

Stima dell'accelerazione di gravità

Edoardo Loiero

6 Giugno 2022

1 Introduzione

Scopo di questo esperimento è misurare l'accelerazione di gravità g usando le oscillazioni di una molla su un supporto verticale con attaccati dei pesetti.

Materiali a disposizione

- pesetti di varie dimensioni, vedi figura sotto
- cronometro digitale (risoluzione 0.01 s)
- metro a nastro (risoluzione 1 mm)
- molla
- graffetta
- supporto per i pesetti da collegare alla molla
- bilancia di precisione (risoluzione 0.001 g)
- morsa da banco
- supporto verticale (vedere Figura 3)

Per l'analisi dati è stato usato un programma in Python sul calcolatore.



Figura 1: parte del materiale usato per l'esperimento

2 Cenni teorici

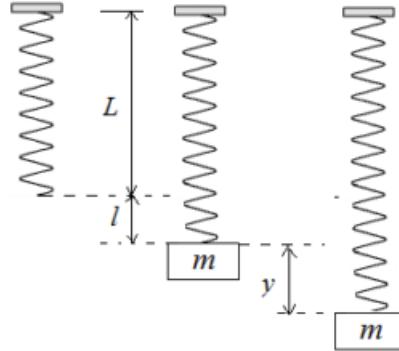


Figura 2: Schema dell'apparato sperimentale

Si suppone che gli allungamenti della molla durante tutto l'esperimento (intorno dai 6-7 cm) non causino deformazioni plastiche. In questo regime, la forza di richiamo della molla è direttamente proporzionale allo spostamento della massa m rispetto alla posizione di equilibrio, nella Figura 2 indicato dalla posizione alla lunghezza L .

Se la molla è massiva ma di densità uniforme, il problema si può riportare a un oscillatore armonico standard usando al posto della massa la massa effettiva data da

$$m_e = m + \frac{m_m}{3}$$

con m_m la massa della molla.

Facendo oscillare il peso attorno alla posizione di equilibrio, e dato che siamo in regime elastico, il periodo dipende solo dalla massa e dalla costante elastica ed è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_m}{k}}.$$

Possiamo dunque eseguire un fit usando T come variabile dipendente e la massa come variabile indipendente.

Per calcolare g , sfruttiamo il fatto che, per trovarsi in una posizione di equilibrio, le forze agenti sulla massa (i.e. forza peso e forza elastica) devono essere zero, dunque, detta l la posizione della massa e l_0 la posizione di equilibrio, si ha

$$mg = k(l - l_0).$$

Per questo esperimento userò il fatto che il supporto usato per tenere i pesetti ha una massa tutt'altro che trascurabile. Detta m_s la sua massa, si ha che

$$m_s g = k(l_s - l_0)$$

mentre se chiamo m_i la massa di un qualsiasi pesetto, la relazione di equilibrio diventa

$$(m_i + m_s)g = k(l_i - l_0)$$

con l_i la distanza a cui si trova il pesetto rispetto all'origine. Quindi sottraendo le ultime due equazioni ottengo che

$$m_i g = k(l_i - l_s)$$

quindi misuro la differenza tra l'allungamento dovuto alle masse del pesetto e del supporto e l'allungamento dovuto al solo supporto. Dividendo per k ottengo la relazione lineare

$$l_i - l_s = \Delta l_i = \frac{g}{k} m_i$$

Quindi con un fit lineare che ha Δl_i sulle ordinate e m_i sulle ascisse posso trovare $\frac{g}{k}$.

3 Raccolta dati

Comincio misurando la massa dei pesetti, del supporto e della molla. Ottengo la massa del supporto:

$$m_s = (7.808 \pm 0.001)g$$

la massa della molla:

$$m_m = (6.900 \pm 0.001)g$$

E in tabella sono riportate le masse dei pesetti:

Peso	massa [$\pm 0.001g$]
1	10.014
2	10.009
3	20.027
4	50.045

Tabella 1: Tabella con le misure delle masse

Dopo di che, monto l'apparato come in Figura 3. La molla viene posizionata con un estremo sul supporto verticale, mentre sull'altro verrà attaccato il supporto per i pesetti. bisogna assicurarsi che l'apparato sia di fatto verticale, e consiglio di usare una livella, anche una del telefono, in modo da posizionare l'apparato nel modo più congruo possibile. La morsa viene usata per stabilizzare il supporto e per tenere fermo il metro a nastro, il quale viene srotolato partendo dall'estremità superiore del supporto. Dato che si misurano solo differenze di lunghezza, non occorre essere precisi con la posizione verticale dell'origine.

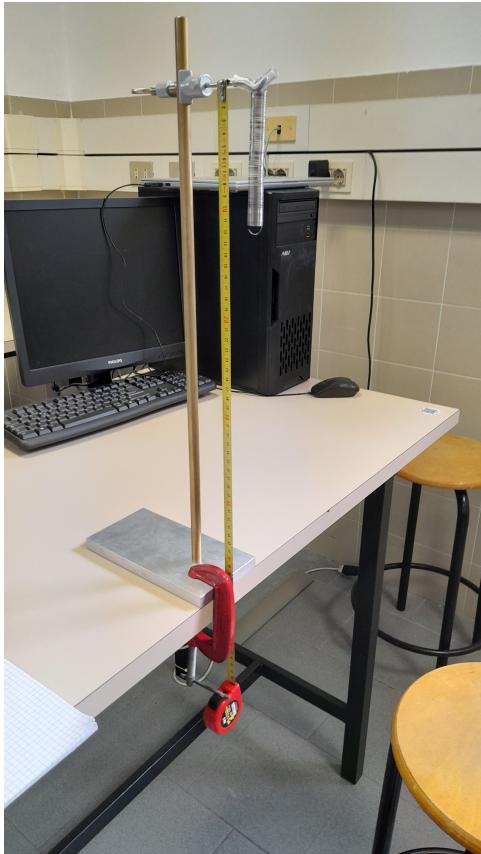


Figura 3: L'apparato sperimentale

Si attacca il supporto per i pesetti alla molla e si segna con il metro la distanza verticale dall'origine di quest'ultimo.

Si mettono dunque i pesetti e anche in questo caso si misura la distanza dall'origine. La lunghezza l_s della molla con il solo supporto e quelle con i pesetti sono riportate nella seguente tabella:

Misura	lunghezza [$\pm 0.1cm$]
l_s	19.0
l_1	22.5
l_2	22.4
l_3	25.8
l_4	36.1

Tabella 2: Misure delle lunghezze

Notare che si useranno differenze di lunghezze nell'analisi dati, quindi bisognerà aggiungere i quadratura le incertezze per usare Δl

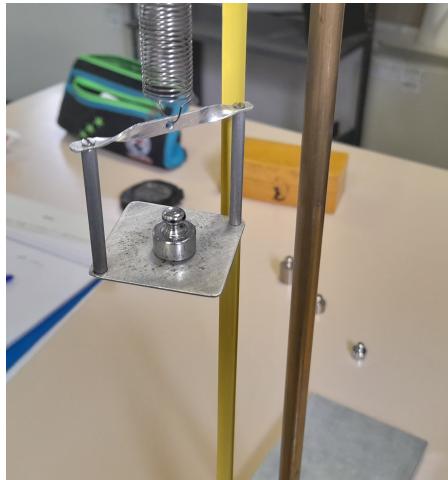


Figura 4: Misurazione della distanza di equilibrio con uno dei pesetti

Si procede quindi alla misurazione dei periodi di oscillazione. Dato che la misurazione del periodo con un cronometro è soggetto a fluttuazioni statistiche per via del tempo di reazione umano, bisogna adottare alcuni accorgimenti.

Innanzitutto, si solleva leggermente il supporto con il pesetto e si lascia oscillare, ho deciso di prendere il tempo necessario a dieci oscillazioni complete, così da avere un'incertezza relativa minore. Tuttavia, l'intenzione era quella di prendere dieci oscillazioni, anche se in tempo di analisi dati mi sono accorto che ne ho prese nove, e ho lavorato di conseguenza.

Poi, al posto di prendere come riferimento per il punto di partenza il punto di inversione del moto, ho deciso di usare la graffetta come in Figura 5 per segnare la posizione di equilibrio.

Infine, con tenendo inizialmente una penna in verticale e facendoci scorrere accanto il supporto in modo da fare meno attrito possibile durante le prime oscillazioni, sono riuscito a ridurre leggermente i moti oscillatori che non fossero quello di traslazione verticale.



Figura 5: Misurazione del tempo di oscillazione usando la graffetta (in centro).

Per determinare la miglior stima di un periodo, quindi, ho proceduto a prendere il decuplo del periodo di un pesetto per sette volte, e dopo di che ho preso come miglior stima la media di queste sette misure, e come incertezza la varianza della media campione. Le misure ottenute sono riportate nella tabella seguente:

Misura	$T[\text{s}]$	$\sigma_T[\text{s}]$
1	4.79	0.008
2	4.7857	0.02
3	5.845	0.005
4	8.22	0.01

Tabella 3: Misure di nove volte i periodi

4 Analisi dati

Il programma e i file con i dati sono disponibili alla [seguente cartella](#)¹

¹<https://github.com/Edoardo1000/Lab/tree/main/esame>

Per non doversi preoccupare che le incertezze sulle masse propagate fossero trascurabili rispetto a quelle sulle ordinate è stato usato il metodo ODR di Scipy.

Per la misura di $\frac{g}{k}$ usando le lunghezze è stato usato usato un modello lineare:

$$\Delta l = am + b$$

con a e b parametri liberi. Dal fit si ottengono i risultati

$$a = \frac{g}{k} = (3.411 \pm 0.030) \text{ m/kg}$$

e

$$b = (0.0001 \pm 0.008) \text{ m}$$

Si nota che b è compatibile con zero, come dovremmo aspettarci. Il chi quadro è

$$\chi^2 = 0.796$$

Sotto riporto il grafico del fit.

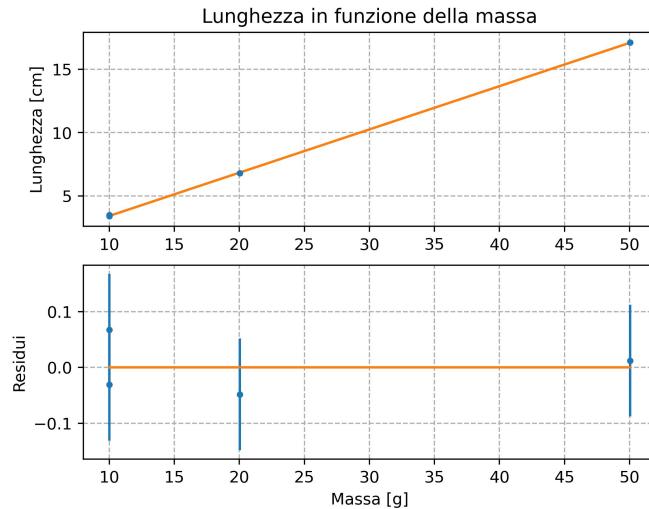


Figura 6: Fit delle lunghezze.

Per il periodo si usa il modello:

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{x}{k}}$$

Mettendo quindi come variabile indipendente la somma della massa della molla diviso 3, del supporto e dei pesetti. Anche qui si esegue un fit con ODR lasciando k come parametro libero, si ottiene il seguente valore di k :

$$k = (2.8245 \pm 0.036) \text{ N/m}$$

Il chi quadro è:

$$\chi^2 = 16.7$$

Di nuovo, riporto nella figura seguente il grafico del fit.

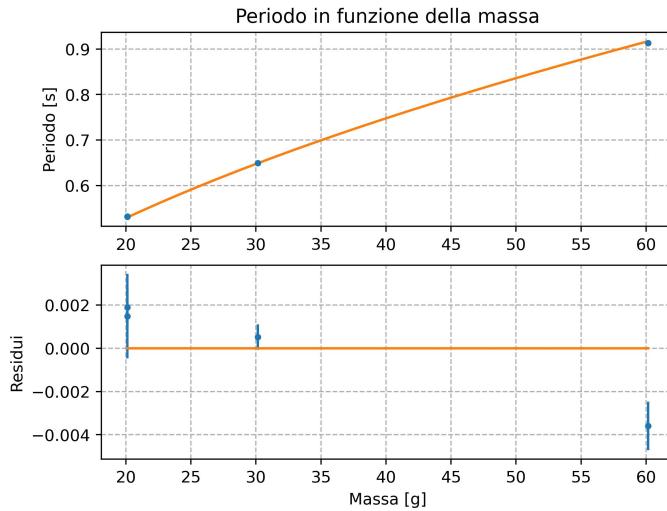


Figura 7: Fit dei periodi

Moltiplicando a e k , ottengo il valore di g . Per la sua incertezza, ovviamente, uso il fatto che gli errori relativi si sommano in quadratura:

$$g = ak = 9.63 \pm 0.15 \text{ ms}^{-2}$$

5 Conclusioni

Il valore ottenuto dista circa 1.2σ dal valore classico di 9.81 m s^{-2} , quindi un buon risultato. Il chi quadro del fit delle lunghezze non ci dà motivo di sospettare di problemi relativi a tale parte dell'esperimento, mentre quello relativo al fit sui periodi è troppo elevato per il mio numero di gradi di libertà, e tale parte dell'esperimento risulta anche la più delicata. Innanzitutto si nota che i residui tendono a diminuire man mano che la massa aumenta, anche se con così pochi campioni non è possibile dire a priori se l'andamento non sia soltanto frutto del caso, e occorre quindi ripetere l'esperimento con un numero di pesi maggiore. In secondo luogo, il fatto che due pesetti abbiano massa pressoché uguale potrebbe dare problemi a livello del fit, e potrebbe essere stato quindi più utile ad esempio considerare una singola misura facendo ad esempio la media dei due pesi e dei due periodi, o eliminando un pesetto.

Secondo, ho notato che, provando a far oscillare solo il supporto e senza nessun pesetto, anche con un moto inizialmente di oscillazioni solo verticali si ha

che col tempo i moti orizzontali aumentano sempre di più, fino a non avere più un moto approssimativamente verticale, ma delle lemniscate. Questo potrebbe essere dovuto a effetti di risonanza parametrica, e quindi tale effetto potrebbe anche riscontrarsi usando i pesetti più piccoli. Detto questo in generale il problema è il fatto che data la sensibilità dell'apparato a piccoli impulsi, è praticamente impossibile eliminare del tutto i moti orizzontali, e questo potrebbe modificare i periodi.

Infine, il fatto che abbia avuto difficoltà a contare dieci oscillazioni e ne siano venute solo nove suggerisce che sarebbe opportuno ripetere l'esperimento con diverse persone, in modo da identificare eventuali bias dovuti alla percezione.