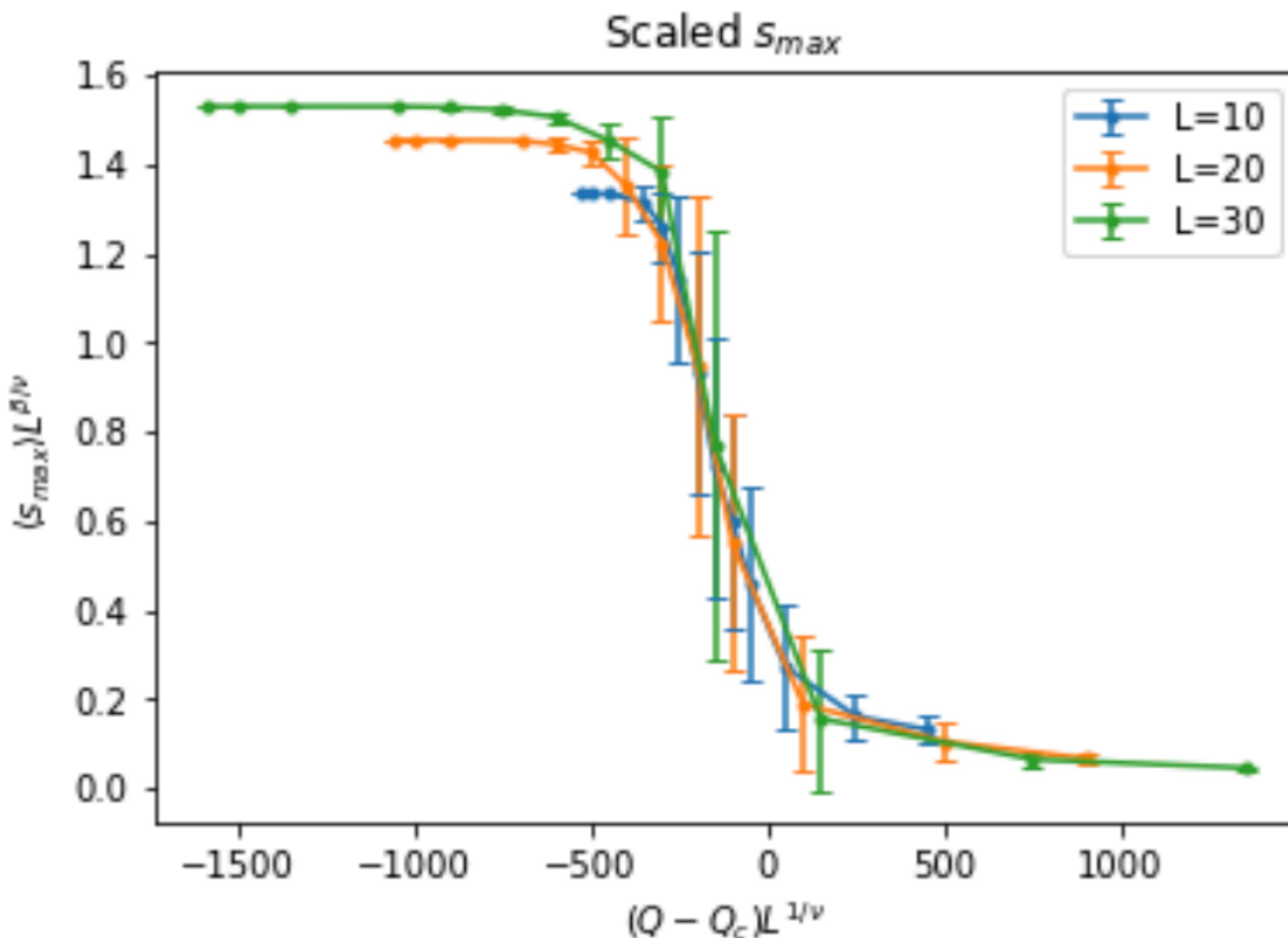
30 realizzazioni, $L=20$

Studio degli stati finali: Absorbing States



30 realizzazioni, $F=10$

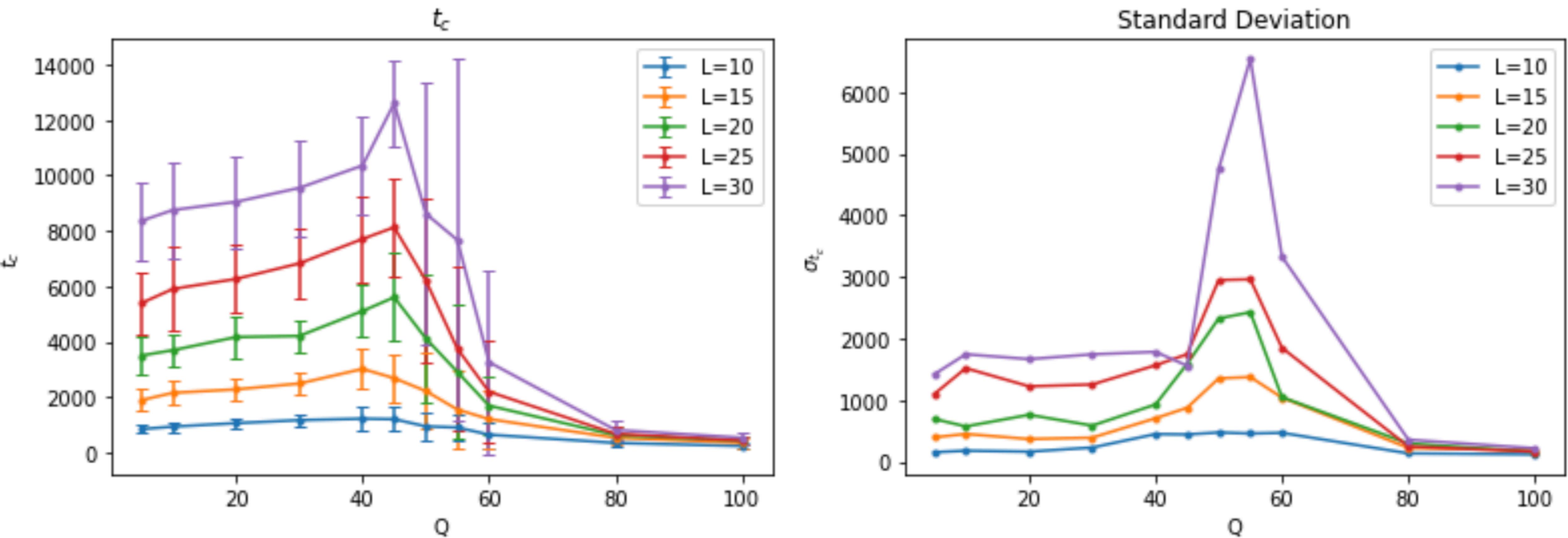
Studio degli stati finali: Absorbing States



Punto critico: $Q_c \simeq 55$

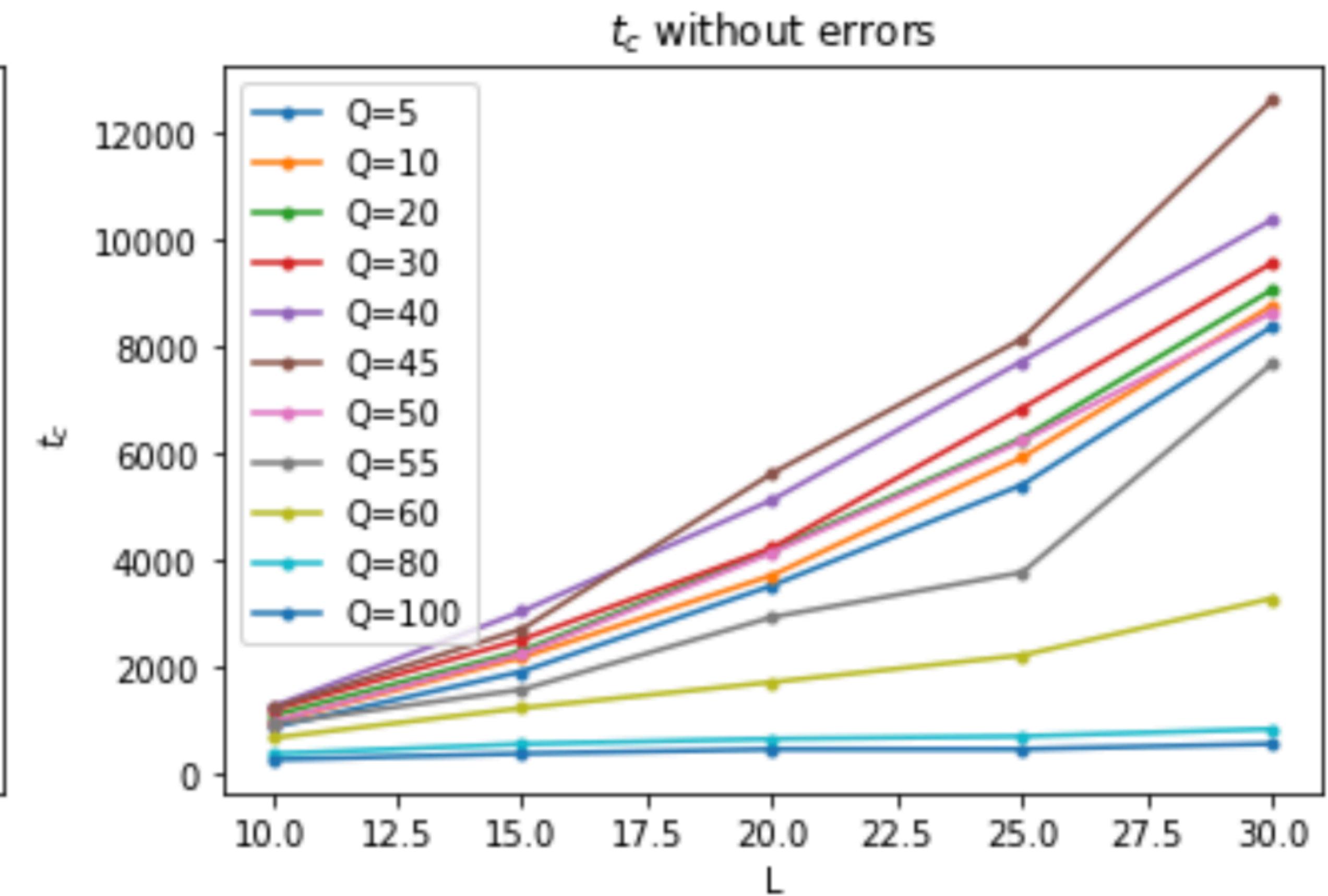
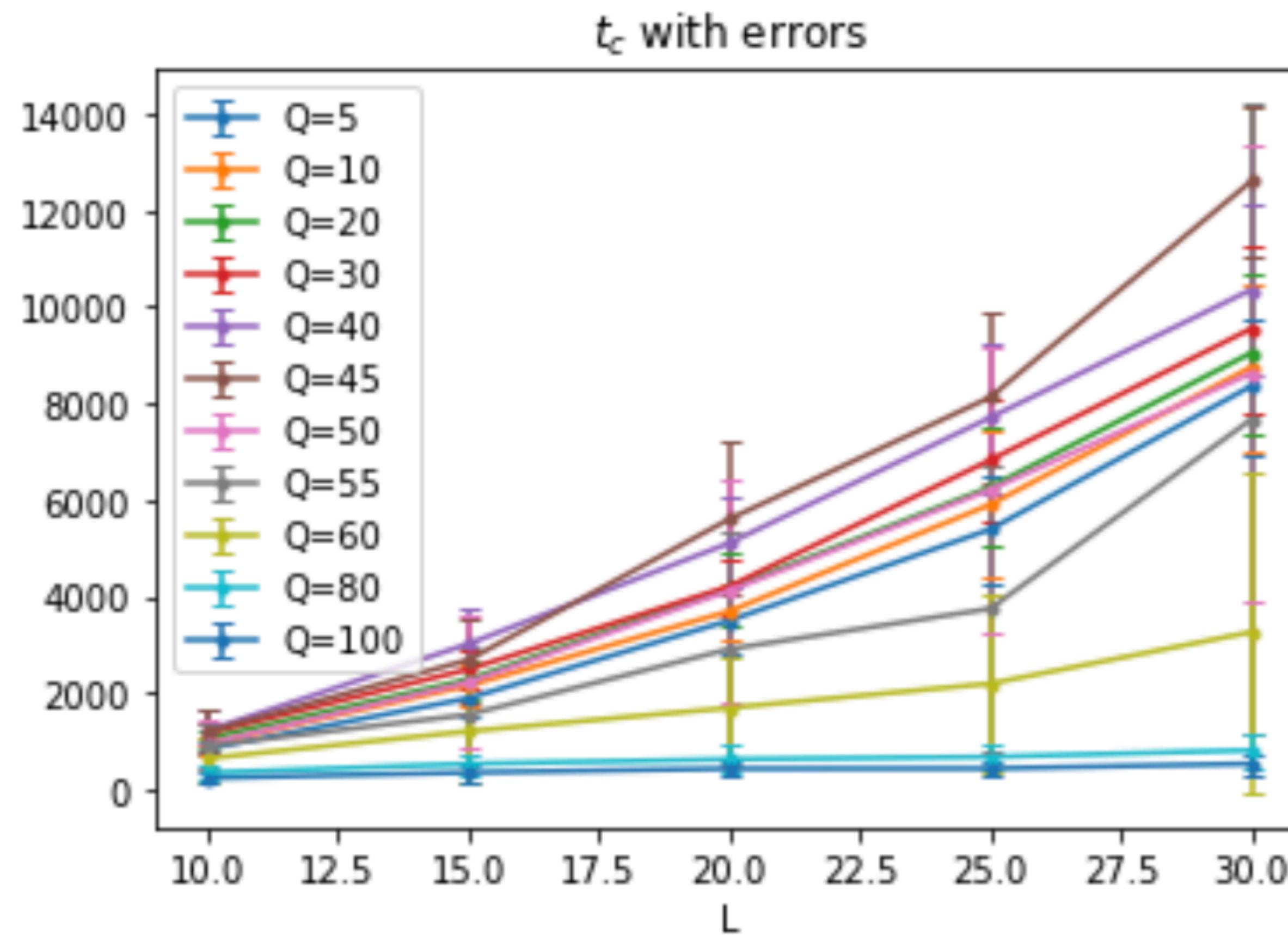
Esponenti critici: $\beta/\nu \simeq 1/8$ e $\gamma/\nu \simeq 0.7$

Tempi di congelamento



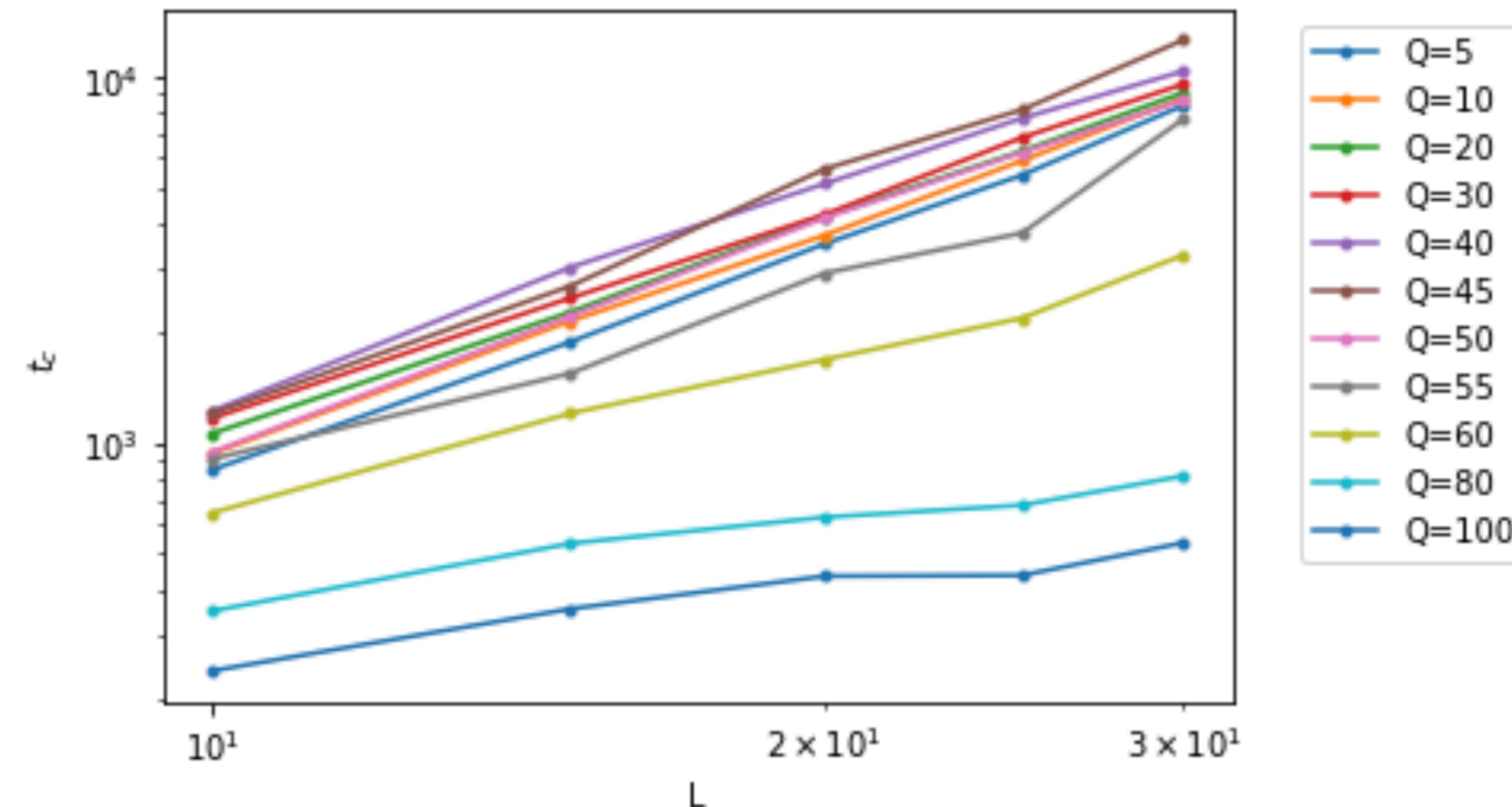
30 realizzazioni, $F=10$

Tempi di congelamento



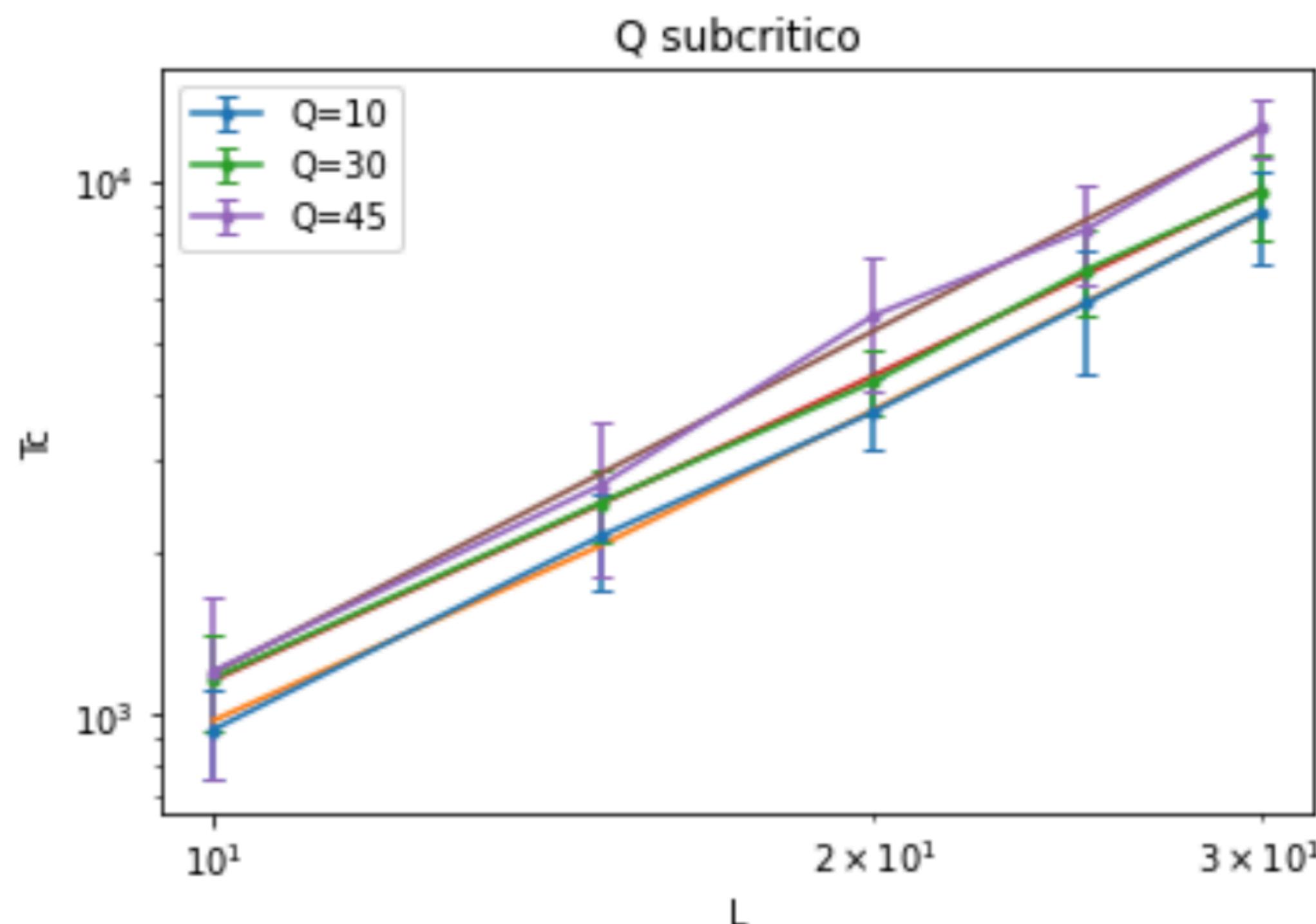
30 realizzazioni, $F=10$

Tempi di congelamento

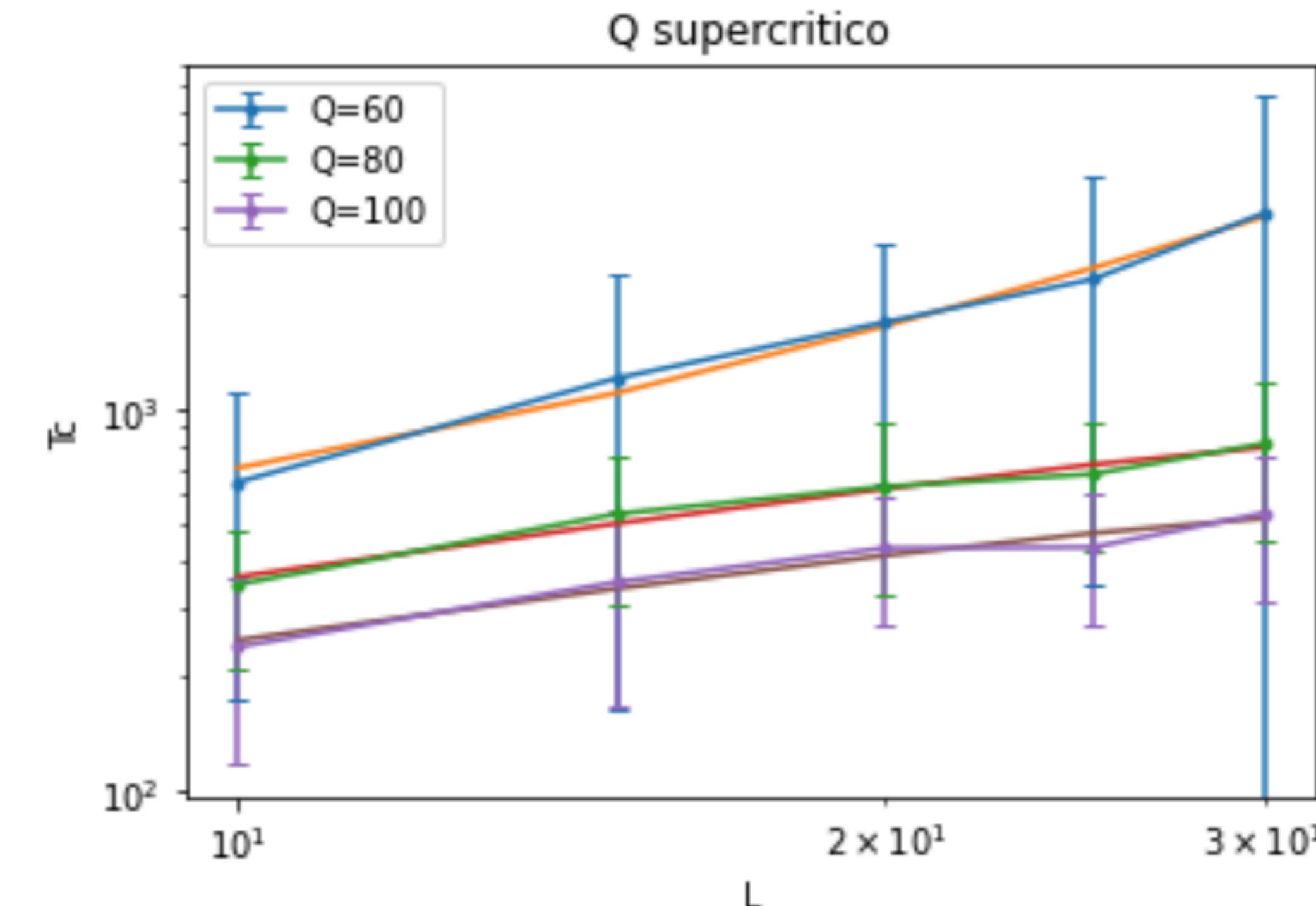


30 realizzazioni, $F=10$, scala log-log

Tempi di congelamento



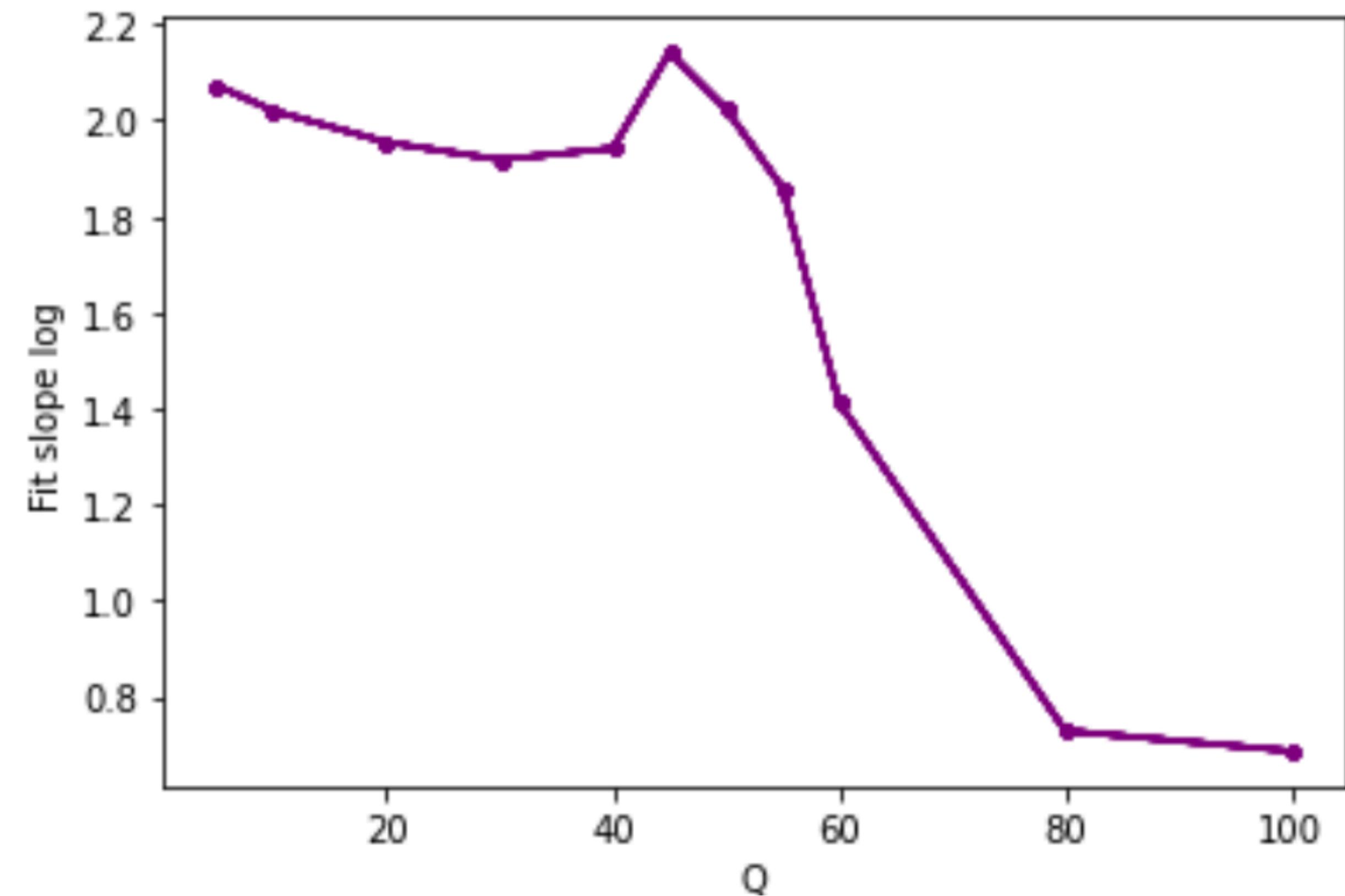
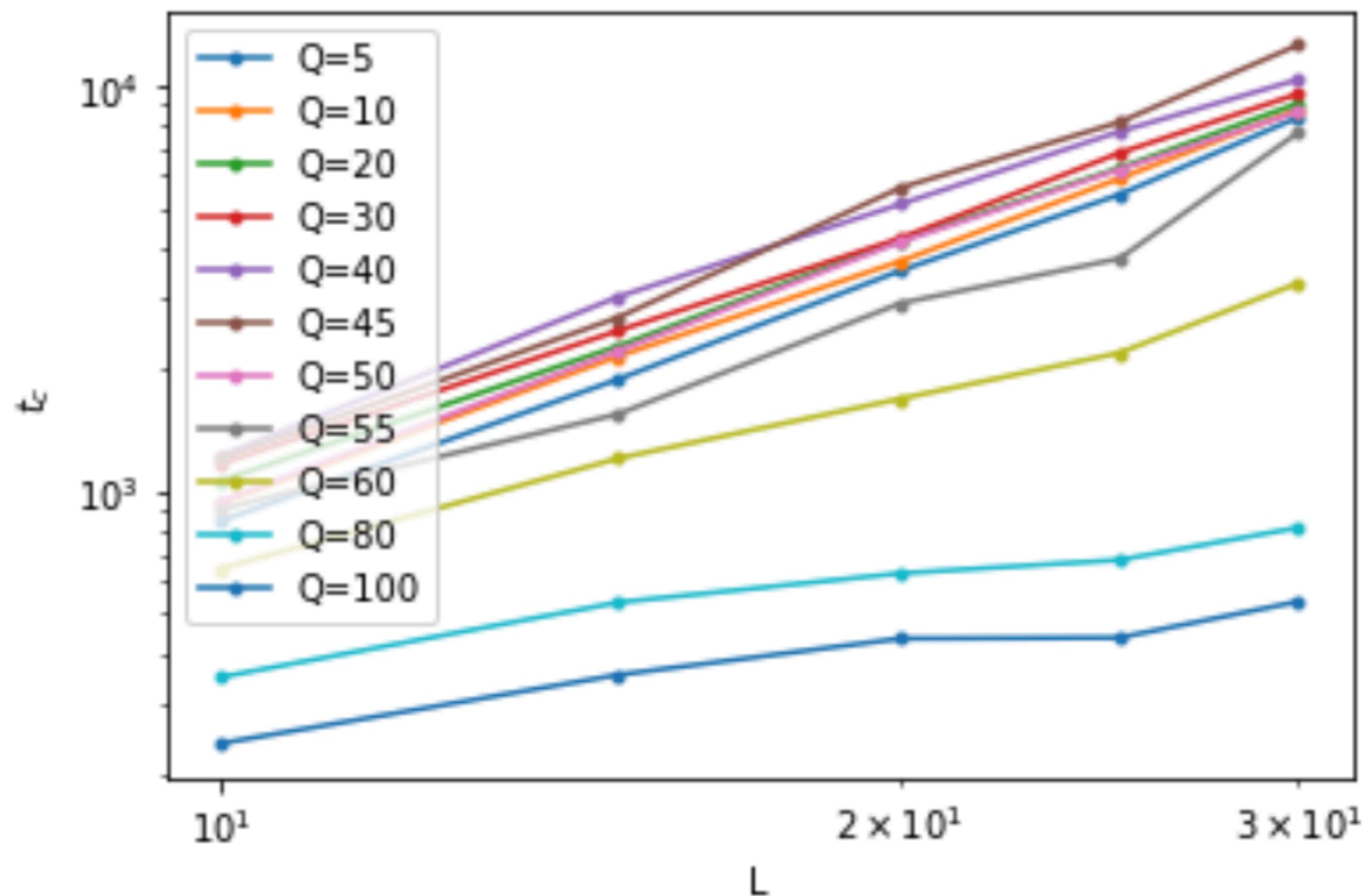
Q = 10: Fit Slope = 2.01968
Q = 30: Fit Slope = 1.91801
Q = 45: Fit Slope = 2.1415



Q = 60: Fit Slope = 1.41161
Q = 80: Fit Slope = 0.72877
Q = 100: Fit Slope = 0.68656

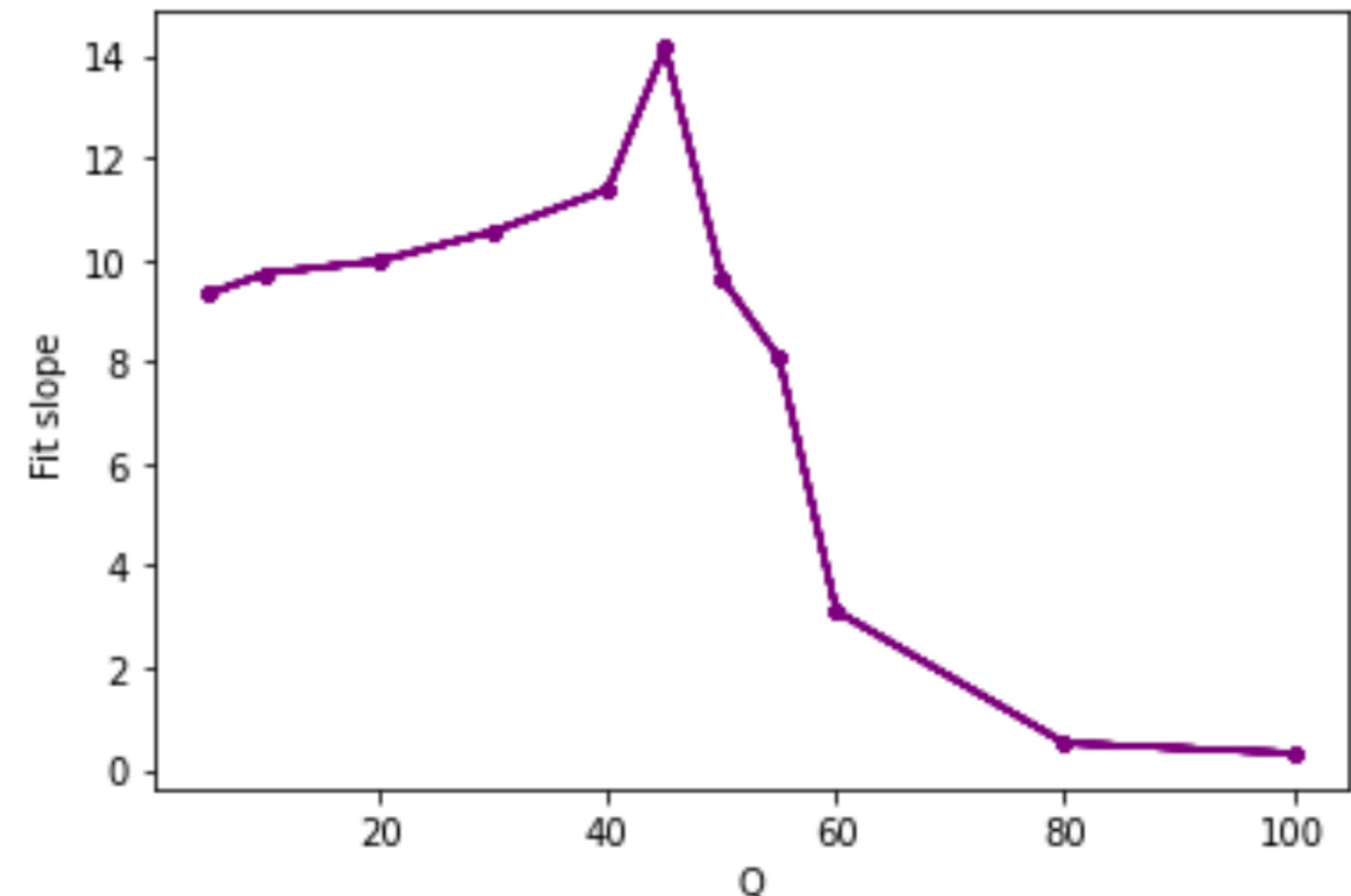
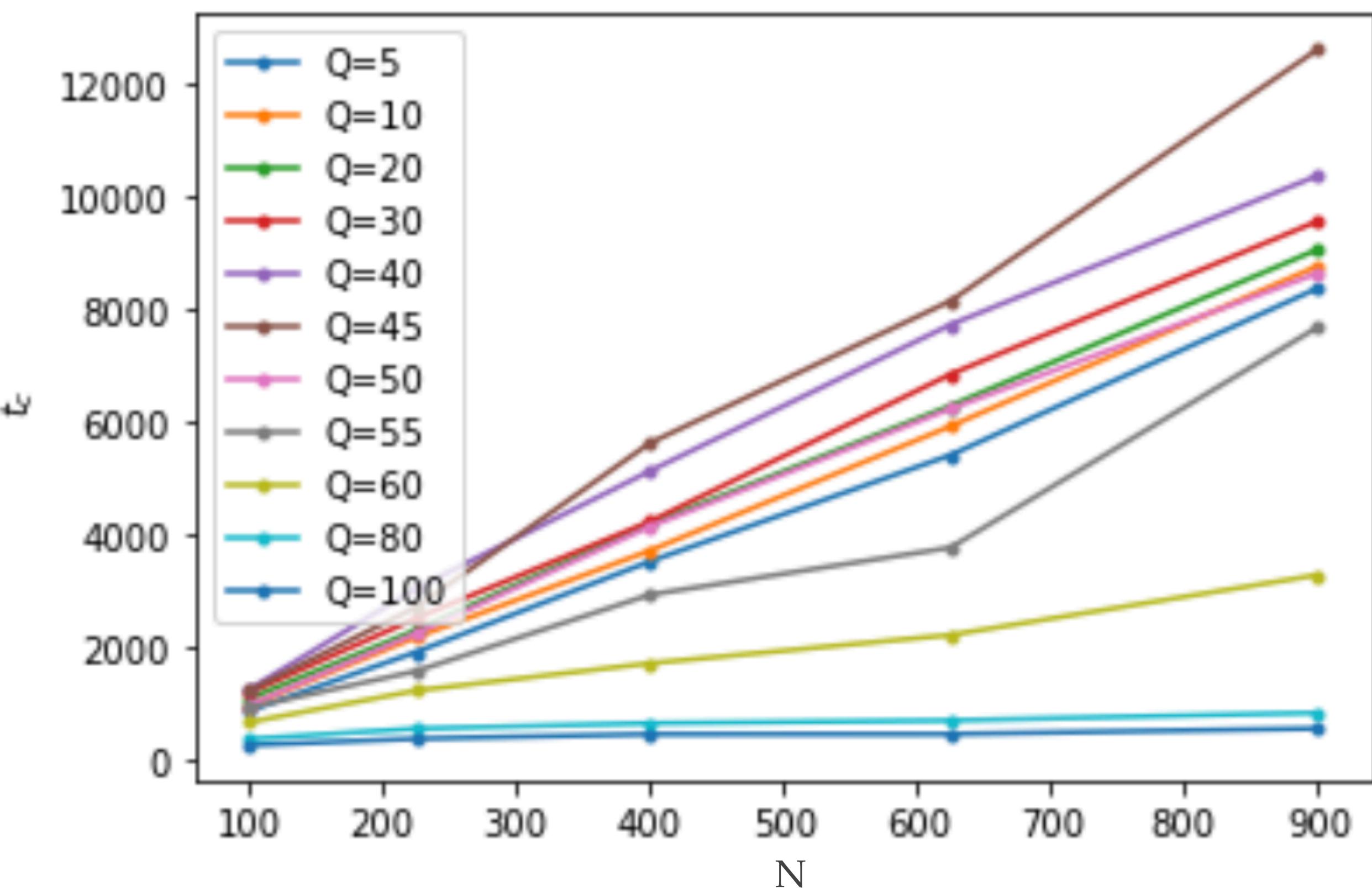
30 realizzazioni, F=10

Tempi di congelamento



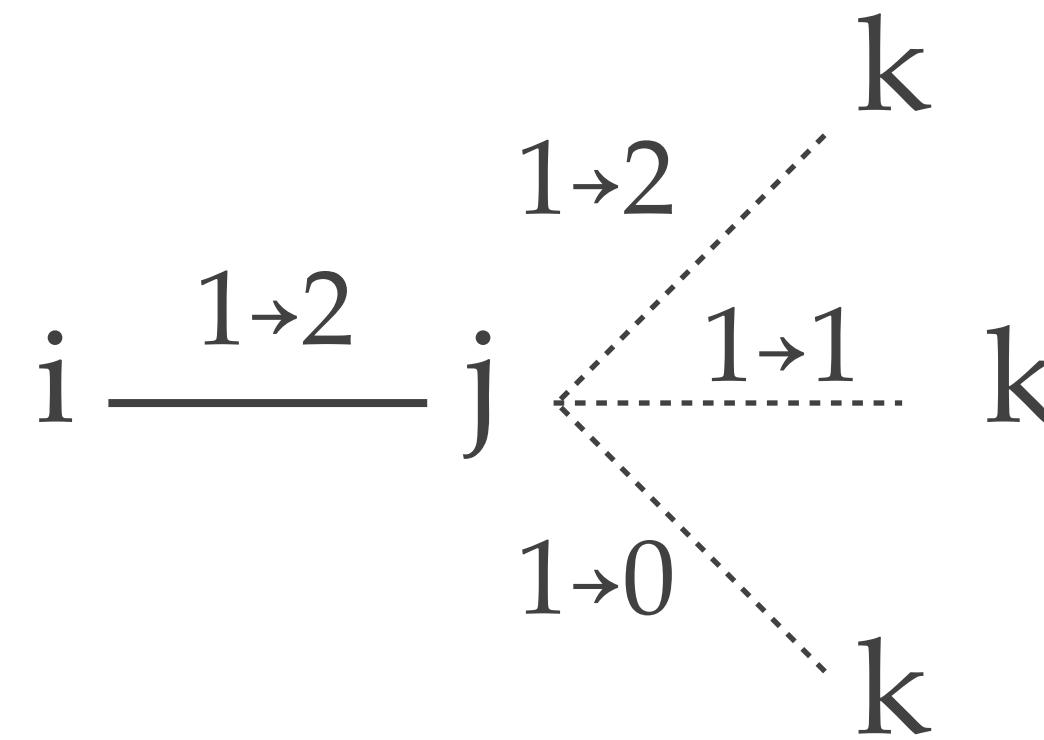
30 realizzazioni, $F=10$

Tempi di congelamento



30 realizzazioni, $F=10$

Studio della dinamica



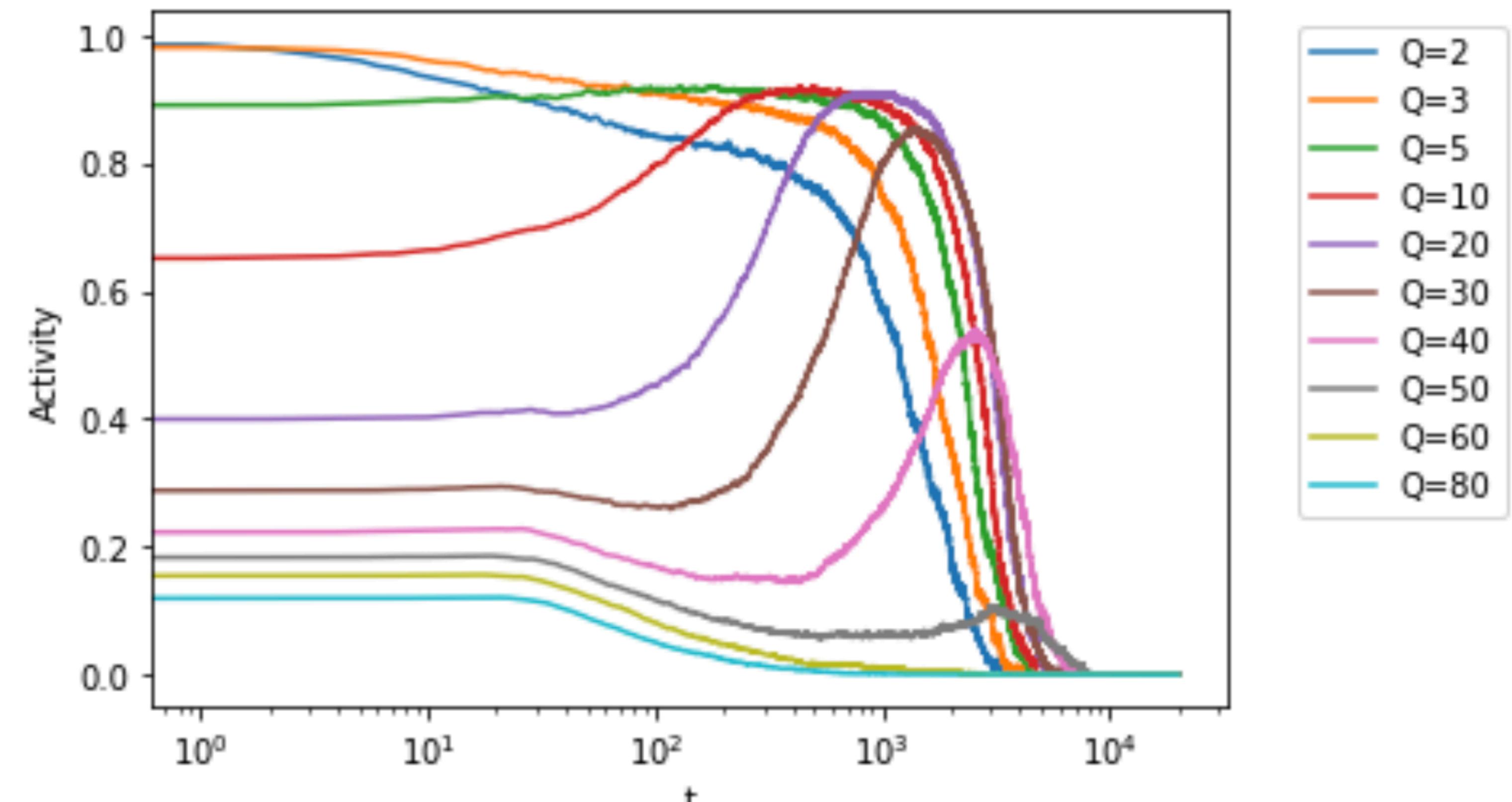
- Interazione diretta

$$\Rightarrow \omega_{ij} \rightarrow \omega_{ij} + \frac{1}{F}$$

- Interazione indiretta

$$\Rightarrow \omega_{jk} \rightarrow \omega_{jk}, \omega_{jk} \pm \frac{1}{F}$$

k primo vicino di j



30 realizzazioni, $L=20$, $F=10$

Master Equation

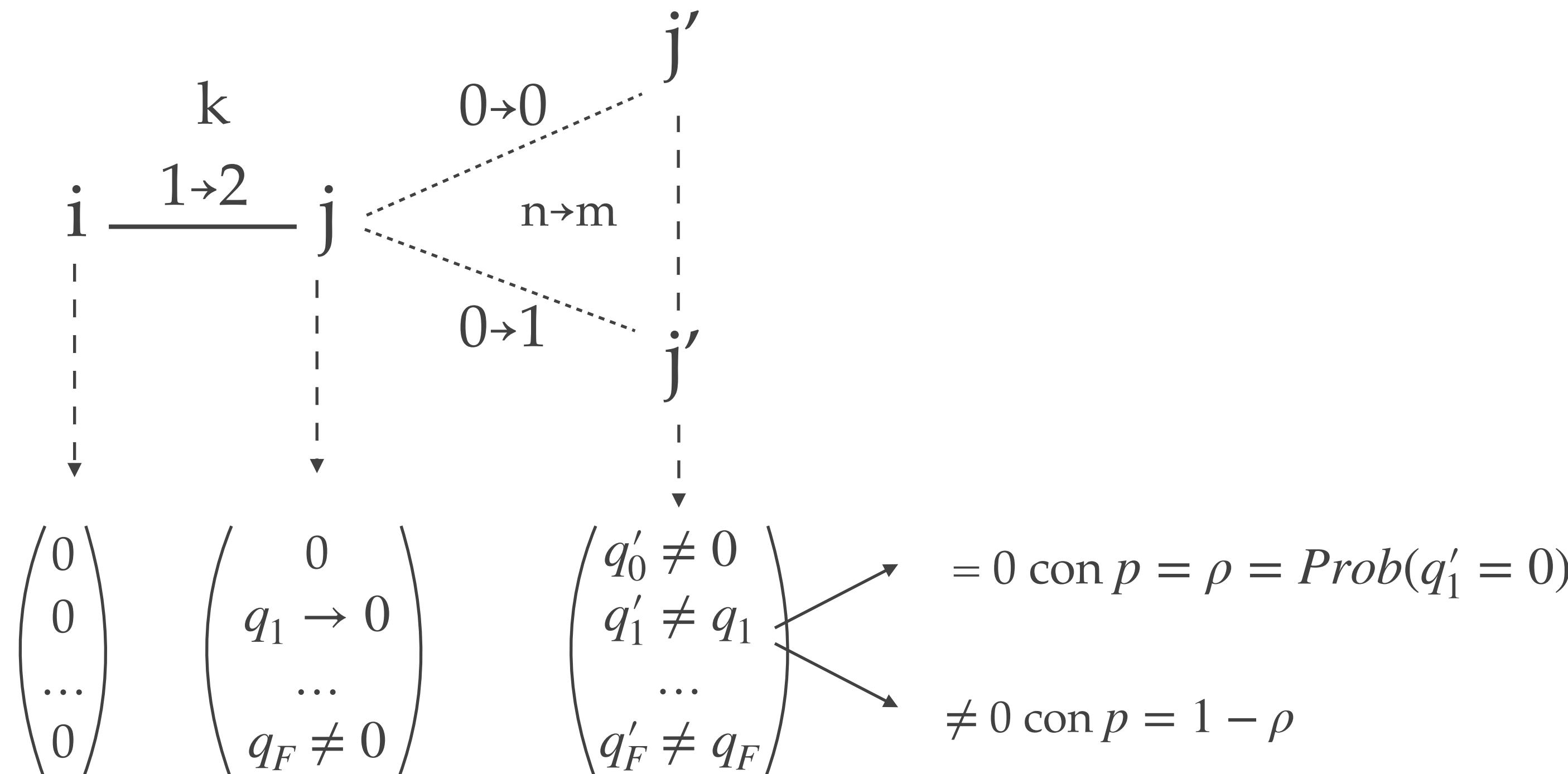
$$\frac{dP_m}{dt} = \sum_{k=1}^{F-1} \frac{k}{F} P_k [\delta_{m,k+1} - \delta_{m,k}] + (g-1) \sum_{n=0}^F (P_n W_{n,m}^{(k)} - P_m W_{m,n}^{(k)})$$

- $\frac{k}{F} P_k$ probabilità di interazione
- Se $k = m - 1$ si crea un collegamento m
- Se $k = m$ viene distrutto
- Interazioni indirette

$$P_m(0) = \binom{F}{m} \rho_0^m (1 - \rho_0)^{F-m}$$

$$\rho_0 = \text{Prob}[q_{i,f} = q_{j,f}] = 1/Q$$

Master Equation



F=3: $W_{n,m}^{(0)} = W_{m,n}^{(0)} = 0$ $W_{n,m}^{(3)} = W_{m,n}^{(3)} = 0$ $W_{n,m}^{(1)} = W_{n,m}^{(2)}$ $\forall m, n$

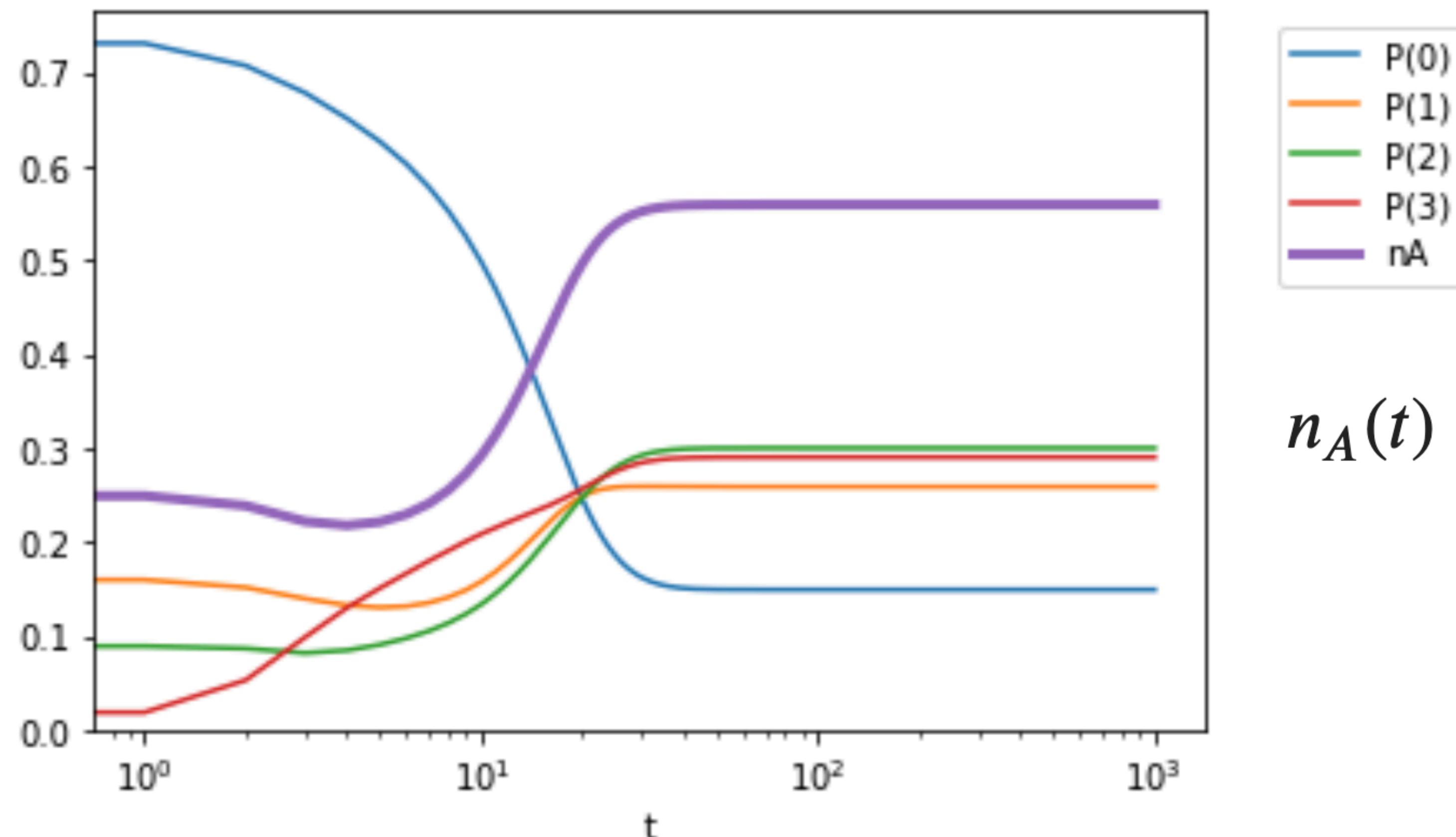
Master Equation

$$\begin{array}{lll} W_{0,0} = 1 - \rho & W_{0,1} = \rho \\ W_{1,0} = \frac{1}{3} & W_{1,1} = \frac{2}{3}(1 - \rho) & W_{1,2} = \frac{2}{3}\rho \\ W_{2,1} = \frac{2}{3} & W_{2,2} = \frac{1}{3}(1 - \rho) & W_{2,3} = \frac{1}{3}\rho \\ W_{3,2} = 0 & W_{3,3} = 1 \end{array}$$

$$\rho = \sum_k k P_k / F$$

$$\frac{dP_m}{dt} = \sum_{k=1}^{F-1} \frac{k}{F} P_k [\delta_{m,k+1} - \delta_{m,k} + (g-1) \sum_{n=0}^F (P_n W_{n,m}^{(k)} - P_m W_{m,n}^{(k)})]$$

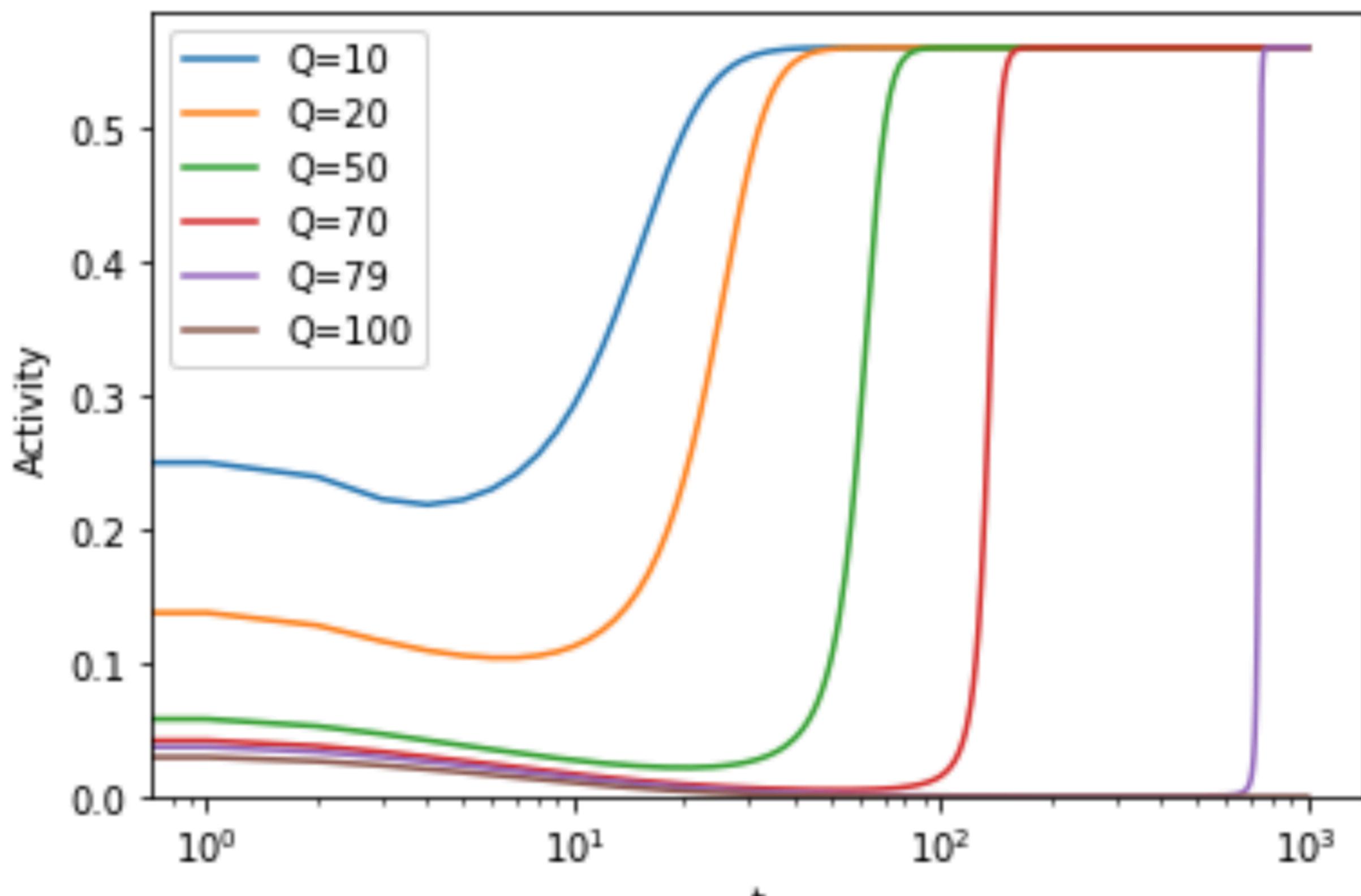
Master Equation



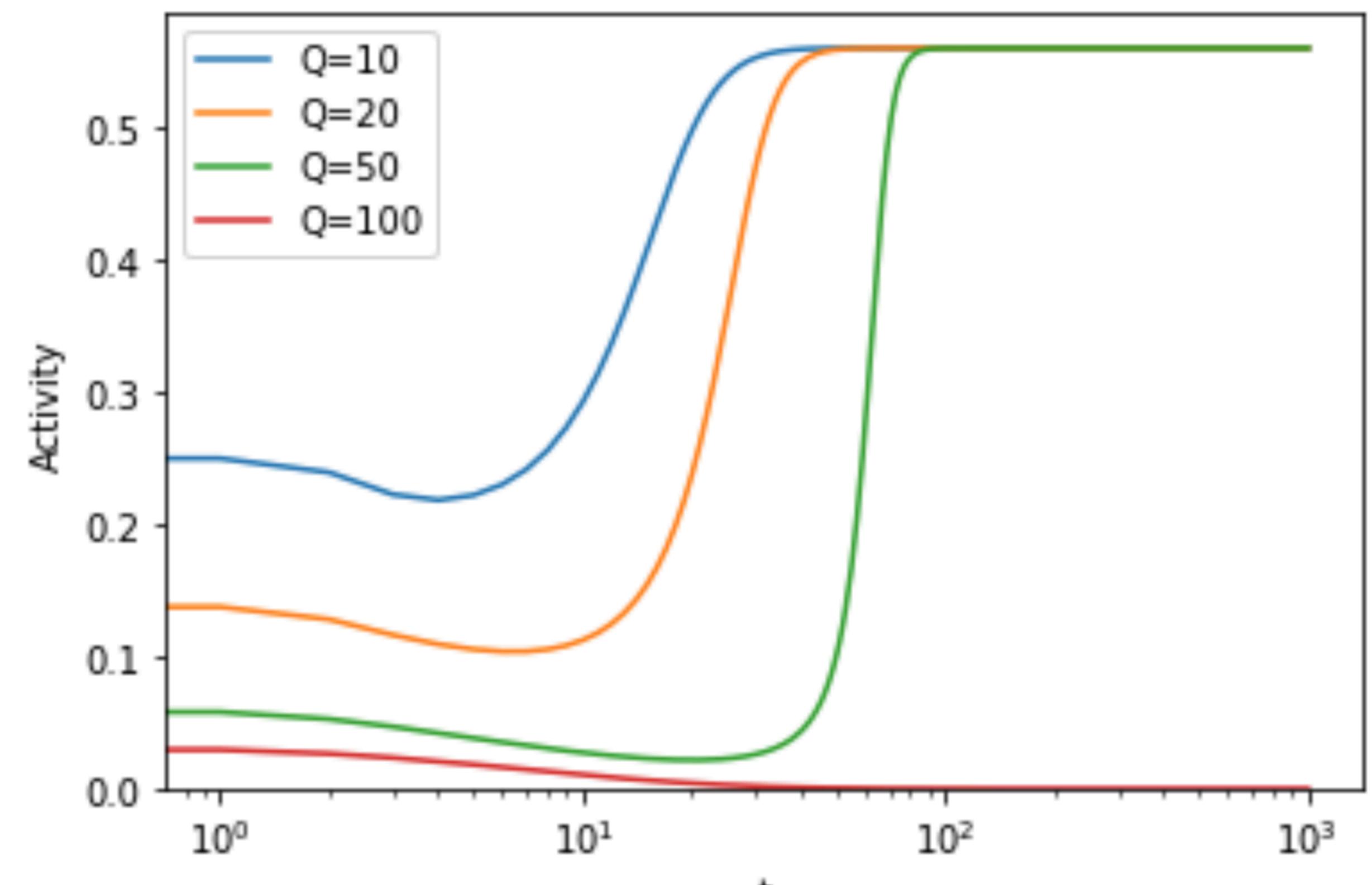
$$n_A(t) = \sum_{k=1}^{F-1} P_k(t)$$

$F=3, Q=10$

Master Equation

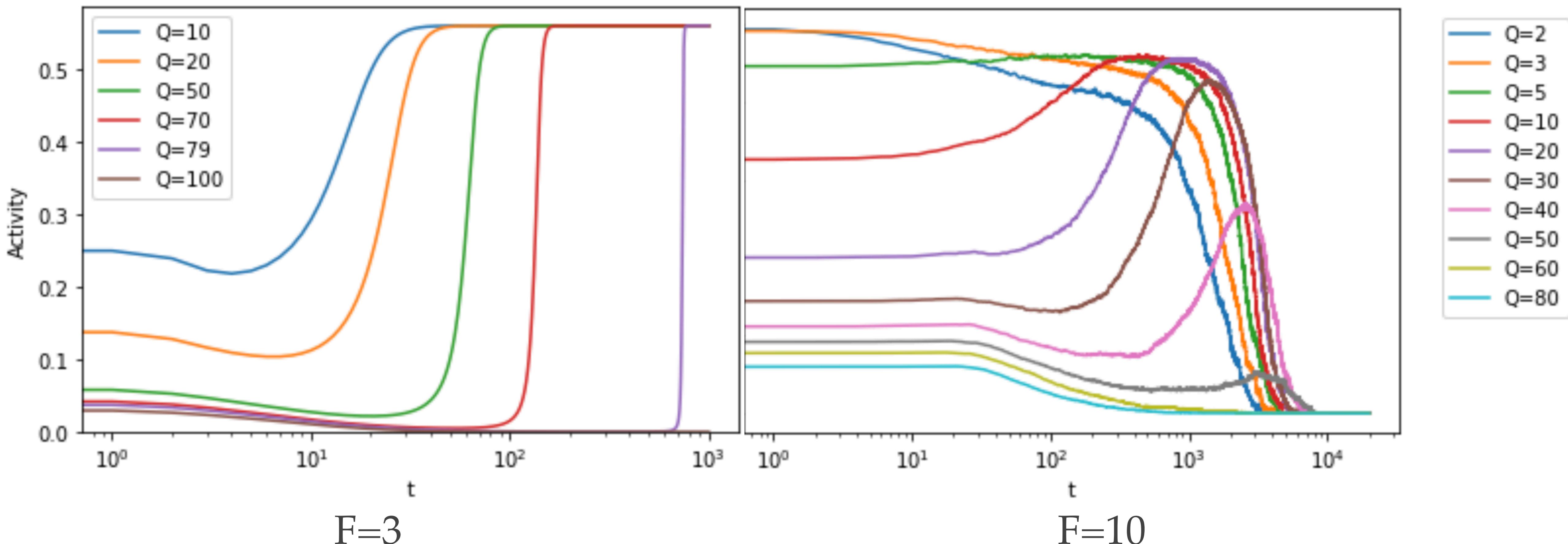


$F=3$

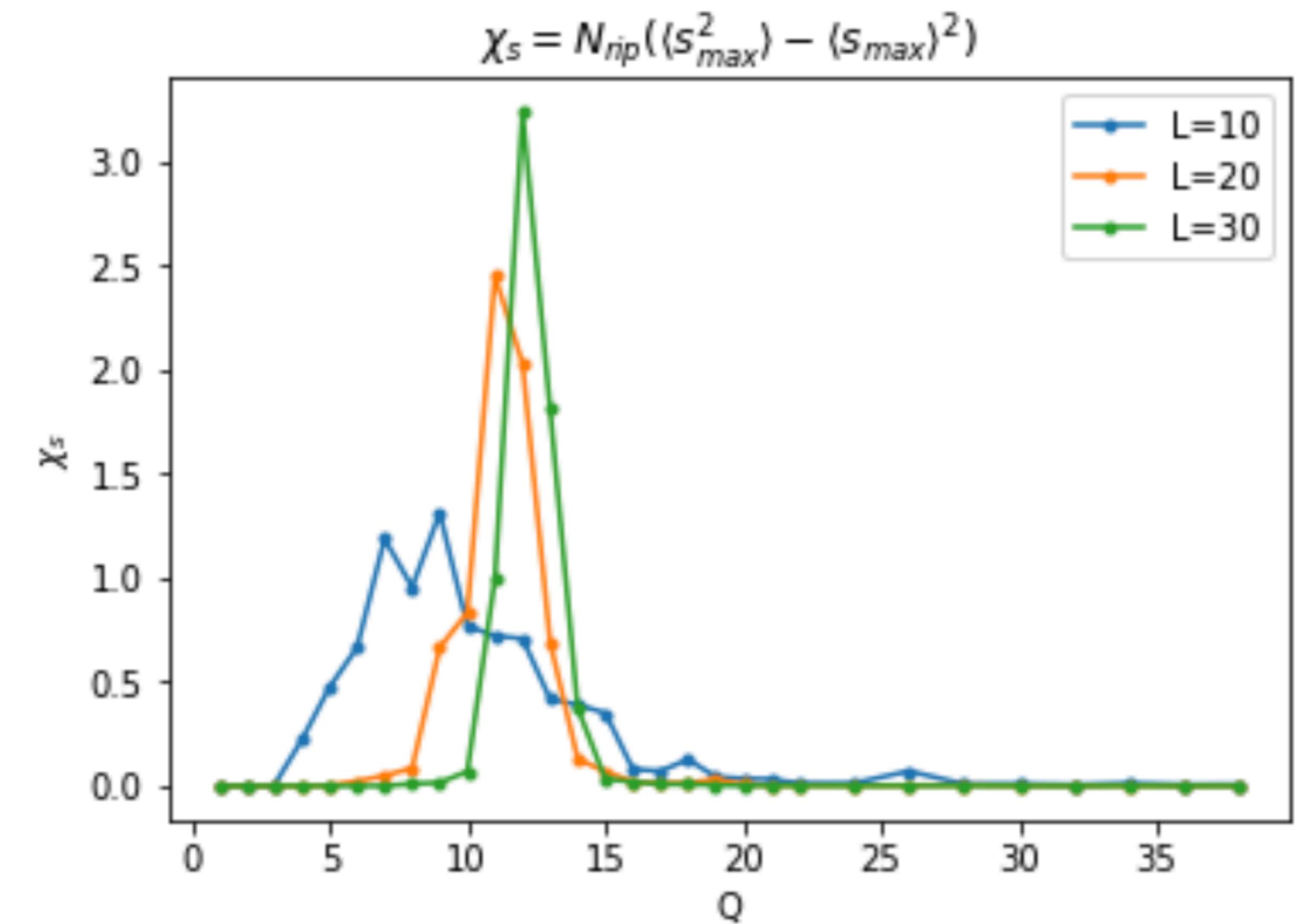
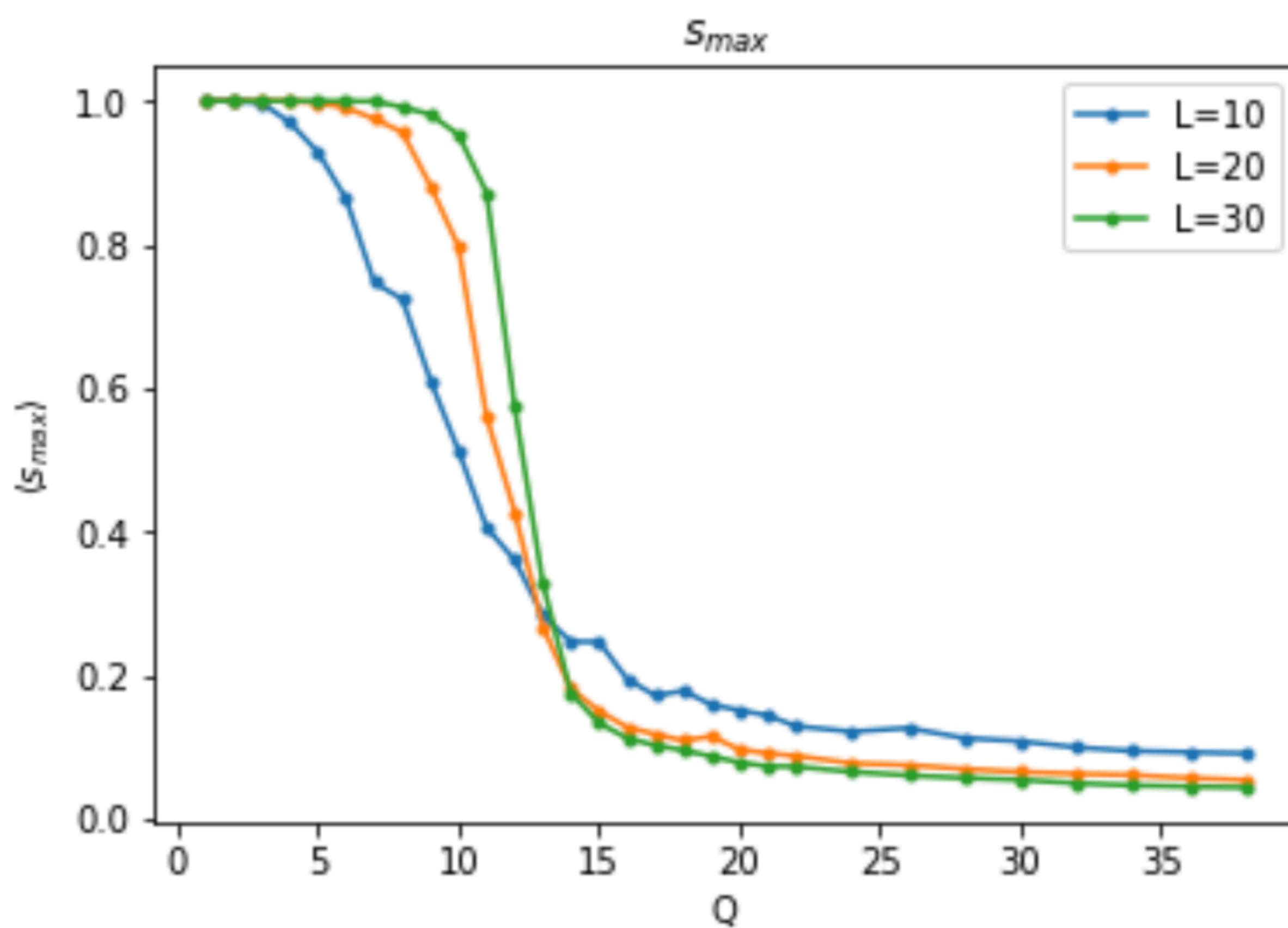


$F=3$

Master Equation

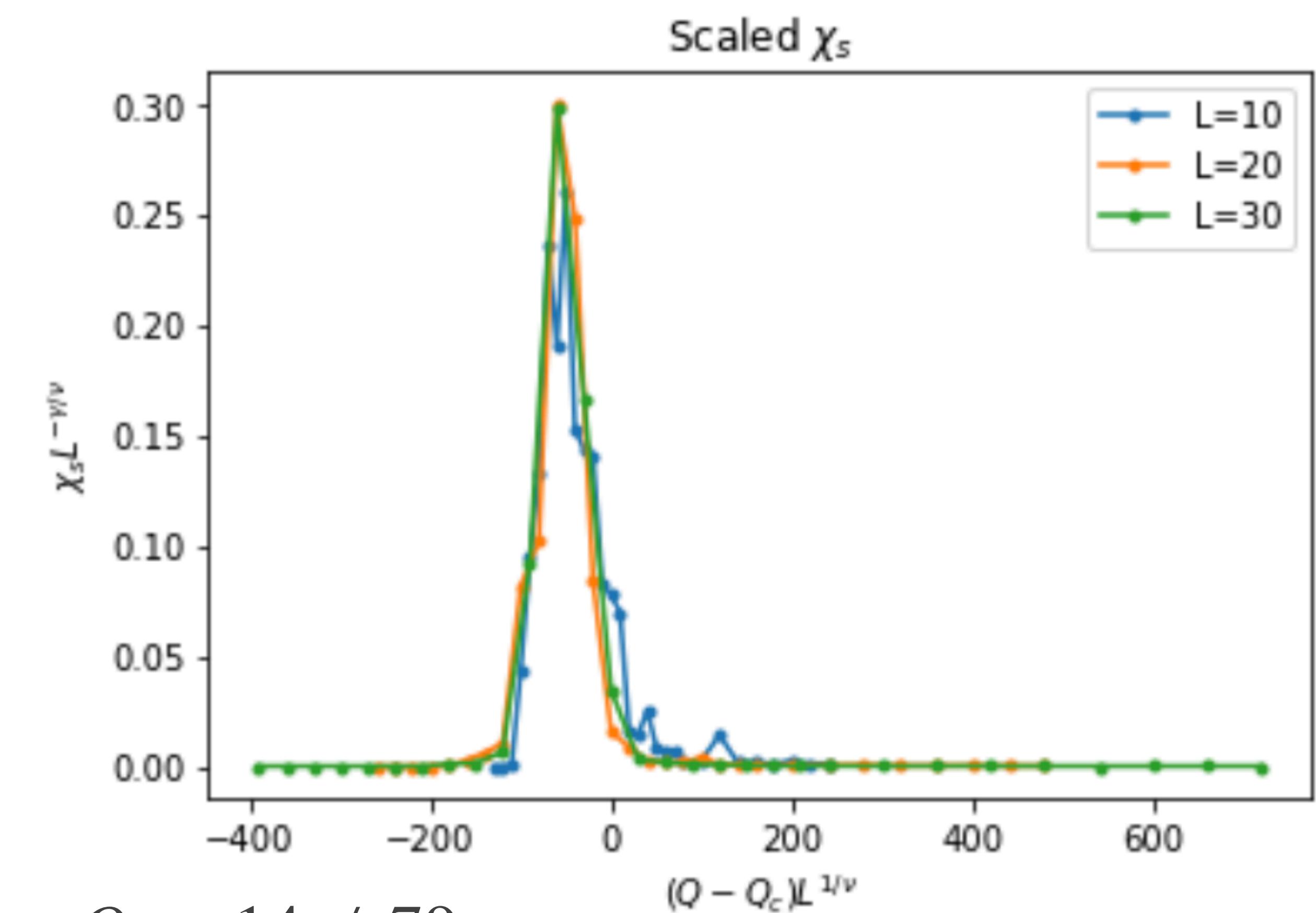
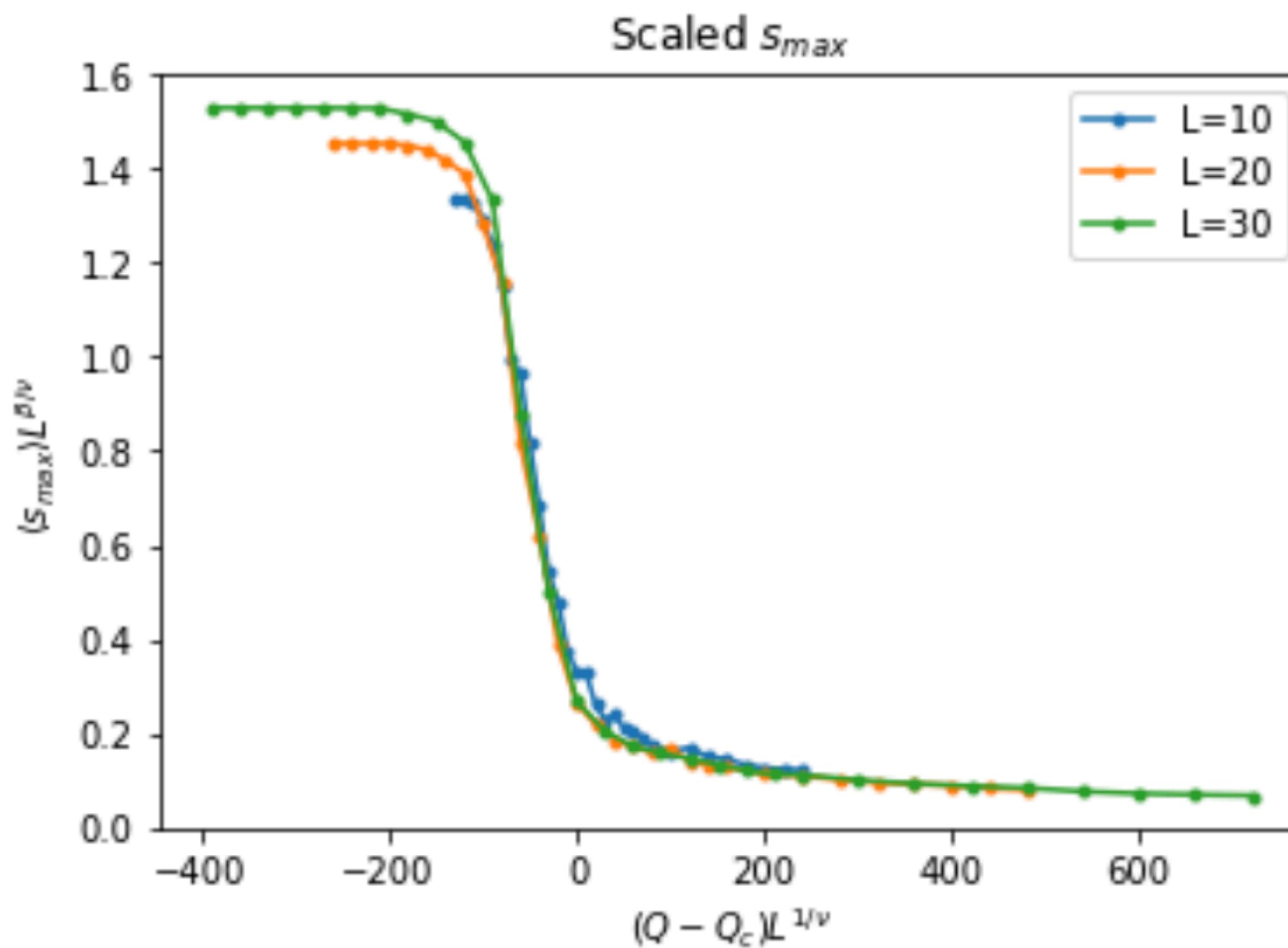


Master Equation



F=3

Master Equation

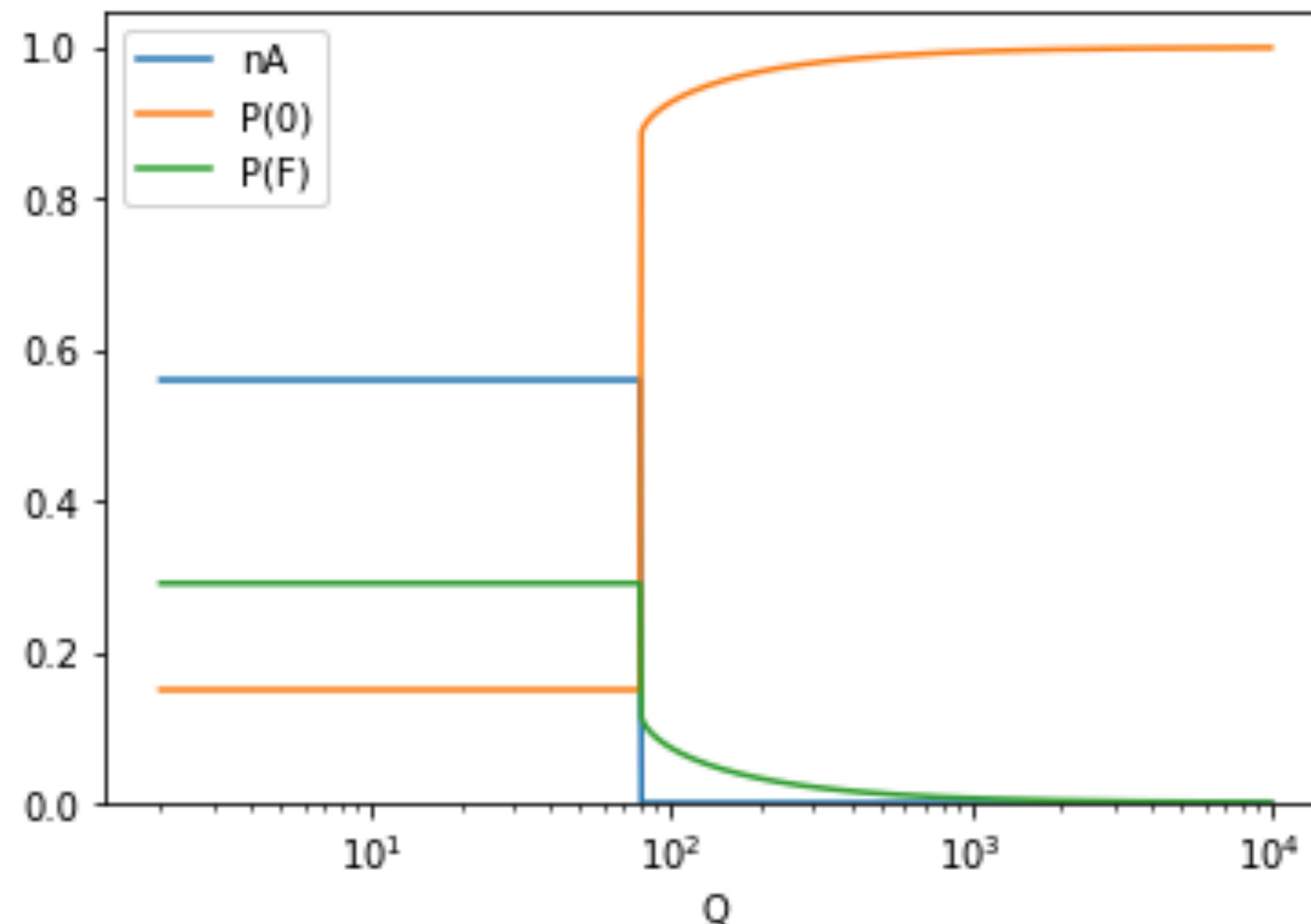


Punto critico: $Q_c \approx 14 \neq 79$

Esponenti critici: $\beta/\nu \approx 1/8$ e $\gamma/\nu \approx 0.7$

Master Equation

Transizione di fase discontinua



Conclusioni

Confronto simulazioni - Master Equation qualitativamente corretto.

Modifiche ed estensioni:

- Implementazione su network complessi
- Caratteristica 2 stringente
- Probabilità diverse per $q_{i,f}$
- Correlazioni tra features

Bibliografia

- [1] Axelrod, R., 1997, J. Conflict Resolut. 41(2), 203.
- [2] C. Castellano, M. Marsili, and A. Vespignani, 2000, Phys. Rev. Lett. 85(16), 3536.
- [3] C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto, “Statistical Physics of Social Dynamics”, 2009, Rev. Mod. Phys. 81, 591.

Relazione della presentazione, completa di spiegazioni e codici, raggiungibile al sito:
https://edoarder.github.io/Sistemi_Complessi/

Grazie per l'attenzione